



**T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ULAM TİPİ KARARLILIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

REBİHA SARIDUGAN

ŞUBAT-2022

REBİHA SARIDUGAN	MATEMATİK ANABİLİM DALI	ŞUBAT
------------------	-------------------------	-------

DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ULAM TİPİ KARARLILIK

REBİHA SARIDUGAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Doç. Dr. Süleyman ÖĞREKÇİ

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ŞUBAT-2022

Rebiha Sarıdugan tarafından hazırlanan ‘‘Diferansiyel Denklemlerde Ulam Tipi Kararlılık’’ adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Süleyman ÖĞREKÇİ

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Başkan: Prof. Dr. Adil MISIR

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Üye: Doç. Dr. Öznur KULAK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Tez Savunma Tarihi: 07/02/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Kızım Zeynep Elif ve oğlum Selim Asaf'a ithafen

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Rebiha SARIDUGAN

(07/02/2022)

DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ULAM TİPİ KARARLILIK
(Yüksek Lisans Tezi)

Rebiha SARIDUGAN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2022

ÖZET

Bu tez çalışmasında diferansiyel denklemlerin Ulam tipi kararlılığı üzerinde çalışıldı. Burada kararlılığın nasıl başladığını, nasıl evrildiğini ve geliştirilen yöntemleri inceledik. Literatürü tarayıp bunun bir derlemesini yaptık. Öncelikle Ulam'ın hayatı ve ortaya koyduğu kararlılık problemi hakkında bilgi verilmiştir. Sonrasında bu kararlılık problemine Hyers'in ve Rassias'ın verdiği cevaplar incelenmiştir. Daha sonra en basit diferansiyel denklemlerin kararlılığından gecikmeli diferansiyel denklemlerin kararlılığına kadar yapılan çalışmaların bazıları verilmiştir.

Sayfa Adedi : 77
Anahtar Kelimeler : Diferansiyel Denklemler, Kararlılık, Hyers-Ulam Kararlılığı,
Hyers-Ulam-Rassias Kararlılığı
Danışman : Doç. Dr. Süleyman ÖĞREKÇİ

ULAM TYPE STABILITY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

(M. Sc. Thesis)

Rebiha SARIDUGAN

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2022

ABSTRACT

In this thesis study, Ulam type stability of differential equations was studied. Here, we examined how stability started, how it evolved and the methods developed. We searched the literature and made a compilation of it. First of all, information was given about Ulam's life and the stability problem he presented. Afterwards, the answers of Hyers and Rassias to this stability problem are examined. Then, some of the studies from the stability of the simplest differential equations to the stability of the delayed differential equations are given.

Page Number : 77

Key Words : Differential Equations, Stability, Hyers-Ulam Stability, Hyers-Ulam-Rassias Stability

Supervisor : Assoc. Prof. Süleyman ÖĞREKÇİ

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca beni destekleyen, yönlendiren ve tez yazımı sırasında bana zaman ayırarak yardımını esirgemeyen tez danışmanım Doç. Dr. Süleyman Öğrekçi'ye saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Stanisław Marcin Ulam Kimdir?.....	1
1.2. Ulam'ın Ortaya Attığı Problemler.....	3
2. KARARLILIK SONUÇLARI.....	6
2.1. İlk Sonuçlar.....	6
2.2. Diferansiyel Denklemlerde Ulam Anlamında Kararlılık.....	16
2.3. Sabit Nokta Yaklaşımları.....	24
2.4. Alternatif Bir Yaklaşım.....	63
3. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	67
KAYNAKLAR.....	73
ÖZGEÇMİŞ.....	77

1. GİRİŞ

1.1. Stanisław Marcin Ulam Kimdir?

Stanisław Marcin Ulam 13 Nisan 1909 tarihinde Avusturya-Macaristan'a bağlı Lviv'de (şimdiki Ukrayna) doğmuştur. Matematik eğitimini Lviv Politeknik Enstitüsü'nde almıştır (İnternet 1, t.y.). Ulam, 1929'da ilk bilimsel çalışmasını yazdı ve 1933 yılında doktorasını aldı (Kacper, J., 2018). Ulam, kurucuları Hugo Steinhaus ve Stefan Banach olan Lviv Matematik Okulu'nun bir üyesiydi (İnternet 2, t.y.).

1935 yılında Ulam'ın Varşova'da tanıştığı John von Neumann onu birkaç aylığına New Jersey'de bulunan Princeton'daki Yüksek Araştırma Enstitüsü'ne davet etti. Aralık ayında Amerika'ya gitti. 1936'dan 1939'a kadar, yazları Polonya'da ve akademik yıllarını Cambridge'deki Harvard Üniversitesi'nde geçirdi (İnternet 2, t.y.).

1940 yılında Ulam, Wisconsin Üniversitesi'ne yardımcı doçent olarak atandı. 1941'de Françoise Aron ile tanıştı ve evlendi. Ayrıca Amerikan vatandaşlığına başvurdu ve 1943 yılında Amerikan vatandaşı oldu (O'Connor J. J. and Robertson, E. F., 1998).

Ekim 1943'te Hans Bethe'den New Mexico'daki gizli Los Alamos Laboratuvarı'nda Manhattan Projesine katılma daveti aldı (Başkan Franklin Delano Roosevelt'in emriyle başlatılan Manhattan kodlu bir hükümet projesidir). Los Alamos'ta Ulam diğer fizikçiler ve matematikçilerle birlikte atom bombası yapımı üzerinde çalışırlar. Bir patlamada, yüksek sıcaklık ve basınç nedeniyle katı maddeler sıvılara çok benzer şekilde davranır. Bu nükleer patlamayı bozacak asimetrleri tahmin etmek ve en aza indirmek için hidrodinamik hesaplamalara ihtiyaç duyulduğu anlamına gelir ve Ulam bu hidrodinamik hesaplamaları yapmaktan sorumludur. Bu, mükemmel küresel patlamaya ulaşmak için gerekli olan uygun bir patlayıcı lensin tasarımı için çok önemlidir (İnternet 3, t.y.). Burada fizikçi Edward Teller ile birlikte çalışan Ulam, füzyon bombası üzerinde yapılan çalışmalarda karşılaşılan önemli bir problemi sıkıştırmanın patlama için gerekli olduğunu ve bir fisyon bombasından gelen şok dalgalarının ihtiyaç duyulan sıkıştırmayı sağlayabileceğini öne sürerek çözer. Ayrıca dikkatli bir tasarımın mekanik şok dalgalarını, füzyon yakıtının hızlı yanmasını teşvik edecek şekilde odaklayabileceğini önerir. Teller ise termonükleer yakıtı sıkıştırmak

için mekanik şoktan ziyade radyasyon patlamasının kullanılmasını önerir. Teller-Ulam konfigürasyonu olarak bilinen bu iki aşamalı radyasyon patlaması tasarımı, modern termonükleer silahların yaratılmasına yol açar (O'Connor J. J. and Robertson, E. F., 1998).

Temmuz 1945'te bir test patlaması gerçekleştirilir ve başarılı olur. Ağustos ayında Hiroşima ve Nagazaki'ye iki bomba düşer. Olaydan yıllar sonra, Polonyalı bilim adamı itiraf eder: ‘‘Hiroşima’yı öğrendiğimde ve yıkımın fotoğraflarını gördüğümde, ilk başta şaşırdım. Aniden, beynimde tuhaf bir zihinsel sıçrama ortaya çıktı: Bir tahtaya beyaz tebeşirle yazılan rakamlar ve hemen sonrasında gezegenin yüzünden üflenen bir şehir.’’ (Stanisław Ulam, Nisan 2021).

Los Alamos'ta iken Ulam, John von Neumann ile birlikte rastgele sayılara sahip istatistiksel örnekleme yöntemini kullanarak matematiksel problemlere çözüm arayan Monte-Carlo yöntemini inceledi. Monte-Carlo yöntemi şimdi matematiksel bilgisayar yazılımlarında yaygın olarak kullanılmaktadır (O'Connor J. J. and Robertson, E. F., 1998). Elektronik bilgisayar kullanımı sayesinde daha da yaygınlaşan bu yöntem silah tasarımında, matematiksel iktisatta ve işlem araştırmalarında uygulama alanı bulmuştur (Dzimira-Zarzycka, K., 2018).

Ulam aynı zamanda bilgisayarın esnekliğini ve genel yararlılığını geliştiren çalışmalar yaptı. Ulam başta kümeler kuramı, matematiksel mantık, gerçek değişken fonksiyonları, termonükleer etkileşim, topoloji ve Monte Carlo Kuramı olmak üzere birçok alanda uzmandı (Dzimira-Zarzycka, K., 2018). Ayrıca Ulam, bir dizi atom bombası patlamasıyla harekete geçirilmesi planlanan uzay araçlarına odaklanan Orion projesine katıldı. Ulam, Project Rover tarafından takip edilen roketlerin nükleer itiş sorununu ele aldı ve Rover'ın nükleer termal roketine bir alternatif olarak itiş için küçük nükleer patlamalardan yararlanmayı önerdi. Fermi ve John Pasta ile Ulam, doğrusal olmayan bilim alanına ilham kaynağı olan Fermi-Pasta-Ulam problemini inceledi. Ayrıca yıldız kümeleri ve çift ve üçlü yıldızların oluşumları sırasında evrimin astronomik bilgisayar simülasyonlarını yarattı (Kacper, J., 2018).

Ulam Los Alamos'taki çalışmalarını tamamladıktan sonra Colorado Üniversitesi'nde Matematik Bölümü dekanı oldu. Daha sonra, 1968-1975 yılları arasında Colorado Tıp

Okulu'nda biyomatematik profesörü oldu. 13 Mayıs 1984'te kalp krizi nedeniyle Santa Fe'de öldü (Kacper, J., 2018).

İsmi taşıyan bazı teoremler şunlardır: Borsuk-Ulam Teoremi, Mazur-Ulam Teoremi, Hyers-Ulam-Rassias Kararlılığı, Şanslı Numara, Ulam Helezonu, Ulam Varsayımı (Sayılar Teorisi), Ulam'ın Konjonktörü, Ulam'ın Oyunu, Ulam Numaraları (İnternet 2, t.y.).

Başlıca kitapları şunlardır: 1- A Collection of Mathematical Problems (1960; Bir Matematik Problemleri Derlemesi), 2- Stanisław Ulam; Sets, Numbers and Universes (1974; Stanisław Ulam; Kümeler, Sayılar ve Evrenler), 3- Adventures of A Mathematician (1976; Bir Matematikçinin Serüvenleri) (Dzimira-Zarzycka, K., 2018).

1.2. Ulam'ın Ortaya Attığı Problemler

Stanisław Ulam, Wisconsin Üniversitesi Matematik Kulübüne 1940 yılında verdiği meşhur konuşmasında birçok çözülmemiş problem sunmuştur. Bu problemlerden biri fonksiyonel denklemlerin kararlılık teorisinin başlangıç noktası olmuştur (Ulam, 1940).

Matematik alanında kararlılık kavramı daha genel bir bakış açısıyla şu şekilde ifade edilmiştir: Bir teoremin hipotezlerinin “biraz” değiştirilmesiyle teoremin hipotezinin hala doğru olduğu ya da “yaklaşık” doğru olduğu iddia edilebileceği ne zaman doğrudur (Ulam, 1940)?

Kararlılık kavramı, doğal olarak mekanik problemlerde ortaya çıktı. Matematiksel olarak bu durum bir problemin çözümünün başlangıç parametrelerine bağlı olarak sürekliliği ile alakalıdır. Bu süreklilik çeşitli şekillerde tanımlanabilir. Genellikle çözümlerin sınırlılığını keyfi uzun zaman için kanıtlamak yeterlidir. Örneğin, ilk noktadan itibaren herhangi bir zamanda sistemi temsil eden noktalar arasındaki mesafenin sınırlılığı vb. kararlılık problemleri fiziğin diğer dallarında ve hatta soyut matematikte bile ortaya çıkar (Ulam, 1940).

Bu çalışmada genel olarak uygulanabilir bir kararlılık tanımı formüle etmeye çalışmayacağız ancak bunun yerine özellikle fonksiyonel denklemlerin çözümlerinin kararlılığı ile ilgili bazı problemler formüle edeceğiz (Ulam, 1940).

Genel fonksiyonel denklemler için aşağıdaki soru sorulabilir:

Verilen bir denklemden biraz farklı olan bir denklemin çözümü, verilen bu denklemin çözümüne yakın olması gerektiği ne zaman doğrudur? Benzer şekilde, belirli bir fonksiyonel denklemi fonksiyonel bir eşitsizlikle değiştirirsek, eşitsizliğin çözümlerinin denklemin çözümlerine yakın olduğu ne zaman iddia edilebilir (Ulam, 1940)?

Bu duruma örnek olarak Hyers'in (1941) verdiği şu sonuç gösterilebilir:

Eğer $f(x)$ fonksiyonu;

$$|f(x + y) - (f(x) + f(y))| < \varepsilon$$

eşitsizliğini her yerde sağlayan tüm reel x 'ler için tanımlı ölçülebilir reel değerli bir fonksiyon ise,

$$l(x + y) = l(x) + l(y)$$

ve

$$|l(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $l(x) = ax$ fonksiyonunun var olduğu gösterilebilir. Bu durumda,

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

lineer fonksiyonel denklemi eşitsizliğe geçişe göre kararlıdır deriz (Bu arada, $f(x)$ ölçülebilir olmasa bile, eşitsizliğin çözümünün eşitliğin muhtemel ölçülemeyen çözümüne yakın olduğu söylenebilir.) (Ulam, 1940).

Daha genel olarak, herhangi bir metrik grup G için G 'nin bir ε -otomorfizminin kesin bir otomorfizme yakın olduğu doğru mudur? (Bir ε -otomorfizmi, her $x, y \in G$ için $\rho(f(x.y), f(x).f(y)) < \varepsilon$ olacak şekilde G 'den kendisine tanımlı bir f dönüşümü

demektir.) Bu durumda f fonksiyonuna bağılı olmayıp sadece G 'ye bağılı olan bir k sabiti ve f 'e bağılı olan $a(xy) = a(x).a(y)$ özelliğinde bir $a(x)$ var olmalıdır öyle ki her x için $\rho(a(x), f(x)) < k\varepsilon$ olur. Bunun, örneğin tüm sürekli veya ölçülebilir f fonksiyonları için sağlanması gerekir. Hyers'in yukarıdaki sonucu, G toplamaya göre reel sayılar grubu olduğunda soruyu cevaplar. Hyers ayrıca, G 'nin daha genel bir vektör uzayı olduğu durumlarda da sonuçlar elde etti. Hyers ve Ulam, başka bir makalesinde, soruyu, bazı sonsuz boyutlu vektör uzayları için olumlu bir şekilde cevaplamaktadır. Bu ve diğer örneklerde, kararlılığın sonsuz aralıkta formülasyonu için fonksiyon uzayında bir metrik gerektiğine dikkat edilmelidir. Bu durum elbette diferansiyel denklemlerde veya diferansiyel denklem sistemlerinde kararlılık problemine ilişkin tüm klasik çalışmalarda da geçerlidir. Çözümlerin normda daha güçlü düzgün yakınsaması veya noktasal olarak zayıf yakınsaması araştırılabilir (Ulam, 1940).

Dönüşümlerle ilgili birçok soru, kendisini benzer şekilde gösterir. Öklid uzayında ölçümü neredeyse koruyan bir dönüşümün, tüm alt kümelerin ölçümünü kesinlikle koruyan bir dönüşüme yakın olduğu gösterilebilir. Bu daha genel ölçülebilir uzaylarda kanıtlanabilir mi? Gerekliliğe çok çok yakın olan bir dönüşüm kesin olarak gerekli olan bir dönüşüme yakın mıdır? Neredeyse irrasyonel olan dönüşümler hakkında ne söylenebilir? Diferansiyel ifadeleri içeren özelliklerin kararlılığı ile ilgili yukarıdaki gibi sorular, diferansiyel ifadelerin kararlılığı hakkında genel sorunlara yol açar. Aşağıdaki sonuç Hyers ve Ulam tarafından verilmiştir (Ulam, 1940).

$f(x)$ belirli bir n değeri için n . mertebeden türevi $f^{(n)}(x_0) = 0$ olan reel bir fonksiyon olsun ve x_0 komşuluğunda $f^{(n)}(x)$ 'in işaret değiştirdiğini varsayalım. Her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır, öyle ki $C^{(n)}$ sınıfının $|f(x) - g(x)| < \delta$ koşulunu sağlayan her $g(x)$ fonksiyonu için, $g^{(n)}(x_1) = 0$ ve $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir x_1 noktası vardır. Hipotezin sadece f ve g fonksiyonlarının kendilerinin yakınlığını içerdiği ve δ sayısının sadece ε sayısına bağılı olduğu muhtemelen dikkat çekicidir (Ulam, 1940).

Bu sonucun kısmi bir genellemesi elde edilebilir. $F(x, f(x), f'(x))$ üç değişkeninin sürekli bir fonksiyonu olsun, bazı x_0 'lar için $F(x_0, f(x_0), f'(x_0)) = 0$ olduğunu F 'in x_0 noktasının bir komşuluğunda işaret değiştirdiğini varsayalım. Bu durumda tekrar her $\varepsilon > 0$

için bir $\delta > 0$ vardır, öyle ki $C^{(1)}$ sınıfından $f(x)$ 'e δ 'dan daha yakın olan her $g(x)$ için x_0 'a yakın bir x_1 noktası vardır öyle ki $F(x_1, g(x_1), g'(x_1)) = 0$ olur (Ulam, 1940).

Hangi koşullar altında önceki teorem $F(x, f(x), \dots, f^{(n)}(x))$ veya $F(f(x, y); \frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}, \dots)$ durumlarında genelleştirilmiş olur? İki değişkenin fonksiyonları ile ilgili bu türden en ilginç soru, (x_0, y_0) noktasında birkaç kısmi türevin eş zamanlı olarak 0 olmasına ilişkindir. Burada belirli bir noktanın komşuluğundaki “işaret değişmesi”nin anlamı konusunda dikkatli olmak gerekir. En azından tüm işaret kombinasyonlarının meydana geldiğini varsaymak gerekli görünüyor. n boyutlu durumda bu tür sorular hakkında çok az şey biliniyor (Ulam, 1940).

2. KARARLILIK SONUÇLARI

2.1. İlk Sonuçlar

$f(x + y) = f(x) + f(y)$ lineer fonksiyonel denkleminin çözümleri birçok uzayda araştırılmıştır. Bu bölüm boyunca bu denklemin bir $f(x)$ çözümüne bir lineer fonksiyon veya bir lineer dönüşüm diyeceğiz. Giriş bölümünde bahsettiğimiz gibi Wisconsin Üniversitesi Matematik Kulübü'nde yapılan konuşmalarda, Ulam bu denklemin “kararlılığı” problemine önerilerde bulundu. Diyelim ki $f(x)$ bu denklemi sadece yaklaşık olarak sağlasın. O zaman $f(x)$ 'e yakın lineer bir fonksiyon var mıdır? Problemi açıkça ifade etmek için E ve E' Banach uzayları ve δ pozitif bir sayı olsun. E' 'deki tüm x ve y için

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan $f: E \rightarrow E'$ fonksiyonu bir δ -lineer dönüşümü olarak adlandırılacaktır. O zaman problem aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Her $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ için her $f: E \rightarrow E'$ fonksiyonu δ -lineer dönüşümüne karşılık $\|f(x) - \ell(x)\| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $\ell: E \rightarrow E'$ lineer dönüşümü var mıdır? Sıradaki teorem bu soruya olumlu cevap verir ve ε 'a eşit bir δ alınabileceğini gösterir. $f(x) = L(x) + c$ dönüşümü açıkça en iyi sonuçtur ve $\ell(x) = L(x)$ olan ε -lineer dönüşümdür, burada $L(x)$ lineer ve $\|c\| < \varepsilon$ 'dur (Hyers, 1941).

Hyers 1941 yılında yayınladığı çalışmada Ulam'ın (1940) sorusuna uygun bir cevap verdi. Bu cevap aşağıdaki teoremden verilmiştir (Hyers, 1941):

2.1.1. Teorem: E ve E' Banach uzayları ve $f: E \rightarrow E'$ olarak tanımlı bir δ -lineer dönüşümü olsun. O zaman E' 'deki her bir x için

$$\ell(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$$

limiti vardır, $\ell(x)$ bir lineer dönüşümdür ve her $x \in E$ için $\|f(x) - \ell(x)\| \leq \delta$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $\ell(x)$, bu eşitsizliği sağlayan tek lineer dönüşümdür.

İspat: δ -lineer dönüşümün tanımından $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| < \delta$ olur, burada her $x \in E$ için $y = x$ yazarsak $\|f(2x) - 2f(x)\| < \delta$ eşitsizliği açıktır. Bu eşitsizlikte x yerine $\frac{x}{2}$ yazılıp 2 ile bölündüğünde her $x \in E$ için $\|\frac{1}{2}f(x) - f(\frac{x}{2})\| < \frac{\delta}{2}$ olduğu görülür.

Tümevarım varsayımı olarak

$$\|2^{-n}f(x) - f(2^{-n}x)\| < \delta(1 - 2^{-n}) \quad (2.1)$$

eşitsizliğini alalım. Bu eşitsizliği 2 ile bölersek

$$\|2^{-n-1}f(x) - 2^{-1}f(2^{-n}x)\| < \delta\left(\frac{1}{2} - 2^{-n-1}\right) \quad (2.2)$$

eşitsizliği elde edilir.

$\|\frac{1}{2}f(x) - f(\frac{x}{2})\| < \frac{\delta}{2}$ eşitsizliğinde x yerine $2^{-n}x$ yazılırsa

$$\|2^{-1}f(2^{-n}x) - f(2^{-n-1}x)\| < \frac{\delta}{2} \quad (2.3)$$

eşitsizliği elde edilir. (2.2) ve (2.3) eşitsizliklerini alt alta toplarsak

$$\|2^{-n-1}f(x) - f(2^{-n-1}x)\| < \delta(1 - 2^{-n-1}) \quad (2.4)$$

eşitsizliği elde edilir.

(2.1) eşitsizliğinde tümevarım yöntemi uygularsak

$n = 1$ için $\left\| \frac{1}{2}f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \right\| < \frac{\delta}{2}$ doğrudur.

$n = n$ için $\|2^{-n}f(x) - f(2^{-n}x)\| < \delta(1 - 2^{-n})$ doğru kabul edildiğinde

$n = n + 1$ için $\|2^{-n-1}f(x) - f(2^{-n-1}x)\| < \delta(1 - 2^{-n-1})$ doğru olduğu görülür.

Böylece tümevarımla (2.1) eşitsizliğinin ispatı tamamlandı. Bu nedenle, her $x \in E$ ve bütün n pozitif tamsayıları için doğrudur.

$x \in E$ ve n pozitif bir tamsayı için

$$q_n(x) = \frac{f(2^n x)}{2^n}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. O zaman

$$q_m(x) - q_n(x) = \frac{f(2^m x)}{2^m} - \frac{f(2^n x)}{2^n} = \frac{f(2^{m-n} 2^n x) - 2^{m-n} f(2^n x)}{2^m}$$

olur.

E 'deki tüm x 'ler için (2.1) eşitsizliğinde $m < n$ için n yerine $n - m$ yazarsak

$$\|2^{m-n}f(x) - f(2^{m-n}x)\| < \delta(1 - 2^{m-n})$$

eşitsizliği ve x yerine $2^n x$ yazarsak

$$\|2^{m-n}f(2^n x) - f(2^{m-n} 2^n x)\| < \delta(1 - 2^{m-n})$$

eşitsizliği elde edilir. Her iki tarafı 2^m sayısına bölersek

$$\left\| \frac{2^{m-n}f(2^n x) - f(2^{m-n}2^n x)}{2^m} \right\| < \frac{\delta(1 - 2^{m-n})}{2^m}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$q_m(x) - q_n(x) = \frac{f(2^m x)}{2^m} - \frac{f(2^n x)}{2^n} = \frac{f(2^{m-n}2^n x) - 2^{m-n}f(2^n x)}{2^m}$$

olduğundan

$$\|q_m(x) - q_n(x)\| < \frac{\delta(1 - 2^{m-n})}{2^m}$$

elde edilir. Buradan E 'deki her bir x için $\{q_n(x)\}$ bir Cauchy dizisidir ve E tam olduğundan $\ell(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(x)$ limit fonksiyonu vardır.

E 'de x ve y olarak farklı iki nokta alalım. $f(x)$ fonksiyonu δ -lineer olmak üzere tüm n pozitif tamsayıları için

$$\|f(2^n x + 2^n y) - f(2^n x) - f(2^n y)\| < \delta$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafını 2^n ile bölersek ve $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(2^n x + 2^n y) - f(2^n x) - f(2^n y)}{2^n} \right\| &< \frac{\delta}{2^n} \\ \left\| \frac{f(2^n x + 2^n y)}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n y)}{2^n} \right\| &< \frac{\delta}{2^n} \\ \|\ell(x + y) - \ell(x) - \ell(y)\| &\leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç 0'dan küçük olamaz, doğal olarak 0 olur. Buradan $\ell(x + y) = \ell(x) + \ell(y)$ olur ve bu da $\ell(x)$ 'in lineer olduğunu gösterir. Burada $\ell(x)$ 'in var olduğunu ve lineer olduğunu gösterdik.

Eğer (2.1) eşitsizliğinde x yerine $2^n x$ yazarsak

$$\left\| \frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x) \right\| < \delta(1 - 2^{-n})$$

eşitsizliği ve $n \rightarrow \infty$ 'a giderken limiti alınır, $\|\ell(x) - f(x)\| \leq \delta$ elde edilir.

Varsayalım $L(x)$, E 'deki tüm x 'ler için $\|L(x) - f(x)\| \leq \delta$ eşitsizliğini sağlayan bir lineer dönüşüm olsun ve öyle ki E 'deki bazı y noktaları için $\ell(y) \neq L(y)$ olsun. $n > 2\delta/\|\ell(y) - L(y)\|$ tamsayısı için $\|\ell(ny) - L(ny)\| > 2\delta$ olduğu açıktır ve buradan $\|L(ny) - f(ny)\| \leq \delta$ ve $\|\ell(ny) - f(ny)\| \leq \delta$ eşitsizlikleri ile çelişir, çünkü;

$$\begin{aligned} \|\ell(ny) - L(ny)\| &= \|\ell(ny) - L(ny) + f(ny) - f(ny)\| \\ &= \|\ell(ny) - f(ny) + f(ny) - L(ny)\| \\ &< \|\ell(ny) - f(ny)\| + \|f(ny) - L(ny)\| \\ &< \delta + \delta \\ &< 2\delta. \end{aligned}$$

Buradan $\ell(x)$, $\|f(x) - \ell(x)\| \leq \delta$ eşitsizliğinde tek lineer çözüm olur. Böylece ispat tamamlanmış olur (Hyers, 1941).

Rassias, Hyers teoreminin bir genellemesini Cauchy farkını sınırsız alarak aşağıda verilen teoremle ispatladı (Rassias, 1978).

2.1.2. Teorem: E_1 ve E_2 iki Banach uzayı ve $f: E_1 \rightarrow E_2$ dönüşümü için $f(tx)$ her sabit x için t 'ye göre sürekli olsun. $\theta > 0$, $p \in [0,1)$ ve $x, y \in E_1$ için

$$\frac{\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|}{\|x\|^p + \|y\|^p} \leq \theta \quad (2.5)$$

olsun. O zaman tek bir $T: E_1 \rightarrow E_2$ lineer eşleme vardır öyle ki her $x \in E_1$ için

$$\frac{\|f(x) - T(x)\|}{\|x\|^p} \leq \frac{2\theta}{2 - 2^p} \quad (2.6)$$

olur.

İspat: n bir tamsayı ve bazı $\theta \geq 0$ için

$$\frac{\left\| \frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x) \right\|}{\|x\|^p} \leq \theta \sum_{m=0}^{n-1} 2^{m(p-1)} \quad (2.7)$$

eşitsizliğinin sağlandığını iddia edelim. Tümevarımla bu iddianın doğruluğunu kontrol edelim:

$n = 1$ için $\frac{\left\| \frac{f(2x)}{2} - f(x) \right\|}{\|x\|^p} \leq \theta$ olur. Şimdi bunu gösterelim:

$\theta \geq 0$ ve $0 \leq p < 1$ için (2.5) eşitsizliğinde y yerine x yazarsak

$$\frac{\|f(x+x) - f(x) - f(x)\|}{\|x\|^p + \|x\|^p} \leq \theta$$

olur. Bu eşitsizliği düzenlersek

$$\frac{\|f(2x) - 2f(x)\|}{2\|x\|^p} \leq \theta$$

ve

$$\frac{2 \left\| \frac{f(2x)}{2} - f(x) \right\|}{2\|x\|^p} \leq \theta$$

eşitsizliğinden

$$\frac{\left\| \frac{f(2x)}{2} - f(x) \right\|}{\|x\|^p} \leq \theta \quad (2.8)$$

elde edilir.

$n = n$ için (2.7) eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım.

$n = n + 1$ için doğruluğunu ispat edelim:

(2.7) eşitsizliğinde x yerine $2x$ yazarsak

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left\| \frac{f(2^n 2x)}{2^n} - f(2x) \right\|}{\|2x\|^p} \leq \theta \sum_{m=0}^{n-1} 2^{m(p-1)} \\
 \Rightarrow & \frac{\frac{1}{2} \left\| \frac{f(2^{n+1}x)}{2^n} - f(2x) \right\|}{\frac{1}{2} 2^p \|x\|^p} \leq \theta \sum_{m=0}^{n-1} 2^{m(p-1)} \\
 \Rightarrow & \frac{\left\| \frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} - \frac{f(2x)}{2} \right\|}{2^{p-1} \|x\|^p} \leq \theta \sum_{m=0}^{n-1} 2^{m(p-1)} \\
 \Rightarrow & \frac{\left\| \frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} - \frac{f(2x)}{2} \right\|}{\|x\|^p} \leq \theta \cdot 2^{p-1} \sum_{m=0}^{n-1} 2^{m(p-1)} \\
 \Rightarrow & \frac{\left\| \frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} - \frac{f(2x)}{2} \right\|}{\|x\|^p} \leq \theta \cdot \sum_{m=0}^{n-1} 2^{m(p-1)} 2^{p-1} \\
 \Rightarrow & \frac{\left\| \frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} - \frac{f(2x)}{2} \right\|}{\|x\|^p} \leq \theta \cdot \sum_{m=0}^{n-1} 2^{(m+1)(p-1)}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi burada $m = 0 \rightarrow m = 1$, $n - 1 \rightarrow n$, $m + 1 \rightarrow m$ olarak dönüştürsek

$$\frac{\left\| \frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} - \frac{f(2x)}{2} \right\|}{\|x\|^p} \leq \theta \cdot \sum_{m=1}^n 2^{m(p-1)}$$

olur, buradan

$$\frac{\left\| \frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} - \frac{1}{2} f(2x) \right\|}{\|x\|^p} \leq \theta \sum_{m=1}^n 2^{m(p-1)}$$

elde edilir. (2.7) eşitsizliğinde n yerine $n + 1$ yazarsak üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2^{n+1}} f(2^{n+1}x) - f(x) \right\| &\leq \left\| \frac{1}{2^{n+1}} f(2^{n+1}x) - \frac{1}{2} f(2x) \right\| + \left\| \frac{1}{2} f(2x) - f(x) \right\| \\ &\leq \theta \|x\|^p \sum_{m=1}^n 2^{m(p-1)} + \theta \|x\|^p \leq \theta \|x\|^p \sum_{m=0}^n 2^{m(p-1)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{\left\| \frac{f(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} - f(x) \right\|}{\|x\|^p} \leq \theta \sum_{m=0}^n 2^{m(p-1)} \leq \theta \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m(p-1)} = \theta \frac{1}{1-2^{p-1}} = \frac{2\theta}{2-2^p}$$

olur. Yani

$$\frac{\left\| \frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x) \right\|}{\|x\|^p} \leq \frac{2\theta}{2-2^p} \quad (2.9)$$

eşitsizliği elde edilir. Çünkü $0 \leq p < 1$ olduğundan $\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m(p-1)}$ ifadesi $2/(2-2^p)$ ifadesine yakınsaktır.

(2.9) eşitsizliğinde $x \rightarrow 2^n x$ yazarsak

$$\frac{\left\| \frac{f(2^{2n}x)}{2^n} - f(2^n x) \right\|}{2^{np} \|x\|^p}$$

ve burada da $2n \rightarrow m$ yazarsak, $2^n = 2^{2n-n} = 2^{m-n}$ olup

$$\frac{\left\| \frac{f(2^m x)}{2^{m-n}} - f(2^n x) \right\|}{2^{np} \|x\|^p} = \frac{1}{2^n} \left\| \frac{f(2^m x)}{2^{m-n}} - f(2^n x) \right\| \leq 2^{n(p-1)} \cdot \frac{2\theta}{2-2^p} \cdot \|x\|^p$$

elde edilir. $m > n > 0$ için

$$\left\| \frac{1}{2^m} [f(2^m x)] - \frac{1}{2^n} [f(2^n x)] \right\| = \frac{1}{2^n} \left\| \frac{1}{2^{m-n}} [f(2^m x)] - [f(2^n x)] \right\|$$

$$< 2^{n(p-1)} \frac{2\theta}{2-2^p} \|x\|^p$$

olur. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2^m} [f(2^m x)] - \frac{1}{2^n} [f(2^n x)] \right\| = 0$$

elde edilir. Fakat E_2 bir Banach uzayı olarak tamdır, bundan dolayı $\{[f(2^n x)]/2^n\}$ dizisi yakınsar.

$$T(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} [f(2^n x)]$$

tanımlarsak ve (2.5) eşitsizliğinde $x \rightarrow 2^n x$ ve $y \rightarrow 2^n y$ yazarsak

$$\|f[2^n(x+y)] - f[2^n x] - f[2^n y]\| \leq \theta(\|2^n x\|^p + \|2^n y\|^p) = 2^{np} \theta(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

buluruz. Böylece her iki tarafı 2^n 'e bölersek

$$\frac{1}{2^n} \|f[2^n(x+y)] - f[2^n x] - f[2^n y]\| \leq 2^{n(p-1)} \cdot \theta(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

veya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \|f[2^n(x+y)] - f[2^n x] - f[2^n y]\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n(p-1)} \cdot \theta(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

veya

$$\left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} f[2^n(x+y)] - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} f[2^n x] - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} f[2^n y] \right\| = 0$$

veya her $x, y \in E_1$ için

$$\|T(x+y) - T(x) - T(y)\| = 0$$

veya her $x, y \in E_1$ için

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

olur. Her $x, y \in E_1$ için $T(x + y) = T(x) + T(y)$ olduğunu gösterdik. Ayrıca her $r \in \mathbb{R}$ için $T(rx) = rT(x)$ olduğu da gösterilebilir. Bundan dolayı T bir lineer eşlemedir. (2.9) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\| \frac{[f(2^n x)]}{2^n} - f(x) \right\|}{\|x\|^p} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\theta}{2 - 2^p}$$

veya eşdeğer olarak

$$\frac{\|T(x) - f(x)\|}{\|x\|^p} \leq \varepsilon.$$

Buradan

$$\varepsilon = \frac{2\theta}{2 - 2^p} \quad (2.10)$$

olur. Böylece (2.6) eşitsizliğini elde ettik.

Şimdi T 'nin böyle tek lineer dönüşüm olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Varsayalım ki $g: E_1 \rightarrow E_2$ ve $x \in E_1$ için $T(x) \neq g(x)$ olacak şekilde başka bir tane daha olsun. O zaman öyle bir $\varepsilon_1 \geq 0$ vardır ki $0 \leq q < 1$ sayısı için

$$\frac{\|g(x) - f(x)\|}{\|x\|^q} \leq \varepsilon_1$$

sağlanır. (2.10) ile üçgen eşitsizliği kullanarak

$$\|T(x) - g(x)\| \leq \|T(x) - f(x)\| + \|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon \|x\|^p + \varepsilon_1 \|x\|^q$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\|T(x) - g(x)\| &= \left\| \frac{1}{n} [T(nx)] - \frac{1}{n} [g(nx)] \right\| = \frac{1}{n} \|T(nx) - g(nx)\| \\ &\leq \frac{1}{n} (\varepsilon \|nx\|^p + \varepsilon_1 \|nx\|^q) = n^{p-1} \varepsilon \|x\|^p + n^{q-1} \varepsilon_1 \|x\|^q\end{aligned}$$

olur. Böylece her $x \in E_1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x) - g(x)\| = 0$ ve buradan her $x \in E_1$ için $T(x) \equiv g(x)$ olur. Böylece ispat tamamlanmış oldu.

Bu Ulam'ın sorduğu problemleri çözer: Yaklaşık olarak lineer dönüşümün yakınında lineer dönüşüm ne zaman var olur? Bu durum $p = 0$ için Hyers tarafından cevaplanmıştır. Böylece burada Ulam'ın problemine genel bir çözüm bulmayı Rassias başarmış oldu (Rassias, 1978).

2.2. Diferansiyel Denklemlerde Ulam Anlamında Kararlılık

Bundan sonra Alsina ve Ger (1998)'e ait olan bir çalışmayı inceleyeceğiz. Bu çalışmada Alsina ve Ger $y' = y$ şeklindeki en basit diferansiyel denklemlerin kararlılık kavramını inceliyor.

Reel üstel fonksiyonun en klasik tanımlarından biri $f(x) = e^x$ üstel fonksiyonunun $f' = f$ diferansiyel denkleminin tek aşıkâr olmayan (sabitler çarpım hariç) çözümü olmasıdır. Şimdi amacımız bu denklemin Hyers-Ulam kararlılığını çalışmak, yani verilen $\varepsilon > 0$ için

$$|f'(x) - f(x)| \leq \varepsilon \tag{2.11}$$

eşitsizliğini incelemektir (Alsina ve Ger, 1998).

Bundan sonra tüm negatif olmayan reel sayılar kümesi $\mathbb{R}^+$ için herhangi bir reel aralığı ele alacağız. Bir f fonksiyonu tanım kümesine ait her x, y için $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ sağlarsa *k-Lipschitz* fonksiyon olarak adlandırılacaktır (Alsina ve Ger, 1998).

2.2.1. Teorem: $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir türevlenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman

(i) Her $x \in I$ için $g(x) \leq g'(x)$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$g(x) = i(x).e^x, x \in I \quad (2.12)$$

biçiminde ifade edilebilmesidir, burada $i: I \rightarrow \mathbb{R}$ keyfi bir azalmayan türevlenebilir fonksiyondur;

(ii) Her $x \in I$ için $g'(x) \leq g(x)$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$g(x) = d(x).e^x, x \in I \quad (2.13)$$

biçiminde ifade edilebilmesidir, burada $d: I \rightarrow \mathbb{R}$ keyfi bir artmayan türevlenebilir fonksiyondur.

İspat: Eğer $g(x) \leq g'(x)$ ise o zaman $i(x) = g(x).e^{-x}$ şeklinde tanımlanmış $i: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve her $x \in I$ için

$$i'(x) = g'(x).e^{-x} - g(x).e^{-x} = (g'(x) - g(x)).e^{-x} \geq 0$$

sağlanır. Bu nedenle i azalmaz ve (2.12) buradan elde edilir. Bunun tersi de doğrudur. (ii) kısmı (i)'deki g 'yi $-g$ ile değiştirerek kanıtlanır (Alsina ve Ger, 1978).

2.2.2. Teorem: $\varepsilon > 0$ verilsin ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x \in I$ için

$$|f'(x) - f(x)| \leq \varepsilon, x \in I$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun

$$f(x) = \varepsilon + e^x \ell(e^{-x}), x \in I, \quad (2.14)$$

biçiminde ifade edilebilmesidir, burada ℓ fonksiyonu $J = \{e^{-x} \mid x \in I\}$ kümesinde tanımlı, artmayan ve 2ε -Lipschitzyan olan keyfi bir türevlenebilir fonksiyondur.

İspat: Eğer (2.11) kabul edilirse o zaman her $x \in I$ için $f(x) - \varepsilon \leq f'(x) \leq \varepsilon + f(x)$ sağlanır. Eğer $g(x) = f(x) - \varepsilon$ olarak alınırsa, $g(x) \leq g'(x)$ olur. Böylece 2.2.1. Teorem (i) gereği öyle bir i türevlenebilir ve azalmayan fonksiyon vardır ki

$$g(x) = f(x) - \varepsilon = i(x).e^x, x \in I \quad (2.15)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde $h(x) = f(x) + \varepsilon$ olarak alınırsa $h'(x) \leq h(x)$ olur.

Böylece 2.2.1. Teorem (ii) gereği öyle bir d türevlenebilir ve artmayan fonksiyon vardır ki

$$h(x) = f(x) + \varepsilon = d(x).e^x, x \in I \quad (2.16)$$

şeklinde yazılabilir. (2.15) ve (2.16) ile

$$i(x)e^x + \varepsilon = d(x)e^x - \varepsilon, x \in I \quad (2.17)$$

elde edilir ve bu eşitliğin türevi alınırsa

$$i'(x)e^x + i(x)e^x = d'(x)e^x + e^x d(x) = d'(x)e^x + i(x)e^x + 2\varepsilon, x \in I$$

ve

$$i'(x)e^x = d'(x)e^x + 2\varepsilon, x \in I$$

olur. d' fonksiyonunun pozitif olmaması ile birlikte bu eşitliği düzenlersek

$$d'(x) = \frac{i'(x)e^x - 2\varepsilon}{e^x} = i'(x) - 2\varepsilon e^{-x} \leq 0, \quad x \in I$$

olur. Böylece $0 \leq i'(x) \leq 2\varepsilon e^{-x}, x \in I$ elde edilir.

$J = \{e^{-x} | x \in I\}$ ve $\ell: J \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $\ell(z) = i(-\ln z), z \in J$ tanımlarsak o zaman ℓ türevlenebilirdir ve

$$\ell'(z) = -\frac{i'(-\ln z)}{z} \leq 0, z \in J$$

olur. Bu yüzden ℓ artmayan ve ℓ , 2ε -Lipschitzyan olur. J 'deki her z_1, z_2 için ($z_1 \neq z_2$) ortalama değer teoremi gereği

$$\begin{aligned} |\ell(z_1) - \ell(z_2)| &= |\ell'(z_3)| |z_1 - z_2| = \left| \frac{-i'(-\ln z_3)}{z_3} \right| |z_1 - z_2| \\ &= i'(-\ln z_3) \cdot e^{-\ln z_3} |z_1 - z_2| \leq 2\varepsilon |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

olacak şekilde $(\min(z_1, z_2), \max(z_1, z_2))$ aralığında bir z_3 vardır.

Böylece isteneni elde etmiş oluruz, yani

$$f(x) = \varepsilon + i(x)e^x = \varepsilon + \ell(e^{-x})e^x.$$

Bunun tersi de kanıtlanabilir (Alsina ve Ger, 1998).

Hyers–Ulam kararlılığı çalışmasında denklem, bir fonksiyonel denklemin “ ε karşılaması” durumunda (örneğin $|f'(x) - f(x)| \leq \varepsilon$) ise, o zaman sabit bir k sayısı var olmalı öyle ki fonksiyonun $k\varepsilon$ genel çözümüne yakın karşılık gelen fonksiyonel denklem ($|f(x) - e^x| \leq k\varepsilon$) olur. Burada 2.2.2. Teorem’i kullanarak, $|f'(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ için $g(x) = ce^x, x \in I$ çözümünün varlığını çıkarırız ve $g' = g$ için

$$|f(x) - g(x)| \leq 3\varepsilon, x \in I \quad (2.18)$$

olur. Aslında f , (2.14)’te verilen artmayan ve 2ε -Lipschitzyan olan bir fonksiyondur ve $\ell: J = \inf\{e^{-z}: z \in I\} \rightarrow \mathbb{R}$ ’de $a := \inf J \in [0, \infty)$ ve $c := \lim_{t \rightarrow a^+} \ell(t)$ değerlendirildiğinde c ’nin sınırlı olması gerektiğini görürüz. Buradan, her $x \in I$ için

$$|f(x) - ce^x| \leq \varepsilon + e^x |\ell(e^{-x}) - c| \leq \varepsilon + e^x \cdot 2\varepsilon |e^{-x} - a| = \varepsilon(1 + 2|1 - ae^x|)$$

olur (Alsina ve Ger, 1998).

Burada Alsina ve Ger şunu kanıtladı: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için $|f'(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ çözümü için bir c sabiti vardır öyle ki her $x \in \mathbb{R}$ için $|f(x) - ce^x| \leq 3\varepsilon$ olur. Yani f ile $f' = f$ diferansiyel denkleminde tüm çözümlerin kümesi arasındaki mesafe en fazla 3ε olur (Alsina ve Ger, 1998).

Şimdi de Takahasi'nin çalışmasını inceleyelim. Takahasi (Takahasi, Miura and Miyajima, 2002) bu çalışmada $y' = \lambda y$ şeklindeki diferansiyel denklemlerin kararlılık problemini inceleyerek Alsina ve Ger'in çalışmasını genelleştirmiştir.

$X \neq \{0\}$ boştan farklı bir karmaşık Banach uzayı, $\varepsilon \geq 0$ ve λ sıfırdan farklı bir karmaşık sayı olsun. $I, \mathbb{R}$ 'de bir açık aralık olsun. Eğer aşağıdaki özelliğe sahip bir $k \geq 0$ sabiti varsa Hyers-Ulam kararlılığı I üzerindeki $y' = \lambda y$ diferansiyel denklemi için de geçerlidir. $\varphi: I \rightarrow X$ fonksiyonu her mertebe için türevlenebilir bir eşleme olsun. O zaman $\|\varphi'(t) - \lambda\varphi(t)\| \leq \varepsilon$ için $\|\varphi(t) - e^{\lambda t}x_\varphi\| \leq k\varepsilon$ olacak şekilde bir $x_\varphi \in X$ ifadesi karşılık gelir. $y' = \lambda y$ diferansiyel denkleminde genel çözümün bazı $x \in X$ için $e^{\lambda t}x$ formunda olduğuna dikkat edelim. Belirtilen özelliğe göre $k \geq 0$ sabitinin $y' = \lambda y$ diferansiyel denklemi için Hyers-Ulam sabiti veya sadece Hyers-Ulam sabiti olduğunu söyleriz (Takahasi vd, 2002).

$I \subset \mathbb{R}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $m(I, \lambda) = \inf\{e^{-Re\lambda t} : t \in I\}$ ve $M(I, \lambda) = \sup\{e^{-Re\lambda t} : t \in I\}$ ifadelerini tanımlayalım.

2.2.3. Teorem: $\varphi: I \rightarrow X$ türevlenebilir bir fonsiyon ve $\varepsilon > 0$ olsun öyle ki tüm $t \in I$ için $\|\varphi'(t) - \lambda\varphi(t)\| \leq \varepsilon$ olsun. O zaman aşağıdaki iddialar doğrudur:

(i) $Re\lambda \neq 0$ ise o zaman $x_\varphi \in X$ elemanı vardır öyle ki her $t \in I$ için

$$\|\varphi(t) - e^{\lambda t}x_\varphi\| \leq |Re\lambda|^{-1} \left(1 - \frac{m(I, \lambda)}{M(I, \lambda)}\right) \varepsilon$$

olur. Özel olarak $m(I, \lambda) = 0$ ise o zaman x_φ , $\sup_{t \in I} \|\varphi(t) - e^{\lambda t} x_\varphi\| < \infty$ özelliğine sahip tek fonksiyondur.

(ii) Eğer $Re\lambda = 0$ ise ve I 'nin $\delta(I)$ çapı sonlu ise, o zaman bir $x_\varphi \in X$ vardır öyle ki tüm $t \in I$ için $\|\varphi(t) - e^{\lambda t} x_\varphi\| \leq \varepsilon \delta(I)$ olur.

(iii) Eğer $Re\lambda = 0$ ve $\delta(I) = \infty$ ise o zaman $y' = \lambda y$ diferansiyel denklemi Hyers-Ulam kararlılığına sahip değildir.

İspat: X^* , X 'in bir dual uzayı olsun. Her bir $f \in X^*$ için $\varphi_f: I \rightarrow \mathbb{C}$ bire bir eşlemesini

$$\varphi_f(t) = f(\varphi(t)), t \in I$$

olarak alalım.

Keyfi bir $f \in X^*$ fonksiyonunu alalım. O zaman her bir $t \in I$ için $(\varphi_f)'(t) = f(\varphi'(t))$ olur. Ayrıca her $t \in I$ için

$$|(\varphi_f)'(t) - \lambda \varphi_f(t)| = |f(\varphi'(t)) - f(\lambda \varphi(t))| \leq \|f\| \|\varphi'(t) - \lambda \varphi(t)\| \leq \varepsilon \|f\|$$

elde edilir. Her bir $t \in I$ için $h(t) = e^{-\lambda t} \varphi_f(t)$ yazalım. O zaman $h'(t) = \{(\varphi_f)'(t) - \lambda \varphi_f(t)\} e^{-\lambda t}$ olur. Buradan tüm $t \in I$ için $|h'(t)| \leq \varepsilon \|f\| |e^{-\lambda t}|$ elde edilir. $s, t \in I$ ve $s < t$ olsun. O zaman h' , $[s, t]$ aralığında integrallenebilirdir. h' fonksiyonunun sürekli olmasına gerek yokken $h(t) - h(s) = \int_s^t h'(\tau) d\tau$ olduğu iyi bilinir. Buradan aşağıdaki ifade elde edilir:

$$|h(t) - h(s)| = \left| \int_s^t h'(\tau) d\tau \right| \leq \varepsilon \|f\| \int_s^t |e^{-\lambda \tau}| d\tau = \varepsilon \|f\| \int_s^t e^{-Re\lambda \tau} d\tau. \quad (2.19)$$

(i) Varsayalım $Re\lambda \neq 0$ olsun. (2.19) eşitsizliği gereği her $s, t \in I$ için

$$\left| f(e^{-\lambda t} \varphi(t) - e^{-\lambda s} \varphi(s)) \right| \leq \frac{\varepsilon \|f\|}{|Re\lambda|} |e^{-Re\lambda t} - e^{-Re\lambda s}|$$

elde ederiz. Keyfi f fonksiyonu ve her $s, t \in I$ için

$$\|e^{-\lambda t}\varphi(t) - e^{-\lambda s}\varphi(s)\| \leq \frac{\varepsilon}{|Re\lambda|} |e^{-Re\lambda t} - e^{-Re\lambda s}|$$

elde ederiz. Eğer $e^{-Re\lambda s} \searrow m(I, \lambda)$ ise $e^{-\lambda s}\varphi(s)$ fonksiyonu X kümesi üzerinde yakınsak olur. $e^{-\lambda s}\varphi(s)$ fonksiyonunun yakınsadığı değeri $x_\varphi \in X$ olarak alırsak bu durumda

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - e^{\lambda t}x_\varphi\| &\leq e^{Re\lambda t} \|e^{-\lambda t}\varphi(t) - e^{-\lambda s}\varphi(s)\| + e^{Re\lambda t} \|e^{-\lambda s}\varphi(s) - x_\varphi\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|Re\lambda|} \left| 1 - \frac{e^{-Re\lambda s}}{e^{-Re\lambda t}} \right| + e^{Re\lambda t} \|e^{-\lambda s}\varphi(s) - x_\varphi\| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $e^{-Re\lambda s} \searrow m(I, \lambda)$ yazarsak her $t \in I$ için

$$\|\varphi(t) - e^{\lambda t}x_\varphi\| \leq \frac{\varepsilon}{|Re\lambda|} \left| 1 - \frac{m(I, \lambda)}{M(I, \lambda)} \right|$$

elde ederiz. Şimdi varsayalım ki $x \in X$ için $\sup_{t \in I} \|\varphi(t) - e^{\lambda t}x\| = c < \infty$ olsun. Eğer $m(I, \lambda) = 0$ ise o zaman $e^{-Re\lambda t} \rightarrow 0$ için

$$\|x - x_\varphi\| \leq |e^{-\lambda t}| \{ \|e^{\lambda t}x - \varphi(t)\| + \|\varphi(t) - e^{\lambda t}x_\varphi\| \} \leq \left(c + \frac{\varepsilon}{|Re\lambda|} \right) e^{-Re\lambda t} \rightarrow 0$$

olur. Buradan da $x = x_\varphi$ bulunur.

(ii) Varsayalım $Re\lambda = 0$ ve $\delta(I) < \infty$ olsun. O zaman (2.19) eşitsizliğinden her $s, t \in I$ için

$$\left| f(e^{-\lambda t}\varphi(t) - e^{-\lambda s}\varphi(s)) \right| \leq \varepsilon \|f\| \left| \int_s^t e^{-Re\lambda \tau} d\tau \right| = \varepsilon |t - s| \|f\| \leq \varepsilon \delta(I) \|f\|$$

elde ederiz. Keyfi f için $Re\lambda = 0$ olduğunda her $s, t \in I$ için

$$\|\varphi(t) - e^{\lambda t} e^{-\lambda s} \varphi(s)\| \leq \varepsilon \delta(I)$$

eşitsizliği sağlanır. O zaman $e^{-\lambda s} \varphi(s)$ elemanı her $s \in I$ için yukarıda belirtilen özelliğe sahip bir elemandır.

(iii) Varsayalım $Re\lambda = 0$ ve $\delta(I) = \infty$ olsun. $x_0 \in X$ için $\|x\| = 1$ alabiliriz. Her bir $t \in I$ için $\varphi_0(t) = \varepsilon t e^{\lambda t} x_0$ yazalım. O zaman her $t \in I$ için

$$\|\varphi'_0(t) - \lambda \varphi_0(t)\| = \varepsilon |e^{\lambda t}| \|x_0\| = \varepsilon$$

olur. Bir $k \geq 0$ sabitinin ve $y_0 \in X$ elemanının var olduğunu varsayalım öyle ki her $t \in I$ için $\|\varphi_0(t) - e^{\lambda t} y_0\| \leq k\varepsilon$ olsun. O zaman

$$\|\varepsilon t x_0 - y_0\| = \|\varphi_0(t) - e^{\lambda t} y_0\| \leq k\varepsilon$$

olur. Buradan her $t \in I$ için $|t| \leq k + \|y_0\|/\varepsilon$ olur. Bu da $\delta(I) = \infty$ olmasıyla çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur (Takahasi vd, 2002).

Uyarı: Varsayalım $Re\lambda \neq 0$ ve $m(I, \lambda) = 0$ olsun. O zaman 2.2.3. Teorem'in (i) kısmından

$$|Re\lambda|^{-1} \{1 - m(I, \lambda)/M(I, \lambda)\} = |Re\lambda|^{-1}$$

elde edilir. Bunu görmek için $x_0 \in X$ ile $\|x_0\| = 1$ alalım. Her bir $t \in I$ için $\varphi(t) = \varepsilon (Re\lambda)^{-1} e^{iIm\lambda t} x_0$ yazalım. O zaman 2.2.3. Teorem gereği

$$\|\varphi'(t) - \lambda \varphi(t)\| = \varepsilon \left| \frac{iIm\lambda - \lambda}{Re\lambda} \right| = \varepsilon, \quad (t \in I)$$

olur. Her $t \in I$ için

$$\|\varphi(t) - e^{\lambda t} x_\varphi\| \leq |Re\lambda|^{-1} \varepsilon$$

olacak şekilde tek bir $x_\varphi \in X$ bulabiliriz. O zaman her $t \in I$ için

$$\|x_\varphi\| \leq |e^{-\lambda t}| \left(\frac{1}{|Re\lambda|} \varepsilon + \|\varphi(t)\| \right) = e^{-Re\lambda t} \frac{2\varepsilon}{|Re\lambda|}$$

elde ederiz. Buradan $x_\varphi = 0$ olduğu anlaşılır. x_φ tek olduğundan, Hyers-Ulam kararlılık sabitinden büyük olmayan $|Re\lambda|^{-1}$ bulunur (Takahasi vd, 2002).

Uyarı: Varsayalım $Re\lambda \neq 0$ ve $m(I, \lambda) > 0$ olsun. O zaman tek bir $x_\varphi \in X$ için $\sup_{t \in I} \|\varphi(t) - e^{\lambda t} x_\varphi\| < \infty$ olduğunu ispatlayalım. $x_0 \in X$ ve her bir $t \in I$ için $\varphi(t) = e^{\lambda t} x_0$ yazalım. Her $x \in X$ için

$$\|x_0 - x\| \leq \frac{m(I, \lambda) \varepsilon}{|Re\lambda|} \left(1 - \frac{m(I, \lambda)}{M(I, \lambda)} \right)$$

eşitsizliğini kullanırsak

$$\|\varphi(t) - e^{\lambda t} x\| = e^{Re\lambda t} \|x_0 - x\| \leq \frac{\varepsilon}{|Re\lambda|} \left(1 - \frac{m(I, \lambda)}{M(I, \lambda)} \right)$$

buluruz (Takahasi vd, 2002).

2.3. Sabit Nokta Yaklaşımları

Şimdi daha genel bir problemi ele alacağız. Y bir normlu uzay ve I bir açık aralık olsun. Varsayalım ki $f: I \rightarrow Y$ bir fonksiyon her $x \in I$ ve bazı $\varepsilon \geq 0$ için

$$\|a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) + h(x)\| \leq \varepsilon$$

diferansiyel eşitsizliği sağlansın, öyle ki bir $x \in I$ ve $f_0: I \rightarrow Y$ için

$$\|f(x) - f_0(x)\| \leq K(\varepsilon)$$

olacak şekilde

$$\|a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) + h(x)\| = 0$$

diferansiyel denkleminin bir çözümü vardır, burada $K(\varepsilon)$ sadece ε 'un bir ifadesidir. Bu durumda, yukarıdaki diferansiyel denklemin Hyers-Ulam kararlılığına sahip olduğunu söyleriz (Jung, 2010).

Yukarıdaki ifade $\varphi, \Phi: I \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonları f ve f_0 'a bağlı olmayan fonksiyonlar olmak üzere, ε ve $K(\varepsilon)$ yerine $\varphi(x)$ ve $\Phi(x)$ yazıldığında da doğru oluyorsa karşılık gelen diferansiyel denklemin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığına (veya genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlılığına) sahip olduğunu söyleriz (Jung, 2010).

2.3.1. Tanım: Boş olmayan bir X kümesi için, X üzerindeki genelleştirilmiş metriğin tanımını verelim. Bir $d: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonunun X üzerinde genelleştirilmiş metrik olması için gerek ve yeter şart;

$$(M_1) \quad d(x, y) = 0 \text{ ancak ve ancak } x = y ;$$

$$(M_2) \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ her } x, y \in X ;$$

$$(M_3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ her } x, y, z \in X$$

özelliklerini sağlamasıdır.

Genelleştirilmiş metriğin alışılmış metriktan tek farkı, değer aralığının sonsuzu içermesidir (Jung, 2010).

Şimdi sabit nokta teorisinin temel sonuçlarından birini sunuyoruz. Kanıt için (Diaz and Margolis, 1968)'e bakınız. Bu teorem, daha sonra vereceğimiz bazı teoremleri kanıtlamada önemli rol oynayacaktır.

2.3.1. Teorem: (X, d) genelleştirilmiş bir tam metrik uzay olsun. $\Lambda: X \rightarrow X$, Lipschitz sabiti $L < 1$ olan kesin daralan bir operatör (daralma dönüşümü) olsun. Bazı $x \in X$ için

$d(\Lambda^{k+1}x, \Lambda^k x) < \infty$ olacak şekilde negatif olmayan bir k tamsayısı var olsun. O zaman aşağıdakiler doğrudur:

(a) $\{\Lambda^n x\}$ dizisi Λ 'nın bir x^* sabit noktasına yakınsar.

(b) x^* , Λ 'nın aşağıdaki kümedeki tek sabit noktasıdır.

$$X^* = \{y \in X \mid d(\Lambda^k x, y) < \infty\};$$

(c) $y \in X^*$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$d(y, x^*) \leq \frac{1}{1-L} d(\Lambda y, y).$$

Son zamanlarda, Cadariu ve Radu (2008), Jensen'in fonksiyonel denklemine sabit nokta yöntemini uyguladı. Böyle bir fikir kullanılarak bu denklemin Hyers-Ulam kararlılığı için bir kanıt sunulabilir.

Şimdi burada Cadariu ve Radu'nun yöntemini kullanarak sınırlı ve sürekli bir $F(x, y)$ fonksiyonu için

$$y'(x) = F(x, y(x)) \tag{2.20}$$

formundaki diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılıklarını kanıtlayacağız. Öncelikle (2.20) diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını inceleyelim (Jung, 2010).

2.3.2. Teorem: $a < b$ biçimindeki a ve b reel sayıları için $I = [a, b]$ kapalı aralığından bir $c \in I$ seçelim. K, L pozitif reel sayılar olmak üzere $0 < KL < 1$ olsun. Farz edelim ki sürekli bir $F: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in I$ ve $y, z \in \mathbb{R}$ için

$$|F(x, y) - F(x, z)| \leq L|y - z| \tag{2.21}$$

Lipschitz koşulunu sağlasın. Eğer sürekli türevlenebilen bir $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in I$ için

$$|y'(x) - F(x, y(x))| \leq \varphi(x) \quad (2.22)$$

eşitsizliğini sağlarsa, burada $\varphi: I \rightarrow (0, \infty)$ bir sürekli fonksiyon olup her bir $x \in I$ için

$$\left| \int_c^x \varphi(\tau) d\tau \right| \leq K\varphi(x) \quad (2.23)$$

eşitsizliğini sağlar, bu durumda tek bir $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır öyle ki

$$y_0(x) = y(c) + \int_c^x F(\tau, y_0(\tau)) d\tau \quad (2.24)$$

dolayısıyla y_0 , (2.20)'nin bir çözümüdür) ve her $x \in I$ için

$$|y(x) - y_0(x)| \leq \frac{K}{1 - KL} \varphi(x) \quad (2.25)$$

olur.

İspat: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye bir sürekli fonksiyon olsun,

$$X = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ sürekli fonksiyon}\} \quad (2.26)$$

kümesi için aşağıdaki genelleştirilmiş metriği tanımlayalım:

$$d(f, g) = \inf\{C \in [0, \infty) : |f(x) - g(x)| \leq C\varphi(x), \forall x \in I\}. \quad (2.27)$$

Şimdi sadece üçgen eşitsizliğinin (M_3) ispatını vereceğiz. Farz edelim ki bazı $f, h, g \in X$ için $d(f, g) > d(f, h) + d(h, g)$ olsun. O zaman, (2.27)'yi kullanarak $x_0 \in I$ için

$$\begin{aligned} |f(x_0) - g(x_0)| &> \{d(f, h) + d(h, g)\}\varphi(x_0) \\ &= d(f, h)\varphi(x_0) + d(h, g)\varphi(x_0) \\ &\geq |f(x_0) - h(x_0)| + |h(x_0) - g(x_0)| \end{aligned}$$

ifadesi bir çelişkidir.

Şimdi $\{h_n\}$, (X, d) uzayında tanımlı bir Cauchy dizisi olsun. O zaman $\varepsilon > 0$ için, $N_\varepsilon > 0$ tamsayısı vardır öyle ki tüm $m, n \geq N_\varepsilon$ için $d(h_m, h_n) \leq \varepsilon$ olur. Ayrıca (2.27) gereği

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_\varepsilon, \forall x \in I: |h_m(x) - h_n(x)| \leq \varepsilon \varphi(x) \quad (2.28)$$

olur. Eğer x sabit ise (2.28) gereği $\{h_n(x)\}$ dizisi $\mathbb{R}$ 'de bir Cauchy dizisi olur. $\mathbb{R}$ tam olduğundan her $x \in I$ için $\{h_n(x)\}$ dizisi yakınsaktır. Böylece, biz $h: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$$

fonksiyonunu tanımlayabiliriz.

m sonsuza giderken (2.28) gereği,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in I: |h(x) - h_n(x)| \leq \varepsilon \varphi(x) \quad (2.29)$$

elde ederiz. φ fonksiyonu I 'da sınırlı olduğundan $\{h_n\}$ dizisi h fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Böylece h sürekli olur ve $h \in X$ 'tir.

Ayrıca (2.27) ve (2.29)'u dikkate alırsak şu sonuca varabiliriz:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon: d(h, h_n) \leq \varepsilon.$$

Yani $\{h_n\}$ Cauchy dizisi (X, d) 'de h fonksiyonuna yakınsar. Dolayısıyla (X, d) uzayı tamdır.

Şimdi, $\Lambda: X \rightarrow X$ operatörünü her $f \in X$ için

$$(\Lambda f)(x) = y(c) + \int_c^x F(\tau, f(\tau)) d\tau \quad (x \in I) \quad (2.30)$$

olarak tanımlayalım (gerçekten, Kalkülüsün Temel Teoremine göre, F ve f sürekli fonksiyonlar olmak üzere Λf , I 'da sürekli türevlenebilirdir. Buradan $\Lambda f \in X$ olduğu sonucuna varabiliriz.).

Λ operatörünün X üzerinde kesin daralan olduğunu kanıtlayacağız. Her $f, g \in X$ için, $C_{fg} \in [0, \infty)$ keyfi sabit olmak üzere $d(f, g) \leq C_{fg}$ olsun, (2.27)'den her $x \in I$ için

$$|f(x) - g(x)| \leq C_{fg}\varphi(x) \quad (2.31)$$

olur. (2.21), (2.23), (2.27), (2.30) ve (2.31) gereği her $x \in I$ için

$$\begin{aligned} |(\Lambda f)(x) - (\Lambda g)(x)| &= \left| \int_c^x \{F(\tau, f(\tau)) - F(\tau, g(\tau))\} d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_c^x |F(\tau, f(\tau)) - F(\tau, g(\tau))| d\tau \right| \\ &\leq L \left| \int_c^x |f(\tau) - g(\tau)| d\tau \right| \\ &\leq LC_{fg} \left| \int_c^x \varphi(\tau) d\tau \right| \\ &\leq KLC_{fg}\varphi(x) \end{aligned}$$

olur, buradan da $d(\Lambda f, \Lambda g) \leq KLC_{fg}$ sonucuna ulaşırız. Buradan her $f, g \in X$ için $d(\Lambda f, \Lambda g) \leq KLd(f, g)$ sonucuna varırız, burada $0 < KL < 1$ dir.

(2.26) ve (2.30) gereği keyfi $g_0 \in X$ için $0 < C < \infty$ bir sabit olmak üzere her $x \in I$ için

$$|(\Lambda g_0)(x) - g_0(x)| = \left| y(c) + \int_c^x F(\tau, g_0(\tau)) d\tau - g_0(x) \right| \leq C\varphi(x)$$

olur, çünkü $F(x, g_0(x))$ ve $g_0(x)$ I 'da sınırlıdır ve $\min_{x \in I} \varphi(x) > 0$ olur. Böylece, (2.27)'den yola çıkarak $d(\Lambda g_0, g_0) < \infty$ elde ederiz.

Bu nedenle, 2.3.1. Teorem (a)'ya göre $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir sürekli bir fonksiyonu vardır öyle ki (X, d) 'de $\Lambda^n g_0 \rightarrow y_0$ ve $\Lambda y_0 = y_0$ olur ve her $x \in I$ için y_0 (2.24) denklemini sağlar.

$\{g \in X | d(g_0, g) < \infty\} = X$ ifadesini doğrulayalım. Her $g \in X$ için, g ve g_0 , I 'da sınırlı ve $\min_{x \in I} \varphi(x) > 0$ olduğundan her $x \in I$ için $|g_0(x) - g(x)| \leq C_g \varphi(x)$ olacak şekilde

$0 < C_g < \infty$ sabiti vardır. Buradan her $g \in X$ için $d(g_0, g) < \infty$, yani $\{g \in X | d(g_0, g) < \infty\} = X$ olur. Bu nedenle 2.3.1. Teorem (b)'nin ışığında, y_0 'ın (2.24) özelliği ile tek sürekli fonksiyon olduğu sonucuna varırız.

Öte yandan, (2.22)'den her $x \in I$ için aşağıdaki sonuç çıkar:

$$-\varphi(x) \leq y'(x) - F(x, y(x)) \leq \varphi(x).$$

Yukarıdaki eşitsizlikte her terimi c 'den x 'e integre edersek, o zaman her $x \in I$ için

$$\left| y(x) - y(c) - \int_c^x F(\tau, y(\tau)) d\tau \right| \leq \left| \int_c^x \varphi(\tau) d\tau \right|$$

elde ederiz. Böylece (2.23) ve (2.30) gereği her $x \in I$ için

$$|y(x) - (\Lambda y)(x)| \leq \left| \int_c^x \varphi(\tau) d\tau \right| \leq K\varphi(x)$$

bulunur ki bunun anlamı

$$d(y, \Lambda y) \leq K \tag{2.32}$$

olduğudur. Son olarak 2.3.1. Teorem (c) ve (2.32) gereği

$$d(y, y_0) \leq \frac{1}{1 - KL} d(\Lambda y, y) \leq \frac{K}{1 - KL}$$

elde edilir, bu da (2.25) eşitsizliğinin her $x \in I$ için geçerli olduğu anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanır (Jung, 2010).

Son teoremde, (2.20) diferansiyel denkleminin sınırlı ve kapalı aralıkta tanımlanan Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını inceledik. Şimdi sınırsız aralıklar için bir teorem kanıtlayacağız. Daha doğrusu, 2.3.2. Teorem'de I aralığını $(-\infty, b]$, $\mathbb{R}$ veya $[a, \infty)$ gibi sınırsız aralıklarla değiştirirsek de aşağıdaki teorem gibi geçerli olur.

2.3.3. Teorem: a ve b reel sayıları verilsin. I ile $(-\infty, b]$, $\mathbb{R}$ veya $[a, \infty)$ kümelerinden herhangi biri gösterilsin. $I = [a, \infty)$ için $c = a$ veya $I = (-\infty, b]$ için $c = b$ veya $I = \mathbb{R}$ için c sabit bir reel sayı olsun. K ve L sayıları, $0 < KL < 1$ biçiminde pozitif sabitler olsun. $F: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon olsun, tüm $y, z \in \mathbb{R}$ ve her $x \in I$ için (2.21) ile verilen Lipschitz koşulu sağlansın. $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir fonksiyonu her $x \in I$ için (2.22) diferansiyel eşitsizliğini sağlasın, herhangi bir $x \in I$ için (2.23) koşulunu sağlayan $\varphi: I \rightarrow (0, \infty)$ bir sürekli fonksiyonu olsun, o zaman her $x \in I$ için (2.24) ve (2.25)'i sağlayan tek bir $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır.

İspat: Biz burada sadece $I = \mathbb{R}$ durumunun ispatını vereceğiz. Diğer durumları ispatlamak benzer şekildedir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $I_n = [c - n, c + n]$ olarak tanımlayalım (Burada $I = (-\infty, b]$ için $I_n = [b - n, b]$ ve $I = [a, \infty)$ için $I_n = [a, a + n]$ olarak seçeriz.). 2.3.2. Teorem'e göre her $x \in I_n$ için

$$y_n(x) = y(c) + \int_c^x F(\tau, y_n(\tau)) d\tau \quad (2.33)$$

ve

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{K}{1 - KL} \varphi(x) \quad (2.34)$$

olacak şekilde tek bir $y_n: I_n \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır. Buradan anlaşılan her $x \in I_n$ için y_n tek olduğundan,

$$y_n(x) = y_{n+1}(x) = y_{n+2}(x) = \dots \quad (2.35)$$

olduğudur. Her $x \in \mathbb{R}$ ve $n(x) \in \mathbb{N}$ için $n(x) = \min\{n \in \mathbb{N} | x \in I_n\}$ olarak tanımlayalım. Dahası, $y_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

$$y_0(x) = y_{n(x)}(x) \quad (2.36)$$

fonksiyonunu tanımlıyoruz ve y_0 'ın sürekli olduğunu iddia ediyoruz. Keyfi bir $x_1 \in \mathbb{R}$ için, $n_1 = n(x_1)$ bir tamsayı seçiyoruz. O zaman x_1 , I_{n_1+1} 'in iç kısmına aittir ve

$x_1 - \varepsilon < x < x_1 + \varepsilon$ biçimindeki x 'ler için $y_0(x) = y_{n_1+1}(x)$ 'i sağlayan bir $\varepsilon > 0$ vardır. y_{n_1+1} , x_1 'de sürekli olduğundan y_0 'da da öyledir. Yani herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ için y_0 , x_1 'de sürekliedir.

Şimdi tüm $x \in \mathbb{R}$ için y_0 fonksiyonunun (2.24) ve (2.25)'i sağladığını göstereceğiz. Keyfi bir $x \in \mathbb{R}$ için $n(x)$ tamsayısını seçiyoruz. Sonra, $x \in I_{n(x)}$ için (2.33) ve (2.36)'yı kullanarak

$$y_0(x) = y_{n(x)}(x) = y(c) + \int_c^x F(\tau, y_{n(x)}(\tau)) d\tau = y(c) + \int_c^x F(\tau, y_0(\tau)) d\tau$$

elde ederiz. Buradaki son eşitsizlik doğrudur çünkü $\tau \in I_{n(x)}$ için $n(\tau) \leq n(x)$ 'dir ve (2.35) ve (2.36)'yı kullanırsak

$$y_{n(x)}(\tau) = y_{n(\tau)}(\tau) = y_0(\tau)$$

olur. Her $x \in \mathbb{R}$ için $x \in I_{n(x)}$ olduğundan (2.34) ve (2.36)'dan her $x \in I$ için

$$|y(x) - y_0(x)| = |y(x) - y_{n(x)}(x)| \leq \frac{K}{1 - KL} \varphi(x)$$

elde ederiz.

Son olarak y_0 'ın tek olduğunu gösterelim. $z_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye başka bir sürekli fonksiyon olsun öyle ki tüm $x \in \mathbb{R}$ için (2.24) ve (2.25)'te y_0 yerine z_0 yazarsak da sağlansın. x 'in keyfi reel sayı olduğunu varsayalım. $y_0|_{I_{n(x)}} (= y_{n(x)})$ ve $z_0|_{I_{n(x)}}$ kısıtlamalarından her ikisi de $x \in I_{n(x)}$ 'in tümü için (2.24) ve (2.25)'i sağladığından, $y_{n(x)} = y_0|_{I_{n(x)}}$ fonksiyonunun tekliğinden anlaşılan

$$y_0(x) = y_0|_{I_{n(x)}}(x) = z_0|_{I_{n(x)}}(x) = z_0(x)$$

olduğudur. Böylece ispat tamamlanmış olur (Jung, 2010).

Şimdi aşağıdaki teoremden, sonlu ve kapalı bir aralıkta tanımlanan daha önce (2.20) ile verilen

$$y'(x) = F(x, y(x))$$

diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığını kanıtlıyoruz.

2.3.4. Teorem: $c \in \mathbb{R}$ ve $r > 0$ verilsin. I 'da r yarıçaplı c merkezli kapalı bir yuvarı gösterebilirsin, yani $I = \{x \in \mathbb{R} | c - r \leq x \leq c + r\}$ ve $F: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon olsun, her $x \in I$ ve $y, z \in \mathbb{R}$ için (2.21) Lipschitz koşulunu sağlasın, burada L , $0 < Lr < 1$ olan bir sabittir. $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olup her $x \in I$ ve bazı $\varepsilon \geq 0$ için

$$|y'(x) - F(x, y(x))| \leq \varepsilon \quad (2.37)$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlasın, bu durumda tek bir $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır öyle ki (2.24) denklemi (dolayısıyla y_0 , (2.20)'nin bir çözümüdür) ve her $x \in I$ için

$$|y(x) - y_0(x)| \leq \frac{r}{1 - Lr} \varepsilon \quad (2.38)$$

olur.

İspat: İlk olarak $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye sürekli fonksiyon olmak üzere $X = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ sürekli}\}$ kümesini tanımlarız ve X ile ilgili aşağıdaki gibi genelleştirilmiş bir metrik tanımlarız:

$$d(f, g) = \inf\{C \in [0, \infty) : |f(x) - g(x)| \leq C, \forall x \in I\}.$$

(X, d) 'nin genelleştirilmiş tam metrik uzay olduğu açıktır (2.3.2. Teorem ispatına bakınız).

$\Lambda: X \rightarrow X$ operatörünü herhangi $x \in I$ için

$$(\Lambda f)(x) = y(c) + \int_c^x F(\tau, f(\tau)) d\tau \quad (x \in I) \quad (2.39)$$

şeklinde tanımlayalım ($\Lambda f \in X$ olduğu doğrudur çünkü Λf Kalkülüsün Temel Teoremine göre sürekli türevlenebilir bir fonksiyondur.).

Şimdi Λ 'nın X üzerinde kesin daralan olduğunu iddia ediyoruz. $f, g \in X$ için, $C_{fg} \in [0, \infty)$, $d(f, g) \leq C_{fg}$ olmak üzere keyfi sabit olsun, buradan her $x \in I$ için

$$|f(x) - g(x)| \leq C_{fg} \quad (2.40)$$

olduğunu varsayalım. Dahası (2.21), (2.39) ve (2.40)'ı kullanırsak her bir $x \in I$ için;

$$\begin{aligned} |(\Lambda f)(x) - (\Lambda g)(x)| &= \left| \int_c^x \{F(\tau, f(\tau)) - F(\tau, g(\tau))\} d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_c^x |F(\tau, f(\tau)) - F(\tau, g(\tau))| d\tau \right| \\ &\leq L \left| \int_c^x |f(\tau) - g(\tau)| d\tau \right| \\ &\leq Lr C_{fg} \end{aligned}$$

elde ederiz, buradan $d(\Lambda f, \Lambda g) \leq Lr C_{fg}$ elde edilir. Bu nedenle, tüm $f, g \in X$ için $d(\Lambda f, \Lambda g) \leq Lr d(f, g)$ olur, burada $0 < Lr < 1$ olduğuna dikkat edelim.

2.3.2. Teorem'in ispatına benzer şekilde, her bir $g_0 \in X$ için $d(\Lambda g_0, g_0) < \infty$ özelliğinin sağlandığını gösterebiliriz. Bu nedenle, 2.3.1. Teorem (a)'dan anlaşılan, $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye bir sürekli fonksiyon vardır öyle ki (X, d) 'de $n \rightarrow \infty$ iken $\Lambda^n g_0 \rightarrow y_0$ olur ve o zaman $y_0 = \Lambda y_0$ olur, yani herhangi bir $x \in I$ için (2.24) denklemini sağlar.

Eğer $g \in X$ ise, g ve g_0 , kompakt I aralığında sürekli fonksiyonlardır. Dolayısıyla, her $x \in I$ için

$$|g_0(x) - g(x)| \leq C$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C > 0$ sabiti vardır. Her $g \in X$ için $d(g_0, g) < \infty$ veya $\{g \in X | d(g_0, g) < \infty\} = X$ eşitliği elde edilir. Bu nedenle, 2.3.1. Teorem (b)'ye göre, y_0 (2.24) özelliğine sahip tek sürekli fonksiyondur. Ayrıca, (2.37)'yi kullanırsak her $x \in I$ için

$$-\varepsilon \leq y'(x) - F(x, y(x)) \leq \varepsilon$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her bir terimini c 'den x 'e integre edersek, o zaman her $x \in I$ için

$$|(\Lambda y)(x) - y(x)| \leq \varepsilon r$$

olur, yani $d(\Lambda y, y) \leq \varepsilon r$ bulunur.

Şimdi 2.3.1. Teorem (c)'yi kullanırsak

$$d(y, y_0) \leq \frac{1}{1 - Lr} d(\Lambda y, y) \leq \frac{r}{1 - Lr} \varepsilon$$

elde ederiz. Bu her bir $x \in I$ için (2.38)'in geçerliliğini gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur (Jung, 2010).

(2.20) diferansiyel denkleminde ilgili aralık sonsuz aralık olduğunda Hyers-Ulam kararlılığına sahip olup olmadığı açık bir problemidir.

Örnek: $KL < 1$ 'i sağlayan K ve L pozitif sabitlerini seçelim. $\varepsilon < 2K$ pozitif sayıları için, $I = [0, 2K - \varepsilon]$ bir kapalı aralık olsun. Bir $p(x)$ polinomu verildiğinde, her $x \in I$ için

$$|y'(x) - Ly(x) - p(x)| \leq x + \varepsilon$$

sağlayan $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye bir sürekli türevlenebilir fonksiyon olduğunu varsayalım.

$F(x, y) = Ly + p(x)$ ve $\varphi(x) = x + \varepsilon$ alırsak, o zaman yukarıdaki eşitsizlik (2.22) ile aynı forma sahip olur. Dahası, herhangi bir $x \in I$ için

$$\left| \int_0^x \varphi(\tau) d\tau \right| = \frac{1}{2} x^2 + \varepsilon x \leq K\varphi(x)$$

elde ederiz, buradan her $x \in I$ için $K\varphi(x) - \frac{x^2}{2} - \varepsilon x \geq 0$ olur. 2.3.2. Teorem'e göre, $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye tek sürekli bir fonksiyon vardır öyle ki her $x \in I$ için

$$y_0(x) = y(0) + \int_0^x \{Ly_0(\tau) + p(\tau)\} d\tau$$

ve

$$|y(x) - y_0(x)| \leq \frac{K}{1 - KL} (x + \varepsilon)$$

olur. Yani $y'(x) - Ly(x) - p(x)$ diferansiyel denklemi Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır (Jung, 2010).

Örnek: a , 1'den büyük bir sabit olsun ve L , $0 < L < \ln a$ aralığında bir sabit seçelim. Bir $I = [0, \infty)$ aralığı ve $p(x)$ polinomu verildiğinde,

$$|y'(x) - Ly(x) - p(x)| \leq \varepsilon$$

sağlayan $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye sürekli türevlenebilen bir fonksiyon olduğunu varsayalım. $\varphi(x) = a^x$ seçersek, o zaman her bir $x \in I$ için,

$$\left| \int_0^x \varphi(\tau) d\tau \right| \leq \frac{1}{\ln a} \varphi(x)$$

elde ederiz. 2.3.3. Teorem'den herhangi bir $x \in I$ için

$$y_0(x) = y(0) + \int_0^x \{Ly_0(\tau) + p(\tau)\} d\tau$$

ve

$$|y(x) - y_0(x)| \leq \frac{1}{\ln a - L} a^x$$

sağlayan $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye tek bir sürekli fonksiyon vardır. Yani $y'(x) - Ly(x) - p(x)$ diferansiyel denklemi Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır (Jung, 2010).

Örnek: L ve r , $0 < Lr < 1$ olan pozitif sabitler olsun ve bazı c reel sayıları için

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid c - r \leq x \leq c + r\}$$

kapalı aralığını tanımlayalım. $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye sürekli türevlenebilen bir fonksiyonun her $x \in I$ ve bazı $\varepsilon \geq 0$ için

$$|y'(x) - Ly(x) - p(x)| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağladığını varsayalım, burada $p(x)$ bir polinomdur. O zaman 2.3.4. Teorem'den, $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye tek sürekli bir fonksiyon vardır öyle ki her $x \in I$ için

$$y_0(x) = y(0) + \int_0^x \{Ly_0(\tau) + p(\tau)\} d\tau$$

ve

$$|y(x) - y_0(x)| \leq \frac{r}{1 - Lr} \varepsilon$$

olur. Yani $y'(x) - Ly(x) - p(x)$ diferansiyel denklemi Hyers-Ulam anlamında kararlıdır (Jung, 2010).

Tekrar hatırlayacak olursak 1940 yılında Wisconsin Üniversitesi'nde yapılan bir konuşmada Ulam aşağıdaki problemi ortaya koydu: Hangi koşullar altında bir homomorfizm tam metrik grubun homomorfizmine yaklaşık olarak yakınsar? Daha kesin olarak $(G, ., d)$ bir metrik grup, $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x, y \in G$ için

$$d(f(xy), f(x)f(y)) < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan $f: G \rightarrow G$ 'ye bir eşleme verilsin, yalnız G 'ye bağlı, sabit bir K ve öyle ki her $x \in G$ için

$$d(f(x), g(x)) \leq K\varepsilon$$

sağlayan G 'de bir g homomorfizmi var mıdır? Olumlu cevabın varlığında homomorfizmin $g(xy) = g(x)g(y)$ denklemine göre kararlıdır denir, ayrıntılar için (Ulam, 1960)'a bakınız. Bir yıl sonra Hyers, Banach uzaylarında lineer fonksiyonel denklemler için bu probleme bir cevap verdi: E_1, E_2 bir reel Banach uzayı ve $\varepsilon > 0$ verilsin. O zaman her bir $f: E_1 \rightarrow E_2$ eşlemesi için

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon, \text{ her } x, y \in E_1$$

sağlanır. $g: E_1 \rightarrow E_2$ 'ye bir tek ek eşleme vardır öyle ki her $x \in E_1$ için,

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon$$

sağlanır. Hyers'in cevabından sonra, bugün Hyers-Ulam kararlılığı olarak bilinen ve bu konuya ayrılmış birçok çalışmada (Cadariu and Radu, 2008; Brzdek, Popa and Xu, 2007; Forti, 2004; Petru, Petruel and Yao, 2011) fonksiyonel denklemler için yeni bir kararlılık kavramı kurulmuştur. 1978'de, Rassias, bugün Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı olarak bilinen ve ε sabitini Ulam'ın probleminde bir değişken olarak ele alarak dikkate değer bir genelleme yapmıştır (Başcı, Mısır and Öğrekçi, 2020).

Hyers-Ulam anlamında diferansiyel denklemlerin kararlılık problemi Obloza (Obloza, 1993; 1997) çalışmaları ile başlamıştır. Daha sonra Alsina ve Ger (1998), I reel sayılarda açık bir aralık varsayarsak, $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye her diferansiyel eşlemede her $x \in I$ için $|y'(x) - y(x)| \leq \varepsilon$ sağlandığını kanıtladı ve $\varepsilon > 0$ verildiğinde $y'(x) = y(x)$ diferansiyel denklemi için bir y_0 çözümü vardır öyle ki her $x \in I$ için $|y(x) - y_0(x)| \leq 3\varepsilon$ olur. Bu sonuçları 2.2.1. Teorem ve 2.2.2. Teorem'de incelemiştik (Başcı vd, 2020).

Bu sonuç daha sonra Banach uzaylarında $y'(x) = \lambda y(x)$ denklemi ve (Takahasi vd, 2003a; 2003b) sabit katsayılı yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklemler için Takahasi, Miura ve Miyajima (Takahasi vd, 2002) tarafından genişletildi. Bu sonuçları da 2.2.3. Teorem’de inceledik. Bu ilham verici çalışmalardan sonra, bu konuda çok sayıda makale yayınlanmıştır ((de Oliveira and Sousa, 2018; Popa and Pugna, 2016; Shen, 2017) ve referanslarına bakınız) (Başcı vd, 2020).

Son olarak Jung

$$y' = f(x, y) \quad (2.41)$$

denkleminin Hyers-Ulam kararlılığını ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığında yukarıda belirtilen sonuçları doğrusal olmayan durumlara genişleterek kanıtladı. 2.3.2. Teorem, 2.3.3. Teorem ve 2.3.4. Teorem ile de bu sonuçları görmüş olduk. Sonra Bojor (2012)

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$$

lineer denklemler için Jung’ın tekniğini değiştirmiş ve bazı farklı varsayımlarla bir kararlılık sonucunu kanıtladı. Jung’ın tekniği ayrıca Tunç ve Biçer (2015) tarafından

$$y'(x) = F(x, y(x), y(x - \tau))$$

formundaki fonksiyonel denklemler için değiştirilmiştir (Başcı vd, 2020).

Şimdi 2.3.4. Teorem ile verdiğimiz sonucun daha az varsayımla da geçerli olduğunu gösteren bir çalışmayı inceleyeceğiz.

I bir açık aralık olsun. Her $\varepsilon \geq 0$ ve $y \in C^1(I)$ için

$$|y'(x) - f(x, y(x))| \leq \varepsilon$$

sağlansın, o zaman (2.41) denklemi için y_0 çözümü vardır öyle ki

$$|y(x) - y_0(x)| \leq K\varepsilon$$

olur burada K , ε ve y 'ye bağılı olmayan bir sabit olduğunda (2.41) diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam anlamında kararlı olduğu söylenir. Yukarıdaki ifade, ε ve K sabitlerini sırasıyla $\varphi, \Phi: I \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonları ile değiştirdikten sonra doğru olursa, burada bu fonksiyonlar y ve y_0 'a bağılı değildir, o zaman (2.41) diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlı olduğu söylenebilir (Başcı vd, 2020).

Şimdi, $r > 0$ için r ve x_0 reel sayıları için $I := [x_0, x_0 + r]$ aralığını göstereceğiz. Ayrıca I 'da tüm sürekli fonksiyonların kümesini

$$X := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ sürekli}\} = C(I, \mathbb{R}) \quad (2.42)$$

olarak tanımlıyoruz. Şimdi kararlılık analizinde kullanılmak üzere bir ara sonuç veriyoruz (Başcı vd, 2020).

2.3.5. Teorem: $d: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonunu

$$d(f, g) := \inf \{C \in [0, \infty]: |f(x) - g(x)|e^{-M(x-x_0)} \leq C\Phi(x), x \in I\} \quad (2.43)$$

tanımlayalım, $M > 0$ bir sabit verilsin ve $\Phi: I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. O zaman (X, d) genelleştirilmiş tam metrik uzay olur.

İspat: İlk olarak d 'nin X üzerinde genelleştirilmiş bir metrik olduğunu göstereceğiz. (M_1) ve (M_2) koşulları açıkça sağlanır, ayrıca (M_3) 'ün sağlandığını göstereceğiz. Bazı $f, g, h \in X$ için $d(f, g) > d(f, h) + d(h, g)$ sağlandığını varsayalım, o zaman $x_1 \in I$ vardır öyle ki

$$\begin{aligned} |f(x_1) - g(x_1)|e^{-M(x_1-x_0)} &> [d(f, h) + d(h, g)]\Phi(x_1) \\ &= d(f, h)\Phi(x_1) + d(h, g)\Phi(x_1) \\ &\geq |f(x_1) - h(x_1)|e^{-M(x_1-x_0)} + |h(x_1) - g(x_1)|e^{-M(x_1-x_0)} \end{aligned}$$

bu bir çelişkidir. (X, d) 'nin tamlığını gösterelim, (X, d) 'de $\{h_n\}$ bir Cauchy dizisi olsun. O zaman, her $\varepsilon > 0$ için $N(\varepsilon) > 0$ tamsayısı vardır öyle ki her $m, n \geq N(\varepsilon)$ için $d(h_m, h_n) \leq \varepsilon$ olur. Başka bir deyişle, her $\varepsilon > 0$ için, $N(\varepsilon) > 0$ tamsayısı vardır öyle ki her $m, n \geq N(\varepsilon)$ ve her $x \in I$ için

$$|h_m(x) - h_n(x)|e^{-M(x-x_0)} \leq \varepsilon \Phi(x) \quad (2.44)$$

olur. Bu $\{h_n(x)\}$ 'in $\mathbb{R}$ 'deki herhangi bir x için Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan, $\{h_n(x)\}$ dizisi her $x \in I$ için yakınsaktır ve $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$h(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$$

olarak tanımlayabiliriz. Şimdi (2.44)'te $m \rightarrow \infty$ yazdığımızda herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $N(\varepsilon) > 0$ tamsayısı vardır öyle ki her $x \in I$ ve her $n \geq N(\varepsilon)$ için

$$|h(x) - h_n(x)|e^{-M(x-x_0)} \leq \varepsilon \Phi(x) \quad (2.45)$$

elde ederiz. Yani herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $N(\varepsilon) > 0$ tamsayısı vardır öyle ki her $n \geq N(\varepsilon)$ için $d(h, h_n) \leq \varepsilon$ olur. Dahası Φ, I 'da sınırlı olduğundan, (2.45)'de $\{h_n(x)\}$ dizisinin düzgün olarak h 'ye yakınsadığı ve $h \in X$ olduğu sonucuna varırız. Böylece ispatı tamamlamış olduk (Başcı vd, 2020).

Artık (2.41) diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam anlamında kararlılığını incelemeye hazırız, aşağıdaki sonuçla bu incelemeyi yapıyoruz.

2.3.6. Teorem: $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon olduğunu varsayalım. Her $x \in I$ ve her $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Lipschitz koşulu sağlansın, burada $L > 0$ bir Lipschitz sabitidir. $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, her $x \in I$ ve bazı $\varepsilon > 0$ için

$$|y'(x) - f(x, y(x))| \leq \varepsilon \quad (2.46)$$

eşitsizliği sağlansın, o zaman (2.41)'in bir tek y_0 çözümü vardır ve her $x \in I$ için

$$|y(x) - y_0(x)| \leq (1 + L)r\varepsilon$$

sağlanır.

İspat: (2.42) ile tanımlanan X kümesini ele alalım ve bir $d: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonunu

$$d(f, g) = \inf\{C \in [0, \infty]: |f(x) - g(x)|e^{-(L+1)(x-x_0)} \leq C, x \in I\}$$

ile gösterelim. (X, d) 'nin 2.3.5. Teorem'e göre genelleştirilmiş bir tam metrik uzay olduğuna dikkat edin. Şimdi her $y \in X$ için $T: X \rightarrow X$ operatörünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$(Ty)(x) := y(x_0) + \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds, x \in I.$$

Bu operatörün herhangi bir sabit noktasının (2.41) diferansiyel denklemini çözdüğü açıktır. Kalkülüsün Temel Teoreminden $Ty \in X$ ve böylece keyfi $g_0 \in X$ ve her $x \in I$ için

$$|(Tg_0)(x) - g_0(x)|e^{-(L+1)(x-x_0)} < \infty$$

olduğu görülür, bunun anlamı her $g_0 \in X$ için $d(Tg_0, g_0) < \infty$ olmasıdır. Benzer şekilde her $g \in X$ ve her $x \in I$ için

$$|g_0(x) - g(x)|e^{-(L+1)(x-x_0)} < \infty$$

olur, buradan her $g \in X$ için $d(g_0, g) < \infty$ anlamı çıkar, yani

$$\{g \in X: d(g_0, g) < \infty\} = X.$$

Şimdi T 'nin X üzerinde kesin daralan olduğunu göstereceğiz. Her $g_1, g_2 \in X$ ve her $x \in I$ için

$$\begin{aligned}
 |(Tg_1)(x) - (Tg_2)(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))] ds \right| \\
 &\leq \int_{x_0}^x |f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))| ds \\
 &\leq L \int_{x_0}^x |g_1(s) - g_2(s)| ds \\
 &= L \int_{x_0}^x |g_1(s) - g_2(s)| e^{-(L+1)(s-x_0)} e^{(L+1)(s-x_0)} ds \\
 &\leq L d(g_1, g_2) \int_{x_0}^x e^{(L+1)(s-x_0)} ds \\
 &\leq \frac{L}{L+1} d(g_1, g_2) e^{(L+1)(x-x_0)}
 \end{aligned}$$

olur. Böylece her $g_1, g_2 \in X$ ve her $x \in I$ için

$$|(Tg_1)(x) - (Tg_2)(x)| e^{-(L+1)(x-x_0)} \leq \frac{L}{L+1} d(g_1, g_2)$$

elde ederiz. Dolayısıyla, her $g_1, g_2 \in X$ için

$$d(Tg_1, Tg_2) \leq \frac{L}{L+1} d(g_1, g_2)$$

elde ederiz, bunun anlamı T 'nin, X üzerinde kesin daralan olduğudur. Böylece $n = 1$ ve $X^* = X$ için 2.3.1. Teorem koşullarının hepsinin sağlandığını gösterdik. Öte yandan, (2.46)'dan her $x \in I$ için

$$-\varepsilon \leq y'(x) - f(x, y(x)) \leq \varepsilon$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği x_0 'dan x 'e integre edersek her $x \in I$ için

$$|y(x) - (Ty)(x)| \leq \varepsilon(x - x_0)$$

elde ederiz. Eğer bu eşitsizliği $e^{-(L+1)(x-x_0)}$ ile çarparsak her $x \in I$ için

$$|(Ty)(x) - y(x)|e^{-(L+1)(x-x_0)} \leq \varepsilon(x - x_0)e^{-(L+1)(x-x_0)}$$

elde ederiz, bunun anlamı her bir $x \in I$ için

$$d(Ty, y) \leq \varepsilon(x - x_0)e^{-(L+1)(x-x_0)} \leq \varepsilon r e^{-(L+1)(x-x_0)}$$

demektir.

Bu nedenle 2.3.1. Teorem'e göre (2.41) diferansiyel denkleminin bir tek $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ çözümü vardır ve her bir $x \in I$ için

$$d(y, y_0) \leq \frac{1}{1 - \frac{L}{L+1}} d(Ty, y) \leq (L + 1)\varepsilon r e^{-(L+1)(x-x_0)}$$

eşitsizliğini sağlar. $d(y, y_0)$ tanımından

$$|y(x) - y_0(x)|e^{-(L+1)(x-x_0)} \leq (L + 1)\varepsilon r e^{-(L+1)(x-x_0)}$$

sonucu çıkar, böylece her $x \in I$ için

$$|y(x) - y_0(x)| \leq (1 + L)r\varepsilon$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmıştır (Başcı vd, 2020).

Dikkat edilmelidir ki 2.3.4. Teorem'de $Lr < 1$ gerekli iken, 2.3.6. Teorem'de $Lr < 1$ olduğu varsayılmamıştır.

Şimdi (2.41) diferansiyel denkleminin 2.3.6. Teorem ile aynı tekniğe dayanan Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı üzerine bir sonuç vereceğiz. İlginç bir şekilde biz bu tahminin çok daha iyi olduğunu ve sınırsız aralıklara genişletilebileceğini göreceğiz.

2.3.7. Teorem: $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyonun her $x \in I$ ve her $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Lipschitz koşulunu sağladığını varsayalım. $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye sürekli türevlenebilir bir fonksiyon her $x \in I$ için

$$|y'(x) - f(x, y(x))| \leq \varphi(x) \quad (2.47)$$

eşitsizliğini sağlasın, burada $\varphi: I \rightarrow (0, \infty)$ azalmayan bir sürekli fonksiyondur ve her bir $x \in I$ için

$$\left| \int_{x_0}^x \varphi(s) ds \right| \leq K\varphi(x) \quad (2.48)$$

eşitsizliğini sağlar, o zaman (2.41) diferansiyel denkleminin bir tek y_0 çözümü vardır öyle ki her $x \in I$ için

$$|y(x) - y_0(x)| \leq K(1 + L)\varphi(x)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat: (2.42) ile tanımlanan X kümesini ele alıyoruz ve bir $d: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu ekliyoruz:

$$d(f, g) := \inf\{C \in [0, \infty]: |f(x) - g(x)|e^{-(L+1)(x-x_0)} \leq C\varphi(x), x \in I\}.$$

(X, d) 'nin yine 2.3.5. Teorem gereği genelleştirilmiş bir tam metrik uzay olduğuna dikkat ediniz. Şimdi her $y \in X$ için $T: X \rightarrow X$ operatörünü

$$(Ty)(x) := y(x_0) + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, x \in I$$

olarak tanımlayalım. Bu operatörün herhangi bir sabit noktasının (2.41) diferansiyel denklemini çözdüğü açıktır. Ayrıca, 2.3.6. Teorem'in ispatında olduğu gibi, her $g_0 \in X$ için $\{g \in X: d(g_0, g) < \infty\} = X$ ve $d(Tg_0, g_0) < \infty$ olduğu gösterilebilir.

Şimdi T 'nin X üzerine kesin daralan bir operatör olduğunu göstereceğiz. Kısmi integrasyon ile

$$\int_{x_0}^x \varphi(s) e^{(L+1)(s-x_0)} ds \leq \frac{1}{L+1} \varphi(x) e^{(L+1)(x-x_0)} - \frac{1}{L+1} \int_{x_0}^x \varphi'(s) e^{(L+1)(x-x_0)} ds$$

elde edilir ve φ 'nin monotonluğunu kullanarak her $x \in I$ için

$$\int_{x_0}^x \varphi(s) e^{(L+1)(s-x_0)} ds \leq \frac{1}{L+1} \varphi(x) e^{(L+1)(x-x_0)}$$

elde ederiz. Şimdi her $g_1, g_2 \in X$ için $d(g_1, g_2) \leq C_{g_1, g_2}$ olacak şekilde keyfi $C_{g_1, g_2} \in [0, \infty]$ sabiti olsun, yani her $x \in I$ için

$$|g_1(x) - g_2(x)| e^{-(L+1)(x-x_0)} \leq C_{g_1, g_2} \varphi(x)$$

olsun. Buradan hareketle, her $g_1, g_2 \in X$ ve her $x \in I$ için,

$$\begin{aligned} |(Tg_1)(x) - (Tg_2)(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))] ds \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq L \int_{x_0}^x |g_1(s) - g_2(s)| ds \\
&= L \int_{x_0}^x |g_1(s) - g_2(s)| e^{-(L+1)(s-x_0)} e^{(L+1)(s-x_0)} ds \\
&\leq L C_{g_1, g_2} \int_{x_0}^x \varphi(s) e^{(L+1)(s-x_0)} ds \\
&\leq \frac{L}{L+1} C_{g_1, g_2} \varphi(x) e^{(L+1)(x-x_0)}
\end{aligned}$$

olur. Böylece, her $g_1, g_2 \in X$ ve her $x \in I$ için,

$$|(Tg_1)(x) - (Tg_2)(x)| e^{-(L+1)(x-x_0)} \leq \frac{L}{L+1} C_{g_1, g_2} \varphi(x)$$

olur. Buradan, her $g_1, g_2 \in X$ için

$$d(Tg_1, Tg_2) \leq \frac{L}{L+1} d(g_1, g_2)$$

elde ederiz ve $\frac{L}{L+1} < 1$ olduğunu not edelim. Böylece T 'nin X üzerinde kesin daralan olduğu ve $k = 1$ ve $X^* = X$ için 2.3.1. Teorem koşullarının hepsinin sağlandığı gösterilmiştir. Öte yandan, (2.47)'yi kullanarak her $x \in I$ için

$$-\varphi(x) \leq y'(x) - f(x, y(x)) \leq \varphi(x)$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği x_0 'dan x 'e integre edersek ve (2.48) eşitsizliğini kullanırsak her $x \in I$ için

$$|y(x) - (Ty)(x)| \leq K\varphi(x)$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği $e^{-(L+1)(x-x_0)}$ ile çarparsak

$$|y(x) - (Ty)(x)| e^{-(L+1)(x-x_0)} \leq K\varphi(x) e^{-(L+1)(x-x_0)}$$

elde ederiz, bunun anlamı her $x \in I$ için

$$d(Ty, y) \leq K\varphi(x)e^{-(L+1)(x-x_0)}$$

olur. Bu nedenle, 2.3.1. Teorem'e göre, (2.41) diferansiyel denklemi için

$$d(y, y_0) \leq \frac{1}{1 - \frac{L}{L+1}} d(Ty, y) \leq K(1 + L)\varphi(x)e^{-(L+1)(x-x_0)}$$

eşitsizliğini sağlayan her $x \in I$ için bir tek $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ çözümü vardır. $d(y, y_0)$ tanımından

$$|y(x) - y_0(x)|e^{-(L+1)(x-x_0)} \leq K(1 + L)\varphi(x)e^{-(L+1)(x-x_0)}$$

ve böylece her $x \in I$ için

$$|y(x) - y_0(x)| \leq K(1 + L)\varphi(x)$$

elde ederiz, ispatı tamamlamış oluruz (Başcı vd, 2020).

Dikkat edilmelidir ki 2.3.2. Teorem ve 2.3.3. Teorem'de $KL < 1$ gerekli iken 2.3.7. Teorem'de $KL < 1$ olduğu varsayılmamıştır.

Uyarı: Jung (2010) ile aynı yöntemi kullanarak I aralığını sınırsız aralıkla değiştirirsek 2.3.7. Teorem'in geçerliliği görülür. Kanıt için 2.3.3. Teorem'e bakınız (Başcı vd, 2020).

Örnek:

$$y'(x) + \lambda y(x) = q(x) \tag{2.49}$$

diferansiyel denklemini $I := [0, 4/\lambda]$ aralığında ele alalım, burada $\lambda > 0$ bir sabit ve q, I 'da sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $f(x, y) = q(x) - \lambda y(x)$ olur ve açıkça $L = \lambda$ Lipschitz sabiti ile aşağıdaki Lipschitz koşulunu sağlar:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \lambda |y_1(x) - y_2(x)|.$$

Bu nedenle, 2.3.6. Teorem gereği (2.49) denklemi I 'da Hyers-Ulam anlamında kararlıdır. Jung'ın 2.3.4. Teorem'inin

$$I := [c - r, c + r] = \left[0, \frac{4}{\lambda}\right] \Rightarrow c = r = \frac{2}{\lambda}$$

aralığında çalışmadığı açıktır ve böylece

$$Lr = \lambda \frac{2}{\lambda} = 2 > 1$$

olur. Dolayısıyla Jung'ın çalışmasının $Lr < 1$ koşulu bu problem için geçerli değildir (Başcı vd, 2020).

Örnek: Bir önceki örnekte verilen (2.49) diferansiyel denklemini herhangi bir $r > 0$ reel sayısı için $I := [0, r]$ aralığında göz önünde bulunduralım. Yani f fonksiyonunun $L = \lambda$ Lipschitz koşulu ile (2.47) koşulunu sağladığını gösterdik. $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu $\varphi(x) := e^{(\lambda-1)x}$, $\lambda > 1$ olarak tanımlarsak

$$\left| \int_{x_0}^x \varphi(s) ds \right| = \int_0^x e^{(\lambda-1)s} ds = \frac{1}{\lambda-1} (e^{(\lambda-1)x} - 1) \leq \frac{1}{\lambda-1} e^{(\lambda-1)x} = \frac{1}{\lambda-1} \varphi(x)$$

elde edilir ve (2.48) koşulu $K = 1/(L - 1)$ ile sağlanır. Bu nedenle, 2.3.7. Teorem'e göre, (2.49) diferansiyel denklemi Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır. Jung'ın 2.3.2. Teorem sonucunun

$$KL = \lambda \left(\frac{\lambda}{\lambda-1} \right) = 1 + \frac{\lambda}{\lambda-1} > 1$$

olduğundan bu problemde çalışmadığı açıktır (Başcı vd, 2020).

Uyarı: Bojor

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$$

lineer denkleminin kararlılık problemini araştırdı ve Lipschitz sabitinde herhangi bir kısıtlama olmaksızın bu denklemin kararlılığını kanıtladı ancak (2.48) koşulunu daha kısıtlayıcı

$$\int_{x_0}^x |f(s)|\varphi(s)ds \leq P\varphi(x), P \in (0,1)$$

koşulu ile değiştirdi. Bir önceki örnekte (2.49) denklemini için $\varphi(x) := e^{(\lambda-1)x}$ ve $\lambda > 1$ olmak üzere herhangi bir $[0, r]$ aralığında

$$\int_{x_0}^x |f(s)|\varphi(s)ds = \lambda \int_{x_0}^x \varphi(s)ds \leq \frac{\lambda}{\lambda-1} \varphi(x)$$

olduğunu gösterdik. Bojor'un sonucunun

$$P = \frac{\lambda}{\lambda-1} > 1$$

durumundan dolayı bu problemde geçerli olmadığı açıktır (Başcı vd, 2020).

Uyarı: Tunç ve Biçer

$$y'(x) = F(x, y(x), y(x-r))$$

fonksiyonel denklemini için Jung'ın tekniğini değiştirerek kararlılık çözümünü ispatladı. Gecikmeyi iptal edersek yani $r = 0$ seçersek, burada ele alınan (2.41) denklemini elde ederiz. Bu durumda Tunç ve Biçer'in 2.3.1. Teorem ve 2.3.6. Teorem sonuçlarının $Lr < 1$ koşulunu hala sağladığını varsayarsak, buradan ayrıca bu sonuçların yukarıda verilen örnek için geçerli olmadığı görülür (Başcı vd, 2020).

Şimdi gecikmeli diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılıkları üzerine bazı sonuçları tartışacağız. Gecikmeli diferansiyel denklemlerin önemli uygulamaları vardır ve bunların teorisi klasik diferansiyel denklemlerin teorisinden bazı noktalarda farklılık gösterir. Bu nedenle bu tip denklemlerin kararlılık araştırması ayrıca yapılmalıdır.

2010 yılında Jung ve Brzdek bir başlangıç koşuluyla $y'(t) = \lambda y(t - \tau)$ diferansiyel denkleminin $y: [-\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ yaklaşık çözümlerini araştırdı, burada $\lambda > 0$ ve $\tau > 0$ reel sabitlerdir. Yazarlar, $[-\tau, 0]$ aralığında sabit olan ve bu nedenle oldukça basit formlara sahip olan denklem çözümlerinin yaklaşık çözümlerin yaklaşık olarak tahmin edilebileceğini gösterdiler. Elde ettikleri sonuçlar, Ulam'ın getirdiği kararlılık kavramına karşılık geliyor (Tunç and Bıçer, 2015).

Son olarak, 2013'te Otrocol ve Ilea

$$x'(t) = f(t, x(t), x(g(t)))$$

fonksiyonel diferansiyel denkleminin kararlılık analizi ile ilgilendiler. Otrocol ve Ilea, $[a, b]$ kompakt aralığında çözümün Hyers-Ulam kararlılığı hakkında iki sonuç elde ettiler ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını $[a, \infty)$ aralığına genelleştirdiler (Tunç and Bıçer, 2015).

Sıradaki teoremlerin amacı, Rassias, Takahasi, Tunç ve Bıçer'in çalışmalarından hareketle

$$y'(t) = F(t, y(t), y(t - \tau)) \quad (2.50)$$

gecikmeli diferansiyel denklemin Hyers-Ulam-Rassias ve Hyers-Ulam kararlılığını incelemektir. Burada $\tau > 0$ bir reel sabit, $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı ve sürekli fonksiyondur (Tunç and Bıçer, 2015).

(2.50) denkleminin Hyers-Ulam kararlılığı ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını incelemek için sabit nokta yöntemini uygulayacağız. Elde edilecek sonuçlar Jung ve Brzdek (2010) ve Obloza (1993) sonuçlarını genişletir ve iyileştirir (Tunç and Bıçer, 2015).

(2.50) denkleminin Otrocol ve İlea'da tartışılan denkleme dahil edilmesine rağmen, burada kurulacak varsayımlar ve bu yazıda kullanılacak prosedür (Otrocol and İlea, 2013) ile verilenlerden farklıdır (Tunç and Biçer, 2015).

Bu arada, son yıllarda çeşitli diferansiyel denklem sınıfları için Hyers-Ulam-Rassias ve Hyers-Ulam kararlılık problemleri elde edildi ve hala araştırmacıların büyük ilgisini çekiyor. Ancak bu çalışmaların detaylarını burada tartışmak istemiyoruz. Bu nedenle, (2.50) denklemin Hyers-Ulam kararlılığı ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını araştırmak önemlidir ve değerlidir. Burada elde edilecek sonuçlar literatürdeki konuya katkı sağlar ve fonksiyonel diferansiyel denklemlerin nitel davranışları üzerinde çalışan araştırmacılar faydalı olabilir (Tunç and Biçer, 2015).

2.3.2. Tanım (Jung and Brzdek, 2010): Bazı $\epsilon > 0, \Psi \in C[t_0 - \tau, t_0]$ ve $t_0, T \in \mathbb{R}$ ile $T > t_0$ olmak üzere, $f: [t_0 - \tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir sürekli fonksiyonun

$$\begin{cases} |f'(t) - F(t, f(t), f(t - \tau))| < \epsilon, & t \in [t_0, T], \\ |f(t) - \Psi(t)| < \epsilon, & t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases}$$

eşitsizliklerini sağladığını varsayalım. Bu durumda

$$\begin{cases} f_0'(t) = F(t, f_0(t), f_0(t - \tau)), & t \in [t_0, T], \\ f_0(t) = \Psi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0], \\ |f(t) - f_0(t)| < K(\epsilon), & t \in [t_0 - \tau, T], \end{cases}$$

koşullarını sağlayan bir $f_0: [t_0 - \tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu var olsun, burada $K(\epsilon)$, sadece ϵ 'a bağlı bir ifadedir (Tunç and Brzdek, 2015).

Bu durumda (2.50) denkleminin Hyers-Ulam kararlılığına sahip olduğunu söyleriz. Yukarıdaki ifade ϵ ve $K(\epsilon)$ yerine φ ve Φ yazıldığında da doğruysa, burada $\phi, \Phi \in C[t_0 - \tau, T]$ açıkça f ve f_0 'a bağlı olmayan fonksiyonlardır, o zaman (2.50) denkleminin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığına (genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlılığı) sahip olduğunu söyleriz (Tunç and Brzdek, 2015).

$$y'(t) = F(t, y(t), y(t - \tau)) \quad (2.50)$$

denkleminin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını sabit nokta yöntemini kullanarak kanıtlayacağız.

2.3.8. Teorem: $I = [t_0 - \tau, T]$ için, $F: I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$|F(t, x, y) - F(t, z, w)| \leq L_1|x - z| + L_2|y - w|$$

Lipschitz koşulunu her $(t, x, y), (t, z, w) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. $\Phi: I \rightarrow (0, \infty)$ bir sürekli fonksiyon olsun. $\Psi \in C[t_0 - \tau, t_0]$, K , L_1 ve L_2 pozitif sabit ve $0 < K(L_1 + L_2) < 1$ olmak üzere her $t \in I = [t_0 - \tau, T]$ için $\left| \int_{t_0}^t \Phi(u) du \right| \leq K\Phi(t)$ olduğunu varsayalım. Eğer $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu

$$\begin{cases} |y'(t) - F(t, y(t), y(t - \tau))| < \varphi(t), & t \in [t_0, T], \\ |y(t) - \Psi(t)| < \varphi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases}$$

eşitsizliklerini sağlarsa, bu durumda tek bir $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır öyle ki

$$\begin{cases} y_0'(t) = F(t, y_0(t), y_0(t - \tau)), & t \in [t_0, T], \\ y_0(t) = \Psi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases} \quad (2.51)$$

ve

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \frac{1}{1 - K(L_1 + L_2)} K\Phi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, T] \quad (2.52)$$

sağlanır.

İspat: $C: I \rightarrow \mathbb{R}$ arasındaki tüm sürekli fonksiyonların uzayı olan S kümesini

$$S = \{\varphi: I \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \in C, \varphi(t) = \Psi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0]\}$$

ile tanımlayalım. S üzerinde genelleştirilmiş metriği şu şekilde tanımlıyoruz:

$$d(\varphi, \mu) = \inf\{M \in [0, \infty): |\varphi(t) - \mu(t)| \leq M\Phi(t), \forall t \in I\}. \quad (2.53)$$

O zaman (S, d) genelleştirilmiş tam metrik uzaydır.

$\Lambda: S \rightarrow S$ dönüşümünü

$$\begin{cases} (\Lambda\varphi)(t) = \Psi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0], \\ (\Lambda\varphi)(t) = \Psi(t_0) + \int_{t_0}^t F(u, \varphi(u), \varphi(u - \tau))du, & t \in [t_0, T] \end{cases} \quad (2.54)$$

ile tanımlayalım. $\varphi \in S$ için $\Lambda\varphi$ 'nin sürekli olduğu açıktır. Böylece $\Lambda\varphi \in S$ yazabiliriz.

Λ 'nin S üzerinde kesin daralan olduğunu gösterelim. $\varphi, \mu \in S$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} |(\Lambda\varphi)(t) - (\Lambda\mu)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t \{F(u, \varphi(u), \varphi(u - \tau)) - F(u, \mu(u), \mu(u - \tau))\} du \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |F(u, \varphi(u), \varphi(u - \tau)) - F(u, \mu(u), \mu(u - \tau))| du \\ &\leq L_1 \int_{t_0}^t |\varphi(u) - \mu(u)| du + L_2 \int_{t_0}^t |\varphi(u - \tau) - \mu(u - \tau)| du \\ &\leq (L_1 + L_2)M \left| \int_{t_0}^t \Phi(u) du \right|, \quad t \in [t_0, T] \end{aligned}$$

ve

$$|(\Lambda\varphi)(t) - (\Lambda\mu)(t)| = \Psi(t) - \Psi(t) = 0, \quad t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

elde edilir ki bunun anlamı $d(\Lambda\varphi, \Lambda\mu) \leq K(L_1 + L_2)d(\varphi, \mu)$ olmasıdır.

$0 < K(L_1 + L_2) < 1$ olduğundan S, Λ üzerine kesin daralan olur.

Her $t \in I$ ve keyfi $\xi \in S$ için, $I = [t_0 - \tau, T]$ üzerinde sınırlı $\xi(t)$ ve $F(t, \xi(t), \xi(t - \tau))$ ve $\min_{t \in I} \Phi(t) > 0$ olduğundan, o zaman $0 < M < \infty$ bir sabit vardır öyle ki

$$|(\Lambda\xi)(t) - \xi(t)| = \left| \Psi(t_0) + \int_{t_0}^t F(u, \xi(u), \xi(u - \tau)) du - \xi(t) \right| \leq M\varphi(t)$$

elde edilir, burada $\varphi: I \rightarrow (0, \infty)$ olarak verilmiştir. Böylece (2.53) denklemini kullanırsak $d(\Lambda\xi, \xi) < \infty$ elde ederiz. Buradan, 2.3.1. Teorem'e göre $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye bir sürekli fonksiyon vardır öyle ki (S, d) uzayında $\Lambda^n \xi \rightarrow y_0$ ve $\Lambda y_0 = y_0$ olur, yani y_0

$$\begin{cases} y_0'(t) = F(t, y_0(t), y_0(t - \tau)), & t \in [t_0, T], \\ y_0(t) = \Psi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases}$$

eşitliklerini sağlar. Biz $\{g \in S : d(\xi, g) < \infty\} = S$ olduğunu gösterirsek, 2.3.1. Teorem'den (2.51) özelliğinin sağlandığını ve y_0 'ın tek sürekli fonksiyon olduğunu söyleyebiliriz.

Her $g \in S$ için, g ve ξ , I 'da sınırlı ise, $0 < M_g < \infty$ olacak şekilde bir sabit vardır öyle ki her $t \in I$ için

$$|\xi(t) - g(t)| \leq M_g \varphi(t)$$

olur. O zaman her $g \in S$ için, $d(\xi, g) < \infty$ ve $\{g \in S : d(\xi, g) < \infty\} = S$ olur.

Dahası, her $t \in [t_0, T]$ için

$$-\Phi(t) \leq y'(t) - F(t, y(t), y(t - \tau)) \leq \Phi(t)$$

olduğu açıktır. Bu eşitsizlikteki her bir terimin t_0 'dan t 'ye integralini alırsak, o zaman

$$\left| y(t) - \Psi(t_0) - \int_{t_0}^t F(u, y(u), y(u - \tau)) du \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \Phi(u) du \right|, \quad t \in [t_0, T]$$

elde ederiz. Bu nedenle, Λ tanımından

$$|y(t) - (\Lambda y)(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t \varphi(u) du \right| \leq K\varphi(t), \quad \text{her bir } t \in I$$

elde edilir. Buradan, $d(y, \Lambda y) \leq K$ olur. 2.3.1. Teorem'den ve son eşitsizlikten,

$$d(y, y_0) \leq \frac{1}{1 - K(L_1 + L_2)} d(\Lambda y, y) \leq \frac{1}{1 - K(L_1 + L_2)} K\Phi(t), \quad \forall t \in I$$

elde edilir. 2.3.8. Teorem'in ispatı böylece tamamlanmış olur (Tunç and Biçer, 2015).

2.3.9. Teorem: Varsayalım ki $F: I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, aşağıdaki Lipschitz koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyondur:

$$|F(t, x, y) - F(t, z, w)| \leq L_1|x - z| + L_2|y - w|,$$

burada $(t, x, y)(t, z, w) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ve $0 < T(L_1 + L_2) < 1$ biçimindedir.

$\Psi \in C[t_0 - \tau, t_0]$ ve $\varepsilon \geq 0$ olsun. $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu

$$\begin{cases} |y'(t) - F(t, y(t), y(t - \tau))| < \varepsilon, & t \in [t_0, T], \\ |y(t) - \Psi(t)| < \varepsilon, & t \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases}$$

eşitsizliklerini sağlarsa, o zaman $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye bir tek sürekli fonksiyon vardır öyle ki

$$\begin{cases} y_0'(t) = F(t, y_0(t), y_0(t - \tau)), & t \in [t_0, T] \\ y_0(t) = \Psi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases} \quad (2.55)$$

ve

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \frac{\varepsilon T}{1 - (L_1 + L_2)}, \forall t \in I \quad (2.56)$$

sağlanır.

İspat: S üzerine aşağıdaki gibi genelleştirilmiş bir metrik tanımlayalım:

$$d_1(\varphi, \mu) = \inf\{M \in [0, \infty]: |\varphi(t) - \mu(t)| \leq M, \forall t \in I\}.$$

O zaman, (S, d_1) bir genelleştirilmiş tam metrik uzaydır. Her bir $\varphi, \mu \in S$ ve $M_{\varphi, \mu} \in \{M \in [0, \infty]: |\varphi(t) - \mu(t)| \leq M, \forall t \in I\}$ için (2.54) denkleminde,

$$\begin{aligned} |(\Lambda\varphi)(t) - (\Lambda\mu)(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t \{F(u, \varphi(u), \varphi(u - \tau)) - F(u, \mu(u), \mu(u - \tau))\} du \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |F(u, \varphi(u), \varphi(u - \tau)) - F(u, \mu(u), \mu(u - \tau))| du \right| \\ &\leq L_1 \int_{t_0}^t |\varphi(u) - \mu(u)| du + L_2 \int_{t_0}^t |\varphi(u - \tau) - \mu(u - \tau)| du \\ &\leq (L_1 + L_2)TM_{\varphi, \mu}, \quad t \in [t_0, T] \end{aligned}$$

ve

$$|(\Lambda\varphi)(t) - (\Lambda\mu)(t)| = \Psi(t) - \Psi(t) = 0, \quad t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

ki bunun anlamı $d_1(\Lambda\varphi, \Lambda\mu) \leq (L_1 + L_2)Td_1(\varphi, \mu)$ olmasıdır. $0 < T(L_1 + L_2) < 1$ olduğundan, o zaman Λ , S üzerinde kesin daralandır.

Keyfi $\xi \in S$ için, $\xi(t)$ ve $F(t, \xi(t), \xi(t - \tau))$ sınırlı olduğundan, $d_1(\Lambda\xi, \xi) < \infty$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla, 2.3.1. Teorem'den, $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye bir sürekli fonksiyon vardır öyle ki (S, d_1) 'de $\Lambda^n \xi \rightarrow y_0$ ve $\Lambda y_0 = y_0$ 'dir, yani y_0 fonksiyonu

$$\begin{cases} y_0'(t) = F(t, y_0(t), y_0(t - \tau)), & t \in [t_0, T], \\ y_0(t) = \Psi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases}$$

eşitliklerini sağlar. g ve ξ , I üzerinde sınırlıdır, o zaman $d_1(\xi, g) < \infty$ ($\forall g \in S$) olur. Buradan $\{d_1(\xi, g) < \infty\} = S$ olur. Böylece, 2.3.1. Teorem'den dolayı y_0 , (2.55) özelliğine sahip tek sürekli fonksiyondur.

Dahası, her $t \in [t_0, T]$ için

$$-\varepsilon \leq y'(t) - F(t, y(t), y(t - \tau)) \leq \varepsilon$$

olduğu açıktır. Buradan,

$$-\varepsilon \int_{t_0}^t du \leq \int_{t_0}^t y'(u) du - \int_{t_0}^t F(u, y(u), y(u - \tau)) du \leq \varepsilon \int_{t_0}^t du, \forall t \in [t_0, T],$$

ve

$$|(\Lambda y)(t) - y(t)| \leq \varepsilon(t - t_0), \text{ her } t \in [t_0, T]$$

elde edilir. Λ 'nın tanımından

$$|y(t) - (\Lambda y)(t)| \leq T\varepsilon, \text{ herhangi bir } t \in I$$

elde edilir. 2.3.1. Teorem ve son eşitsizlikten

$$d_1(y, y_0) \leq \frac{1}{1 - T(L_1 + L_2)} d_1(\Lambda y, y) \leq \frac{T\varepsilon}{1 - T(L_1 + L_2)}, \forall t \in I$$

elde edilir. Bu eşitsizlik 2.3.9. Teorem'in ispatını tamamlar (Tunç and Bıçer, 2015).

Sıradaki sonuçla sınırsız aralıklarda gecikmeli diferansiyel denklemler için kararlılık sonuçlarını kanıtlayarak daha önceki sonuçları genişletip geliştireceğiz. Sınırsız aralıklarla

elde edilen kararlılık sonuçları için (Jung, 2001) ve (Tunç and Biçer, 2015) kaynaklarında bahsedilen çalışmaların kullandığı ilham verici teknikler kullanacağız (Öğrekçi, 2019).

Bu sonucu tartışmadan önce

$$y'(t) = F(t, y(t), y(t - \tau)) \quad (2.57)$$

diferansiyel denklemi için tam Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını hatırlayalım:

Bazı $\varepsilon \geq 0$, $\Psi \in C[t_0 - \tau, t_0]$ ve t_0 için $T \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T > t_0$ olsun, $f: [t_0 - \tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir sürekli fonksiyonunun

$$\begin{cases} |f'(t) - F(t, f(t), f(t - \tau))| < \varepsilon, & t \in [t_0, T] \\ |f(t) - \Psi(t)| < \varepsilon, & t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases}$$

eşitsizliklerinin sağlandığını varsayalım. Bu durumda

$$\begin{cases} f_0'(t) = F(t, f_0(t), f_0(t - \tau)), & t \in [t_0, T] \\ f_0(t) = \Psi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases}$$

ve

$$|f(t) - f_0(t)| < K(\varepsilon), \quad t \in [t_0 - \tau, T]$$

sağlayan bir $f_0: [t_0 - \tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu var olsun, burada $K(\varepsilon)$ sadece ε 'un bir ifadesidir. Bu durumda (2.57) denkleminin Hyers-Ulam kararlılığına sahip olduğunu söyleriz (Öğrekçi, 2019).

Sınırsız aralıklarda gecikmeli diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı ile ilgili vereceğimiz ana sonuç aşağıdaki gibidir.

2.3.10. Teorem: Verilen t_0 reel sayısı için $I := [t_0 - \tau, \infty)$ aralığını tanımlayalım. K, L_1, L_2 pozitif sabitler olmak üzere $0 < K(L_1 + L_2) < 1$ olsun. $F: I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunun her $(t, x_1, y_1), (t, x_2, y_2) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için

$$|F(t, x_1, y_1) - F(t, x_2, y_2)| \leq L_1|x_1 - x_2| + L_2|y_1 - y_2| \quad (2.58)$$

Lipschitz koşulunu sağladığını varsayalım. $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilen bir fonksiyonu

$$\begin{cases} |y'(t) - F(t, y(t), y(t - \tau))| < \varphi(t), & t \in [t_0, \infty) \\ |y(t) - \Psi(t)| < \varphi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases} \quad (2.59)$$

eşitsizliklerini sağlasın, burada $\varphi: I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyonu her $t \in I$ için $\left| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right| \leq K\varphi(t)$ koşulunu sağlar, o zaman

$$\begin{cases} y_0'(t) = F(t, y_0(t), y_0(t - \tau)), & t \in [t_0, \infty), \\ y_0(t) = \Psi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases} \quad (2.60)$$

ve

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \frac{K}{1 - K(L_1 + L_2)} \varphi(t), t \in I \quad (2.61)$$

eşitsizliğini sağlayan $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde bir tek sürekli fonksiyonu vardır.

İspat: Her $n \in \mathbb{N}$ için $I_n := [t_0, t_0 + n]$ aralıklarını tanımlayalım. O zaman 2.3.8. Teorem'e göre her bir n için $y_n: I_n \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye bir tek sürekli fonksiyon vardır öyle ki her $t \in I_n$ için

$$y_n(t) = y_0(t) + \int_{t_0}^t F(s, y_n(s), y_n(s - \tau)) ds \quad (2.62)$$

ve

$$|y(t) - y_n(t)| \leq \frac{K}{1 - K(L_1 + L_2)} \varphi(t) \quad (2.63)$$

koşulları sağlanır. Dikkat edilmelidir ki $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ için $y(t) = y_0(t) = \Psi(t)$ eşitlikleri sağlanır. $t \in I_n$ ise, y_n tek fonksiyonu tek olur ve buradan

$$y_n(t) = y_{n+1}(t) = y_{n+2}(t) = \dots \quad (2.64)$$

elde edilir. Şimdi her $t \in \mathbb{R}$ için $n(t) := \min\{n \in \mathbb{N} : t \in I_n\}$, $n(t) \in \mathbb{N}$ sayısını tanımlayalım. Dahası, $y_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$y_0(t) = y_{n(t)}(t) \quad (2.65)$$

şeklinde tanımlıyoruz ve y_0 'ın sürekli olduğunu iddia ediyoruz. Keyfi $t_1 \in \mathbb{R}$ için $n_1 := n(t_1)$ tamsayısı seçerek kanıtlayalım. O zaman n_1, I_{n_1} 'in iç kısmına aittir ve bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır öyle ki her $t \in (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)$ için $y_0(t) = y_{n_1}(t)$ olur. y_{n_1}, t_1 'de sürekli olduğundan, y_0 'da sürekli dir. Yani y_0 , her $t_1 \in \mathbb{R}$ için t_1 'de sürekli dir. Şimdi, keyfi $t \in I$ için $n(t)$ sayısını seçiyoruz. O zaman $t \in I_{n(t)}$ var olduğundan ve (2.62) ve (2.65) denklemlerinden

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_{n(t)}(t) \\ &= y(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, y_{n(t)}(s), y_{n(t)}(s - \tau)) ds \\ &= y(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, y_0(s), y_0(s - \tau)) ds \end{aligned} \quad (2.66)$$

elde ederiz. Burada son eşitlik geçerlidir çünkü her $s \in I_{n(t)}$ için $n(s) \leq n(t)$ olur ve (2.64) ve (2.65)'i kullanırsak

$$y_{n(t)}(t)(s) = y_{n(s)}(s) = y_0(s)$$

elde edilir. (2.66) eşitliğinden y_0 fonksiyonunun (2.60) denklemini sağladığı görülür.

Şimdi y_0 fonksiyonunun (2.61) eşitsizliğini sağladığını göstereceğiz. Tüm $t \in I$ için $t \in I_{n(t)}$ olduğundan (2.63) ve (2.65)'den her $t \in I_n$ için

$$|y(t) - y_0(t)| = |y(t) - y_{n(t)}(t)| \leq \frac{K}{1 - K(L_1 + L_2)} \varphi(t)$$

elde edilir. Son olarak y_0 fonksiyonunun tek olduğunu göstereceğiz. $u_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye (2.60) ve (2.61)'i sağlayan başka bir sürekli fonksiyon olsun ve tüm $t \in I$ için y_0 yerine u_0 yazalım. Keyfi $t \in I$ için $y_0|_{I_{n(t)}} (= y_{n(t)})$ ve $u_0|_{I_{n(t)}}$ kısıtlamalarının her ikisi de her $t \in I_{n(t)}$ için (2.60) ve (2.61)'i sağlar. O zaman $y_{n(t)} = y_0|_{I_{n(t)}}$ fonksiyonunun tekliğinden $y_0(t) = y_0|_{I_{n(t)}} = u_0|_{I_{n(t)}} = u_0(t)$ ispatı tamamlanır (Öğrekçi, 2019).

Örnek: Herhangi $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ için, aşağıdaki gecikmeli diferansiyel denklemi

$$y'(t) + \lambda_1 y(t) + \lambda_2 y(t - \tau) = q(t) \quad (2.67)$$

$I := [t_0 - \tau, \infty]$ aralığında göz önüne alalım, burada t_0 ve τ keyfi reel sayılardır.

$$F(t, y(t), y(t - \tau)) = y(t) + y(t - \tau) - q(t)$$

denkleminde her $t \in I$ için

$$\begin{aligned} |F(t, x_1, y_1) - F(t, x_2, y_2)| &= |\lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1 - q(t) - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 y_2 + q(t)| \\ &= |\lambda_1(x_1 - x_2) + \lambda_2(y_1 - y_2)| \\ &\leq \lambda_1|x_1 - x_2| + \lambda_2|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

elde ederiz. Yani 2.3.10. Teorem'in tüm koşulları sağlanır ve (2.67) diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam anlamında kararlılığını elde etmiş olduk. Şimdi $\varphi(t) := e^{\lambda t} (K > 0)$ fonksiyonunu tanımlarsak her $t \in I$ için

$$\left| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right| = \int_0^t e^{\lambda s} ds = \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \leq \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} = \frac{1}{\lambda} \varphi(t)$$

elde ederiz. Böylece 2.3.10. Teorem'e göre

$$y' + p(t)y + q(t) = 0 \quad (2.68)$$

denklemin Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır. Herhangi bir $T \leq \infty$ için (2.67) denkleminin kararlılığını 2.3.10. Teorem'in garanti ettiği unutulmamalıdır, Tunç ve Biçer I 'nin yalnızca sınırlı bir alt kümesi için kararlılığı garantilemiştir. Bu örnekte yalnızca $T < \infty$ varsayılmıştır (Öğrekçi, 2019).

2.4. Alternatif Bir Yaklaşım

Diferansiyel denklemlerin kararlılık problemi hakkında önemli çalışmalardan biri Jung'un (2010) makalesidir (2.3.4. Teorem), burada özel olarak diferansiyel denklemlerin gösterildiği $u'(t) = f(t, u(t))$ formu Hyers-Ulam anlamında kararlıdır, $I = [c - r, c + r]$, r yarıçaplı ve c merkezli açık yuvar ve $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ile (global) bir Lipschitz koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun, $0 < Lr < 1$ olan bir $L > 0$, f 'in ikinci bileşene göre Lipschitz sabiti olsun yani tüm $t \in I$ ve $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ için

$$|f(t, s_1) - f(t, s_2)| \leq L|s_1 - s_2|$$

olsun. Bu makale bir dizi müteakip yayın başlattı (örnekler için bakınız (Tunç and Biçer, 2015; Huang and Li, 2016; Jung and Lee, 2007; Wang, Lv and Zhou, 2012)) ve büyük bir etkisi oldu. Özellikle de mevcut çalışma yapıldıktan sonra Başcı ve arkadaşları, Jung'ın 2.3.4. Teorem'in ispatında $0 < Lr < 1$ varsayımını düşürerek sonuçları iyileştirdi (Choubin and Javanshiri, 2021).

(Başcı vd, 2020; Jung, 2010)'de kullanılan yaklaşımların aşağıdakilere dayandığını belirtmekte fayda var. Sabit nokta teoremi nihayetinde, $u'(t) = f(t, u(t))$ biçimindeki diferansiyel denkleminin kararlılığı probleminde f , (global olarak) Lipschitz koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olduğunda geçerlidir. Şimdi, uygulama açısından iki doğal soru ortaya çıkıyor:

[S1] $u'(t) = f(t, u(t))$ diferansiyel denklemin Hyers-Ulam anlamında f için sürekliliğin olmaması veya (global olarak) Lipschitz koşulu varsayımlarına göre kapalı mı?

[S2] $u'(t) = f(t, u(t))$ diferansiyel denklemi f ikinci bileşene göre yerel Lipschitz koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olduğunda Hyers-Ulam anlamında kararlı mı (Choubin and Javanshiri, 2021)?

$f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun yerel olarak Lipschitz fonksiyonu olmasını hatırlarsak, ikinci bileşenle ilgili olarak her $s \in \mathbb{R}$ için bir $r > 0$ vardır, öyle ki $f|_{I \times (s-r, s+r)}$ ikinci bileşene göre Lipschitz koşulunu sağlar (Choubin and Javanshiri, 2021).

Sırada vereceğimiz sonuçlar bu iki soruya adanmıştır ve

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ \alpha u(a) + \beta u(b) = \delta \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (2.69)$$

birinci mertebeden adi diferansiyel denklemin Hyers-Ulam(-Rassias) kararlılığı üzerine yoğunlaşmıştır, burada a ve b reel sayılar olmak üzere $a < b$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ ve $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz süreklilik varsayımını sağlamayan fonksiyondur. Daha doğrusu ana hedefimize ulaşmak söz konusu olduğunda, üst ve alt çözümler yöntemi (Cabada, 1994)'de tanıtılmış ve çalışılmış ve o andan itibaren sınır değer problemlerinin birçok sınıfı için çözümlerin varlığını kanıtlamak için adi ve kısmi diferansiyel denklemleri içeren bir araç olarak popüler hale gelmiştir, örnek olarak (Amann, 1976; Ghaem, Afrouzi, Rasouli and Choubin, 2013; Canada, Drabek and Gamez, 1997)'ye bakınız. Bu, f üzerinde uygun bir varsayım elde etmenin yolunu açar, (2.69) biçimindeki diferansiyel denklemlerin veya (global olarak) Lipschitz süreklilik varsayımlarını kaybettiğimizde Hyers-Ulam (-Rassias) kararlılığına sahiptir.

Şimdi, $W^{1,1}([a, b])$, $[a, b]$ aralığındaki Sobolev uzayını göstereyim, yani $u(t) \in L^1([a, b])$ biçimindeki tüm fonksiyonların Banach uzayıdır, öyle ki $\frac{du}{dt} \in L^1([a, b])$, burada $L^1([a, b])$ olağan anlamını taşır.

K ve L 'nin $0 < KL < 1$ biçimindeki pozitif sabitler olduğunu varsayalım.

Jung (2010), $u'(t) = f(t, u(t))$ biçimindeki diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığının araştırmasına sabit nokta yöntemini uygulamıştır. $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

sınırlı ve sürekli bir fonksiyon olduğu durumda ikinciye göre (global olarak) Lipschitz koşulunu sağlayan ve $\varphi: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ sabit bir $c \in [a, b]$ ve tüm $t \in [a, b]$ için

$$\left| \int_c^t \varphi(\tau) d\tau \right| \leq K\varphi(t) \quad (2.70)$$

koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyondur. Şimdi, alt ve üst çözüm yöntemi ile (bazı durumlarda) u ve v 'nin sapmasını iyileştiriyoruz. Bunun için aşağıdaki lemmayı hatırlamamız gerekiyor (Cabada, 1994). Devam etmeden önce, (Cabada, 1994) formunun görünüşte kaçınılmaz olarak ortaya çıkan hipotezin bu bölümdeki daimi varsayımlarımızı hatırlayalım (Choubin and Javanshiri, 2021).

2.4.1. Daimi Varsayımlar: $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $L^1 - Carathèodory$ fonksiyonudur, yani

(1) $f(\cdot, s)$, her $s \in \mathbb{R}$ için ölçülebilirdir.

(2) $f(t, \cdot)$, her $t \in [a, b]$ için süreklidir.

(3) Her $R > 0$ için $h_R \in L^1([a, b])$ vardır öyle ki $s \leq R$ için $|f(t, s)| \leq h_R(t)$, $t \in [a, b]$ olur.

Burada, 2.4.1. daimi varsayımları sağlayan $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınıfının oldukça zengin olduğunu belirtmek isteriz. Bu nedenle, aşağıdaki sonuçlar, önemli bir gelişme olarak görülebilir. Aşağıdaki sonuçları kanıtlamada önemli bir rol oynayan bir sonraki lemma şöyle ifade edilebilir.

2.4.1. Yardımcı Teorem: 2.4.1. daimi varsayımlara tabi olarak (2.69) sınır değer problemini göz önünde bulunduralım. Eğer $\underline{u} \in W^{1,1}([a, b])$ bir alt çözüm ise, yani

$$\underline{u}'(t) \leq f(t, \underline{u}(t)), \forall t \in [a, b] \text{ ve } \alpha \underline{u}(a) + \beta \underline{u}(b) \leq \delta$$

ise, $\bar{u} \in W^{1,1}([a, b])$ üst çözüm ise, yani

$$\bar{u}'(t) \geq f(t, \bar{u}(t)), \forall t \in [a, b] \text{ ve } \alpha \bar{u}(a) + \beta \bar{u}(b) \geq \delta$$

ise ve $[a, b]$ aralığında $\underline{u} \leq \bar{u}$ sağlanıyorsa, bu durumda bir u çözümü vardır öyle ki $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ eşitsizliği sağlanır (Choubin and Javanshiri, 2021).

Sıradaki sonuç, soru [S1]'i çözer ve bu sorunla ilgili bilinen tüm sonuçları kapsıyor.

2.4.1. Teorem: 2.4.1. daimi varsayımlara tabi olarak (2.69) sınır değer problemini göz önünde bulunduralım. $f(., s)$ artmayan bir fonksiyonsa, (2.69) sınır değer problemi Hyers-Ulam-Rassias kararlılığına sahiptir.

İspat: $v \in W^{1,1}([a, b])$ ise

$$|v'(t) - f(t, v(t))| \leq \varphi(t), \forall t \in [a, b]$$

ve

$$\alpha v(a) + \beta v(b) = \delta$$

sağlanır, burada $\varphi: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ sürekli bir fonksiyondur. $t \in [a, b]$ için

$$f(t, v(t)) - \varphi(t) \leq v'(t) \leq f(t, v(t)) + \varphi(t) \quad (2.71)$$

elde ederiz. Dahası, eğer $\Phi: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ için

$$\Phi(t) := \int_a^t \varphi(\tau) d\tau$$

tanımlarsak, o zaman $\Phi \in W^{1,1}([a, b])$ olduğunu söyleriz. Bu gözlemlerden dolayı,

$$\underline{u} := v - \Phi \text{ ve } \bar{u} := v + \Phi$$

(2.69)'un sırasıyla alt ve üst çözümleridir. Gerçekten, (2.71) gereği

$$\begin{cases} \underline{u}'(t) = v'(t) - \Phi'(t) \leq (f(t, v(t)) + \varphi(t)) - \varphi(t) \leq f(t, \underline{u}(t)), & \forall t \in [a, b] \\ \alpha \underline{u}(a) + \beta \underline{u}(b) = \alpha v(a) + \beta v(b) - \beta \Phi(b) \leq \delta; \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \bar{u}'(t) = v'(t) - \Phi'(t) \geq (f(t, v(t)) - \varphi(t)) + \varphi(t) \geq f(t, \bar{u}(t)), & \forall t \in [a, b] \\ \alpha \bar{u}(a) + \beta \bar{u}(b) = \alpha v(a) + \beta v(b) + \beta \Phi(b) \geq \delta; \end{cases}$$

elde edilir. Böylece $\underline{u}$ ve $\bar{u}$ sırasıyla (2.69)'un alt ve üst çözümü olmuş olur. Şimdi biz $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ biçiminde (2.69)'un bir u çözümünün var olduğu sonucuna varmak için Yardımcı Teorem 2.4.1.'i hatırlayalım. Üstelik

$$-\Phi(t) \leq u(t) - v(t) \leq \Phi(t)$$

olur. Böylece her $t \in [a, b]$ için $|u(t) - v(t)| \leq \Phi(t)$ olur, yani (2.69) denklemi Hyers-Ulam-Rassias kararlılığına sahiptir (Choubin and Javanshiri, 2021).

Sonraki sonuç, soru [S2]'ye olumlu bir cevap veriyor.

2.4.2. Teorem: (2.69) sınır değer problemini düşünün ve f 'in gerçek değerli bir fonksiyon olduğunu varsayalım. $[a, b] \times \mathbb{R}$ üzerinde $f(t, \cdot)$ tüm $t \in [a, b]$ için sürekli olacak ve ikinci bileşene göre yerel olarak Lipschitz koşulunu sağlasın. $f(\cdot, s)$ artmayan ise o zaman (2.69) sınır değer problemi Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığına sahiptir (Choubin and Javanshiri, 2021).

3. SONUÇ VE ÖNERİLER

1940 yılında, Ulam fonksiyonel denklemlerin bazı kararlılık problemlerini aşağıdaki gibi belirtti: Varsayalım $f(t)$ fonksiyonu bir denklemi çözmeye çok yakın olsun. $h(t)$ kesin çözümü var mı, $f(t)$ 'ye nispeten yakın mı? Daha doğrusu Ulam şu soruyu gündeme getirdi: G_1 bir grup ve (G_2, ρ) bir metrik grup verilsin. $\varepsilon > 0$ verildiğinde bir $\delta > 0$ var olsun öyle ki $f: G_1 \rightarrow G_2$ ise, her $x, y \in G_1$ için $\rho(f(xy), f(x)f(y)) < \delta$ 'yi sağlar, o zaman her $x \in G_1$ ve bazı $k > 0$ için $\rho(f(x), h(x)) < k\varepsilon$ olacak şekilde $h: G_1 \rightarrow G_2$ bir

homomorfizm var mıdır? Cevap olumluysa $h(xy) = h(x)h(y)$ denklemi Ulam anlamında kararlı olarak adlandırılır. Bir yıl sonra Hyers, Banach uzayında lineer fonksiyonel denklemler için bu probleme bir cevap verdi: G_1, G_2 bir reel Banach uzayı ve $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman her bir $f: G_1 \rightarrow G_2$ eşleme ve her $x, y \in G_1$ için $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde $g: G_1 \rightarrow G_2$ biçiminde bir tek eşleme vardır öyle ki her $x \in G_1$ için $\|f(x) - h(x)\| \leq \varepsilon$ olur. 1978 yılında, Rassias, bugün Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı olarak bilinen Ulam'ın bir probleminde ε sabitini bir değişken kabul ederek dikkate değer bir genelleme sağladı. Hyers'in cevabından sonra, bugün Hyers-Ulam kararlılığı olarak bilinen fonksiyonel denklemler için yeni bir kararlılık kavramı kurulmuştur ve matematiksel analizin ana konularından biri haline gelmiştir (Öğrekçi, 2019).

Diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığında ilk sonuç Obloza tarafından verildi. Daha sonra, 1998 yılında Alsina ve Ger, $y' = y$ lineer diferansiyel denklemleri için Hyers-Ulam kararlılığını araştırdı. Her $t \in I$ için eğer $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu

$$|y'(t) - y(t)| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlarsa bu durumda her $t \in I$ için

$$|y(t) - f(t)| \leq 3\varepsilon$$

olacak şekilde $f'(t) = f(t)$ şartını sağlayan bir $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun var olduğunu ispatladılar. Burada, I bir açık aralık ve $\varepsilon > 0$ dır (Öğrekçi, 2019).

Ayrıca Miura (Miura, Takahasi and Choda, 2001), Miura (Miura, 2002) ve Takahasi (Takahasi vd., 2002) Alsina ve Ger tarafından verilen yukarıdaki sonucu genelleştirdiler ve $y' = \lambda y$ dinamik denkleminin Hyers-Ulam kararlılığını kanıtladılar (Öğrekçi, 2019).

2004 yılında Jung, $\varphi(t)y = y$ diferansiyel denklemi için benzer bir sonuç elde etti. Daha sonra, Miura ve arkadaşları (Miura vd, 2003a), Takahasi ve arkadaşları (Takahasi, Takagi,

Miura and Miyajima, 2004) ve Jung (Jung, 2006) birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığına ilişkin bazı sonuçları genelleştirdiler. Onlar,

$$y' + p(t)y + q(t) = 0 \quad (2.72)$$

birinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemler üzerinde çalıştılar (Öğrekçi, 2019).

2006 yılında Jung, (2.72) denkleminin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını araştırdı. Ayrıca, Jung (2005)

$$ty'(t) + \alpha y(t) + \beta t^r x_0 = 0$$

şeklindeki diferansiyel denklemlerin genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlılığı üzerinde de çalıştı (Öğrekçi, 2019).

2008 yılında Wang ve arkadaşları (Wang, Zhou and Sun, 2008),

$$p(t)y' - q(t)y - r(t) = 0 \quad (2.73)$$

birinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemler üzerinde çalıştı. İntegral çarpanı yöntemini kullanarak (2.73) denkleminin Hyers-Ulam kararlılığını kanıtladılar ve bazı mevcut sonuçları genişlettiler. 2008 yılında Jung ve Rassias (Jung and Rassias, 2008)

$$y' + g(t)y + h(t)y^2 = k(t)$$

formundaki Riccati denkleminin bazı ek koşullar altında Hyers-Ulam kararlılığını kanıtlamışlardır. 2009 ve 2010 yıllarında Rus (Rus, 2009; 2010) dört tip Ulam kararlılığı ele almıştır: Ulam-Hyers kararlılığı, genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlılığı, Ulam-Hyers-Rassias kararlılığı ve genelleştirilmiş Ulam-Hyers-Rassias kararlılığı. Bunların her birini ayrı ayrı olarak

$$y' = f(t, y(t)) \quad (2.74)$$

ve

$$y'(t) = p(t) + f(t, y(t))$$

adi diferansiyel denklemleri için incelemiştir. Ayrıca, 2010 yılında sabit nokta yöntemi ve Cadariu ve Radu tarafından kullanılan fikri benimseyen Jung (2010) sonlu ve kapalı aralıkta tanımlanmış (2.74) denklemi için Hyers-Ulam kararlılığını araştırmış ve ayrıca (2.74) denklemi için Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını ele almıştır. Başcı ve arkadaşları ise Jung'ın çalışmasındaki koşulları kaldırarak geliştirmiştir. Choubin ve Javanshiri bu araştırmalarda alternatif bir yöntem olarak alt ve üst çözümleri kullanarak bazı sonuçlar elde etmişlerdir.

2013 yılında Li ve Wang (Li and Wang, 2013) aşağıdaki gibi yarı doğrusal diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını araştırdı:

$$y'(t) = \lambda y(t) + f(t, y(t)).$$

2014 yılında Qarawani (Qarawani, 2014), Hyers-Ulam-Rassias anlamında birinci dereceden doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri incelemiştir. Ayrıca Bernoulli diferansiyel denklemleri için Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlılık ve asimptotik kararlılık üzerine araştırmalar yapmıştır (Öğrekçi, 2019).

Aynı yıl, Alqifiary (Alqifiary, 2014)

$$y'(t) + A(t)y(t) + B(t) = 0$$

biçimindeki diferansiyel denklemlerin birinci mertebeden lineer sistemleri için Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlılık araştırması yaptı. 2017 yılında Onitsuka ve Shoji (Onitsuka and Shoji, 2017)

$$y' - ay = 0 \tag{2.75}$$

birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığına çalışmıştır, burada a sıfırdan farklı bir reel sayıdır. Onlar, her $t \in \mathbb{R}$ için $\phi(t)$ türevlenebilir fonksiyonu $|\phi'(t) - a\phi(t)| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan asimptotlar altında her $t \in \mathbb{R}$ için $|\phi(t) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon}{|a|}$ sağlayan (2.75) denklemi için $y(t)$ açık çözümünün varlığını kanıtlamışlardır (Öğrekçi, 2019).

Diferansiyel denklemlerin kararlılık problemi üzerine ciddi çalışmalar 2000'li yıllardan itibaren başlamıştır. Kararlılık, farklı yaklaşımlar ile diferansiyel denklemlerin farklı sınıfları için de araştırılmıştır. Örneğin, gecikmeli diferansiyel denklemler özel bir tür adi diferansiyel denklemlerdir. Bildiğimiz kadarıyla, 2010 yılında Jung ve J. Brzdek (Jung and Brzdek, 2010) gecikmeli diferansiyel denklemlerin kararlılığını ilk araştıran araştırmacılarıdır. Hyers-Ulam kararlılığına ilişkin sonuçlar yukarıda bahsedilenler tarafından harekete geçirilmiştir, onlar $[-\tau, \infty)$ aralığında bir başlangıç koşulu ile $y'(t) = \lambda y(t - \tau)$ denkleminin Hyers-Ulam kararlılığını araştırdılar, burada $\lambda > 0$ ve $\tau > 0$ reel sabitlerdir. Ondan sonra, Otrocol ve Ilea benzer bir fonksiyonel diferansiyel denklemler için Hyers-Ulam kararlılığını ve genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlılığını araştırdı (Öğrekçi, 2019).

2015 yılında Tunç ve Biçer (Tunç and Biçer, 2015) sabit nokta yöntemini kullanarak

$$y'(t) = F(t, y(t), y(t - \tau))$$

biçimindeki birinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias ve Hyers-Ulam kararlılığı ile ilgili iki önemli sonucu kanıtladı. Öğrekçi ise gecikmeli diferansiyel denklemleri sonsuz aralıkta ele alarak Tunç ve Biçer'in çalışmasını geliştirmiştir (Öğrekçi, 2019).

Son yirmi yılda diferansiyel denklemler teorisi zaman skalasında sistematik olarak incelendi. Bildiğimize göre sadece 2013 yılında Andras ve Meszaros (Andras and Meszaros, 2013) bazı lineer ve lineer olmayan dinamik denklemlerin ve zaman skalasının dinamik denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı üzerine çalıştı. Hem doğrudan hem de operasyonel yöntemler kullandılar (Öğrekçi, 2019).

2013 yılında, Shen (Shen, 2017)

$$y^\Delta = p(t)y + f(t)$$

birinci mertebeden lineer dinamik denklemlerin Ulam kararlılığını araştırdı ve

$$x^\Delta = -p(t)x^\sigma + f(t)$$

adjoint denklemi için zaman skalasında sonlu bir aralıkta integral çarpanı metodu kullandı. Aynı yıl Zada ve arkadaşları (Zada, Shah, İsmail and Li, 2017) zaman skalası fikrini kullanarak

$$x^\Delta = Gx(t)$$

birinci mertebeden lineer dinamik sistemlerin ikiye bölünmesi ve Hyers-Ulam kararlılığı arasındaki ilişkisi üzerinde çalıştı.

Bütün bunlara ek olarak son on yılda kesirli diferansiyel denklemler teorisinde önemli gelişmeler olmuştur ve Ulam tipi kararlılık araştırmaları bu alanda da yapılmıştır (Öğrekçi, 2019).

Bu doğrultuda daha ileri araştırmalar için kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere ilişkin Ulam tipi kararlılık problemleri incelenebilir. Farklı kesirli türev tanımlarıyla uyumlu olacak şekilde yeni yöntemlerin geliştirilmesi literatüre katkı sağlayacak önemli sonuçları üretebilir.

KAYNAKLAR

- Alsina, C. and Ger, R. (1998), On Some Inequalities and Stability Results Related to The Exponential Function, *Journal of Inequalities and Applications*, 2(4), 373-380.
- Alqifiary, Q. H. (2014), Note On The Stability for Linear Systems of Differential Equations, *International Journal of Applied Mathematical Research*, 3(1), 15–22.
- Amann, H. (1976), Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 18(4), 620–709.
- Andras, S. and Meszaros, A. R. (2013), Ulam-Hyers Stability of Dynamic Equations On Time Scales Via Picard Operators, *Applied Mathematics and Computation*, 219(4), 4853–4864.
- Başcı, Y., Mısır, A. and Öğrekçi, S. (2020), On The Stability Problem of Differential Equations in The Sense of Ulam, *Results in Mathematics*, 75(6).
- Brzdek, J., Popa, D. and Xu, B. (2007), The Hyers-Ulam Stability of Nonlinear Recurrences, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 335(1), 443–449.
- Bojor, F. (2012), Note On The Stability of First Order Linear Differential Equations, *Opuscula Mathematica*, 32(1), 67–74.
- Cabada, A. (1994), The Monotone Method for First-Order Problems with Linear and Nonlinear Boundary Conditions, *Applied Mathematics and Computation*, 63, 163–186.
- Cadariu, L. and Radu, V. (2008), Fixed Point Methods for The Generalized Stability of Functional Equations on A Single Variable, *Fixed Point Theory and Applications*, Article ID 749392, 15 p.
- Canada, A., Dr'abek, P. and G'amez, J. L. (1997), Existence of Positive Solutions for Some Problems With Nonlinear Diffusion, *Transactions American Mathematical Society*, 349, 4231–4249.
- Choubin, M. and Javanshiri, H. (2021), A New Approach to the Hyers–Ulam–Rassias Stability of Differential Equations, *Results in Mathematics*, 76(1), 1-14.
- de Oliveira, E. C. and Sousa, J. V. C. (2018), Ulam–Hyers–Rassias Stability for A Class of Fractional İntegro-Differential Equations, *Results in Mathematics*, 73(3), 111.
- Diaz, J. B. and Margolis, B. (1968), A Fixed Point Theorem of The Alternative for Contractions on A Generalized Complete Metric Space, *Bulletin of The American Mathematical Society*, 74, 305-309.
- Dzimira-Zarzycka, K., (Aralık 2018), Stanisław Ulam- Matematik Büyücüsü, URL: <https://culture.pl/en/article/stanislaw-ulam-magician-of-mathematics>. Son Erişim Tarihi: 15.02.2022

- Forti, G. L. (2004), Comments on The Core of The Direct Method for Proving Hyers Ulam Stability of Functional Equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 295(1), 127–133.
- Ghaemi, M. B., Afrouzi, G. A., Rasouli, S. H. and Choubin, M. (2013), On The Existence of Positive Solutions for A Class of $(p(x), q(x))$ -Laplacian System, *Applied Mathematics Letters*, 26, 367–372.
- Huang, J. and Li, Y. (2016), Hyers–Ulam Stability of Delay Differential Equations of First Order, *Mathematische Nachrichten*, 289(1), 60–66.
- Hyers, D. (1941), On The Stability of The Linear Functional Equation, *Proceedings of National Academy of Sciences of The United States of America*, 27(4), 222–224.
- İnternet: Stanisław Ulam. (Nisan 2021) URL: https://tr.wikipedia.org/wiki/Stanislaw_Ulam. Son Erişim Tarihi: 15.02.2022
- İnternet 1: URL: <http://www.atomicarchive.com/Bios/Ulam.shtml>. Son Erişim Tarihi: 15.02.2022
- İnternet 2: URL: http://www.jewage.org/wiki/en/Article:Stanislaw_Ulam_-_Biography. Son Erişim Tarihi: 15.02.2022
- İnternet 3: URL: <https://www.atomicheritage.org/profile/stanislaw-ulam>. Son Erişim Tarihi: 15.02.2022
- Jung, S. M. (2001), Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Mathematical Analysis, *Hadronic Press*, London.
- Jung, S. M. (2004), Hyers-Ulam Stability of Linear Differential Equations of First Order, *Applied Mathematics Letters*, 17(10), 1135–1140.
- Jung, S. M. (2005), Hyers-Ulam Stability of Linear Differential Equations of First Order (III), *Applied Mathematics Letters*, 18(2), 139–146.
- Jung, S. M. (2006), Hyers-Ulam Stability of Linear Differential Equations of First Order (II), *Applied Mathematics Letters*, 19(9), 854–858.
- Jung, S. M. (2010), A Fixed Point Approach to The Stability of Differential Equations $y' = f(x, y)$, *Bulletin of The Malaysian Mathematical Sciences Society*, 33(1), 47–56.
- Jung, S. M. and Brzdek, J. (2010), Hyers-Ulam Stability of The Delay Equation $y'(t) = \lambda y$, *Abstract and Applied Analysis*, 10 pages.
- Jung, S. M. and Lee, K. S. (2007), Hyers–Ulam Stability of First Order Linear Partial Differential Equations With Constant Coefficients, *Mathematical Inequalities Applications*, 10, 261–266.

- Jung, S. M. and Rassias, T. M. (2008), Generalized Hyers-Ulam Stability of Riccati Differential Equation, *Mathematical Inequalities & Applications*, 11(4), 777–782.
- Kacper, J. (Ağustos 2018) Stanisław Ulam, *Young Talent Management*, URL: <https://greatpoles.pl/index.php/historical-poles/60-stanislaw-ulam>. Son Erişim Tarihi: 15.02.2022
- Li, X. and Wang, J. (2013), Ulam-Hyers-Rassias Stability of Semilinear Differential Equations With Impulses, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2013 (172), 1–8.
- Miura, T., Takahasi, S. E. and Choda, H. (2001), On The Hyers-Ulam Stability of Real Continuous Function Valued Differentiable Map, *Tokyo Journal of Mathematics*, 24(2), 467–476.
- Miura, T. (2002), On The Hyers-Ulam Stability of A Differentiable Map, *Japanese Journal of Mathematics*, 55(1), 17–24.
- Miura, T., Miyajima, S. and Takahasi, S. H. (2003a), A Characterization of Hyers-Ulam Stability of First Order Linear Differential Operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 286(1), 136–146.
- Miura, T., Miyajima, S. and Takahasi, S. H. (2003b), Hyers-Ulam Stability of Linear Differential Operator With Constant Coefficients, *Mathematische Nachrichten*, 258(2), 90–96.
- Obloza, M. (1993), Hyers-Ulam Stability of The Linear Differential Equations, *Rocznik Nauk-Dydakt Prace Matematik*, 19(1), 259–270.
- Obloza, M. (1997), Connections Between Hyers and Lyapunov Stability of The Ordinary Differential Equations, *Rocznik Nauk-Dydakt Prace Matematik*, 14(1), 141–146.
- Onitsuka, M. and Shoji, T. (2017), Hyers-Ulam Stability of First-Order Homogeneous Linear Differential Equations With A Real-Valued Coefficient, *Applied Mathematics Letters*, 63(1), 102–108.
- Otrocol, D. and Ilea, V. (2013), Ulam Stability for A Delay Differential Equation, *Central European Journal of Mathematics*, 11(7), 1296–1303.
- O'Connor, J. J. and Robertson E. F., (Haziran 1998) Stanislaw Marcin Ulam. URL: <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ulam.html>. Son Erişim Tarihi: 15.02.2022
- Öğrekçi, S. (2019), Stability of Delay Differential Equations in The Sense of Ulam on Unbounded Intervals, *An International Journal of Optimization and Control, Theories & Applications*, 9(2), 125–131.
- Petru, T. P., Petruel, A. and Yao, Y. C. (2011), Ulam-Hyers Stability for Operatorial Equations and Inclusions Via Nonself Operators, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 15(5), 2195–2212.

- Popa, D. and Pugna, G. (2016), Hyers–Ulam Stability of Euler’s Differential Equation, *Results in Mathematics*, 69(3), 317–325.
- Qarawani, M. N. (2014), On Hyers-Ulam-Rassias Stability for Bernoulli’s and First Order Linear and Nonlinear Differential Equations, *British Journal of Mathematics and Computer Science*, 4(11), 1615–1628.
- Rassias, T. M. (1978), On The Stability of The Linear Mapping in Banach Spaces, *Proceedings of The American Mathematical Society*, Volume 72, 297–300.
- Rus, I. A. (2009), Ulam Stability of Ordinary Differential Equations, *Studia Universitatis Babe-Bolyai Mathematica*, 54(4), 297–300.
- Rus, I. A. (2010), Ulam Stabilities of Ordinary Differential Equations in A Banach Space, *Carpathian Journal of Mathematics*, 26(1), 103–107.
- Shen, Y. (2017), The Ulam Stability of First Order Linear Dynamic Equations on Time Scales, *Results in Mathematics*, 72(4), 1881–1895.
- Takahasi, S. H., Miura, T. and Miyajima, S. (2002), The Hyers-Ulam Stability Constants of First Order Linear Differential Operators, *Bulletin of Korean Mathematical Society*, 39(1), 309–315.
- Takahasi, S. E., Takagi, H., Miura, T. and Miyajima, S. (2004), The Hyers-Ulam Stability Constants of First Order Linear Differential Operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 296(2), 403–409.
- Tunç, C. and Biçer, E. (2015), Hyers-Ulam-Rassias Stability for A First Order Functional Differential Equation, *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*, 47(2), 143– 153.
- Ulam, S. M. (1940), *Problems in Modern Mathematics* (Chapter VI, Some Questions in Analysis: Section 1, Stability), Science Editions, John Wiley & Sons, New York, 63–69.
- Ulam, S. M. (1960), A Collection of Mathematical Problems, *Interscience*, New York.
- Wang, G., Zhou, M. and Sun, L. (2008), Hyers-Ulam Stability of Linear Differential Equations of First Order *Applied Mathematics Letters*, 21(10), 1024–1028.
- Wang, J. R., Lv, L. L. and Zhou, Y. (2012), New Concepts and Results in Stability of Fractional Differential Equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(6), 2530–2538.
- Zada, A., Shah, S. O., Ismail, S. and Li, T. (2017), Hyers-Ulam Stability in Terms of Dichotomy of First Order Linear Dynamic System, *Punjab University Journal of Mathematics*, 49(3), 37–47.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Rebiha SARIDUGAN

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1-) Sarıdugan, R. (2021), A Study of Stability of Differential Equations in the Sense of Ulam , *Icom 2021 Conference Short Abstract Book*, 12

