

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN MONTE CARLO
METOTLARI İLE ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEDET DEMİR

DANIŞMAN
DOÇ. DR. DERYA ARSLAN

AĞUSTOS 2025
BİTLİS

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN MONTE CARLO
METOTLARI İLE ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEDET DEMİR
ORCID: 0009-0001-1918-4095

DANIŞMAN
DOÇ. DR. DERYA ARSLAN

AĞUSTOS 2025
BİTLİS

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI ETİK BEYANI

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisiyim. Hazırlamış olduğum “Diferansiyel Denklemlerin Monte Carlo Metotları ile Çözümü” başlıklı tezde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi; tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu; tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi; kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı; bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. 14/08/2025

İmza

Medet DEMİR

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ YAZIM KILAVUZU UYGUNLUK BEYANI

“Diferansiyel Denklemlerin Monte Carlo Metotları ile Çözümü” başlıklı yüksek lisans tezi Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak hazırlanmıştır. 14/08/2025

Tezi Hazırlayan

İmza

Medet DEMİR

Danışman

İmza

Doç. Dr. Derya ARSLAN

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

İmza

Dr. Öğr. Üyesi Harun ÇİÇEK

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY SAYFASI

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı öğrencisi Kemal DEMİR tarafından hazırlanan “Diferansiyel Denklemlerin Monte Carlo Metotları ile Çözümü” adlı Yüksek Lisans Tezi ile ilgili tez savunma sınavı, 14/08/2025 tarihinde yapılmış ve tezin oy birliği ile kabul edilmesine karar verilmiştir.

JÜRİ:

Danışman: Doç. Dr. Derya ARSLAN
(Bitlis Eren Üniversitesi)

Üye: Unvanı Adı SOYADI
(Bitlis Eren Üniversitesi)

Üye: Unvanı Adı SOYADI
(Bitlis Eren Üniversitesi)

İMZA

.....

.....

.....

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun
tarih ve sayılı kararıyla jüri tarafından kabul edilmiş bu çalışmanın yüksek
lisans tezi olarak kabulü onaylanmıştır.

.../.../2025

Prof. Dr. Mehmet Bakır ŞENGÜL
Enstitü Müdür V.

T.C.

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

**DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN MONTE CARLO METOTLARI İLE
ÇÖZÜMÜ**

Yüksek Lisans Tezi

Medet DEMİR

Danışman: Doç. Dr. Derya ARSLAN

Ağustos 2025

ÖZET

Bu tez çalışmasında, diferansiyel denklemlerin sayısal olarak çözümünde Monte Carlo metotlarının etkinliği araştırılmış ve bu yöntemlerin çeşitli türdeki diferansiyel denklemlere uygulanabilirliği detaylı bir şekilde incelenmiştir. Özellikle singüler, singüler pertürbasyonlu, gecikmeli ve Volterra tipindeki integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri ele alınmıştır. Çalışmanın temel yaklaşımı, diferansiyel denklemlerin integral denklemlere dönüştürülmesi ve bu yeni formülasyonların Monte Carlo metotları kullanılarak çözümlenmesidir. Tezdeki bazı örnekler diğer integral metotları ile de çözülmüş ve karşılaştırmalar yapılmıştır.

Monte Carlo metotları, çözüm uzayında rastgele örnekleme yaparak yaklaşık çözümler elde etmeye olanak tanıyan istatistiksel yaklaşımlardır. Bu çalışmada, klasik deterministik nümerik yöntemlerin yetersiz kaldığı veya çözümünün zorlaştığı durumlarda, Monte Carlo metotlarının sağladığı esneklik ve güçlü yaklaşım yetenekleri vurgulanmıştır. Rassal sayılar kullanılarak integral ifadelerin yaklaşık değerleri hesaplanmış, bu sayede ilgili diferansiyel denklemlerin çözümlerine ulaşılmıştır.

Tez kapsamında ilk olarak Monte Carlo metodunun teorik temelleri sunulmuş, rassal sayı üretimi ve örnekleme teknikleri detaylandırılmıştır. Ardından, farklı tipteki diferansiyel denklemler için integral formülasyonları elde edilerek Monte Carlo yaklaşımıyla çözümleri gerçekleştirilmiştir. İntegral denklemler üzerinden yapılan uygulamalar, Monte Carlo yönteminin geniş kapsamlı kullanım potansiyelini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Monte Carlo metotları, Rassal sayılar, Klasik integrasyon metotları, İntegral denklemler, Volterra integral denklemler, Singüler pertürbe denklemler, Diferansiyel denklemler, İntegro diferansiyel denklemler.



Republic of Türkiye
Bitlis Eren University Graduate School
Department of Mathematic
SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MONTE CARLO
METHODS

Master Thesis

Medet DEMİR

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Derya ARSLAN

August 2025

ABSTRACT

In this thesis, the effectiveness of Monte Carlo methods in the numerical solution of differential equations was investigated, and the applicability of these methods to various types of differential equations was examined in detail. Specifically, approximate solutions for singular, singularly perturbed, delayed, and Volterra-type integro-differential equations were addressed. The core approach of the study involves transforming differential equations into integral equations and solving these new formulations using Monte Carlo methods. Some examples in the thesis were also solved using other integral methods, and comparisons were made.

Monte Carlo methods are statistical approaches that enable the derivation of approximate solutions by performing random sampling in the solution space. In this study, the flexibility and powerful approximation capabilities of Monte Carlo methods were emphasized in cases where classical deterministic numerical methods fall short or become challenging to apply. By using random numbers, approximate values of integral expressions were calculated, thereby obtaining solutions to the relevant differential equations.

Within the scope of the thesis, the theoretical foundations of the Monte Carlo method were first presented, and random number generation and sampling techniques were detailed. Subsequently, integral formulations for different types of differential equations were derived, and their solutions were obtained using the Monte Carlo approach. The applications performed on integral equations demonstrate the broad-

ranging potential of the Monte Carlo method.

Keywords: Monte Carlo methods, Random numbers, Classical integration methods, integral equations, Volterra Integral equations, Singürel pertürbe equations, Differential equations, Integro-differential equations.



TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması sırasında, tez konusunun belirlenmesinden başlayarak son aşamaya kadar her konuda benden yardımlarını esirgemeyen danışman hocam sayın Doç. Dr. Derya ARSLAN başta olmak üzere yüksek lisans öğrenimim süresince ders aldığım bütün kıymetli hocalarıma şükranlarımı sunarım.

Bugünlere gelmemde büyük emekleri olan değerli annem Gülten DEMİR 'e ve babam Medeni DEMİR 'e sonsuz teşekkür ve minnettarlığımı sunarım. Ayrıca yoğun çalışma temposunda her zaman yanımda olan ve desteğini esirgemeyen kıymetli eşim Ebru DEMİR 'e de her şey için teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	V
İÇİNDEKİLER	VI
ÇİZELGELER DİZİNİ	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	IX
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİN	VII
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER.....	4
2.1. Rassal Sayı	4
2.2. Sayısal İntegrasyon Metotları	4
2.2.1. Dikdörtgen Metodu [13]	6
2.2.2. Yamuk (Trapez) Metodu [17]	7
2.2.3. Simpson Metodu.....	8
2.2.4. Romberg Metodu [18].....	9
2.3. Düzgün Şebeke [23],.....	10
2.4. İntegro Diferansiyel Denklemler	11
2.5. Volterra İntegral Ve İntegro-Diferansiyel Denklemler	11
2.6. Gecikmeli Diferansiyel Denklemler	12
2.7. Singüler Pertürbe Diferansiyel Denklemler	13
2.8. Diferansiyel Denklemlerin İntegral Denkleme Dönüştürülmesi	13
3. MATELYAL VE YÖNTEM	15
3.1. Monte Carlo Metodunun Tarihsel Gelişimi	15
3.2. Monte Carlo Metodunun Özellikleri.....	17
3.3. Monte Carlo Metodu.....	18
3.3.1. Reddetme Metodu	18
3.3.2. Ortalama Değer Metodu.....	21
3.3.3. Kontrol Değişken Metodu	23
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	26
Örnek 1:	26
Örnek 2:	28
Örnek 3:	31

Örnek 4:	35
Örnek 5:	38
SONUÇ VE ÖNERİLER	42
KAYNAKLAR	43



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Monte Carlo metodu maksimum hata tablosu	28
Çizelge 4.2. Monte Carlo metodu ile hesaplanan metodu karşılaştırma tablosu	30
Çizelge 4.3. N ve ε değerleri için maksimum hata değerleri karşılaştırma tablosu.....	32
Çizelge 4.4. Gerçek çözüm ve sayısal integrasyon metotları elde edilen veriler.	33
Çizelge 4.5. Sayısal integrasyon metotları hata analizi	34
Çizelge 4.6. t ve ε değerleri için maksimum hata değerleri karşılaştırma tablosu	37
Çizelge 4.7. N ve ε değerleri için maksimum hata değerleri karşılaştırma tablosu.....	40



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.2.1. Tek katlı belirli integral hesabı	5
Şekil 2.2.2. Parçalara ayrılarak elde edilen dilimlerin toplanarak integral hesaplama	6
Şekil 2.2.3. Dikdörtgen metodu	6
Şekil 2.2.4. Trapez (Yamuk) metodu [13]	7
Şekil 2.2.5. Sayısal integralleme için Simpson kuralı	9
Şekil 3.1.1. Buffon'un π sayısını bulma deneyi.....	15
Şekil 3.1.2. Rassal sayılar üretilerek Buffon'un π sayısını bulma deneyi	16
Şekil 3.3.1. Reddetme metodunun gösterimi	19
Şekil 3.3.2. Reddetme metodu için uygun olmayan keskin tepeli fonksiyonlar [22]	20
Şekil 3.3.3. Ortalama değer metodu ile oluşan dikdörtgen.....	21
Şekil 3.3.4. Ortalama değer metodu ile rassal noktalar ile yaklaşık değer bulma	22
Şekil 3.3.5. Kontrol değişkeni metodu fonksiyon ve yardımcı fonksiyon gösterimi	23
Şekil 4.1. Monte Carlo metodu maksimum hata grafiği.....	28
Şekil 4.2. Monte Carlo metodu ile Runge-Kutta 4 metodu karşılaştırma grafiği.....	31
Şekil 4.3. N ve ϵ değerleri için maksimum hata değerleri karşılaştırma grafiği.....	33
Şekil 4.4. Gerçek çözüm ve sayısal integrasyon metotları veri grafiği	34
Şekil 4.5. Monte Carlo metodu ve diğer sayısal integrasyon metotları hata analizi.....	35
Şekil 4.6. t ve ϵ değerleri için maksimum hata değerleri karşılaştırma grafiği.....	37
Şekil 4.7. N ve ϵ değerleri için maksimum hata değerleri karşılaştırma grafiği.....	41

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİN

ε	: Pertürbasyon parametresi
N	: Parçalama sayısı
Δx	: Elde edilen dilimlerin genişliği
$\frac{1}{\sqrt{N}}$	: Metodun yakınsama oranı
GRS	: Gerçek Rassal Sayılar
SRS	: Sözde Rassal Sayılar
Y_MC	: Yaklaşık Monte Carlo değeri
h	: Adım uzunluğu
GD	: Gerçek değer
MD	: Metot değeri
H	: Hata
RD	: Reddetme metodu
ODM	: Ortalama değer metodu
KDM	: Kontrol değişken metodu

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler, doğa bilimlerinden mühendisliğe, ekonomiden tıpa kadar pek çok alanda karşılaşılan dinamik sistemlerin matematiksel ifadesinde temel bir rol oynar. Bu denklemler, bir sistemin durumunun zamanla veya uzaysal koordinatlarla nasıl değiştiğini tanımlayan ve analitik ya da sayısal yöntemlerle çözülebilen güçlü modellerdir. Sonlu farklar, sonlu elemanlar, spektral yöntemler ve benzeri geleneksel çözüm teknikleri ile çözümler yapılabilse de doğrusal olmayan yapılar, yüksek boyutluluk, karmaşık sınır koşulları veya rastgele parametreler içeren sistemlerde kullanılan geleneksel yöntemler yetersiz kalabilmekte veya yüksek hesaplama maliyetleri ve fazla zaman gerektirebilmektedir. Bu sebeplerden dolayı, farklı sayısal yaklaşımlara olan ihtiyaç duyulmuş ve Monte Carlo metodu bu zorluklara cevap verebilecek ve diferansiyel denklem çözümlerinin kullanımında genellikle sonuca götürebilecek zaman ve maliyet açısından ekonomik bir metot olabilmektedir [1,2,30,31,32]. Monte Carlo metodu, temelde rastgele örnekleme ve istatistiksel simülasyon prensiplerine dayanan, özellikle yüksek boyutlu problemlerde ve belirsizlik içeren sistemlerde etkili sonuçlar veren bir sayısal analiz tekniğidir. İlk olarak nükleer fizyon çalışmalarında kullanılan bu yöntem, günümüzde finansal modellemeden kuantum fiziğine, makine öğrenmesinden malzeme bilimine kadar geniş bir uygulama alanına sahiptir. Diferansiyel denklemler bağlamında Monte Carlo metodunun kullanımı, kesin girdilere dayanan ve belirli bir girdi kümesi için aynı çıktıyı üreten bir problemi, rastgeleliği ve belirsizliği süreçle ilişkilendirerek çözüm aramayı mümkün kılar. Metot ile makine öğrenmesi, optimizasyon ve oyun teorisi gibi alanlarda güncel MCTS uygulamaları incelenir. Özellikle kısmi diferansiyel denklemler, stokastik diferansiyel denklemler, yüksek dereceli diferansiyel denklemler ve çok katlı integro-diferansiyel denklemler gibi denklemleri çözen geleneksel yöntemlerin zorlandığı durumlarda önemli avantajlar sunmaktadır [3,4,34,35].

Monte Carlo tabanlı çözümlerin en önemli avantajlarından biri, problemin boyutundan bağımsız olarak yakınsama hızının korunabilmesidir. Özellikle yüksek boyutlu integrallerin ve yüksek mertebeli diferansiyel denklemlerin hesaplanması gereken durumlarda, Monte Carlo metodu diğer sayısal yöntemlere kıyasla daha verimli sonuçlar verebilmektedir. Bu tezde analitik olarak çözümü zor olan veya çözümü olmayan yüksek mertebeli diferansiyel denklemler ve bu denklemlerin integrallerinin alınması ile elde edilecek çok katlı integral içeren integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde Monte Carlo metodunu kullanarak denklemlerin yaklaşık değeri bulunmaya

çalışılacaktır. Aşağıda verilen Volterra, gecikmeli ve singüler pertürbe diferansiyel denklemlerin çözümünde Monte Carlo metodunu kullanarak diğer klasik metotlara göre iyi sonuçlar vermesi incelenecektir:

$$u''(t) + \frac{2}{t}u'(t) + u^5(t) = 0, \quad 0 < t \leq 1,$$

$$u'(0) = 0, \quad u(0) = 1,$$

$$\varepsilon u' + 2u + \tanh\left(t + \int_{t-1}^t (2u(s) + e^{-\sin u(s)})ds\right) = 0, \quad 0 < t \leq 2,$$

$$u(t) = 1, \quad -1 \leq t \leq 0,$$

$$u''(t) = -u(t) + \int_0^t (t-s)y(s)ds,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

$$\varepsilon u'(t) + u^3(t) + 3u(t) + \int_0^t u^2(s)ds = e^{\frac{-3t}{\varepsilon}} - \frac{1}{2}\varepsilon e^{\frac{-2t}{\varepsilon}} + 2e^{\frac{-t}{\varepsilon}} + \frac{1}{2}\varepsilon, \quad 0 < t \leq 1,$$

$$u(0) = 1,$$

$$\varepsilon u''(t) + 2u'(t) + \int_0^t u(s)ds = \frac{t}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\left(1 - e^{\frac{-2t}{\varepsilon}}\right), \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \frac{1 - e^{\frac{-2}{\varepsilon}}}{2}.$$

Literatürde Monte Carlo metodunun diferansiyel denklem çözümlerindeki rolüne dair yeteri kadar çalışma bulunmamaktadır. Bu tez çalışması, bu boşluğu doldurmayı hedefleyerek Monte Carlo metodunun diğer çözümlere oranla nasıl çalıştığı, hangi durumlarda avantajlı ve dezavantajlı olduğunu ortaya koymayı amaçlamıştır.

Tez dört bölümden oluşmaktadır: İlk bölüm Giriş bölümüdür. Burada literatür bilgisi yer almaktadır. İkinci bölüm olan Genel Bilgiler de tez içinde kullanılan tanımlara yer verilmiştir. Üçüncü bölüm, Materyal ve Yöntem bölümünde ise Monte Carlo yöntemine yer verilmiştir. Dördüncü bölüm Bulgular ve Tartışma' da teorik bilgilerin doğruluğunu

göstermek amacıyla örnek uygulamalar yapılmıştır. Son bölümde ise Sonuç ve Öneriler bulunmaktadır.



2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, Monte Carlo metodu ile yaklaşık çözümler araştırılırken kullanılacak tanımlara yer verilecektir.

2.1. Rassal Sayı

Rastgelelik, öğeler arasında sistematik bir bağlantı bulunmayan, düzensiz ve tahmin edilemez bir nitelik olarak tanımlanabilir. Bu tür rastgele üretilen sayılar, olasılık temelli oyunlardan istatistiksel analizlere ve bilgisayar simülasyonlarına kadar pek çok alanda yaygın şekilde kullanılmaktadır. Rastgele sayı üreteçleri, bilgisayar simülasyonları, dijital analizler, sürdürülebilir analizler ve Monte Carlo yöntemiyle genişletilerek yaygın şekilde tercih edilmektedir. Gerçek anlamda rastgele bir sayı, her bir basamağın eşit dağılıma sahip olduğu ve hiçbir basamağın diğerini etkilemediği bir sayı dizisi şeklinde ifade edilebilir. Bu tür sayılar, herhangi bir örüntü veya bağımlılık içermeyen tamamen bağımsız rakamlar zincirinden oluşur. Bir küme veya dizin elemanlarının bir parçası olarak rastgele seçilmesiyle elde edilen sayılar, bilgisayar bilimlerinin pek çok alanında gerekli olmaktadır [12]. Monte Carlo simülasyonlarının temelini oluşturan rassal sayılar, üretim tekniklerine göre iki kategoriye ayrılır; fiziksel süreçlerden elde edilenler "gerçek rastgele sayılar" olarak tanımlanırken, matematiksel algoritmalarla üretilen ve rastgelelik özellikleri gösteren sayılar ise "sözde rastgele sayılar" olarak adlandırılır. Bu ayrım, sayıların üretim kaynağına dayanmaktadır. [12, 13,14,15].

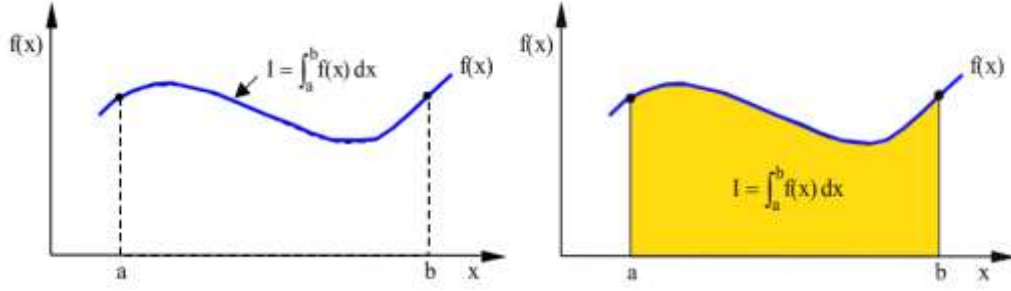
2.2. Sayısal İntegrasyon Metotları

Sayısal integrasyon veya integral alma işlemi, analitik olarak bir integralin alınmasının çok zor veya olanaksız olduğu durumlarda veya bir işlevin değerlerinin sadece belirli noktalarda bilinmesi durumlarında başvurulur. Uzunluk, alan, hacim, enerji gibi pek çok büyüklüğün hesabında tek ve çok katlı integrasyondan yararlanılır. Bu bölümde bu gibi amaçlar için kullanılabilecek tek ve çok katlı belirli integrallerin sayısal çözüm yöntemleri açıklanmıştır [16].

Genel olarak bir $f(x)$ fonksiyonunun $a \leq x \leq b$ aralığındaki belirli integrali I ,

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

şeklinde gösterilir. Bir kez integral alma işlemi yapıldığından tek katlı, integral sınırları belli olduğundan belirli integral denir. Bu integrasyon işlemi ile, Şekil 2.2.1'de gösterildiği gibi geometrik olarak, integrali hesaplanan $f(x)$ eğrisinin altında kalan $a \leq x \leq b$ aralığındaki taralı alan hesaplanmış olur.



Şekil 2.2.1. Tek katlı belirli integral hesabı

Şekil 2.2.1'deki taralı alanın dolayısıyla integralin hesabında genellikle $a \leq x \leq b$ aralığı Δx kalınlığında N dilime bölünür. Bu hesapta a integralin alt sınır değeri, b üst sınır değeri ve N dilim sayısı olmak üzere Δx kalınlığı;

$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

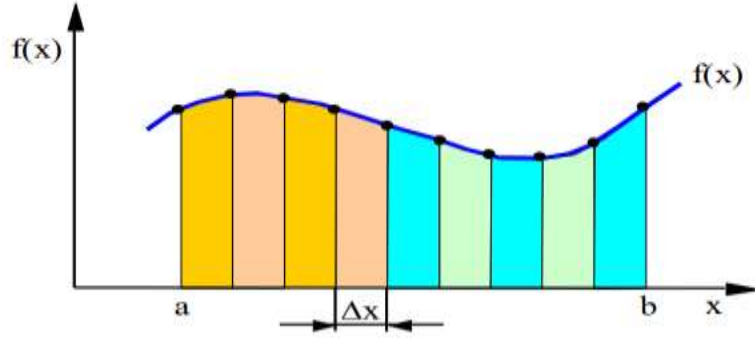
$$x_N = x_0 + N\Delta x ,$$

olmak üzere $x_0 = a$, $x_N = b$ dir.

Böylece eni Δx kadar olan parçalara ayrılarak elde edilen N tane dilimin alanlarının toplanarak toplam alan veya integralin değeri

$$I \approx \frac{b - a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) = \Delta x \sum_{i=1}^N f(x_i) ,$$

formülü ile hesaplanır.

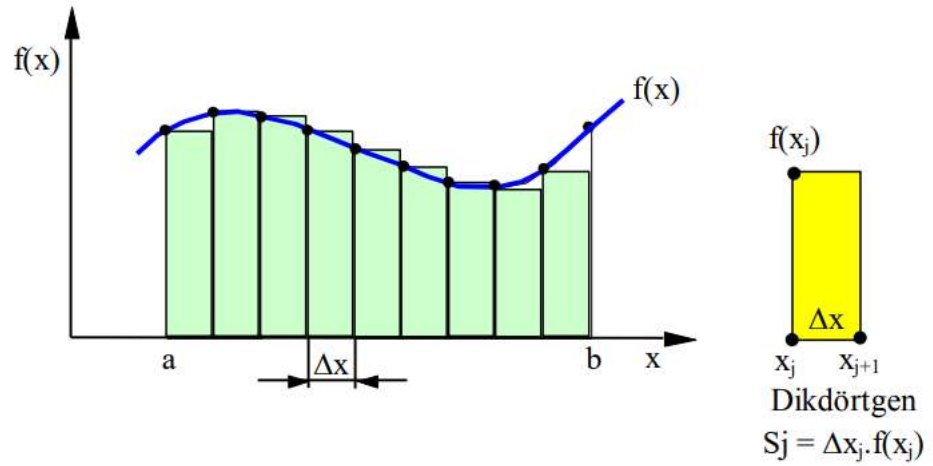


Şekil 2.2.2. Parçalara ayrılarak elde edilen dilimlerin toplanarak integral hesaplama

Başlıca klasik integrasyon metotları ise dikdörtgen metodu, trapez (yamuk) metodu, Simpson metodu, Romberg metodu olup metotların tanımları aşağıda verilmiştir.

2.2.1. Dikdörtgen Metodu [13]

Dikdörtgen metodunda, $x = a$ için $f(a)$ noktasından x eksenine paralel doğru çizilerek birinci dikdörtgen dilim elde edilir. $x = a + \Delta x$ için $f(a + \Delta x)$ noktasından da x eksenine paralel doğru çizilerek ikinci dikdörtgen dilim elde edilir. Bu şekilde devam edilerek her noktadan x eksenine paralel doğrular çizilir ve dikdörtgen dilimler elde edilir. İntegralin değeri, yaklaşık olarak bu dikdörtgen dilimlerin alanlarının toplamına eşittir.



Şekil 2.2.3. Dikdörtgen metodu

Elde edilen x_j 'den x_{j+1} 'e kadar olan dikdörtgen alanı

$$S_j = (\Delta x) f(x_j),$$

olarak hesaplanır. a, b aralığı N parçaya bölünen kalınlığı Δx olan her bir dikdörtgenin alanı hesaplamak için aynı formül kullanılırsa ve toplam alan bulunmak istenirse aşağıda verilen formül elde edilir:

$$F_N = (\Delta x)f(a) + (\Delta x)f(a + \Delta x) + (\Delta x)f(a + 2\Delta x) + \cdots + (\Delta x)f(b - \Delta x) + (\Delta x)f(b) ,$$

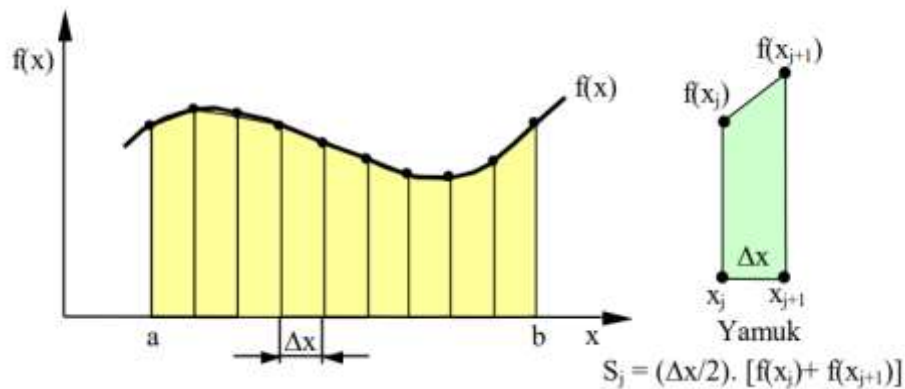
formül düzenlenirse;

$$F_N = \Delta x \left[f(a) + f(b) + \sum_{j=1}^{n-1} f(a + j\Delta x) \right] ,$$

elde edilir. Elde edilen F_N , $f(x)$ eğrisinin altında kalan alanın yaklaşık değerini verecektir.

2.2.2. Yamuk (Trapez) Metodu [17]

Trapez bölme yöntemi, bir fonksiyonun belirli bir aralıktaki integralini yaklaşık olarak hesaplamak için kullanılan bir sayısal integrasyon tekniğidir. Bu yöntemde, her aralıkta $f(t)$ değerleri birleştirilen fonksiyonun bir doğru olarak kabul edilmesi esas alınır. Bu durumda, her bir aralık trapezoid (yamuk) şeklinde düşünülür ve bu trapezoidlerin (yamukların) altındaki alanlar toplanarak integralin yaklaşık değeri elde edilir.



Şekil 2.2.4. Trapez (Yamuk) metodu

Elde edilen x_j 'den x_{j+1} 'e kadar olan trapezoidin alanı

$$S_j = \left(\frac{\Delta x}{2}\right) [f(x_j) + f(x_{j+1})],$$

olarak hesaplanır. a, b aralığı N parçaya bölünen kalınlığı Δx olan her bir trapezoidin alanı hesaplamak için aynı formül kullanılırsa ve toplam alan bulunmak istenirse aşağıda verilen formül elde edilir:

$$F_N = \left(\frac{\Delta x}{2}\right) [f(a) + f(a + \Delta x)] + \left(\frac{\Delta x}{2}\right) [f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x)] + \dots \\ + \left(\frac{\Delta x}{2}\right) [f(b - \Delta x) + f(b)],$$

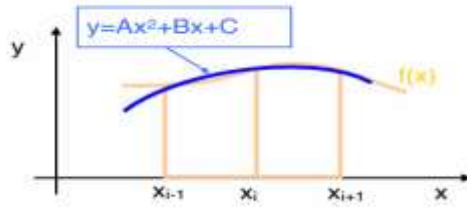
formül düzenlenirse;

$$F_N = \left(\frac{\Delta x}{2}\right) \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(a + j\Delta x) \right],$$

elde edilir. Elde edilen F_N , $f(x)$ eğrisinin altında kalan alanın yaklaşık değerini verecektir. Trapez yönteminde, integralin boyut sayısı " d " olsun. Bu durumda, kullanılan trapezoidlerin genişliği $N^{-2/d}$ ile orantılı olduğundan, hata da bu genişlikle doğru orantılıdır. Yani, $N^{-2/d}$ değeri küçüldükçe veya büyüdükçe hata da buna bağlı olarak azalır veya artar. Ancak görüldüğü gibi, N dilim kalınlığı küçük veya dilim sayısı büyük seçildikçe integrasyon sonucunun doğruluğu artmaktadır.

2.2.3. Simpson Metodu

Bu yöntemde çözüm aralığı çift sayıda n dilim sayısına bölündükten sonra her bir iki dilime ilişkin üç noktadan geçen eğrinin altındaki alan yani integral hesaplanır.



Şekil 2.2.5. Sayısal integralleme için Simpson kuralı

Buna göre x_{j-1} 'den x_{j+1} 'e kadar Simpson kuralı;

$$I_j = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)dx \cong (\Delta x/3)[f(x_{j-1}) + 4(f x_j) + (x_{j+1})],$$

olarak hesaplanır. a, b aralığı n (çift olmak üzere) parçaya bölünen kalınlığı Δx olan tüm iki dilime ilişkin üç noktadan geçen eğrinin altındaki alanı hesaplamak için aynı formül kullanılırsa ve toplam alan bulunmak istenirse aşağıda verilen formül elde edilir:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong (\Delta x/3) \left[f(a) + f(b) + 4 \sum_{j=1(n \text{ tek})}^{n-1} f(a + j\Delta x) + \sum_{j=2(n \text{ çift})}^{n-2} f(a + j\Delta x) \right].$$

2.2.4. Romberg Metodu [18]

Trapez kuralı ile alınan integraldeki hatayı Romberg ekstrapolasyon yöntemiyle azaltmak mümkündür. Trapez yönteminde hata $O(\Delta x^2)$ mertebesinde olup, bir Δx değeriyle yapılan integral ile $\frac{\Delta x}{2}$ alınarak yapılan ikinci bir integralin sonuçları birleştirilerek integral için daha iyi bir tahmin yapılabilir:

Daha iyi tahmin için

$$\int_a^b f(x)dx \cong I\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + \frac{1}{2^n - 1} \left[I\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - I\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \right],$$

formülü kullanılır. Bu formül genelleştirilmesi ile

$$\int_a^b f(x)dx \cong I\left(\frac{\Delta x}{2^{k+1}}\right) + \frac{1}{2^n - 1} \left[I\left(\frac{\Delta x}{2^{k+1}}\right) - I\left(\frac{\Delta x}{2^k}\right) \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$n = 2^m$ ve $m = 1, 2, 3, \dots$ için Romberg formülü elde edilir.

Bu yöntem bilinen bir $f(x)$ fonksiyonu için uygulanırken önce keyfi bir Δx değeri için integral alınır. Sonra Δx değerinin yarısı alınarak yeni bir integral hesabı yapılır. Bu iki integral sonucu yukarıdaki bağıntıda kullanılarak integral için hata mertebesi $O(\Delta x^4)$ olan daha iyi bir tahmin elde edilir. Yapılan bu işlemler bir tabloda yerleştirilerek artarda daha iyi integral tahminleri yapılabilir. Her bir ekstrapolasyon hatanın $O(\Delta x^4)$, $O(\Delta x^6)$, $O(\Delta x^8)$,... biçiminde giderek daha az olmasını sağlar. Hatanın kabul edilebilir seviyeye düştüğü ve yakınsamanın dengelendiği noktada integral için optimum bir değer bulunabilir.

2.3. Düzgün Şebeke [23],

Eğer $g(x)$, $[a, b]$ aralığında düzgün bir şebekede tanımlı bir fonksiyon ve şebeke adımı

$$h = \frac{b - a}{2},$$

olmak üzere mertebesi bir olan ileri fark türevi:

$$g_{x,i} = \frac{g_{i+1} - g_i}{h},$$

mertebesi bir olan geri fark türevi:

$$g_{\bar{x},i} = \frac{g_i - g_{i-1}}{h},$$

mertebesi iki olan geri fark türevi:

$$g_{\bar{x}x,i} = \frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{h^2},$$

biçimindedir.

2.4. İntegro Diferansiyel Denklemler

İntegral denklemlerinde $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu için fonksiyonun türevlerinin de bulunduğu bir integral denklem de olabilir.

$$u'(x) = F\left\{x, u(x), \int_a^x K(x, t, u(t), u'(t))dt\right\},$$

şeklinde verilen ve içinde $u'(x)$ barındıran integral denklemleri integro-diferansiyel denklemler olarak adlandırılır [25].

2.5. Volterra İntegral Ve İntegro-Diferansiyel Denklemler

İntegro-diferansiyel denklemlerin karakterizasyonu, integral sınırlarının yapısına göre belirlenir. Sınırlardan en az birinin değişken olması durumunda Volterra tipi denklemler ortaya çıkar. Bu denklemlerde bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin bulunması halinde Volterra-integro diferansiyel denklem formu oluşur [19]. Alt sınırı a değeri sabit ve üst sınır x değeri değişken olan integral, $f(x)$ bilinen, $u(x)$ bulunmak ya da bilinmeyen fonksiyon ve $K(x, t)$ çekirdek fonksiyon olsun bu durumda;

Volterra integral denklemde eğer bilinmeyen fonksiyon olan $u(x)$ sadece integral denklemi içinde ise birinci tip Volterra integral denklemi olarak adlandırılır.

$$f(x) = \int_a^x K(x, t)u(t)dt ,$$

Volterra integral denklem eğer bilinmeyen fonksiyon olan $u(x)$ hem integral denklemi içinde hem de dışında verilir ise ikinci tip Volterra integral denklemi olarak adlandırılır.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt ,$$

Volterra-integro diferansiyel denklemi, başlangıç değer probleminin integral denklemlere dönüştürülmesi ile ortaya çıkar. Volterra-integro diferansiyel denklemi, bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ ve türevlerinden biri olan $u^{(n)}(x)$ in, $n \geq 1$ için hem integral işareti içinde hem de dışında görülmesi ile oluşur. İntegral sınırlarından en az birisi değişkendir. Bu denklemde integral ve diferansiyel operatörler aynı denklem içinde olduğundan integro-diferansiyel denklem adı verilir. Volterra-integro diferansiyel denklemi aşağıdaki şekildedir [24]:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt .$$

2.6. Gecikmeli Diferansiyel Denklemler

Gecikmeli diferansiyel denklemler, bilinmeyen $y(t)$ fonksiyonunun ve onun türevlerinin (en yüksek mertebeli türev dışında), t anından önceki zaman değerlerine $t - \tau$ gibi bağlı olarak ifade edildiği fonksiyonel diferansiyel denklemler sınıfıdır. En basit değişen (deviating) argümanla diferansiyel denklem,

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau)), \quad t \geq t_0, \quad \tau > 0,$$

biçimindedir ve bu denkleme ilaveten $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ için tanımlı ve sürekli,

$$u(t) = v(t),$$

başlangıç fonksiyonu ile temel başlangıç değer problemi;

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau)), \quad t \geq t_0, \tau > 0$$

$$u(t) = v(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0,$$

biçimindedir [26, 27].

2.7. Singüler Pertürbe Diferansiyel Denklemler

Singüler pertürbe diferansiyel denklemleri, küçük bir parametre ($0 < \varepsilon \ll 1$) ile çarpılmış en yüksek mertebeden türevi içeren ve bu parametrenin sıfıra yaklaşması durumunda denklemin niteliksel davranışının ani değişim gösterdiği denklemlerdir. Matematiksel olarak, genel formu;

$$F(x, u, u', \dots, u^{(n)}, \varepsilon) = 0 ,$$

şeklinde ifade edilebilir [28].

2.8. Diferansiyel Denklemlerin İntegral Denkleme Dönüştürülmesi

Başlangıç koşulu ile verilen katsayısı değişkenlik gösteren veya sabit katsayılı bir diferansiyel denklem integral denkleme dönüştürülebilir.

Örneğin $y(0) = c_0$ başlangıç koşulu ile verilen

$$\frac{dy}{dx} = u(x) ,$$

için eşitliğin iki tarafının integrali alınırsa,

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{dy}{dx} dx = \int_0^x u(x) dx$$

$$\Rightarrow y(x) - y(0) = \int_0^x u(x) dx$$

$$\Rightarrow y(x) - c_0 = \int_0^x u(x) dx$$

$$\Rightarrow y(x) = c_0 + \int_0^x u(x) dx ,$$

gerekli işlemler yapıldığında integral denklemi elde edilmiş olur. Eğer n. mertebeden lineer diferansiyel denklem integral denkleme dönüştürme ihtiyacı duyarsak eşitliğin iki tarafının integralini alma işlemi dönüşüm tamamlanıncaya kadar tekrar edilir.

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, y''(0) = c_2, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{(n-1)},$$

başlangıç değerleri verilmiş olsun;

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}} \right) dx = \int_0^x u(x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}} = \int_0^x u(x) dx + c_{n-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{(n-2)} y}{dx^{(n-2)}} \right) dx = \int_0^x \left(\int_0^x u(x) dx + c_{n-1} \right) dx$$

$$\Rightarrow \frac{d^{(n-2)} y}{dx^{(n-2)}} = \int_0^x \int_0^x u(x) dx dx + (c_{n-1})x + c_{n-2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^{(n-3)} y}{dx^{(n-3)}} = \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(x) dx dx dx + \frac{1}{2!} (c_{n-1})x^2 + (c_{n-2})x + c_{n-3},$$

n. terime kadar eşitliğin iki tarafının integralini almaya devam edersek,

$$\begin{aligned} \Rightarrow y = \int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(x) dx \dots dx + \frac{1}{(n-1)!} (c_{n-1})x^{(n-1)} + \frac{1}{(n-2)!} (c_{n-2})x^{(n-2)} \\ + \dots + c_1 x + c_0, \end{aligned}$$

n. mertebeden diferansiyel denklemini elde etmiş oluruz.

3. MATELYAL ve YÖNTEM

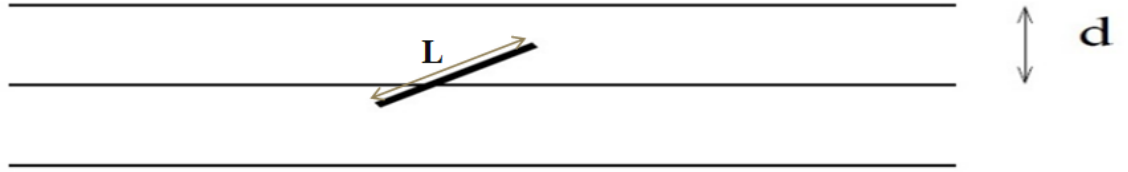
3.1. Monte Carlo Metodunun Tarihsel Gelişimi

İlk çalışmaları ve örnekleri ayrı bir metot olarak belirtilmeyip gelişmemiş olan Monte Carlo metotları ayrı bir metot olarak incelenmesi ve sistematik gelişimi 1940'lara dayanmaktadır [6].

Buffon'un iğne problemi, istatistiksel yöntemlerin ve geometrik olasılık teorisinin erken örneklerinden biri olarak kabul edilir. 18. yüzyılda Fransız doğa bilimci Buffon, belirli aralıklarla çizilmiş paralel çizgiler üzerine rastgele atılan bir iğnenin bu çizgilere çarpma ihtimalini inceleyen bir deney tasarlamıştır. Deneyde, birbirine eşit (d) mesafede yerleştirilmiş yatay çizgilere, bu aralıktan daha kısa ($L < d$) bir iğne serbestçe bırakılmıştır. Buffon, yaptığı matematiksel analizler sonucunda iğnenin çizgilere temas etme olasılığının (M), iğnenin uzunluğu (L) ve çizgiler arası mesafe (d) cinsinden,

$$M = \frac{2L}{\pi d},$$

şeklinde ifade edilebileceğini bulmuştur. Bu sonuç, rastgelelik ve geometri arasındaki ilişkiyi gösteren önemli bir keşif olarak tarihe geçmiştir.

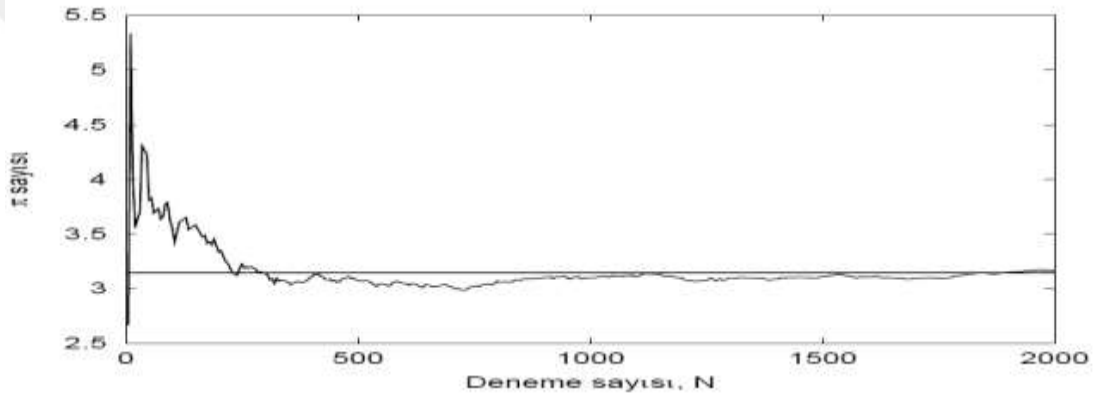


Şekil 3.1.1. Buffon'un π sayısını bulma deneyi

İğne atma olayı N kez yapıldığında ve iğnenin birbirine paralel doğrulardan biri ile kesiştiği durumların sayısının n kez olduğu bulunur ise, basit bir olasılık hesabı ile P 'nin bu örnek için olasılık değeri,

$$P = \frac{n}{N},$$

olarak hesaplanır. İki denklemin eşitliğinde, d ve L değerleri de verilmiş olduğundan, π değerini yaklaşık hesaplayan bir denklem elde etmiş oluruz. Eğer bilgisayarda uygun bir program yardımıyla rassal sayılar üretilmesi ve bu rassal sayıların kullanılmasıyla bu deneyin bir simülasyonu yapılabilir. Deneyin simülasyon sonucu elde edilen π sayısının N değerine göre elde edilen veriler Şekil 3.1.2’de gösterilmiştir. Buffon'un iğne deneyinde, gerçekleştirilen atış sayısı (N) arttıkça, elde edilen π değerinin teorik değere yakınsadığı ve bu değer etrafında dalgalanmalar gösterdiği gözlemlenmiştir. Buffon'un bu deneyle ortaya koyduğu istatistiksel yakınsama prensibi, 1900'lü yıllarda olasılık kuramının gelişimine önemli bir katkı sunmuştur. Deneyin sonuçları, rastgele olayların matematiksel analizinde Monte Carlo benzeri yöntemlerin temelini oluşturmuştur [7,8].



Şekil 3.1.2. Rassal sayılar üretilerek Buffon'un π sayısını bulma deneyi

1930’larda, İtalyan fizikçi Enrico Fermi, nötronların davranışını analiz ederken, yoğun madde içindeki nötr parçacıkların etkileşimlerini incelemek amacıyla sayısal yöntemler kullanmıştır. Bu çalışmalar, günümüzde Monte Carlo simülasyonları olarak bilinen istatistiksel hesaplama tekniklerinin temelini oluşturmuştur. Fermi, bu yöntemlerle rastgele örnekleme tekniklerini uygulayarak teorik modellerin doğrulanmasına katkı sağlamıştır [9]. İkinci Dünya Savaşı sırasında Amerika Birleşik Devletleri’nde Manhattan Projesi’nde John von Neumann için çalışan bir matematikçi olan Stanislaw Ulam, bir hastalıktan iyileşme döneminde soliter adlı bir kart oyununu kazanma olasılığı üzerine kafa yorarken 1946’da Monte Carlo metodunu icat eden kişi olarak tanınır. 1940’larda Los Alamos Ulusal Laboratuvarı’nda fizikçiler radyasyon kalkanı ve özellikle de nötronların çeşitli maddelerden geçebileceği mesafeyi araştırıyorlardı. Analitik hesaplamalar problemi çözmek için kullanılamıyordu çünkü mesafeler, nötronların madde boyunca geçişi sırasında nasıl dağıldıklarına bağlıydı. Bu

da doğal olarak rassal bir süreçti. von Neumann ve Ulam, sistemin bir bilgisayar üzerinde modellenmesi ile sorunun çözülmesi fikrini öne sürdüler. Manhattan Projesi çok gizli olduğundan, bu çalışma için bir kod adı gerekiyordu, “Monte Carlo” ismi Monaco'daki Monte Carlo Kumarhanesi'ne atfen Nicholas Metropolis tarafından seçilmiştir. İkinci Dünya Savaşı sırasında, von Neumann, Fermi, Ulam ve Metropolis gibi isimlerin bir araya getirilmesi ve modern dijital bilgisayarların başlangıcı, Monte Carlo'nun ilerleyişine güçlü bir ivme kazandırmıştır. Başlangıçta basit sayısal integral hesaplamalarında kullanılan bu teknik, zamanla karmaşık çok katlı integrallerin ve diğer zorlu matematiksel problemlerin çözümünde yaygın bir şekilde uygulanan etkili bir yönteme dönüşmüştür [10,11].

3.2. Monte Carlo Metodunun Özellikleri

Günümüzde karmaşık ve çözümü zor olan problemlerin kullanılması maalesef pek çok analitik çözümü olanak dışı bırakmaktadır. Analitik yaklaşımların yetersiz kaldığı bu durumlarda bilimsel problemlerin rassal sayıların kullanılması ile çözüldüğü Monte Carlo metotları karmaşık problemlerin modellenmesi ve çözümünde daha başarılı olurlar. Monte Carlo metotları birbirinden farklı özellikler ve farklı yaklaşımlar içerse de temelde rassal sayıların bilgisayarlarda programlar yardımıyla elde edilip problemlerin çözümü için kullanılmasına dayanır. Monte Carlo metotları, diğer sayısal integrasyon metotlarının aksine integral boyutuna bağlı olmadığından çok katlı integrallerin çözümünde en etkili metot olarak öne çıkmaktadır. Ancak Monte Carlo metotları yoğun bilgisayar kullanımını ve gelişmiş programlar gerektirir.

Monte Carlo metotları, istatistiksel simülasyon ve rastgele örnekleme temelli teknikler kullanarak karmaşık sistemleri modellemeye ve sayısal problemleri çözmeye olanak sağlar. Bu yaklaşım, rassal değişkenlerin davranışını incelemek için tekrarlı hesaplamalara dayanır ve günümüzde pek çok disiplinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Söz konusu tekniklerin başlıca uygulama alanları şunlardır [5]:

- Üretim Sistemleri ve Operasyonel Analiz
- Fiziksel Modelleme ve Mühendislik Tasarımları
- Olasılıksal Ağ Yapıları ve Ayrık Matematiksel Modeller
- Finansal Piyasa Analizleri ve Ekonomik Tahminler
- Sayısal Yöntemlerle İstatistiksel Analiz

3.3. Monte Carlo Metodu

Monte Carlo metodu, rastgele örnekleme teknikleri kullanarak integral değerlerinin istatistiksel tahminini yapmaya dayanan sayısal bir analiz yaklaşımıdır. Sayısal analizde Monte Carlo metotları, özellikle kapalı form çözümü bulunmayan integrallerin hesabında kritik bir rol oynar. Tezimizin ilerleyen kısımlarında, metodun düşük boyutlu bir ve iki boyutlu uygulamaları verilmiş olmakla birlikte, tekniklerin çok boyutlu integraller söz konusu olduğunda diğer sayısal yöntemlere kıyasla belirgin bir verimlilik avantajı sağladığı gösterilecektir.

Çok boyutlu sayısal integrasyon, özellikle yüksek boyutlu ortamlarda, geleneksel kareleme yöntemleri, bir integrali doğru bir şekilde yaklaşım için gereken noktaların üstel büyümesi nedeniyle hesaplama açısından uygulanamaz hale gelir (genellikle "boyutluluğun laneti" olarak adlandırılır). Ancak Monte Carlo Metodu, artan boyutlarla kötüleşmeyen $\frac{1}{\sqrt{N}}$ (N, boyut) yakınsama oranını korur ve bu da metodu fizik, mühendislik ve finans gibi alanlarda yüksek boyutlu integraller için güçlü bir araç haline getirir. Bu nedenle Monte Carlo integrasyonu birçok yüksek boyutlu problem için iyi bir pratik yöntemdir [19,20]. Monte Carlo integrasyonu kendi içinde bazı metotlar içerir bunlar:

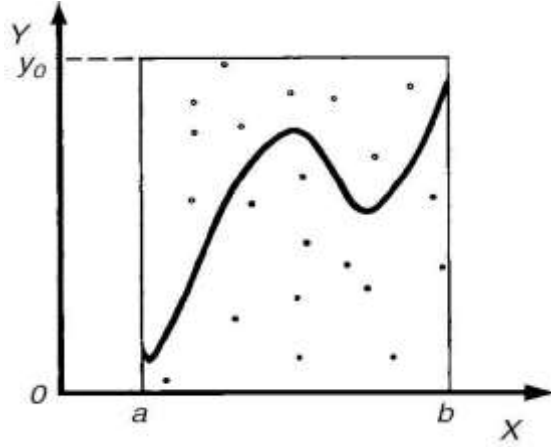
3.3.1. Reddetme Metodu

$[a, b]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun integralini RM ile hesaplanmak istendiğinde,

$$y = \int_a^b f(x)dx ,$$

Şekil 3.3.1’da bu hesaplanmak istenen bu değeri görselleştirmek amacı ile bir örneği verilmiştir. RM ile bu değeri hesaplamak için ilk olarak $[a, b]$ aralığındaki x değerlerine karşılık gelen $y_0 > f(x)$ şartını da sağlayan kapalı bir alan oluşturmaktır. Bu kapalı alan $f(x)$ ’in garfıği tarafından, eğrinin yukarısında kalan bölge ve eğrinin aşağısında kalan yani ulaşmak istediğimiz sonucun gösteren bölge olmak üzere iki ayrı bölgeye ayrılır. Şekil 3.3.1’da söz konusu problemin geometrik temsili sunulmaktadır. RM kapsamında uygulanan temel Monte Carlo yaklaşımı, integral sınırları $[a, b]$ aralığında ve fonksiyon değerleri $[0, y_0]$ aralığında olacak şekilde bir sınırlayıcı dikdörtgen tanımlamaktır. Bu geometrik yapı, fonksiyon eğrisi tarafından iki ayrı bölgeye bölünür. Bu bölgeler eğrinin

üzerinde kalan kısım (reddedilecek noktalar) ve eğri altında kalan ve integral değerini temsil eden hesaplama alanıdır.



Şekil 3.3.1. Reddetme metodunun gösterimi

Tekdüze bir dağılımdan rassal olarak (x_i, y_i) ikilileri üretilir. Elde edilen (x_i, y_i) ikililerinin kapalı alanın sınırları dışına çıkmamasını istediğimizden yatay değerler için $[a, b]$ ve dikey değerler için de $[0, y_0]$ değerleri arasında olacak şekilde sınırlandırılmalıdır. Belirlenen sınırlar içinde elde edilen (x_i, y_i) ikililerinin karşılık geldiği noktaların $f(x)$ eğrisinin üzerinde kalan kısım (reddedilecek noktalar) veya eğri altında kalan ve integral değerini temsil eden hesaplama alanında olduğu tespit edilir. Elde ettiğimiz bu tespitler ile, $y_i \leq f(x_i)$ şartını sağlayan noktalar integral değerini temsil eden hesaplama dahil edilirken, $y_i > f(x_i)$ şartını sağladığı durumlar için ise integral değerini temsil eden hesaplama dahil edilmez. $f(x)$ eğrisi ile y eksenini arasında kalan integral değerini temsil eden hesaplama dahil edilen noktaların sayısının N_0 ve rassal olarak seçilen tüm nokta sayısına N oranı ile integral değerini temsil eden $f(x)$ eğrisinin altında kalan alan y ve oluşturulan dörtgenin alanı A oranının birbirine yaklaşık değer vermesi beklenir.

$$\frac{N_0}{N} \cong \frac{y}{A},$$

Burada dörtgen alanının $(y_0 - 0) \cdot (b - a)$ olduğu bilindiğinden, eğri altında kalan alan yaklaşık olarak,

$$y \cong \frac{N_0}{N} [y_0(b - a)] ,$$

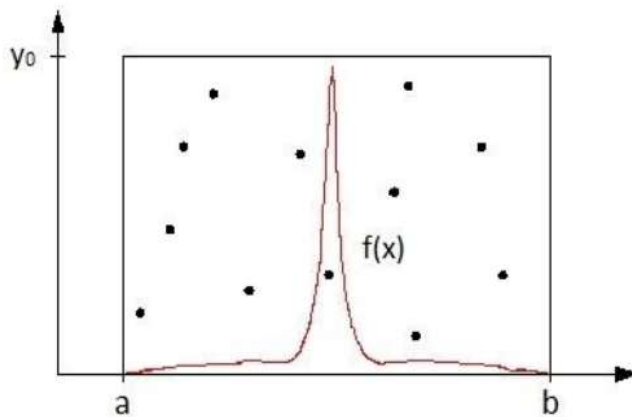
biçiminde yazılabilir.

RM'unun doğruluğu, üretilen rastgele sayıların miktarıyla doğrudan ilişkilidir. N değeri arttıkça tahminin kesinliği artar ve sonuç gerçek değere yakınsar. RM'unun verimliliği kullanılan rassal sayı üreticinin niteliğine bağlı olup, farklı rastgele sayı dizileriyle yapılan bağımsız çalıştırmalar sonucunda elde edilen değerlerin karşılaştırılması, hesaplamamanın güvenilirliğinin değerlendirilmesine olanak tanır.

RM bilgisayar algoritması aşağıda verilmiş olup uygun bir matematik programında çalıştırılabilir.

- İlk olarak başlangıç değeri olarak $N_0 = 0$ atanır,
- Sonraki adımda x_i , $0 < i \leq N$ değerleri $[a, b]$ aralığında rassal olarak belirlenir,
- Sonraki adımda y_i değerleri $[0, y_0]$ aralığında rassal olarak belirlenir,
- Eğer $y_i \leq f(x_i)$, $0 < i \leq N$ şartı sağlanırsa $N_0 = N_0 + 1$ olacak şekilde yeni değer belirlenir, şart sağlanmaz ise değişiklik yapılmaz,
- Adım adım verilen işlemler N kez yapılır,
- Son adımda $y \cong \frac{N_0}{N} [y_0(b - a)]$ sonucu hesaplanır [21].

Sivri tepeye sahip olan fonksiyonlar için RM iyi sonuç verecek bir metot değildir. Şekil 3.3.2'de metodun bu dezavantajlı durumuna örnek verilmiştir. Örnek ve benzeri durumlarda metot iyi çalışmayacaktır, istene sonuca ulaşmada yetersiz kalacaktır [22].



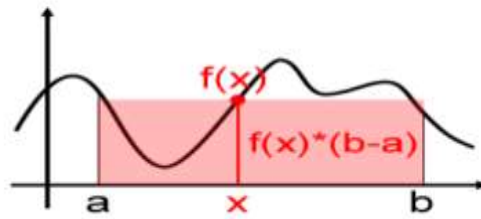
Şekil 3.3.2. Reddetme metodu için uygun olmayan keskin tepeli fonksiyonlar [22]

3.3.2. Ortalama Değer Metodu+

$[a, b]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun integralini ODM ile hesaplanmak istendiğinde,

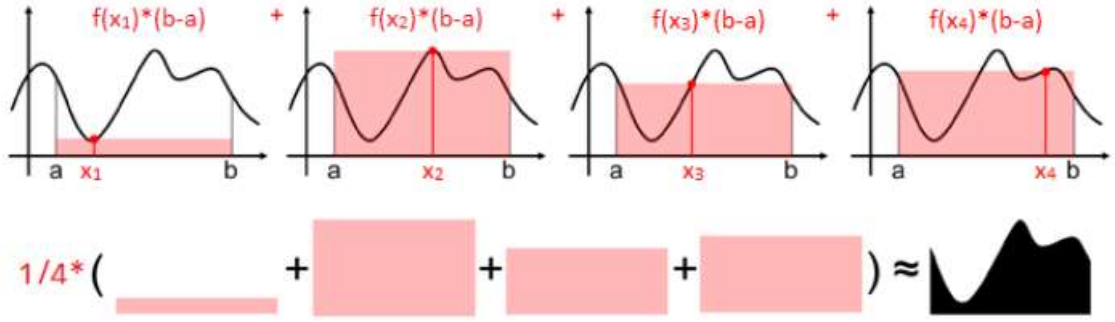
$$F = \int_a^b f(x)dx ,$$

ODM’u için ilk olarak $[a, b]$ aralığında rassal bir x_i sayıları belirlenir, $f(x)$ fonksiyonunun belirlenen x_i rassal sayısı için karşılığı bulunur, bulunan değer $(b - a)$ değeri ile çarpılır. Şekil 3.3.3’te yer verildiği gibi bu işlemler bize $f(x)$ yüksekliğine ve $(b - a)$ taban genişliğine sahip olan bir dikdörtgenin alanını verecektir. Elde edilen bu dikdörtgen ulaşılmak istenen çözüme yaklaşık bir değer vermiş olacaktır.



Şekil 3.3.3. Ortalama değer metodu ile oluşan dikdörtgen

Elde edilen dikdörtgen alanı ulaşılmak istenen sonuca göre bazen çok küçük bazen ise daha fazla olacaktır. Örneğin Şekil 3.3.1’e bakıldığında fonksiyonu x_1 değeri için elde edilen alan hesaplanmak istenen sonuca göre epey küçük bir alan elde etmiş oluruz, fonksiyonu x_2 değeri için elde edilen alan ise hesaplanmak istenen sonuca göre epey fazla bir alan elde etmiş oluruz. Bu şekilde, fonksiyonu $[a, b]$ aralığında belirlenen birçok farklı rassal değerler için uyguladığımızda ve oluşan dikdörtgenlerin alanlarını toplanarak ve ortalaması alınarak, ulaşacağımız değer hesaplanmak istenen integralin gerçek sonucuna yaklaştırmış olunacaktır. Elde edilen küçük dikdörtgenlerdeki eksik kalacak alanlar elde edilen büyük dikdörtgenlerdeki fazla alanlar ile giderilmiş olacaktır. Bu düşünce ile oluşan tüm dikdörtgenlerin alanları toplanır ve alanlarının ortalamasını alınırsa hesaplanmak istenen değere epey yaklaşık bir sonuca ulaşılabilecektir. Rassal elde edilen sayıların sayısı arttıkça daha iyi sonuçlar elde edilmesini bekleriz. Beklediğimiz bu düşünce Şekil 3.3.4’ de gösterilmiştir.



Şekil 3.3.4. Ortalama değer metodu ile rassal noktalar ile yaklaşık değer bulma

Analizde fonksiyon, tanım kümesinden rastgele seçilen dört ayrı x değerinde hesaplanmıştır. Her bir nokta için elde edilen fonksiyon değeri $(b - a)$ değeri ile çarpılarak, bu dört sonucun aritmetik ortalaması alınmış ve integralin sayısal tahmini elde edilmiştir. Monte Carlo prensibi gereği, ODM’unda da örneklem büyüklüğü (N) arttıkça bu tahmin gerçek integral değerine daha çok yaklaşmaktadır. Verilen işlemleri,

$$Alan = \frac{1}{4} (f(x_1)(b - a) + f(x_2)(b - a) + f(x_3)(b - a) + f(x_4)(b - a))$$

$$= \frac{1}{4} (b - a) (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4))$$

$$= \frac{1}{4} (b - a) \sum_{i=1}^4 f(x_i) ,$$

şeklinde yazabiliriz. Eğer elde edilen ifade N rassal sayı için tekrarlanırsa elde edilecek ifade,

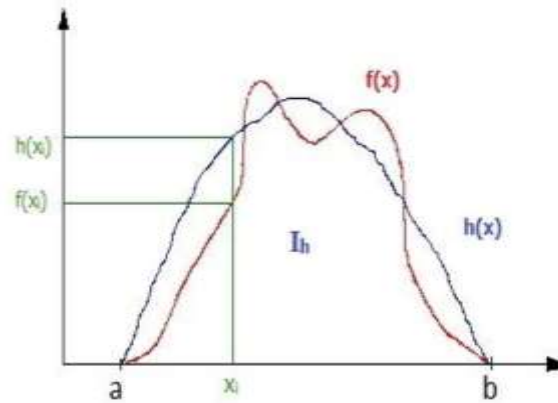
$$F_N = \frac{1}{N} (b - a) \sum_{i=1}^N f(x_i) ,$$

şeklinde olacaktır. Bu şekilde ODM için integrasyon ifadesi elde etmiş oluruz [23]. ODM bilgisayar algoritması aşağıda verilmiş olup uygun bir matematik programında çalıştırılabilir.

- İlk olarak başlangıç değeri olarak $N_0 = 0$ atanır,
- Sonraki adımda x_i , $0 < i \leq N$ değerleri $[a, b]$ aralığında rassal olarak belirlenir
- Sonraki adımda $f(x_i)$, $0 < i \leq N$ değeri hesaplanır buna göre $N_0 = N_0 + f(x_i)$ ifadesi ile bulunur,
- Adım adım verilen işlemler N kez yapılır,
- Son adımda ise $\frac{N_0}{N} (b - a)$ ifadesi bulunur.

3.3.3. Kontrol Değişken Metodu

Bu metotta, integrali hesaplanacak olan $f(x)$ fonksiyonuna yardımcı bir fonksiyon kullanma düşüncesine dayanır. Alınacak bir yardımcı $h(x)$ fonksiyonu $f(x)$ fonksiyonuna olabildiğince benzer olmalı aynı zamanda da belirlenecek bu yardımcı fonksiyonun integrali bilinen yollar ile daha kolay hesaplanabilir olmalıdır.



Şekil 3.3.5. Kontrol değişkeni metodu fonksiyon ve yardımcı fonksiyon gösterimi

x_i rassal değerler belirlenip her x_i değeri için, $f(x)$ ve $h(x)$ değerleri hesaplanır ve bu değerlerin farkı alınarak, bu fonksiyonların integral değerleri arasındaki fark yaklaşık olarak hesaplanmış olacak, hesaplanan bu değer, $h(x)$ fonksiyonunun belli olan veya bilinen metotlarla kolay bir şekilde hesaplanabilecek olan integral değeri ile toplanır, böylece hesaplanacak olan $f(x)$ fonksiyonunun integral değerine ulaşılmış olunacaktır. $f(x)$ hesaplanmak istenen fonksiyonunun integral değeri,

$$I_i = \int_a^b f(x) dx ,$$

$h(x)$ yardımcı fonksiyonunun integral değeri,

$$I_h = \int_a^b h(x)dx ,$$

olmak üzere,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(x)dx + \int_a^b (f(x) - h(x))dx ,$$

biçiminde ifade edebiliriz. Yardımcı $h(x)$ fonksiyonunun integrali bilindiğinden veya bilinen yollarla basit bir şekilde hesaplanabildiğinden dolayı, $f(x) - h(x)$ ifadesini bulunarak $f(x)$ fonksiyonunun integral değeri de bulunabilir. $f(x) - h(x)$ değeri bulunurken ise yine sadece yatay ekseninde yani x koordinat için rassal olarak seçilen değerler kullanılır. Rassal olarak belirlenen x_i noktasında değeri hesaplanmak istenen fonksiyon ve belirlenen yardımcı fonksiyonun değeri hesaplanır ve $f(x) - h(x)$ ifadesi hesaplanır. Elde edilen sonuç rassal olarak seçilen her x_i değeri için ayrı ayrı $f(x) - h(x)$ ifadesi hesaplanarak bulunur.

Ayrı ayrı elde edilen bütün $f(x) - h(x)$ değerlerinin ortalaması alınır ve yine OD metodunda yapıldığı gibi $b - a$ ile çarpılır. Bu metot ile hesaplanmak istenen integral ile yardımcı fonksiyonun integrali arasındaki fark integralinin yaklaşık değeri elde edilir. Bu fark değeri, değeri bilinen veya bilinen yollar ile basitçe hesaplanan yardımcı integral değerine eklenerek asıl hesaplanmak istenen integralin sayısal tahmini gerçekleştirilmiş olur. Verilen işlemleri;

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b h(x)dx + (b - a) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) - h(x_i) ,$$

şeklinde yazabiliriz.

KDM bilgisayar algoritması aşağıda verilmiş olup uygun bir matematik programında çalıştırılabilir.

- İlk olarak başlangıç değeri olarak $N_0 = 0$ atanır.

- Sonraki adımda x_i , $0 < i \leq N$ değerleri $[a, b]$ aralığında rassal olarak belirlenir.
- Sonraki adımda $f(x_i) - h(x_i)$, $0 < i \leq N$ değeri hesaplanır ve $N_0 = N_0 + f(x_i) - h(x_i)$, $0 < i \leq N$ olarak belirlenir.
- Adım adım verilen işlemler N kez yapılır.
- Son adımda sonucu $I_h + \frac{N_0}{N}(b - a)$ işlemleri hesaplanarak bulunur.

Eğer, $h(x)$ yardımcı fonksiyonu belirlenmesinde iyi bir seçim yapılırsa, hesaplanmak istenen sonuca o kadar iyi yaklaşılmış olunacaktır [22].



4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu tezde teorik olarak sunulan Monte Carlo yöntemi ve diğer integral yöntemlerinin uygulamaları yapılacaktır. Yüksek boyutlu integrallerin hesaplanmasını gerektiren integro diferansiyel denklemlerin çözümünde etkili bir şekilde Monte Carlo metotları kullanılabilir. Bu bölümde ilk olarak analitik çözümü bilinen integro diferansiyel denklemler Monte Carlo metodu ile hesaplanarak hata değerlerinin karşılaştırması yapılacaktır. İkinci olarak ise sayısal çözümü bilinen bir integro diferansiyel denklem Monte Carlo metodu ile hesaplanarak iki sayısal çözüm arasında karşılaştırma yapılacaktır. Son olarak ise analitik çözümü olmayan bir integro diferansiyel denklem Monte Carlo metodunu kullanarak çözümü yapılacak olup maksimum hata hesaplaması yapılarak metodun kullanılabilirliği test edilecektir.

Örnek 1:

$$u''(t) + \frac{2}{t}u'(t) + u^5(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

singüler diferansiyel denklemin

$$u'(0) = 0, \quad u(0) = 1, \quad (2)$$

(2) sınır şartları ile verilen yaklaşık değerini Monte Carlo metodu kullanarak bulunması: İlk olarak (1) denkleminin ikinci türevini açık hali olarak düzenleyip,

$$u''(t) = -\frac{2}{t}u'(t) - u^5(t),$$

ifadesi elde edilir. Sonra eşitliğin iki tarafı $[0, t]$ aralığında integre edilirse,

$$u''(t) = u'(0) + \int_0^t u'(s)ds$$

$$= 0 + \int_0^t -\frac{2}{s}u'(s) - u^5(s)ds$$

$$= - \int_0^t \frac{2}{s}u'(s) + u^5(s)ds ,$$

elde edilir. Daha sonra eşitliğin her iki tarafı aynı aralıkta bir daha integre edilirse,

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(t)dt$$

$$= 1 + \int_0^t u'(t)dt$$

$$= 1 + \int_0^t \left(- \int_0^s \left(\frac{2}{s}u'(s) + u^5(s) \right) ds \right) dt,$$

$$u(t) = 1 - \int_0^t \left(\int_0^s \left(\frac{2}{s}u'(s) + u^5(s) \right) ds \right) dt,$$

böylece çift katlı integral denklemi elde etmiş oluruz. Şimdi birinci mertebe diferansiyel denklem fark karşılığı

$$u' \cong \frac{u_{n+1} - u_n}{h},$$

yerine yazılırsa;

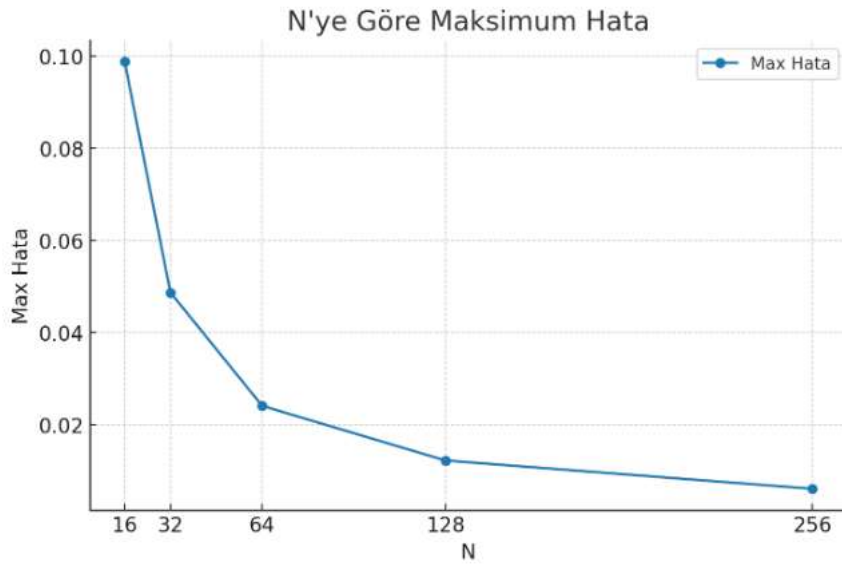
$$u(t_i) \cong 1 - \int_0^t \left(\int_0^s \left(\frac{\frac{2}{s_i}(u(s_i) - u(s_{i-1}))}{h} + u^5(s_i) \right) ds \right) dt,$$

çift katlı integral kısmı Monte Carlo metodu ile hesaplanır ve hesaplanması amaçlanan $u(t)$ değerinin yaklaşık değeri hesaplanmış olur. Hesaplama, tablo oluşturma ve grafik çizimi için uygun bir matematik programı kullanılarak verilmiştir.

Çizelge 4.1. Monte Carlo metodu maksimum hata tablosu

N	N	Maksimum-Hata
8	16	0.09883277
16	32	0.04869790
32	64	0.02409286
64	128	0.01222903
128	256	0.00608482

Tablo incelendiğinde N değerlerinin büyümesi ile hata miktarının azalması görülmüştür. Bu da bize metodun çalıştığını göstermektedir. Daha büyük N değerleri için hata miktarının daha da azalmasını bekleyebiliriz. Elde edilen değerleri Şekil 4.1. de gösterilmiştir.



Şekil 4.1. Monte Carlo metodu maksimum hata grafiği

Örnek 2:

$$u''(t) = -u(t) + \int_0^t (t-s)y(s)ds, \quad (7)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad (8)$$

(8) koşullarını sağlayan (7) denkleminde yer alan (9) ifadesi için uygun bir matematik programı ile yapılan algoritma ile N tane rassal sayı için

$$\int_0^t (t-s) y(s) ds \cong \left(\frac{t}{N}\right) \sum_{j=0}^N (t-s) Y_{NCj}, \quad (9)$$

hesaplanır ve (7) denkleminde yerine yazılırsa

$$u''(t) \cong -Y_{NCn} + \left(\frac{t}{N}\right) \sum_{j=0}^N (t-s) Y_{NCj}, \quad (10)$$

(10) denkleğini elde etmiş oluruz. İkinci mertebeden diferansiyel denklemin fark karşılığı olan

$$u'' \cong \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2},$$

(10) denkleminde yazılırsa,

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} \cong -Y_{MCn} + \left(\frac{t}{N}\right) \sum_{j=0}^N (t-s) Y_{MCj},$$

rassal olarak belirlenen Y_{MC} değerleri yukarıda verilen denklikte yerine yazılırsa,

$$\frac{Y_{MCn+1} - 2Y_{MCn} + Y_{MCn-1}}{h^2} \cong -Y_{MCn} + \left(\frac{t}{N}\right) \sum_{j=0}^N (t-s) Y_{MCj},$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler de yapılırsa,

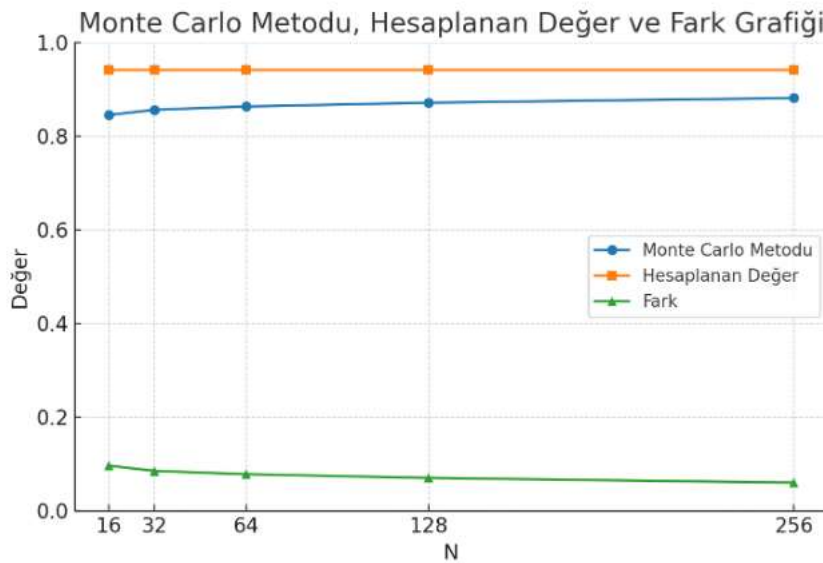
$$Y_{MC_{n+1}} \cong 2Y_{MC_n} - Y_{MC_{n-1}} + \left(-Y_{MC_n} + \left(\frac{t}{N} \right) \sum_{j=0}^N (t-s) Y_{MC_j} \right) h^2,$$

çözümü bulunur.

Çizelge 4.2. Monte Carlo metodu ile hesaplanan değer karşılaştırma tablosu

N	Monte Carlo Metodu	Hesaplanan Değer	Fark (Hata)
16	0.84525841	0.94148263	0.09622422
32	0.85641258	0.94148263	0.08507005
64	0.86348952	0.94148263	0.07799311
128	0.87152147	0.94148263	0.06996116
256	0.88154785	0.94148263	0.05993478

Tablo incelendiğinde N değerlerinin büyümesi ile metot değeri ile hesaplanan değer arasındaki fark miktarının azaldığı görülmüştür. Daha büyük N değerleri için farkın daha da azalması beklenir. Elde edilen değerleri Şekil 4.2’de gösterilmiştir.



Şekil 4.2. Monte Carlo metodu ile Runge-Kutta 4 metodu karşılaştırma grafiği

Örnek 3:

$$\varepsilon u'(t) + u^3(t) + 3u(t) + \int_0^t u^2(s)ds = e^{\frac{-3t}{\varepsilon}} - \frac{1}{2}\varepsilon e^{\frac{-2t}{\varepsilon}} + 2e^{\frac{-t}{\varepsilon}} + \frac{1}{2}\varepsilon, \quad (11)$$

$$u(0) = 1, \quad (12)$$

(12) başlangıç koşulu ile verilen (11) denkleminin Monte Carlo metodu ile çözümünü yapıp gerçek çözüm olan

$$u(t) = e^{\frac{-t}{\varepsilon}},$$

ile hata karşılaştırması yapılacaktır. İlk olarak denklem

$$u'(t) = \left(-u^3(t) - 3u(t) - \int_0^t u^2(s)ds + e^{\frac{-3t}{\varepsilon}} - \frac{1}{2}\varepsilon e^{\frac{-2t}{\varepsilon}} + 2e^{\frac{-t}{\varepsilon}} + \frac{1}{2}\varepsilon \right) \frac{1}{\varepsilon}, \quad (13)$$

(13) denklemi olarak düzenlenerek buradaki integral terimi

$$\int_0^t u^2(s)ds \cong \left(\frac{t}{N} \right) \sum_{j=0}^N Y_{MCj}^2 \quad (14)$$

şeklinde hesaplandıktan sonra (13) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u'(t) \cong \frac{\left(-u^3(t) - 3u(t) - \left(\frac{t}{N} \right) \sum_{j=0}^N Y_{MCj}^2 + e^{\frac{-3t}{\varepsilon}} - \frac{1}{2}\varepsilon e^{\frac{-2t}{\varepsilon}} + 2e^{\frac{-t}{\varepsilon}} + \frac{1}{2}\varepsilon \right)}{\varepsilon}, \quad (15)$$

elde etmiş olunur. Birinci mertebeden diferansiyel denklemin fark karşılığı olan

$$u' \cong \frac{u_{n+1} - u_n}{h},$$

ifade (15) denkleminde yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{(Y_{MC_{n+1}} - Y_{MC_n})}{h} \\ & \cong \frac{\left(-Y_{MC}^3(t) - 3Y_{MC(t)} - \left(\frac{t}{N}\right) \sum_{j=0}^N Y_{MCj}^2 + e^{\frac{-3t_n}{\varepsilon}} - \frac{1}{2}\varepsilon e^{\frac{-2t_n}{\varepsilon}} + 2e^{\frac{-t_n}{\varepsilon}} + \frac{1}{2}\varepsilon \right)}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler de yapılırsa,

$$Y_{MC_{n+1}} \cong$$

$$\begin{aligned} & Y_{MC_n} \\ & + \left(\frac{\left(-Y_{MC}^3(t) - 3Y_{MC(t)} - \left(\frac{t}{N}\right) \sum_{j=0}^N Y_{MCj}^2 + e^{\frac{-3t_n}{\varepsilon}} - \frac{1}{2}\varepsilon e^{\frac{-2t_n}{\varepsilon}} + 2e^{\frac{-t_n}{\varepsilon}} + \frac{1}{2}\varepsilon \right)}{\varepsilon} \right) h, \end{aligned}$$

denkleminde ulaşılır.

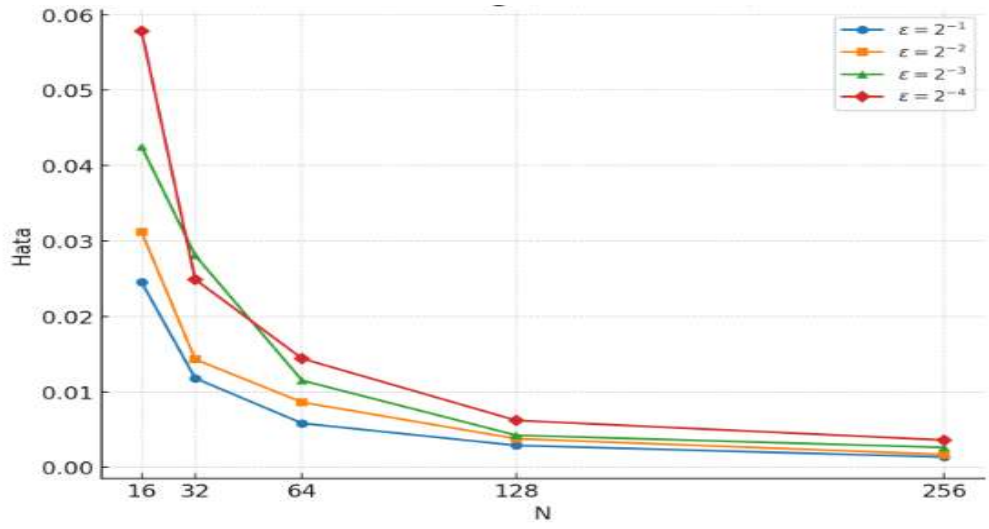
Farklı rassal değerler ve epsilon değerleri için hesaplamalar yapılarak (11)-(12) probleminin Monte Carlo metodu ile çözümü elde edilmiştir. Aşağıda ise elde edilen hata değerleri tablo ve grafikler üzerinde sunulmuştur. Burada sayısal integrasyon metotları ile karşılaştırılmalı tablo ve grafikleri verilmiştir.

Çizelge 4.3. N ve ε değerleri için maksimum hata değerleri karşılaştırma tablosu

N/ε	$\varepsilon = 2^{-1}$	$\varepsilon = 2^{-2}$	$\varepsilon = 2^{-3}$	$\varepsilon = 2^{-4}$
16	0.0245218943	0.0311897321	0.0425012875	0.0578129036
32	0.0118023567	0.0143124892	0.0280987418	0.0249126543
64	0.0058237614	0.0086123598	0.0115012947	0.0144028319

128	0.0028921451	0.0037819023	0.0042416785	0.0062094312
256	0.0013518927	0.0016912034	0.0026218947	0.0036014782

Bu tablo incelendiğinde N değerlerinin büyümesi ile hata değerinin azaldığı, ε değerinin küçülmesi ile ise hata değerinin arttığı görülmüştür. Elde edilen değerleri Şekil 4.3'te gösterilmiştir.



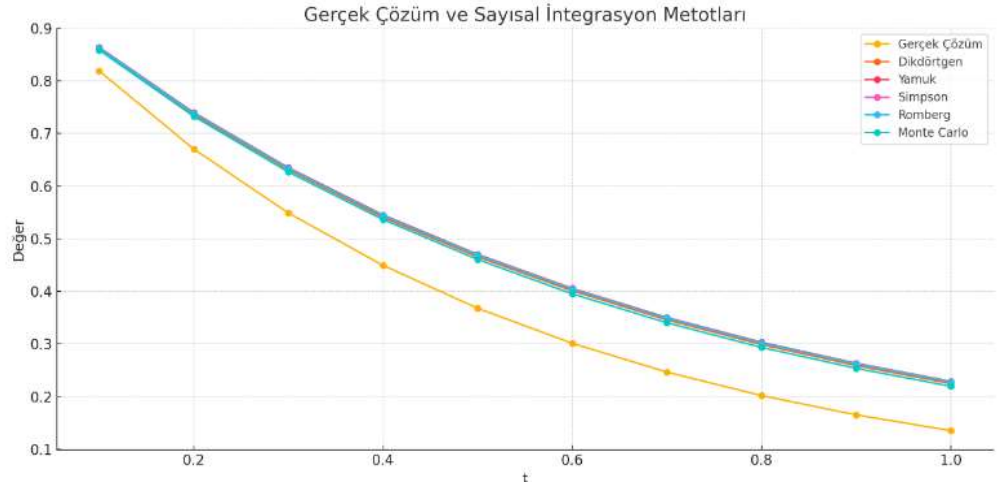
Şekil 4.3. N ve ε değerleri için maksimum hata değerleri karşılaştırma grafiği

Çizelge 4.4. Gerçek çözüm ve sayısal integrasyon metotları ile elde edilen veri tablosu

h	Gerçek Çözüm ($\varepsilon = 2^{-1}$)	Dikdörtgen	Yanuk	Simpson	Romberg	Monte Carlo (10k örnek)
0.1	0.81873075	0.86070796	0.86363687	0.86206912	0.86207145	0.85831234
0.2	0.67032005	0.73575888	0.73970056	0.73819876	0.73820123	0.73249210
0.3	0.54881164	0.63095734	0.63487899	0.63343987	0.63344251	0.62662345
0.4	0.44932896	0.54039784	0.54526789	0.54389543	0.54389827	0.53628492
0.5	0.36787944	0.46539802	0.47019987	0.46889532	0.46889836	0.46051203

0.6	0.30119421	0.40085126	0.40555432	0.40431765	0.40432089	0.39518347
0.7	0.24659696	0.34567892	0.35026789	0.34909876	0.34910220	0.34024561
0.8	0.20189652	0.29876543	0.30324567	0.30214321	0.30214685	0.29345678
0.9	0.16529889	0.25896324	0.26334567	0.26230987	0.26231371	0.25378452
1.0	0.13533528	0.22466458	0.22895678	0.22798765	0.22799169	0.21962345

Diğer sayısal integrasyon metodlarının adım uzunluğu h değerine ve h değerinin rassal elde edilen sayılar ile çarpımı ile elde edilen monte carlo metodunun adım uzunluğuna göre karşılaştırılması yapılan tabloda monte carlo metodunun diğer metodlar ile yakın hatta daha iyi değerler elde edildiği görülmüştür. Elde edilen veriler Şekil 4.4 ile gösterilmiştir.

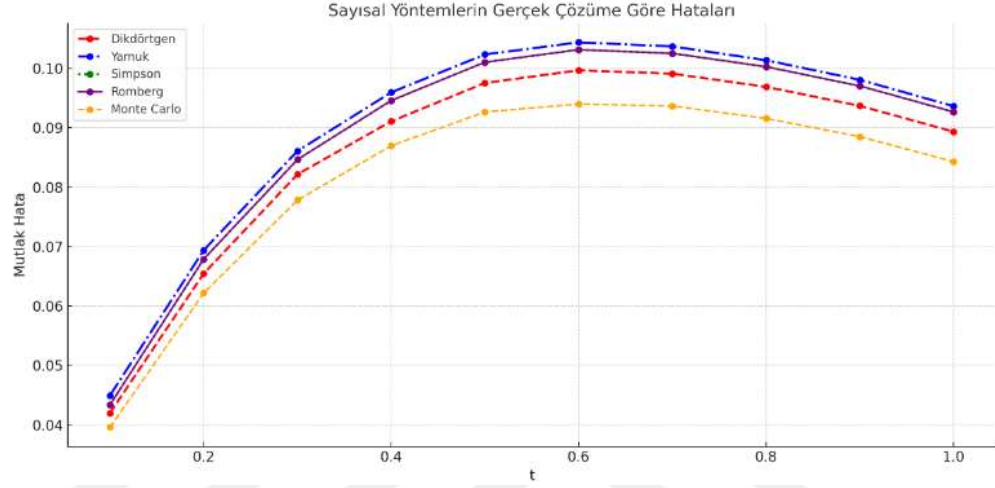


Şekil 4.4. Gerçek çözüm ve sayısal integrasyon metotları veri grafiği

Çizelge 4.5. Sayısal integrasyon metotları hata analizi

h	Dikdörtgen	Yamuk	Simpson	Romberg	Monte Carlo (Ort.)
0.1	0.04197721	0.04490612	0.04333837	0.04334070	0.03958159
0.2	0.06543883	0.06938051	0.06787871	0.06788118	0.06217205
0.3	0.08214570	0.08606735	0.08462823	0.08463087	0.07781181
0.4	0.09106888	0.09593893	0.09456647	0.09456931	0.08695596
0.5	0.09751858	0.10232043	0.10101588	0.10101892	0.09263259
0.6	0.09965705	0.10436011	0.10312344	0.10312668	0.09398926

0.7	0.09908196	0.10367093	0.10250180	0.10250524	0.09364865
0.8	0.09686891	0.10134915	0.10024669	0.10025033	0.09156026
0.9	0.09366435	0.09804678	0.09701098	0.09701482	0.08848563
1.0	0.08932930	0.09362150	0.09265237	0.09265641	0.08428817



Şekil 4.5. Monte Carlo metodu ve diğer sayısal integrasyon metotları hata analizi

Örnek 4:

$$\varepsilon u''(t) + 2u'(t) + \int_0^t u(s)ds = \frac{t}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - e^{\frac{-2t}{\varepsilon}}\right), \quad t \in [0,1], \quad (15)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \frac{\left(1 - e^{\frac{-2}{\varepsilon}}\right)}{2}, \quad (16)$$

(16) başlangıç koşulları ile verilen (15) sol sınır kata sahip bir singüler pertürbe Volterra integro diferansiyel denklemin [29], yaklaşık değerini hesaplanacaktır. (15) denkleminin gerçek çözümü aşağıdaki gibi olup

$$u(t) = \frac{\left(1 - e^{\frac{-2t}{\varepsilon}}\right)}{2}, \quad (17)$$

(17) ile karşılaştırma yapılacaktır. Elde edilen veriler tablolaştırılıp grafikleri oluşturulacaktır.

İlk olarak (15) Volterra integro-diferansiyel denkleminin her teriminin $[t_i, t_{i+1}]$ aralığında integrali alınır ve gerekli düzenlemeleri yapılırsa,

$$\int_0^t \varepsilon u''(t) dt + \int_0^t 2u'(t) dt + \int_0^t \int_0^t u(s) ds dt = \int_0^t \left[\frac{t}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - e^{\frac{-2t}{\varepsilon}}\right) \right] dt, \quad (18)$$

(18) elde edilir. Burada integraller alınıp u'_{i+1} ve u'_i türevler için

$$u'_{i+1} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h},$$

$$u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h},$$

sonlu fark türevleri kullanılır ve diğer integral değerleri Monte Carlo metodu uygulanırsa,

$$\varepsilon[u'(t) - u'(0)] + 2u(t) - 2u(0) + \int_0^t \int_0^t u(s) ds dt = \int_0^t \left[\frac{t}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - e^{\frac{-2t}{\varepsilon}}\right) \right] dt, \quad (19)$$

elde edilir.

$$\int_0^t \int_0^t u(s_i) ds dt \cong \left(\frac{t}{N}\right)^2 \sum_{j=0}^N Y_{MCj}, \quad (20)$$

(20) ifadesi hesaplanır ve (19) denkleminde yerine yazılırsa,

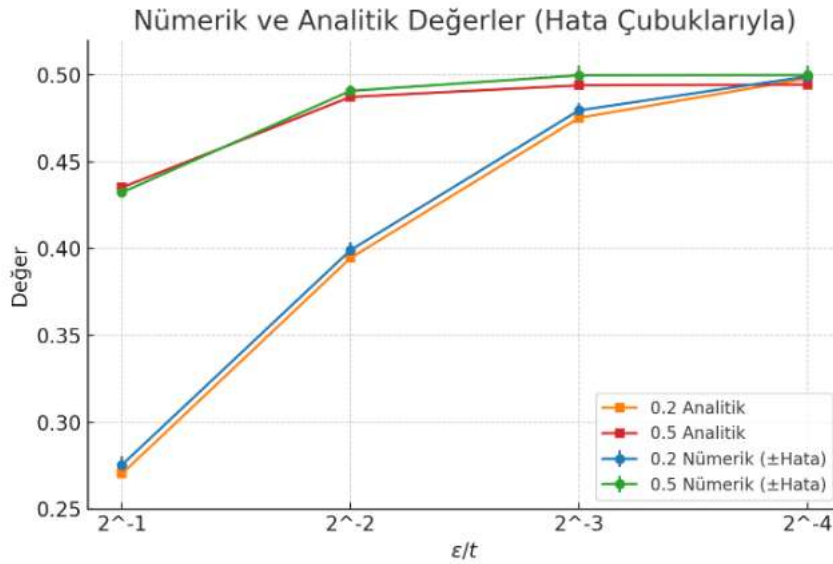
$$\varepsilon 2Y_{MCi} + \left(\frac{t}{N}\right)^2 \sum_{j=0}^N Y_{MCj} = \int_0^t \left[\frac{t_i}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - e^{\frac{-2t_i}{\varepsilon}}\right) \right] dt$$

$$Y_{MC_i} = \left[\left[\int_0^t \left[\frac{t_i}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - e^{-\frac{2t_i}{\varepsilon}} \right) \right] dt - \left(\frac{t}{N} \right)^2 \sum_{j=0}^N Y_{MC_j} - 2Y_{MC_i} \right] \frac{h}{\varepsilon} \right] + Y_{MC_{i-1}},$$

elde edilir. Farklı rassal sayı ve ε değerleri ile hesaplamalar yapılabilir. Denklemin çözümünde kullanılacak uygun program algoritması oluşturulmuştur.

Çizelge 4.6. t ve ε değerleri için maksimum hata değerleri karşılaştırma tablosu

ε/t	0,2 Nümerik Çözüm	0,2 Analitik Çözüm	Hata	0,5 Nümerik Çözüm	0,5 Analitik Çözüm	Hata
2^{-1}	0.2753355	0.2702653	0,0050702	0.4323323	0.4351824	0.0028500
2^{-2}	0.3990517	0.3945162	0.0045355	0.4908421	0.4873420	0.0033500
2^{-3}	0.4796188	0.4752755	0.0043433	0.4998322	0.4940517	0.0057805
2^{-4}	0.4991692	0.4979470	0.0042416	0.4999999	0.4945065	0.0054934



Şekil 4.6. t ve ε değerleri için maksimum hata değerleri karşılaştırma grafiği

Örnek 5:

$$\varepsilon u' + 2u + \tanh\left(t + \int_{t-1}^t (2u(s) + e^{-\sin u(s)})ds\right) = 0, \quad 0 < t \leq 2, \quad (3)$$

$$-1 \leq t \leq 0, \quad u(t) = 1, \quad (4)$$

(4)'te verilen şartları sağlayan (3)'te verilen gecikmeli singüler pertürbe özellikli Volterra integro diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünün Monte Carlo metodu ile elde edilmesi:

Eğer denklem (3) içerisinde yer alan

$$t + \int_{t-1}^t (2u(s) + e^{-\sin u(s)})ds = f(t),$$

olacak şekilde $f(t)$ hesaplanırsa denklem (3),

$$\varepsilon u' + 2u + \tanh(f(t)) = 0,$$

şeklini alır.

$$f(t) = t + \int_{t-1}^t (2u(s) + e^{-\sin u(s)})ds, \quad (5)$$

(5) denkleminde verilen integral $-1 \leq t \leq 0$ aralığında gecikmeli olduğu için gecikmeyi kaldırmak için (5) denklemi,

$$f(t) = t + \int_{t-1}^0 (2u(s) + e^{-\sin u(s)})ds + \int_0^t (2u(s) + e^{-\sin u(s)})ds,$$

olacak şekilde yazılır. Gecikme kısmı için $-1 \leq t \leq 0$, $u(t) = 1$ değerini (3)'te yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$f(t) = t + \int_{t-1}^0 (2u(t) + e^{-\sin u(t)}) dt + \int_0^t (2u(s) + e^{-\sin u(s)}) ds$$

$$f(t) = t + \left((2 + e^{-\sin 1})s \right) \Big|_{t-1}^0 + \int_0^t (2u(s) + e^{-\sin u(s)}) ds$$

$$f(t) = t + (2 + e^{-\sin 1})(t - 1) + \int_0^t (2u(s) + e^{-\sin u(s)}) ds, \quad (6)$$

elde edilir. (6) denklemi Y_MC ile gösterilir ve (3)'te yerine yazılırsa,

$$\varepsilon u' + 2u + \tanh(Y_MC) \cong 0,$$

ifadesi elde edilmiş olur.

$$u' \cong \frac{-2u - \tanh(Y_MC)}{\varepsilon},$$

şeklinde düzenleme yapıp birinci mertebe diferansiyel denklemin fark karşılığını

$$u' \cong \frac{u_{n+1} - u_n}{h},$$

denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} \cong \frac{-2u - \tanh(Y_MC)}{\varepsilon},$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$u_{n+1} \cong u_n + \left(\frac{-2u - \tanh(Y_MC)}{\varepsilon} \right) h,$$

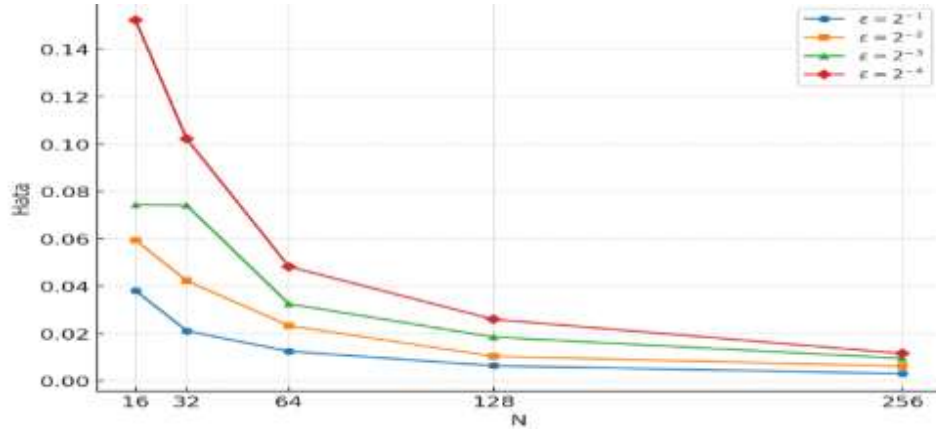
bulunur. Rassal olarak belirlenen Y_MC değerleri u 'lar için yerine yazılırsa,

$$Y_{MC_{n+1}} \cong Y_{MC_n} + \left(\frac{(-2Y_{MC} - \tanh(Y_{MC}))}{\varepsilon} \right) h,$$

denklemini bulunur. Farklı rassal değerler ve farklı epsilon değerleri için hesaplamalar yapılabilir. Maksimum hata hesaplamaları yapılarak çözümün doğruluğu test edilebilir. Maksimum hata hesaplaması için uygun program algoritması verilmiştir. Uygun bir matematik programından yararlanılarak gecikmeli singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel denklemin sınır değer probleminin yaklaşık çözüm sonuçları elde edilir. N ve ε değerleri için tam, yaklaşık çözüm ve hata grafikleri çizilerek karşılaştırılır. Maksimum hatalar bulunur ve tablo ile gösterilir. Buraya göre N değerleri büyüdükçe hata değerleri yarıya inerek azalmaktadır. Yani yakınsaklık birinci mertebededir. Böylece önerilen metodun singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel denklemin sınır değer problemleri için uygun ve güvenilir olduğu ortaya çıkar.

Çizelge 4.7. N ve ε değerleri için maksimum hata değerleri karşılaştırma tablosu

N/ε	$\varepsilon = 2^{-1}$	$\varepsilon = 2^{-2}$	$\varepsilon = 2^{-3}$	$\varepsilon = 2^{-4}$
16	0.0381118402	0.0594220334	0.0743008112	0.1523191630
32	0.0210803407	0.0423025458	0.0741252115	0.1022481736
64	0.0124346443	0.0232622108	0.0324731239	0.0482209246
128	0.0063390518	0.0103531423	0.0184624275	0.0259447174
256	0.0030195613	0.0061270286	0.0094485634	0.0115019442



Şekil 4.7. N ve ϵ değerleri için maksimum hata değerleri karşılaştırma grafiği

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bilim, mühendislik, finans ve daha birçok alanda karşımıza diferansiyel denklemlerin ve integro-diferansiyel denklemlerin analitik olarak hesaplanmasının çok karmaşık veya mümkün olmadığı durumlarda Monte Carlo metotları en iyi çalışan bazen de sonuca götüren metotlar olarak önemlidir. Tez çalışmamızda, diferansiyel denklemlerin ve integro-diferansiyel denklemlerin Monte Carlo yöntemleri, tekil olmayan (düzenli) ve integral sınırları sonlu olan sürekli fonksiyonların yaklaşık integral değerlerini hesaplamak için kullanılmıştır. Başlangıç olarak kesin çözümü olan birinci mertebeden ve ikinci mertebeden denklemler ile çalışılmış ve elde edilen sonuçlar gerçek değerler ile karşılaştırılmıştır. Daha sonra çözümü olmayan birinci mertebe ve ikinci mertebe denklemler ile çalışılıp elde edilen sonuçlar ile maksimum hata hesaplaması yapıp metodun çalışması kontrol edilmiştir. İlerlememiz durumunda Monte Carlo metotlarının diğer sayısal metotlara göre yüksek mertebe diferansiyel denklemlerde ve diferansiyel denklemlerin integralinin alınması ile elde edilen çok katlı integro diferansiyel denklemlerin yaklaşık değerini hesaplamada daha iyi sonuçlar vereceğini söyleyebiliriz.

Elde edilen hata büyüklüklerinden Monte Carlo metodunun mertebesi düşük diferansiyel denklemlerde ve diferansiyel denklemlerin integralinin alınması ile elde edilen çok katlı olmayan integro diferansiyel denklemler için diğer sayısal metotlar kadar iyi çalışmadığı gözlemlenmiştir. Fakat daha yüksek mertebe diferansiyel denklemlerde ve bunların integrali alınarak elde edilen çok katlı integro diferansiyel denklemlerde hata mertebe ve integral boyutundan bağımsız olacağından diğer sayısal metotlardan daha iyi çalışacak ve gerçek değere daha yakın sonuçlar verecektir. Böylece hatanın diferansiyel denklemin mertebesine veya integral boyutuna bağlı olan diğer sayısal metotların dezavantajı ortadan kalkmış olacaktır.

Çözümü için mertebesi veya integral boyutu d olan bir denklem için, Monte Carlo metotları d en az sekiz olan diferansiyel denklem veya integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık değeri hesaplanmak istendiği zaman, Monte Carlo metodu diğer metotlara göre çok daha verimli ve pratik sonuçlar verecektir. Literatüre katkı sağlaması düşüncesi ile yüksek dereceli diferansiyel denklemlerde ve integro-diferansiyel denklemlerde Monte Carlo metodu uygulanabileceği söylenebilir.

KAYNAKLAR

- Akhtar, M. N., Durad, M. H., & Ahmed, A. (2015). Solving initial value ordinary differential equations by Monte Carlo method. *Proceedings of the IAM*, 4(1), 149–174.
- Aksoy, Y. (1983). İntegral denklemler. *YTÜ Basım-Yayım Merkezi*.
- Arslan, D. (2022). Approximate solution of singularly perturbed problems with numerical integration method. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 27(3), 612–618.
- Caflisch, R. E. (1998). Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods. *Acta Numerica*, 7, 1–49. <https://doi.org/10.1017/S0962492900002804>.
- Çakır, O. (2017). Fizikte bilgisayar uygulamaları. *Ankara Üniversitesi*. <https://acikders.ankara.edu.tr/mod/resource/view.php?id=8844>.
- Dagpunar, J. S. (2006). *Simulation and Monte Carlo*. John Wiley & Sons.
- Elsgolts, L. E., Norkin, S. B., & Casti, J. L. (1973). *Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*. Academic Press.
- Erkek, E. (2015). *Akış şifreleme algoritmaları kullanarak rastgele sayı üretilmesi ve FPGA ortamında gerçekleştirilmesi* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Fırat Üniversitesi.
- Farnoosh, R., & Ebrahimi, M. (2008). Monte Carlo method for solving Fredholm integral equations of the second kind. *Applied Mathematics and Computation*, 195(1), 309–315.
- Glasserman, P. (2003). *Monte Carlo methods in financial engineering*. Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21617-1>.
- Gobet, E., Alfonsi, A., & De Marco, S. (2024). Monte-Carlo methods and stochastic processes: From linear to non-linear. *Quantitative Finance*, 24(3–4), 365–366.
- Hammersley, J. M., & Handscomb, D. C. (1964). *Monte Carlo methods*. Methuen & Co.
- Hançerlioğulları, A. (2006). Monte Carlo simülasyon metodu ve MCNP kod sistemi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(2), 545–556.
- Higham, D. J. (2001). An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review*, 43(3), 525–546. <https://doi.org/10.1137/S0036144500378302>
- James, F. (1990). A review of pseudorandom number generators. *Computer Physics Communications*, 60(3), 329–344.

- Kalenderli, Ö. (2016). *Sayısal integrasyon yöntemleri*. İstanbul Teknik Üniversitesi. <http://web.itu.edu.tr/kalenderli/sayisalintegrasyon-OK2016.pdf>.
- Kalos, M. H., & Whitlock, P. A. (2008). *Monte Carlo methods*. Wiley-VCH.
- Karaivanova, A., Dimov, I., & Ivanovska, S. (2001). A quasi-Monte Carlo method for integration with improved convergence. In *International Conference on Large-Scale Scientific Computing* (pp. 158–165). Springer. https://doi.org/10.1007/3-540-45546-9_17.
- Kroese, D. P., Brereton, T., Taimre, T., & Botev, Z. I. (2014). Why the Monte Carlo method is so important today. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 6(6), 386–392. <https://doi.org/10.1002/wics.1314>.
- Leimdorfer, A. (1964). *On the transformation of the transport equation for solving deep penetration problems by the Monte Carlo method*. Transactions of Chalmers University of Technology.
- O'Malley, R. E. (1991). *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*. Springer.
- Özdemir, M. (2004). *Fizikte sayısal yöntemler*. Çukurova Üniversitesi.
- Özden, Ü. (2015, Mart). *Simülasyon*. <http://unalozden.com/download/simulasyon.pdf>
- Rummukainen, K. (2023, Mart). *Monte Carlo sayısal simülasyon yöntemleri in physics*. http://www.helsinki.fi/~rummukai/lectures/montecarlo_oulu/lectures/mc_notes1.pdf.
- Saeed, R. K. (2008). Numerical solution of the system of linear Volterra integral equations of the second kind using Monte-Carlo method. *Journal of Applied Sciences Research*, 4(10), 1174–1181.
- Samarskii, A. A. (2001). *Theory of difference schemes*. Marcel Dekker.
- Scratchapixel 2.0. (2018, Mart). *Monte Carlo methods in practice*. <https://www.scratchapixel.com/lessons/mathematics-physics-for-computer-graphics/monte-carlo-methods-in-practice/monte-carlo-integration>.
- Świechowski, M., Godlewski, K., Sawicki, B., et al. (2023). Monte Carlo tree search: A review of recent modifications and applications. *Artificial Intelligence Review*, 56, 2497–2562. <https://doi.org/10.1007/s10462-023-10543-3>.
- Tavukcu, D. (2000). *Monte Carlo yönteminin sayısal integrallere ve elektromanyetik denklem integrallerine uygulanması* [Yüksek lisans tezi]. İstanbul Teknik Üniversitesi.

- Voller, V. R. (2017). Monte Carlo methods for solving differential equations. *Journal of Engineering Mathematics*, 102(1), 1–14. <https://doi.org/10.1007/s10665-016-9859-9>.
- Wazwaz, A. M. (2007). *Linear and nonlinear integral equations*. Higher Education Press.
- Yükselen, M. A. (2025, Mayıs). *Uygulamalı sayısal yöntemler*. İstanbul Teknik Üniversitesi. <https://web.itu.edu.tr>.

