

**T.C.**  
**BANDIRMA ONYEDİ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİ ANALİZİ**

**DENİZ POTUR**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Matematik Programı**

**OCAK – 2025**

**T.C.**  
**BANDIRMA ÖNYEDİ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİ ANALİZİ**

**DENİZ POTUR**

**DANIŞMAN**

**Dr. Öğr. Üyesi Özlem ORHAN**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Matematik Programı**

**OCAK – 2025**

## ONAY

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Deniz POTUR tarafından hazırlanan "**Diferansiyel Denklemlerin Simetri Analizi** " adlı tez çalışması 20/01/2025 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki danışman tarafından Bandırma Onyedi Eylül Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

Dr. Öğr. ÜyesiÖzlem ORHAN  
(Danışman)

Doç. Dr. Maruf Göğebakan  
(Üye)

Doç. Dr. Zehra PINAR  
(Üye)

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Bu tezin kabulü, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ....../...../.....gün ve ...../..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ahmet AYDIN  
Enstitü Müdürü

**BANDIRMA ONYEDİ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI**  
**ETİK BEYANI**

Bandırma Onyedi Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre hazırlamış olduğum “**Diferansiyel Denklemlerin Simetri Analizi**” adlı tezimin özgün bir çalışma olduğunu, tez hazırlanırken tüm aşamalarda bilimsel etik ilkelerine uygun davrandığımı, tez kapsamında sunulan tüm verileri bilimsel etik ilkelerine uygun elde ettiğimi, tezde faydalandığım tüm eserlere atıf yaptığımı ve kaynaklar kısmında bu eserleri gösterdiğimi beyan ederim.  
20/02/2025

**Deniz POTUR**

## ÖNSÖZ

Diferansiyel denklemler, doğadaki fiziksel olayları matematiksel olarak modelleyen yapılardır ve diferansiyel denklemlerin çözümleri bir sistemin dinamiklerini anlamak için kullanılmaktadır. Diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için izlenecek adımlar bazı denklemler için karmaşık ve zor olabilmektedir, bu tür denklemler için simetri analizi yapmak büyük önem taşımaktadır.

Simetri analizi yapılırken özellikle Lie grupları ve Lie cebirleri ele alınmaktadır. Lie simetri analizi, diferansiyel denklemlerin simetrileri aracılığıyla, bu denklemlerin çözümlerini bulmayı amaçlamaktadır. Denklemlerin simetrilerinin elde edilmesinde korunum kanunları ve değişmezlik kriteri kullanılmaktadır. Bu nedenle, simetri analizi, matematiksel bir yöntem olmasının yanı sıra fiziksel olayların daha iyi anlaşılmasını sağlayan önemli bir kavramdır.

Diferansiyel denklemlerin simetri analizine dair uygulamaları birçok alanda görülmekte ve o nedenle simetri analizi literatürde önemli bir rol oynamaktadır. Bu tez çalışmasında, diferansiyel denklemlerin simetri analizinin iyi bir şekilde anlaşılabilmesi için öncelikle temel kavramlara yer verilecektir. Sonraki bölümlerde, simetriler kullanılarak diferansiyel denklemlerin çözümlerinin nasıl elde edildiğini gösteren uygulamalar ele alınacaktır.

Bu tez çalışması sırasında, yüksek lisans tez konusunun belirlenmesinden başlayarak son aşamaya kadar büyük fedakarlıklar gösteren en ince detayları dahi defalarca inceleyen danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Özlem ORHAN'a şükranlarımı sunarım.

Yüksek lisans fikri aklıma girdiğinde birçok sorunuma benimle birlikte göğüs geren çok sevgili eşim Şule POTUR'a, canım çocuklarım Yiğit ve Zümra'ya teşekkür ederim.

Yine bu çalışmada manevi olarak hep yanımda olan annem Serpil POTUR, kayınvalidem Seniha BAYRAM, babam Selahattin POTUR ve kayınpederim Zümrüt BAYRAM'a ayrıca teşekkür ederim.

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

### DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİ ANALİZİ

Deniz POTUR

Bandırma Onyedİ Eylül Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Özlem ORHAN

Ocak 2025, 66 sayfa

Diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek matematik, fizik, mühendislik ve birçok bilim dalında önemli bir rol oynamaktadır. Çünkü, doğa olayları matematiksel bir modelleme yapılarak incelenebilmektedir. Bu fiziksel olayların analizini yapabilmek için matematiksel model olarak ifade edilen diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması gerekmektedir. Diferansiyel denklemlerin çözümlerini veren farklı yöntemler bulunmaktadır. Bu yöntemler sayesinde analitik ve nümerik olmak üzere diferansiyel denklemlerin iki farklı çözümü elde edilebilmektedir. Analitik çözümler denklemleri tam olarak sağlayan yani hiç hata içermeyen çözümlerdir, bu nedenle büyük önem arz etmektedir. Analitik çözümleri veren en önemli yöntemlerden birisi Lie simetrileri analizidir. Bu tezde, öncelikle temel kavramlar ele alınmış, Lie simetrilerinin nasıl elde edilebileceği incelenmiş, bu simetrilerin fiziksel denklemler için bulunmasına dair uygulamalara örnekler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Diferansiyel denklemler, Simetri Analizi, Lie Simetrileri, Matematiksel Fizik Denklemleri.

# **ABSTRACT**

**M.Sc. THESIS**

## **Symmetry Analysis of Differential Equations**

**Deniz POTUR**

**Bandırma Onyedi Eylül University  
Institute of Post Graduate Education  
Department of Mathematics**

**Supervisor: Asst. Prof. Dr. Özlem ORHAN  
January 2025, 66 pages**

Obtaining solutions to differential equations plays an important role in mathematics, physics, engineering, and many other branches of science because natural events can be examined by making a mathematical model. It is necessary to analyze these physical events to find the solutions of differential equations expressed as mathematical models. There are different methods that provide solutions to differential equations. Thanks to these methods, two different differential equation solutions can be obtained: analytical and numerical. Analytical solutions provide the equation exactly, that is, solutions that do not contain any errors, therefore they are of great importance. One of the most important methods that provide analytical solutions is Lie symmetry analysis. In this thesis, first of all, the basic concepts are discussed, how Lie symmetries can be obtained is examined, and examples of applications for finding these symmetries for physical equations are given.

**Keywords:** Differential Equations, Symmetry Analysis, Lie Symmetries, Mathematical Physics Equations.

# İÇİNDEKİLER

|                                                     |     |
|-----------------------------------------------------|-----|
| ÖZET .....                                          | I   |
| ABSTRACT .....                                      | II  |
| İÇİNDEKİLER.....                                    | III |
| SİMGELER ve KISALTMA LİSTESİ .....                  | 4   |
| 1. GİRİŞ .....                                      | 5   |
| 2.2. LAGRANGE YARDIMCI SİSTEMLERİ.....              | 12  |
| 2.3. LİE GRUP ANALİZİ.....                          | 16  |
| 2.3.1. Lie Grupları .....                           | 16  |
| 3.1. GRUP .....                                     | 17  |
| 3.2. DÖNÜŞÜM GRUPLARI .....                         | 18  |
| 3.3. BİR PARAMETRELİ LİE GRUP DÖNÜŞÜMLERİ .....     | 19  |
| 3.4. SONSUZ KÜÇÜK DÖNÜŞÜMLER .....                  | 20  |
| 3.5. ÜRETEÇLERİN DÖNÜŞÜMLERİ .....                  | 21  |
| 3.6. ÜRETECİN NORMAL FORMU .....                    | 22  |
| 3.7. LİE GRUP DÖNÜŞÜMLERİNDE DEĞİŞMEZLİK .....      | 24  |
| 3.9.1. Lie Birinci Temel Teoremi.....               | 27  |
| 3.11. UZATIM (PROLONGASYON) FORMÜLLERİ .....        | 40  |
| 3.12. Lie-Bäcklund Operatörü.....                   | 43  |
| 3.13. BOND PRİCİNG DENKLEMİNİN LİE SİMETRİLERİ..... | 58  |
| 3.14. HANGİNG CHAİN DENKLEMİNİN SİMETRİLERİ.....    | 61  |
| 4. SONUÇ VE ÖNERİLER .....                          | 64  |
| 5. KAYNAKLAR .....                                  | 65  |



## SİMGELER ve KISALTMA LİSTESİ

| Simgeler                        | Açıklama                  |
|---------------------------------|---------------------------|
| $\frac{\delta}{\delta t}$       | :Euler-Lagrange Operatörü |
| $[, ]$                          | :Kamutatör operatörü      |
| $L$                             | :Lagrangian               |
| $D$                             | :Total Türev Operatörü    |
| $V, B$                          | :Vektör Alanı             |
| $\tau, \xi, \Phi, \eta, \Omega$ | :Sonsuz Küçükler          |
| $N$                             | :Noether Operatörü        |
| $\sum a$                        | :Toplam Sembolü           |
| $\int a$                        | :İntegral Sembolü         |

| Kısaltmalar | Açıklama                    |
|-------------|-----------------------------|
| ADD         | :Adi Diferansiyel Denklem   |
| KDD         | :Kısmi Diferansiyel Denklem |
| BP          | :Bond Pricing Denklem       |

# 1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler, matematiksel modellerle doğa olaylarını açıklamak için kullanılan önemli bir araçtır. Diferansiyel denklemler ilk olarak Newton ve Leibnitz tarafından 17. yüzyılın ortalarında keşfedilmiştir, bu ünlü matematikçiler türev ve integral hesabını keşfettikten sonra diferansiyel denklemleri çalışmaya başlamışlardır. Doğa olaylarını analiz etmek için ortaya çıkan problemleri çözmek gerekmektedir, bu problemlerin çözümlerini elde edebilmek adına problemlerin özellikleri kullanılarak matematiksel modeller kurulmaktadır (Orhan, 2018). Bu matematiksel modeller diferansiyel denklemlerden oluşmaktadır ve bu denklemlerin çözümleri elde edilerek model daha iyi bir şekilde anlaşılabilir (Hydon, 2000).

Diferansiyel denklemler lineer ve lineer olmayan şekilde ikiye ayrılmaktadır. Lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması, literatürde sıkça ele alınan popüler ve merak uyandıran bir araştırma konusudur. 19. yüzyıla kadar lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerine dair birçok yöntem bulunmuştur. 19. yüzyılın sonlarında lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerini de veren değişmezlik teorisi Sophus Lie tarafından ortaya konulmuştur, bu teori ilk zamanlarda fazla anlaşılmasa da sonrasında birçok ünlü matematikçi tarafından çalışılarak geliştirilmiştir. Bu yöntem, Lie nokta dönüşümleri altında bir diferansiyel denklemin değişmezliğini koruduğu için çok avantajlı bir yöntemdir, bu nedenle yöntemin popülerliği günden güne artmıştır (Özceylan, 2006).

Sophus Lie'nin diferansiyel denklemler üzerindeki çalışmaları integrasyon yöntemlerine dayanmaktadır ve bu çalışmaların sonucunda diferansiyel denklemlerin simetri analizini gerçekleştirmiştir. Simetri analizi, diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerini geliştirmek için kullanılan bir tekniktir. Bu teknik, denklemdaki simetri özelliklerini inceleyerek, denklemin çözümünü kolaylaştıran yeni değişkenler tanımlamak için kullanılır. Simetri analizi yapabilmek için dönüşüm denklemleri tarafından tanımlanan manifold değişmez bırakılır ve yerel dönüşüm grupları bulunarak diferansiyel denklemlerin çözümleri elde edilir.

Simetri analizinde ortaya çıkan gelişmelerle yöntem araştırmacılar tarafından günden güne daha kullanışlı bir hale getirilmiştir ve diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin algoritma şeklinde bulunmasını sağlayan ender yöntemlerden biri haline gelmiştir. Bu imkânı sağlayan diğer yöntemlerin kullanılabilmesi için integrallenebilirlik gibi bazı şartlar bulunmaktadır, o nedenle her diferansiyel denklem için uygulanamamaktadırlar. Lie simetri yöntemi ise hemen hemen bütün diferansiyel denklemlere uygulanabilmekte ve çözümlerinin elde edilebilmesini sağlamaktadır. Simetri yöntemleri, adi diferansiyel denklemlerin mertebesini düşürmekte ve KDD'lerin bağımsız

değişken sayısını azaltarak adi diferansiyel denklemlere dönüştürmektedir. Bu özellikleri sayesinde, uygulama kolaylığı ve geniş kullanım alanı dikkate alındığında, oldukça etkili bir yöntem olarak öne çıkmaktadır. (Cantwell, 2002).

Lie simetri üreteçlerinin katsayılarına göre, Lie simetri dönüşümleri nokta, temas, Bäcklund ve yerel olmayan simetriler olarak sınıflandırılmıştır. Lie nokta simetrileri, türevli terimler içermez ve simetri üreteçlerinin katsayıları,  $m$  bağımsız ve  $n$  bağımlı değişkene bağlıdır. Ötelemeler ve dönmeler, bu simetrilere örnek olarak verilir. Lie temas simetrilerinin üreteçlerinin katsayıları  $m$  bağımsız,  $n$  bağımlı değişken içermektedirler ve buna ek bu değişkenlerin birinci mertebeden türevlerini de içerirler. Ek olarak, simetri üreticinin katsayıları yüksek mertebeden türevler içeriyorsa bu dönüşümler Lie Backlund simetrileri olarak adlandırılır. Ayrıca dönüşüm çözümü olmayan integraller barındırıyorsa, bu dönüşüme yerel olmayan simetriler denilmektedir (San, 2011).

Simetri analizi, bir diferansiyel denklemin çözümünün, simetri grupları olarak adlandırılan matematiksel nesnelerin kullanılmasıyla elde edilebileceğini gösterir. Simetri grupları, denklemin çözümlerinin yarattığı geometrik nesnelerin, belirli matematiksel dönüşümlere karşı olan davranışını tanımlar. Diferansiyel denklemlerin simetri analizi, matematiksel bir nesnedir ve fiziksel sistemlerin simetrisine dayanır. Fiziksel simetri, sistemlerde genellikle enerjinin korunumuyla ilişkilendirmektedir. Bu nedenle, simetri analizi, korunum kanunlarının keşfi için de önemli bir araçtır (Özer, 2018).

Bir diferansiyel denklemin simetri özelliklerinden türetilen kanunlar, korunum kanunları olarak adlandırılmaktadır. Korunum kanunlarına korunum formları da denilmektedir, korunum formları denklemin çözümünde belirli bir miktarın korunduğunu gösterir. Örneğin, enerjinin korunumu kanunu, bir sistemdeki enerjinin, zaman içinde sabit kalacağını göstermektedir. Korunum kanunlarının ortaya çıkışı fizik bilimine dayanmaktadır. Fiziksel kanun gibi korunum kanunları da doğa olaylarını analiz etmek için kullanılan temel bir araçtır. Korunum kanunlarının en önemli özelliklerinden birisi termodinamiğin birinci prensibini ortaya çıkarmış olmasıdır.

Korunum kanunlarının uygulanması, simetri dönüşümleri ile bağlantılıdır ve bu bağlantı varyasyonel prensibine dayanmaktadır. Bu önemli tespiti, Noether yapmıştır ve bu tespit bilim adamları tarafından oldukça ilgi görmüştür. Bunun yanı sıra, Noether yaptığı çalışmalar ile korunum kanunlarının klasik mekanik ve alan teorisinde anlaşılmasını sağlamıştır (Cantwell, 2002).

Korunum kanunları, oldukça yaygın bir şekilde incelenmektedir ve bu kanunlar kütle, enerji vb. fiziksel niceliklerin korunumunu sağlamaktadır. Bu kanunlar uygulanırken integrallenebilirlik kavramı, dönüşümleri doğrusallaştırmak, çözümlerin varlığını ve tekliğini

kanıtlamak, kararlılık analizi, nümerik yöntemlerde yerel olmayan sistemleri ve değişkenleri bulmak için kullanılmaktadır. Korunum kanunları, başlangıç değerlere sahip diferansiyel denklemler üzerinde çalışılırken bir temel oluşturmaktadır (Bluman & Anco, 2002).

Korunum kanunlarını elde etmek için kullanılan birçok yöntem bulunmaktadır (Bluman , 1989). Doğrudan yöntem, Noether yöntemi, kısmi Noether yöntemi, karakteristik yöntem, varyasyonel yaklaşım simetri korunumu kanunları arasındaki ilişki bu yöntemlerden bazılarıdır. Korunum kanunları için en önemli yöntemlerden birisi olan Noether teoreminde Euler-Lagrange denklemleri için bir Lagrangian fonksiyonu elde edilir ve bu Lagrangian ile hesaplanan her bir Noether simetrisine karşı bir korunum kanunu karşılık gelmektedir. Buradan da anlaşılaçağı üzere korunum kanunları ve simetriler arasında önemli bir ilişki bulunmaktadır (Yaşar, 2009). Diferansiyel denklemlerin simetri analizi ve korunum formları, birçok farklı fiziksel sistemde kullanılabilir. Bu teknikler, nükleer fizikten kozmolojiye kadar birçok alanda önemli bir rol oynar. Ayrıca, matematiksel modellerin çözümünde de önemli bir rol oynarlar.

Sonuç olarak, diferansiyel denklemlerin simetri analizi ve korunum formları, fiziksel sistemlerin simetrisine dayanan önemli bir matematiksel tekniktir. Bu teknik, denklemlerin çözümü için yeni yöntemlerin geliştirilmesine yardımcı olurken, korunum kanunlarının keşfedilmesine de yardımcı olmaktadır.

## 2. DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde, diferansiyel denklemlere ilişkin tanımlar ile örnekler verilecek ve daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan kısmi diferansiyel denklemlerden bahsedilecektir.

### 2.1. TEMEL KAVRAMLAR

**Tanım 2.1.1:** Bir veya birden fazla fonksiyon ile bu fonksiyonların türevlerini içeren ifadelere diferansiyel denklem denir (Yıldız, 1998).

**Örnek:**  $y = f(x)$  olmak üzere;

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 5y = 2$$

ifadesi bir diferansiyel denklemdir.

**Tanım 2.1.2:** Bir fonksiyon ile tek değişkenli fonksiyonların türevleri arasındaki ilişkiyi ifade eden diferansiyel denklemlere adi diferansiyel denklem denir (Eser & Özer, 2002). Bu denklemler genel olarak,  $y^{(n)}$  ifadesi  $y$ 'nin  $x$ 'e göre  $n$ . mertebeden türevi olmak üzere;

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde gösterilmektedir.

**Örnek:**

$$y'' - 2y' + 3y = 0$$

şeklindeki denklem adi bir diferansiyel denklemdir.

**Tanım 2.1.3:** Herhangi bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek türevin derecesi, denklemin mertebesi olarak tanımlanır. (Eser & Özer, 2002).

**Örnek:**

$$y'' - 2y' + 3y = 0$$

denkleminin mertebesi iki'dir.

**Örnek:**

$$y''' + 3x^2y' - 4y = e^x + 2$$

denkleminin mertebesi üç'dür.

**Tanım 2.1.4:** Bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin polinom biçiminde ifade edildiği bir diferansiyel denklemde, en yüksek mertebeden türevin kuvvetine diferansiyel denklemin derecesi denir (Eser & Özer, 2002).

**Örnek:**

$$(y'')^3 - 3y + 2(y')^4 = 0$$

şeklinde verilmiş diferansiyel denklem 2. mertebeden 3. dereceden bir denklemdir.

**Tanım 2.1.5:** İçinde birden fazla bağımsız değişken, en az bir bağımlı değişken ve bu bağımsız değişkenlerin bağımlı değişkenlere göre çeşitli mertebelerden kısmi türevlerini içeren denklemlere kısmi diferansiyel denklem denir.

u bağımlı, x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere, bir kısmi diferansiyel denklem genel olarak,

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots$$

şeklinde alınarak

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0,$$

şeklinde gösterilir (Koca, 2020).

**Örnek:**  $u_x u_y - 2u_{xx} = 0$  denklemi bir kısmi diferansiyel denklemdir.

**Örnek:**  $u_t - (u^2)_{xxx} - u(1+u^2) = 0$  denklemi bir kısmi diferansiyel denklemdir.

**Tanım 2.1.6:** Genel olarak diferansiyel denklemler de birden fazla çözüme sahiptir ve bu çözümler en az bir keyfi sabit içerir. Belirli bir aralıkta diferansiyel denklemi sağlayan herhangi bir fonksiyona diferansiyel denklemin çözümü denir. Bir ya da daha fazla keyfi sabit içeren ve denklemi sağlayan çözüm ise bir eğri ailesini tanımlar ve bu çözüme diferansiyel denklemin genel çözümü denir (Engin, Cerit, & Ayaz, 2013). Genel çözümdeki keyfi sabitlere değerler vererek elde edilen çözümlere özel çözüm adı verilir. Yine eğer genel çözümlere değer verilerek elde edilemeyen çözümlere ise tekil çözüm denir.

**Örnek:**  $y = 3e^{-2x}$  fonksiyonu  $y'' - 4y = 0$  denkleminin bir çözümüdür.

**Tanım 2.1.7:** Kısmi türevli bir denklem, bağımlı değişken (veya birden fazla bağımlı değişken durumunda tüm bağımlı değişkenler) ve bunların tüm kısmi türevleri birinci dereceden ise ve denklem, bu türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu olacak şekilde ifade edilebiliyorsa, bu tür denklemler lineer olarak adlandırılır. Eğer bu koşullar sağlanmıyorsa, denklem lineer olmayan bir yapıya sahiptir. Birinci mertebeden lineer kısmi türevli bir denklemin genel formu şu şekilde yazılabilir:

$$A(x, y) \cdot z_x + B(x, y) \cdot z_y + C(x, y) \cdot z = G(x, y)$$

biçimindedir (Koca, 2020).

**Örnek:**

$$y'' + 3y = 0,$$

ikinci mertebeden lineer bir denklemdir.

**Örnek:**

$$y''' + 5y = 2x + 1,$$

ikinci mertebeden lineer bir denklemdir.

**Örnek:**

$$y'' + 3x \cdot y^4 = e^{-3x},$$

ikinci mertebeden, lineer olmayan bir denklemdir.

**Örnek:**

$$y''' + 2(y')^2 + 3y = 4,$$

üçüncü mertebeden, lineer olmayan bir denklemdir.

**Tanım 2.1.8:** Bir kısmi diferansiyel denklem, denklemde mertebesi en yüksek kısmi türevlerine göre lineer ise bu denklemlere yarı lineer (kuasi-lineer) denir (Koca, 2020).

**Örnek:**

$$z_z \cdot z_{x \cdot x} + x z z_y = \cos y$$

$$z_{xy} + 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot (z^2 + z) - 6 \cdot x \cdot z^3 \cdot \cos y = 0$$

denklemleri yarı lineer denklemlerdir.

**Tanım 2.1.9:** Kısmi türevli herhangi bir denklemde, en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlere bağlı fonksiyon şeklinde ifade edilebiliyorsa, bu denklemler yarı lineer ya da neredeyse lineer olarak adlandırılır.



**Örnek:**

$$x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z^2} + u^3 \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = t + 5$$

denklemini hemen-hemen lineerdir.

**Tanım 2.1.10:**

$$A(x, y) \cdot z_x + B(x, y) \cdot z_y + C(x, y) \cdot z = 0$$

biçiminde verilen denklemlere homojen denklem denir. Bilinen popüler homojen bazı denklemler şunlardır:

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$$

$$u_t - k \cdot u_{xx} = 0$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + 2\beta u_t + \alpha u = 0$$

$$u_{x \cdot x} + u_{tt} = u_t$$

## 2.2. LAGRANGE YARDIMCI SİSTEMLERİ

**Tanım 2.2.1:**  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bağımsız değişkenler ve  $u$  bağımlı değişken olmak üzere birinci basamaktan

$$K_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + K_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + K_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$$

denklemini verilsin. Ele alınan denklemin Lagrange sistemi

$$\frac{dx_1}{K_1} = \frac{dx_2}{K_2} = \dots = \frac{dx_n}{K_n} = \frac{du}{R}$$

şeklindedir ve sistemin  $n$  adet ilk integrali

$$p_i = p_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = c_i, (i = 1, 2, \dots, n)$$

olmak üzere denkleminin genel çözümü

$$F(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0, F \in C[D]$$

şeklinde gösterilebilir (Koca, 2020).

### 2.2.1. Lagrange-Charpit Yöntemi

Birinci basamaktan lineer olmayan

$$F(x, y, p, q) = 0$$

biçimindeki denklemini göz önüne alalım. Bu denklem yapısıyla bağdaşabilen başka bir denklem,

$$\Omega(x, y, p, q) = 0$$

kabul edelim, burada  $a$  sabit sayıdır. Buradan iki denklemin aynı çözüme sahip olduğu görülmektedir. Bağdaşabilme kriteri bu denklemlere uygulandığında,

$$\frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left( p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} - \left( \frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial p} - \left( \frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q} = 0$$

elde edilir. Beş bağımsız değişkenli bir sistemde,  $\psi$ 'ye göre lineer homojen bir diferansiyel denklem elde edildiğinde, bu denklemin çözümünde Lagrange yardımcı sistemi kullanılabilir. Bu durumda, denklemin Lagrange yardımcı sistemi şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p+q \cdot F_q} = \frac{-dp}{F_x+p \cdot F_z} = \frac{-dq}{F_y+qF_z} = \frac{d\psi}{0} \quad (1)$$

şeklindedir. (1) numaralı denklemi ele alırsak

$$\psi = a$$

sonucu ortaya çıkmaktadır. Bu sonuçtan aşağıdaki integral bulunmaktadır;

$$\psi(x, y, z, p, q) = a$$

Bulunan integral kullanılarak

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

denklemini arasında

$$p = f(x, y, z), q = g(x, y, z)$$

şeklinde  $p$  ve  $q$  değerleri çözülüp

$$dz = p dx + q dy$$

tam diferansiyel denklemde yerine yazılır ve integre edilirse

$$G(x, y, z, a, b) = 0,$$

çözümü bulunur. İki parametrelili bir tam çözüm elde edilir. Bu çözümde,

$$\frac{\partial(F, \psi)}{\partial(p, q)} \neq 0$$

olmak zorundadır (Koca, 2020).

### 2.2.2. Denklem Tipleri

İkinci mertebeden lineer kısmi bir diferansiyel denklem

$$A(x,t)u_{xx} + 2B(x,t)u_{xt} + C(x,t)u_{tt} + D(x,t)u_x + E(x,t)u_t + F(x,t)u = G(x,t)$$

şeklindedir.  $A, B, C$  türevlerin katsayısı olmak üzere bu KDD hiperbolik, parabolik ve eliptik şeklinde sınıflandırılmaktadır.

Böylece;

1.  $AC = B^2$  durumunda denklem paraboliktir.
2. Aşağıdaki koşullarda denklem normal form olarak adlandırılır;

$$u_{tt} + m(x, t, u, u_x, u_t) = 0,$$

veya

$$u_{xx} + m(x, t, u, u_x, u_t) = 0.$$

3.  $AC < B^2$  ise eliptik denklem olup

$$u_{xx} + u_{tt} + m(x, t, u, u_x, u_t) = 0,$$

formuna sahiptir.

4.  $AC < B^2$  ise hiperbolik denklem olup

$$u_{xt} + m(x, t, u, u_x, u_t) = 0$$

formuna sahiptir.

Poisson ve Laplace denklemi eliptik denklemlere; Dalga ve Telgraf denklemi hiperbolik denklemlere, Isı iletimi denklemi ise parabolik denklemlere verilebilecek örneklerdir (Koca, 2020).

### 2.3. LİE GRUP ANALİZİ

Lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için izlenen yöntemler, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri için kullanılan yöntemlerden farklıdır. Bu tür denklemlerde analitik çözümlerinin belirlenememiş olması, sayısal bir çözümünün tam olarak belirlenememesi noktasında denklemin davranışlarının belirlenmesi de son yıllarda önemli bir çalışma alanı olmuştur. Bu nedenle birçok yeni arayışlara giren matematikçiler tam çözümlerini bulmaya yönelik yeni yöntemler geliştirmiş olup ve halen bu noktada çalışmalara devam etmektedirler (Özer, 2018). Bu yöntemlerin en dikkat çekenlerinden biri şüphesiz Lie gruplarıdır. Literatürde oldukça önem arz eden bu gruplar sayesinde korunum yasalarının bulunmasına, denklemlerin sistematik bir şekilde sınıflandırılmasına ve değişmez çözümlerinin bulunmasına dair yeni yaklaşımlar bulunmuştur.

#### 2.3.1. Lie Grupları

Lie gruplarında işleyiş, sürekli olan gruplar sonsuz küçük dönüşümler ile belirlenir ve bir sonsuz küçük üreteç verildiğinde grup dönüşümleri, nokta dönüşümlerinde olduğu gibi çözümün varlığı sadece düzgün noktaların küçük komşuluklarında yer alan Lie denklemleri ile bulunur. Bu kavram simetri grubu kavramıyla diferansiyel denklemlere genişletilebilir ve diferansiyel denklemlerin simetri grubu, türevlerdeki genişleme ile denklemi değişmez bırakan dönüşüm grupları olarak ele alınmaktadır (Kiraz, 2007).

### 3. LİE SİMETRİ DÖNÜŞÜMÜ

Lie grubu dönüşümleri olarak da bilinen Lie simetri dönüşümleri, genellikle bir diferansiyel denklem olan belirli bir matematiksel nesnenin biçimini değişmez bırakan dönüşümlerdir. Bu dönüşümler, geometrik nesnelerin ve denklemlerin sürekli simetrilerini inceleyen Lie grup teorisinin ayrılmaz bir parçasıdır. Bu dönüşümler sonsuz küçük olabilir, yani değişkenlerde küçük değişiklikler içerirler. Sonsuz küçük Lie simetri dönüşümleri, dönüşümleri üreten diferansiyel operatörler olan sonsuz küçük üreticiler cinsinden ifade edilmektedir. Bir komütatör olan Lie braketi işlemi, bu jeneratörlerin cebirsel yapısının anlaşılmasında çok önemli bir rol oynar.

Lie simetri dönüşümleri, diferansiyel denklemlerin doğasında bulunan simetrilerin anlaşılmasında önemlidir. Matematikçiler bu simetrileri tanımlayarak denklemleri basitleştirebilir, değişmez çözümler bulabilir ve davranışlarına ilişkin daha derin içgörüler kazanabilirler. Temel simetrilerin anlaşılmasının daha verimli modelleme ve analiz tekniklerine yol açabileceği fizik, mühendislik ve biyoloji dahil olmak üzere çeşitli alanlarda geniş kapsamlı uygulamalara sahiptirler.

#### 3.1. GRUP

**Tanım 3.1.1:**  $G$  boş olmayan bir  $G$  kümesi üzerinde tanımlı bir ikili işlem  $*$  için, aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa  $(G, *)$  ikilisine grup adı verilir.

**Kapalılık Özelliği** :  $\forall f, g \in G$  için  $f * g \in G$  dir.

**Birleşme Özelliği** :  $\forall f, g, h \in G$  için  $(f * g) * h = f * (g * h)$  dir.

**Birim Eleman Özelliği** :  $\forall f \in G$  için  $f * e = e * f = f$  olacak şekilde bir tek  $e \in G$  vardır.

**Ters Eleman Özelliği** :  $\forall f \in G$  için  $f * f^{-1} = f^{-1} * f = e$  olacak şekilde bir tek  $f^{-1} \in G$  vardır.

Bu dört özelliğe ek olarak aşağıda verilen değişme özelliğine sahip  $(G, *)$  grubuna değişmeli (abelyen) grup denir. Yani;

**Değişme Özelliği** :  $\forall f, g \in G$  için  $f * g = g * f$  dir.

**Örnek:** Reel sayılar kümesi  $(\mathbb{R})$ , çarpma işlemine göre;

Kapalılık: Her iki reel sayının çarpımı da bir reel sayıdır.

Birleşme:  $(a * b) * c = a * (b * c)$

Etkisiz eleman:  $1 * a = a$

Ters eleman: Her a reel sayısı için  $(1/a) * a = 1 (a \neq 0)$

şartlarını sağladığı için gruptur. Benzer şekilde, karmaşık sayılar ve matrisler grup şartlarını sağlar.

**Tanım 3.1.2:** G grubunun bir alt kümesi K olmak üzere, K;  $(G, *)$  ın bütün koşullarını sağlıyorsa K, G grubunun alt grubu olarak adlandırılmaktadır.

**Örnek:**  $(\mathbb{Z}, +)$  kümesine ait grubun birim elemanı sıfırdır ve  $\forall a \in \mathbb{Z}$  için  $-a \in \mathbb{R}$  dir. Çift tamsayılar kümesi, tamsayılar kümesinin alt kümesi olduğundan  $(2\mathbb{Z}, +)$  grubu  $(\mathbb{Z}, +)$  grubunun bir alt grubudur.

### 3.2. DÖNÜŞÜM GRUPLARI

Matematikte bir nesnenin, örneğin bir fonksiyonun ya da bir şeklin, belli bir türdeki dönüşümlere karşı olan simetrilerinin matematiksel bir yapılandırmasıdır. Daha spesifik olarak, bir dönüşüm grubu, bir küme üzerindeki belli bir türdeki dönüşümlerin oluşturduğu matematiksel bir yapıdır. Bu dönüşümler, kümedeki elemanları birbirine dönüştürürler ve bu dönüşümler birleştirilebilir (kompozisyon işlemi ile) ve tersi alınabilir. Bir dönüşüm grubu, genellikle bir matris grubu ya da bir Lie grubu gibi özel bir tür grubun alt kümesi olarak düşünülebilir.

Dönüşüm grupları, matematikte birçok alanda kullanılırlar. Özellikle, simetri, diferansiyel denklemler, grup teorisi ve geometri gibi konularda önemli bir rol oynarlar. Örneğin, bir cismin simetrileri, o cismi tanımlayan denklemlerin çözümlerini bulmak için kullanılabilir. Ayrıca, bir grup teorisinde, bir grup ve alt gruplarının yapılandırılması için dönüşüm grupları kullanılır.

Dönüşüm grupları, matematiksel olarak soyut bir yapıya sahip olsalar da, gerçek dünya uygulamalarında da kullanılırlar. Örneğin, simetri grupları kristalografide, kimyada ve fizikte kullanılır. Ayrıca, bilgisayar grafikleri ve yapay zeka gibi alanlarda da kullanılırlar.

**Tanım 3.2.1**  $X$  dönüşümlerden oluşmuş bir küme olsun.  $X_i \in X$  olacak şekilde

$$X_i : \alpha \rightarrow \alpha^* (\alpha, \varepsilon)$$

dönüşümünü varsayalım.  $\alpha \in S, \alpha^* \in S, S \subset \mathfrak{R}^n$  ve  $\varepsilon, \vartheta \in A \subset \mathfrak{R}$  olmak üzere  $Z$  düzgün bir manifold ve  $T, X \times Z$  de bir açık küme olsun.  $\Phi(\varepsilon, \vartheta)$  ikili işlem fonksiyonu  $A$  bölgesindeki  $\varepsilon, \vartheta$  parametreleri ile bağlıdır. Bu dönüşüm  $S$  bölgesinde aşağıda koşulları sağlıyorsa, dönüşüme grup dönüşümü denir. Yani  $\Phi(\varepsilon, \vartheta) \forall \varepsilon$  için  $\vartheta \in A$  dır ve aşağıdaki şartlar sağlanır.

1.  $S$  bölgesinde bulunan  $\forall \alpha$  parametresi için dönüşümler  $A$  bölgesinde de birebirdir. Özellikle  $\alpha^*$ ,  $A$  bölgesindedir.
2.  $\alpha$  dönüşümünün koşulları altında  $S$  bölgesi  $G$  grup formuna dönüşür.
3. Eğer  $\varepsilon = e$  ise  $\alpha^* = \alpha$  olur. Buradan;

$$X(\alpha; \varepsilon) = \alpha$$

dır.

4. Eğer  $\alpha^* = X(\alpha; \varepsilon), \alpha^{**} = X(\alpha^*; \vartheta)$  ise

$$\alpha^{**} = X(\alpha; \phi(\varepsilon, \vartheta))$$

dır (Bluman, 1989).

### 3.3. BİR PARAMETRELİ LİE GRUP DÖNÜŞÜMLERİ

**Tanım 3.3.1.** Dönüşüm gruplarındaki aksiyomları sağladıktan sonra aşağıda verilen aksiyomları da sağlarsa  $\phi$  dönüşümü bir parametrelî Lie grup dönüşümü olarak adlandırılır.

1.  $\varepsilon$  sürekli bir parametre,  $\mathfrak{R}$  de bir aralık olan  $S$  bölgesi olsun. Böylelikle  $\varepsilon = 0$ ,  $e$  etkisiz elemanını karşılar.



2.  $A$  da  $X$  her mertebeden türevi içeriyorsa,  $S$  de  $\varepsilon$  a ait analitik bir fonksiyondur.
3.  $X; \alpha$  ya göre  $A$  bölgesinde her mertebeden sürekli türevlere sahip olmakla birlikte  $S$  bölgesinde  $\varepsilon$  a ait analitik bir fonksiyondur.
4.  $\varepsilon \in S$  ve  $\vartheta \in S$  olmak üzere  $\phi(\varepsilon, \vartheta)$ ,  $\vartheta$  ve  $\varepsilon$  un analitik fonksiyonudur (Bluman, 1989).

### 3.4. SONSUZ KÜÇÜK DÖNÜŞÜMLER

$$\alpha^* = X(\alpha; \varepsilon) \quad (2)$$

Lie grup dönüşümünde  $\varepsilon$  parametresini  $\varepsilon = 0$  ve  $\phi$  ikili işlemlerinin kuralları ile verilince (2) denkleminde  $\varepsilon = 0$  noktasında seriye açtığımızda;

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \alpha + \varepsilon \left( \frac{\partial X(\alpha; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 X(\alpha; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} \right) + \dots \\ &= \alpha + \left( \frac{\partial X(\alpha; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3)$$

sonucuna ulaşılır.

$$\xi(\alpha) = \frac{\partial X(\alpha; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \quad (4)$$

yazılır.

$\alpha + \varepsilon \xi(\alpha)$  dönüşümüne (2) ile verdiğimiz Lie grup dönüşümünde ki sonsuz küçük dönüşümü denir.  $\xi(\alpha)$  ya da (2) denkleminin sonsuz küçük elemanı denir (Bluman & Anco, 2002).

### 3.5. ÜRETEÇLERİN DÖNÜŞÜMLERİ

Sonsuz küçük üreteç  $x_j = \sum_{k=1}^n \Omega^k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}$  operatörü öyle ki  $x = x \cdot (x_k)$  lara bağlı durumdadır ve  $x'_k$  değişkenine dönüştürebilir.  $x'_k = x'_k(x_k)$  ve  $\left| \frac{\partial x'_k}{\partial x_k} \right| \neq 0$  olmak üzere zincir kuralından

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x'_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}$$

sonucuna ulaşılır.  $x_k$  üretici yeni formuna geçilirse

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{k=1}^n \Omega^k(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \sum_{k=1}^n \Omega^k(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x'_k} \cdot \frac{\partial x'_k}{\partial x_k} \\ &= \sum_{k=1}^n \Omega'_k(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x'_k} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

$$x_i x_k = \sum_{k=1}^n \Omega^i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x'_i} = \Omega^k(x)$$

ve

$$x_i x'_k = \sum_{k=1}^n \Omega^i(x) \cdot \frac{\partial x'_k}{\partial x'_i} = \Omega'(x)$$

$1 < k \leq n$  için sonsuz üreticiler

$$X_k = \sum_{i=1}^n (x_k \cdot x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n (x_k \cdot x_i^1) \frac{\partial}{\partial x_i^1} \quad (5)$$

şeklindedir. Buradan  $x_k$  üretici  $x_i^1$  için yeniden dönüştürülmüş olur (Lone, 2005).

**Örnek:**

$M = r \frac{\partial}{\partial r} + s \frac{\partial}{\partial s}$  olarak verilen simetri üreticinde;  $v$  ve  $u$  değişkenlerine uygulanmış olsun,

$$u = \frac{s}{r}, u = rs$$

şeklinde tanımlayalım. Sonsuz küçük simetri üretici  $M$ 'ye  $u$  ve  $v$  değişkenlerine uygularsak,

$$M_u = r \frac{\partial u}{\partial r} + s \frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

$$M_v = r \frac{\partial v}{\partial r} + s \frac{\partial v}{\partial s} = 2rs = 2v$$

bulunur. Buradan  $M$  üretici yeni koordinatlara göre

$$r = 2v \frac{\partial}{\partial v}$$

olarak elde edilmiş olur (Lone, 2005).

### 3.6. ÜRETECİN NORMAL FORMU

Kısmi diferansiyel denklemler için denklem (3) ün doğal bir sonucu olarak

$$X_Y = \sum_{k=1}^n \Omega^k(x) \cdot \frac{\partial y}{\partial X_k} = 1 \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$Xx'_j = \sum_{i=1}^n \Omega i_{(x)} \partial x'_j = 0 \quad k = 2, 3, \dots, n$$

$\{y(x_k), x'_j(x_k)\}$  şeklinde çözümler bulunmaktadır. Böylece, sonsuz küçük simetri üretici

$$X = \sum_{k=1}^n \Omega^k(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}$$

den

$$X = \frac{\partial}{\partial y}$$

ye indirgenir. Bu denklem türüne  $X$  üreticinin normal formu denilmektedir. (Stephani, 1989).

**Örnek:** Dönme dönüşümleri;

$$x^* = x \cdot \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y^* = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

ve simetri üretici,

$$x = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial}{\partial y}$$

olarak verilsin. Kutupsal koordinatlarda

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ve} \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}$$

değişkenleri ele alınırsa ve  $X$  üretici ile işleme alınırsa,

$$X_r = -y \frac{\partial r}{\partial x} + x \frac{\partial r}{\partial y} = 0$$

$$x_\phi = -y \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} = 1$$

bulunmaktadır ve  $X$ 'in normal formu  $X = \frac{\partial}{\partial \phi}$  şeklindedir (Stephani, 1989).

### 3.7. LİE GRUP DÖNÜŞÜMLERİNDE DEĞİŞMEZLİK

Lie grup dönüşümlerinde invaryantlık, dönüşüm altında değişmeyen bir nesnedir. Bu nesne bir skaler, vektör, tensör veya daha karmaşık bir matematiksel yapı olabilir. Lie grupları, diferansiyel geometride problemleri çözmek için ve fizikte korunmuş nicelikleri bulmak için kullanılan sürekli grup türleridir. Bir Lie grubunun dönüşümleri, pürüzsüz ve diferansiyellenebilirdir. Bu, dönüşümlerin küçük değişikliklerinin, dönüştürülen nesne üzerinde de küçük değişikliklere yol açtığı anlamına gelir.

Bir nesnenin invaryant olması, dönüşümün o nesne üzerinde herhangi bir etkisi olmadığı anlamına gelir. Örneğin, bir vektörün yönü bir Lie grup dönüşümü tarafından değiştirilebilir, ancak vektörün büyüklüğü invaryant kalabilir. Bu dönüşümlerin değişmezliklerine örnek olarak;

- Skalerler: Bir skalerin değeri, herhangi bir dönüşüm altında değişmez.
- Vektörlerin büyüklükleri: Bir vektörün büyüklüğü, bir dönüşüm altında değişmez.
- Tensörlerin izleri: Bir tensörün izi, bir dönüşüm altında değişmez.

Simetri teorisinin tüm gelişiminin merkezinde değişmez fonksiyon kavramı vardır. Aşağıdaki örnek temel fikri göstermektedir.

**Örnek:** Genişleme altında bir parabol  $v(x, y) = \frac{y}{x^2}$  dönüşümü verilsin.

$$T^{Gen}: \{x = s\tilde{x}, y = s^n\tilde{y}, s > 0\} \quad (6)$$

denkleminin  $s$  üzerindeki kısıtlama,  $s = 0$ 'ın tersinin olmaması nedeniyle ortaya çıkar. Verilen noktanın  $(0,0)$  noktası ile eşlendikten sonra orijinal haline geri dönüşü yoktur. Bir grubu bu kadar yararlı kılan önemli özelliği, daima izlenen yol çizgileri boyunca noktaları düzgün ve ters çevrilebilir şekilde dönüştürmek mümkündür. (6)'nin birim elemanın 1 olduğu için bu grubu daha doğal yazmak istersek;

$$T^{Gen}: \{x = e^s \tilde{x}_1, y = e^{ns} \tilde{y}\} \quad (7)$$

denkleminde,  $s$  değişkeni  $-\infty$  dan  $\infty$  a tüm değerleri alabilir. Burada, (7) dönüşümü kullanılırsa örnekte verilen parabolik denklem

$$v[x, y] = \frac{y}{x^2} = e^{s(n-2)} (\tilde{y} / \tilde{x}^2) \quad (8)$$

elde edilir. Genel olarak her ne kadar  $n$  değişmez olmasa da özel olarak  $n = 2$  olarak verilirse;

$$u[x, y] = \frac{y}{x^2} = \tilde{y} / \tilde{x}^2 = v[\tilde{x}, \tilde{y}] \quad (9)$$

değişmez olduğu görülmektedir. Değişmezlik, yalnızca fonksiyon tam olarak aynı şeyi okuduğunda geçerli olmaktadır. Değişmez kalırken yeni değişkenlerle ifade edilir ve değişkenlerin üzerindeki yaklaşık işaretleri aynı rolü oynamaktadır.

**Tanım 3.7.1:**  $v(x)$  Bir Lie grubu altında değişmez bir fonksiyon olsun.

$$D^s: \{x^j = F^j[x_1 s], j = 1, \dots, n\}$$

dönüşümünün değişmez kalabilmesi için ancak ve ancak

$$v[x] = v[F[\tilde{x}, s]] = v[\tilde{x}] \quad (10)$$

dönüşümünden kaybolması gerekmektedir.

### 3.8. LİE SERİSİ, GRUP OPERATÖRÜ VE SONSUZ KÜÇÜK DEĞİŞMEZLİK FONKSİYONLARININ DURUMU

(9) denkleminde verilen bir fonksiyonun değişmezlik koşulunu uygulamak zordur. Pratikte  $F^j$ 'nin gruba genellikle doğrusal olmayan bağımlılığı nedeniyle (9) şartını korumak zorundadır. Bu yüzden,  $F^j$ 'ye dönüştürülür ve daha sonra orijinal fonksiyon gibi okunacak şekilde yeniden düzenlenir. Karmaşık sayıların değişmezliğini kontrol eden bu prosedür diferansiyel

denklemler için uygulandığında daha umutsuz bir vaziyet alır. Bu nedenle (9) denkleminde eşdeğer fakat daha kullanışlı ve basit dönüşüm gerekir. Burada yapılan işlem  $\tilde{x}^j = F^j[x, s]$  dönüşümünde  $v[\tilde{x}]$  yerine

$$v[\tilde{x}] = v[F[x, s]] \quad (11)$$

yazarak uygulanmaktadır (Cantwell, 2002).

Denklem (11) Taylor serisinde  $s = 0$  birim elemanına göre genişletilirse;

$$v[\tilde{x}] = v[x] + s \left[ \frac{\partial v}{\partial s} \right]_{s=0} + \frac{s^2}{2!} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right]_{s=0} + \frac{s^3}{3!} \left[ \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} \right]_{s=0} + \dots \quad (12)$$

Buradan zincir kuralı kullanılırsa,

$$\left[ \frac{\partial v}{\partial s} \right]_{s=0} = \frac{\partial v}{\partial F^j} \left[ \frac{\partial F^j}{\partial s} \right]_{s=0} = \xi^j \cdot \frac{\partial v}{\partial F^j} \quad (13)$$

Bu Taylor serisinin genişletilmesi ile fonksiyonun Lie serisi temsili haline gelmesini sağlar. Buradan  $v$

$$v[\tilde{x}] = v[x] + s \left( \xi^j \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + \frac{s^2}{2!} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \xi^j \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + \frac{s^3}{3!} \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \xi^i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + \dots$$

ifadesi elde edilir ki artık bir fonksiyonun değişmezliği için sonsuz küçük koşulu ifade edilebilir (Cantwell, 2002).

### 3.9. SONSUZ KÜÇÜK ÜRETEÇLER

**Tanım 3.9.1:**  $x^\rho = X(x, \varepsilon)$  dönüşümünü ele alalım.  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$  ve  $\partial$  operatörü;

$$\partial \bar{r} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

ise

$$x = \left\{ x^\beta = \sum_{k=1}^n \xi^k(x) \frac{\partial}{\partial x} k \right.$$

Bu şekilde tanımlanan operatör, bir parametrelili grup dönüşümlerinin sonsuz küçük üretici olarak adlandırılır. Ayrıca, Lie operatörü grup operatörü veya grup üreticisi terimleri de bu bağlamda kullanılabilir.

$$\zeta^n = \frac{\partial x_n}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

$x_\alpha$  tanjant vektörünün bir bileşenidir. Burada,  $(x, y) \in R^2$  noktasını ele alırsak, simetri üretici

$$x = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \mu(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

şeklinde olmaktadır.

$$\xi(x, y) = \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} l_\varepsilon = 0$$

ile hesaplanabilmektedir. Bütün dönüşümler  $X$  kullanılarak belirlenebilmektedir:

$$x_k|_{\varepsilon=0} = x_k$$

Başlangıç şartıyla beraber

$$\xi^k(x) = \frac{\partial x_k}{\partial \varepsilon}$$

ifadesinin integre edilmesiyle bulunabilir (Stephani, 1989).

### 3.9.1. Lie Birinci Temel Teoremi

$\theta^* = G_i(\theta, \varepsilon)$  bir parametrelili Lie grup dönüşümü olsun,



$$\frac{\partial x^*}{\partial \gamma} = \xi(x^*), \gamma = 0 \Rightarrow x^* = x$$

formunda birinci mertebeden denklem isstemleri için başlangıç değer probleminin çözümü,

$$\theta^* = G_i(\theta, \epsilon)$$

Lie grup dönüşümlerine eş olacak şekilde  $\gamma(\epsilon)$  parametrizasyonu ile yapılabilir.

$$\gamma(\epsilon) = \int_0^\epsilon \omega(\epsilon') d\epsilon'$$

$$\omega(\epsilon) = \left( \frac{\partial}{\partial b} \right) \phi(a, b) \Big|_{(a, b) = (\epsilon^{-1}, \epsilon)}$$

$$\omega(0) = 1$$

### 3.9.2. İnfinitesimal Üreteç

**Tanım 3.9.2.1:**

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

operatörüne bir parametrelili Lie grubunun infinitesimal üretici denir. Buradan Lie'nin Birinci Temel teoreminde dönüşümlerin bir parametreye sahip Lie grubu kendi infinitesimal üreticileriyle de belirlenebilir.

**Örnek:**

$$x = -x \frac{\partial}{\partial y} + y \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

infinitesimal üreticine sahip bir gruptur.

**Teorem:** Bir parametrelı Lie grup dönüşümleri

$$x^* = x(x, \varepsilon) = e^{\varepsilon x} \cdot x$$

$$= x + \varepsilon \times x + x^2 x + \dots$$

$$= \left[ 1 + \varepsilon x + \frac{\varepsilon^2}{2} x^2 + \dots \right] \cdot x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \cdot x^k x$$

ve

$$x^k = x^k(x) = x \cdot x_1^{k-1}, k = 1, 2, \dots$$

elde edilir.  $x^k \cdot H(x)$  fonksiyon olmak üzere  $X$  üreticinin  $x^{k-1} \cdot H(x)$  fonksiyonuna uygulanması ile  $x^k \cdot H(x)$  elde edilmektedir.

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

ve

$$x^0 H(x) = H(x)$$

bulunur. Böylece,  $H(x)$  sonsuza kadar diferansiyellenebilir ise

$$H(x^*) = H(e^{\varepsilon x} \cdot x) = e^{\varepsilon} x \cdot H(x)$$

olabileceğini söyleyebiliriz (Bluman & Anco, 2002).

Örnek:

$$m^* = m \cos \theta - w \sin \theta$$

$$w^* = m \sin \theta + w \cos \theta$$

iki boyutlu dönme simetri dönüşümleri verilmiş olsun.

$$\frac{\partial w^*}{\partial \theta} = -m \sin \theta - w \cos \theta$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = m \cos \theta - w \sin \theta$$

$$\zeta(m, w) = \left. \frac{dm^*}{d\theta} \right|_{\varepsilon=0} = -w$$

$$q(m, w) = \left. \frac{dw^*}{d\theta} \right|_{\varepsilon=0} = m$$

olur ki buradan simetri üretici,

$$m = -w \frac{\partial}{\partial m} + m \frac{\partial}{\partial w}$$

olmak üzere,

$$m = -w \frac{\partial}{\partial m} + m \frac{\partial}{\partial w} = -w$$

$$m^2 m = m(mm) = -w \frac{\partial(-w)}{\partial m} + \frac{\partial(-w)}{\partial w} = -m$$

$$m^3 m = m^2(mm) = \frac{-w \partial(-m)}{\partial m} + \frac{m \cdot \partial(-m)}{\partial w} = w$$

$$m^4 m = m^3(mm) = -w \frac{\partial w}{\partial m} + m \frac{\partial}{\partial w} = m$$

olduğundan

$$m^{4n} \cdot m = m, m^{4n-1} \cdot m = w, m^{4n-2} \cdot m = -m, m^{4n-3} \cdot m = -w, n = 1, 2, \dots$$

dir.

$$m^m = e^e m \cdot m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \cdot m^k \cdot m = m - \varepsilon t^{-\frac{\varepsilon^2}{2!}m + \frac{\varepsilon^3}{3!}w} + \dots$$

$$= m \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} + \dots\right) - w \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \dots\right)$$

$$= m \cos \theta + w \sin \theta$$

olarak bulunur. Yine aynı yaklaşımla  $R$  operatörünü  $t'$ ye uygularsak;

$$m_w = -t \cdot \frac{\partial w}{\partial m} + m \frac{\partial}{\partial w} = m$$

$$m^2 w = m(mw) = -w \frac{\partial}{\partial m} + m \frac{\partial m}{\partial w} = -w$$

$$m^3 w = m^2 \cdot (mw) = -w \frac{\partial(-w)}{\partial m} + m \frac{\partial(-w)}{\partial w} = -m$$

$$m^4 w = m^3(mw) = -w \frac{\partial(-m)}{\partial m} + m \frac{\partial(-m)}{\partial w} = w$$

olduğundan,

$$m^{4n} w = w, m^{4n-1} w = -m, m^{4n-2} \cdot w = -w, m^{4n-3} \cdot w = m, n = 1, 2, \dots$$

dir.

$$w^* = w^{\theta^m} w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \cdot m^k \cdot w = w + \theta m - \frac{\theta^2}{2!} w - \frac{\theta^3}{3!} m + \dots$$

$$m \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right) + w \left( 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right)$$

$$w^* = m \sin \theta + w \cos \theta$$

olarak bulunur (Bluman & Anco, 2002).

**Tanım 3.9.2.2:**  $H(x)$  sonsuz defa türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere  $H(x)$  fonksiyonun Lie grubunun değişmez fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart verilen herhangi bir grup dönüşümünün herhangi birisi için

$$H(x) = H(\bar{x})$$

olmasıdır.

**Teorem:**  $F(x)$  fonksiyonunun Lie grubuna ait dönüşümlerinin değişmez olması için gerek ve yeter şartın herhangi bir  $X$  üretici için;

$$XF(x) = \zeta_i \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = 0$$

lineer homojen kısmi türevli diferansiyel denkleminin çözümlerinden oluşur.

**Teorem:**  $\mathbb{R}^{n+1}$  de tanımlı dönüşümlere ait bir parametrelili Lie grubunun  $n$  tane bağımsız invaryantı vardır. Bağımsız invaryantların herhangi bir kümesi için

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots, \psi_{n-1}(x)$$

grubun değişmezlerinin bir bazı adı verilir. Bu baz çokludur ve yine bu denkleme ait karakteristik sistemi için;

$$\frac{dx_1}{\zeta_1} = \dots = \frac{dx_n}{\zeta_n}$$

İlk  $n - 1$  integralinden

$$\psi_1(x) = K_1, \psi_2(x) = K_2, \psi_3(x) = K_3, \dots, \psi_{n-1}(x) = K_{n-1}$$

olarak elde edilir. Gruba ait herhangi invaryant

$$F(x) = \Omega(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots, \psi_{n-1}(x))$$

formülü ile verilir.

### 3.9.3. Kanonik Değişkenler

**Teorem:** Bir parametrelili Lie grubuna ait

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots, \psi_{n-1}(x)$$

değişmez bazı olsun. Eğer en az bir  $\phi(x)$  için,

$$x(\phi) = \zeta_i \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} = 1$$

homogen olmayan lineer denkleme ait herhangi bir çözüm

$$x'_1 = \psi_1(x), x'_2 = \psi_2(x), x'_3 = \psi_3(x), \dots, x'_{n-1} = \psi_{n-1}(x), x'_n = \phi(x)$$

kanonik değişkenlerini ihtiva eder.

Verilen üreticiden grup dönüşümünün çözümlerini bulmak için Lie denklemlerini çözmek, üstel fonksiyonları kullanmak ve son olarak kanonik değişkenlerin kullanılması olmak üzere üç yol kullanılır. Bu kullanılan yöntemler için aşağıdaki örnek verilebilir.

**Örnek:**

$$x = xy \frac{\partial}{\partial y} + x^2 \frac{\partial}{\partial x}$$

infinitesimal üreticine sahip grubu araştıralım:

i. *Lie denklemlerinin çözülmesiyle: X üreticine ait Lie denklemlerini*

$$\frac{d\bar{x}}{d\varepsilon} = \bar{x}^2, \quad \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} = \bar{x}\bar{y}$$

ve başlangıç koşulları

$$\bar{x}|_{\varepsilon=0} = x, \quad \bar{y}|_{\varepsilon=0} = y$$

olarak yazılıp denklemlerin ters türevleri alınır

$$\bar{x} = \frac{1}{K_1 - \varepsilon}, \quad \bar{y} = \frac{K_2}{K_1 - \varepsilon}$$

elde edilir. Başlangıç koşulları yerine yazılırsa

$$x = \frac{1}{K_1}, \quad y = \frac{K_2}{K_1}$$

olur ki buradan elde edilen integrasyon sabitleri

$$K_1 = \frac{1}{x}, \quad K_2 = \frac{y}{x}$$

olur. Böylece  $X$  operatörü,

$$\bar{x} = \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \quad \bar{y} = \frac{y}{1 - \varepsilon x}$$

özel projektif dönüşümlerinin tek parametrelili grubunu üretir.

ii. *Üstel dönüşümün kullanılmasıyla*

$$\bar{x} = e^{\varepsilon x} x = \left( 1 + \frac{\varepsilon}{1!} x + \frac{\varepsilon^2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!} x^n + \cdots \right) (x)$$

$$\bar{y} = e^{\varepsilon x} y = \left( 1 + \frac{\varepsilon}{1!} x + \frac{\varepsilon^2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!} x^n + \cdots \right) (y)$$

yazılır ve  $n = 1, 2, \dots$  için  $\chi^n(x)$  ve  $\chi^n(y)$  bulunmalıdır. Bunun için sonlu birkaç terim hesaplanırsa

$$X(x) = x^2, X^2(x) = X(X(x)) = X(x^2) = 2! x^3, x^3(x) = X(2! x^3) = 3! x^4$$

olur ki

$$X^n(x) = n! \cdot x^{n+1}$$

olmalıdır. Bunu tümevarımla bir sonuca vardırırsak,

$$X^{n+1}(x) = X(X^n(x)) = X(n! x^{n+1}) = n! (n+1) x^2 x^n = (n+1)! x^{n+2}$$

Yine benzer şekilde,  $X^n = n! \cdot y \cdot x^n$  bulunur. Böylece  $|x\varepsilon| < 1$  için

$$\bar{x} = e^{\varepsilon x} x = x + \varepsilon x^2 + \cdots + \varepsilon^n x^n + \cdots = x(1 + \varepsilon x + \cdots + \varepsilon^n x^n + \cdots) = \frac{x}{1 - \varepsilon x}$$

$$\bar{y} = e^{\varepsilon x} y = y + \varepsilon y x + \cdots + \varepsilon^n y x^n + \cdots = y(1 + \varepsilon x + \cdots + \varepsilon^n x^n + \cdots) = \frac{y}{1 - \varepsilon x}$$

aynı grup elde edilir.

iii. *Kanonik değişkenlerin kullanılmasıyla:*  $X$  üretici için denklemleri oluşturmak için,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

yazılır ve  $K = \frac{x}{y}$  birinci integrali sağlanır. Bu durumda invaryant  $u = \frac{x}{y}$  olarak bulunur. Daha önceden elde edilen  $x(t) = 1$ ,  $t = -\frac{1}{x}$  yazılırsa kanonik koordinatlar



$$u = \frac{x}{y}, \quad t = -\frac{1}{x}$$

elde edilir. Sonuç olarak grup dönüşümleri

$$\bar{u} = u, \quad \bar{t} = t + \varepsilon$$

ya da

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{x} + \varepsilon, \quad \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{x}{y}$$

olarak yazılır. Son denklemin çözülmesi sonucu

$$\bar{x} = \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \quad \bar{y} = \frac{y}{1 - \varepsilon} x$$

dönüşümleri elde edilmiş olur (Kiraz, 2007).

### 3.10. LİE CEBİRİ

Lie cebiri, soyut cebirde Lie grupları adı verilen grup türlerini inceleyen bir alandır. Lie grupları, diferansiyel geometri ve matematiksel fizik gibi birçok alanda karşımıza çıkan sürekli gruplardır. Bu gruplar, matrisler gibi cebirsel nesneler ile temsil edilir ve Lie cebiri de bu temsilin detaylarını inceler.

Lie cebirine "Lie" terimi, matematiksel bir nesnenin gerçekte olduğundan farklı bir şekilde temsil edilmesi anlamına gelir. Örneğin, bir matrisin bazı elemanlarını sıfıra eşit kabul ederek, gerçekte olduğundan daha basit bir şekilde temsil edebiliriz. Bu bir Lie olsa da, matematikte bazı problemleri çözmek için oldukça faydalı olabilir (Kirillov A. A., 2008) .

Lie cebirinin birçok farklı alanda uygulaması vardır. Fizikte Kuantum mekaniği ve parçacık fiziğinde, diferansiyel geometride Lie grupları, diferansiyel manifoldlar üzerindeki simetrileri temsil etmek için ya da bilgisayar biliminde robotik ve bilgisayar grafikleri gibi alanlarda kullanılır. Özetle; Lie cebiri matematikte birçok farklı alanda uygulamaya sahip olan Lie gruplarını inceler. Lie cebiri matematiksel bir nesnenin gerçekte olduğundan farklı bir şekilde temsil edilmesi anlamına gelir ve bu bazı problemleri çözmek için oldukça faydalı olabilir.

Geometrik açıdan  $u = u(u_1, u_2 \dots u_i)$  noktasına ait  $u_i^* = u + \varepsilon^\xi(u)$  ile verilen  $u \in R^n$  noktasındaki sonsuz küçük dönüşümleri

$$\zeta(u) = (\zeta_1(u), \zeta_2(u), \dots, \zeta_n(u))$$

Tanjant vektörü ile gösterilir. Böylece  $\zeta(u)$ , dönüşümlerin Lie grubunun tanjant vektör cismi diye tanımlanır ve  $\xi(u)$  ile gösterilir.

$$U = \xi(u) \frac{\partial}{\partial u_i}$$

operatörü birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlere ait operatör olarak tanımlanır (Kiraz, 2007). Bu bölümden sonra birinci mertebeden diferansiyel operatörlerin tanjant vektör uzayı ya da başka bir deyişle Lie cebiri oluşturulacaktır.

**Tanım 3.10.1:**  $n$  parametreye sahip Lie grubunun sonsuz kadar küçük simetri üretici  $U_i$  ve  $\varepsilon \bar{r}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n)$  parametresine bağlı olarak verilsin. Rastgele verilen iki simetri üretici  $U_1$  ve  $U_2$  olmak üzere [,];

$$[u_i, u_j] = u_i u_j - u_j u_i$$

$$u_i u_j = \sum_{k=1}^n \xi_i^k(x) \frac{\partial}{\partial u_k} \left[ \sum_{l=1}^n \xi_j^l(u, \varepsilon_i) \frac{\partial}{\partial u_l} \right]$$

Bu komütatörden yola çıkarak,  $R$  bir cisim ve  $L$  de bu cisim üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer  $L$ , yukarıda tanımlanan ikili işleme göre kapalıysa,  $n$ -boyutlu Lie cebiri olarak adlandırılır ve  $L_n$  ile gösterilir. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır (Peter, 1993).

**Örnek:**

$$u^* = e^{\varepsilon_1} (x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon) + \varepsilon_2$$

$$v^* = e^{\varepsilon_1} (x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon) + \varepsilon_3$$

şeklinde dört parametrelili bir Lie grup dönüşümü ele alalım. Bu durumda, sonsuz küçük simetri üreteçleri şu şekilde

$$u_1 = -v \frac{\partial}{\partial r} + x \frac{\partial}{\partial v}$$

$$r_2 = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$r_3 = \frac{\partial}{\partial v}$$

$$r_4 = x \frac{\partial}{\partial r} + v \frac{\partial}{\partial v}$$

bulunur (Bluman and Anco, 2002). Lie parantez operatörü aracılığıyla bir komütatör tablosu oluşturulur.

$$[r_1, r_1] = 0$$

$$[r_1, r_2] = r_1 \cdot r_2 - r_2 \cdot r_1$$

$$= \left( -v \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( -v \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

$$= -v \frac{\partial^2}{\partial v \partial x} + r \frac{\partial^2}{\partial v \partial x} + v \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial v} - x \frac{\partial^2}{\partial x \partial v}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial v} = -r_3$$

$$[r_1, r_3] = \left( -v \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \left( -v \frac{\partial}{\partial r} + x \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

$$= -v \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} + x \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial^2}{\partial r \partial v} - r \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} = r_2$$

$$[r_1, r_4] = \left( -\mathbb{Y} \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial \mathbb{Y}} \right) \cdot \left( x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbb{Y} \frac{\partial}{\partial \mathbb{Y}} \right) - \left( x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbb{Y} \frac{\partial}{\partial \mathbb{Y}} \right) - \left( -\mathbb{Y} \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial \mathbb{Y}} \right)$$

$$= -\mathbb{Y} \frac{\partial}{\partial x} - r \mathbb{Y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mathbb{Y}^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \mathbb{Y}} + x^2 \frac{\partial^2}{\partial k \partial \mathbb{Y}} + x \frac{\partial}{\partial \mathbb{Y}} + x \mathbb{Y} \frac{\partial^2}{\partial \mathbb{Y}^2} + x k \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$-x \frac{\partial}{\partial \mathbb{Y}} - x^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \mathbb{Y}} + \mathbb{Y} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbb{Y}^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} - x \mathbb{Y} \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

$$= 0$$

$$|r_2, r_1| = -|r_1, r_2| = r_3$$

$$|r_2, r_2| = 0$$

$$|r_2, r_3| = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \mathbb{Y}} - \frac{\partial}{\partial \mathbb{Y}} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$= 0$$

$$|r_2, r_4| = \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial \mathbb{Y}} \right) - \left( x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbb{Y} \frac{\partial}{\partial \mathbb{Y}} \right) \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{-\partial x} + x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2}{\partial x \partial \mathbb{Y}} - x \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mathbb{Y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \mathbb{Y}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = r_2$$

$$|r_3, r_1| = -|r_1, r_3| = -r_2$$

$$|r_3, r_2| = -|r_2, r_3| = 0$$

$$|r_3, r_3| = 0$$

$$\begin{aligned} |r_3, r_4| &= \frac{\partial}{\partial \mathbb{Y}} \left( \mathbb{X} \frac{\partial}{\partial \mathbb{X}} + \mathbb{Y} \frac{\partial}{\partial \mathbb{Y}} \right) - \left( \mathbb{X} \frac{\partial}{\partial \mathbb{X}} + \mathbb{Y} \frac{\partial}{\partial \mathbb{Y}} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbb{Y}} \\ &= \mathbb{X} \frac{\partial^2}{\partial \mathbb{X} \partial \mathbb{Y}} + \frac{\partial}{\partial \mathbb{Y}} + \mathbb{Y} \frac{\partial^2}{\partial \mathbb{Y}^2} - \mathbb{X} \frac{\partial^2}{\partial \mathbb{X} \partial \mathbb{Y}} - \mathbb{Y} \frac{\partial^2}{\partial \mathbb{Y}^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{Y}} = r_3$$

$$|r_4, r_1| = -|r_1, r_4| = 0$$

$$|r_4, r_2| = -|r_2, r_4| = -r_2$$

$$|r_4, r_3| = -|r_3, r_4| = -r_3$$

$$|r_4, r_4| = 0$$

Bu sonuçlarla üreteçlerin komütatör tablosu şu şekilde elde edilir:

| $[r_i, r_j]$ | $r_1$  | $r_2$  | $r_3$  | $r_4$ |
|--------------|--------|--------|--------|-------|
| $r_1$        | 0      | $-r_3$ | $r_2$  | 0     |
| $r_2$        | $r_3$  | 0      | 0      | $r_2$ |
| $r_3$        | $-r_2$ | 0      | 0      | $r_3$ |
| $r_4$        | 0      | $-r_2$ | $-r_3$ | 0     |

### 3.11. UZATIM (PROLONGASYON) FORMÜLLERİ

Matematikte "prolongasyon" terimi genellikle geometrik konum ve konfigürasyonları ifade etmek için kullanılır. Özellikle, üçgenlerin benzerlik ve oranlarını inceleyen geometri problemlerinde sıkça karşımıza çıkar.

Prolongasyon, iki veya daha fazla doğru parçasının bir noktada kesiştiği durumlarda, bu doğru parçaların uzantılarının (prolongasyonlarının) nasıl ilişkilendirildiğini inceleyen bir

kavramdır. Örneğin, verilen bir üçgenin kenarları üzerinde seçilen bir nokta ile, üçgenin bu kenarlarının uzantılarının da göz önünde bulundurulması ve oluşan oranların incelenmesi prolongasyon prensibini temsil eder.

Bu tür problemlerde, prolongasyon prensipleri genellikle benzerlik teoremleri ve oran kavramlarına dayanır. Özellikle, doğruların uzantılarının bir noktada kesiştiği durumlarda, bu doğruların oluşturduğu oranlar ve benzerlikler üzerine çeşitli ilişkiler kurulabilir.

Prolongasyonun matematikteki amacı, geometrik konfigürasyonları analiz etmek ve geometrik ilişkileri açıklamak için bir araç olarak kullanmaktır. Bu kavram, özellikle geometrik şekillerin benzerliklerini veya oranlarını incelemek için önemlidir ve geometri problemlerini çözme ve geometrik ilişkileri anlama konusunda yardımcı olabilir.

**Tanım 3.11.1:**

$$\Omega^0 = \Omega(u, v)$$

olmak üzere

$$\Omega'k' = D^k \Omega - \sum_{r=1}^k \frac{k!}{(k-r)! r!} \cdot v_{k-r+1} \cdot D_1^{k\varepsilon} k \geq 1$$

şeklinde oluşturulan

$$\begin{aligned} u^{(k)} = \zeta(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \Omega(u, v) \frac{\partial}{\partial v} + \Omega^{(1)}(u, v, v_1) \frac{\partial}{\partial v_1} + \dots \\ \dots + \Omega^{(k)}(u, v, v_1, \dots, v_k) \frac{\partial}{\partial v_k} \end{aligned} \quad (14)$$

değerine bir bağımlı, bir bağımsız için  $k$  uzanım adı verilir (Bluman & Anco, 2002).

**Teorem:**  $r$  bağımsız değişken ve  $l$  bağımlı değişken olmak üzere  $v = l(r)$  olsun. Buna göre tanımlanmış bir parametrelili Lie grup dönüşümlerinin  $(r, l, l_1, \dots, l_k)$  uzayındaki  $k$ . uzanımları

$$l_1^* = l_1(r_1, l, l; \varepsilon)$$

$$l_2^* = l_1(r_2, l, l_2; \varepsilon)$$

.

.

$$l_k^* = l_k(r, l, l, \dots l_k; \varepsilon)$$

$$\frac{\partial l_{k-1}}{\partial r} + v_1 \frac{\partial l_{k-1}}{\partial l} + \dots + l_k \frac{\partial l_{k-1}}{\partial l}$$

$$\frac{\partial(r; \varepsilon)}{\partial r} + l_1 \frac{\partial r(r; \varepsilon)}{\partial l}$$

şeklinde bulunur, burada

$$l_1^* = l = l_1(r, l, l_1, \varepsilon)$$

$$\frac{\frac{\partial l(r, \varepsilon)}{\partial r} + l \cdot \frac{\partial^l(r, \varepsilon)}{\partial v}}{\frac{\partial r(r, \varepsilon)}{\partial r} + l_1 \cdot \frac{\partial r(r, \varepsilon)}{\partial l}}$$

ve

$$l_{k-1} = l_{k-1}(r, l, l_1, \dots l_{k-1}; \varepsilon)$$

şeklindedir.

(14) deki dönüşümün  $\zeta(r, l)$  ve  $\Omega(r, l)$  sonsuz küçükleri olmak üzere;

$k$ . uzanım:

$$u^* = r(r, l, \varepsilon) = r + \varepsilon \zeta(r, l) + \theta(\varepsilon^2)$$

$$l^* = v(r, l, \varepsilon) = v + \varepsilon \zeta(r, l) + \theta(\varepsilon^2)$$

$$l_1^* = r(r, l, l_1, \varepsilon) = l_1 + \varepsilon \xi^{(1)}(r, l, l_1) + \theta(\varepsilon^2)$$

.

.

$$l_k^* = l_k(r, l, l_1, \dots, l_k; \varepsilon) = l_1 + \varepsilon \xi^{(1)}(r, l, l_1, \dots, l_k) + \theta(\varepsilon^2)$$

şeklinde verilir, burada  $k$ . uzanımın sonsuz küçükleri

$$\zeta_{(r,l),\Omega(r,l),\Omega}(r_1, l, l_1) \dots, \Omega^{(k)}(r_1, l, l_1, \dots, l_k)$$

olacaktır. Bu durumda sonsuz küçük üreteç ise

$$u^{(k)} = \xi(r, l) \frac{\partial}{\partial r} + \Omega(r_1, l) \frac{\partial}{\partial l} + \Omega^{(1)}(r_1, l, l_1) \frac{\partial}{\partial l_1} + \dots$$

$$\dots + \Omega^{(k)}(r_1, l, l_2 \dots l) \frac{\partial}{\partial l_k}$$

şeklinde olur.  $k = 1, 2, \dots$  için uzanımın  $\Omega^{(k)}$  ile gösterilen sonsuz küçükleri

$$\Omega^{(k)}(r_1, l_1, l_2, \dots, l_k) = \frac{\beta_\Omega(k-1)}{B_r} - y_k \frac{B_\varepsilon(r_1, l)}{B_r}$$

formülü ile bulunabilir (Bluman & Anco, 2002).

### 3.12. Lie-Bäcklund Operatörü

Matematiksel analizde, özellikle kısmi diferansiyel denklemler (KDD) üzerinde yapılan incelemelerde, Bäcklund dönüşümleri önemli bir araç olarak öne çıkmaktadır. İsveçli matematikçi Albert Victor Bäcklund'un adını taşıyan bu dönüşümler, doğrusal olmayan KDD'lerin farklı çözümlerini birbirine bağlamak için sistematik bir yöntem sunar ve genellikle karmaşık ilişkileri ve gizli simetrileri ortaya çıkarır.

Bäcklund dönüşümleri, esasen  $u$  ve  $v$  gibi iki fonksiyonu ilişkilendiren birinci dereceden kısmi diferansiyel denklemlerden oluşan bir sistemdir. Eğer  $u$ , belirli bir KDD'nin çözümüyse, Bäcklund dönüşümü uygulanarak aynı KDD'yi veya ona benzer bir başka KDD'yi sağlayan yeni bir  $v$  fonksiyonu bulunabilir. Bu dönüşümler, doğrudan çözülmesi zor olan doğrusal olmayan KDD'ler için yeni çözümler üretmek amacıyla özellikle önemlidir. Bir çözüm üzerine Bäcklund



dönüşümünü tekrarlayarak giderek daha karmaşık bir dizi çözüm elde etmek mümkündür. Ayrıca, Bäcklund dönüşümleri, bazen bu denklemler için koruma yasalarını türetmek amacıyla da kullanılabilir; bu yasalar, KDD'lerin fiziksel ya da geometrik özelliklerine dair değerli bilgiler sağlar.

Bäcklund dönüşümleri, entegre edilebilir sistemler teorisinde de kritik bir rol oynar. Farklı entegre edilebilir sistemler arasında ilişkiler kurarak, gizli simetrisi ve yapıları keşfetmek için kullanılır. Bu dönüşümler, görünüşte farklı ancak matematiksel açıdan ilişkili sistemler arasındaki bağlantıları ortaya koyabilir.

Bir fonksiyon, sonlu sayıda terim içeren diziler veya analitik ifadelerle, örneğin bir Taylor serisiyle yazılabiliyorsa, bu tür fonksiyonlar Ritt'in diferansiyel polinomları olarak adlandırılır ve "sonlu mertebeden diferansiyel polinomlar" olarak bilinir. Bu fonksiyonlar, uzayda tanımlı toplama ve çarpma işlemleriyle vektör uzayı oluşturur ve çarpma işlemi tanımlandığında, bu yapı değişmeli cebir özelliği gösterir.  $M$  kümesi, tüm sonlu mertebeden fonksiyonlardan oluşan bir küme olarak kabul edilirse, bu küme, belirli bir türev operatörüne göre kapalıdır.

$$X = \Psi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \Upsilon^k \frac{\partial}{\partial y^k}, (\Psi^i, \Upsilon^k \in M) \quad (15)$$

biçiminde verilmiş operatörler olsun.

$$\begin{aligned} \Psi_i^\alpha &= \Delta_i (\Upsilon^\alpha - \Psi^k u_k^\alpha) + \Upsilon^k u_{ki}^\alpha \\ \Upsilon_{i_1 i_2}^\alpha &= \Delta_{i_1} \Delta_{i_2} (\Upsilon^\alpha - \Psi^k u_k^\alpha) + \Psi^k u_{j i_1 i_2}^\alpha \\ &\dots \end{aligned} \quad (16)$$

olmak üzere uzanım türevleri

$$X = \Psi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \Upsilon^k \frac{\partial}{\partial y^k} + \Xi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial y_i^\alpha} + X = \Psi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \Upsilon^k \frac{\partial}{\partial y^k} + \Psi_{i_1 i_2}^\alpha \frac{\partial}{\partial y_{i_1 i_2}^\alpha} + \dots$$

şeklinde verilen operatöre Lie-Bäcklund Operatörü denir ve benzer şekilde (15) operatörüne de kısaltılmış şekliyle yine Lie-Bäcklund Operatörü denilmektedir.

**Teorem:**  $X \in A$  ve  $k$ . mertebeden bir diferansiyel fonksiyon olmak üzere;

$$X(x, u, u_1, \dots, u_k) = 0 \quad (17)$$

$k$ . mertebeden diferansiyel denklemini ele alalım.  $[X]$  ile gösterilen (17) ile verilen denklemin kendi ve türevlerini bir arada incelensin. Eğer

$$YX \Big|_{[X]} = 0 \quad (18)$$

denklemini Lie-Bäcklund dönüşümü tarafından üretilen denklemini temsil eder ve Lie-Bäcklund dönüşüm grubunu kabul eder. (18) ile belirtilen denklemlere belirleyici denklem denir.

Belirleyici denklem sonucunda

$$X_\alpha = \Omega^k M_k, (\Omega^k \in M, k = 1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

biçimlenen bütün Lie-Bäcklund operatörleri herhangi bir diferansiyel denklem için yeterlidir ve kabul görür.

(19) operatörleri için Lie-Bäcklund denklemleri çözülebilir formda ve aynı zamanda bu operatörlerin kümesi bütün Lie-Bäcklund operatörlerinin Lie cebirinde bir idealdir.

$\Omega^i = 0$  olmak üzere;

$$X = \phi^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, (\phi^\alpha \in A, \alpha = 1, 2, \dots, m)$$

olarak bulunur ve operatöre de kanonik Lie-Bäcklund operatörü denir. Bu formdaki tüm operatörler kanonik forma dönüştürebilir (İbragimov, 1993).

**Örnek:**  $u, a$  bağımsız değişkenleri temsil etsin. Galilean dönüşüm üretici ve Lie-Bäcklund formu

$$M = \frac{\partial}{\partial k} - u \frac{\partial}{\partial a} \sim \bar{M} = (1 + uk_a) \frac{\partial}{\partial k} + \dots$$

olacak şekildedir (Yaşar, 2009) .

**Örnek:** Homojen olmayan (non-uniform) genleşme üretici ve kanonik Lie-Bäcklund formu

$$B = 2t \frac{\partial}{\partial t} - 3t \frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial a} \sim \bar{B} = (2t + 3ut_u + at_a) \frac{\partial}{\partial t} + \dots$$

olacak şekildedir (Yaşar, 2009).

**Örnek:**  $u$  değişkeni zamanı ve  $a$  konumu ifade etmek üzere;

$$v_u = v_{aa}$$

bir boyutlu ısı denkleminde ait Lie simetri üreticilerini bulalım:

$a$  ve  $u$  bağımsız değişkenleri ve  $v$  bağımlı değişkeni temsil etsin o halde simetri üretici

$$\beta = \Omega(a, u, v) \frac{\partial}{\partial a} + \tau(a, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \eta(a, u, v) \frac{\partial}{\partial v} \quad (20)$$

olur.

İkinci mertebeden diferansiyel denklemler için (15) ile verilen simetri üreticinin ikinci uzanımı

$$\beta^2 = \beta + \eta_a \frac{\partial}{\partial v_a} + \eta_u \frac{\partial}{\partial v_u} + \eta_{aa} \frac{\partial}{\partial v_{aa}} + \eta_{au} \frac{\partial}{\partial v_{av}} + \eta_{uu} \frac{\partial}{\partial v_{uu}} \quad (21)$$

olur.

$$\beta^2(v_u - v_{aa}) = 0$$

olacak şekilde (21) denklemindeki ikinci uzanımı  $v_u = v_{aa}$  denkleminde uygularsak

$$\eta_u - \eta_{aa} = 0 \quad (22)$$

olur.  $\eta_u$ ,  $\eta_{aa}$  ve  $v_u$  yerine  $v_{aa}$  değerleri (17) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\eta_u + (\eta_v - \tau_u)v_{aa} - \xi_u v_a - \xi_v v_a v_{aa} - \tau_v v_{aa}^2 - \eta_{aa} - (2\eta_{vu} - \xi_{aa})v_a$$

$$\begin{aligned}
& +\xi_{aa}v_a - (\eta_w - 2\xi_{va})v_a^2 + 2\tau_{av}v_av_{aa} + \xi_{tt}v_a^3 + \tau_{vv}v_a^2v_{aa} \\
& -(\eta_w - 2\xi_a)v_{aa} + 2\tau_av_{au} + 3\xi_vv_av_{aa} + \tau_vv_{aa}^2 + 2\tau_vv_av_{au} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{23}$$

olarak bulunur.

Bu açılımı kullanarak, (23) denklemindeki  $v'$ 'nin türevlerinden;

$$v_uv_{av} : \tau_v = 0$$

$$v_{au} : \tau_a = 0$$

$$v_{aa}^2 : \tau_v = \tau_v$$

$$v_a^2v_{aa} : \tau_{vv} = 0$$

$$v_av_{aa} : \Omega_v = 2\tau_{av} + 3\Omega_v$$

$$v_{aa} : \tau_u - \eta_w = \tau_{aa} - \eta_w + 2\Omega_a$$

$$v_a^3 : \Omega_{vv} = 0$$

$$v_a^2 : \eta_{vv} = 2\Omega_{au}$$

$$v_a : \Omega_u = \Omega_{aa} - \eta_{av}$$

$$sabitler : \eta_u = \eta_{aa}$$

belirleyici (tanımlayıcı) denklemleri ele edilir.

Bu belirleyici denklemleri çözersek;

$$\tau = c_1 u^2 + c_2 u + c_3$$

$$\Omega = c_1 u a + \frac{1}{2} c_2 a + c_4 u + c_5$$

$$\eta = \left(-\frac{1}{4} c_1 a^2 - \frac{1}{2} c_4 a - \frac{1}{2} c_1 u + c_6\right)$$

sonsuz küçük üreteçleri bulunur. Lie simetri üreteçleri ise

$$w_1 = v \frac{\partial}{\partial v} \quad (c_6 = 1)$$

$$w_2 = \frac{\partial}{\partial a} \quad (c_5 = 1)$$

$$w_3 = u \frac{\partial}{\partial a} - \frac{av}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (c_4 = 1)$$

$$w_4 = \frac{\partial}{\partial u} \quad (c_3 = 1)$$

$$w_5 = \frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial a} + u \frac{\partial}{\partial u} \quad (c_2 = 1)$$

$$w_6 = au \frac{\partial}{\partial a} + u^2 \frac{\partial}{\partial u} - \left(\frac{a^2 v}{4} + \frac{vu}{2}\right) \frac{\partial}{\partial v} \quad (c_1 = 1)$$

$$w_\alpha = \alpha \frac{\partial}{\partial v}$$

olarak bulunmuş olur.

Elde edilen bu simetriler kullanılarak bu değerlerin komütatör tablosunu aşağıdaki şekilde elde ederiz:

| $[w, w_j]$ | $w_1$   | $w_2$         | $w_3$ | $w_4$   | $w_5$  | $w$           |
|------------|---------|---------------|-------|---------|--------|---------------|
| $w_1$      | 0       | 0             | 0     | $w_1$   | $-w_3$ | $2w_5$        |
| $w_2$      | 0       | 0             | 0     | $2w_2$  | $2w_1$ | $4w_4 - 2w_1$ |
| $w_3$      | 0       | 0             | 0     | 0       | 0      | 0             |
| $w_4$      | $-w_1$  | $-2w_1$       | 0     | 0       | $w_5$  | $2w_6$        |
| $w_5$      | $w_3$   | $-2w_1$       | 0     | $-w_5$  | 0      | 0             |
| $w_6$      | $-2w_5$ | $2w_3 - 4w_4$ | 0     | $-2w_6$ | 0      | 0             |

(Ahmad, 2005).

İkili işleme göre  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$  ve  $w_6$  üreticileri kapalı olduğu için

$$w = \langle w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6 \rangle$$

Lie cebirini oluştururlar. Bu durumda her bir üretece denk gelen dönüşüm grupları;  
 $w_i$  simetri üreticinin dönüşüm grupları olmak üzere;

$$\Omega^i(a^*, b^*) = \frac{\partial a_i^*}{\partial \varepsilon}$$

ifadesine

$$a_i^* \big|_{\varepsilon=0} = a_i$$

başlangıç şartının uygulanmasıyla bulunur.

$$\beta_2 = \frac{\partial}{\partial a} \text{ üretici için}$$

1)

$$\frac{\partial a^*}{\partial \varepsilon} = \Omega(a^*, u^*, v^*) = 1$$

$$a^* = \varepsilon + ca^* \Big|_{\varepsilon=0} = c$$

$$a^* = a + \varepsilon$$

2)

$$\frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon} = \tau(a^*, u^*, v^*) = 0$$

$$u^* = cu^* \Big|_{\varepsilon=0} = u$$

$$u^* = u$$

3)

$$\frac{\partial t^*}{\partial \varepsilon} = \eta(a^*, u^*, v^*) = 0$$

$$v^* = cv^* \Big|_{\varepsilon=0} = v$$

$$u^* = u$$

$$G_2 = (a^*, u^*, v^*) = (a + \varepsilon, u, v)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde,

$$G_1(a^*, u^*, v^*) = (a, u + \varepsilon, v)$$

$$G_3(a^*, u^*, v^*) = (a + \varepsilon u, u, ve^{\frac{-(\varepsilon a + \varepsilon^2 u)}{2}})$$

$$G_4(a^*, u^*, v^*) = (a, u, te^\varepsilon)$$

$$G_5(a^*, u^*, v^*) = \left( ae^{\frac{\varepsilon}{2}}, ue^\varepsilon, v \right)$$

$$G_6(a^*, u^*, v^*) = \left( \frac{a}{1 - \varepsilon u}, \frac{u}{1 - \varepsilon u}, \frac{e^{\frac{a^2 \varepsilon}{4(1 - \varepsilon u)}}}{1 - \varepsilon u} \right)$$

olarak bulunur (Olver, 1993).

**Örnek:** Fiziksel uygulamalarda sıkça kullanılan denklemlerden biri de Burger denklemdir. Yayılma terimi ve lineer olmayan terimi bir arada ihtiva eder.  $a$  ve  $u$  iki bağımsız değişken ve  $v$  bağımlı değişken olmak üzere lineer olmayan bir boyutlu Burger denklemi

$$v_u = v_{aa} + v$$

şeklindedir. Burger denkleminin sonsuz küçük simetri üretici

$$B = \xi(a, u, v) \frac{\partial}{\partial a} + \tau(a, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \eta(a, u, v) \frac{\partial}{\partial v}$$

olur.

İkinci mertebeden diferansiyel denklem olduğu için ikinci uzatımı

$$B^2 = B + \eta_a \frac{\partial}{\partial v_a} + \eta_u \frac{\partial}{\partial v_u} + \eta_{aa} \frac{\partial}{\partial v_{aa}} + \eta_{au} \frac{\partial}{\partial v_{au}} + \eta_{uu} \frac{\partial}{\partial v_{uu}}$$

olur. Değişmezlik kriteri Burger denklemine uygulanırsa

$$\eta_u = \eta_{aa} + 2v_a \eta_a$$

olur.  $\eta_a$ ,  $\eta_{aa}$ ,  $\eta_u$  terimleri düzenlenip hesaplanırsa ve ifadede  $v_u$  yerine  $v_{aa} + v_a^2$  yazılıp ifade düzenlenirse

$$\eta_u + \xi_u v_a + \eta_v v_{aa} + \eta_v v_a^2 - \tau_u v_{aa} - \tau_a v_a^2 - \xi_v v_a v_{aa} - \xi_v v_a^3 - \tau_v v_{aa}^2$$

$$-2\tau_v v_{aa} v_a^2 - \tau_v v_a^4 - \eta_{aa} - 2\eta_{av} v_a + \xi_{aa} v_a + \tau_{aa} v_{aa} + \tau_{aa} v_a^2$$

$$-\eta_{vv} v_a^2 + 2\xi_{av} v_a^2 + 2\tau_{av} v_a v_{aa} + 2\tau_{av} v_a^3 + \xi_{vv} v_a^3 + \tau_{vv} v_a^2 v_{aa} + \tau_{vv} v_a^4$$



$$\begin{aligned}
& -\eta_w v_{aa} + 2\xi_a v_{aa} + 2\tau_a v_{au} + 3\xi_v v_a v_{aa} + \tau_v v_{aa}^2 + \tau_v v_{aa} v_a^2 + 2\tau_v v_a v_{ua} \\
& -2\eta_a v_a - 2\eta_w v_a^2 + 2\xi_a v_a^2 + 2\tau_a v_{aa} v_a + 2\tau_a v_a^3 + 2\xi_v v_a^3 + \\
& + 2\tau_v v_{aa} v_a^2 + 2\tau_v v_a^4 = 0
\end{aligned}$$

olur.  $v$ 'nin kısmi türevleri vasıtasıyla tanımlayıcı denklemler;

$$v_a v_{au} : 2\tau_v = 0$$

$$v_{au} : 2\tau_a = 0$$

$$v_a v_{aa} : -\xi_v + 2\tau_{av} + 3\xi_v + 2\tau_a = 0$$

$$v_{aa} : \eta_w - \tau_u + \tau_{aa} - \eta_w + 2\xi_a = 0$$

$$v_a^2 : \eta_w - \tau_u + \tau_{aa} - \eta_{wv} + 2\xi_{av} - 2\eta_w + 2\xi_a = 0$$

$$v_a : -\xi_u - 2\eta_{av} + \xi_{aa} - 2\eta_a = 0$$

şeklindedir. Bu denklemlerin çözümü yapılrısa

$$\xi = c_1 + c_4 a + 2c_5 u + 4c_6 au$$

$$\tau = c_2 + 2c_4 u + 4c_6 u^2$$

$$\eta = \alpha(a, u)e^{-v} + c_3 - c_5 a - 2c_6 u - c_6 a^2$$

olarak bulunur. Bulunan sonsuz küçükler  $B$  simetri üretecinde yerine yazılmasıyla  $c_i$  katsayılarını içeren  $B_i$  simetri üreteçleri bulunur (Hydon, 2000; Tang ve Lou, 2002).

Dolayısıyla  $B_i$  üreteçleri

$$B_1 = \frac{\partial}{\partial a}$$

$$B_2 = \frac{\partial}{\partial u}$$

$$B_3 = \frac{\partial}{\partial v}$$

$$B_4 = a \frac{\partial}{\partial a} + 2u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$B_5 = 2u \frac{\partial}{\partial a} - a \frac{\partial}{\partial v}$$

$$B_6 = 4ua \frac{\partial}{\partial a} + 4u^2 \frac{\partial}{\partial u} - (a^2 - 2u) \frac{\partial}{\partial v}$$

şeklindedir. Bulunan bu değerler yardımıyla komütatör tablosu:

| $[B, B_j]$ | $B_1$   | $B_2$         | $B_3$ | $B_4$   | $B_5$  | $B_6$         |
|------------|---------|---------------|-------|---------|--------|---------------|
| $B_1$      | 0       | 0             | 0     | $B_1$   | $-B_3$ | $2B_5$        |
| $B_2$      | 0       | 0             | 0     | $2B_2$  | $B$    | $4B_4 - 2B_3$ |
| $B_3$      | 0       | 0             | 0     | 0       | 0      | 0             |
| $B_4$      | $-B_1$  | $-2B_2$       | 0     | 0       | $B_5$  | $2B_6$        |
| $B_5$      | $B_3$   | $-2B_1$       | 0     | $-B_5$  | 0      | 0             |
| $B_6$      | $-2B_5$ | $2B_3 - 4B_4$ | 0     | $-2B_6$ | 0      | 0             |

$B_i$  simetri üreticinin dönüşüm grupları

$$\Omega^i(a^*, u^*, v^*) = \frac{\partial a_i^*}{\partial \varepsilon}$$

formülünde

$$a_i^* \Big|_{\varepsilon=0} = a_i$$

başlangıç şartının uygulanmasıyla bulunur.

$$\beta_6 = 4ua \frac{\partial}{\partial a} + 4u^2 \frac{\partial}{\partial u} - (a^2 - 2u) \frac{\partial}{\partial v} \text{ üretici için grup dönüşümünün bileşenleri}$$

1)

$$\frac{\partial a^*}{\partial \varepsilon} = \xi(a^*, u^*, v^*) = 4ua$$

$$\ln a^* = 4u\varepsilon + ca^* \Big|_{\varepsilon=0} = a$$

başlangıç şartı uygulanırsa

$$a^* = e^{4u\varepsilon} a$$

olarak bulunur.

2)

$$\frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon} = \tau(a^*, u^*, v^*) = 4u^2$$

$$-\frac{1}{u^*} = 4\varepsilon + cv^* \Big|_{\varepsilon=0} = v$$

başlangıç şartı uygulanırsa

$$u^* = -\frac{1}{4\varepsilon - \frac{1}{u}}$$

olarak bulunur.

3)

$$\frac{\partial v^*}{\partial \varepsilon} = \eta(a^*, u^*, v^*) = -a^2 + 2u$$

$$v^* = (-a^2 + 2u)\varepsilon + cv^* \Big|_{\varepsilon=0} = v$$

başlangıç şartı uygulanırsa

$$v^* = (-a^2 + 2u)\varepsilon + v$$

olur. Dolayısıyla  $G_6$  dönüşüm grubu  $\beta_6$  üretici tarafından

$$G_6: (a^*, u^*, v^*) = (e^{4u\varepsilon}a, -\frac{1}{4\varepsilon - \frac{1}{u}}, (-a^2 + 2u)\varepsilon + v)$$

şeklinde üretilir. Benzer yöntemle, diğer dönüşüm gruplarına ait aynı işlemler uygulanırsa

$$G_1: (a^*, u^*, v^*) = (a + \varepsilon, u, v)$$

$$G_2: (a^*, u^*, v^*) = (a, u + \varepsilon, v)$$

$$G_3: (a^*, u^*, v^*) = (a, u, v + \varepsilon)$$

$$G_4: (a^*, u^*, v^*) = (ae^\varepsilon, ue^{2\varepsilon}, v)$$

$$G_5: (a^*, u^*, v^*) = (a + 2u\varepsilon, u, v - \varepsilon a - 2u\varepsilon^2)$$

$$G_6: (a^*, u^*, v^*) = (e^{4u\varepsilon}a, -\frac{1}{4\varepsilon - \frac{1}{u}}, (-a^2 + 2u)\varepsilon + v)$$

Lie grup dönüşümleri bulunmuş olur (Olver, 1991).

**Örnek:** Yüksek dereceden Korteweg-de Vries denklemini ele alırsak

$$v_u + v_{aaa} + vv_a = 0 \quad (24)$$

sığ suların hareketinde ve doğrusal olmayan fiziksel sistemlerde uzun dalgalar teorisinden meydana çıkar.

$w = \xi \partial a + \tau \partial u + \Phi \partial v$  vektör alanı, tek parametrelili simetri grubunu üretir:

$$\Phi^u + \Phi^{aaa} + v\Phi^a + v_a\Phi = 0 \quad (25)$$

Burada  $\Phi^u$  ve  $\Phi^a w$  vektör alanının birinci uzatım katsayılarıdır.  $w$  vektör alanı için  $\frac{\partial}{\partial v_{aaa}}$  katsayısı

$$\Phi^{aaa} = D_a^3 \Phi - v_a D_a^3 \xi - v_u D_a^3 \tau - 3v_{aaa} D_a^2 \xi - 3v_{au} D_a^2 \tau - 3v_{aaa} D_a \xi - 3v_{aa u} D_a \tau$$

$v_u$  yerine  $-v_{aaa} - vv_a$  kullanılıp ve  $\Phi^{aaa}$  değeri (20) denkleminde yerine yazılırsa simetri grubu için belirleyici denklem elde edilir.

$v$ 'nin katsayısı,  $v_{aa u}$  ve  $D_a \tau = 0$  olup dolayısıyla yalnızca  $u$ 'ya bağlıdır.  $v_{aa}^2$  nin katsayısı,  $\xi_v = 0$  olduğunu gösterir.  $v_{aaa}$  nin katsayısından,  $\tau_u = 3\xi_a$  y1 buluruz ve

$$\xi = \frac{1}{3} \tau_u a + \sigma(u)$$

dır.  $\Phi_{vv} = 0 = \Phi_{av}$  olup dolayısıyla  $\Phi$ ;  $v$  de doğrusaldır.  $v$ 'nin katsayısı yalnızca  $u$ 'nun bir fonksiyonudur.

(20) denkleminde geri kalan terimler  $v_a$  y1 kapsayan terimlerdir:

$$\xi_u - v(\Phi_v - \tau_u) + v(\Phi_v - \xi_a) + \Phi = 0$$

ve  $v$ 'nin herhangi bir türevi olmayanlar

$$\Phi_u + \Phi_{aaa} + v\Phi_a = 0$$

olup bunların hepsinin genel çözümü

$$\xi = c_1 + c_3 u + c_4 a$$

$$\tau = c_2 + 3c_4 u$$

$$\Phi = c_3 - 2c_4 v$$

şeklindedir. Burada  $c_1, c_2, c_3, c_4$  keyfi sabitlerdir. Dolayısıyla Korteweg-de Vries denkleminin simetri cebiri dört vektör alanına yayılır. Bu vektör alanları

|                                                   |                       |
|---------------------------------------------------|-----------------------|
| $w_1 = \partial_a$                                | <i>Uzay çevirisi</i>  |
| $w_2 = \partial_u$                                | <i>Zaman çevirisi</i> |
| $w_3 = u\partial_a + \partial_v$                  | <i>Glileo artışı</i>  |
| $w_4 = a\partial_a + 3u\partial_u - 2v\partial_v$ | <i>Ölçeklendirme</i>  |

olacak şekildedir. Eğer  $v = g(a, u)$  Korteweg-de Vries denkleminin bir çözümü ise

$$v^{(1)} = g(a - \varepsilon, u)$$

$$v = g(a, u - \varepsilon)$$

$$v^{(3)} = g(a - \varepsilon u, u) + \varepsilon$$

$$v^{(4)} = e^{-2\varepsilon} g(e^{-\varepsilon} a, e^{-3\varepsilon} u)$$

olur.

Bu veriler yardımıyla komütatör tablosu:

| $[w_i, w_j]$ | $w_1$  | $w_2$   | $w_3$  | $w_4$   |
|--------------|--------|---------|--------|---------|
| $w_1$        | 0      | 0       | 0      | $w_1$   |
| $w_2$        | 0      | 0       | $w_1$  | $3w_2$  |
| $w_3$        | 0      | $-w_1$  | 0      | $-2w_3$ |
| $w_4$        | $-w_1$ | $-3w_2$ | $2w_3$ | 0       |

şeklinde bulunur (Olver, 1991).

### 3.13. BOND PRİCİNG DENKLEMİNİN LİE SİMETRİLERİ

Tahvil fiyatlaması, finansal matematikte temel bir konu olup, bir tahvilin değerini belirlerken gelecekteki ödemelerin bugünkü değerinin hesaplanmasını esas alır. Bu süreçte, zamanın paranın değeri üzerindeki etkisi ve risk faktörleri dikkate alınır. Tahvil fiyatlama yöntemleri, yatırımcıların daha bilinçli ve etkili kararlar almalarına yardımcı olarak finansal piyasalarda önemli bir rol oynar.

Klasik tahvil fiyatlama modelleri, geçmişten günümüze yaygın bir şekilde kullanılan araçlardır ve temel ilkeleri basit bir matematiksel yaklaşıma dayanır. Ancak, bu modeller bazı teorik eksikliklere sahiptir. Genellikle tahvilin teorik fiyatının, piyasadaki gerçek fiyatlardan düşük olmasına neden olabilen bu kusurlar, tahvil fiyatlamasında daha gelişmiş yöntemlere duyulan ihtiyacı ortaya koymaktadır.

Bu bağlamda, fraktal türevler kullanılarak geliştirilen alternatif modeller, tahvil fiyatlamasına yeni bir bakış açısı sunmaktadır. Fiyat değişimlerinin bir fraktal iletim sistemi olarak değerlendirildiği bu yöntem, klasik modellerin eksiklerini gidermeyi amaçlamaktadır. Fraktal tahvil fiyatlama denklemleri, genellikle fraktal iki ölçekli dönüşüm teknikleri kullanılarak çözülebilir ve Lie simetri analizi gibi ileri matematiksel yöntemlerden yararlanır. Bu tür analizler, tahvil fiyatlamasında daha karmaşık, ancak daha gerçekçi sonuçlar elde edilmesine olanak tanır. Fraktal tahvil fiyatlama yaklaşımı, dinamik fiyat değişimlerini daha doğru bir şekilde modelleyerek sermaye piyasalarında klasik modellerin açıklamada yetersiz kaldığı durumlara

çözüm sunmaktadır. Klasik model, bu kapsamda, fraktal yaklaşımın özel bir durumu olarak kabul edilebilir. Bu çalışmalar, piyasa fiyatlarının daha doğru bir şekilde tahmin edilmesine yardımcı olarak yatırımcılara daha gerçekçi araçlar sunmayı hedeflemektedir.

Sonuç olarak, fraktal boyutlu tahvil fiyatlama modelleri, piyasa fiyat değişimlerini klasik modellere kıyasla daha iyi açıklama potansiyeline sahiptir. Bu yaklaşımlar, finansal piyasalarda daha güvenilir tahvil fiyatlama stratejileri geliştirilmesi için sağlam bir temel oluşturur.

Bu bölümde Lie simetri metodu kullanılarak Bond Pricing denkleminin

$$k_t = \lambda x k_{xx} + \mu k_x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

simetri indirgemeleri incelenecektir. Tek parametre ihtiva eden Lie grup noktaları için dönüşümler

$$x_i^* = x_i + \varepsilon \Omega i_{(x)} + M(\varepsilon^2)$$

olarak verilsin.  $i = 1, 2, 3$  için  $x_i$  ler  $x, t, k$  ları ifade ederken  $\Omega^i$  ler de  $\Omega(x, t, k)$ ,  $\theta(x, t, k)$  ve  $\emptyset(x, t, k)$  ları ifade eder. Denklem çözümü bulabilmek için önce bu denkleme  $a, t$  simetri üreticini yazarak başlayalım.

$$x = \Omega(x, t, k) \frac{\partial}{\partial x} + \theta(x, t, k) \frac{\partial}{\partial t} + \emptyset(x, t, k) \frac{\partial}{\partial k}$$

$\Omega, \theta, \emptyset$  olacak şekilde bağımsız değişkenler ve tanjant vektör uzayının bileşenleri  $x, t$  bağımlı değişkenleri  $k$  ya bağlı olmak durumundadır.

BP denklemi 2. mertebeden bir KDD olduğu için 2. uzanımı hesaplanırsa

$$x^{(2)} = x + \phi_x \frac{\partial}{\partial k_x} + \phi_t \frac{\partial}{\partial k_t} + \phi_{xx} \frac{\partial}{\partial k_{xx}} + \phi_{xt} \frac{\partial}{\partial k_{xt}} + \phi_{tt} \frac{\partial}{\partial k_{tt}}$$

elde edilir ki kısmi denklemlere ait invaryantlık kriterince,

$$X^{(2)} \{k_t = \lambda x k_{xx} + \mu k_x\} | k_t - \lambda k_{xx} - \mu k_x = 0$$

denklemi elde edilir.  $\phi_1, \phi_x$  ve  $\phi_{xx}$  denklemde uygulanırsa,



$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mu}{\partial x_2} + U_{x_2} \left( \frac{\partial N}{\partial k} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right) + kx_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} + k_{x_2}^2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial u} - k_{x_1} k_{x_2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial k} - \lambda \times \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_1 \partial k} kx_1 \\
& + kx_{,x_2} \left( \frac{\partial n}{\partial k} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right) + kx_i \left( \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_1 \partial u} + \frac{\partial^2 N}{\partial k^2} kx_i - \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_1^2} x_i \right) \\
& - k_{x_2} \left( \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x_1 \partial u} kx_i \right) - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} kx_2 x_i - k_{x_1}^2 \left( \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_1 \partial k} + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial u^2} kx_1 \right) \\
& - 2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial k} kx_{,x_1} - u_{x_1 x_2} \left( \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x_1 \partial k} + \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial k^2} kx_1 \right) - \frac{\partial \Omega_2}{\partial k} kx_1 x_1 k_{x_2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial k} kx_1 k_{x, x_2} \\
& - k_{x, x_2} \left( \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial u} kx_1 \right) - x_1 x_2 \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial k} kx_1 \right) \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + k_{x_1} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial k} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right) \\
& - u_{x_1}^2 \frac{\partial \Omega_1}{\partial k} + k \frac{\partial \Omega_2}{\partial k} - x \Omega k_{xx} = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemde  $k_t$  gördüğümüz yere  $\lambda x k_{xx} + \mu k_x$  ifadesini yazar daha sonra  $k$ 'nın kısmi türevlerin katsayıları ayrı ayrı sıfıra eşitlendiğinde, ortaya çıkan sistemden yeni üreteçler türetilir:

$$W_1 = 2\lambda x t \frac{\partial}{\partial x} - \lambda t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (x + \mu t) k \frac{\partial}{\partial k}$$

$$W_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}$$

$$W_3 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$W_4 = k \frac{\partial}{\partial k}$$

Bu üreteçlerin komütatör tablosu oluşturulursa;

| $[W_i, W_j]$ | $W_1$            | $W_2$  | $W_3$             | $W_4$ |
|--------------|------------------|--------|-------------------|-------|
| $W_1$        | 0                | $-W_1$ | $-2W_2 + \mu W_4$ | 0     |
| $W_2$        | $W_1$            | 0      | $-W_3$            | 0     |
| $W_3$        | $2W_2 - \mu W_4$ | $W_3$  | 0                 | 0     |
| $W_4$        | 0                | 0      | 0                 | 0     |

elde edilir ve  $W_1, W_2, W_3, W_4$  üreteçleri ikili işleme göre kapalı olup bu taban  $L_4 = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$  Lie cebirini üretir (Hanze and Jibin and Lei, 2009).

### 3.14. HANGİNG CHAİN DENKLEMİNİN SİMETRİLERİ

Sadece yerçekimi tarafından etkilenen asılı zincir şeklinin matematiksel bir tanımını bulma problemi bilim insanlarının uzun süre ilgisini çekmiştir. Galileo Galilei'nin düşündüğünün aksine, parabol problemin çözümü değildir. Aynı ayrı, Huygens, Leibniz ve Johann Bernouilli problemin çözümünün, üstel fonksiyonları içerdiği için çok daha zor bir eğri olan zincir eğrisi olduğunu kanıtladılar. O zamandan beri zincir eğrisi sadece matematikçilerin değil, aynı zamanda fizikçilerin, mimarların ve mühendislerin de ilgisini çekmektedir. Asılı zincir problemi, varyasyon hesabının birçok ders kitabında tipik bir giriş problemidir. Ayrıca zincir eğrisi, düzlemin yanı sıra tek dönme minimal yüzeyi olan katenoidin üreten eğrisi olduğu için geometride ilgi çekicidir. Zincir eğrisinin matematiksel literatürü o kadar kapsamlıdır ki buraya dahil etmek imkansız olurdu (López, 2024).

Varyasyonlar hesabının bakış açısından, asılı zincir problemine yaklaşım şu şekildedir. Zincir üzerinde ideal koşullar (sabit yoğunluk, uzayamazlık) ve sabit yer çekimi olduğunu varsayalım. O halde bunu ifade edebileceğimiz KDD formunda Hanging Chain denklemi

$$u_{tt} = \lambda x u_{xx} + \lambda u_x \quad (26)$$

olarak ifade edilir (Liu, 2011) . Bu denklemde  $U = u(x, t)$  bilinmeyen fonksiyon ve

$\lambda \in \mathbb{R}$  ,  $\lambda \neq 0$  dır.  $\lambda = g$  yer çekimi ivmesi olmak üzere (26) denklemi  $L$  uzunluğunda bir zincirin titreşerek oluşturduğu hareketlerle oluşan matematiksel modellemesidir. Eğer  $0 < x < L$  ise zincir sonludur, yine aynı şekilde  $0 < x < \infty$  ise zincir yarı sonlu olarak tanımlanır. (21) numaralı denklem üzerinde Lie simetri analizi yapılacak ve bu analiz sonucunda uygun çözümler araştırılacaktır. Bu süreçte, bir parametrelili Lie gruplarına dayalı nokta dönüşümleri şu şekilde değerlendirilecektir:

$$x_i^* = x_i + \varepsilon \Omega^i(x) + \beta(\varepsilon^2)$$

olarak verilmiş olsun.  $i = 1, 2, 3$  için  $x_i$  ler  $x, t, u$  lar için bağlayıcı olurken ve  $\Omega^i$  ler ise  $\Omega(x, t, u)$ ,  $\mu(x, t, u)$  ve  $\phi(x, t, u)$  ları temsil eder.

(26) denkleminde ait çözüm bulmak için öncelikle  $x, t, u$ 'ya bağlı olan simetri üretici yazılırsa,

$$x = \Omega(x, t, u) + \mu(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}$$

Bu denklem ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem olduğu için ikinci uzanımı kullanmalıyız:

$$X^{(2)} = X + \phi_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi_{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi_{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}$$

Bu uzanım denkleminde aşağıdaki belirleyici denklemler elde edilir:

$$\Omega_u = 0, \quad \Omega = \Omega(x, t)$$

$$\mu_u = 0, \quad \mu = \mu(x, t)$$

$$\phi_{uu} = 0, \quad \phi = r(x, t) + s(x, t)$$

$$\lambda x \mu_x = \Omega_t,$$

$$\Omega - 2x\Omega_x + 2x\mu_t = 0,$$

$$\lambda \mu_x + \lambda x \mu_{xx} + 2r_1 - \mu_{tt} = 0,$$

$$\lambda \Omega_x - 2\lambda x r_x + \lambda x \Omega_{xx} - 2\lambda \mu_t - \Omega_{tt} = 0,$$

$$r_{tt} - \lambda x r_{xx} - \lambda r_x = 0,$$

$$s_{tt} - \lambda x s_{xx} - \lambda s_x = 0,$$

Bu belirleyici denklemlerden aşağıdaki simetrileri elde ederiz:

$$X_1 = 4\lambda xt \frac{\partial}{\partial x} + (4x + \lambda t^2) \frac{\partial}{\partial t} - \lambda tu \frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_2 = 2x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$X_4 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

Bu dönüşümlere ait üreteç tablosu şu şekildedir:

| $[X_i, X_j]$ | $X_1$                         | $X_2$  | $X_3$                        | $X_4$ |
|--------------|-------------------------------|--------|------------------------------|-------|
| $X_1$        | 0                             | $X_1$  | $2\lambda X_2 - \lambda X_4$ | 0     |
| $X_2$        | 0                             | 0      | $X_3$                        | 0     |
| $X_3$        | $-2\lambda X_2 + \lambda X_4$ | $-X_3$ | 0                            | 0     |
| $X_4$        | 0                             | 0      | 0                            | 0     |

$X_1, X_2, X_3, X_4$  üreteçleri ikili işleme göre kapalı olup bu taban  $L_4 = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$  Lie cebirini üretir (Hanze and Jibin ve Lei, 2009).

#### 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, diferansiyel denklemler hakkında genel bilgiler verilerek bir parametrelili Lie grup dönüşümleri incelenmiştir. Süreklilik ifade eden parametrelerin yine sürekli Lie grup dönüşümü oluşturduğu görülmüştür. Lie grup dönüşümlerinden faydalanılarak kısmi diferansiyel denklemlerin sonsuz küçük simetri üreticileri içinde değişmezliğini koruyan uzanım formülleri bulunarak sonsuz küçükler ve simetri üreticileri bulunmuştur. Gerek doğa olayları gerekse fiziksel olayların analizini yapabilmek ya da matematiksel modelleme yapabilmek için Lie grubuna ait dönüşüm ile meydana gelen sonsuz küçük simetri operatörünün KDD çözümüne ulaşılmasındaki öneminden bahsedilmiştir. Bu formlar, farklı denklemlerin çözümünde kullanılan benzerlik yöntemleri aracılığıyla belirlenmektedir. Bu çalışmada, öncelikle Lie simetrileri hakkında temel kavramlar ele alınmış, Lie simetrilerinin nasıl elde edilebileceği incelenmiş, bu simetrilerin matematiksel fizik denklemlerine nasıl uygulanacağına dair örnekler verilmiş ve sonrasında korunum kanunları araştırılmıştır. Lie cebir yapısına değinilerek elde edilen üreticilerin Lie cebir yapısına bakılıp komütatör tablosu üzerinden gösterilmiştir. Sonsuz küçük simetri üreticileri için grup dönüşümleri bulunup, iki boyutlu alt cebir veya sonsuz küçük simetri üreticileri altında ADD ye indirgenerek çözümlerine ulaşılmıştır. Dolayısıyla ele alınan KDD nin çözümüne ulaşabilmek için karmaşık yapıdaki bir formdan daha basit bir hale getirilerek çözümlerine ulaşılmıştır. Bu simetrilerin matematiksel fizik denklemlerine nasıl uygulanacağına dair örnekler verilmiş. Son bölümde Lie grupları ve diferansiyel denklemler arasında köprü vazifesi kuran Lie-Bäcklund operatörüne değinilmiş simetri analizleri ve korunum kanunları için öneminden bahsedilmiştir. Yine piyasalar için önem arzeden piyasalardaki tahvillerin değerlendirmesinde kullanılan işlemler için Bond pricing denklemlerinden bahsedilmiştir. Son olarakta mühendislik ve mimaride önem arzeden katenar eğrisi olarak da geçen Hanging Chain denklemlerinden bahsedilerek KDD şeklindeki bir denklemin Lie analizi ile çözümü araştırılmıştır. Bu denklemler benzer fiziksel olaylar için de kullanılıp daha işlevsel sonuçlar elde edilebilir.

## 5. KAYNAKLAR

- Ahmad, A. (2005). *Symmetry Solutions of Some Nonlinear PDE's*. King Fahd University Of Petroleum.
- Bluman, G. (1989). *Symmetries and differential equations with 21 illustrations*. Newyork: springer-Verlag.
- Bluman, G. W., & Anco, S. C. (2002). *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*. Newyork: Springer-Verlag.
- Bluman, G., & Anco, S. (2002). *Symmetry and integration methods for diferantial equations w,th 18 illustrations*. Newyork: Springer-Verlag.
- Cantwell, B. (2002). *Introduction to Symmetry Analysis*. United Kingdom: Cambridge University Press.
- Cantwell, B. J. (2002). *Introduction to Symetry Analysis. Cambridge Texts in Applied Mathematics*. California: Cambdridge.
- Cicikçiol, S. (2018). Kısmi türevli denklemlerin yapısal kararlılık analizi. *Yüksek Lisans Tezi*. Sakarya: Sakarya Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü,.
- Engin, T., Cerit, C., & Ayaz, F. (2013). *Mühendislik ve Temel Bilimler için Diferansiyel Denklemler*. İzmir: Güven Kitabevi.
- Eser, D., & Özer, M. N. (2002). *Diferansiyel Denklemler*. Eskişehir: Birlik Ofset.
- Hydon, P. (2000). *Symmetry Methods for Differential Equations A Beginner's Guide*. Newyork: Cambridge.
- İbragimov, N. H. (1993). *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Volume I*. Boca Raton: CRC press.
- Kiraz, F. A. (2007). Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Lie simetriteri üzerine doktora çalışması. *Doktora Tezi*. İzmir: Ege Üniversitesi.
- Kirillov, A. A. (2008). *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. Camdridge University Press.
- Kirillov, A. J. (2010). *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. Newyork: Stony Brook University. <https://www.math.stonybrook.edu/~kirillov/mat552/liegroups.pdf>. adresinden alındı
- Koca, K. (2020). *Kısmi Diferansiyel Denklemler*. Ankara: Gazi Kitabevi.
- Liu, H. (2011). *Group Classifications, Symmetry Reductions and Exact Solutions to the Nonlinear Elastic Rod Equations*. Binzhou: Binzhou University.

- Lone, A. A. (2005). Symmetry Solutions of Some Nonlinear Pde's. *Deanship of Graduate Studies*. Saudi Arabia: King Fahd University of Petroleum and Minerals Dhahran.
- López, R. (2024). *The hanging chain problem with respect to a circle*. Granada: Universidad de Granada.
- M.N., Ö., & EserD. (1996). *Diferansiyel Denklemler (Teori ve Uygulamaları)*. Eskişehir: Birlik Ofset.
- Olver, P. J. (1993). *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Newyork: Springer Science & Business Media.
- Orhan, Ö., 2018, On  $\mu$ -symmetries,  $\mu$ -reductions, and  $\mu$ -conservation laws of Gardner equation, *Journal of nonlinear mathematical physics*, 26(1), 69-90.
- Özceylan, M. (2006). Bir Parametrelili Lie Gruplarının Diferensiyel Denklemlere Uygulanması. Y. *Lisans Tezi*. Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Peter J., A. (1993). *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Newyork: Springer-Verlag.
- Saadet, Ö. (2018). Lineer Olmayan Dalga Denkleminin Lie Grupları Analizi . *Marmara Fen Bilimleri Dergisi*(2), 133-144.
- San, S. (2011). *Kısmi diferansiyel denklemlerin simetrileri ve çözümleri* . Eskişehir: Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Stephani, H. (1989). *Differential Equations*. Newyork: Cambridge University Press.
- Yaşar, E. (2009). *Oluşum Türü Denklemlerin Yerel ve Yerel Olmayan Yeni Korunum Kanunları* *Doktora tezi*. Bursa: Uludağ Üniversitesi.
- Yaşar, İ. B. (2009). *Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları*. Ankara: Nadir Kitap.
- Yıldız, İ. (1998). *Adi Diferansiyel Denklemler*. Erzurum: Aktif Yayınları.