

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**DİFERANSİYEL, FONKSİYONEL DİFERANSİYEL VE
İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE SİSTEMLERİ İÇİN
GALERKİN-TİPİ BİR SAYISAL YÖNTEM**

Murat KARAÇAYIR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2018

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**DİFERANSİYEL, FONKSİYONEL DİFERANSİYEL VE
İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE SİSTEMLERİ İÇİN
GALERKİN-TİPİ BİR SAYISAL YÖNTEM**

Murat KARAÇAYIR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2018

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL, FONKSİYONEL DİFERANSİYEL VE
İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE SİSTEMLERİ İÇİN
GALERKİN-TİPİ BİR SAYISAL YÖNTEM

Murat KARAÇAYIR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi
tarafından FDK-2017-2399 nolu proje ile desteklenmiştir.

HAZİRAN 2018

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL, FONKSİYONEL DİFERANSİYEL VE
İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE SİSTEMLERİ İÇİN
GALERKİN-TİPİ BİR SAYISAL YÖNTEM

Murat KARAÇAYIR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez 08/06/2018 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr. Şuayip YÜZBAŞI (Danışman). İmza

Prof.Dr. İlham ALİYEV.....İmza

Prof.Dr. Gabil ADİLOV.....İmza

Prof.Dr. Mehmet SEZER.....İmza

Prof.Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL.....İmza

ÖZET

DİFERANSİYEL, FONKSİYONEL DİFERANSİYEL VE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE SİSTEMLERİ İÇİN GALERKİN-TİPİ BİR SAYISAL YÖNTEM

Murat KARAÇAYIR

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Haziran 2018, 117 sayfa

Bu tez, en geniş şekliyle, temel bilimlerde ve mühendislikte karşılaşılan çeşitli problemlerin sayısal çözümlerini elde etmekle ilgilenmektedir. Bu sayısal çözümleri elde etmekte kullanılan yöntem, ilgili denklemin belirli test fonksiyonlarıyla çarpılıp integre edilmesi esasına dayanan Galerkin ayrıştırmasından yararlanır. Bu yöntemde, yaklaşık çözüm, derecesi belli bir N sayısı olan bir polinom şeklinde aranmış, bu amaçla söz konusu test fonksiyonları kümesi $\{1, x, x^2, \dots, x^N\}$ şeklindeki klasik polinom tabanı olarak belirlenmiştir. Çeşitli adi diferansiyel, gecikmeli diferansiyel ve integro-diferansiyel denklemler ve bunların sistemlerine yöntemin nasıl uygulanacağı ayrı ayrı ve detaylı olarak açıklanmış, ardından yöntem her problem tipi için bir ya da iki örnek problem üzerinde test edilmiştir. Bu testlerden elde edilen sonuçlar kendi aralarında ve mümkün olduğu durumlarda diğer sayısal yöntemlerden elde edilen sonuçlarla kıyaslanmıştır. Sonrasında, yöntemin ilk hâliyle kısmi diferansiyel denklemlere uygulanamaması ve N değerini arttırmanın yakınsamayı garanti etmemesi gibi bazı eksik yönlerinden söz edilmiş, bu eksikliklerin giderilmesi için çeşitli öneriler getirilmiş ve bu öneriler örnek problemler üzerinde uygulanmıştır. Bu uygulamalar sonucunda, yöntemin daha iyi sonuçlar verdiği görülmüş; bu durum, bu çalışmanın özgün yanını ortaya koymuştur. Son olarak, elde edilmiş bir yaklaşık çözümün kalıntısı vasıtasıyla bu çözümün hatasını tahmin etmeye olanak tanıyan bir teknik ele alınmış ve söz konusu çözümü iyileştirmek için kullanılmıştır.

ANAHTAR KELİMELEER: Adi diferansiyel denklemler, Galerkin yöntemi, Gecikmeli diferansiyel denklemler, İntegro-diferansiyel denklemler, Sayısal çözümler.

JÜRİ: Doç.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Prof.Dr. İlham ALİYEV

Prof.Dr. Gabil ADİLOV

Prof.Dr. Mehmet SEZER

Prof.Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL



ABSTRACT

A GALERKIN-LIKE NUMERICAL METHOD FOR DIFFERENTIAL, FUNCTIONAL DIFFERENTIAL AND INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR SYSTEMS

Murat KARAÇAYIR

PhD Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

June 2018, 117 pages

In its most general form, the interest of this thesis is to obtain numerical solutions of various problems encountered in natural sciences and engineering. The method used to obtain these numerical solutions makes use of Galerkin discretization, which is based on the integration of the product of the relevant equation with certain test functions. In this method, the approximate solution is sought in the form of a polynomial having a certain degree N , thus giving rise to the choice of the set of test functions as the classical polynomial basis $\{1, x, x^2, \dots, x^N\}$. The application of the method to various ordinary differential, delay differential and integro-differential equations has been separately described in detail, followed by the testing of the method on one or two example problems for each problem type. The results obtained from these tests have been compared within themselves and with those obtained by other numerical methods wherever possible. Then, some flaws of the method have been mentioned such as its non-applicability to partial differential equations and its failure to guarantee convergence by increasing the value of N in its original form. Some ways of overcoming these flaws have been suggested and these suggestions have been applied to example problems. As a result of these applications, the method has been observed to yield better results, constituting the original aspect of this study. Lastly, a technique has been considered which makes it possible to estimate the error of an obtained approximate solution by means of its residual and this technique has been used to improve the solution in question.

KEYWORDS: Delay differential equations, Galerkin method, Integro-differential equations, Numerical solutions, Ordinary differential equations.

COMMITTEE: Assoc.Prof.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Prof.Dr. İlham ALİYEV

Prof.Dr. Gabil ADİLOV

Prof.Dr. Mehmet SEZER

Prof.Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL



ÖNSÖZ

Öncelikle, hayatım boyunca sevgi ve güvenlerini yanımda hissettiğim, benden her türlü desteği esirgemeyen aileme teşekkür ederim. Ayrıca, danışman hocam Doç.Dr. Şuayip YÜZBAŞI'ya sağladığı motivasyon ve örnek oluş için minnetarım. Onun yol göstermesi olmadan bu tez yazılamazdı.

Bu tez, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 2211-A Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında desteklenmiştir.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ	v
AKADEMİK BEYAN	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
ÇİZELGELER DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
1.1. Kaynak Taraması	5
2. MATERYAL VE METOT	9
3. BULGULAR VE TARTIŞMA	11
3.1. Galerkin-tipi Yöntemin Adi Diferansiyel Denklemlere Uygulanışı	11
3.1.1. Tekil olarak pertürbe edilmiş denklemlerin sayısal çözümleri	13
3.1.2. Doğrusal adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri	19
3.1.3. Doğrusal adi diferansiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümleri	21
3.1.4. Doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümleri: Lotka-Volterra denklemleri	29
3.2. Galerkin-tipi Yöntemin Fonksiyonel Diferansiyel Denklemlere Uygulanışı	37
3.2.1. Multi-pantograf denkleminin sayısal çözümleri	38
3.2.2. Genelleştirilmiş pantograf denkleminin sayısal çözümleri	45
3.2.3. Doğrusal gecikmeli diferansiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümleri	49
3.2.4. Doğrusal olmayan gecikmeli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri: T4 hücrelerinin HIV ile enfekte olması modeli	53
3.3. Galerkin-tipi Yöntemin İntegro-diferansiyel Denklemlere Uygulanışı	60
3.3.1. Karışık tipte Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemlerinin sayısal çözümleri	60
3.3.2. Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümleri	72
3.3.3. Doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri	78
3.4. Galerkin-tipi Yöntemin Bazı İyileştirmeleri	82

3.4.1. Galerkin-tipi yöntemin kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması	82
3.4.2. Galerkin-tipi yöntemin bir aralığın parçalanışlarına uygulanması	95
3.4.3. Yaklaşık çözümün kalıntısıyardımıyla hata tahmini	97
4. SONUÇLAR	106
5. KAYNAKLAR	108
ÖZGEÇMİŞ	



AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans / Doktora Tezi olarak sunduğum “Diferansiyel, Fonksiyonel Diferansiyel ve İntegro-diferansiyel Denklemler ve Sistemleri İçin Galerkin-tipi Bir Sayısal Yöntem” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

...../...../2018

Murat Karaçayır

.....

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	: $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrislerinin Kronecker tensör çarpımı
$\mathbf{A}_{i,j}$	: $\mathbf{A}$ matrisinin i 'inci satırı ve j 'inci sütunundaki girdi
$\mathbf{A}^T$	: $\mathbf{A}$ matrisinin transpozu
$C^n([a, b])$	: $[a, b]$ aralığında n 'inci türevi sürekli fonksiyonlar uzayı
$\langle f, g \rangle$	: Belli a, b sayıları için $\int_a^b f(x)g(x)dx$ belirli integralinin değeri
$\mathbb{N}_0$	: Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Gerçek sayılar kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. V_N 'nin ϕ_i taban fonksiyonları. (Oden ve Reddy 1976)	5
Şekil 3.1. Örnek 3.1'de $\varepsilon=2^{-4}$ değeri için farklı N seçimlerine karşılık elde edilen mutlak hatalar.	16
Şekil 3.2. Örnek 3.1'de $N=10$ seçimi için farklı ε değerlerine karşılık elde edilen mutlak hatalar.	16
Şekil 3.3. Örnek 3.2'de $\varepsilon=2^{-6}$ değeri için farklı N seçimlerine karşılık elde edilen mutlak hatalar.	18
Şekil 3.4. Örnek 3.2'de $N=10$ seçimi için farklı ε değerlerine karşılık elde edilen mutlak hatalar.	18
Şekil 3.5. Örnek 3.3 için çeşitli N seçimleriyle elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının grafikleri.	22
Şekil 3.6. Örnek 3.4 için çeşitli N seçimleriyle elde edilen mutlak hatalar. . . .	28
Şekil 3.7. Örnek 3.5 için çeşitli N seçimleriyle elde edilen mutlak hatalar. . . .	30
Şekil 3.8. Örnek 3.6'nın üç farklı N seçimi ile elde edilen çözümlerinin kalıntıları.	36
Şekil 3.9. Örnek 3.7 için Galerkin-tipi yöntemle ve diğer iki yöntemle elde edilen mutlak hataların grafiği.	44
Şekil 3.10. Örnek 3.8 için Galerkin-tipi yöntemle farklı N değerlerine karşılık elde edilen mutlak hataların grafiği.	45
Şekil 3.11. Örnek 3.9 için çeşitli N seçimlerine karşılık bulunan mutlak hatalar. . .	49
Şekil 3.12. Örnek 3.10 için dört farklı N değeriyle bulunan yaklaşık çözümlerin mutlak hataları.	54
Şekil 3.13. Örnek 3.11 için dört farklı N değeriyle bulunan yaklaşık çözümlerin mutlak kalıntıları.	58
Şekil 3.14. Örnek 3.13 için dört farklı N değeriyle bulunan yaklaşık çözümlerin mutlak hataları.	66
Şekil 3.15. Örnek 3.14'ün çeşitli N seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümlerinin mutlak hataları.	67
Şekil 3.16. Örnek 3.15'in çeşitli N seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümlerinin mutlak hataları.	69

Şekil 3.17. Örnek 3.16'nın çeşitli N seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümlerinin mutlak hataları.	71
Şekil 3.18. Örnek 3.19'un çeşitli N seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümlerinin mutlak hataları.	78
Şekil 3.19. Örnek 3.20'nin farklı N seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümlerinin kalıntıları.	82
Şekil 3.20. Örnek 3.21'de $N=3$ seçimine karşılık elde edilen mutlak hata. . . .	88
Şekil 3.21. Örnek 3.21'de $N=6$ seçimine karşılık elde edilen mutlak hata. . . .	88
Şekil 3.22. Örnek 3.21'de $N=9$ seçimine karşılık elde edilen mutlak hata. . . .	89
Şekil 3.23. Örnek 3.22'nin $\varepsilon=10^{-1}$ değerine karşılık (a) $N=3$, (b) $N=6$, (c) $N=9$ seçimiyle elde edilen yaklaşık çözümlerinin mutlak hataları.	91
Şekil 3.24. Örnek 3.22'nin $\varepsilon=10^{-3}$ değerine karşılık (a) $N=3$, (b) $N=6$, (c) $N=9$ seçimiyle elde edilen yaklaşık çözümlerinin mutlak hataları.	91
Şekil 3.25. Galerkin-tipi yöntemin iki boyutlu telgraf denkleminde $N=4$ seçimi ile uygulanması sırasında başlangıç ve sınır koşulları için seçilen kollokasyon noktaları.	93
Şekil 3.26. Örnek 3.23'ün $N=4, 5, 6, 7$ seçimleriyle bulunan çözümlerinin mutlak hatalarının $t = 0.5$ anındaki grafikleri.	94
Şekil 3.27. (3.88) başlangıç değer probleminin $N=5$ ve $k=2$ seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümünün grafiği.	98
Şekil 3.28. (3.88) başlangıç değer probleminde sabit $N=5$ değeri için çeşitli k seçimlerine karşılık elde edilen mutlak hatalar.	98
Şekil 3.29. (3.93) problemde $N=5$ seçimiyle hesaplanan yaklaşık çözümün ve $M=7$ ve $M=8$ seçimleriyle düzeltilmiş çözümlerin mutlak hataları.	102
Şekil 3.30. (3.19) probleminin $N=5$ seçimi ile bulunmuş çözümlerinin ve $M=6$ ve $M=7$ seçimleriyle elde edilmiş düzeltmelerinin mutlak hataları.	104
Şekil 3.31. (3.94) problemde $N=3$ seçimine karşılık gelen yaklaşık çözümlerin ve iki farklı düzeltmesinin mutlak kalıntıları.	105

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Örnek 3.1’de farklı ε ve N değerleriyle elde edilen L_∞ -hataların Bessel kollokasyon yöntemiyle karşılaştırılması.	17
Çizelge 3.2. Örnek 3.2’de farklı ε ve N değerleriyle elde edilen L_∞ -hataların Bessel kollokasyon ve sonlu fark yöntemleriyle karşılaştırılması.	19
Çizelge 3.3. Örnek 3.4’te çeşitli N seçimleriyle elde edilen maksimum mutlak hataların homotopi pertürbasyon yöntemiyle karşılaştırılması.	27
Çizelge 3.4. Örnek 3.5 için $N=9$ ve $N=12$ seçimlerine karşılık gelen mutlak hataların Bessel kollokasyon yöntemi ile karşılaştırılması.	30
Çizelge 3.5. Örnek 3.6’da $N=3$ ve $N=6$ ile bulunan yaklaşık av nüfusu $p_N(t)$ ’ye ait kalıntıların homotopi pertürbasyon ve Bessel kollokasyon yöntemiyle karşılaştırılması.	37
Çizelge 3.6. Örnek 3.6’da $N=3$ ve $N=6$ ile bulunan yaklaşık avcınüfusu $q_N(t)$ ’ye ait kalıntıların homotopi pertürbasyon ve Bessel kollokasyon yöntemiyle karşılaştırılması.	37
Çizelge 3.7. Örnek 3.7 için $N=5, 8, 10$ seçimleriyle bulunan çözümlerin mutlak hatalarının Muroya’nın kollokasyon yöntemi ve Taylor polinomları yöntemi ile karşılaştırılması.	44
Çizelge 3.8. Örnek 3.8’de çeşitli N değerlerine karşılık gelen mutlak hatalar. .	45
Çizelge 3.9. Örnek 3.9’da çeşitli N değerleriyle elde edilen çözümlerin mutlak hata bakımından üç diğer yöntemle karşılaştırılması.	50
Çizelge 3.10. Örnek 3.10’da $y_1(x)$ için üç farklı N değeriyle elde edilen mutlak hataların spline fonksiyonu yöntemi ve Bessel kollokasyon yöntemiyle karşılaştırılması.	54
Çizelge 3.11. Örnek 3.10’da $y_2(x)$ için üç farklı N değeriyle elde edilen mutlak hataların spline fonksiyonu yöntemi ve Bessel kollokasyon yöntemiyle karşılaştırılması.	54
Çizelge 3.12. Örnek 3.11’de $N=3, 4, 5, 6$ seçimleriyle bulunan yaklaşık sağlıklı T4 hücresi yoğunluğu $T_N(t)$ ’nin bazı t anlarındaki değerleri.	59
Çizelge 3.13. Örnek 3.11’de $N=3, 4, 5, 6$ seçimleriyle bulunan yaklaşık virüslü T4 hücresi yoğunluğu $I_N(t)$ ’nin bazı t anlarındaki değerleri.	59

Çizelge 3.14. Örnek 3.11’de $N=3, 4, 5, 6$ seçimleriyle bulunan yaklaşık serbest virüs yoğunluğu $V_N(t)$ ’nin bazı t anlarındaki değerleri.	59
Çizelge 3.15. Örnek 3.13 için $N=4$ ve $N=7$ ile elde edilen yaklaşık çözümlerin Chelyshkov ve Dickson kollokasyon yöntemleriyle karşılaştırılması.	66
Çizelge 3.16. Örnek 3.14’ün çeşitli N seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümleri ile tam çözümün bazı noktalarındaki değerleri.	68
Çizelge 3.17. Örnek 3.14’te $N=7$ ve $N=8$ değerlerine karşılık bulunan mutlak hataların iki diğer yöntemle karşılaştırılması.	68
Çizelge 3.18. Örnek 3.15’te $N=5$ ve $N=8$ değerlerine karşılık bulunan mutlak hataların Müntz-Legendre polinomları yöntemiyle karşılaştırılması.	70
Çizelge 3.19. Örnek 3.16’da çeşitli N değerlerine karşılık bulunan mutlak hataların iki diğer yöntemle karşılaştırılması.	72
Çizelge 3.20. Örnek 3.19’da çeşitli N seçimleriyle elde edilen çözümlerin maksimum hata bakımından Bessel kollokasyon yöntemiyle karşılaştırılması.	77
Çizelge 3.21. Örnek 3.21’in çeşitli N seçimleriyle elde edilen yaklaşık çözümlerinin L_2 ve L_∞ hataları.	89
Çizelge 3.22. Örnek 3.21’in $N=5$ ve $N=7$ seçimleriyle elde edilen çözümlerinin L_2 ve L_∞ hata bakımından iki diğer yöntemle karşılaştırılması.	89
Çizelge 3.23. Örnek 3.22’nin çeşitli N ve ε değerlerine karşılık elde edilen L_2 hatalarının Bessel kollokasyon yöntemiyle karşılaştırılması.	92
Çizelge 3.24. Örnek 3.23’ün $N=4, 5, 6, 7$ seçimleriyle bulunan çözümlerinin L_2 ve L_∞ hataları.	94
Çizelge 3.25. Örnek 3.23’ün $N=6$ ve $N=7$ seçimleriyle elde edilen çözümlerinin $t=0.5$ ve $t=1$ anlarındaki bağıl hatalarının üç farklı yöntemle karşılaştırılması.	95
Çizelge 3.26. (3.93) probleminde $N=5$ seçimiyle elde edilen gerçek hatalar için $M=7$ ve $M=8$ seçimleriyle yapılan tahminlerin bazı x noktalarındaki değerleri.	102
Çizelge 3.27. (3.19) probleminin $N=5$ seçimi ile elde edilmiş çözümlerinin $M=6$ ve $M=7$ ile bulunan hata tahminleri.	103
Çizelge 3.28. (3.94) probleminde $N=3$ seçimine karşılık gelen yaklaşık çözümlerin ve iki farklı düzeltmelerinin mutlak kalıntıları.	105

1. GİRİŞ

Herhangi bir sistemi oluşturan bileşenler arasındaki ilişkilerin matematiksel araçlar kullanılarak tarif edilmesi, matematiksel modeller aracılığıyla olur. Doğa bilimleri ve mühendisliğin yanı sıra, iktisat, sosyoloji, siyaset bilimi gibi sosyal bilimleri ilgilendiren çeşitli problemler için matematiksel modeller oluşturulmuştur. Uçları sabit sıcaklıkta tutulan bir boyutlu bir çubuğun sıcaklığının zamana göre değişimi, belli bir habitatı ve aynı avı paylaşan iki hayvan türünün nüfusunun zamana göre değişimi, belli bir piyasa durumunda tipik bir müşterinin rasyonel davranışı, matematiksel model örnekleridir.

Matematiksel modeller içinde, model bileşenlerinin zaman ya da konum gibi bağımsız değişkenlere göre değişen nicelikler olarak tanımlandığı dinamik modeller önemli bir yer tutar. Böyle durumlarda, eğer söz konusu değişim, bir parçacığın hızı, hava sıcaklığı ya da belli bir bölgeye etkiyen elektrik alanı gibi sürekli bir özellik taşıyorsa, bu değişimi ifade etmek için diferansiyel ve integral hesabın araçları kullanılır. Sonuç olarak, bizim bu çalışmada ilgileneceğimiz modeller olan diferansiyel veya integral denklemler ortaya çıkar.

Diferansiyel ve integral denklemlerin çözümlerinin hesaplanması, matematiğin temel araştırma konularından biridir. Özellikle doğrusal diferansiyel denklemlerin Lagrange'a kadar uzanan yaklaşık iki yüz elli yıllık bir teorisi vardır. Ne var ki, bu teori denklemin çözümlerinin bulunmasını çoğu durumda sağlamamaktadır. İntegral denklemler ve eşlik eden teori ise o kadar eski ve zengin değildir. Doğrusal olmayan denklemlerin çözüm yöntemlerine ilişkin bilinenler ise çok daha azdır. Özetle, bilim ve mühendislik problemlerinin matematiksel modeli olarak karşılaşılan diferansiyel ve integral denklemlerin tam çözümlerini elde etmek, hemen hemen hiçbir zaman mümkün olmaz. Öte yandan, bu modeller oluşturulurken duyulan başlıca kaygı, söz konusu modelin gerçeğe uygun olmasıdır. Bu gerçeğe uygunluk, modelin yaklaşık olarak çözülmesiyle elde edilen tahminlerin deneysel verilerle uyumlu olmasıyla ölçülür. Sonuç olarak, çözümlerin sayısal yöntemler yardımıyla yaklaşık olarak elde edilmesi tipik bir uygulamadır. Bu tür sayısal yöntemlerin geliştirilmesi, uygulamalı matematiğin başlıca araştırma konularındandır.

Sayısal yöntemlerin yaptığı şey, en genel hâliyle, sürekli fonksiyonlar cinsinden ifade edilen, dolayısıyla sonsuz bir doğaya sahip olan bir problemi sonlu bir probleme dönüştür-

mektir. Kısaca "ayrıklaştırma" olarak bilinen bu dönüştürme işlemi sırasında izlenen yol, bir sayısal yöntemi diğerinden ayıran en temel unsurdur. Örneğin, bilinen en eski sayısal yöntemlerden olan Euler yöntemi, ayrıklaştırmayı birinci mertebeden bir diferansiyel denklemi bir fark denklemi olarak görerek yapar. Zamanla bazı matematik disiplinlerinde kaydedilen ilerlemeler, bu konuda daha dolaylı ya da karmaşık yaklaşımları beraberinde getirmiştir. Bu bağlamda, özellikle Yaklaşım Teorisi'nin gelişimi, sayısal yöntemlerle ilgilenen araştırmacılara yeni olanaklar sağlamıştır. Örneğin, kapalı ve sınırlı bir aralıkta tanımlı sürekli bir fonksiyonun polinomlar aracılığıyla istenen yaklaşıklıkta temsil edilebileceğini ifade eden Weierstrass Yaklaşım Teoremi, polinomların yaklaşık çözümler olarak kullanılabilmesi için teorik bir dayanak hazırlamıştır. Böylece, yeni matematiksel buluşlar sayısal yöntemlere ilişkin literatürün zenginleşmesini sağlamaktadır.

Bu tezde ele alınacak sayısal yöntemin temelini teşkil eden Galerkin yöntemi, özgün hâliyle, bir sınır koşuluyla birlikte verilen diferansiyel denklemleri çözmek için önerilmiştir. Yöntemin anlatılması sırasında kullanılan gösterimler aşağı yukarı standart olmakla birlikte, bu konuda literatürde birkaç farklı tercih bulunmaktadır. Biz, Durán (2005) tarafından kullanılan gösterimleri benimseyeceğiz. Yöntemi kabaca ifade etmek amacıyla, yine Durán'ı takip ederek, f bilinen bir fonksiyon olmak üzere, $0 \leq x \leq 1$ aralığında verilen

$$-u''(x) + u(x) = f(x), u(0) = u(1) = 0 \quad (1.1)$$

sınır değer problemini ele alalım. Galerkin yönteminin ayrıklaştırma işlemi, test fonksiyonu (*İng. "test function"*) kavramıyla yakından ilişkilidir. Bir test fonksiyonu, tipik olarak, probleme ilişkin homojen sınır koşullarını sağlayan ve probleme göre değişen yerlerde *düzgün* bir fonksiyondur. Galerkin ayrıklaştırmasının ilk adımı, çözülmek istenen denklemi w ile gösterilen bir test fonksiyonu ile çarparak oluşan eşitliğin integralini almaktır. Yukarıda verilen denklem için bu adım,

$$\int_0^1 (-u''(x) + u(x))w(x)dx = \int_0^1 f(x)w(x)dx$$

şeklinededir. Daha sonra, soldaki integrale kısmi integrasyon uygulamak ve $w(0)=w(1)=0$ olduğunu kullanmak

$$\int_0^1 (u'(x)w'(x) + u(x)w(x))dx = \int_0^1 f(x)w(x)dx$$

eşitliğiyle sonuçlanır. Buradan çıkan sonuç şudur: u fonksiyonu (1.1) probleminin klasik bir çözümü ise, aynı zamanda her w test fonksiyonu için yukarıdaki özdeşliği sağlar. Burada önemli bir ayrıntı, bu özdeşlikte bilinmeyen fonksiyon u 'nın ikinci türevi gözükmendiğinden, çözümü yalnızca $0 \leq x \leq 1$ üzerinde sonlu birinci türeve sahip fonksiyonlar uzayında aramamızın yeterli oluşudur. Söz konusu uzay, bu problem için

$$V_H = \{w \in L_2[0, 1] : w' \in L_2[0, 1] \text{ ve } w(0) = w(1) = 0\}$$

ile tanımlıdır. Buradaki $L_2[0, 1]$ gösterimi, $[0, 1]$ aralığında karesi sonlu integrale sahip fonksiyonların uzayı anlamına gelmektedir. Böylece, (1.1) sınır değer problemi aşağıdaki probleme indirgenir:

$$\text{"Her } w \in V_H \text{ için } \int_0^1 (u'(x)w'(x) + u(x)w(x))dx = \int_0^1 f(x)w(x)dx \text{ eşitliğini} \\ \text{sağlayan bir } u \in V_H \text{ fonksiyonu bul."} \quad (1.2)$$

Bu problem (1.1) sınır değer probleminin "zayıf formu" (*İng. "weak form"*) olarak bilinir. Bunun sebebi, özgün problemde u 'nın 2'nci türeve sahip olması gereksiniminin, (1.2) probleminde daha zayıf olan bir koşulla değiştirilmiş olmasıdır. Galerkin yöntemi, (1.2) probleminde olduğu gibi, bilinmeyen fonksiyon u 'nun, test fonksiyonu w 'nin ait olduğu V_H uzayında aranmasıyla karakterize edilir. V_H uzayına genel olarak "test uzayı" (*İng. "test space"*), u 'nun ait olduğu uzaya ise "deneme uzayı" (*İng. "trial space"*) denilmektedir. Galerkin yönteminde bu iki uzay eşittir. Literatürde deneme uzayının V_H 'den farklı olduğu yöntemler de mevcuttur.

Galerkin ayrıklaştırmasının bir sonraki adımı, kullanılan yöntemin farklılaşmaya başladığı adımdır. Bu adımda, test uzayı (aynı zamanda deneme uzayı) V_H 'nin sonlu bir alt uzayı belirlenerek (1.2) problemi bu alt uzayda çözülür. Literatürde bu iş için yaygın olarak parçalı doğrusal fonksiyonlar uzayı kullanılır. Bu uzay, $[0, 1]$ uzayının belli bir parçalanışıyla birlikte düşünülmelidir. En basit ve en sık rastlanan parçalanış, aralığı N eşit parçaya bölerek elde edilir. Böylece, $[0, 1]$ aralığı, $j=0, 1, \dots, N+1$ için

$$x_j = \frac{j}{N+1}$$

olmak üzere $N+1$ tane eşit uzunlukta (x_j, x_{j+1}) aralığına bölünmüş olur. Sonuçta, (1.2) problemi

$$V_N = \{w \in C^0[a, b] : \forall j = 0, 1, \dots, N, w|_{(x_j, x_{j+1})} \text{ doğrusal ve } w(0) = w(1) = 0\}$$

uzayında çözülür. Böylece, problemi tekrar ifade edelim:

$$\text{“Her } w \in V_N \text{ için } \int_0^1 (u'(x)w'(x) + u(x)w(x))dx = \int_0^1 f(x)w(x)dx \text{ eşitliğini}$$

$$\text{sağlayan bir } u \in V_N \text{ fonksiyonu bul.”} \quad (1.3)$$

V_N uzayı V_H 'nin sonlu boyutlu bir alt uzayıdır. Tabanı ise

$$\phi_i(x_i) = 1, \phi_i(x_j) = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, N \text{ ve } j \neq i$$

koşullarını sağlayan $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ parçalı doğrusal fonksiyonlarından oluşur. Bu fonksiyonların grafikleri Şekil 1.1'de sunulmuştur. Her $w \in V_N$

$$w(x) = w_1\phi_1(x) + w_2\phi_2(x) + \dots + w_N\phi_N(x)$$

şeklinde ifade edilebildiğinden, (1.3) problemindeki denklem

$$\int_0^1 (u'(x)(w_1\phi_1 + \dots + w_N\phi_N)'(x) + u(x)(w_1\phi_1 + \dots + w_N\phi_N)(x))dx$$

$$= \int_0^1 f(x)(w_1\phi_1 + \dots + w_N\phi_N)(x)dx, \quad \forall w_1, w_2, \dots, w_N \in \mathbb{R}$$

olarak yazılabilir. $g, h \in L_2[0, 1]$ olmak üzere $\int_0^1 g(x)h(x)dx$ belirli integralinin iç çarpım özelliklerini sağladığının kullanılmasıyla, bu eşitlik

$$\langle u', w_1\phi_1' + \dots + w_N\phi_N' \rangle + \langle u, w_1\phi_1 + \dots + w_N\phi_N \rangle$$

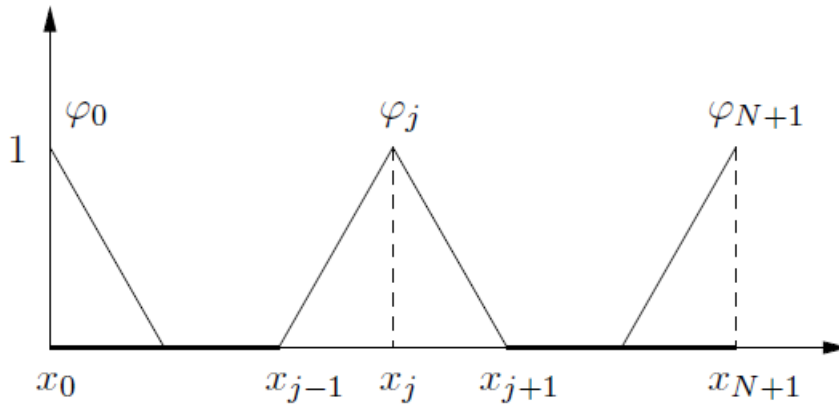
$$= \langle f, w_1\phi_1 + \dots + w_N\phi_N \rangle \quad \forall w_1, w_2, \dots, w_N \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

şeklinde yazılabilir. Her $i=1, 2, \dots, N$ için $w_i=1$ ve $w_j=0, j \neq i$, seçilmesiyle (1.4) denkleminin yalnızca ϕ_i taban fonksiyonları için sağlanmasının yeterli olduğu görülür. Daha açık bir ifadeyle

$$\langle u', \phi_i' \rangle + \langle u, \phi_i \rangle = \langle f, \phi_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.5)$$

olması yeterlidir. Öte yandan, $u \in V_N$ olduğundan, u fonksiyonu da belli $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$u_N(x) := u(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \dots + a_N\phi_N(x)$$



Şekil 1.1. V_N 'nin ϕ_i taban fonksiyonları. (Oden ve Reddy 1976)

olarak yazılabilir. u_N fonksiyonu için "deneme fonksiyonu" (İng. "trial function") ifadesi kullanılır. u_N fonksiyonu (1.5) denkleminde u 'nun yerine yazılıp iç çarpımın doğrusallığının kullanılmasıyla, $i=1, 2, \dots, N$ için

$$a_1(<\phi'_1, \phi'_i> + <\phi_1, \phi_i>) + \dots + a_N(<\phi'_N, \phi'_i> + <\phi_N, \phi_i>) = <f, \phi_i>$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece, her $i=1, 2, \dots, N$ için, $a_1, a_2, \dots, a_N$ bilinmeyenlerinin doğrusal bir denklemi elde edilmiş olur. Oluşan toplam N denklem,

$$\mathbf{W}_{i,j} = <\phi'_i, \phi'_j> + <\phi_i, \phi_j>, \mathbf{F}_{j,1} = <f, \phi_j>$$

ve

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{bmatrix}^T$$

olmak üzere, doğrusal

$$\mathbf{WA} = \mathbf{F}$$

cebirsel denklem sistemi ile ifade edilebilir. Bu sistemin, $\mathbf{A}=\mathbf{W}^{-1}\mathbf{F}$ ile çözülmesiyle $a_0, a_1, \dots, a_N$ bilinmeyenleri ve dolayısıyla (1.1) sınır değer probleminin

$$u_N(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \dots + a_N\phi_N(x)$$

yaklaşık çözümü elde edilir.

1.1. Kaynak Taraması

Yukarıda anlatılan ayrıklaştırma yönteminin kaynağına ilişkin çeşitli görüşler olmakla birlikte yöntem genellikle Rus matematikçi ve mühendis Boris Galerkin'e (1871-1945) atfedilmektedir. Yakın tarihlerde, Walther Ritz de benzer bir fikri kullanmıştır (Pont 2012).

Yöntemi Ivan Bubnov ve Georgii Petrov'la ilişkilendiren çalışmalar da mevcuttur (Mikhlin 1964). Bundan dolayı, yöntem literatürde "Galerkin yöntemi", "Ritz-Galerkin yöntemi", "Bubnov-Galerkin yöntemi", "Petrov-Galerkin yöntemi" gibi çeşitli isimlerle bilinmektedir.

Galerkin yöntemi, çok farklı sınıflara ait problemleri çözebilme becerisiyle zaman içinde büyük popülerlik kazanmıştır. Yöntem, bu durumu Courant'ın meşhur sonlu elemanlar yönteminin (Courant 1943) temel bir bileşeni olmasına da borçludur. Aslında Galerkin ayrıştırması açıklanırken yukarıda benimsenen V_N test uzayı, yöntemi sonlu elemanlar yöntemine indirgemektedir. Bununla birlikte, farklı test uzayı seçimleriyle Galerkin yöntemi sonlu elemanlar yönteminden ayrılmaktadır. Örneğin, belli bir terimde kesilmiş Fourier serilerinin kümesini test ve deneme uzayı olarak seçen çalışmalar mevcuttur (Zhu ve Sankar 2004).

Galerkin yönteminin yakınsaklık özellikleri, birçok araştırmacı tarafından çalışılmış ve bu konuda kullanışlı sonuçlara varılmıştır. Örneğin, yukarıda tek boyutlu bir bölge için tarif edilen parçalı doğrusal fonksiyonlar uzayı V_N 'nin hem daha yüksek boyutlara hem de yüksek dereceli polinomlara genellemesinin test uzayı olarak kullanıldığı durumlar, yakınsaklık özellikleri bakımından iyi bilinmektedir. Bu durumda, problemin çözüldüğü bölgenin parçalanışındaki en büyük parçanın genişliğini ifade eden ve "parçalanışın normu" olarak bilinen h parametresi (V_N için $h = \frac{b-a}{N+1}$) önemli hâle gelmektedir. Böylece, normu h 'ye eşit olan belli bir parçalanış üzerinde derecesi k olan parçalı polinomların oluşturduğu kümenin test (ve deneme) uzayı olarak kullanılması sonucu bulunan $u_{h,k}$ yaklaşık çözümü için

$$\|u_{\text{tam}} - u_{h,k}\|_{\infty} \leq Ch^k \quad (1.6)$$

eşitsizliği bilinmektedir (Fairweather 1978; Davis 1984). Burada u_{tam} problemin tam çözümü, C ise bu tam çözüme bağlı bir sabittir. Kullanılan $\|\cdot\|_{\infty}$ normu

$$\|u\|_{\infty} = \max_{x \in \Omega} |u(x)|$$

şeklinde tanımlanan maksimum normudur. (1.6) eşitsizliği, yaklaşık çözümleri iyileştirmek için parçalanışın normunu düşürmenin (bir başka deyişle parçalanışın kalitesini artırmanın) önemine işaret etmektedir.

Galerkin yöntemi, bu tezde daha yakından ilgilenileceği biçimiyle, daha geniş bir yön-

tem sınıfı olan "ağırlıklı kalıntılar yöntemi"nin (*İng. "method of weighted residuals"*) bir üyesidir. Yöntemin temel bir bileşeni, bir deneme fonksiyonunun çözülmek istenen denklemde yazılmasıyla elde edilen ifadedir. Yukarıdaki ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem özelinde, u_N deneme fonksiyonu için bu ifade

$$R[u_N(x)] := -u_N''(x) + u_N(x) - f(x)$$

şeklindedir. $R[u_N(x)]$ ifadesine u_N 'nin "kalıntı"sı (*İng. "residual"*) denilmektedir. Denklemin tam çözümü $u(x)$ 'in kalıntısı için $R[u(x)] = 0$ geçerlidir. Ağırlıklı kalıntılar yöntemi, $R[u_N(x)]$ ifadesini problemin tanımlı olduğu aralıkta ortalama 0'a eşit yapacak u_N yaklaşık çözümünü bulmaya çalışır. Daha açık bir ifadeyle, deneme uzayının bir tabanı $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ olmak üzere

$$u_N(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \dots + a_N\phi_N(x)$$

yazıldığı hatırlanırsa, ağırlıklı kalıntılar yöntemi, belli $w_1, w_2, \dots, w_N$ seçimleri için

$$\int_0^1 u_N(x)w_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

denklemlerini sağlayan $a_1, a_2, \dots, a_N$ değerlerini tespit etmeye çalışır. Literatürde ağırlıklı kalıntılar yöntemine ayrılmış çalışmalar mevcuttur (Finlayson 1972).

Galerkin yönteminin test uzayının seçimine göre kendi içinde farklılaşmasına benzer biçimde, ağırlıklı kalıntılar yöntemi de ağırlık fonksiyonlarının seçimine göre kendi içinde farklılaşır. Örneğin, δ Dirac-delta fonksiyonunu göstermek üzere, ağırlık fonksiyonlarının, önceden belirlenmiş $x_1, x_2, \dots, x_N$ noktaları için

$$w_i(x) = \delta(x - x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

şeklinde seçilmesi durumunda yöntem kollokasyon yöntemi olur. Bir başka ilginç durum, u_N 'nin kalıntısının karesinin integrali olan

$$S = \int_0^1 R^2[u_N(x)] dx$$

ifadesinin bütün $(a_1, a_2, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ üzerinde minimize edilmesiyle ortaya çıkar. Bunun için gereken

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = \int_0^1 2R[u_N(x)] \frac{\partial R[u_N(x)]}{\partial a_i} dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

denklemlerinin çözülmesi, en küçük kareler yöntemini verir. Böylece, en küçük kareler yönteminde ağırlık fonksiyonları $w_i(x) = \frac{\partial R[u_N(x)]}{\partial a_i}$ şeklinde seçilmiş olur.

Aynı zamanda bu tez çalışmasının konusunu da teşkil eden durumda ise, ağırlık fonksiyonları $w_i(x) = \frac{\partial u_N(x)}{\partial a_i} = \phi_i(x)$ şeklinde seçilir. Bir başka deyişle, yöntemin deneme uzayıyla test uzayı aynıdır. Eğer test fonksiyonları başlangıç ya da sınır koşullarını sağlıyorsa, yöntem Galerkin yöntemi olur. Biz Galerkin yönteminden farklı olarak, test fonksiyonlarından başlangıç ya da sınır koşullarını sağlama koşulunu kaldıracağız. İkinci olarak, deneme ve test uzayını

$$V_N = \{a_0 + a_1x + \dots, a_Nx^N : a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}\}$$

olarak belirleyeceğiz. Böylece, test fonksiyonları $1, x, x^2, \dots, x^N$ olur ve yaklaşık çözüm u_N 'yi bulmak için gereken denklemler

$$\int_0^1 x^i R[u_N(x)] dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde elde edilir. Tezin geri kalanı boyunca "Galerkin-tipi yöntem" şeklinde anılacak olan bu yöntem, bazı çizelgelerde "GTY" olarak kısaltılacaktır.

Galerkin-tipi yöntem, daha önce bazı kaynaklarda ele alınmış olmakla birlikte, bizim bilgimiz dahilinde, uygulamada karşılaşılan problemleri çözmek için onu kullanan çok fazla çalışma bulunmamaktadır. Bu tür çalışmalara örnek olarak, elektromanyetik radyasyon üzerine bir uygulama (Newman ve Kingsley 1991) ve yüksek mertebeden Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini bulan bir çalışma (Türkyılmazoğlu 2014) sayılabilir.

Bu tezin amacı, yukarıda açıklanan Galerkin-tipi yöntemi, uygulamada sıkça karşılaşılan çeşitli problemlere uygulayarak bu problemlerin sayısal çözümlerini elde etmektir. Böylece, önemli tarihsel geçmişe ve teorik altyapıya sahip bir yöntemin sınırlarının anlaşılmasına katkı sunulmuş olacaktır.

2. MATERYAL VE METOT

Bu çalışmanın geri kalanı, Galerkin-tipi yöntemin çeşitli problemlere uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar üzerine olacaktır. Bu bağlamda, Bölüm 3.1’de Galerkin-tipi yöntemin doğrusal diferansiyel denklemlere uygulanması ele alınacaktır. Yöntem, tekil olarak pertürbe edilmiş ikinci mertebeden sınır değer problemlerine, yüksek mertebeden genel doğrusal denklemlere, bu denklemlerden oluşan sistemlere ve iki bilinmeyenli doğrusal olmayan örnek bir probleme ayrı alt bölümler hâlinde uygulanacaktır. Fonksiyonel diferansiyel denklemlerin ele alındığı Bölüm 3.2’de benzer yol takip edilecek, sırayla multi-pantograf denkleminin, genelleştirilmiş pantograf denkleminin, bu denklemlerden oluşan sistemlerin ve doğrusal olmayan gecikmeli bir sistemin Galerkin-tipi yöntemle çözümleri incelenecektir. Yöntemin integro-diferansiyel denklemlere uygulanışına ayrılan Bölüm 3.3’te ise önce karışık tipte Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemleri ile bunlardan oluşan sistemler ele alınacak, ardından doğrusal olmayan bir modelin yaklaşık çözümleri elde edilecektir. Bu örnek uygulamalardan sonra, Galerkin-tipi yöntemin bazı eksik yönleri Bölüm 3.4’te tartışılacaktır. Bu bölümde, önce yöntemin kısmi diferansiyel denklemlere nasıl uygulanacağı açıklanıp iki örnek probleme uygulanacak, ardından herhangi bir problemin daha isabetli çözümlerini elde etmek için N parametresinin değerini arttırmaya alternatif bir yol önerilecek ve bu yol Bölüm 3.1.2’de ele alınan bir problem üzerinde uygulanacaktır. Son olarak, mevcut bir yaklaşık çözümün kalıntısı yardımıyla söz konusu çözümün hatasının nasıl tahmin edilebileceği görülecektir. Metin boyunca ele alınacak bütün uygulama sonuçları, MATLAB programlama dili kullanılarak elde edilmiştir.

Galerkin-tipi yöntemin çeşitli problemlere uygulanışının açıklanması sırasında, gerek okuyucuların yöntemi herhangi bir programlama dilinde oluşturarak kendileri de deneyebilmeleri, gerekse anlatımı sadeleştirmek amacıyla, mümkün olan durumlarda çeşitli matrislerden yararlanılmıştır. Bunlardan bazıları,

$$\mathbf{X}_N(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^N \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)}$$

sembolik yardımcı matrisi, yaklaşık çözümdeki bilinmeyen katsayılardan oluşan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}^T$$

bilinmeyenler matrisi ve yaklaşık çözümlerin türevlerini hesaplamak için kullanılan

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

yardımcı matrisidir. $N+1$ uzunluğunda $\mathbf{X}_N(x)$ sembolik matrisi kısaca $\mathbf{X}$ ile gösterilecektir. Benzer şekilde, bazı örnek problemlerde bağımsız değişken t zaman değişkeni olacak, bunlarda da gösterim kolaylığı sağlaması için $\mathbf{T} := \mathbf{X}_N(t)$ alınacaktır. Bunların dışında gerekli olacak matrisler, gerektikleri yerde tanımlanacaktır.

Elde edilen sayısal sonuçların değerlendirilmesinde birincil ölçüt, y_{tam} ve y_N problemin tam ve yaklaşık çözümleri olmak üzere

$$|e_N(x)| := |y_{\text{tam}}(x) - y_N(x)|$$

şeklinde tanımlı mutlak hata fonksiyonudur. Bunun dışında, bazı durumlarda, problemin tanımlı olduğu $[a, b]$ aralığında

$$\|e_N(x)\|_{\infty} := \max_{a \leq x \leq b} |y_{\text{tam}}(x) - y_N(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |e_N(x)|$$

olarak tanımlı maksimum hata ya da

$$\|e_N(x)\|_2 := \left(\int_a^b (y_{\text{tam}}(x) - y_N(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

ile tanımlı L_2 -hata veya bu iki hata türünün daha yüksek boyutlara genellemesi kullanılacaktır. Tam çözümün bilinmediği durumlarda ise, yaklaşık çözümün kalıntısı $R[y_N(x)]$ kullanılacaktır. Ayrıca, mümkün olduğu durumlarda, elde edilen çözümlerin mutlak ya da maksimum hataları çizelgeler kullanılarak diğer sayısal yöntemlerle karşılaştırılacaktır.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölüm, Galerkin-tipi yöntemin çeşitli problemlere uygulanmasıyla elde edilen sonuçlara ayrılmıştır. Ele alınan denklemler, literatürde sıklıkla karşılaşılan denklem türleri arasından seçilmiş, bu türlerin her birinden ele alınan problemler ise, Galerkin-tipi yöntemin kullanılabilirliğine ilişkin belirgin bir fikir oluşturacak şekilde tespit edilmiştir. Bu bağlamda, ilk olarak Galerkin-tipi yöntemin adi diferansiyel denklemlere ve bunların sistemlerine uygulanışı ele alınacak, bu sırada doğrusal olmayan bir sistem örneği de incelenecektir. Ardından, gecikmeli diferansiyel denklemler ve sistemleri, son olarak ise integro-diferansiyel denklemler ele alınacaktır. Galerkin-tipi yöntemin ele alınan her bir problem türü için tarif edilmesi, problemin genel durumu için, isteyen okuyucunun o türden farklı örnek problemlere yöntemi uygulamasına olanak tanıyacak şekilde yapılacaktır. Bu durum, metnin devamında daha iyi anlaşılacaktır.

Bu bölümün geri kalanında elde edilecek sonuçların bir kısmı, ayrı çalışmalar olarak yayınlanmıştır. Bu çalışmalar, Galerkin-tipi yöntemin tekillik içeren yüksek mertebeli Fredholm integro-diferansiyel denklemlerine (Yüzbaşı ve Karaçayır 2016a), birinci mertebeden doğrusal olmayan Riccati denklemine (Yüzbaşı ve Karaçayır 2016b), tekil olarak pertürbe edilmiş ikinci mertebeden başlangıç değer problemlerine (Yüzbaşı ve Karaçayır 2018f), aralarında av-avcı ilişkisi bulunan iki hayvan türünün nüfuslarının zamana göre değişimini inceleyen Lotka-Volterra denklemlerine (Yüzbaşı ve Karaçayır 2017a) ve bu denklemlerin gecikmeli versiyonuna (Yüzbaşı ve Karaçayır 2018e), pantograf-tipi gecikmeye sahip yüksek mertebeden Volterra integro-diferansiyel denklemlerine (Yüzbaşı ve Karaçayır 2018d), multi-pantograf denklemlerine (Yüzbaşı ve Karaçayır 2018a) ve CD4 hücrelerinin HIV ile enfekte olmasına ilişkin gecikmeli modele (Yüzbaşı ve Karaçayır 2018b) uygulanmasından ibarettir. Ayrıca, yöntem kısmi diferansiyel denklemler için Bölüm 3.4.1’de ele alınacağı gibi geliştirilerek bir boyutlu (Yüzbaşı ve Karaçayır 2018c) ve iki boyutlu (Yüzbaşı ve Karaçayır 2017b) telgraf denklemlerine uygulanmıştır.

3.1. Galerkin-tipi Yöntemin Adi Diferansiyel Denklemlere Uygulanışı

Adi diferansiyel denklemler, bir sistemdeki bileşenlerin tek bir bağımsız değişkene bağlı olduğu durumlarda ortaya çıkar. Bu bağımsız değişken, genellikle belli bir başlan-

gıç anından itibaren geçen zaman ya da bilinen bir referans noktasına belli bir yönde olan uzaklığı ölçen konum değişkenidir. Mertebesi n olan bir adi diferansiyel denklem, x bağımsız değişken, $y(x)$ ise bilinmeyen fonksiyon olmak üzere, genel olarak

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

şeklinde gösterilebilir. Bilinmeyen fonksiyon sayısının birden çok olması durumunda ise, bir adi diferansiyel denklem sistemi oluşur.

Adi diferansiyel denklemlerin ortaya çıkışı, Newton ve Leibniz'in çalışmalarıyla diferansiyel ve integral hesabın gelişmeye başladığı 17'nci yüzyılın son çeyreğine rastlar. Diferansiyel denklemlerin ilk örnekleri, bu dönemde klasik mekaniğe ilişkin problem ve sonuçları ifade etmenin bir aracı olarak ortaya çıkmıştır. Örneğin, belli bir referans noktasına göre t anındaki konumu $x(t)$ ile verilen bir cismin m kütlesi ile cisme hareket yönünde etki eden $F(x(t))$ kuvveti arasındaki ilişkiyi veren Newton'un ikinci hareket yasası,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} - F(x(t)) = 0$$

şeklindeki ikinci mertebeden diferansiyel denklem ile ifade edilir. Herhangi bir noktadan bırakılan bir parçacığın bitiş noktasına aynı sürede ulaştığı eğriyi (*İng. isochrone curve*) ya da bir parçacığın bilinen iki nokta arasında yalnızca yerçekimi etkisi altında en kısa sürede seyahat edeceği eğriyi (*İng. brachistochrone curve*) bulma problemleri de bu dönemde ilgi gören klasik mekanik problemleri arasındadır. Bu iki problem, başka çözümlerinin yanı sıra diferansiyel denklemler kullanılarak çözülen ilk problemlerden olma özelliğine sahiptir. Adi diferansiyel denklemlerin 1675-1775 dönemindeki tarihsel gelişimiyle ilgili daha ayrıntılı bilgi Sasser (1992)'de bulunabilir.

İleriki yıllarla birlikte diferansiyel ve integral hesabın yaygınlaşması, diferansiyel denklemlerin diğer bilim dallarında kullanılması sonucunu doğurmuştur. Böylece ortaya çıkan diferansiyel denklemler, radyoaktif bozunmaya uğrayan bir cismin kütlesinin zaman içindeki değişimi probleminde olduğu gibi doğrusal ya da Verhulst'un

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^2$$

ile verilen lojistik nüfus modelinde (Verhulst 1838) olduğu gibi doğrusal olmayan sınıfa ait olabilirler. Hangi sınıftan olursa olsun, adi diferansiyel denklemlerle modellen prob-

lemeler hemen hemen her zaman tam çözüme izin vermeyecek kadar karmaşıktırlar. Bu durum, sayısal yöntemlerin konuya dahil olmasını zorunlu kılmaktadır.

Bu kısımda, Galerkin-tipi yöntem tekil olarak pertürbe edilmiş sınır değer problemlerine, doğrusal adi diferansiyel denklem sistemlerine ve Lotka-Volterra nüfus modeline uygulanacaktır.

3.1.1. Tekil olarak pertürbe edilmiş denklemlerin sayısal çözümleri

Bir olguyu modelleme işleminin çok küçük (ya da büyük) bir parametre içeren diferansiyel denklemleri incelemeyi gerektirmesi, bilim ve mühendislikte sıklıkla karşılaşılan bir durumdur. Bu tür denklemlerdeki temel sorun, söz konusu parametre sıfır (ya da sonsuz) değerine yaklaşırken tam çözümün sergilediği davranışın ciddi biçimde farklılaşmasıdır. "Tekil pertürbasyon" (*İng. "singular perturbation"*) olarak bilinen bu durum, herhangi bir sayısal yöntemle isabetli yaklaşık çözümler elde etmeyi zorlaştıran bir unsurdur (Zhang 2002).

O'Malley (1997)'den alınan şu örnek, tekil pertürbasyon kavramına ilişkin belli bir içgörü kazandırması açısından faydalıdır: $\varepsilon \neq 0$ olmak üzere, $x^2 + \varepsilon x - 1 = 0$ cebirsel denkleminin çözümleri olan $x_1 = \frac{-\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2}$ ve $x_2 = \frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2}$ sayıları, ε parametresi 0'a giderken -1 ve 1 sayılarına yaklaşmaktadır. Bu sayılar, orijinal denklemde $\varepsilon = 0$ yazınca oluşan $x^2 - 1 = 0$ denkleminin çözümleridir. Bu durum "düzenli pertürbasyon" (*İng. "regular perturbation"*) olarak anılmaktadır. Öte yandan, ε parametresi ikinci dereceden terimde bulunduğu farklı bir durum ortaya çıkar. $\varepsilon x^2 + x - 1 = 0$ denkleminin çözümleri $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2\varepsilon}$ ve $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2\varepsilon}$ olarak bulunur. Bu iki sayı, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken sırasıyla 1 'e ve $-\infty$ 'a yaklaşmaktadır. Bu sayılardan yalnızca biri denklemde $\varepsilon = 0$ yazınca oluşan $x - 1 = 0$ denkleminin çözümüdür. Bu durum tekil pertürbasyona örnek teşkil eder.

Bu bölümde, gerçel bir $[0, b]$ aralığında incelenen aşağıdaki probleme Galerkin-tipi yöntem uygulanacaktır:

$$\varepsilon y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad y(0) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (3.1)$$

Problemde ε pertürbasyon parametresi ikinci mertebeden terimdedir, dolayısıyla denklem tekil pertürbasyona örnektir. Bu ikinci mertebeden doğrusal denklemi tarif etmek için "tekil olarak pertürbe edilmiş" (*İng. "singularly perturbed"*) ifadesi kullanılır. İki adet

sınır koşuluyla birlikte verilen (3.1) problemi, düşük viskoziteye sahip sıvıların hareketini ve insan göz bebeğinin ışığa karşı refleksini modellemek için kullanılır.

Galerkin-tipi yöntemi tekil olarak pertürbe edilmiş denkleme uygulamanın ilk adımı, N parametresi için bir değer seçmek ve bu değere karşılık

$$y_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k = \mathbf{X}\mathbf{A},$$

deneme fonksiyonunu oluşturmaktır. Deneme fonksiyonunun birinci ve ikinci türevleri için

$$y'_N(x) = \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{A}, \quad y''_N(x) = \mathbf{X}\mathbf{B}^2\mathbf{A}.$$

geçerlidir. $y_N(x)$, $y'_N(x)$ ve $y''_N(x)$ ifadelerinin (3.1) denkleminde yazılmasıyla

$$\varepsilon \mathbf{X}\mathbf{B}^2\mathbf{A} + p(x)\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{A} + q(x)\mathbf{X}\mathbf{A} = f(x),$$

ya da $\mathbf{A}$ matrisinin ayrılmasıyla

$$(\varepsilon \mathbf{X}\mathbf{B}^2 + p(x)\mathbf{X}\mathbf{B} + q(x)\mathbf{X}) \mathbf{A} = f(x)$$

eşitliği elde edilir. $\mathbf{A}$ ile çarpım durumunda olan kısmın $\mathbf{G}(x)$ ile gösterilmesiyle kısaca

$$\mathbf{G}(x)\mathbf{A} = f(x), \quad (3.2)$$

yazılabilir. Buradaki $\mathbf{G}(x)$, girdileri x 'in fonksiyonları olan $N+1$ uzunluğunda bir satır matrisidir. Şimdi, sınır koşullarına karşılık gelen doğrusal denklemler oluşturulur. y_N deneme fonksiyonunun $y(0)=\alpha$ ve $y(b)=\beta$ sınır koşullarını sağlaması gerektiğinden

$$y_N(0) = a_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \alpha,$$

$$y_N(b) = \sum_{k=0}^N a_k b^k = \begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & \dots & b^N \end{bmatrix} \mathbf{A} = \beta,$$

yazılabilir. $a_0, a_1, \dots, a_N$ bilinmeyenleri için iki doğrusal denklem bu şekilde elde edildiğinden, (3.2) eşitliğini

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (3.3)$$

doğrusal denklem sistemine dönüştürmek için $N-1$ yeni denkleme ihtiyaç kalmıştır. Bu denklemler (3.2) eşitliğine $x^2, x^3, \dots, x^N$ test fonksiyonlarıyla iç çarpım uygulanarak elde edilir. Böylece, $i=3, 4, \dots, N+1$ ve $j=1, 2, \dots, N+1$ için

$$\mathbf{W}_{i,j} = \langle \mathbf{G}(x)_{1,j}, x^{i-1} \rangle, \quad \mathbf{F}_{i,1} = \langle f(x), x^{i-1} \rangle$$

olur. Bu durumda, $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{G}$ matrisleri açık olarak

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & b & \dots & b^N \\ \langle x^2, \mathbf{G}(x)_{1,1} \rangle & \langle x^2, \mathbf{G}(x)_{1,2} \rangle & \dots & \langle x^2, \mathbf{G}(x)_{1,N+1} \rangle \\ \langle x^3, \mathbf{G}(x)_{1,1} \rangle & \langle x^3, \mathbf{G}(x)_{1,2} \rangle & \dots & \langle x^3, \mathbf{G}(x)_{1,N+1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle x^N, \mathbf{G}(x)_{1,1} \rangle & \langle x^N, \mathbf{G}(x)_{1,2} \rangle & \dots & \langle x^N, \mathbf{G}(x)_{1,N+1} \rangle \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \langle x^2, f(x) \rangle & \langle x^3, f(x) \rangle & \dots & \langle x^N, f(x) \rangle \end{bmatrix}^T$$

şeklinde olur. (3.3) doğrusal sisteminin çözülmesi, $a_0, a_1, \dots, a_N$ bilinmeyenlerini ve böylece

$$y_N(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N$$

yaklaşık çözümünü verir.

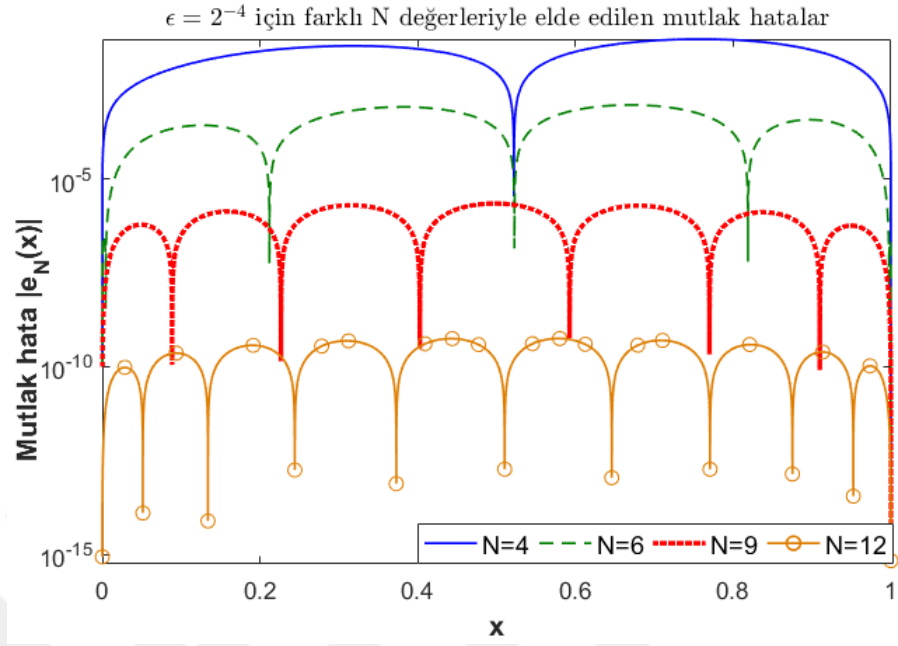
Şimdi, Galerkin-tipi yöntem iki örnek probleme uygulanacaktır.

Örnek 3.1. Ele alınacak ilk örnek, ilk olarak Body (2000) tarafından incelenen ve daha sonra Yüzbaşı (2015a) tarafından sayısal çözümleri bulunan aşağıdaki sabit katsayılı denklemdir:

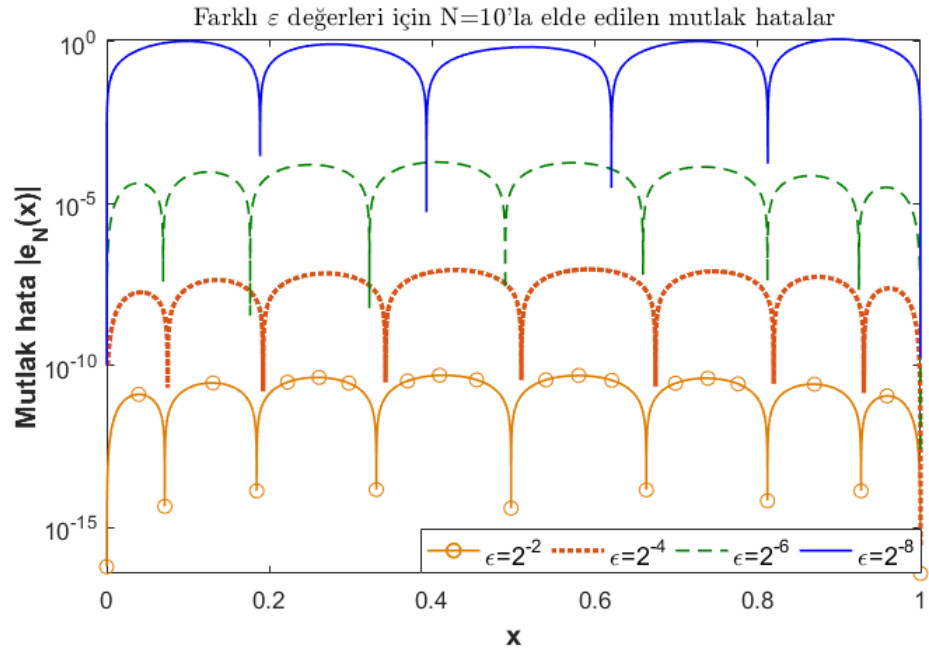
$$\varepsilon y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 0, y(1) = 1. \quad (3.4)$$

Problemin tam çözümü $y_{\text{tam}}(x) = \frac{\sin(x/\sqrt{\varepsilon})}{\sin(1/\sqrt{\varepsilon})}$ fonksiyonudur. Bu probleme Galerkin-tipi yöntemin pertürbasyon parametresinin $\varepsilon=2^{-4}$ değeri için çeşitli N seçimleriyle uygulanması sonucunda elde edilen mutlak hatalar sırayla Şekil 3.1'de grafik olarak sunulmuştur. N değerini arttırmanın çözümleri belirgin miktarda iyileştirdiği görülmektedir.

(3.4) problemini pertürbasyon parametresinin farklı değerleriyle çözmenin yaklaşık çözümleri nasıl etkilediğini görmek amacıyla, sabit N seçimine karşılık farklı ε değerleri için problemi çözmek ve mutlak hataları karşılaştırmak iyi bir fikirdir. Bu amaçla, $N=10$ seçimiyle dört farklı ε değerine karşılık elde edilen çözümlerin mutlak hataları Şekil 3.2'de gösterilmiştir. Grafikten, daha küçük olan ε parametre değerleri için elde edilen mutlak hataların daha büyük olduğu anlaşılmaktadır. Bu durum, bu bölümün başında yapılan, tekil olarak pertürbe edilmiş denklemlerde genel olarak pertürbasyon parametresinin küçük değerleri için isabetli sayısal çözümler elde etmenin zorluğuna ilişkin yoruma uygundur.



Şekil 3.1. Örnek 3.1’de $\epsilon=2^{-4}$ değeri için farklı N seçimlerine karşılık elde edilen mutlak hatalar.



Şekil 3.2. Örnek 3.1’de $N=10$ seçimi için farklı ϵ değerlerine karşılık elde edilen mutlak hatalar.

Çizelge 3.1. Örnek 3.1’de farklı ε ve N değerleriyle elde edilen L_∞ -hataların Bessel kollokasyon yöntemiyle karşılaştırılması.

ϵ	Bessel kollokasyon yöntemi			Galerkin-tipi yöntem		
	$N = 7$	$N = 10$	$N = 14$	$N = 7$	$N = 10$	$N = 14$
2^{-2}	$6.141E - 5$	$2.574E - 8$	$3.113E - 13$	$6.895E - 7$	$4.937E - 11$	$1.138E - 11$
2^{-4}	$2.693E - 2$	$2.832E - 5$	$6.460E - 9$	$2.130E - 4$	$9.168E - 8$	$3.041E - 10$
2^{-6}	$5.148E - 1$	$1.171E - 1$	$3.126E - 4$	$3.850E - 2$	$1.870E - 4$	$1.564E - 6$

Galerkin-tipi yöntemi diğer bir sayısal yöntem olan Bessel kollokasyon yöntemiyle (Yüzbaşı 2015a) karşılaştırmak amacıyla, farklı ε ve N değerleriyle elde edilen $\|e_N\|_\infty$ maksimum hata kullanılmıştır. Söz konusu hata değerleri Çizelge 3.1’de verilmiştir. Çizelgedeki değerlerden, bu problem için Galerkin-tipi yöntemin Bessel kollokasyon yönteminden daha isabetli sonuçlar verdiği anlaşılmaktadır.

Örnek 3.2. İkinci örnek, daha önce Kadalbajoo ve Patidar (2006) ve Yüzbaşı (2015a) tarafından sayısal olarak çözülen aşağıdaki problemidir:

$$-\varepsilon y''(x) + \frac{1}{x+1}y'(x) + \frac{1}{x+2}y(x) = g(x), \quad y(0) = 1 + 2^{-1/\varepsilon}, \quad y(1) = 2 + e. \quad (3.5)$$

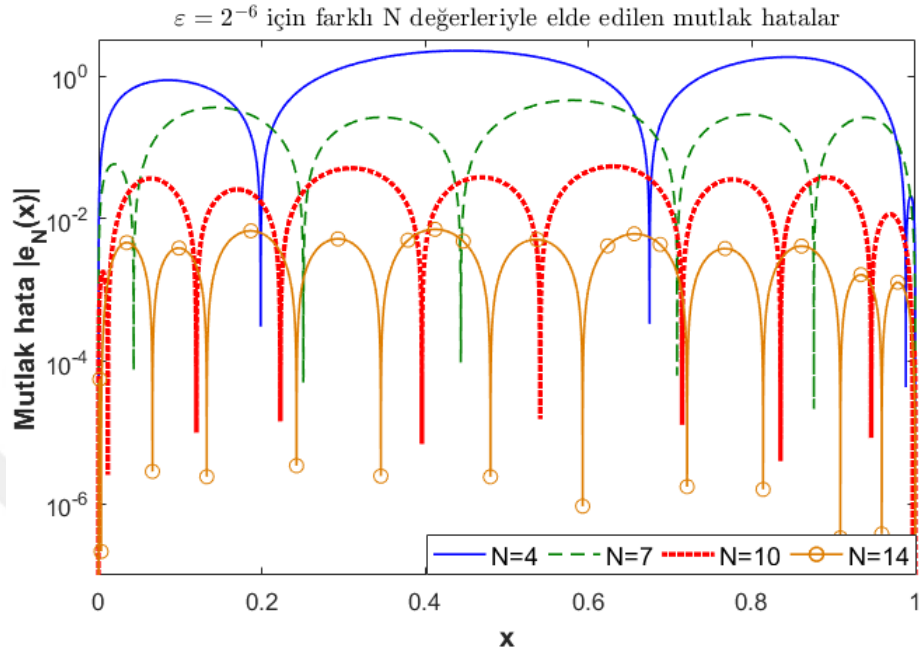
Problemde $g(x)$ olarak gözüken fonksiyon açık olarak

$$g(x) = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \varepsilon \right) e^x + \frac{2^{-1/\varepsilon}(x+1)^{1+1/\varepsilon}}{x+2}$$

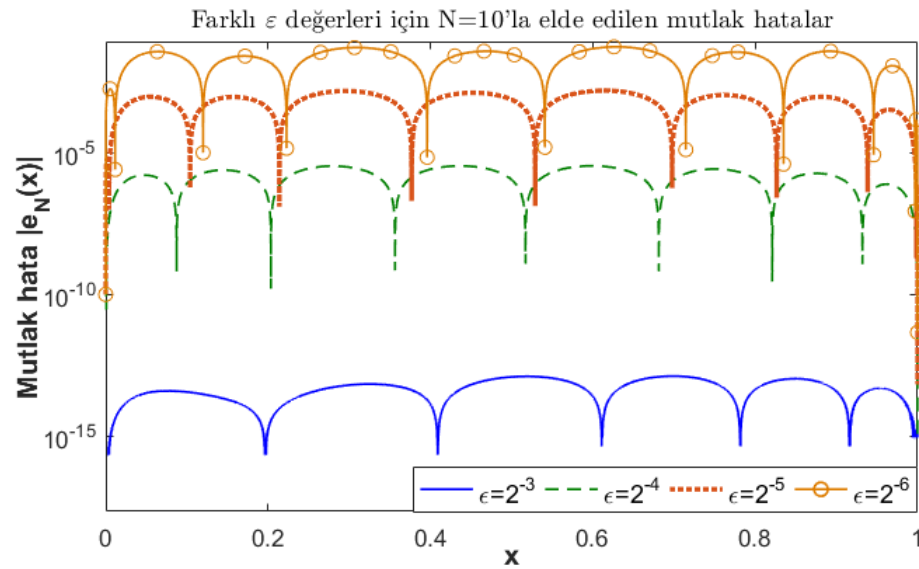
şeklindedir.

Problem (3.5)’in tam çözümü $y_{\text{tam}}(x) = e^x + 2^{-1/\varepsilon}(x+1)^{1+1/\varepsilon}$ fonksiyonudur. Probleme farklı ε parametre değerleri ve çeşitli N seçimleriyle Galerkin-tipi yöntemin uygulanması sonucunda elde edilen mutlak hataların grafikleri Şekil 3.3 ve 3.4’te gösterilmiştir. Önceki örnek problemde olduğu gibi, daha büyük ε değerleri için ve daha büyük N seçimleriyle elde edilen yaklaşık çözümlerin daha isabetli olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca, elde edilen yaklaşık çözümler Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı 2015a) ve Kadalbajoo ve Patidar (2006)’nın sonlu fark yöntemi ile Çizelge 3.2’de karşılaştırılmıştır. Çizelgeden Galerkin-tipi yöntemin performansının bu problem için Bessel kollokasyon yöntemine kıyasla daha

iyi olduğu sonucuna ulaşılabilir. Karşılaştırma yapılan sonlu fark yöntemine ilişkin n parametresi, söz konusu yöntemin uygulanması sırasında göz önünde bulundurulmuş aralığın (mevcut problemde $[0,1]$) kaç parçaya bölüneceğini göstermektedir.



Şekil 3.3. Örnek 3.2’de $\varepsilon=2^{-6}$ değeri için farklı N seçimlerine karşılık elde edilen mutlak hatalar.



Şekil 3.4. Örnek 3.2’de $N=10$ seçimi için farklı ε değerlerine karşılık elde edilen mutlak hatalar.

Çizelge 3.2. Örnek 3.2’de farklı ε ve N değerleriyle elde edilen L_∞ -hataların Bessel kollokasyon ve sonlu fark yöntemleriyle karşılaştırılması.

ϵ	Bessel kollokasyon		Galerkin-tipi yöntem		Sonlu fark	
	$N = 5$	$N = 10$	$N = 5$	$N = 10$	$n = 64$	$n = 128$
2^{-2}	6.272E - 5	1.824E - 11	4.365E - 6	1.210E - 13	7.8E - 5	2.0E - 5
2^{-3}	1.858E - 2	1.434E - 11	2.391E - 3	1.323E - 13	3.0E - 4	7.6E - 5
2^{-4}	1.794E - 1	4.495E - 4	5.807E - 2	3.455E - 6	1.1E - 3	2.7E - 4
2^{-5}	5.314E - 1	5.235E - 2	4.029E - 1	1.566E - 3	4.0E - 3	1.0E - 3
2^{-6}	9.319E - 1	3.410E - 1	1.442E - 0	5.465E - 2	1.6E - 2	3.9E - 3
2^{-7}	1.283E - 0	7.571E - 1	3.779E - 0	4.390E - 1	7.0E - 2	1.6E - 2

3.1.2. Doğrusal adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri

Bu alt bölümde, Galerkin-tipi yöntemin doğrusal adi diferansiyel denklemlere uygulanışı ele alınacaktır. Bu tür denklemler, bir önceki bölümün konusu olan tekil olarak per-türbe edilmiş ikinci mertebeden denklemleri de kapsayan daha genel bir sınıfı teşkil eder. Ayrıca, yöntemin doğrusal denklemlere nasıl uygulandığını görmek, bu denklemlerden oluşan sistemlere uygulanışı için bir ön hazırlık olması bakımından faydalı olacaktır.

m ’inci mertebeden bir doğrusal adi diferansiyel denklem, en genel şekilde

$$\sum_{k=0}^m P_k(x)y^{(k)}(x) = f(x) \quad (3.6)$$

olarak yazılabilir. Burada f ve $k=0, 1, \dots, m$ için P_k bilinen fonksiyonlardır. Ayrıca, her zamanki gibi $y^{(0)}(x)=y(x)$ kullanılmıştır. Bu bölümde, (3.6) denklemi

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j}y^{(j)}(a) + b_{i,j}y^{(j)}(b) = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.7)$$

karışık koşulları ile ele alınacaktır. i indisi koşulları numaralandırmak için kullanılmak üzere, her $i=1, 2, \dots, m$ ve $j=0, 1, \dots, m-1$ için $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ ve γ_i bilinen sabitlerdir. (3.6) denklemi (3.7) karışık koşulları altında, sonlu bir $a \leq x \leq b$ aralığında ele alınacak ve bu başlangıç değer problemi kısaca Problem (3.6)-(3.7) olarak anılacaktır.

Galerkin-tipi yöntemi Problem (3.6)-(3.7)'ye uygulamanın ilk adımı, bir N seçimi için

$$y_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k = \mathbf{X}\mathbf{A}$$

deneme fonksiyonunu oluşturmaktır. y_N 'nin türevleri için

$$y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}\mathbf{B}^k \mathbf{A}, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

geçerlidir. y_N 'nin ve türevlerinin matris ifadelerinin (3.6) denkleminde yazılmasıyla

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}\mathbf{B}^k \mathbf{A} = \left(\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}\mathbf{B}^k \right) \mathbf{A} = f(x)$$

matris denklemi elde edilir. Bu ise

$$\mathbf{G}(x) = \sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}\mathbf{B}^k$$

tanımlamasıyla

$$\mathbf{G}(x) \mathbf{A} = f(x) \quad (3.8)$$

biçiminde ifade edilebilir. $\mathbf{G}(x)$, girdileri x 'in fonksiyonları olan $N+1$ uzunluğunda bir satır matrisidir. y_N deneme fonksiyonunun (3.7) karışık koşullarını sağlaması ise matris çarpımı olarak

$$\left(\sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j} \mathbf{X}(a) + b_{i,j} \mathbf{X}(b)) \mathbf{B}^j \right) \mathbf{A} := \mathbf{C}_i \mathbf{A} = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

eşitliğiyle ifade edilir. Burada, $\mathbf{C}_i$ ifadesi $N+1$ uzunluğunda bir satır matrisidir ve i 'inci karışık koşula karşılık gelmektedir. Toplam m adet karışık koşulun tamamının matris ifadesi, $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_m$ 'nin alt alta eklenmesiyle

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_m \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix} \quad \text{ya da } \mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma}$$

şeklinde oluşur. $a_0, a_1, \dots, a_N$ bilinmeyenlerini tespit etmek için gereken $N+1$ doğrusal denklemin m tanesi karışık koşullar tarafından sağlandığına göre, geri kalan $N+1-m$ denklem (3.8) matris eşitliğine $x^m, x^{m+1}, \dots, x^N$ test fonksiyonlarıyla iç çarpım uygulanmasıyla elde edilir. Böylece, en son elde edilecek $\mathbf{W}\mathbf{A}=\mathbf{F}$ doğrusal sistemindeki $\mathbf{W}$

ve $\mathbf{F}$ matrislerinin ilk m satırları, karışık koşullara karşılık gelen $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{\Gamma}$ matrisleri ile doldurulur. $m+1, m+2, \dots, N+1$ 'inci satırlarındaki girdiler ise, $i=m, m+1, \dots, N$ ve $j=1, 2, \dots, N+1$ için

$$\mathbf{W}_{i+1,j} = \langle x^i, \mathbf{G}(x)_{1,j} \rangle, \mathbf{F}_{i+1,1} = \langle x^i, f(x) \rangle$$

ile hesaplanır. Böylece, $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{F}$ matrisleri açık olarak

$$\left[\begin{array}{cccc} & & & \mathbf{C} \\ & \langle x^m, \mathbf{G}(x)_{1,1} \rangle & \langle x^m, \mathbf{G}(x)_{1,2} \rangle & \dots & \langle x^m, \mathbf{G}(x)_{1,N+1} \rangle \\ & \langle x^{m+1}, \mathbf{G}(x)_{1,1} \rangle & \langle x^{m+1}, \mathbf{G}(x)_{1,2} \rangle & \dots & \langle x^{m+1}, \mathbf{G}(x)_{1,N+1} \rangle \\ & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ & \langle x^N, \mathbf{G}(x)_{1,1} \rangle & \langle x^N, \mathbf{G}(x)_{1,2} \rangle & \dots & \langle x^N, \mathbf{G}(x)_{1,N+1} \rangle \\ \mathbf{F} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{\Gamma}^T & \langle x^m, f(x) \rangle & \langle x^{m+1}, f(x) \rangle & \dots & \langle x^N, f(x) \rangle \end{array} \right]^T \end{array} \right],$$

şeklinde oluşturulur. $\mathbf{WA}=\mathbf{F}$ doğrusal sisteminin çözülmesiyle $a_0, a_1, \dots, a_N$ bilinmeyenleri ve böylece

$$y_N(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N$$

yaklaşık çözümü bulunur.

Şimdi, Galerkin-tipi yöntem bir örnek probleme uygulanacaktır.

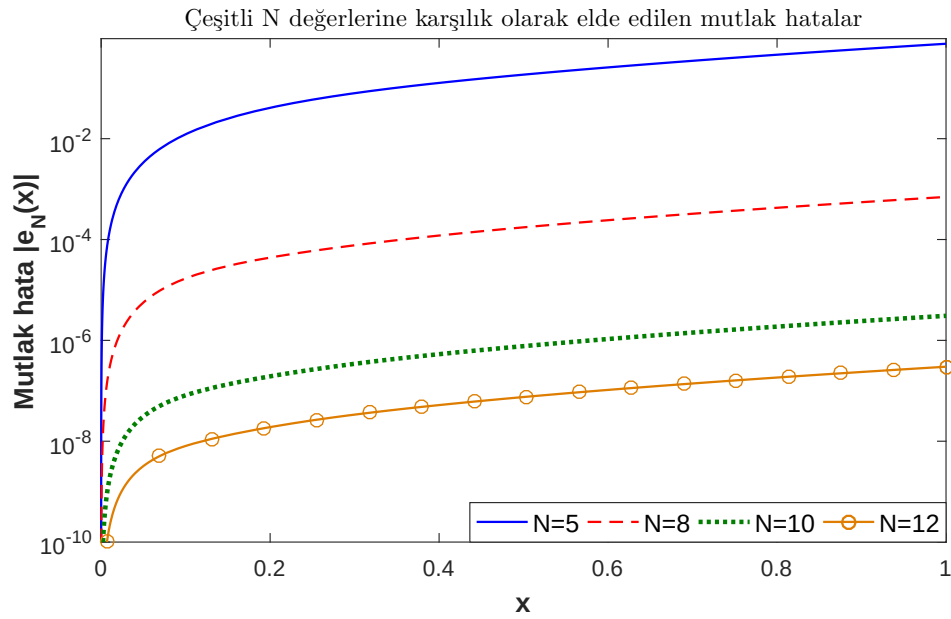
Örnek 3.3. Ele alınacak örnek aşağıdaki ikinci mertebeden başlangıç değer problemidir:

$$(x+1)y''(x) - (2x+3)y'(x) + (x+2)y(x) = e^{2x}(x+1)^2 - 2e^x, y(0) = 2, y'(0) = 5.$$

Problemin tam çözümü $y_{\text{tam}}(x) = (2x+2)e^x + xe^{2x}$ fonksiyonudur. Probleme Galerkin-tipi yöntemi çeşitli N seçimleriyle uygulamak, mutlak hatalarının grafikleri Şekil 3.5'te sunulan yaklaşık çözümleri vermiştir. Tekil olarak pertürbe edilmiş denklemde olduğu gibi, N değeri arttıkça hatanın azaldığı görülmektedir.

3.1.3. Doğrusal adi diferansiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümleri

Adi diferansiyel denklem sistemleri, birden çok sayıda bilinmeyen fonksiyonun tek bir bağımsız değişkene göre değişiminin ele alındığı problemlerdir. Bu tür sistemlerde, bilinmeyen fonksiyonların birbirleriyle ya da kendi aralarında gerçekleşen etkileşimler,



Şekil 3.5. Örnek 3.3 için çeşitli N seçimleriyle elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının grafikleri.

tipik olarak doğrusal olmayan terimlerle sonuçlanırlar. Böyle etkileşimlerin olmadığı durumlarda ortaya doğrusal adi diferansiyel denklem sistemleri çıkar. Kütle-yay sistemleri (Roberts, Jr. 2010), ticari ürün fiyatlarını tahmin etme üzerine uygulamalar (Lascsáková 2016) ve gölet kirliliği üzerine bir model (Oghonyon vd. 2015), adi diferansiyel denklem sistemlerinin ortaya çıktığı uygulamalardan bazılarıdır.

Bu alt bölümde, gerçel bir $a \leq x \leq b$ aralığında

$$\sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k P_{i,j}^n(x) y_j^{(n)}(x) = g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.9)$$

şeklinde verilen doğrusal denklem sistemi

$$\sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j}^n y_n^{(j)}(a) + b_{i,j}^n y_n^{(j)}(b)) = \lambda_{n,i}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad n = 1, 2, \dots, k. \quad (3.10)$$

karışık koşulları altında ele alınacaktır. $P_{i,j}$ ve g_i fonksiyonları $[a, b]$ aralığında bilinen tek değişkenli sürekli fonksiyonlar; $a_{i,j}^n, b_{i,j}^n$ ve $\lambda_{n,i}$ ise bilinen sabitlerdir.

Galerkin-tipi yöntemin tarifine, toplam k tane bilinmeyen fonksiyon için

$$y_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^N a_{i,n} x^n, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

deneme fonksiyonlarının tanımlanmasıyla başlanabilir. Deneme fonksiyonlarının önceki örnekte olduğu gibi matris çarpımı olarak yazılması için, her bir test fonksiyonuna karşılık gelen bilinmeyen katsayılar

$$\mathbf{A}_i = [a_{i,0} \ a_{i,1} \ \dots \ a_{i,N}]^T, \ i = 1, 2, \dots, k$$

şeklinde sütun matrislerinde toplanır. Böylece, deneme fonksiyonları ve türevleri için

$$y_{i,N}(x) = \mathbf{X}\mathbf{A}_i, \ y_{i,N}^{(n)}(x) = \mathbf{X}\mathbf{B}^n\mathbf{A}_i, \ n = 1, 2, \dots, m, \ i = 1, 2, \dots, k$$

geçerli olur. Deneme fonksiyonlarına ilişkin bu ifadelerin (3.9) denkleminde yerine konulmasıyla

$$\sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k P_{i,j}^n(x) \mathbf{X}\mathbf{B}^n \mathbf{A}_j = g_i(x), \ i = 1, 2, \dots, k$$

elde edilir. Bu eşitlik, aynı bilinmeyen fonksiyon y_j 'ye karşılık gelen terimler bir arada olacak şekilde yeniden gruplama yoluyla $i=1, 2, \dots, k$ için

$$\sum_{j=1}^k \left(\sum_{n=0}^m P_{i,j}^n(x) \mathbf{X}\mathbf{B}^n \right) \mathbf{A}_j := \mathbf{F}_{i,1}\mathbf{A}_1 + \mathbf{F}_{i,2}\mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{F}_{i,k}\mathbf{A}_k = g_i(x) \quad (3.11)$$

olarak yazılabilir. Burada $j=1, 2, \dots, k$ için $\mathbf{F}_{i,j}$ 'lerin her biri, girdileri x 'in fonksiyonları olan $N+1$ uzunluğunda bir satır matrisidir. (3.11) eşitliğini, tekil pertürbe edilmiş problemdeki (3.2) denklemi gibi tek bir matris çarpımıyla yazmak da mümkündür. Bunun için, bilinmeyen katsayıları barındıran $\mathbf{A}_j$ sütun matrislerini alt alta ekleyerek bütün bilinmeyenleri tek bir $\mathbf{A}$ sütun matrisinde toplamak ve $(N+1) \times (N+1)$ boyutunda birim matris $\mathbf{I}$ 'yi kullanarak k tane $(N+1) \times k(N+1)$ boyutunda yardımcı matris oluşturmak yeterlidir. Daha açık bir şekilde,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{I}_j = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}}_{j-1 \text{ times}} & \mathbf{I} & \underbrace{\mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}}_{k-j \text{ times}} \end{bmatrix}, \ j = 1, 2, \dots, k$$

matrisleri yardımıyla, (3.11) eşitliği daha öz biçimde

$$\left(\sum_{j=1}^k \mathbf{F}_{i,j}(x) \mathcal{I}_j \right) \mathbf{A} = \mathbf{F}_i(x) \mathbf{A} = g_i(x) \quad (3.12)$$

olarak yazılabilir. Bu, (3.9) sistemindeki i 'inci denklemin matrisler yardımıyla ifadesidir. Tüm sistemi tek matris denklemine indirgemenin son adımı olarak, $i=1, 2, \dots, k$ için oluşturulan (3.12) eşitliklerini alt alta ekleyerek

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(x) \\ \mathbf{F}_2(x) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_k(x) \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{bmatrix} \text{ ya da } \mathbf{F}(x)\mathbf{A} = \mathbf{g}(x). \quad (3.13)$$

yazmak yeterlidir. (3.13) eşitliğine test fonksiyonlarıyla iç çarpım uygulamadan önce, (3.10) karışık koşullarına karşılık gelen denklemler oluşturulur. Yukarıda tanımlanan $\mathcal{I}_j$ yardımcı matrislerinin kullanılmasıyla, n 'inci deneme fonksiyonu $y_{n,N}$ 'ye karşılık gelen i 'inci karışık koşul,

$$\begin{aligned} \left[\sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j}^n \mathbf{X}(a) + b_{i,j}^n \mathbf{X}(b)) \mathbf{B}^j \right] \mathbf{A}_n &= \left[\sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j}^n \mathbf{X}(a) + b_{i,j}^n \mathbf{X}(b)) \mathbf{B}^j \right] \mathcal{I}_n \mathbf{A} \\ &= \mathbf{C}_{n,i} \mathbf{A} = \lambda_{n,i}, \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. $\mathbf{A}$ bilinmeyen matrisi oluşturulurken başvuru matrisleri uç uca ekleme işleminin tekrar uygulanmasıyla, karışık koşulların tamamı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1,1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{1,m} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{k,1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{k,m} \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} \\ \vdots \\ \lambda_{1,m} \\ \vdots \\ \lambda_{k,1} \\ \vdots \\ \lambda_{k,m} \end{bmatrix} \text{ ya da } \mathbf{CA} = \mathbf{\Lambda}. \quad (3.14)$$

biçiminde tek matris çarpımına indirgenebilir. Toplamda km karışık koşul bulunduğundan, bütün deneme fonksiyonlarındaki toplam $k(N+1)$ bilinmeyişi tespit etmek için geriye $k(N+1-m)$ denklem elde etmek kalmıştır. Dolayısıyla, (3.13) eşitliğine yalnızca $x^m, x^{m+1}, \dots, x^N$ test fonksiyonlarıyla iç çarpım uygulanacaktır. Sonuçta elde edilecek doğrusal

$$\mathbf{WA} = \mathbf{G} \quad (3.15)$$

cebirsel denklem sisteminde $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{G}$ 'nin ilk km satırı karışık koşullar tarafından belirlenir. Diğer satırlarındaki girdiler, $i=m, m+1, \dots, N, j=1, 2, \dots, k, l=1, 2, \dots, k(N+1)$ için

$$\mathbf{W}_{ik+j,l} = \langle \mathbf{F}(x)_{j,l}, x^i \rangle, \mathbf{G}_{ik+j,1} = \langle g_j(x), x^i \rangle$$

olarak hesaplanır. Böylece, $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{G}$ matrisleri açık olarak

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} & \mathbf{C} & \\ \langle \mathbf{F}(x)_{1,1}, x^m \rangle & \langle \mathbf{F}(x)_{1,2}, x^m \rangle & \dots & \langle \mathbf{F}(x)_{1,k(N+1)}, x^m \rangle \\ \langle \mathbf{F}(x)_{2,1}, x^m \rangle & \langle \mathbf{F}(x)_{2,2}, x^m \rangle & \dots & \langle \mathbf{F}(x)_{2,k(N+1)}, x^m \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle \mathbf{F}(x)_{k,1}, x^m \rangle & \langle \mathbf{F}(x)_{k,2}, x^m \rangle & \dots & \langle \mathbf{F}(x)_{k,k(N+1)}, x^m \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle \mathbf{F}(x)_{1,1}, x^N \rangle & \langle \mathbf{F}(x)_{1,2}, x^N \rangle & \dots & \langle \mathbf{F}(x)_{1,k(N+1)}, x^N \rangle \\ \langle \mathbf{F}(x)_{2,1}, x^N \rangle & \langle \mathbf{F}(x)_{2,2}, x^N \rangle & \dots & \langle \mathbf{F}(x)_{2,k(N+1)}, x^N \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle \mathbf{F}(x)_{k,1}, x^N \rangle & \langle \mathbf{F}(x)_{k,2}, x^N \rangle & \dots & \langle \mathbf{F}(x)_{k,k(N+1)}, x^N \rangle \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} \\ \langle g_1(x), x^m \rangle \\ \langle g_2(x), x^m \rangle \\ \vdots \\ \langle g_k(x), x^m \rangle \\ \vdots \\ \langle g_1(x), x^N \rangle \\ \langle g_2(x), x^N \rangle \\ \vdots \\ \langle g_k(x), x^N \rangle \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

olur. $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{\Lambda}$ matrisleri, karışık koşullara karşılık gelen ve (3.14) ile tanımlanan, sırasıyla $km \times k(N+1)$ ve $km \times 1$ boyutlarında matrislerdir. (3.16) matrisleriyle oluşturulan (3.15) doğrusal sistemini çözmek $\mathbf{A}$ bilinmeyen matrisini ve

$$y_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^N a_{i,n} x^n, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

yaklaşık çözümlerini verir.

Şimdi, Galerkin-tipi yöntem iki tane doğrusal adi diferansiyel denklem sistemine uygulanacaktır.

Örnek 3.4. İlk olarak, daha önce Saadatmandi vd. (2009) tarafından sayısal olarak çözülen aşağıdaki iki bilinmeyenli ikinci mertebeden doğrusal sistem ele alınacaktır:

$$\begin{aligned} y_1''(x) + (2x - 1)y_1'(x) + \cos(\pi x)y_2'(x) &= -\pi^2 \sin(\pi x) + (2x - 1)(\pi + 1) \cos(\pi x), \\ y_2''(x) + xy_1(x) &= 2 + x \sin(\pi x) \\ y_1(0) = y_1(1) = 0, y_2(0) = y_2(1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

(3.17) sisteminin tam çözümünün $y_{1,\text{tam}}(x) = \sin(\pi x)$ ve $y_{2,\text{tam}}(x) = x^2 - x$ olduğu bilinmektedir.

Bu sisteme Galerkin-tipi yöntemin uygulanışını ayrıntılı olarak görmek amacıyla, $N=2$ seçimi ile yukarıda anlatılan adımlar takip edilebilir. Deneme fonksiyonları

$$y_{1,2}(x) = a_{1,0} + a_{1,1}x + a_{1,2}x^2, \quad y_{2,2}(x) = a_{2,0} + a_{2,1}x + a_{2,2}x^2$$

ve bilinmeyen katsayıların matrisleri

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}^T$$

ya da bir araya toplanmış olarak

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}^T$$

şeklindedir. Bu problemde basit sınır koşulları olan karışık koşulların matris karşılığı

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A}_1 = 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}_1 = 0, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A}_2 = 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}_2 = 0$$

şeklindedir. Bu koşullar, (3.14) eşitliğinde olduğu gibi toplu olarak

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ile ifade edilebilir. Problem (3.17)'de $y_{1,2}$ ve $y_{2,2}$ deneme fonksiyonlarının yazılmasıyla oluşan denklemler ise, $g_1(x)$ ve $g_2(x)$ denklemlerin sağ tarafındaki fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 0 & 2x - 1 & 4x^2 - 2x + 2 & 0 & \cos(\pi x) & 2x \cos(\pi x) \end{bmatrix} \mathbf{A} = g_1(x), \\ \begin{bmatrix} x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{A} = g_2(x) \quad (3.18)$$

şeklindedir. Problemden $k=2$ denklem bulunduğundan, tüm bilinmeyenleri tespit etmek için $k(N+1)=6$ denklem gerekmektedir. Bunların dört tanesi sınır koşullarınca oluşturulduğundan, geriye kalan iki denklem için (3.18) matris eşitliklerine yalnızca x^2 test fonksiyonu ile iç çarpım uygulanacaktır. Bu iç çarpımların sonucunda

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.16666 & 0.96666 & 0 & -0.20264 & -0.36154 \end{bmatrix} \mathbf{A} = -2.5264, \\ \begin{bmatrix} 0.25 & 0.2 & 0.16666 & 0 & 0 & 0.66666 \end{bmatrix} \mathbf{A} = 0.79146$$

Çizelge 3.3. Örnek 3.4'te çeşitli N seçimleriyle elde edilen maksimum mutlak hataların homotopi pertürbasyon yöntemiyle karşılaştırılması.

	Homotopi pertürbasyon yöntemi			Galerkin-tipi yöntem			
	$N = 5$	$N = 7$	$N = 9$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 9$	$N = 10$
$\ e_{1,N}\ _{\infty}$	2.1×10^{-4}	3.6×10^{-6}	1.8×10^{-8}	2.4×10^{-3}	2.4×10^{-5}	1.6×10^{-7}	7.3×10^{-10}
$\ e_{2,N}\ _{\infty}$	3.2×10^{-4}	1.6×10^{-6}	6.1×10^{-9}	2.6×10^{-5}	9.7×10^{-8}	3.0×10^{-10}	6.7×10^{-13}

denklemleri elde edilir. Bunların sınır koşullarına karşılık gelen denklemlerle birleştirilmesiyle, $\mathbf{WA}=\mathbf{G}$ sistemi, beş ondalık basamaklı gösterimle

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.16666 & 0.96666 & 0 & -0.20264 & -0.36154 \\ 0.25 & 0.2 & 0.16666 & 0 & 0 & 0.66666 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2.5264 \\ 0.79146 \end{bmatrix}$$

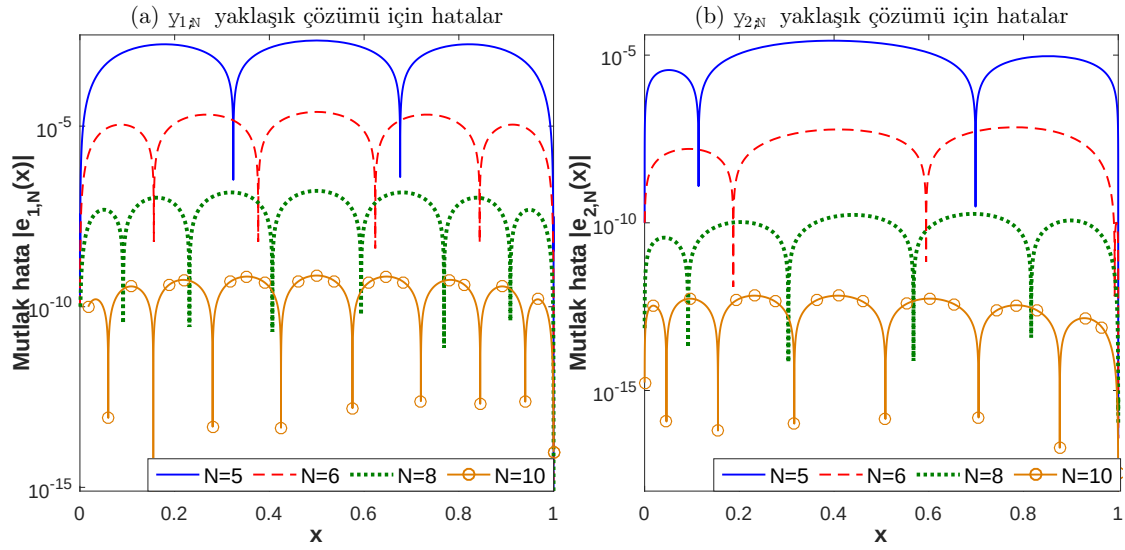
olarak elde edilir. Bu sistemin çözülmesiyle

$$y_{1,2}(x) = 3.234230482x - 3.234230482x^2, \quad y_{2,2}(x) = -1.024395339x + 1.024395339x^2$$

yaklaşık çözümleri bulunur.

Bu örnek probleme Galerkin-tipi yöntem başka N değerleri için de uygulanmıştır. Sonuçta bulunan yaklaşık çözümlerin mutlak hataları Şekil 3.6'da görsel olarak sunulmuştur. N değerini arttırmanın yaklaşık çözümleri belirgin miktarda iyileştirdiği grafiklerden anlaşılmaktadır. Elde edilen çözümlerin $[0, 1]$ aralığındaki en büyük hataları ise Çizelge 3.3'te homotopi pertürbasyon yöntemi (Saadatmandi vd. 2009) ile karşılaştırılmıştır. Çizelgedeki değerlere bakılarak, Galerkin-tipi yöntemin bu problemde $N=9$ için homotopi pertürbasyon yönteminden daha isabetli sonuçlar verdiği, $N=5$ için ise daha kötü sonuçlar verdiği yorumu yapılabilir.

Örnek 3.5. Ele alınacak ikinci örnek, daha önce Yüzbaşı vd. (2011b) tarafından sayısal



Şekil 3.6. Örnek 3.4 için çeşitli N seçimleriyle elde edilen mutlak hatalar.

olarak çözülen aşağıdaki üç bilinmeyenli dördüncü mertebeden sistemdir:

$$\begin{aligned}
 y_1^{(4)}(x) - \cos(x)y_2''(x) + xy_3'(x) - y_1(x) &= xe^x + \cos^2(x), \\
 y_2^{(4)}(x) + \sin(x)y_1^{(3)}(x) + \cos(x)y_1(x) - \cos(x)y_3(x) &= \cos(x)(1 - e^x), \\
 e^{-x}y_3^{(4)}(x) + y_2''(x) - \cos(x)y_1'(x) + y_2(x) &= \sin^2(x), \\
 y_1(0) = 0, y_1'(0) = 1, y_1''(0) = 0, y_1^{(3)}(0) = -1, y_2(0) = 1, y_2'(0) = 0, \\
 y_2''(0) = -1, y_2^{(3)}(0) = 0, y_3(0) = y_3'(0) = y_3''(0) = y_3^{(3)}(0) &= 1.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Bu problemin tam çözümlerinin $y_{1,\text{tam}}(x) = \sin(x)$, $y_{2,\text{tam}}(x) = \cos(x)$, $y_{3,\text{tam}}(x) = e^x$ olduğu bilinmektedir.

Problem (3.19) Galerkin-tipi yöntemle çeşitli N seçimleri kullanılarak çözülmüştür. Örnek olarak, $N=5$ seçimine karşılık gelen yaklaşık çözümler

$$\begin{aligned}
 y_{1,5}(x) &= x - 0.1666666666x^3 + 0.0013640718x^4 + 0.0071405934x^5, \\
 y_{2,5}(x) &= 1 - 0.5x^2 + 0.0447611736x^4 - 0.0038808396x^5, \\
 y_{3,5}(x) &= 1 + x + 0.5x^2 + 0.1666666666x^3 + 0.0373933310x^4 + 0.0136144154x^5
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Problemin farklı N seçimlerine karşılık elde edilen yaklaşık çözümlerinin mutlak hataları Şekil 3.7'de sunulmuştur. Önceki örnekte olduğu gibi, N değerini artırmanın hataları belirgin düzeyde azalttığı görülmektedir. $N=9$ ve $N=12$ için bulunan

çözümlerin Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı vd. 2011b) ile karşılaştırılması ise Çizelge 3.4'te verilmiştir. Çizelgedeki değerlerden, Galerkin-tipi yöntemin bu problem için Bessel kollokasyon yönteminden genel olarak daha isabetli sonuçlar verdiği anlaşılmaktadır.

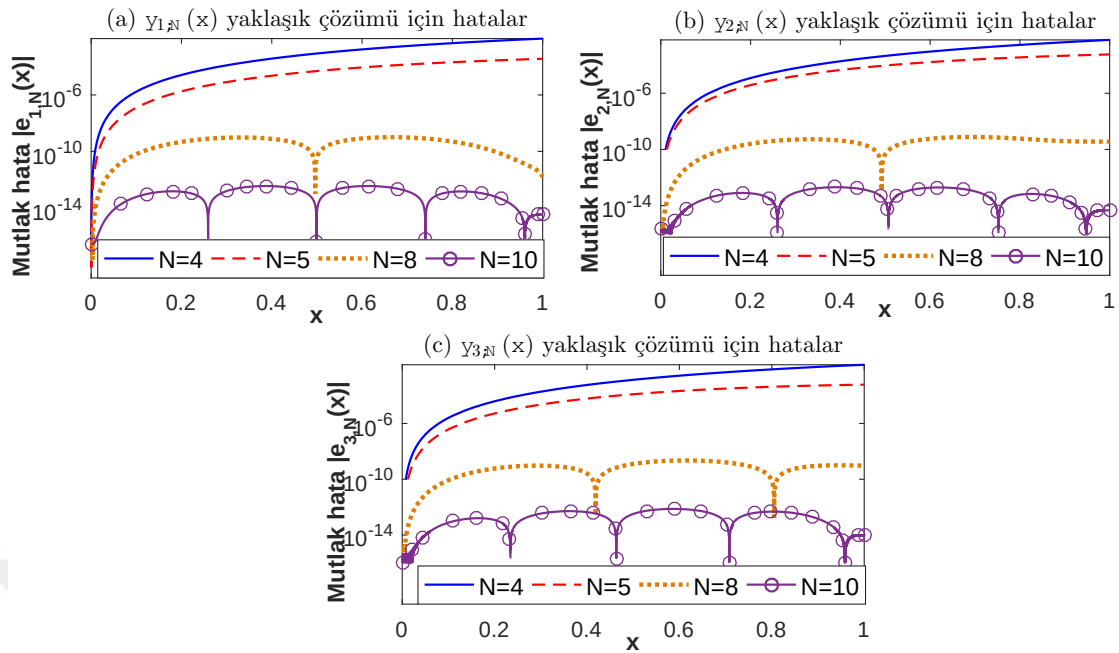
3.1.4. Doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümleri: Lotka-Volterra denklemleri

Yalnızca doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri ifade eden, (3.6) gibi basit bir genel ifade mevcut değildir. Bunun sebebi, bu tür problemler içeren uygulamaların, basit bir sınıflandırmaya izin vermeyecek kadar çeşitli olmasıdır. Bu sebeple, doğrusal olmayan bir problem belirleyip Galerkin-tipi yöntemin uygulanışını o problem üzerinde açıklamak daha kolay olacaktır.

Matematiksel biyoloji, doğrusal olmayan sistemlerin en doğal uygulama alanlarından biridir. Bunun sebebi, bir hayvanın avıyla karşılaşması ve bir virüsün hücreye girmesi gibi etkileşimlerin sistem bileşenlerinin sayısını etkilediği uygulamaların bu disiplinde önemli yer tutmasıdır. Bu tür uygulamaların en ünlü örneklerinden biri, Lotka (1920) ve Volterra (1926) tarafından bağımsız olarak keşfedilen aşağıdaki iki bilinmeyenli modeldir:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= ap - bpq \\ \frac{dq}{dt} &= cpq - dq. \\ p(0) &= \lambda_p, q(0) = \lambda_q.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Birinci mertebeden bu doğrusal olmayan model, "Lotka-Volterra denklemleri" olarak bilinir ve aralarında av-avcı ilişkisi bulunan ve aynı ekosistemi paylaşan iki hayvan türünün nüfuslarının zamana göre değişimini ele alır. Denklem sisteminde gözükten $p(t)$ ve $q(t)$ sırayla av ve avcı türünün t zamanında belli bir ölçüğe göre ölçülmüş nüfuslarıdır. a, b, c, d ve λ_p, λ_q bilinen pozitif sabitlerdir. Buna göre, iki türün bireylerinin karşılaşması av türüne negatif ($-bpq$) etki yaparken, avcı türünü arttırıcı (cpq) etkide bulunmaktadır. Benzer bir yorum diğer parametreler için de yapılabilir: a parametresi av türünün doğurganlığını, d parametresi ise avcı türü içindeki rekabeti temsil eder. Av ve avcı türlerinin $t=0$ anındaki nüfusları ise sırayla λ_p ve λ_q ile verilmektedir. (3.20) sisteminin nasıl türetildiğiyle ilgili bilgi, Hirsch ve Smale (1974)'te bulunabilir.



Şekil 3.7. Örnek 3.5 için çeşitli N seçimleriyle elde edilen mutlak hatalar.

Çizelge 3.4. Örnek 3.5 için $N=9$ ve $N=12$ seçimlerine karşılık gelen mutlak hataların Bessel kollokasyon yöntemi ile karşılaştırılması.

Bessel kollokasyon yöntemi				Galerkin-tipi yöntem		
x	$ e_{1,9}(x) $	$ e_{2,9}(x) $	$ e_{3,9}(x) $	$ e_{1,9}(x) $	$ e_{2,9}(x) $	$ e_{3,9}(x) $
0.2	4.604E - 13	1.825E - 12	2.423E - 12	5.696E - 12	1.059E - 11	1.219E - 11
0.4	5.018E - 12	1.950E - 9	2.604E - 11	4.859E - 12	9.859E - 12	2.680E - 11
0.6	1.903E - 11	7.123E - 11	9.625E - 11	5.507E - 12	8.684E - 12	1.368E - 12
0.8	2.058E - 11	9.170E - 11	1.174E - 10	5.986E - 12	1.101E - 11	2.691E - 11
1	1.693E - 9	4.603E - 9	7.024E - 9	6.728E - 14	1.101E - 13	4.006E - 12

Bessel kollokasyon yöntemi				Galerkin-tipi yöntem		
x	$ e_{1,12}(x) $	$ e_{2,12}(x) $	$ e_{3,12}(x) $	$ e_{1,12}(x) $	$ e_{2,12}(x) $	$ e_{3,12}(x) $
0.2	3.164E - 15	1.110E - 16	2.442E - 15	1.665E - 16	1.110E - 16	0
0.4	2.276E - 14	9.992E - 16	2.065E - 14	3.330E - 16	1.110E - 16	2.220E - 16
0.6	7.582E - 14	5.329E - 15	7.172E - 14	1.110E - 16	1.110E - 16	2.220E - 16
0.8	1.794E - 13	1.565E - 14	1.727E - 13	2.220E - 16	1.110E - 16	0
1	5.812E - 13	1.794E - 13	2.486E - 14	2.220E - 16	0	0

(3.20) sisteminin tam çözümünün

$$\ln(p) + \ln(q) - p - q = \ln(\lambda_p \lambda_q) - p - q$$

olduğu bilinmektedir. Ancak, $p(t)$ ve $q(t)$ çözümlerinin zaman değişkeni t 'ye bağlı ifadeleri bilinmemektedir. Bu çözümleri yaklaşık olarak hesaplamak için Adomian ayrışım yöntemi (Pamuk 2005), homotopi pertürbasyon yöntemi (Pamuk ve Pamuk 2010) ve Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı 2012a) gibi çeşitli sayısal yöntemler kullanılmıştır. Bu kısımda, Galerkin-tipi yöntemin (3.20) problemine uygulanışı ele alınacaktır.

İlk adım, her zamanki gibi, belli bir N seçimi için

$$p_N(t) = \sum_{k=0}^N p_k t^k, \quad q_N(t) = \sum_{k=0}^N q_k t^k$$

deneme fonksiyonlarını belirlemektir. Bunların katsayılarını tutan sütun matrisleri, bu sefer biraz farklı bir gösterim kullanılarak

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_N \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & \dots & q_N \end{bmatrix}^T$$

ile ifade edilebilir. Böylece, p_N ve q_N deneme fonksiyonları ve bunların türevleri

$$p_N(t) = \mathbf{TP}, \quad q_N(t) = \mathbf{TQ}, \quad p'_N(t) = \mathbf{TB}\mathbf{P}, \quad q'_N(t) = \mathbf{TB}\mathbf{Q} \quad (3.21)$$

olarak yazılabilir. (3.21) ile verilen ifadelerin (3.20) sisteminde yazılmasından önce, av ve avcı nüfuslarının birbiriyle çarpılmasına karşılık gelen $p_N(t)q_N(t)$ teriminin matris çarpımı biçiminde ifade edilmesi için iki yardımcı matris tanımlamak kullanışlı olacaktır. $(2N+1) \times (N+1)$ boyutundaki bu matrisler, $j \leq i \leq j+N$ için $\tilde{\mathbf{P}}_{i,j} = p_{i-j}$, $\tilde{\mathbf{Q}}_{i,j} = q_{i-j}$ ve diğer durumlarda $\tilde{\mathbf{P}}_{i,j} = \tilde{\mathbf{Q}}_{i,j} = 0$ ile, ya da açık biçimde

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & p_0 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & p_1 & p_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_N & p_{N-1} & p_{N-2} & \dots & p_0 \\ 0 & p_N & p_{N-1} & \dots & p_1 \\ 0 & 0 & p_N & \dots & p_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_N \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} q_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_1 & q_0 & 0 & \dots & 0 \\ q_2 & q_1 & q_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_N & q_{N-1} & q_{N-2} & \dots & q_0 \\ 0 & q_N & q_{N-1} & \dots & q_1 \\ 0 & 0 & q_N & \dots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_N \end{bmatrix}$$

ile tanımlanırlar. Bu matrislerin ve (3.21) ifadelerinin kullanılmasıyla, (3.20) sistemi matrisler cinsinden

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{T}\mathbf{B} - a\mathbf{T} + b\mathbf{X}_{2N}(t)\tilde{\mathbf{Q}} \right) \mathbf{P} &= 0, \\ \left(\mathbf{T}\mathbf{B} + d\mathbf{T} - c\mathbf{X}_{2N}(t)\tilde{\mathbf{P}} \right) \mathbf{Q} &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

olarak yazılabilir. Bunu, doğrusal sistemlerde olduğu gibi tek bir matris çarpımı ile ifade etmek için

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^p(t) &= \mathbf{T}\mathbf{B} - a\mathbf{T} + b\mathbf{X}_{2N}(t)\tilde{\mathbf{Q}}, \quad \mathbf{W}^q(t) = \mathbf{T}\mathbf{B} + d\mathbf{T} - c\mathbf{X}_{2N}(t)\tilde{\mathbf{P}}, \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_N & q_0 & q_1 & \dots & q_N \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

tanımlanabilir. Böylece, daha önce tanımlanan $\mathcal{I}_j$ yardımcı matrisleri kullanılarak, (3.22) matris denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}^p(t)\mathcal{I}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}^q(t)\mathcal{I}_2 \end{bmatrix} \mathbf{A} := \mathbf{W}(t)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

çarpımına indirgenir. $\mathbf{0}$ ile yalnızca $\mathbf{0}$ 'lardan oluşan $N+1$ uzunluğunda satır matrisi kastedilmektedir. Burada, $2 \times (2N+2)$ uzunluğundaki $\mathbf{W}(t)$ matrisinin girdileri, t 'ye bağlı ifadelerle birlikte $i=0, 1, \dots, N$ için p_i ve q_i bilinmeyenlerini içerir. Böylece, (3.23) denklemlerinde p_i ve q_i bilinmeyenleri çarpım hâlinde olur; bir başka deyişle (3.23) denklemleri p_i ve q_i bilinmeyenlerine göre doğrusal değildir. Sonuçta, iç çarpım adımından sonra elde edilen denklemler de doğrusal olmayacaktır. İç çarpım adımından önce, başlangıç koşullarına karşılık gelen denklemlerin

$$\begin{aligned} p_N(0) &= p_0 = \mathbf{X}_N(0)\mathcal{I}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \lambda_p, \\ q_N(0) &= q_0 = \mathbf{X}_N(0)\mathcal{I}_2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \lambda_q \end{aligned}$$

biçiminde tespit edilmesiyle, kalan $2N$ denklem (3.23) matris çarpımına $t, t^2, \dots, t^N$ test fonksiyonlarıyla iç çarpım uygulanması sonucu elde edilir. Bu iç çarpımların sonuçları, $i=1, 2, \dots, N$ ve $j=1, 2, \dots, 2N+2$ için

$$\mathbf{W}_{(k-1)N+i+2,j} = \langle \mathbf{W}(t)_{k,j}, x^i \rangle, \quad \mathbf{G}_{(k-1)N+i+2,1} = 0, \quad k = 1, 2$$

olmak üzere $(2N+2) \times (2N+2)$ boyutundaki $\mathbf{W}$ ve $(2N+2) \times 1$ boyutundaki $\mathbf{G}$ matrisinin son $2N$ satırlarında, başlangıç koşullarına karşılık gelen denklemler ise ilk iki satırlarında toplanırsa, açık olarak

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} & & & & \mathbf{X}_N(0)\mathcal{I}_1 \\ & & & & \mathbf{X}_N(0)\mathcal{I}_2 \\ \langle \mathbf{W}(t)_{1,1}, t \rangle & \dots & \langle \mathbf{W}(t)_{1,N+1}, t \rangle & & 0 \\ \langle \mathbf{W}(t)_{1,1}, t^2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{W}(t)_{1,N+1}, t^2 \rangle & & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{W}(t)_{1,1}, t^N \rangle & \dots & \langle \mathbf{W}(t)_{1,N+1}, t^N \rangle & & 0 \\ & 0 & & \langle \mathbf{W}(t)_{2,1}, t \rangle & \dots & \langle \mathbf{W}(t)_{2,N+1}, t \rangle \\ & 0 & & \langle \mathbf{W}(t)_{2,1}, t^2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{W}(t)_{2,N+1}, t^2 \rangle \\ & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ & 0 & & \langle \mathbf{W}(t)_{2,1}, t^N \rangle & \dots & \langle \mathbf{W}(t)_{2,N+1}, t^N \rangle \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \lambda_p & \lambda_q & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

elde edilir. Burada 0 yine 0'lerden oluşan $N+1$ uzunluğunda satır matrisini göstermektedir. Sonuç olarak p_i ve q_i bilinmeyenlerinin $\mathbf{WA}=\mathbf{G}$ doğrusal olmayan denklem sisteminin çözülmesiyle

$$p_N(t) = \sum_{k=0}^N p_k t^k, \quad q_N(t) = \sum_{k=0}^N q_k t^k$$

yaklaşık çözümleri elde edilir.

Şimdi, Galerkin-tipi yöntemin Lotka-Volterra denklemlerine uygulanışı bir örnek üzerinde görülecektir.

Örnek 3.6. $a=b=c=d=1$ ve $\lambda_p=0.6, \lambda_q=1.3$ parametre değerleriyle oluşturulan

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= p(1 - q) \\ \frac{dq}{dt} &= q(p - 1) \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$p(0) = 1.3, q(0) = 0.6,$$

sistemi ele alınsın. Bu problem, Pamuk (2005), Pamuk ve Pamuk (2010) ve Yüzbaşı (2012a) tarafından da sayısal olarak çözülmüştür.

Galerkin-tipi yöntemin (3.24) sistemine $0 \leq t \leq 1$ aralığında $N=3$ seçimi ile uygulanışını görmek için, önce deneme fonksiyonları ve türevleri

$$\begin{aligned} p_3(t) &= p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 = \mathbf{TP}, \quad p'_3(t) = p_1 + 2p_2 t + 6p_3 t^2 = \mathbf{TBP}, \\ q_3(t) &= q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 = \mathbf{TQ}, \quad q'_3(t) = q_1 + 2q_2 t + 6q_3 t^2 = \mathbf{TBQ} \end{aligned}$$

olarak belirlenir. Bu ifadelerin (3.24) sisteminde yazılmasıyla, p_i ve q_i bilinmeyenlerini içeren şu iki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} &p_1 - p_0 + p_0 q_0 + (2p_2 - p_1 + p_0 q_1 + p_1 q_0)t + (3p_3 - p_2 + p_0 q_2 + p_1 q_1 + p_2 q_0)t^2 \\ &+ (p_0 q_3 - p_3 + p_1 q_2 + p_2 q_1 + p_3 q_0)t^3 + (p_1 q_3 + p_2 q_2 + p_3 q_1)t^4 + (p_2 q_3 + p_3 q_2)t^5 \\ &+ p_3 q_3 t^6 = 0, \\ &q_0 + q_1 + p_0 q_0 + (q_1 + 2q_2 - p_0 q_1 - p_1 q_0)t + (q_2 + 3q_3 - p_0 q_2 - p_1 q_1 - p_2 q_0)t^2 \\ &+ (q_3 - p_0 q_3 - p_1 q_2 - p_2 q_1 - p_3 q_0)t^3 - (p_1 q_3 + p_2 q_2 + p_3 q_1)t^4 - (p_2 q_3 + p_3 q_2)t^5 \\ &- p_3 q_3 t^6 = 0. \end{aligned}$$

Bu denklemler, (3.23) eşitliğinde olduğu gibi tek matris çarpımı biçiminde yazılacak olursa,

$$\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} -1 + q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 & 0 \\ 1 - t + q_1 t^2 + q_2 t^3 + q_3 t^4 & 0 \\ 2t + (q_0 - 1)t^2 + q_1 t^3 + q_2 t^4 + q_3 t^5 & 0 \\ 3t^2 + (q_0 - 1)t^3 + q_1 t^4 + q_2 t^5 + q_3 & 0 \\ 0 & 1 + p_0 - p_1 t - p_2 t^2 - p_3 t^3 \\ 0 & 1 + (1 - p_0)t - p_1 t^2 - p_2 t^3 - p_3 t^4 \\ 0 & 2t + (1 - p_0)t^2 - p_1 t^3 - p_2 t^4 - p_3 t^5 \\ 0 & 3t^2 + (1 - p_0)t^3 - p_1 t^4 - p_2 t^5 - p_3 t^6 \end{bmatrix}^T$$

olur. Böylece, (3.24) sistemi

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

matris çarpımıyla ifade edilmiş olur. Bu eşitliklere t, t^2, t^3 test fonksiyonlarıyla iç çarpım

uygulanması sonucu elde edilen altı doğrusal olmayan denklem şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{p_1}{6} - \frac{p_0}{2} + \frac{5p_2}{12} - \frac{11p_3}{20} + \frac{p_0q_0}{2} + \frac{p_0q_1}{3} + \frac{p_1q_0}{3} + \frac{p_0q_2}{4} + \frac{p_1q_1}{4} + \frac{p_2q_0}{4} + \frac{p_0q_3}{5} \\
 & + \frac{p_1q_2}{5} + \frac{p_2q_1}{5} + \frac{p_3q_0}{5} + \frac{p_1q_3}{6} + \frac{p_2q_2}{6} + \frac{p_3q_1}{6} + \frac{p_2q_3}{7} + \frac{p_3q_2}{7} + \frac{p_3q_3}{8} = 0 \\
 (2) \quad & \frac{q_0}{3} + \frac{7q_1}{12} + \frac{7q_2}{10} + \frac{23q_3}{30} - \frac{p_0q_0}{3} - \frac{p_0q_1}{4} - \frac{p_1q_0}{4} - \frac{p_0q_2}{5} - \frac{p_1q_1}{5} - \frac{p_2q_0}{5} - \frac{p_0q_3}{6} \\
 & - \frac{p_1q_2}{6} - \frac{p_2q_1}{6} - \frac{p_3q_0}{6} - \frac{p_1q_3}{7} - \frac{p_2q_2}{7} - \frac{p_3q_1}{7} - \frac{p_2q_3}{8} - \frac{p_3q_2}{8} - \frac{p_3q_3}{9} = 0, \\
 (3) \quad & \frac{q_0}{2} + \frac{5q_1}{6} + \frac{11q_2}{12} + \frac{19q_3}{20} - \frac{p_0q_0}{2} - \frac{p_0q_1}{3} - \frac{p_1q_0}{3} - \frac{p_0q_2}{4} - \frac{p_1q_1}{4} - \frac{p_2q_0}{4} - \frac{p_0q_3}{5} \\
 & - \frac{p_1q_2}{5} - \frac{p_2q_1}{5} - \frac{p_3q_0}{5} - \frac{p_1q_3}{6} - \frac{p_2q_2}{6} - \frac{p_3q_1}{6} - \frac{p_2q_3}{7} - \frac{p_3q_2}{7} - \frac{p_3q_3}{8} = 0, \\
 (4) \quad & \frac{p_1}{20} - \frac{p_0}{4} + \frac{7p_2}{30} + \frac{5p_3}{14} + \frac{p_0q_0}{4} + \frac{p_0q_1}{5} + \frac{p_1q_0}{5} + \frac{p_0q_2}{6} + \frac{p_1q_1}{6} + \frac{p_2q_0}{6} + \frac{p_0q_3}{7} \\
 & + \frac{p_1q_2}{7} + \frac{p_2q_1}{7} + \frac{p_3q_0}{7} + \frac{p_1q_3}{8} + \frac{p_2q_2}{8} + \frac{p_3q_1}{8} + \frac{p_2q_3}{9} + \frac{p_3q_2}{9} + \frac{p_3q_3}{10} = 0, \\
 (5) \quad & \frac{p_1}{12} - \frac{p_0}{3} + \frac{3p_2}{10} + \frac{13p_3}{30} + \frac{p_0q_0}{3} + \frac{p_0q_1}{4} + \frac{p_1q_0}{4} + \frac{p_0q_2}{5} + \frac{p_1q_1}{5} + \frac{p_2q_0}{5} + \frac{p_0q_3}{6} \\
 & + \frac{p_0q_3}{6} + \frac{p_1q_2}{6} + \frac{p_2q_1}{6} + \frac{p_3q_0}{6} + \frac{p_1q_3}{7} + \frac{p_2q_2}{7} + \frac{p_3q_1}{7} + \frac{p_2q_3}{8} + \frac{p_3q_2}{8} + \frac{p_3q_3}{9} = 0, \\
 (6) \quad & \frac{q_0}{4} + \frac{9q_1}{20} + \frac{17q_2}{30} + \frac{9q_3}{14} - \frac{p_0q_0}{4} - \frac{p_0q_1}{5} - \frac{p_1q_0}{5} - \frac{p_0q_2}{6} - \frac{p_1q_1}{6} - \frac{p_2q_0}{6} - \frac{p_0q_3}{7} \\
 & - \frac{p_1q_2}{7} - \frac{p_2q_1}{7} - \frac{p_3q_0}{7} - \frac{p_1q_3}{8} - \frac{p_2q_2}{8} - \frac{p_3q_1}{8} - \frac{p_2q_3}{9} - \frac{p_3q_2}{9} - \frac{p_3q_3}{10} = 0.
 \end{aligned}$$

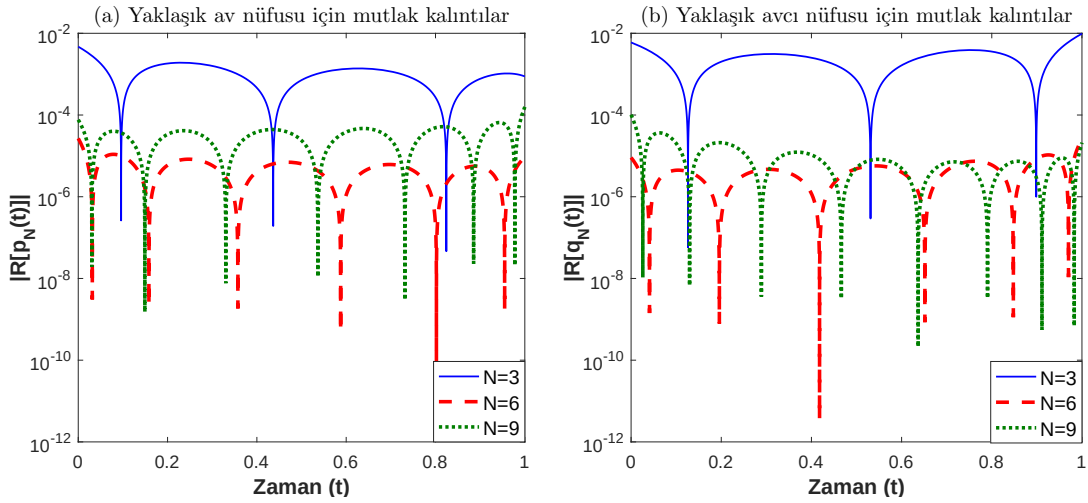
Bu denklemlere, başlangıç koşullarına karşılık gelen $p_0=1.3$, $q_0=0.6$ denklemlerinin eklenmesiyle oluşan sekiz denklemlilik doğrusal olmayan sistem, herhangi bir algoritma kullanılarak çözülür. 10^{-10} 'luk adım toleransı ile dogleg yönteminin uygulanmasıyla,

$$p_3(t) = 1.3 + 0.5152921081t + 0.0240177066t^2 - 0.1913425996t^3,$$

$$q_3(t) = 0.6 + 0.1740260386t + 0.2107064508t^2 + 0.0222944792t^3$$

yaklaşık çözümleri bulunur. (3.24) sistemine Galerkin-tipi yöntem $N=6$ ve $N=9$ için de uygulanmıştır. Bunun sonucunda, $N=6$ için

$$\begin{aligned}
 p_6(t) &= 1.3 + 0.5199732156t - 0.0123927898t^2 - 0.1166191035t^3 - 0.0353749396t^4 \\
 &\quad - 0.0301148315t^5 + 0.0225265020t^6, \\
 q_6(t) &= 0.6 + 0.1799909007t + 0.1831379366t^2 + 0.0464137281t^3 + 0.0097060534t^4 \\
 &\quad - 0.0015396911t^5 - 0.0106851417t^6
 \end{aligned}$$



Şekil 3.8. Örnek 3.6'nın üç farklı N seçimi ile elde edilen çözümlerinin kalıntıları.

ve $N=9$ için

$$\begin{aligned}
 p_9(t) &= 1.3 + 0.5200767436t - 0.0146831992t^2 - 0.1031704747t^3 - 0.0521358765t^4 \\
 &\quad - 0.1156822100t^5 + 0.3599968478t^6 - 0.4917152562t^7 + 0.3317554219t^8 \\
 &\quad - 0.0864439383t^9, \\
 q_9(t) &= 0.6 + 0.1801015370t + 0.1801637338t^2 + 0.0741284681t^3 - 0.1186959070t^4 \\
 &\quad + 0.3367987634t^5 - 0.5428370460t^6 + 0.4951584135t^7 - 0.2516069868t^8 \\
 &\quad + 0.0538128009t^9
 \end{aligned}$$

yaklaşık çözümleri bulunur. (3.24) sisteminin $p_{\text{tam}}(t)$ ve $q_{\text{tam}}(t)$ tam çözümleri bilinmediği için, hesaplanan yaklaşık çözümleri değerlendirmek amacıyla, bunların

$$\begin{aligned}
 R[p_N(t)] &= \frac{dp_N(t)}{dt} - p_N(t) + p_N(t)q_N(t), \\
 R[q_N(t)] &= \frac{dq_N(t)}{dt} - p_N(t)q_N(t) + q_N(t)
 \end{aligned}$$

ile verilen kalıntılara bakılır. Bu kalıntıların mutlak değerlerinin grafikleri, Şekil 3.8'de verilmiştir. Kalıntı değerleri N 3'ten 6'ya çıkarken azalmışken, $N=9$ için genel olarak daha büyüktür. Böylece, (3.24) sisteminde $N=9$ kadar küçük bir değer için bile N 'yi arttırmanın yaklaşık çözümleri iyileştirmede sonucuna ulaşılabilir.

Çizelge 3.5'te ve 3.6'da, $N=3$ ve $N=6$ seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümlerin mutlak kalıntılarının homotopi pertürbasyon (Pamuk ve Pamuk 2010) ve Bessel kollokasyon yöntemleriyle (Yüzbaşı 2012a) karşılaştırılması verilmiştir. Galerkin-tipi yöntemle

elde edilen değerlerin homotopi pertürbasyon yöntemine göre biraz daha iyi, Bessel kollokasyon yöntemiyle ise hemen hemen aynı iyilikte olduğu görülmektedir.

Çizelge 3.5. Örnek 3.6’da $N=3$ ve $N=6$ ile bulunan yaklaşık av nüfusu $p_N(t)$ ’ye ait kalıntıların homotopi pertürbasyon ve Bessel kollokasyon yöntemiyle karşılaştırılması.

t	Homotopi pertürbasyon		Bessel kollokasyon		Galerkin-tipi yöntem	
	$N = 3$	$N = 4$	$N = 3$	$N = 6$	$N = 3$	$N = 6$
0	0	0	0	0	$4.700E - 3$	$2.678E - 5$
0.2	$1.589E - 4$	$1.400E - 4$	$2.200E - 3$	$3.183E - 6$	$1.800E - 3$	$5.902E - 6$
0.4	$1.250E - 2$	$1.160E - 2$	$1.100E - 3$	$2.696E - 6$	$4.622E - 4$	$4.106E - 6$
0.6	$4.120E - 2$	$3.910E - 2$	$1.500E - 3$	$3.604E - 6$	$1.300E - 3$	$1.099E - 6$
0.8	$9.420E - 2$	$9.090E - 2$	$6.000E - 2$	$8.832E - 6$	$2.708E - 4$	$1.954E - 7$
1	$1.741E - 1$	$1.709E - 1$	$2.100E - 2$	$3.272E - 4$	$8.799E - 4$	$9.393E - 6$

Çizelge 3.6. Örnek 3.6’da $N=3$ ve $N=6$ ile bulunan yaklaşık avcı nüfusu $q_N(t)$ ’ye ait kalıntıların homotopi pertürbasyon ve Bessel kollokasyon yöntemiyle karşılaştırılması.

t	Homotopi pertürbasyon		Bessel kollokasyon		Galerkin-tipi yöntem	
	$N = 3$	$N = 4$	$N = 3$	$N = 6$	$N = 3$	$N = 6$
0	0	0	0	0	$6.000E - 3$	$9.099E - 6$
0.2	$3.123E - 4$	$3.183E - 6$	$5.370E - 4$	$5.912E - 7$	$2.000E - 3$	$2.961E - 7$
0.4	$2.300E - 3$	$1.568E - 4$	$4.106E - 4$	$3.308E - 7$	$2.500E - 4$	$1.193E - 6$
0.6	$6.800E - 3$	$1.400E - 3$	$8.142E - 4$	$5.662E - 8$	$1.600E - 3$	$3.984E - 6$
0.8	$1.260E - 2$	$6.700E - 3$	$4.900E - 3$	$1.537E - 6$	$3.600E - 3$	$5.987E - 6$
1	$1.490E - 2$	$2.280E - 2$	$2.820E - 2$	$1.804E - 4$	$9.800E - 3$	$2.658E - 5$

3.2. Galerkin-tipi Yöntemin Fonksiyonel Diferansiyel Denklemlere Uygulanışı

Fonksiyonel diferansiyel denklemler, adi diferansiyel denklemlerden farklı olarak, bilinmeyen fonksiyonun, bağımsız değişkenin çeşitli fonksiyonlarını girdi olarak kabul ede-

bildiği denklemlerdir. Örneğin

$$y'(t) = y^2(t) - t + 1$$

bir adi diferansiyel denklemler

$$y'(t - 0.5) = y(t) + y(\cos(t)) + e^t$$

bir fonksiyonel diferansiyel denklemdir. Bir fonksiyonel diferansiyel denklemi en genel hâlde yazmak kolay olmadığı gibi bizim amaçlarımız için gerekli de değildir. Biz, bu kesimde, $\tau > 0$, $0 < \alpha < 1$ ve $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $y^{(k)}(t - \tau)$ ya da $y^{(k)}(\alpha t)$ ve bu ikisinin birleşimi olan $y^{(k)}(\alpha t - \tau)$ şeklinde terimler içeren denklemlerle ilgileneceğiz. $y^{(k)}(t - \tau)$ şeklinde terimler içeren denklemler "geciken değişkenli" (İng. "retarded"), $y^{(k)}(\alpha t)$ şeklinde terimler içerenler ise "oransal gecikmeli" olarak adlandırılırlar. Bu iki sınıfı içeren üst sınıf ise "gecikmeli diferansiyel denklemler" olarak bilinir.

Gecikmeli diferansiyel denklemler, temel olarak, herhangi bir ölçülebilir olgudaki bir değişimin bir başkası üzerinde belli bir süre sonunda etki yaptığı durumlarda ortaya çıkar. Bu durumla sıklıkla karşılaşıldığından, gecikmeli diferansiyel denklemler gerek temel bilimlerde gerek mühendislikte son derece yaygındır. Bu denklemlerin en bilinen uygulamaları arasında nüfus dinamiğine ilişkin modeller (Kuang 1993; MacDonald 1989), kontrol teorisi (Shampine ve Gahinet 2006), sinir ağlarının dinamiği (Coombes ve Laining 2009), bulaşıcı hastalıkların yayılmasına ilişkin modeller (Culshaw ve Ruan 2000) ve iklim bilimi uygulamaları (Battisti 1989) sayılabilir. Gecikmeli diferansiyel denklemlerin en geniş uygulama alanlarından biri matematiksel biyolojidir. Bu konudaki uygulamaların tarihsel bir dökümüyle ilgilenen okuyucular için Forde (2005) önerilir. Gecikmeli diferansiyel denklemlerin sayısal çözüm yöntemlerine ilişkin genel bir inceleme ise Shampine ve Thompson (2015)'in notunda bulunabilir.

Bu kısımda, Galerkin-tipi yöntem sırasıyla multi-pantograf denklemine, genelleştirilmiş pantograf denklemine ve gecikmeli denklem sistemlerine uygulanacaktır.

3.2.1. Multi-pantograf denkleminin sayısal çözümleri

Aşağıdaki birinci mertebeden sabit katsayılı gecikmeli diferansiyel denklem ele alın-
sın:

$$u'(x) = au(x) + bu(qx), \quad x \in I = [0, T], \quad 0 < q < 1. \quad (3.25)$$

Bu denklem "pantograf denklemi" olarak anılır ve ilk olarak elektrikli bir lokomotifle üstünden geçen iletken tel arasındaki akımın dalga hareketini modellemek için önerilmiştir (Ockendon ve Tayler 1971; Tayler 1986). Herhangi bir $u_0 \in \mathbb{R}$ için, (3.25) denkleminin $u(0)=u_0$ başlangıç koşulunu sağlayan ve $C^1(I)$ sınıfına ait olan tek bir çözümü vardır. Daha genel olarak, a ve b sabit değil de $C^m(I)$ sınıfından fonksiyonlar ise, denklemin $u(0)=u_0$ sağlayan ve $C^{m+1}(I)$ sınıfına ait olan tek bir çözümü vardır (Brunner 2004).

Pantograf denklemi birçok uygulamada rol oynayan önemli bir denklemdir. Bunun sonucu olarak, özellikle son yirmi yılda, birçok araştırmacı bu tipte problemlerin sayısal çözümlerini elde etmekle ilgilenmişlerdir. Bunlar arasında Bessel (Yüzbaşı vd. 2011a) ve Bernstein (Işık vd. 2012) polinomlarını kullanan kollokasyon yöntemlerinin yanı sıra Taylor polinomları yöntemi (Sezer, Yalçınbaş ve Gülsu 2008) de bulunmaktadır. Ayrıca, He'nin varyasyonel iterasyon yöntemi (Saadatmandi ve Dehghan 2009) ve homotopi pertürbasyon yöntemi (Feng 2013) gibi daha yeni yöntemler de pantograf-tipi denklemlere uygulanmıştır.

Bu alt bölümde, (3.25) denkleminin daha genel bir durumu olan

$$u'(x) = f(x) + \alpha(x)u(x) + \sum_{i=1}^r \beta_i(x)u(q_i x), \quad i = 1, 2, \dots, r \quad \text{için} \quad 0 < q_i < 1 \quad (3.26)$$

denklemi $0 \leq x \leq b$ aralığında $u(0)=u_0$ başlangıç koşuluyla ele alınacaktır. Bu denklemin pantograf denkleminde farklıları, birden fazla oransal gecikmeli terim içermesi ve değişken katsayılı olmasıdır. (3.26) denklemini "multi-pantograf denklemi" olarak anılmaktadır.

Galerkin-tipi yöntemin (3.26) denklemine uygulanmasının açıklanması, önceki problemlerde olduğu gibi

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k = \mathbf{X} \mathbf{A} \quad (3.27)$$

deneme fonksiyonunun tanımlanmasıyla başlar. $u(0)=u_0$ başlangıç koşulundan dolayı $a_0=u_0$ 'dır; dolayısıyla u_N deneme fonksiyonunu

$$u_N(x) = u_0 + \sum_{k=1}^N a_k x^k$$

biçiminde yazmak mümkündür. Böylece, deneme fonksiyonları kümesi ve bu kümenin bir tabanı

$$V_N = \{a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N : a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{R}\}, \quad \Phi_N = \{x, x^2, \dots, x^N\}$$

olarak belirlenir. Bu sebeple, $w_0(x)=1$ sabit fonksiyonu bu problemde test fonksiyonu değildir. Yöntemin amacı, $a_1, a_2, \dots, a_N$ katsayılarını bulmaktır.

Deneme fonksiyonunun türevi, her zamanki gibi $\mathbf{B}$ yardımcı matrisi kullanılarak

$$u'_N(x) = \mathbf{XBA} \quad (3.28)$$

şeklinde ifade edilebilir. Oransal gecikme içeren terimler ise, literatürde mevcut birçok çalışmada (Sezer ve Akyüz-Daşcıoğlu 2007; Yüzbaşı vd. 2011a) kullanılan $\mathbf{B}(\lambda, \mu)$ yardımcı matrisi aracılığıyla yazılabilir. $(N+1) \times (N+1)$ boyutundaki bu matris

$$\mathbf{B}_{i,j}(\lambda, \mu) = \binom{j-1}{i-1} \lambda^{i-1} \mu^{j-i}$$

şeklinde, ya da daha açık olarak

$$\mathbf{B}(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 1 & \mu & \mu^2 & \dots & \mu^N \\ 0 & \lambda & 2\lambda\mu & \dots & N\lambda\mu^{N-1} \\ 0 & 0 & \lambda^2 & \dots & \frac{N(N-1)}{2}\lambda^2\mu^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^N \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece, deneme fonksiyonunun gecikme içeren genel bir terimi için

$$u_N(\lambda x + \mu) = \mathbf{XB}(\lambda, \mu)\mathbf{A} \quad (3.29)$$

eşitliği yazılabilir. Multi-pantograf denklemi özelinde gecikme terimleri sadece oransal gecikme içerdiği için $\mu=0$ olur ve $\mathbf{B}(\lambda, \mu)$ yardımcı matrisi

$$\mathbf{B}(\lambda, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^N \end{bmatrix}$$

köşegen matrisine indirgenir.

Şimdi, deneme fonksiyonuna ilişkin (3.27), (3.28) ve (3.29) ifadeleri (3.26) denkleminde yazılır ve homojen olmayan terim $f(x)$ sağ tarafta bırakılırsa,

$$\left\{ \mathbf{XB} - \alpha(x)\mathbf{X} - \sum_{i=1}^r \beta_i(x)\mathbf{XB}(q_i, 0) \right\} \mathbf{A} = f(x).$$

eşitliği, ya da

$$\mathbf{G}(x) = \mathbf{XB} - \alpha(x)\mathbf{X} - \sum_{i=1}^r \beta_i(x)\mathbf{XB}(q_i, 0)$$

olmak üzere

$$\mathbf{G}(x)\mathbf{A} = f(x) \quad (3.30)$$

eşitliği elde edilir. $\mathbf{G}(x)$ girdileri x 'in fonksiyonlarından oluşan $1 \times (N+1)$ boyutunda bir satır matrisidir. (3.30) eşitliğine $x, x^2, \dots, x^N$ test fonksiyonlarıyla iç çarpım uygulamak, $i=1, 2, \dots, N, j=1, 2, \dots, N+1$ için

$$\mathbf{W}_{i+1,j} = \langle x^i, \mathbf{G}(x)_{1,j} \rangle, \mathbf{F}_{i+1,1} = \langle x^i, f(x) \rangle$$

ve $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{F}$ 'nin ilk satırları $a_0 = u_0$ eşitliğine karşılık gelmek üzere

$$\mathbf{WA} = \mathbf{F} \quad (3.31)$$

doğrusal denklem sistemini verir. Burada, $(N+1) \times (N+1)$ 'lik $\mathbf{W}$ matrisi ve $(N+1) \times 1$ 'lik $\mathbf{F}$ sütun matrisi, daha açık olarak

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \langle x, \mathbf{G}(x)_{1,1} \rangle & \langle x, \mathbf{G}(x)_{1,2} \rangle & \dots & \langle x, \mathbf{G}(x)_{1,N+1} \rangle \\ \langle x^2, \mathbf{G}(x)_{1,1} \rangle & \langle x^2, \mathbf{G}(x)_{1,2} \rangle & \dots & \langle x^2, \mathbf{G}(x)_{1,N+1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle x^N, \mathbf{G}(x)_{1,1} \rangle & \langle x^N, \mathbf{G}(x)_{1,2} \rangle & \dots & \langle x^N, \mathbf{G}(x)_{1,N+1} \rangle \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} u_0 & \langle x, f(x) \rangle & \langle x^2, f(x) \rangle & \dots & \langle x^N, f(x) \rangle \end{bmatrix}^T$$

şeklinde. (3.31) doğrusal sisteminin çözümü $a_1, a_2, \dots, a_N$ katsayılarını ve böylece

$$u_N(x) = u_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N$$

yaklaşık çözümünü verir.

Şimdi, Galerkin-tipi yöntem iki tane örnek probleme uygulanacaktır.

Örnek 3.7. Ele alınacak birinci örnek problem, ilk olarak Muroya vd. (2003) tarafından incelenmiş ve bir kollokasyon yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Daha sonra aynı probleme Sezer vd. (2008) tarafından Taylor polinomları yöntemi uygulanmıştır. Problem şu şekildedir:

$$u'(x) = -u(x) + (q/2)u(qx) - (q/2)e^{-qx}, \quad u(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.32)$$

Problemin tam çözümü q 'dan bağımsız olarak $u_{\text{tam}}(x)=e^{-x}$ fonksiyonudur. $q=0.2$ oransal gecikme değeri kullanılarak Galerkin-tipi yöntem $N=3$ seçimiyle probleme uygulanacaktır. Deneme fonksiyonu ve türevi

$$u_N(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad u'_N(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

olarak tespit edilir. Bunların ve $u(0.2x)$ oransal gecikmeli terimin (3.32) denkleminde yazılmasıyla

$$0.9 + (0.98x + 1)a_1 + (0.996x^2 + 2x)a_2 + (0.9992x^3 + 3x^2) = -0.1e^{0.2x}$$

ya da bir başka ifadeyle

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.98x + 1 & 0.996x^2 + 2x & 0.9992x^3 + 3x^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = -0.1e^{0.2x} \quad (3.33)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafı, yöntemin tarifinde tanımladığımız $G(x)$ matrisidir. (3.33) denkleminin iki tarafına x, x^2, x^3 test fonksiyonlarıyla iç çarpım uygulanması sonucunda, beş ondalık basamaklı gösterimle

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1.49 & 1.332 & 1.2498 \\ 0.45 & 0.82666 & 0.91566 & 0.94984 \\ 0.3 & 0.57833 & 0.6992 & 0.76653 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.09063 \\ -0.04380 \\ -0.02871 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{WA} = \mathbf{F}$$

doğrusal sistemi elde edilir. Bu sistemin çözülmesi

$$a_1 = -0.9948155508, a_2 = 0.4663525715, a_3 = -0.1036494463$$

katsayılarını ve

$$u_3(x) = 1 - 0.9948155508x + 0.4663525715x^2 - 0.1036494463x^3$$

yaklaşık çözümünü verir.

(3.32) problemine Galerkin-tipi yöntem $N=5, 8, 10$ seçimleriyle de uygulanmış ve $u_5(x), u_8(x), u_{10}(x)$ yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümlerin

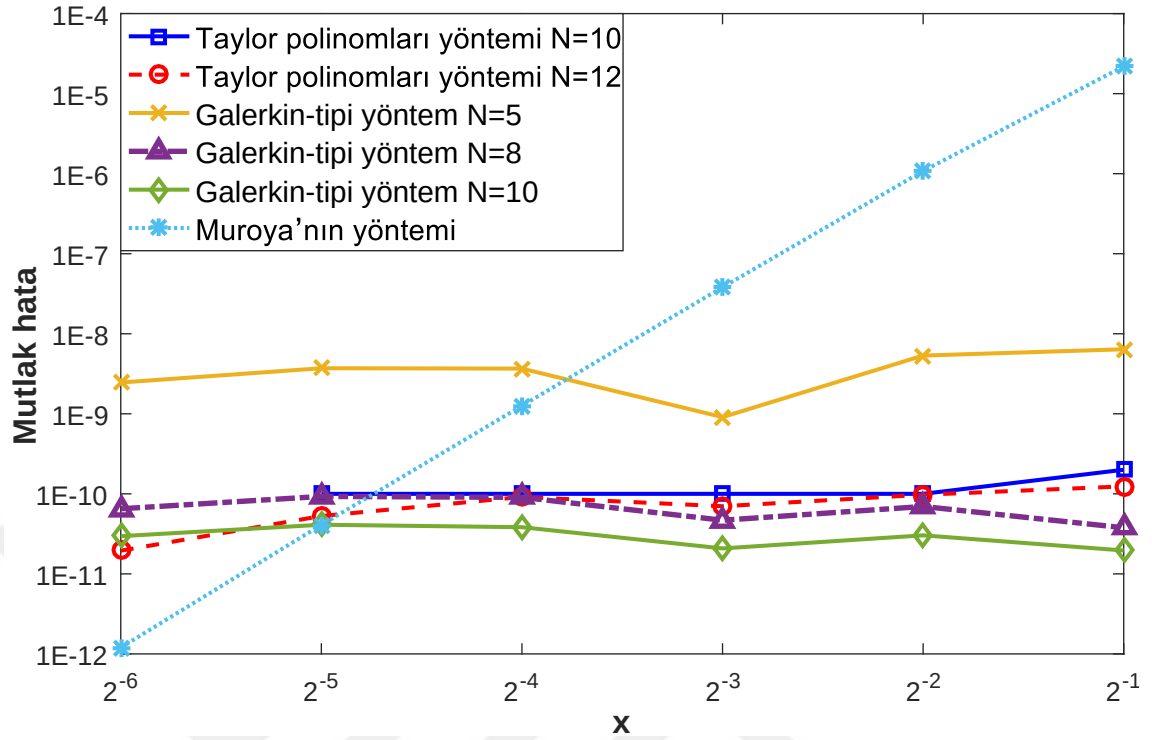
$$|e_N(x)| = |u_{\text{tam}}(x) - u_N(x)|$$

ile hesaplanan mutlak hataları hem Şekil 3.9'da hem de Çizelge 3.7'de Muroya'nın yöntemi (Muroya vd. 2003) ve Taylor polinomları yöntemi (Sezer vd. 2008) ile karşılaştırılmıştır. Galerkin-tipi yöntemle $N=8$ 'e karşılık elde edilen sonuçların hem Muroya'nın yöntemine hem de Taylor polinomları yönteminin $N=10$ ve $N=12$ seçimleriyle uygulanmasına kıyasla daha isabetli olduğu görülmektedir. Ayrıca, N değerini arttırmanın hatayı belli ölçüde azalttığı görülmektedir. Diğer iki yöntemin sunulduğu çalışmalarda sonuçlar $x=2^{-k}$, $1 \leq k \leq 6$, noktalarında verildiği için, karşılaştırma yapılırken yalnızca bu noktalar dikkate alınmıştır.

Örnek 3.8. Bu alt bölümdeki ikinci örnek şu şekildedir:

$$u'(x) = u(x) + (x^2 + 1)u(0.2x) - \frac{3 + 25x(2 + 3x + 25x^3)}{(1 + 25x^2)^2}, \quad u(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.34)$$

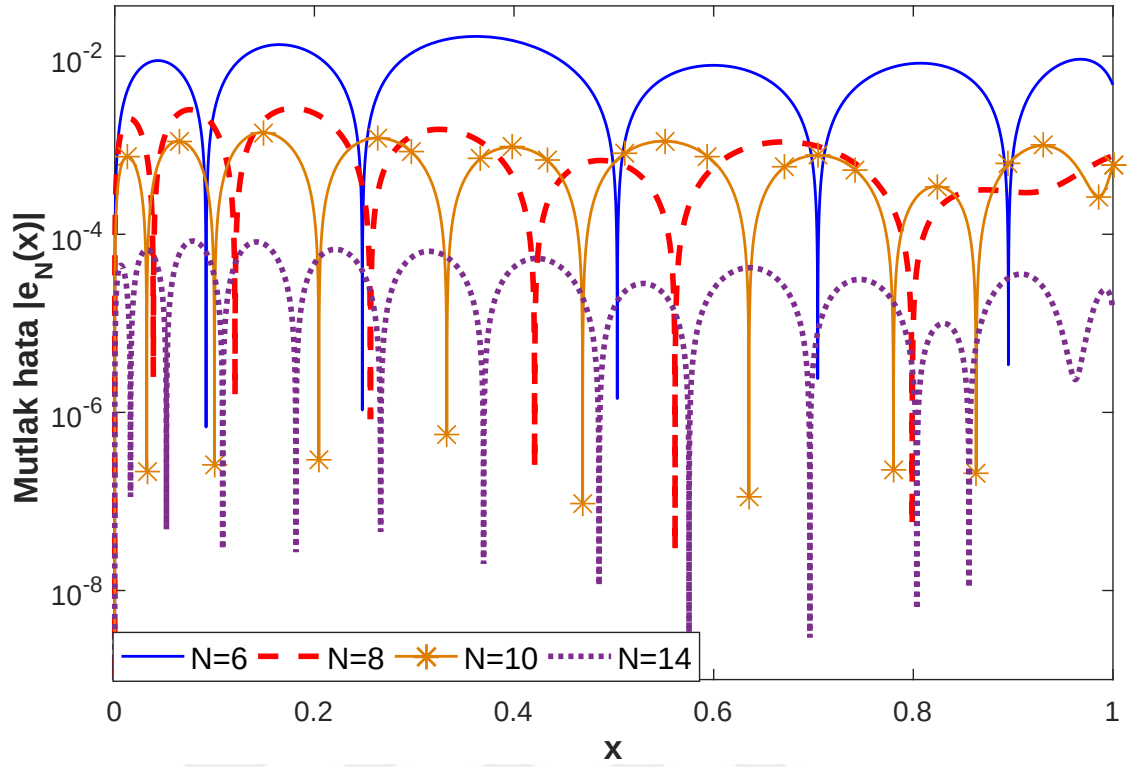
Problemin tam çözümü $u_{\text{tam}}(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$ fonksiyonudur. Bu fonksiyon, ilk olarak Runge (1901) tarafından eşit aralıklı düğüm noktaları kullanılarak yapılan polinom enterpolasyonunun yakınsamaması durumuna örnek olarak verilmiştir. "Runge olgusu" olarak bilinen bu durum birçok çalışmada ele alınmıştır, ayrıntılı bilgi için Boyd ve Ong (2009)'un çalışması incelenebilir. Galerkin-tipi yöntemin bu tür "sorunlu" çözüme sahip problemlerde nasıl sonuç verdiğini görmek açısından (3.34) denkleminde uygulamak faydalı olacaktır. Çeşitli N seçimlerine karşılık olarak elde edilen mutlak hata değerleri Şekil 3.10 ve Çizelge 3.8'de bir araya getirilmiştir. Bu değerler, N parametresinin artmasıyla birlikte yaklaşık çözümlerin bir önceki örnekteki kadar olmasa da genel olarak daha isabetli hâle geldiğini göstermektedir. Bu durum, Galerkin-tipi yöntemin, sorunlu davranış gösteren çözümlere sahip olması bakımından daha zor sınıftan sayılabilecek problemler için ümit verici olduğunu düşündürmektedir.



Şekil 3.9. Örnek 3.7 için Galerkin-tipi yöntemle ve diğer iki yöntemle elde edilen mutlak hataların grafiği.

Çizelge 3.7. Örnek 3.7 için $N=5, 8, 10$ seçimleriyle bulunan çözümlerin mutlak hatalarının Muroya'nın kollokasyon yöntemi ve Taylor polinomları yöntemi ile karşılaştırılması.

x	Muroya	Taylor polinomları		Galerkin-tipi yöntem		
		$N = 10$	$N = 12$	$N = 5$	$N = 8$	$N = 10$
2^{-1}	$2.719E - 5$	$2.00E - 10$	$1.24E - 10$	$6.404E - 7$	$1.023E - 12$	$2.345E - 12$
2^{-2}	$1.080E - 6$	$1.00E - 10$	$9.74E - 11$	$5.341E - 7$	$1.677E - 11$	$8.533E - 13$
2^{-3}	$3.817E - 8$	$1.00E - 10$	$7.00E - 11$	$9.095E - 8$	$1.138E - 11$	$4.786E - 13$
2^{-4}	$1.269E - 9$	$1.00E - 10$	$9.14E - 11$	$3.673E - 8$	$6.005E - 12$	$1.441E - 12$
2^{-5}	$4.090E - 11$	$1.00E - 11$	$5.28E - 11$	$3.715E - 7$	$7.933E - 12$	$7.278E - 13$
2^{-6}	$1.200E - 12$	0	$1.95E - 11$	$2.465E - 7$	$9.721E - 12$	$1.336E - 12$
CPU zamanı(sn)				0.0625	0.3750	0.4219



Şekil 3.10. Örnek 3.8 için Galerkin-tipi yöntemle farklı N değerlerine karşılık elde edilen mutlak hataların grafiği.

Çizelge 3.8. Örnek 3.8’de çeşitli N değerlerine karşılık gelen mutlak hatalar.

x	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$	$N = 9$	$N = 12$	$N = 14$
0.2	3.715E - 2	3.125E - 2	1.041E - 2	1.603E - 3	1.526E - 4	4.688E - 5
0.4	1.017E - 2	3.355E - 2	1.487E - 2	4.077E - 4	9.124E - 5	4.284E - 5
0.6	7.158E - 2	1.731E - 2	7.894E - 3	1.341E - 3	8.207E - 5	2.440E - 5
0.8	4.625E - 2	2.148E - 3	8.279E - 3	8.496E - 4	1.430E - 4	2.351E - 6
1	4.719E - 2	3.279E - 3	4.753E - 3	8.974E - 4	3.564E - 5	1.419E - 5
CPU zamanı(sn)	0.0625	0.0781	0.0938	0.1406	0.2031	0.2813

3.2.2. Genelleştirilmiş pantograf denkleminin sayısal çözümleri

Bu alt bölümde,

$$y^{(m)}(x) + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{j,k}(x) y^{(k)}(\lambda_{j,k}x + \mu_{j,k}) = f(x), \quad 0 \leq x \leq b, \quad (3.35)$$

denklemini

$$y^{(i)}(0) = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.36)$$

başlangıç koşulları altında ele alınacaktır. "Genelleştirilmiş pantograf denklemi" olarak bilinen bu denklem, bir önceki alt bölümün konusu olan multi-pantograf denkleminin aksine, 1'den yüksek mertebeye sahip olabilir ve oransal gecikmenin yanı sıra normal gecikmeye sahip terimler içerir. (3.35) denkleminde $P_{j,k}$ ve f , $0 \leq x \leq b$ aralığında tanımlı ve sürekli bilinen fonksiyonlar; $\lambda_{j,k}$ ve $\mu_{j,k}$ ise $0 < \lambda_{j,k} \leq 1$ ve $\mu_{j,k} \leq 0$ koşullarını sağlayan bilinen sabitlerdir.

(3.35)-(3.36) problemine Galerkin-tipi yöntemi uygulamak

$$y_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k = \mathbf{X}\mathbf{A} \quad (3.37)$$

deneme fonksiyonunu oluşturmakla başlar. Deneme fonksiyonunun türevleri ve gecikmeli terimler, önceden tanımlanan ve $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{B}(\lambda, \mu)$ yardımcı matrisleri aracılığıyla

$$y_N^{(m)}(x) = \mathbf{X}\mathbf{B}^m\mathbf{A}, \quad y_N^{(k)}(\lambda_{j,k}x + \mu_{j,k}) = \mathbf{X}\mathbf{B}(\lambda_{j,k}, \mu_{j,k})\mathbf{B}^k\mathbf{A} \quad (3.38)$$

şeklinde yazılabilir. (3.37) ve (3.38) ifadelerinin (3.35) denkleminde yazılmasıyla, denklemin

$$\left\{ \mathbf{X}\mathbf{B}^m + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{j,k}(x) \mathbf{X}\mathbf{B}(\lambda_{j,k}, \mu_{j,k})\mathbf{B}^k \right\} \mathbf{A} = f(x)$$

biçimindeki matris formu elde edilir. Bu matris formu,

$$\mathbf{G}(x) := \mathbf{X}\mathbf{B}^m + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{j,k}(x) \mathbf{X}\mathbf{B}(\lambda_{j,k}, \mu_{j,k})\mathbf{B}^k$$

tanımlanmasıyla, öz olarak

$$\mathbf{G}(x)\mathbf{A} = f(x) \quad (3.39)$$

olarak yazılabilir. $\mathbf{G}(x)$, girdileri x 'in fonksiyonları olan $N+1$ uzunluğunda bir satır matrisidir. İç çarpım adımından önce, m başlangıç koşuluna karşılık gelen denklemlerin

$$y_N^{(i)}(0) = \mathbf{X}(0)\mathbf{B}^i\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B}^i\mathbf{A} = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.40)$$

şeklinde matris çarpımlarıyla ifade edilebileceği görülür. Geriye kalan $N+1-m$ denklem, (3.39) matris denkleminde $x^m, x^{m+1}, \dots, x^N$ test fonksiyonlarıyla iç çarpım uygulanmasıyla bulunur. Böylece, $i=m, m+1, \dots, N$ ve $j=1, 2, \dots, N+1$ için

$$\mathbf{W}_{i+1,j} = \langle x^i, \mathbf{G}(x)_{1,j} \rangle, \quad \mathbf{F}_{i+1,1} = \langle x^i, f(x) \rangle$$

olmak üzere, ilk m satırın başlangıç koşullarının (3.40) matris formlarıyla doldurulmasıyla, $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{F}$ matrisleri

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0)\mathbf{A} \\ \mathbf{X}(0)\mathbf{B}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{X}(0)\mathbf{B}^{m-1}\mathbf{A} \\ \langle x^m, \mathbf{G}(x)_{1,1} \rangle & \langle x^m, \mathbf{G}(x)_{1,2} \rangle & \dots & \langle x^m, \mathbf{G}(x)_{1,N+1} \rangle \\ \langle x^{m+1}, \mathbf{G}(x)_{1,1} \rangle & \langle x^{m+1}, \mathbf{G}(x)_{1,2} \rangle & \dots & \langle x^{m+1}, \mathbf{G}(x)_{1,N+1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle x^N, \mathbf{G}(x)_{1,1} \rangle & \langle x^N, \mathbf{G}(x)_{1,2} \rangle & \dots & \langle x^N, \mathbf{G}(x)_{1,N+1} \rangle \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{m-1} & \langle x^m, f(x) \rangle & \langle x^{m+1}, f(x) \rangle & \dots & \langle x^N, f(x) \rangle \end{bmatrix}^T$$

olarak elde edilir. $\mathbf{W}\mathbf{A}=\mathbf{F}$ doğrusal sisteminin çözülmesiyle

$$y_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$$

yaklaşık çözümü hesaplanmış olur.

Şimdi, Galerkin-tipi yöntemin geliştirilmiş pantograf denklemi üzerinde uygulaması tek bir örnekle görülecektir.

Örnek 3.9. Ele alınacak örnek problem, daha önce Sezer ve Akyüz Daşcıoğlu (2007), Öztürk ve Gülsu (2012) ve Tohidi vd. (2013) tarafından incelenmiş ve sayısal çözümleri bulunmuş aşağıdaki üçüncü mertebeden problemidir:

$$y'''(x) + y(x) + y(x - 0.3) = e^{-x+0.3}, y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 1. \quad (3.41)$$

Problem $0 \leq x \leq 1$ aralığında ele alınacaktır.

(3.41) probleminin tam çözümü $y_{\text{tam}}(x) = e^{-x}$ 'tir. Galerkin-tipi yöntemi $N=4$ seçimi ile probleme uygulamak,

$$y_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

deneme fonksiyonunu oluşturmakla başlar. y_4 'ü içeren diğer terimler olan

$$y_4'''(x) = 6a_3 + 24a_4x, y_4(x - 0.3) = (0.09 + a_0 - 0.3a_1 + a_2 - 0.027a_3 + 0.0081a_4) - (0.6 - a_1 - 0.27a_3 + 0.108a_4)x + (1 - 0.9a_3 + 0.54a_4)x^2 + (a_3 - 1.2a_4)x^3 + a_4x^4$$

ifadelerinin (3.41) denkleminde yazılmasıyla

$$\begin{bmatrix} 2 & 2x - 0.3 & (x - 0.3)^2 + x^2 & (x - 0.3)^3 + x^3 + 6 & 24x + (x - 0.3)^4 + x^4 \end{bmatrix} \mathbf{A} = e^{0.3-x} \quad (3.42)$$

matris denklemi elde edilir. Başlangıç koşullarının matris formları

$$\begin{aligned} y_4(0) &= \mathbf{X}(0)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} = 1, \\ y_4'(0) &= \mathbf{X}(0)\mathbf{B}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} = -1, \\ y_4''(0) &= \mathbf{X}(0)\mathbf{B}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} = 1 \end{aligned}$$

şeklindedir. Geriye kalan iki denklem, (3.42) matris denkleminde iki tarafa x^3 ve x^4 ile iç çarpım uygulanmasıyla elde edilir. Bu denklemler

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.325 & 0.23583 & 1.6829 & 4.9489 \end{bmatrix} \mathbf{A} &= 0.15378, \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.27333 & 0.20371 & 1.3610 & 4.1329 \end{bmatrix} \mathbf{A} &= 0.11856 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bunların başlangıç koşullarıyla birleştirilmesiyle

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.325 & 0.23583 & 1.6829 & 4.9489 \\ 0.4 & 0.27333 & 0.20371 & 1.3610 & 4.1329 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0.15378 \\ 0.11856 \end{bmatrix}$$

doğrusal sistemi oluşur. Bu sistemin çözümü olan

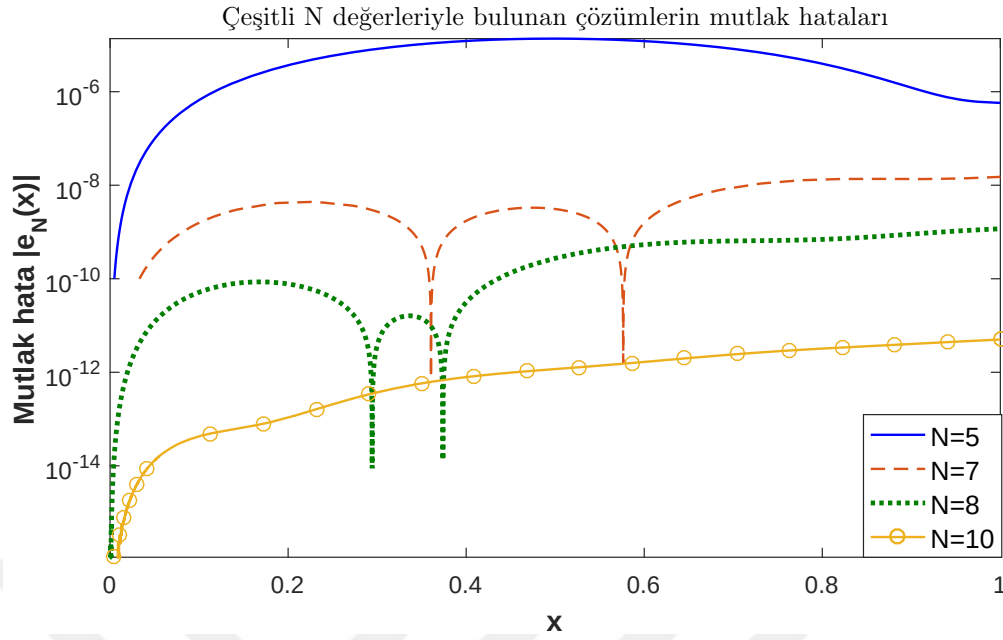
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0.5 & -0.1402155134 & 0.0195694260 \end{bmatrix}$$

matrisi

$$y_4(x) = 1 - x + 0.5x^2 - 0.1402155134x^3 + 0.0195694260x^4$$

yaklaşık çözümünü verir.

$N=4$ dışında çeşitli N seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümlerin mutlak hataları Şekil 3.11'de görsel olarak sunulmuştur. N değerinin artmasıyla hataların belirgin düzeyde azaldığı görülmektedir. Çizelge 3.9'da ise elde edilen mutlak hatalar çeşitli N değerleri için Taylor polinomları (kısaca Taylor) yöntemi (Sezer ve Akyüz Daşcıoğlu 2007),



Şekil 3.11. Örnek 3.9 için çeşitli N seçimlerine karşılık bulunan mutlak hatalar.

Chebyshev-Gauss düğüm noktaları (kısaca Chebyshev) yöntemi (Öztürk ve Gülsu 2012) ve Bernoulli polinomlarına dayalı işlemsel matris (kısaca CMBOM) yöntemi (Tohidi vd. 2013) ile karşılaştırılmıştır. Bu problem için Galerkin-tipi yöntemle elde edilen değerlerin Chebyshev yöntemine kıyasla daha iyi olduğu, diğer iki yöntemle kıyasla ise belirgin düzeyde bir farklılık olmadığı, çizelgedeki değerlerden anlaşılmaktadır. Öte yandan, başlangıç koşullarının verildiği $x=0$ noktasından uzaklaşıldıkça Galerkin-tipi yöntemin diğer yöntemlerden daha iyi olması dikkat çekicidir.

3.2.3. Doğrusal gecikmeli diferansiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümleri

Bu kısımda, bir önceki alt bölümde incelenen genelleştirilmiş pantograf denklemlerinden oluşan sistemler ele alınacaktır. Böyle bir sistem, $a \leq x \leq b$ aralığında

$$\sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k P_{i,j}^n(x) y_j^{(n)}(x - \mu_{i,j}^n) = g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.43)$$

şeklinde ifade edilebilir. Gösterim basitliği sağlaması amacıyla, (3.35) ile verilen genelleştirilmiş pantograf denkleminin aksine, bu sefer belli bir y_j bilinmeyen fonksiyonun n 'inci türevi, i 'inci denklemde tek bir gecikme terimi ile gözükcektir. (3.43) sistemi,

$$\sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j}^n y_n^{(j)}(a) + b_{i,j}^n y_n^{(j)}(b)) = \alpha_{n,i}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad n = 1, 2, \dots, k. \quad (3.44)$$

Çizelge 3.9. Örnek (3.9)'da çeşitli N değerleriyle elde edilen çözümlerin mutlak hata bakımından üç diğer yöntemle karşılaştırılması.

	Taylor	CMBOM yöntemi		Chebyshev	Galerkin-tipi yöntem		
x	$N = 5$	$N = 5$	$N = 8$	$N = 8$	$N = 5$	$N = 8$	$N = 11$
0.2	$8.54E - 8$	$3.69E - 7$	$5.11E - 11$	$3.70E - 7$	$3.68E - 6$	$7.74E - 11$	$1.03E - 14$
0.4	$5.36E - 6$	$2.37E - 6$	$2.50E - 10$	$2.38E - 6$	$1.21E - 5$	$5.76E - 8$	$6.17E - 14$
0.6	$5.95E - 5$	$5.96E - 6$	$5.94E - 10$	$5.97E - 6$	$1.20E - 5$	$5.37E - 10$	$1.40E - 13$
0.8	$3.26E - 4$	$3.48E - 5$	$7.11E - 10$	$3.48E - 5$	$3.97E - 6$	$6.93E - 10$	$2.60E - 13$
1	$1.21E - 3$	$2.03E - 4$	$2.68E - 8$	$2.03E - 4$	$5.75E - 7$	$1.17E - 9$	$4.11E - 13$

karışık koşulları altında ele alınacaktır. $P_{i,j}^n$ ve g_i fonksiyonları $[a, b]$ aralığında bilinen tek değişkenli sürekli fonksiyonlar, $a_{i,j}^n, b_{i,j}^n$ ve $\alpha_{n,i}$ bilinen sabitlerdir.

Her zamanki gibi, deneme fonksiyonları herhangi bir N seçimi için

$$y_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^N a_{i,n} x^n = \mathbf{X} \mathbf{A}_i, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

ile tanımlanır. Bunların gecikmeli terimler içeren türevleri ise

$$y_{i,N}^{(n)}(x - \mu_{i,j}^n) = \mathbf{X} \mathbf{B}(1, -\mu_{i,j}^n) \mathbf{B}^n \mathbf{A}_i, \quad n = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, k$$

ile ifade edilebilir. Deneme fonksiyonlarına ilişkin matris ifadelerinin (3.43) denkleminde yazılmasıyla

$$\sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k P_{i,j}^n(x) \mathbf{X} \mathbf{B}(1, -\mu_{i,j}^n) \mathbf{B}^n \mathbf{A}_j = g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.45)$$

elde edilir. Bunu tek matris çarpımı olarak yazmak amacıyla, Bölüm 3.1.3'teki gibi ilerlenerek

$$\mathbf{F}_{i,j} = \sum_{n=0}^m P_{i,j}^n(x) \mathbf{X} \mathbf{B}(1, -\mu_{i,j}^n) \mathbf{B}^n, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

tanımlanabilir. Ardından, bilinmeyen katsayıları barındıran $\mathbf{A}_j$ sütun matrislerinin alt alta eklenmesiyle oluşan $\mathbf{A}$ sütun matrisinin ve söz konusu bölümde tanımlanan $\mathcal{I}_j$ yardımcı matrislerinin kullanılmasıyla, (3.45) eşitliği öz olarak

$$\left(\sum_{j=1}^k \mathbf{F}_{i,j}(x) \mathcal{I}_j \right) \mathbf{A} = \mathbf{F}_i(x) \mathbf{A} = g_i(x).$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade, (3.43) sistemindeki i 'inci denklemi göstermektedir. Tüm sistemin tek matris denklemiyle ifade edilmesi için, $\mathbf{A}_j$ bilinmeyen katsayı matrislerine yapılanın aynısı $\mathbf{F}_i$ satır matrislerine ve g_i fonksiyonlarına yapılarak

$$\mathbf{F}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(x) \\ \mathbf{F}_2(x) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_k(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{bmatrix}$$

yazmak yeterlidir. Böylece, (3.43) sistemi

$$\mathbf{F}(x)\mathbf{A} = \mathbf{g}(x) \quad (3.46)$$

eşitliğine indirgenir. (3.44) karışık koşulları (3.9) doğrusal sistemiyle ele alınan koşulların aynısı olduğundan, matris ifadeleri de aynı şekilde olur. Böylece, n 'inci deneme fonksiyonu $y_{n,N}$ 'ye karşılık gelen i 'inci karışık koşul

$$\left[\sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j}^n \mathbf{X}(a) + b_{i,j}^n \mathbf{X}(b)) \mathbf{B}^j \right] \mathbf{A}_n = \left[\sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j}^n \mathbf{X}(a) + b_{i,j}^n \mathbf{X}(b)) \mathbf{B}^j \right] \mathcal{I}_n \mathbf{A} \\ := \mathbf{C}_{n,i} \mathbf{A} = \lambda_{n,i}$$

olarak yazılabilir. Bu koşulların tamamı, matrisleri uç uca ekleme işleminin tekrar uygulanmasıyla

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1,1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{1,m} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{k,1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{k,m} \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} \\ \vdots \\ \lambda_{1,m} \\ \vdots \\ \lambda_{k,1} \\ \vdots \\ \lambda_{k,m} \end{bmatrix} \quad \text{ya da} \quad \mathbf{CA} = \Lambda$$

biçiminde tek matris çarpımına indirgenir. Bütün deneme fonksiyonlarında bulunan toplam $k(N+1)$ bilinmeyeni tespit etmek için gereken aynı sayıda doğrusal denklemin km tanesi karışık koşullarca sağlandığından, geriye kalan $k(N+1-m)$ denklem (3.46) eşitliğine yalnızca $x^m, x^{m+1}, \dots, x^N$ test fonksiyonlarıyla iç çarpım uygulamakla elde edilir. Sonuçta elde edilecek doğrusal

$$\mathbf{WA} = \mathbf{G} \quad (3.47)$$

cebirsel denklem sisteminde $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{G}$ 'nin ilk km satırı karışık koşullar tarafından, geri kalan satırlar ise $i=m, m+1, \dots, N, j=1, 2, \dots, k, l=1, 2, \dots, k(N+1)$ için

$$\mathbf{W}_{ik+j,l} = \langle \mathbf{F}(x)_{j,l}, x^i \rangle, \mathbf{G}_{ik+j,1} = \langle g_j(x), x^i \rangle$$

iç çarpımları kullanılarak oluşturulur. Böylece, $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{G}$ matrisleri açık olarak

$$\begin{bmatrix} & \mathbf{C} & \\ \langle \mathbf{F}(x)_{1,1}, x^m \rangle & \langle \mathbf{F}(x)_{1,2}, x^m \rangle & \dots & \langle \mathbf{F}(x)_{1,k(N+1)}, x^m \rangle \\ \langle \mathbf{F}(x)_{2,1}, x^m \rangle & \langle \mathbf{F}(x)_{2,2}, x^m \rangle & \dots & \langle \mathbf{F}(x)_{2,k(N+1)}, x^m \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle \mathbf{F}(x)_{k,1}, x^m \rangle & \langle \mathbf{F}(x)_{k,2}, x^m \rangle & \dots & \langle \mathbf{F}(x)_{k,k(N+1)}, x^m \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle \mathbf{F}(x)_{1,1}, x^N \rangle & \langle \mathbf{F}(x)_{1,2}, x^N \rangle & \dots & \langle \mathbf{F}(x)_{1,k(N+1)}, x^N \rangle \\ \langle \mathbf{F}(x)_{2,1}, x^N \rangle & \langle \mathbf{F}(x)_{2,2}, x^N \rangle & \dots & \langle \mathbf{F}(x)_{2,k(N+1)}, x^N \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle \mathbf{F}(x)_{k,1}, x^N \rangle & \langle \mathbf{F}(x)_{k,2}, x^N \rangle & \dots & \langle \mathbf{F}(x)_{k,k(N+1)}, x^N \rangle \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \langle g_1(x), x^m \rangle \\ \langle g_2(x), x^m \rangle \\ \vdots \\ \langle g_k(x), x^m \rangle \\ \vdots \\ \langle g_1(x), x^N \rangle \\ \langle g_2(x), x^N \rangle \\ \vdots \\ \langle g_k(x), x^N \rangle \end{bmatrix}$$

olur. Son olarak, (3.47) doğrusal sisteminin çözülmesiyle $\mathbf{A}$ bilinmeyen matrisi ve

$$y_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^N a_{i,n} x^n, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

yaklaşık çözümleri hesaplanmış olur.

Örnek 3.10. Bu kısımda ele alınacak tek örnek problem, daha önce Ramadan vd. (2009) ve Yüzbaşı (2012b) tarafından sayısal olarak çözülen aşağıdaki ikinci mertebeden iki bilinmeyenli gecikmeli sistemdir:

$$\begin{aligned} y_1''(x) - y_1(x) - y_1(x - 0.2) + y_2(x) &= e^{-x} - e^{x-0.2}, \\ y_1(x) + y_2''(x) - y_2(x) - y_2(x - 0.2) &= e^x - e^{0.2-x}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Bu sistem

$$y_1(0) = y_1'(0) = 1, y_2(0) = 1, y_2'(0) = -1 \quad (3.49)$$

başlangıç koşullarıyla ele alınacaktır. Problemin tam çözümünün $y_{1,\text{tam}}(x) = e^x, y_{2,\text{tam}}(x) = e^{-x}$ olduğu bilinmektedir.

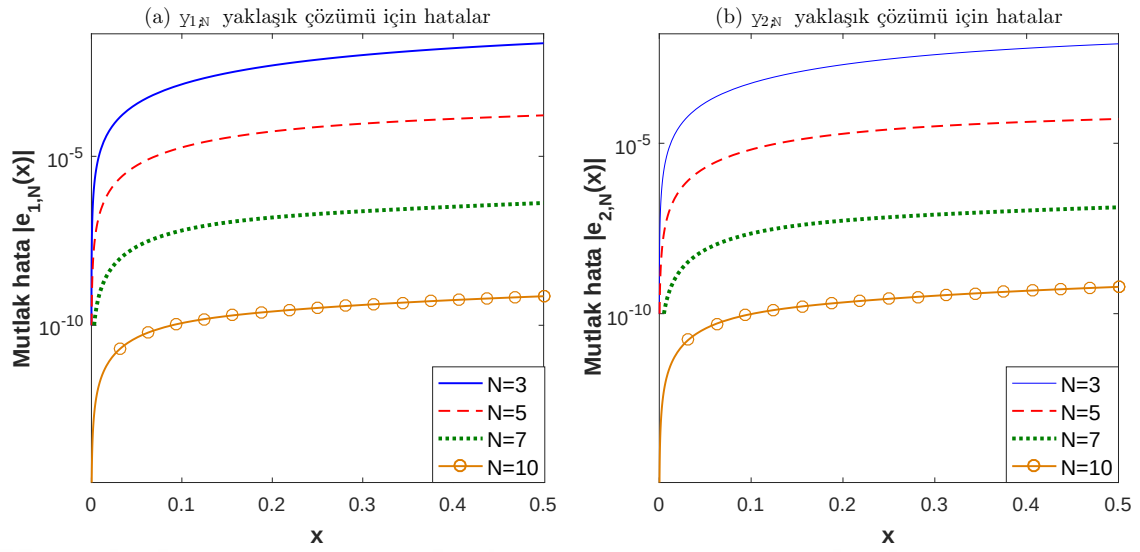
(3.48)-(3.49) problemine Galerkin-tipi yöntem çeşitli N seçimleriyle uygulanmıştır. Sonuçta elde edilen tam çözümlerin mutlak hataları Şekil 3.12’de $y_{1,N}$ ve $y_{2,N}$ çözümleri için ayrı ayrı gösterilmiştir. Önceki örneklerde olduğu gibi, N değerini arttırmanın hataları büyük ölçüde azalttığı görülmektedir. Elde edilen mutlak hata değerleri Çizelge 3.10 ve 3.11’de spline fonksiyonu yöntemi (SFY) (Ramadan vd. 2009) ve Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı 2012b) ile karşılaştırılmıştır. Galerkin-tipi yöntemin $N=5$ seçimi dışında spline fonksiyonu yönteminden daha iyi, Bessel kollokasyon yönteminden ise daha kötü sonuç verdiği anlaşılmaktadır.

3.2.4. Doğrusal olmayan gecikmeli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri: T4 hücrelerinin HIV ile enfekte olması modeli

1970’li yılların sonlarında, insan bağışıklık sisteminde önemli bir role sahip olan $CD4^+$ T-hücreleri (kısaca T4 hücreleri) keşfedilmiştir. Bu keşiften sonra birçok araştırmacı dikkatlerini bu yeni hücre grubunun araştırılmasına yöneltmiş, bazı çalışmalar (Lane ve Fauci 1985; Redfield vd. 1986) bu hücrelerin kandaki sayısı ile Edinilmiş Bağışıklık Eksikliği Sendromu (AIDS) virüsü HIV arasında yakın bir ilişki olduğunu ortaya koymuştur. Böylece, bu ilişkiyi tarif eden matematiksel modellerin geliştirilmesi bir ihtiyaç hâlini almış, sonunda Perelson vd. (1993) tarafından önerilen aşağıdaki model bu konuda bir dönüm noktası olmuştur:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= s - \mu_T T + rT \left(1 - \frac{T+I}{T_{\max}}\right) - kVT, \\ \frac{dI}{dt} &= k'VT - \mu_I I, \\ \frac{dV}{dt} &= N\mu_b I - kVT - \mu_V V.\end{aligned}\tag{3.50}$$

Bu modelde $T(t)$, t anında kandaki sağlıklı T4 hücresi yoğunluğunu; $I(t)$, kandaki virüs bulaşmış T4 hücresi yoğunluğunu; $V(t)$ ise kandaki virüs yoğunluğunu göstermektedir. Bu modelin geniş bir kabul gördüğü ilk birkaç yılın ardından, Culshaw ve Ruan virüsün hücreye girdikten sonra hücreyi etkilemesi için geçmesi gereken bir tutulma evresi (*Ing. "eclipse phase"*) bulunduğunu tespit etmiş ve aşağıdaki gecikmeli modeli önermişlerdir (Culshaw ve Ruan 2000):



Şekil 3.12. Örnek 3.10 için dört farklı N değeriyle bulunan yaklaşık çözümlerin mutlak hataları.

Çizelge 3.10. Örnek 3.10’da $y_1(x)$ için üç farklı N değeriyle elde edilen mutlak hataların spline fonksiyonu yöntemi ve Bessel kollokasyon yöntemiyle karşılaştırılması.

x	SFY	Bessel kollokasyon yöntemi			Galerkin-tipi yöntem		
	$N = 10, r = 1$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 10$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 10$
0.1	4.3E – 6	2.343E – 7	7.439E – 10	3.330E – 15	1.837E – 5	6.393E – 8	1.610E – 10
0.2	2.8E – 5	1.125E – 6	2.651E – 9	8.881E – 15	5.458E – 5	1.550E – 7	2.560E – 10
0.3	8.1E – 5	2.050E – 6	4.064E – 9	2.731E – 14	9.276E – 5	2.371E – 7	3.997E – 10
0.4	3.0E – 4	2.573E – 6	5.602E – 9	5.395E – 14	1.285E – 4	3.221E – 7	5.570E – 10
0.5	7.3E – 4	3.156E – 6	7.409E – 9	9.170E – 14	1.633E – 4	4.157E – 7	7.237E – 10

Çizelge 3.11. Örnek 3.10’da $y_2(x)$ için üç farklı N değeriyle elde edilen mutlak hataların spline fonksiyonu yöntemi ve Bessel kollokasyon yöntemiyle karşılaştırılması.

x	SFY	Bessel kollokasyon yöntemi			Galerkin-tipi yöntem		
	$N = 10, r = 1$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 10$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 10$
0.1	4.1E – 6	1.407E – 7	3.917E – 10	2.331E – 15	6.554E – 6	2.252E – 8	9.756E – 11
0.2	2.2E – 5	6.678E – 7	1.390E – 9	4.440E – 15	1.901E – 5	5.372E – 8	2.140E – 10
0.3	4.5E – 5	1.210E – 6	2.119E – 9	9.325E – 15	3.149E – 5	8.053E – 8	3.355E – 10
0.4	1.4E – 6	1.521E – 6	2.879E – 9	1.323E – 14	4.234E – 5	1.063E – 7	4.695E – 10
0.5	2.6E – 4	1.845E – 6	3.731E – 9	1.310E – 14	5.182E – 5	1.321E – 7	6.124E – 10

$$\begin{aligned}
\frac{dT(t)}{dt} &= s - \mu_T T(t) + r T(t) \left(1 - \frac{T(t) + I(t)}{T_{\max}} \right) - k V(t) T(t), \\
\frac{dI(t)}{dt} &= k' V(t - \tau) T(t - \tau) - \mu_I I(t), \\
\frac{dV(t)}{dt} &= N \mu_b I(t) - k V(t) T(t) - \mu_V V(t). \\
T(\theta) &= T_0, V(\theta) = V_0 \quad \forall \theta \in [-\tau, 0], I(0) = 0.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Bu modelin (3.50) sisteminden temel farkı, virüslü T4 hücresi yoğunluğu $I(t)$ 'nin değişimini gösteren denklemde sağlıklı T4 hücresi yoğunluğu $T(t)$ ve virüs yoğunluğu $V(t)$ 'nin $t-\tau$ şeklinde bir gecikme terimiyle birlikte gözükmesidir. Buradaki τ virüsün tutulma evresine karşılık gelmektedir; bir başka deyişle, virüs sağlıklı bir hücreye girdiği andan itibaren τ kadar bir süre etkinlik göstermemektedir. Ölçümün yapılmaya başlandığı $t=0$ anından önceki τ uzunluğunda süre boyunca sağlıklı T4 hücresi ve ortamdaki HIV yoğunluğunun sırayla T_0 ve V_0 sabitlerine eşit olduğu, $t=0$ anında ortamda hiç virüs bulaşmış T4 hücresi bulunmadığı varsayılmaktadır. Modeldeki k parametresi sağlıklı T4 hücrelerinin ortamdaki serbest HIV tarafından enfekte olma oranı, k' ise virüs bulaşmış hücrelerden virüs üretme kabiliyetine ulaşmış olanların oranıdır. Tipik olarak $k' < k$ olur. μ_I enfekte olmuş hücrelerin genel ölüm oranı, μ_b ise patlama yoluyla ölüm oranıdır. Virüslü bir hücrenin patlayarak ölümü sırasında kana ortalama N adet virüs yayılmaktadır. r sağlıklı T4 hücrelerinin üreme oranını, $T_{\max}$ ise kanda bulunabilen en yüksek T4 hücresi oranını, s vücudun T4 hücresi üretme oranını göstermektedir. μ_T ve μ_V ise sırasıyla sağlıklı T4 hücrelerinin ve virüslerin doğal ölüm oranıdır.

(3.51) sistemine Galerkin-tipi yöntemin uygulanması, her zamanki gibi deneme fonksiyonlarını tespit etmekle başlar. Bu deneme fonksiyonları, seçilen bir N değeri için

$$T_N(t) = \sum_{k=0}^N s_k t^k, I_N(t) = \sum_{k=0}^N u_k t^k, V_N(t) = \sum_{k=0}^N v_k t^k$$

şeklindedir. Bilinmeyen katsayıların

$$\mathbf{S} = [s_0 \ s_1 \ \dots \ s_N]^T, \mathbf{U} = [u_0 \ u_1 \ \dots \ u_N]^T, \mathbf{V} = [v_0 \ v_1 \ \dots \ v_N]^T$$

olarak satır matrislerinde toplanması ve $\mathbf{T} = \mathbf{X}_N(t)$, $\mathbf{T}_{2N} = \mathbf{X}_{2N}(t)$ gösterimlerinin kulla-

nılmasıyla deneme fonksiyonları ve türevleri

$$T_N(t) = \mathbf{TS}, \quad I_N(t) = \mathbf{TU}, \quad V_N(t) = \mathbf{TV},$$

$$\frac{dT_N}{dt} = \mathbf{TBS}, \quad \frac{dI_N}{dt} = \mathbf{TBU}, \quad \frac{dV_N}{dt} = \mathbf{TBV}$$

şeklinde yazılabilir. Bunların çarpım durumunda olduğu terimlerin ifade edilmesi amacıyla, daha önce doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem sistemlerinde tanımlanan $(2N+1) \times (N+1)$ 'lik yardımcı matris, T_N 'nin katsayıları kullanılarak $j \leq i \leq j+N$ için $\tilde{\mathbf{S}}_{i,j} = s_{i-j}$, aksi durumda $\tilde{\mathbf{S}}_{i,j} = 0$ olarak tanımlanır. Daha açık olarak

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} s_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_1 & s_0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & s_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_N & s_{N-1} & s_{N-2} & \dots & s_0 \\ 0 & s_N & s_{N-1} & \dots & s_1 \\ 0 & 0 & s_N & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_N \end{bmatrix}.$$

yazılmasıyla, çarpım içeren gecikmesiz terimler

$$T_N^2(t) = \mathbf{T}_{2N} \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{S}, \quad T_N(t) I_N(t) = \mathbf{T}_{2N} \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{U}, \quad T_N(t) V_N(t) = \mathbf{T}_{2N} \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{V}$$

olarak yazılabilir. Gecikmeli terim ise, multi-pantograf denkleminin incelenmesi sırasında tanımlanan $\mathbf{B}(\lambda, \mu)$ matrisinin $(2N+1) \times (2N+1)$ boyutunda alınmasıyla

$$T_N(t - \tau) V_N(t - \tau) = \mathbf{T}_{2N} \mathbf{B}(1, -\tau) \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{V}$$

olarak ifade edilebilir. Bulunan tüm matris ifadelerinin (3.51) sisteminde yazılmasıyla, matrisler cinsinden ifade edilmiş aşağıdaki sistem oluşur:

$$\mathbf{TBS} + (\mu_T - r) \mathbf{TS} + \frac{r}{T_{\max}} \mathbf{T}_{2N} \tilde{\mathbf{S}} (\mathbf{S} + \mathbf{U}) + k \mathbf{T}_{2N} \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{V} = s,$$

$$\mathbf{TBU} - k' \mathbf{T}_{2N} \mathbf{B}(1, -\tau) \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{V} + \mu_I \mathbf{TU} = 0,$$

$$\mathbf{TBV} - N \mu_b \mathbf{TU} + \mu_V \mathbf{TV} + k \mathbf{T}_{2N} \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{V} = 0.$$

Bu sistem, daha önce tanımlanan $(N+1) \times (3N+3)$ 'lük $\mathcal{I}_i$ yardımcı matrislerinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_1(t) &= \left(\mathbf{T}\mathbf{B} + (\mu_T - r)\mathbf{T} + \frac{r}{T_{\max}}\mathbf{T}_{2N}\tilde{\mathbf{S}} \right) \mathcal{I}_1 + \left(\frac{r}{T_{\max}}\mathbf{T}_{2N}\tilde{\mathbf{S}} \right) \mathcal{I}_2 + k\mathbf{T}_{2N}\tilde{\mathbf{S}}\mathcal{I}_3, \\ \mathbf{G}_2(t) &= (\mathbf{T}\mathbf{B} + \mu_I\mathbf{T})\mathcal{I}_2 - k'\mathbf{T}_{2N}\mathbf{B}(1, -\tau)\tilde{\mathbf{S}}\mathcal{I}_3, \\ \mathbf{G}_3(t) &= -N\mu_b\mathbf{T}\mathcal{I}_2 + (\mathbf{T}\mathbf{B} + \mu_V\mathbf{T} + k\mathbf{T}_{2N}\tilde{\mathbf{S}})\mathcal{I}_3\end{aligned}$$

tanımlanması ve bunlarla tüm bilinmeyen katsayıların

$$\mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1(t) \\ \mathbf{G}_2(t) \\ \mathbf{G}_3(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}$$

şeklinde ayrı matrislerde toplanmasıyla

$$\mathbf{G}(t)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

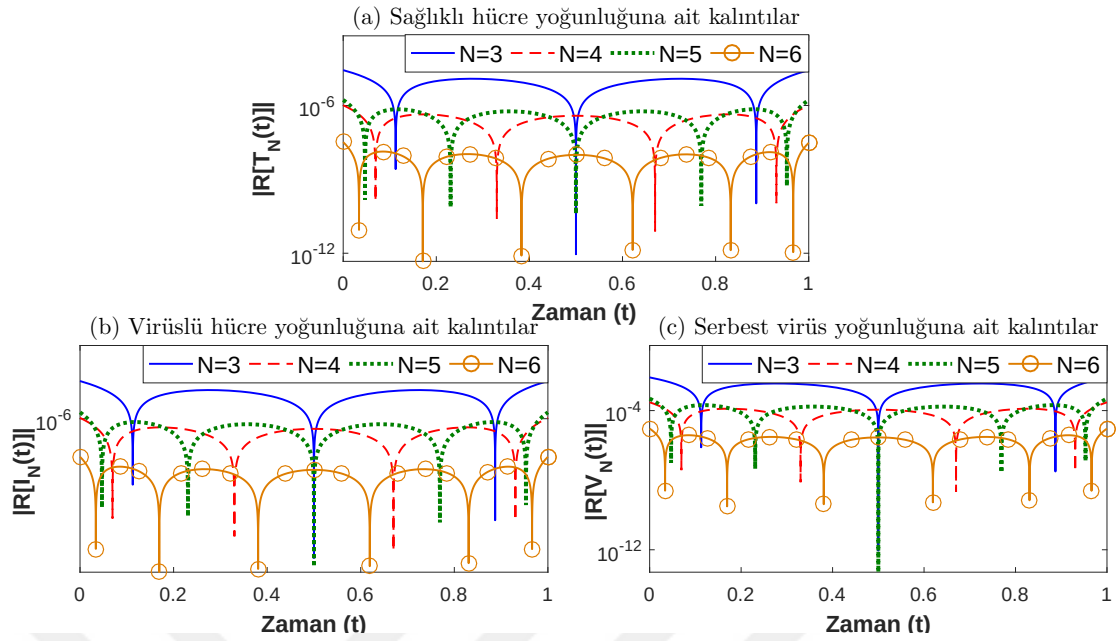
olarak tek bir matris çarpımı biçiminde ifade edilebilir. Burada, $\mathbf{G}(t)$ girdileri t 'nin fonksiyonlarından ve T_N deneme fonksiyonunun katsayıları olan s_i bilinmeyenlerinden oluşan $3 \times (3N+3)$ boyutunda bir matristir. (3.52) eşitliğine $x, x^2, \dots, x^N$ test fonksiyonları ile iç çarpım uygulanmasıyla $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{F}$ matrislerinin son $3N$ satırlarının girdileri, $i = 1, 2, \dots, N$ ve $j=1, 2, \dots, 3N+3$ için

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{3i+1,j} &= \langle x^i, \mathbf{G}(t)_{1,j} \rangle, \quad \mathbf{F}_{3i+1,1} = \langle x^i, s \rangle, \\ \mathbf{W}_{3i+2,j} &= \langle x^i, \mathbf{G}(t)_{2,j} \rangle, \quad \mathbf{F}_{3i+2,1} = \langle x^i, 0 \rangle, \\ \mathbf{W}_{3i+3,j} &= \langle x^i, \mathbf{G}(t)_{3,j} \rangle, \quad \mathbf{F}_{3i+3,1} = \langle x^i, 0 \rangle\end{aligned}$$

biçiminde, ilk üç satırlarının girdileri ise $t=0$ anındaki başlangıç koşulları kullanılarak

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{X}(0)\mathcal{I}_1, \mathbf{W}_2 = \mathbf{X}(0)\mathcal{I}_2, \mathbf{W}_3 = \mathbf{X}(0)\mathcal{I}_3, \mathbf{F}_1 = T_0, \mathbf{F}_2 = 0, \mathbf{F}_3 = V_0$$

olarak belirlenir. Burada $\mathbf{W}_i$ ve $\mathbf{F}_i$ ile $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{F}$ 'nin i 'inci satırları kastedilmiştir. Böylece oluşturulan $\mathbf{WA}=\mathbf{F}$ doğrusal olmayan sisteminin çözülmesiyle s_i, u_i ve v_i bilinmeyenleri ve dolayısıyla T_N, I_N ve V_N yaklaşık çözümleri bulunur.



Şekil 3.13. Örnek 3.11 için dört farklı N değeriyle bulunan yaklaşık çözümlerin mutlak kalıntıları.

Örnek 3.11. Aşağıdaki parametre değerleriyle oluşturulan

$$\begin{aligned}
 \frac{dT(t)}{dt} &= 10 - 0.02T(t) + 0.03T(t) \left(1 - \frac{T(t) + I(t)}{1500} \right) - 0.000024V(t)T(t), \\
 \frac{dI(t)}{dt} &= 0.00002V(t - 0.1)T(t - 0.1) - 0.26I(t), \\
 \frac{dV(t)}{dt} &= 1000 \cdot (0.24)I(t) - kV(t)T(t) - 2.4V(t).
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

sistemine

$$T(-0.1) = 1000, I(0) = 0, V(-0.1) = 0.001$$

başlangıç koşullarıyla Galerkin-tipi yöntem uygulanmıştır. Çizelge 3.12, 3.13 ve 3.14'te dört farklı N seçimiyle bulunan yaklaşık çözümlerin değerleri sunulmuştur. (3.53) probleminin tam çözümü bilinmediğinden, sonuçları değerlendirmek için bulunan çözümlerin mutlak kalıntı değerleri Şekil 3.13'te gösterilmiştir. $N=4$ ve $N=5$ 'e karşılık gelen kalıntılar hemen hemen aynı büyüklükte olmasına karşın N değeri arttıkça kalıntı değerleri genel olarak küçülmektedir. Bu ise N arttıkça çözümlerin iyileştiğini göstermektedir.

Çizelge 3.12. Örnek 3.11’de $N=3, 4, 5, 6$ seçimleriyle bulunan yaklaşık sağlıklı T4 hücresi yoğunluğu $T_N(t)$ ’nin bazı t anlarındaki değerleri.

t	$T_3(t)$	$T_4(t)$	$T_5(t)$	$T_6(t)$
0	1000	1000	1000	1000
0.2	1000.0000010	999.99999638	999.99999370	999.99999642
0.4	1000.0000223	999.99999428	999.99997498	999.99999505
0.6	1000.0000604	999.99999207	999.99993606	999.99999491
0.8	1000.0001118	999.99998856	999.99987694	999.99999477
1	1000.0001729	999.99998297	999.99980294	999.99999365

Çizelge 3.13. Örnek 3.11’de $N=3, 4, 5, 6$ seçimleriyle bulunan yaklaşık virüslü T4 hücresi yoğunluğu $I_N(t)$ ’nin bazı t anlarındaki değerleri.

t	$I_3(t)$	$I_4(t)$	$I_5(t)$	$I_6(t)$
0	0	0	0	0
0.2	-0.0001075504	-0.0000015343	0.0000761999	-0.0000047593
0.4	-0.0001534516	0.0000042996	0.0001496530	-0.0000042440
0.6	-0.0001587412	0.0000120684	0.0001939562	0.0000000386
0.8	-0.0001444571	0.0000185175	0.0002084556	0.0000054638
1	-0.0001316368	0.0000225712	0.0002054253	0.0000098910

Çizelge 3.14. Örnek 3.11’de $N=3, 4, 5, 6$ seçimleriyle bulunan yaklaşık serbest virüs yoğunluğu $V_N(t)$ ’nin bazı t anlarındaki değerleri.

t	$V_3(t)$	$V_4(t)$	$V_5(t)$	$V_6(t)$
0	0.001	0.001	0.001	0.001
0.2	-0.0019577990	0.0005556559	0.0021282985	0.0005016225
0.4	-0.0058948075	0.0003941256	0.0057708826	0.0001232274
0.6	-0.0096998806	0.0005507840	0.0102630154	-0.0000056135
0.8	-0.0122618735	0.0009442434	0.0140881203	0.0001102124
1	-0.0124696415	0.0013763536	0.0165671113	0.0003720742

3.3. Galerkin-tipi Yöntemin İntegro-diferansiyel Denklemlere Uygulanışı

İntegro-diferansiyel denklemler, hem bilinmeyen bir fonksiyonun zamana göre değişimini, hem de bu değişimin aynı fonksiyon üzerindeki birikimli etkisini içeren durumları modellemek için kullanılır (Kapur 1988, s. 196). Bu denklemler, integral teriminin üst sınırına göre sınıflandırılır: İntegral teriminin üst sınırı sabit olan denklemler Fredholm integro-diferansiyel denklemleri" olarak anılırken, değişken üst sınırlı integral içerenler "Volterra integro-diferansiyel denklemleri" sınıfını oluşturur.

Her bir integro-diferansiyel denklem tipinin kaynak ve uygulamaları kendine özgüdür. Örneğin, sinir ağları (Jackiewicz ve Rahman 2006) ve sinyal işleme (Bates vd. 2017) Fredholm integro-diferansiyel denklemlerinin en yaygın uygulama alanlarındandır. Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin kullanım alanları arasında ise nüfus dinamiği (Scudo 1971; Wazwaz 1999) ve ısı transferi (MacCamy 1977) sayılabilir. İki türlü integral terimi birden içeren, dolayısıyla "Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemi" olarak anılan model problemler de vardır. Bu tür denklemlere, örneğin bulaşıcı hastalıkların zaman ve mekan içinde yayılımıyla ilgili çalışmalarda (Thieme 1977; Diekmann 1978) rastlanır.

Bu kısımda, Galerkin-tipi yöntem sırasıyla karışık tipte Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemlerine, Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklem sistemlerine ve Volterra nüfus modeline uygulanacaktır.

3.3.1. Karışık tipte Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemlerinin sayısal çözümleri

Bu alt bölümde, Galerkin-tipi yöntem

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^J P_{j,k}(x) y^{(k)}(\lambda_j x + \mu_j) = g(x) + \int_a^b \sum_{r=0}^m K_r(x, t) y^{(r)}(\gamma_1 t + \delta_1) dt \\ + \int_a^x \sum_{r=0}^m L_{1,r}(x, t) y^{(r)}(\gamma_2 t + \delta_2) dt + \int_a^{h(x)} \sum_{r=0}^m L_{2,r}(x, t) y^{(r)}(\gamma_3 t + \delta_3) dt \end{aligned} \quad (3.54)$$

denklemine uygulanacaktır. Bilinmeyen y fonksiyonunun başlangıç ve sınır koşulları

$$\sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j} y^{(j)}(a) + b_{i,j} y^{(j)}(b)) = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.55)$$

şeklindedir. (3.54) denkleminin sol tarafı, bilinmeyen fonksiyonun pantograf-tipi gecikme içeren terimlerini de kapsayabilecek şekilde genel olarak yazılmıştır. Denklemdaki g ile $j=0, 1, \dots, J$ ve $k=0, 1, \dots, m$ olmak üzere $P_{j,k}$ fonksiyonları, $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı bilinen sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca, $r=0, 1, \dots, m$ olmak üzere bilinen K_r , $L_{1,r}$ ve $L_{2,r}$ iki değişkenli fonksiyonları $[a, b] \times [a, b]$ bölgesinde süreklidir. Denklem üst sınır olarak x 'in bilinen bir $h(x)$ fonksiyonunu içeren bir integral terimi de içermektedir. Yalnızca ilk integralin mevcut bulunması durumunda, denklem bir Fredholm integro-diferansiyel denklemi olmaktadır. Benzer şekilde, yalnızca ikinci integral varsa denklem bir Volterra integro-diferansiyel denklemi olur. Denklemin mertebesi m 'ye eşit olduğundan, tam çözümün sağlaması gereken ve (3.55) ile verilen toplam m tane başlangıç ve sınır koşulu vardır. a ve b sınır noktalarının ikisinde birden hesaplanan terimler içermesi sebebiyle (3.55) koşulları "karışık koşullar" olarak anılacaktır. Ayrıca, (3.54) denklemi ve (3.55) karışık koşullarına, "problem (3.54)-(3.55)" şeklinde atıfta bulunulacaktır.

Son yıllarda birçok çalışma (3.54) denklemini ya da bu denklemin özel hâli olan problemleri sayısal olarak çözmekle ilgilenmiştir. Örneğin, fonksiyonel üst sınırlı integral terimi içermeyen standart Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemleri Taylor (Gülsu ve Sezer 2016) ve Bessel (Yüzbaşı vd. 2012) polinomlarını kullanan kollokasyon yöntemlerinin yanı sıra standart polinomları kullanan bir işlemsel matris yöntemiyle (Yüzbaşı ve İsmailov 2018) çözülmüştür. Ayrıca, He'nin varyasyonel iterasyon yöntemi ve homotopi pertürbasyon yöntemi (Taiwo ve Adio 2014) doğrusal olmayan Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemlerine uygulanmıştır. Bunlardan başka, Chelyshkov (Oğuz ve Sezer 2015) ve Dickson (Kürkçü vd. 2016) polinomlarını kullanan kollokasyon yöntemleri (3.54)-(3.55) tipinde problemlere uygulanmıştır.

Galerkin-tipi yöntemi problem (3.54)-(3.55)'e uygulamanın ilk adımı, önceki problemlerde olduğu gibi, deneme fonksiyonunu

$$y_N(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N = \sum_{n=0}^N a_nx^n.$$

olarak belirlemektir. Deneme fonksiyonu, türevleri ve gecikme içeren terimler, daha önce tanımlanan sembolik satır matrisi $\mathbf{X}$, bilinmeyenleri içeren sütun matrisi $\mathbf{A}$, yardımcı matrisler $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{B}(\lambda, \mu)$ cinsinden

$$y_N(x) = \mathbf{XA}, \quad y_N^{(r)}(x) = \mathbf{XB}^r \mathbf{A}, \quad y_N^{(k)}(\lambda x + \mu) = \mathbf{XB}(\lambda, \mu) \mathbf{B}^k \mathbf{A}$$

olarak yazılabilir. Bu matris özdeşliklerini (3.54) denkleminde yazarak

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^J P_{j,k}(x) \mathbf{X} \mathbf{B}(\lambda_j, \mu_j) \mathbf{B}^k \mathbf{A} - \int_a^b \sum_{r=0}^m K_r(x, t) \mathbf{T} \mathbf{B}(\gamma_1, \delta_1) \mathbf{B}^r \mathbf{A} dt \\ & - \int_a^x \sum_{r=0}^m L_{1,r}(x, t) \mathbf{T} \mathbf{B}(\gamma_2, \delta_2) \mathbf{B}^r \mathbf{A} dt - \int_a^{h(x)} \sum_{r=0}^m L_{2,r}(x, t) \mathbf{T} \mathbf{B}(\gamma_3, \delta_3) \mathbf{B}^r \mathbf{A} dt = g(x) \end{aligned} \quad (3.56)$$

matris denklemi elde edilir. İntegral değişkeni t olduğundan, integrallerin içinde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & t^N \end{bmatrix}$$

bağımsız değişken matrisi kullanılmıştır. (3.56) denkleminde eşitliğin sol tarafındaki terimler için yeni gösterim tanımlamak kolaylık sağlayacaktır. İntegralsız toplam için

$$\mathbf{D}(x) := \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^J P_{j,k}(x) \mathbf{X} \mathbf{B}(\lambda_j, \mu_j) \mathbf{B}^k \mathbf{A}.$$

gösterimini tanımlayalım. Benzer şekilde, integral terimlerini de

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x) &:= \int_a^b \sum_{r=0}^m K_r(x, t) \mathbf{T} \mathbf{B}(\gamma_1, \delta_1) \mathbf{B}^r \mathbf{A} dt, \\ \mathbf{V}_1(x) &:= \int_a^x \sum_{r=0}^m L_{1,r}(x, t) \mathbf{T} \mathbf{B}(\gamma_2, \delta_2) \mathbf{B}^r \mathbf{A} dt, \\ \mathbf{V}_2(x) &:= \int_a^{h(x)} \sum_{r=0}^m L_{2,r}(x, t) \mathbf{T} \mathbf{B}(\gamma_3, \delta_3) \mathbf{B}^r \mathbf{A} dt \end{aligned}$$

ile gösterelim. Bu yeni gösterimlerle birlikte, (3.56) denkleminin sol tarafında $\mathbf{A}$ matrisinin ortak terim oluşu ve integral operatörünün doğrusallığı kullanılarak

$$(\mathbf{D}(x) - \mathbf{F}(x) - \mathbf{V}_1(x) - \mathbf{V}_2(x)) \mathbf{A} = g(x) \quad (3.57)$$

olduğu görülür. Burada, bilinmeyenlerden oluşan $\mathbf{A}$ sütun matrisi ile çarpım durumunda olan terim, girdileri x 'in fonksiyonlarından oluşan $N+1$ uzunluğunda bir satır matrisidir. Bu matrisin $\mathbf{W}(x)$ ile gösterilmesiyle (3.57) denklemi daha da öz olarak

$$\mathbf{W}(x) \mathbf{A} = g(x) \quad (3.58)$$

olarak yazılabilir. İç çarpım adımından önce, m tane karışık koşula karşılık gelen doğrusal denklemler oluşturulabilir. (3.55) karışık koşullarının i 'incisi,

$$\mathbf{C}_i = \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j} \mathbf{X}(a) \mathbf{B}^j + b_{i,j} \mathbf{X}(b) \mathbf{B}^j$$

gösteriminin tanımlanmasıyla

$$\mathbf{C}_i \mathbf{A} = \lambda_i$$

olarak yazılabilir. $a_0, a_1, \dots, a_N$ bilinmeyenlerini hesaplamak için gereken $N+1$ denklemden m tanesi bu şekilde karışık koşullar tarafından belirlendiğinden, geriye kalan $N+1-m$ denklem (3.58) matris denklemine $x^m, x^{m+1}, \dots, x^N$ test fonksiyonlarıyla iç çarpım uygulanması sonucu elde edilir. $j=m, m+1, \dots, N$ olmak üzere x^j ile iç çarpım uygulamak

$$\langle \mathbf{W}(x), x^j \rangle \mathbf{A} = \langle g(x), x^j \rangle$$

denklemleriyle sonuçlanır. Burada $\langle \mathbf{W}(x), x^j \rangle$ ile k 'inci girdisi $\langle \mathbf{W}(x)_{1,k}, x^j \rangle$ iç çarpımına eşit olan $N+1$ uzunluğunda satır matrisi kastedilmektedir. Sonuçta, tüm karışık koşulların ve iç çarpımların işleme dahil edilmesi sonucunda

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_m \\ \langle \mathbf{W}(x), x^m \rangle \\ \langle \mathbf{W}(x), x^{m+1} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{W}(x), x^N \rangle \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \\ \langle g(x), x^m \rangle \\ \langle g(x), x^{m+1} \rangle \\ \vdots \\ \langle g(x), x^N \rangle \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözülmesiyle $a_0, a_1, \dots, a_N$ bilinmeyenleri ve dolayısıyla (3.54) denkleminin (3.55) karışık koşullarını sağlayan y_N yaklaşık çözümü bulunur.

Şimdi, Galerkin-tipi yöntem altı farklı örneğe uygulanacaktır.

Örnek 3.12. Birinci örnek problem, Kürkçü vd. (2016)'dan alınan aşağıdaki ikinci mertebeden denklemdir:

$$(x^2 + 1)y''(0.2x) + xy'(x - 1) - (x - 1)y(x + 2) + y(x) = 6 - \frac{14x}{3} - x^2 - \frac{5x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + 2 \int_0^1 xy'(t)dt + \int_0^{\frac{x}{2}+1} (xt^2 + tx^2)y''(t)dt, \quad y(0) = -1, y'(1) = 3. \quad (3.59)$$

(3.59) problemine $N=2$ seçimi için Galerkin-tipi yöntemin uygulanışı ayrıntılı olarak görülecektir. Deneme fonksiyonu $y_2(x)$, türevi ve gecikmeli terimler

$$y_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad y'_N(x) = a_1 + 2a_2x, \quad y''_2(0.2x) = 2a_2,$$

$$y_2(x+2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + (a_1 + 4a_2)x + a_2x^2, \quad y'_2(x-1) = a_1 - 2a_2 + 2a_2x$$

şeklinde. Bunların (3.59) denkleminde yazılmasıyla oluşan belirli integraller ise

$$\int_0^1 xy'_2(t)dt = \int_0^1 x(a_1 + 2a_2t)dt = (a_1 + a_2)x,$$

$$\int_0^{\frac{x}{2}+1} (xt^2 + tx^2)y''_2(t)dt = 2a_2 \int_0^{\frac{x}{2}+1} (xt^2 + tx^2)dt = \frac{1}{6}a_2x(2x+1)(x+2)^2$$

olarak hesaplanır. Böylece, y_2 'nin (3.59) denkleminde yazılması

$$a_0(2-x) + a_1(2-x-x^2) + a_2 \left(6 - \frac{14x}{3} - \frac{5x^3}{2} - \frac{x^4}{3} \right) = 6 - \frac{14x}{3} - x^2 - \frac{5x^3}{2} - \frac{x^4}{3}$$

eşitliğini verir. Böylece,

$$g(x) = 6 - \frac{14x}{3} - x^2 - \frac{5x^3}{2} - \frac{x^4}{3}$$

olmak üzere (3.58) denklemi

$$\mathbf{W}(x)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-x, & 2-x-x^2, & 6 - \frac{14x}{3} - \frac{5x^3}{2} - \frac{x^4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = g(x) \quad (3.60)$$

biçiminde olur. Problemin $y(0)=-1, y'(1)=3$ karışık koşullarına karşılık gelen matris eşitlikleri ise

$$\mathbf{C}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} = -1, \quad \mathbf{C}_2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{A} = 3$$

olarak yazılır. Böylece, en son çözülecek $\mathbf{WA}=\mathbf{G}$ doğrusal sistemindeki $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{G}$ 'nin yalnızca son satırlarının belirlenmesi kalmıştır. Bu son satırlar, (3.60) eşitliğine x^2 test fonksiyonu ile iç çarpım uygulanmasıyla

$$\langle \mathbf{W}(x), x^2 \rangle = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & \frac{13}{60} & \frac{31}{84} \end{bmatrix}, \quad \langle g(x), x^2 \rangle = \frac{71}{420}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak, $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{G}$ matrisleri

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ \frac{5}{12} & \frac{13}{60} & \frac{31}{84} \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ \frac{71}{420} \end{bmatrix}$$

biçiminde oluşur. Sistemin çözülmesiyle $a_0=-1, a_1=1, a_2=1$ ve böylece

$$y_2(x) = -1 + x + x^2$$

yaklaşık çözümü bulunmuş olur. Bu aynı zamanda problemin tam çözümüdür. Bu durum, Galerkin-tipi yöntemin, tam çözümü N 'inci veya daha küçük dereceden bir polinom olan problemlerde tam çözümü bulmasına başka bir örnek teşkil etmektedir.

Örnek 3.13. İkinci olarak, daha önce Oğuz ve Sezer (2015) ve Kürkçü vd. (2016) tarafından sayısal olarak çözülen

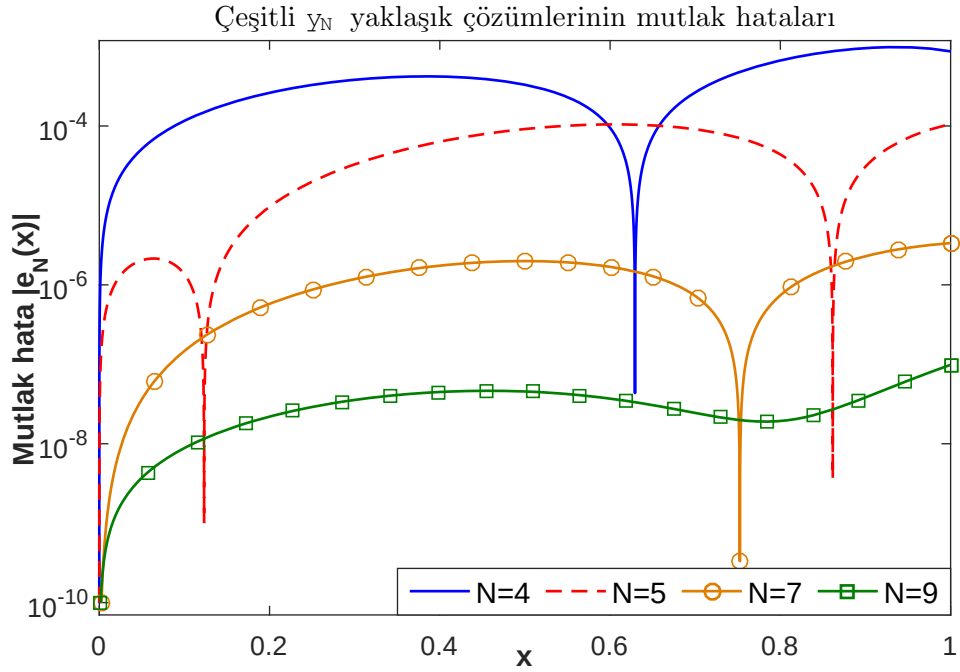
$$y'(x) + 2y'(x - 0.5) - y(x) + (x^2 - x)y(0.5x - 1) = g(x) + \int_0^x x e^{-t} y(t) dt + \int_0^{\frac{x}{2}} ((x^2 - 2t - 2)y'(t)) dt, y(0) = 1 \quad (3.61)$$

problemi incelenecektir. Burada $g(x)$ terimi açık olarak

$$g(x) = (x^2 - x)e^{0.5x-1} + 2e^{x-0.5} - x^2e^{0.5x} + xe^{0.5x}$$

şeklinde dir. Denklemd e sabit üst sınırlı integral olmadığından, problem değışken üst sınırlı integrale sahip bir Volterra integro-diferansiyel denklemdir.

(3.61) probleminin tam çözümü $y_{\text{tam}}(x)=e^x$ fonksiyonu olarak bilinmektedir. Probleme Galerkin-tipi yöntemin çeşitli N seçimleriyle uygulanması sonucunda elde edilen mutlak hatalar Şekil 3.14'te bir arada gösterilmiştir. N değ erinin artmasıyla daha isabetli yaklaşık çözümler elde edildiğ i grafikten anlaşılmaktadır. Ayrıca, $N=4$ ve $N=7$ değ erlerine karş ılık gelen mutlak hata değ erleri, Çizelge 3.15'te Chelyshkov (Oğuz ve Sezer 2015) ve Dickson (Kürkçü vd. 2016) kollokasyon yöntemleriyle karşılaştırılmıştır. Çizelgedeki değ erlerden, Galerkin-tipi yöntemin bu problem için Chelyshkov kollokasyon yönteminden biraz daha isabetli, Dickson kollokasyon yöntemiyle ise yaklaşık olarak denk sonuçlar verdiğ i anlaşılmaktadır.



Şekil 3.14. Örnek 3.13 için dört farklı N değeriyle bulunan yaklaşık çözümlerin mutlak hataları.

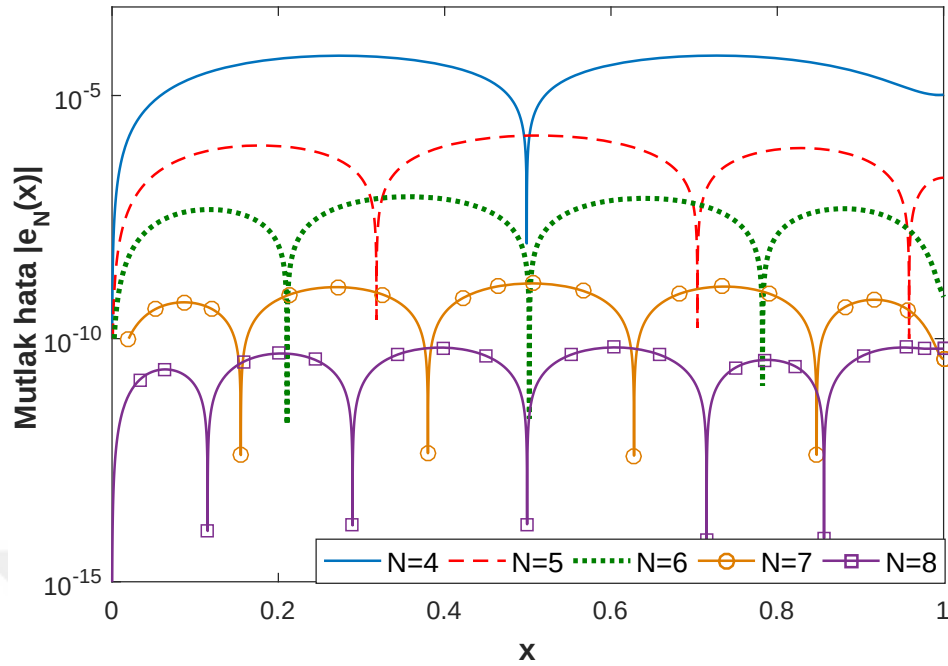
Çizelge 3.15. Örnek 3.13 için $N=4$ ve $N=7$ ile elde edilen yaklaşık çözümlerin Chelyshkov ve Dickson kollokasyon yöntemleriyle karşılaştırılması.

x	Chelyshkov kollokasyon		Dickson kollokasyon		Galerkin-tipi yöntem	
	$ e_4(x) $	$ e_7(x) $	$ e_4(x) $	$ e_7(x) $	$ e_4(x) $	$ e_7(x) $
0.2	2.926E-4	7.378E-6	1.738E-4	7.414E-7	2.619E-4	5.775E-7
0.4	2.704E-4	1.773E-6	5.303E-5	1.355E-6	4.195E-4	1.746E-6
0.6	4.497E-4	1.851E-5	4.756E-4	4.143E-7	9.470E-5	1.685E-6
0.8	1.740E-3	2.969E-5	8.732E-4	1.903E-6	6.680E-4	7.401E-7
1	2.432E-3	2.117E-6	5.833E-4	3.347E-6	8.687E-4	3.357E-6

Örnek 3.14. Bir sonraki örnek, daha önce Gülsu ve Sezer (2011) ile Yüzbaşı (2014) tarafından incelenen aşağıdaki 2'nci mertebeden problemdir:

$$y''(x) - \frac{3}{4}y(x) + y(x/2) = -\frac{11}{4}\sin(x) + \sin(x/2) + x\cos(x) + \int_0^x ty(t)dt$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1. \quad (3.62)$$



Şekil 3.15. Örnek 3.14'ün çeşitli N seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümlerinin mutlak hataları.

Problemde sabit ve fonksiyonel üst sınırlı integraller olmadığından denklem gecikmeli bir Volterra integro-diferansiyel denklemdir. Problemin tam çözümü $y_{\text{tam}}(x) = \sin(x)$ fonksiyonudur.

(3.62) problemine Galerkin-tipi yöntem $0 \leq x \leq 1$ aralığında çeşitli N seçimleriyle uygulanmıştır. Bunun sonucunda, mutlak hatalarının grafikleri Şekil 3.15'te sunulan yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Grafiğe bakılarak, N değerini arttırmanın yaklaşık çözümlerin hatalarını belirgin bir şekilde azalttığı yorumu yapılabilir. Söz konusu mutlak hatalar, elde edilen yaklaşık çözümlerin çeşitli noktalardaki değerlerinin tam çözümle birlikte verildiği Çizelge 3.16 yardımıyla daha hassas bir şekilde ölçülebilir. Son olarak, Galerkin-tipi yöntemin $N=7$ ve $N=8$ seçimlerine karşılık gelen mutlak hatalarının Taylor kollokasyon yöntemi (TKY) (Gülsu ve Sezer 2011) ve Laguerre kollokasyon yöntemi (LKY) (Yüzbaşı 2014) ile karşılaştırılması Çizelge 3.17'de verilmiştir. Çizelgedeki değerlerden, Galerkin-tipi yöntemin bu problemde seçili parametre değerleri için diğer iki yöntemden daha iyi sonuç verdiği anlaşılmaktadır.

Çizelge 3.16. Örnek 3.14’ün çeşitli N seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümleri ile tam çözümün bazı noktalardaki değerleri.

x	$y(x) = \sin(x)$	$y_4(x)$	$y_5(x)$	$y_6(x)$	$y_7(x)$	$y_8(x)$
0.2	0.1986693307	0.1987262808	0.1986702458	0.1986693224	0.1986693314	0.1986693307
0.4	0.3894183423	0.3894601712	0.3894174344	0.3894184164	0.3894183419	0.3894183423
0.6	0.5646424733	0.5645998850	0.5646413618	0.5646424042	0.5646424729	0.5646424733
0.8	0.7173560908	0.7172978259	0.7173568692	0.7173561045	0.7173560916	0.7173560909
1	0.8414709848	0.8414605870	0.8414707809	0.8414709855	0.8414709847	0.8414709847

Çizelge 3.17. Örnek 3.14’te $N=7$ ve $N=8$ değerlerine karşılık bulunan mutlak hataların iki diğer yöntemle karşılaştırılması.

x	GTY $N = 7$	GTY $N = 8$	TKY $N = 7$	TKY $N = 10$	LKY $(N, M) = (7, 7)$
0.2	6.402E – 10	4.941E – 11	2.35E – 7	7.00E – 10	2.346E – 10
0.4	3.366E – 10	6.526E – 11	5.27E – 7	1.50E – 9	5.137E – 9
0.6	4.694E – 10	6.589E – 11	9.32E – 7	2.40E – 9	8.339E – 9
0.8	7.173E – 10	3.531E – 11	5.60E – 7	3.00E – 9	1.152E – 8
1	3.819E – 11	6.221E – 11	3.37E – 5	1.06E – 7	3.640E – 9

Örnek 3.15. Bir sonraki örnek problem, daha önce Yüzbaşı vd. (2013) tarafından sayısal çözümleri bulunan ve $0 \leq x \leq 1$ aralığında başlangıç koşullarıyla ele alınan

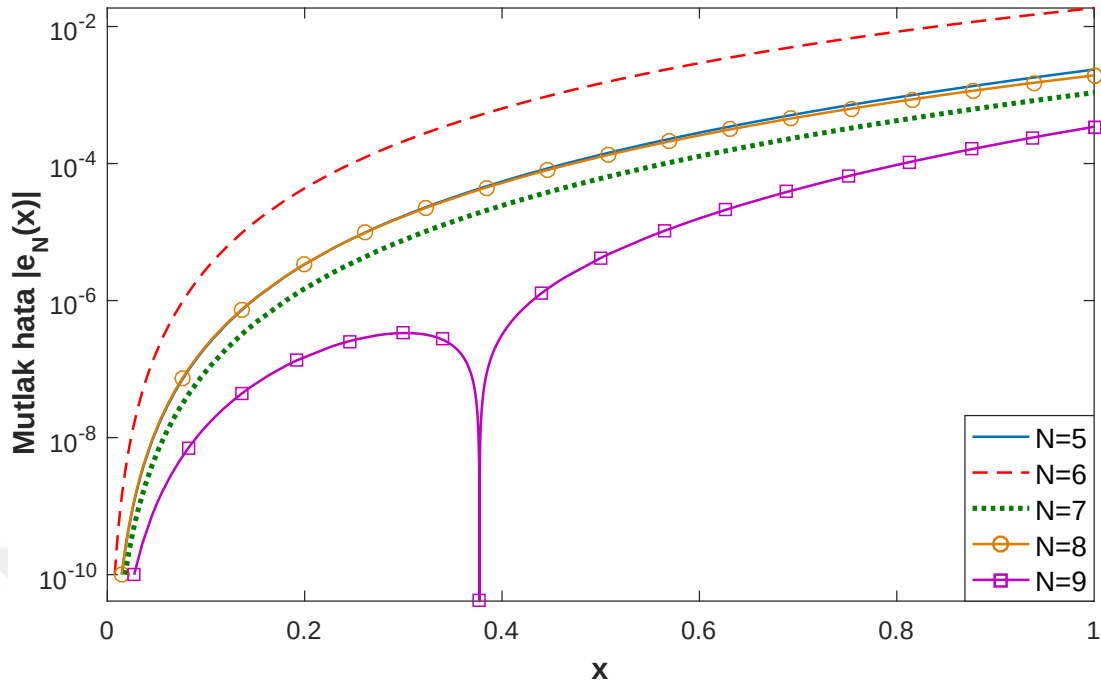
$$y^{(4)}(x) - y''(x-1) + xy(x+0.5) = \int_0^1 [x \cos(t)y'(t+1) + x \sin(t)y''(t-0.5)] dt, \\ +g(x), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y^{(3)}(0) = -1. \quad (3.63)$$

dördüncü mertebeden Fredholm integro-diferansiyel denklemdir. Buradaki g fonksiyonu

$$g(x) = \sin(x) + \sin(x-1) + x \sin(x+0.5) + 0.25x \sin(1) - 0.5x \cos(1) \\ - 0.25x \sin(3) - 0.25x \sin(0.5) + 0.5x \cos(0.5) - 0.25x \sin(1.5)$$

şeklindedir. Problemin tam çözümü $y_{\text{tam}}(x) = \sin(x)$ fonksiyonudur.

Galerkin-tipi yöntem (3.63) problemine çeşitli N seçimleriyle uygulanmıştır. Örnek



Şekil 3.16. Örnek 3.15'in çeşitli N seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümlerinin mutlak hataları.

olarak, $N=5$ ve $N=8$ değerleri için şu çözümler bulunmuştur.

$$y_5(x) = x - 0.166666666666x^3 + 0.002103828147x^4 + 0.008388147327x^5,$$

$$y_8(x) = x - 0.166666666666x^3 - 0.002241243315x^4 + 0.008970354460x^5$$

$$- 0.000403278556x^6 - 0.000133309559x^7 + 0.000007902232x^8.$$

Elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları Şekil 3.16'da gösterilmiştir. Grafiğe baktığında, çift N değerlerine karşılık gelen mutlak hataların $N-1$ 'e karşılık gelen mutlak hatalardan daha büyük olduğu dikkat çekmektedir. Hatta $N=8$ ve $N=5$ 'e karşılık gelen mutlak hatalar neredeyse eşittir. Bu durum, Galerkin-tipi yöntemin Müntz-Legendre polinomları yöntemi (Yüzbaşı vd. 2013) ile karşılaştırıldığı Çizelge 3.18'de daha belirgindir. Çizelgeden ayrıca $N=5$ için Galerkin-tipi yöntemin, $N=8$ için diğer yöntemin daha iyi sonuçlar verdiği anlaşılmaktadır.

Örnek 3.16. Bir sonraki örnek problem, ilk olarak Huang ve Li (2010) tarafından ele alınan, daha sonra Işık vd. (2011) ve Yüzbaşı ve Sezer (2012) tarafından sayısal olarak

Çizelge 3.18. Örnek 3.15'te $N=5$ ve $N=8$ değerlerine karşılık bulunan mutlak hataların Müntz-Legendre polinomları yöntemiyle karşılaştırılması.

x	Müntz-Legendre		Galerkin-tipi yöntem	
	$N = 5$	$N = 8$	$N = 5$	$N = 8$
0.2	1.202E - 5	9.251E - 7	3.386E - 6	3.407E - 6
0.4	1.681E - 4	1.901E - 5	5.474E - 5	5.239E - 5
0.6	7.266E - 4	1.194E - 4	2.824E - 4	2.578E - 4
0.8	1.891E - 3	4.545E - 4	9.209E - 4	8.003E - 4
1	3.589E - 3	1.304E - 3	2.354E - 3	1.937E - 3

çözülen aşağıdaki ikinci mertebeden Volterra integro-diferansiyel denklemdir:

$$y''(x) + y(x) = e^x(2 + \operatorname{erf}(\sqrt{x})) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{y''(t)}{\sqrt{x-t}} dt, \quad y(0) = y'(0) = 1 \quad (3.64)$$

Bu problemdeki erf fonksiyonu

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

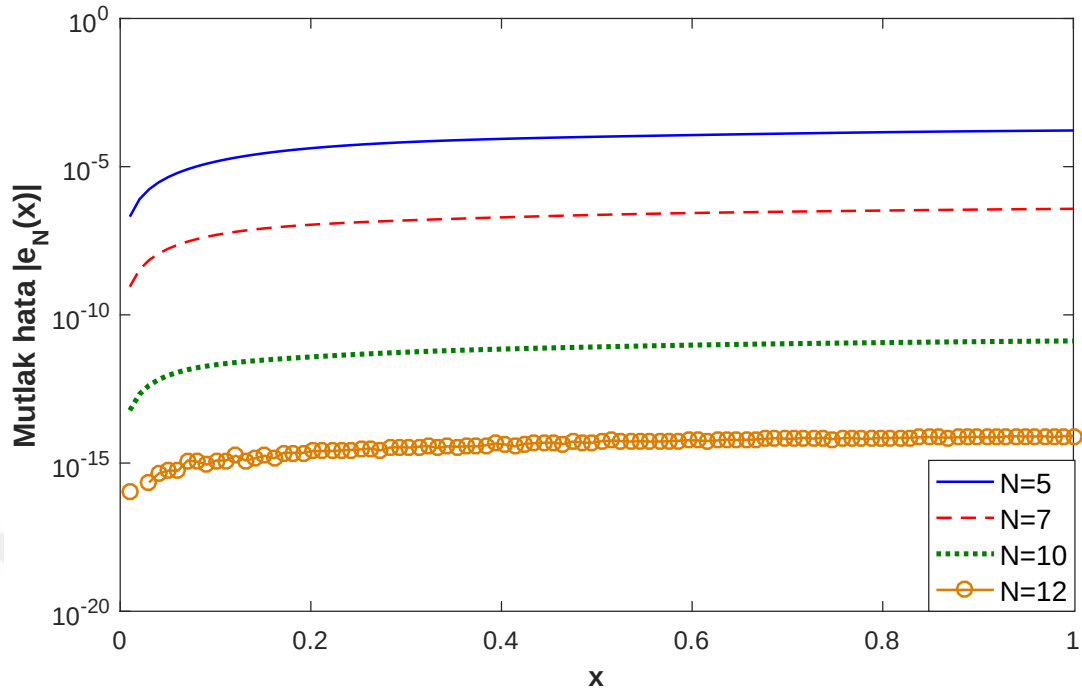
ile tanımlı Gauss hata fonksiyonudur. Problem (3.64)'te olduğu gibi $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $K(x, t) = \frac{L(x, t)}{(x-t)^\alpha}$ biçiminde çekirdek fonksiyonlarına "zayıf tekil çekirdek" (*Ing. "weakly singular kernel"*), zayıf tekil çekirdek içeren integral (integro-diferansiyel) denklemlere ise "zayıf tekil integral (integro-diferansiyel) denklem" denir. "Zayıf tekil" ifadesinin kullanılmasının sebebi, $K(x, t)$ 'nin $t = x$ için süreksiz olması, ancak

$$\int_0^x K(x, t) dt = \int_0^x L(x, t)(x-t)^{-\alpha} dt$$

integralinin sürekli olmasıdır. (3.64) probleminin tam çözümü $y_{\text{tam}}(x) = e^x$ 'tir.

(3.64) problemi, $K_1(x, t) = L_2(x, t) = 0$ ve $L_1(x, t) = (x-t)^{1/2}$ seçimleri ile, $L_1(x, t)$ 'nin süreksiz olması dışında (3.54) probleminin özel hâlidir. Bu sebeple, Galerkin-tipi yöntemin probleme uygulanması aynı adımları içerir. Dikkat edilmesi gereken tek fark, integrali terimi x 'in fonksiyonu olarak ifade etmek için

$$\int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{x-t}} dt = \frac{\sqrt{\pi} x^{n+1/2} \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}$$



Şekil 3.17. Örnek 3.16'nın çeşitli N seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümlerinin mutlak hataları.

özdeşliğinden yararlanmaktadır (Yusufoğlu 2009). Yöntemin çeşitli N seçimleri ile probleme uygulanmasıyla elde edilen mutlak hata fonksiyonları Şekil 3.17'de verilmiştir. Önceki problemlerde olduğu gibi, hata değerleri artan N değeriyle birlikte belirgin biçimde azalmaktadır. Çizelge 3.19'da ise bu hata değerleri $N=4$ için Taylor serisi yöntemi (TSY) (Huang ve Li 2010) ve Bernstein serisi yöntemi (BSY) (Işık vd. 2011) ile karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Bernstein serisi yönteminin $N=4$ seçimi ile biraz daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Örnek 3.17. Bu kısımda ele alınacak son örnek problem, Zaidan (2012) tarafından çözülen aşağıdaki gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemdir:

$$y'(x) = 1 - \frac{x^4}{3} \int_0^x xty(t-1)dt, \quad y(0) = 1.$$

$0 < x < 1$ aralığında ele alınacak bu problemin tam çözümü $y_{\text{tam}}(x) = 1+x$ fonksiyonudur.

Örnek (3.17)'ye Galerkin-tipi yöntemi bir $N \geq 1$ seçimiyle uygulamak $y_N(x) = 1+x$ çözümünü verir ki bu problemin tam çözümüdür. Dolayısıyla, bu örnek problem, tam

Çizelge 3.19. Örnek 3.16’da çeşitli N değerlerine karşılık bulunan mutlak hataların iki diğer yöntemle karşılaştırılması.

x	TSY $N = 4$	BSY $N = 4$	GTY $N = 4$	GTY $N = 7$	GTY $N = 10$	GTY $N = 12$
0.2	1.372E - 4	1.452E - 5	5.205E - 4	1.141E - 6	3.804E - 12	2.331E - 15
0.4	1.500E - 3	3.665E - 5	1.300E - 3	3.071E - 7	6.999E - 12	4.218E - 15
0.6	6.300E - 3	3.186E - 5	1.800E - 3	8.882E - 7	9.544E - 12	5.773E - 15
0.8	1.720E - 2	3.220E - 4	2.200E - 3	2.339E - 6	1.158E - 11	6.994E - 15
1	3.690E - 2	2.100E - 3	2.500E - 3	5.349E - 6	1.321E - 11	8.104E - 15
CPU zamanı(sn)			0.3243	0.4264	1.9690	2.5163

çözümün polinom olması durumunda Galerkin-tipi yöntemin bu tam çözümü bulmasına bir örnek teşkil etmektedir.

3.3.2. Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümleri

Bu kısımda, önceki bölümün konusunu oluşturan doğrusal Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemlerinin sistemleri ele alınacaktır. Bu sistemlere, bağışıklık sistemi hücreleri ve tümör arasındaki ilişkiyi ele alan modeller (Bellomo vd. 1999), elektromanyetik teorideki sınır değer problemleri (Bloom 1980) ve nüfus dinamiği (Gushing 1977) gibi birçok uygulamada rastlanmaktadır.

Doğrusal Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklem sistemleri, genel olarak, gerçel bir $a \leq x \leq b$ aralığında

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k P_{i,j}^n(x) y_j^{(n)}(x) &= \int_a^b \sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k K_{i,j}^n(x, t) y_j^{(n)}(t) dt \\ &+ \int_a^x \sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k L_{i,j}^n(x, t) y_j^{(n)}(t) dt + g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (3.65)$$

ile ifade edilebilirler. k bilinmeyen fonksiyondan ve aynı sayıda denklemden oluşan bu sistem, Bölüm 3.1.3’teki adi diferansiyel denklem sistemlerindeki gibi

$$\sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j}^n y_n^{(j)}(a) + b_{i,j}^n y_n^{(j)}(b)) = \lambda_{n,i}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad n = 1, 2, \dots, k.$$

karişık koşulları ile ele alınacaktır. $P_{i,j}$ ve g_i tek değişkenli sürekli fonksiyonlar, $K_{i,j}$ ve $L_{i,j}$ ise $[a, b] \times [a, b]$ aralığında tanımlı iki değişkenli sürekli fonksiyonlar; $a_{i,j}$ ve $b_{i,j}$ ise bilinen sabitlerdir.

Bu sisteme Galerkin-tipi yöntemin uygulanışı Bölüm 3.1.3'tekine benzerdir. Bu sebeple, mümkün olduğu durumlarda oradaki gösterimin aynısı kullanılacaktır. İlk adım, her zaman olduğu gibi

$$y_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^N a_{i,n} x^n, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

deneme fonksiyonlarını tanımlamaktır. Bu deneme fonksiyonları ve türevleri

$$y_{i,N}(x) = \mathbf{X} \mathbf{A}_i, \quad y_{i,N}^{(n)}(x) = \mathbf{X} \mathbf{B}^n \mathbf{A}_i, \quad n = 1, 2, \dots, m, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

biçiminde de ifade edilebilirler. Bu ifadelerin (3.65) sisteminde yazılmasıyla, sistemin

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k P_{i,j}^n(x) \mathbf{X} \mathbf{B}^n \mathbf{A}_j - \int_a^b \sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k K_{i,j}^n(x, t) \mathbf{X}(t) \mathbf{B}^n \mathbf{A}_j dt \\ & - \int_a^x \sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k L_{i,j}^n(x, t) \mathbf{X}(t) \mathbf{B}^n \mathbf{A}_j dt = -g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

şeklindeki matris formu elde edilir. Bu, $j=1, 2, \dots, k$ için

$$\mathbf{F}_{i,j}(x) := \sum_{n=0}^m \left(P_{i,j}^n(x) \mathbf{X} - \int_a^b K_{i,j}^n(x, t) \mathbf{X}(t) dt - \int_a^x L_{i,j}^n(x, t) \mathbf{X}(t) dt \right) \mathbf{B}^n$$

şeklindeki yardımcı vektörlerle

$$\mathbf{F}_{i,1}(x) \mathbf{A}_1 + \mathbf{F}_{i,2}(x) \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{F}_{i,k}(x) \mathbf{A}_k = -g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

olarak yazılabilir. Tüm bilinmeyenleri barındıran $\mathbf{A}$ ve daha önce tanımlanan $\mathcal{I}_j$ matrislerinin yardımıyla i 'inci denklem

$$\left(\sum_{j=1}^k \mathbf{F}_{i,j}(x) \mathcal{I}_j \right) \mathbf{A} = \mathbf{F}_i(x) \mathbf{A} = g_i(x)$$

ile ifade edilebilir. Bu matris denklemlerinin alt alta yazılmasıyla da, (3.65) sisteminin tümü

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(x) \\ \mathbf{F}_2(x) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_k(x) \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{bmatrix} \quad \text{ya da} \quad \mathbf{F}(x) \mathbf{A} = \mathbf{g}(x) \quad (3.66)$$

matris eşitliğine indirgenir. n 'inci deneme fonksiyonu $y_{n,N}$ 'ye karşılık gelen i 'inci karışık koşul, daha önceki gibi

$$\left[\sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j}^n \mathbf{X}(a) + b_{i,j}^n \mathbf{X}(b)) \mathbf{B}^j \right] \mathbf{A}_n = \left[\sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j}^n \mathbf{X}(a) + b_{i,j}^n \mathbf{X}(b)) \mathbf{B}^j \right] \mathcal{I}_n \mathbf{A} \\ = \mathbf{C}_{n,i} \mathbf{A} = \lambda_{n,i}$$

ile gösterilebilir. Tüm karışık koşulların alt alta eklenmesiyle, bu koşulların tamamını ifade eden

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1,1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{1,m} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{k,1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{k,m} \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} \\ \vdots \\ \lambda_{1,m} \\ \vdots \\ \lambda_{k,1} \\ \vdots \\ \lambda_{k,m} \end{bmatrix} \text{ ya da } \mathbf{CA} = \mathbf{\Lambda}.$$

matris eşitliği elde edilir. $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{\Lambda}$ matrisleri, en son elde edilecek $\mathbf{WA}=\mathbf{G}$ sistemindeki $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{G}$ matrislerinin ilk km satırını oluştururlar. Geri kalan $k(N+1-m)$ satır ise (3.66) ifadesinde iki tarafa $x^m, x^{m+1}, \dots, x^N$ test fonksiyonlarıyla iç çarpım uygulanarak oluşturulur. Daha açık bir ifadeyle, kalan girdiler, $i=m, m+1, \dots, N, j=1, 2, \dots, k, l=1, 2, \dots, k(N+1)$ için

$$\mathbf{W}_{ik+j,l} = \langle \mathbf{F}(x)_{j,l}, x^i \rangle, \mathbf{G}_{ik+j,1} = \langle g_j(x), x^i \rangle$$

olarak hesaplanır. Böylece oluşan $\mathbf{WA}=\mathbf{G}$ cebirsel sisteminin çözülmesiyle $a_{i,n}$ bilinmeyen katsayıları ve dolayısıyla

$$y_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^N a_{i,n} x^n, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

yaklaşık çözümleri bulunmuş olur.

Şimdi, Galerkin-tipi yöntem iki adet örnek probleme uygulanacaktır.

Örnek 3.18. İlk örnek problem, aşağıdaki iki bilinmeyenli sistemdir:

$$\begin{aligned}
y_1^{(3)}(x) + xy_2''(x) - y_1'(x) + 2xy_2(x) &= \int_0^2 \left(xt^2y_1'(t) + xty_1''(t) - xt^2y_2'(t) \right) dt \\
&\quad + \int_0^x \left(x^2t^3y_1^{(3)}(t) - xty_2''(t) + 2x^3ty_2^{(3)}(t) \right) dt + g_1(x), \\
y_2^{(3)}(x) + xy_1''(x) - xy_2'(x) - y_1(x) &= \int_0^2 \left(xt^2y_1'(t) + x^2ty_1''(t) - 2xty_2^{(3)}(t) \right) dt \\
&\quad + \int_0^x \left(3x^3ty_1(t) - x^3t^2y_2''(t) \right) dt + g_2(x), \tag{3.67}
\end{aligned}$$

$$y_1(0) = -1, y_1(2) = 1, y_1'(0) = 1, y_2(0) = 2, y_2(2) = 8, y_2'(0) = -3.$$

Burada, g_1 ve g_2 fonksiyonları için

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= 5 + \frac{218}{15}x + 3x^2 - 3x^3 + 8x^4 - 12x^5 - \frac{3}{2}x^6, \\
g_2(x) &= 13 + \frac{602}{15}x + 2x^2 - 7x^3 + \frac{3}{2}x^5 - \frac{5}{3}x^6 + \frac{9}{2}x^7 - \frac{3}{5}x^8
\end{aligned}$$

geçerlidir.

Probleme Galerkin-tipi yöntemi $N=3$ seçimi ile uygulamak için, ilk olarak

$$y_{1,3}(x) = a_{1,0} + a_{1,1}x + a_{1,2}x^2 + a_{1,3}x^3, \quad y_{2,3}(x) = a_{2,0} + a_{2,1}x + a_{2,2}x^2 + a_{2,3}x^3$$

deneme fonksiyonları oluşturulur. Bu deneme fonksiyonlarını (3.67) sisteminde yerine koymak

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{8x}{3} + 1 \right) a_{1,1} - 14xa_{1,2} - \left(\frac{3x^6}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{176x}{5} + 6 \right) a_{1,3} + 2xa_{2,0} \\
& + \left(\frac{8x}{3} + 2x^2 \right) a_{2,1} + (3x^3 + 10x)a_{2,2} + \left(-6x^5 + 4x^4 + 6x^2 + \frac{96x}{5} \right) a_{2,3} = g_1(x), \\
& - \left(\frac{3x^5}{2} - 1 \right) a_{1,0} - \left(x^6 + \frac{1x}{3} \right) a_{1,1} - \left(\frac{3x^7}{4} + 5x^2 + 6x \right) a_{1,2} \\
& - \left(\frac{3x^8}{5} + x^3 + 10x^2 + \frac{96x}{5} \right) a_{1,3} - xa_{2,1} + \left(\frac{2x^6}{3} - 2x^2 \right) a_{2,2} \\
& + \left(\frac{3x^7}{2} - 3x^3 + 24x + 6 \right) a_{2,3} = g_2(x) \tag{3.68}
\end{aligned}$$

eşitliklerini oluşturur. Karışık koşulların matris formları, $y_{1,3}$ yaklaşık çözümü için

$$\begin{aligned}
y_{1,3}(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{I}_1 \mathbf{A} = a_{1,0} = -1, \quad y_{1,3}'(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B} \mathcal{I}_1 \mathbf{A} = a_{1,1} = 1, \\
y_{1,3}(2) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \mathcal{I}_1 \mathbf{A} = a_{1,0} + 2a_{1,1} + 4a_{1,2} + 8a_{1,3} = 1,
\end{aligned}$$

$y_{2,3}$ yaklaşık çözümü için ise

$$y_{2,3}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{I}_2 \mathbf{A} = a_{2,0} = 2, \quad y'_{2,3}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B} \mathcal{I}_2 \mathbf{A} = a_{2,1} = -3,$$

$$y_{2,3}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \mathcal{I}_2 \mathbf{A} = a_{2,0} + 2a_{2,1} + 4a_{2,2} + 8a_{2,3} = 8$$

şeklindedir. Geriye kalan iki denklem, (3.68) eşitliğinin x^3 test fonksiyonu ile iç çarpımının alınması sonucu, beş ondalık basamaklı gösterimle

$$\begin{bmatrix} 0 & -21.066 & -89.6 & -386.88 & 12.8 & 38.4 & 118.85 & -26.453 \end{bmatrix} \mathbf{A} = -490.11, \\ \begin{bmatrix} -89.333 & -125.86 & -231.36 & -452.63 & 0 & -6.4 & 46.933 & 402.01 \end{bmatrix} \mathbf{A} = 749.87,$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemlerin karışık koşullara karşılık gelen denklemlerle birleştirilmesiyle

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -21.066 & -89.6 & -386.88 & 12.8 & 38.4 & 118.85 & -26.453 \\ -89.333 & -125.86 & -231.36 & -452.63 & 0 & -6.4 & 46.933 & 402.01 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ 8 \\ -490.11 \\ 749.87 \end{bmatrix}$$

doğrusal sistemi oluşur. Bu sistemin çözülmesi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

bilinmeyen matrisini, dolayısıyla

$$y_{1,3}(x) = -1 + x - 2x^2 + x^3, \quad y_{2,3}(x) = 2 - 3x - x^2 + 2x^3$$

yaklaşık çözümlerini verir. Bu çözümler, problemin tam çözümleridir. 3'ten daha büyük N seçimleri için de aynı sonuç elde edilir.

Örnek 3.19. İkinci örnek, Yüzbaşı (2015b) tarafından sayısal olarak çözülen aşağıdaki

iki bilinmeyenli ikinci mertebeden sistemdir:

$$\begin{aligned}
y_1''(x) - 3xy_2'(x) - 2y_1(x) &= g_1(x) + \int_0^1 \left(2 \cos(x)ty_1'(t) - x^2 \sin(t)y_2''(t) \right) dt \\
&+ \int_0^x \left(x \cos(t)y_1(t) - x \sin(t)y_1'(t) + \cos(x) \sin(t)y_2'(t) \right) dt, \\
y_2''(x) - 2xy_1'(x) + xy_2(x) &= g_2(x) + \int_0^1 \left(x^2 \cos(t)y_1''(t) + 2 \cos(x) \sin(t)y_2'(t) \right) dt \\
&+ \int_0^x \left(\sin(x) \cos(t)y_1'(t) - \cos(x)ty_2'(t) + \sin(x)ty_2''(t) \right) dt, \\
y_1(0) &= 0, \quad y_1'(0) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2'(0) = 0.
\end{aligned}$$

Burada, g_1 ve g_2 fonksiyonları için

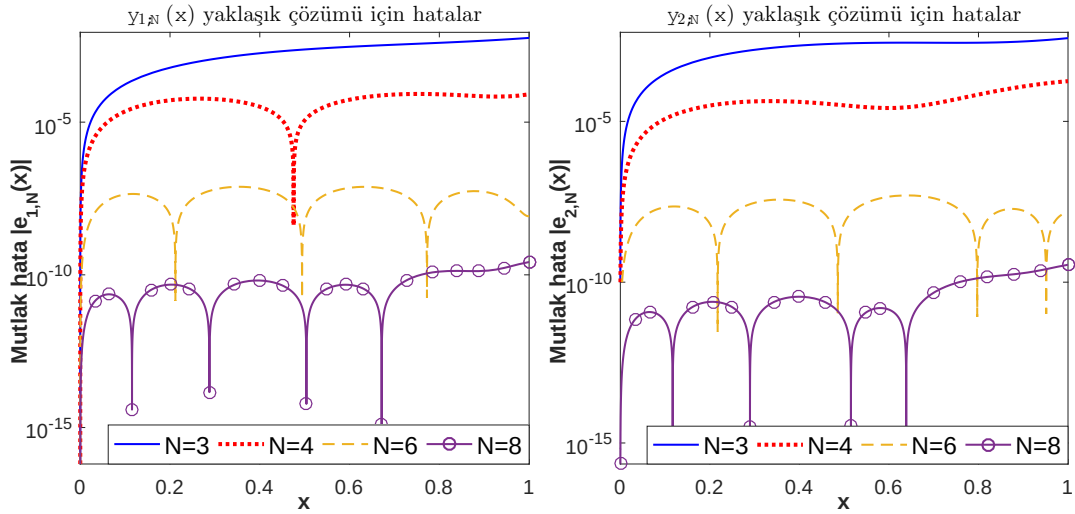
$$\begin{aligned}
g_1(x) &= 3(x-1) \sin(x) + 2 \cos(x)(1 - \cos(1) - \sin(1) + \frac{x}{4}) + \frac{x^2}{2}(\cos^2(1) - 1) \\
&- \frac{1}{2} \sin(x) \cos^2(x), \\
g_2(x) &= -\frac{1}{2} \cos(x)(1 + \sin(2) + 2x) - \frac{1}{2} \sin(x)(x + 2) + \frac{1}{2} \cos^3(x) + x \\
&+ \frac{1}{4} x^2(1 - \cos(2))
\end{aligned}$$

geçerlidir.

Problemin tam çözümü $y_{1,\text{tam}}(x) = \sin(x)$ ve $y_{2,\text{tam}}(x) = \cos(x)$ fonksiyonlarıdır. Probleme Galerkin-tipi yöntemin çeşitli N değerleriyle uygulanması sonucu elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları Şekil 3.18'de gösterilmektedir. Önceki örneklerde olduğu gibi, N değerinin arttırılmasıyla çözümlerin belirgin seviyede iyileştiği anlaşılmaktadır. Çizelge 3.20'de ise, bulunan çözümlerin maksimum hataları Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı 2015b) ile karşılaştırılmıştır. Seçilen N değerleri için Galerkin-tipi yöntemin daha isabetli çözümler verdiği görülmektedir.

Çizelge 3.20. Örnek 3.19'da çeşitli N seçimleriyle elde edilen çözümlerin maksimum hata bakımından Bessel kollokasyon yöntemiyle karşılaştırılması.

	Bessel kollokasyon yöntemi			Galerkin-tipi yöntem		
	$N = 3$	$N = 6$	$N = 9$	$N = 3$	$N = 6$	$N = 9$
$\ y_{1,N}\ _\infty$	5.828E - 2	5.309E - 5	8.356E - 9	5.738E - 3	7.649E - 8	3.092E - 9
$\ y_{2,N}\ _\infty$	7.096E - 2	2.411E - 5	3.054E - 9	3.880E - 3	5.012E - 8	3.599E - 9



Şekil 3.18. Örnek 3.19'un çeşitli N seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümlerinin mutlak hataları.

3.3.3. Doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri

Bu kısımda, Bölüm 3.1.4'te adi diferansiyel denklemler için yapıldığı gibi, Galerkin-tipi yöntemin doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklemlere nasıl uygulandığını gösteren bir örnek incelenecektir. Bu amaçla seçilecek problem, ilk olarak Vito Volterra tarafından bulunan, kapalı bir ekosistemde üreyen ve zamana bağlı toksik madde birikiminden olumsuz etkilenen bir mikroorganizma nüfusunun zamana bağlı değişimini modelleyen aşağıdaki birinci mertebeden doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklemdir (Scudo 1971):

$$\frac{dp}{d\tilde{t}} = ap - bp^2 - c \int_0^{\tilde{t}} p(x)dx, \quad p(0) = p_0. \quad (3.69)$$

Burada, $p(\tilde{t})$ canlı türünün $\tilde{t}$ anındaki nüfusu, $a > 0$ üreme oranı, $b > 0$ kaynakların sınırlılığından kaynaklanan ve nüfusa negatif etki yapan kalabalık katsayısı, $c > 0$ ortamdaki toksin birikimine karşılık gelen katsayıdır. p_0 ise başlangıç anındaki nüfustur. Şimdi

$$t = \frac{c}{b}\tilde{t}, \quad u = \frac{b}{a}p$$

dönüşümleri yapılarak (3.69) denklemi aşağıdaki forma indirgenebilir:

$$\kappa \frac{du}{dt} = u - u^2 - u \int_0^t u(x)dx, \quad u(0) = u_0. \quad (3.70)$$

Burada, $u(t)$ t zamanındaki ölçeklenmiş nüfustur. κ parametresi ise $\frac{c}{ab}$ 'ye eşittir.

Literatürde (3.70) problemini sayısal olarak çözmekle ilgilenen çalışmaların çoğu, öncelikle problemi bir adi diferansiyel denkleme dönüştürmüşlerdir. Bu çalışmalara Wazwaz (1999), Parand ve Hojjati (2008) ve Mohyud-din vd. (2010) örnek olarak gösterilebilir. Probleme Galerkin-tipi yöntemin uygulanmasında da aynı yol takip edilerek problem bir başlangıç değer problemine dönüştürülecektir. Bunun için

$$y(t) = \int_0^t u(x)dx$$

tanımlanmasıyla

$$y'(t) = u(t), y''(t) = u'(t)$$

olur. Bunların (3.70) probleminde yazılması ve $u(0)=u_0$ başlangıç koşulunun kullanılmasıyla

$$\kappa y''(t) = y'(t) - (y'(t))^2 - y(t)y'(t), y(0) = 0, y'(0) = u_0 \quad (3.71)$$

başlangıç değer problemi elde edilir. Böylece, başlangıçtaki integro-diferansiyel denklem ikinci mertebeden doğrusal olmayan bir adi diferansiyel denkleme indirgenmiştir. Galerkin-tipi yöntem, Bölüm 3.1.4'te Lotka-Volterra denklemlerine uygulandığına benzer bir şekilde bu doğrusal olmayan başlangıç değer problemine uygulanacaktır.

(3.71) başlangıç değer problemine Galerkin-tipi yöntemi uygulamanın ilk adımı,

$$y_N(t) = \sum_{k=0}^N a_k t^k = \mathbf{T}\mathbf{A}$$

deneme fonksiyonunu oluşturmaktır. Deneme fonksiyonunun türevleri, her zamanki gibi

$$y'_N(t) = \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{A}, y''_N(t) = \mathbf{T}\mathbf{B}^2\mathbf{A}$$

ile gösterilebilir. Diğer terimleri matris çarpımı olarak ifade etmek için, Bölüm 3.1.4'te yöntemin doğrusal olmayan denklemlere uygulanışı sırasında $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{Q}$ için tanımlanan yardımcı matrisin benzeri $\mathbf{B}\mathbf{A}$ çarpımı için tanımlanacaktır. Bu şekilde tanımlanacak $(2N+1) \times (N+1)$ boyutundaki $\widetilde{\mathbf{B}\mathbf{A}}$ matrisinin girdileri, $j \leq i \leq j+N-1$ için $(\widetilde{\mathbf{B}\mathbf{A}})_{i,j} = (i-j+1)a_{i-j+1}$ ve diğer indisler için $(\widetilde{\mathbf{B}\mathbf{A}})_{i,j}=0$ şeklinde olur. $\widetilde{\mathbf{B}\mathbf{A}}$ matrisi daha açık biçimde

$$\widetilde{\mathbf{B}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3a_3 & 2a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Na_N & (N-1)a_{N-1} & (N-2)a_{N-2} & \dots & a_1 & 0 \\ 0 & Na_N & (N-1)a_{N-1} & \dots & 2a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & Na_N & \dots & 3a_3 & 2a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & Na_N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Böylece, (3.71) problemindeki diğer terimler

$$(y'_N(t))^2 = \mathbf{T}_{2N}\widetilde{\mathbf{B}}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}, \quad y_N(t)y'_N(t) = \mathbf{T}_{2N}\widetilde{\mathbf{B}}\mathbf{A}\mathbf{A}$$

matris çarpımları ile gösterilebilirler. Böylece, $y_N(t)$ 'yi (3.71) probleminde yerine yazmak

$$\left(\kappa \mathbf{T}\mathbf{B}^2 - \mathbf{T}\mathbf{B} + \mathbf{T}_{2N}\widetilde{\mathbf{B}}\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{T}_{2N}\widetilde{\mathbf{B}}\mathbf{A} \right) \mathbf{A} = 0$$

ya da parantez içindeki ifadenin $\mathbf{W}(t)$ ile gösterilmesiyle

$$\mathbf{G}(t)\mathbf{A} = 0 \tag{3.72}$$

matris denklemini oluşturur. $\mathbf{G}(t)$, girdileri t 'nin fonksiyonlarını ve $a_0, a_1, \dots, a_N$ bilinmeyenlerini içeren $N+1$ uzunluğunda bir satır matrisidir. Problemin başlangıç koşullarından

$$y_N(0) = a_0 = 0, \quad y'_N(0) = a_1 = u_0$$

sonuçlarına ulaşılır. Kalan $N-1$ denklem ise (3.72) eşitliğinin iki tarafına $x^2, x^3, \dots, x^N$ test fonksiyonlarıyla iç çarpım uygulanması sonucu elde edilir. Böylece, $\mathbf{W}$ matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \langle \mathbf{W}(t)_{1,1}, x^2 \rangle & \langle \mathbf{W}(t)_{1,2}, x^2 \rangle & \langle \mathbf{W}(t)_{1,2}, x^2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{W}(t)_{1,N+1}, x^2 \rangle \\ \langle \mathbf{W}(t)_{1,1}, x^3 \rangle & \langle \mathbf{W}(t)_{1,2}, x^3 \rangle & \langle \mathbf{W}(t)_{1,2}, x^3 \rangle & \dots & \langle \mathbf{W}(t)_{1,N+1}, x^3 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle \mathbf{W}(t)_{1,1}, x^N \rangle & \langle \mathbf{W}(t)_{1,2}, x^N \rangle & \langle \mathbf{W}(t)_{1,2}, x^N \rangle & \dots & \langle \mathbf{W}(t)_{1,N+1}, x^N \rangle \end{bmatrix}$$

şeklinde olmak üzere

$$\mathbf{WA} = \begin{bmatrix} 0 & u_0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

doğrusal olmayan denklem sisteminin çözülmesiyle, y_N yaklaşık çözümü elde edilir.

Örnek 3.20. Şimdi, Galerkin-tipi yöntem, ilk olarak Wazwaz (1999) tarafından incelenen

$$\kappa \frac{du}{dt} = u - u^2 - u \int_0^t u(x)dx, \quad u(0) = 0.1 \quad (3.73)$$

problemine $\kappa=0.1$ değeri için uygulanacaktır.

Yöntemi probleme uygulamanın ilk adımı, yukarıda anlatıldığı gibi integro-diferansiyel denklemi adi diferansiyel denkleme dönüştürmektir. Böylece,

$$y'(t) = u(t)$$

yazılarak

$$0.1y'' = y' - (y')^2 - yy', \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.1 \quad (3.74)$$

ikinci mertebeden başlangıç değer problemi elde edilir. Galerkin-tipi yöntem, (3.74) başlangıç değer problemine çeşitli N seçimleri için uygulanmıştır. Örneğin, $N=4$ seçimiyle

$$y_4(t) = 0.1t - 0.3639215870t^2 + 0.5004083292t^3 - 0.2357838470t^4$$

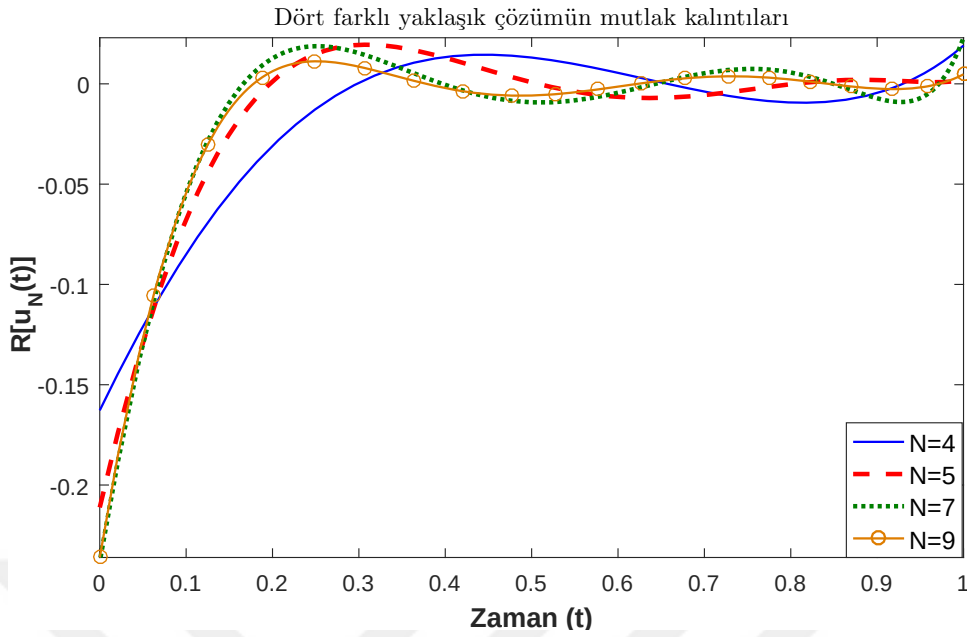
yaklaşık çözümü hesaplanmıştır. Buradan (3.73) probleminin çözümü, $y'(t)=u(t)$ olduğunun kullanılmasıyla

$$u_4(t) = y'_4(t) = 0.1 - 0.7278431741t + 1.5012249878t^2 - 0.9431353882t^3$$

olarak bulunur. (3.73) probleminin tam çözümü bilinmediğinden, yaklaşık çözümlerin değerlendirilmesi, bu çözümlerin integro-diferansiyel denklemde yazılmasıyla elde edilen

$$R[u_N(t)] = \kappa \frac{du_N}{dt} - u_N(t) + u_N(t)^2 + u_N(t) \int_0^t u_N(x)dx$$

kalıntı değerleri kullanılarak yapılır. Şekil 3.19'da dört farklı N değerine karşılık gelen kalıntıların grafikleri birlikte verilmiştir. Şekilden N değerini arttırmanın çözümlerin iyiliğini fazla etkilemediği sonucuna ulaşılabilir.



Şekil 3.19. Örnek 3.20'nin farklı N seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümlerinin kalıntıları.

3.4. Galerkin-tipi Yöntemin Bazı İyileştirmeleri

Bu bölüm, önceki bölümlerde sunulmuş olan uygulamalar ışığında Galerkin-tipi yöntemin birtakım zayıf yönlerinin tartışılmasına ve bu yönleri geliştirmek için üç farklı öneriye ayrılmıştır. Bu bağlamda, önce Galerkin-tipi yöntemin kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması ele alınacaktır. Ardından, yaklaşık çözümleri iyileştirmek için polinomun derecesi N 'yi arttırmaya alternatif bir yaklaşım önerilecek, son olarak ise elde edilmiş belli bir yaklaşık çözümün hatasını tahmin etmeye yarayan bir yöntem açıklanacaktır.

3.4.1. Galerkin-tipi yöntemin kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması

Galerkin yönteminde, başlangıç ve/veya sınır koşulları bir $\partial\Omega$ kümesi üzerinde verilmiş, bilinmeyen fonksiyonu $u(x, t)$ olan bir kısmi diferansiyel denklemi çözmek için, deneme fonksiyonu

$$u_N(x, t) = \phi_0(x, t) + \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(x, t)$$

biçiminde oluşturulur. Böylece, $u_N(x, t)$ kendiliğinden başlangıç ve/veya sınır koşullarını sağlamış olur. Burada, $\phi_0(x, t)$ fonksiyonu bu koşulları sağlayacak şekilde, $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$

taban fonksiyonları ise $\partial\Omega$ üzerinde sıfıra eşit olacak şekilde seçilir. Bir başka deyişle

$$\phi_i(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

geçerlidir. Bu tezin konusunu teşkil eden Galerkin-tipi yöntemde ise, deneme fonksiyonu u_N , derecesi belli bir N sayısından büyük olmayan bir polinom olarak alınır. İki boyutlu bir kısmi diferansiyel denklem için bu fonksiyon

$$u_N(x, t) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_{i,j} x^i t^j$$

olarak belirlenir. Dolayısıyla, bütün deneme fonksiyonlarının kümesi olan deneme uzayının kanonik tabanı

$$\Phi = \bigcup_{i,j=0..N} \{x^i t^j\} = \{1, t, \dots, t^N, xt, xt^2, \dots, xt^N, \dots, x^N t, x^N t^2, \dots, x^N t^N\}$$

kümesi olur. Test fonksiyonları ise, $0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N$ olmak üzere $x^i t^j$ şeklindeki tek terimlidir. Bu fonksiyonlar $\partial\Omega$ üzerinde 0 fonksiyonuna, ya da verilmiş herhangi bir fonksiyona eşit değildir, ayrıca u_N deneme fonksiyonu problemin başlangıç ve/veya sınır koşullarını kendiliğinden sağlamaz. Bu sorunun üstesinden gelmek için akla gelebilecek bir çözüm yolu, u_N 'ye bu koşulları $\partial\Omega$ kümesinin sonlu sayıda noktası üzerinde sağlamak. Böylece, Galerkin-tipi yöntem $\partial\Omega$ üzerinde kollokasyon noktaları kullanacaktır. Bu yolla bir boyutlu (Yüzbaşı ve Karaçayır 2018c) ve iki boyutlu (Yüzbaşı ve Karaçayır 2017b) telgraf denklemlerinin çözüldüğü birer çalışma mevcuttur.

Şimdi, kısmi diferansiyel denklemler için önerilen bu yaklaşım, bir boyutlu telgraf denklemine uygulanacaktır.

$$u_{tt}(x, t) + \alpha u_t(x, t) + \beta u(x, t) = u_{xx}(x, t) + F(x, t), \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq b \quad (3.75)$$

şeklinde olan bir boyutlu telgraf denklemi,

$$u(x, 0) = g_0(x), u_t(x, 0) = g_1(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (3.76)$$

başlangıç ve

$$u(0, t) = h_0(t), u(a, t) = h_1(t), \quad 0 \leq t \leq b, \quad (3.77)$$

sınır koşulları ile birlikte ele alınacaktır. Problem $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ bölgesinde verilmiştir. α ve β bilinen gerçel sabitler, F ise Ω üzerinde sürekli bilinen bir fonksiyondur. Ayrıca, g_0 ve g_1 $0 \leq x \leq a$ üzerinde, h_0 ve h_1 $0 \leq t \leq b$ üzerinde sürekli bilinen fonksiyonlardır.

Galerkin-tipi yöntemi (3.75)-(3.77) problemine uygulamak için, daha önce kullanılmayan bazı yardımcı matrisler tanımlamak faydalı olacaktır. Böylece, $\mathbf{X}=\mathbf{X}_N(x)$ her zamanki $N+1$ uzunluğunda sembolik yardımcı satır matrisini ve I_{N+1} ise $(N+1)\times(N+1)$ boyutundaki birim matrisi göstermek üzere, $(N+1)\times(N+1)^2$ boyutunda $\mathbf{Q}(t)$ sembolik yardımcı matrisi

$$\mathbf{Q}(t) = I_{N+1} \otimes \mathbf{X}_N(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_N(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_N(t) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}_N(t) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Buradaki $\otimes$ simgesi iki matrisin Kronecker tensör çarpımını göstermektedir. u_N deneme fonksiyonunun bilinmeyen katsayılarını tutan sütun matrisi ise

$$\mathbf{A} = [a_{0,0} \ a_{0,1} \ \dots \ a_{0,N} \ a_{1,0} \ a_{1,1} \ \dots \ a_{1,N} \ \dots \ a_{N,0} \ a_{N,1} \ \dots \ a_{N,N}]^T$$

şeklindedir. Böylece u_N deneme fonksiyonu

$$u_N(x, t) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_{i,j} x^i t^j = \mathbf{XQ}(t)\mathbf{A}$$

biçiminde gösterilebilir. Son olarak, türevleri ifade etmeye yardımcı olan $\mathbf{B}$ matrisinden yararlanılarak, $(N+1)^2 \times (N+1)^2$ boyutunda $\tilde{\mathbf{B}}$ matrisi

$$\tilde{\mathbf{B}} = I_{N+1} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Bu matrisin içindeki 0 ile yalnızca 0 'lardan oluşan $(N+1)\times(N+1)$ boyutundaki matris kastedilmektedir. Böylece, deneme fonksiyonunun kısmi türevleri

$$(u_N)_t(x, t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{Q}(t)\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{A}, \quad (u_N)_{tt}(x, t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{Q}(t)\tilde{\mathbf{B}}^2\mathbf{A},$$

$$(u_N)_{xx}(x, t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2\mathbf{Q}(t)\mathbf{A}$$

şeklinde matris çarpımı olarak ifade edilebilir. Deneme fonksiyonu u_N 'nin ve kısmi türevlerinin (3.75) denkleminde yazılmasıyla,

$$\mathbf{G}(x, t) = \mathbf{XQ}(t)\tilde{\mathbf{B}}^2 + \alpha\mathbf{XQ}(t)\tilde{\mathbf{B}} + \beta\mathbf{XQ}(t) - \mathbf{XB}^2\mathbf{Q}(t)$$

olmak üzere

$$\mathbf{G}(x, t)\mathbf{A} = F(x, t) \quad (3.78)$$

matris denklemi elde edilir. Buradaki $\mathbf{G}(x, t)$ ifadesi, girdileri x ve t 'nin fonksiyonları olan $(N+1)^2$ uzunluğunda bir satır matrisidir. Sonraki adım (3.78) eşitliğine $0 \leq i \leq N$ ve $0 \leq j \leq N$ için $x^i t^j$ test fonksiyonlarıyla iç çarpım uygulamaktır. Böylece, $(N+1)^2 \times (N+1)^2$ 'lik $\mathbf{W}$ matrisi ve $(N+1)^2 \times 1$ 'lik $\mathbf{F}$ matrisinin girdileri, $k=1, 2, \dots, (N+1)^2$ için

$$\mathbf{W}_{(N+1)i+j+1,k} = \langle \mathbf{G}(x, t)_{1,k}, x^i t^j \rangle, \quad \mathbf{F}_{(N+1)i+j+1,1} = \langle F(x, t), x^i t^j \rangle$$

ile hesaplanır. $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{F}$ matrisleri açık olarak

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \langle 1, \mathbf{G}(x, t)_{11} \rangle & \langle 1, \mathbf{G}(x, t)_{12} \rangle & \dots & \langle 1, \mathbf{G}(x, t)_{1,(N+1)^2} \rangle \\ \langle t, \mathbf{G}(x, t)_{11} \rangle & \langle t, \mathbf{G}(x, t)_{12} \rangle & \dots & \langle t, \mathbf{G}(x, t)_{1,(N+1)^2} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle t^N, \mathbf{G}(x, t)_{11} \rangle & \langle t^N, \mathbf{G}(x, t)_{12} \rangle & \dots & \langle t^N, \mathbf{G}(x, t)_{1,(N+1)^2} \rangle \\ \langle x, \mathbf{G}(x, t)_{11} \rangle & \langle x, \mathbf{G}(x, t)_{12} \rangle & \dots & \langle x, \mathbf{G}(x, t)_{1,(N+1)^2} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle xt^N, \mathbf{G}(x, t)_{11} \rangle & \langle xt^N, \mathbf{G}(x, t)_{12} \rangle & \dots & \langle xt^N, \mathbf{G}(x, t)_{1,(N+1)^2} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle x^N t^N, \mathbf{G}(x, t)_{11} \rangle & \langle x^N t^N, \mathbf{G}(x, t)_{12} \rangle & \dots & \langle x^N t^N, \mathbf{G}(x, t)_{1,(N+1)^2} \rangle \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \left[\langle 1, F(x, t) \rangle \quad \dots \quad \langle t^N, F(x, t) \rangle \quad \langle x, F(x, t) \rangle \quad \dots \quad \langle x^N t^N, F(x, t) \rangle \right]^T$$

şeklindeir. (3.76) başlangıç ve (3.77) sınır koşullarını çözüm yöntemine dahil etmek için, bu koşulların verilmiş olduğu $\mathcal{L}_1 := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq a\}$ ve $\mathcal{L}_2 := \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq b\}$ doğru parçalarının her biri üzerinde $N+1$ adet eşit aralıklı kollokasyon noktası alınabilir. Daha açık bir ifadeyle, $i=0, 1, \dots, N$ için $x_i = ai/N$ ve $t_i = bi/N$ tanımlanır. Böylece, $\mathcal{L}_1$ üzerindeki kollokasyon noktalarının kümesi

$$\{(ai/N, 0) : i = 0, 1, \dots, N\} = \{(0, 0), (a/N, 0), (2a/N, 0), \dots, (a, 0)\}$$

ve $\mathcal{L}_2$ üzerindeki kollokasyon noktalarının kümesi

$$\{(0, bi/N) : i = 0, 1, \dots, N\} = \{(0, 0), (0, b/N), (0, 2b/N), \dots, (0, b)\}$$

olur. Dolayısıyla, kollokasyon noktaları üzerinde (3.76) başlangıç koşullarının sağlanmasına karşılık gelen denklemler

$$\mathbf{X}(x_i)\mathbf{Q}(0)\mathbf{A} = g_0(x_i), \mathbf{X}(x_i)\mathbf{Q}(0)\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{A} = g_1(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (3.79)$$

ve (3.77) sınır koşullarının sağlanmasına karşılık gelen denklemler

$$\mathbf{X}(0)\mathbf{Q}(t_i)\mathbf{A} = h_0(t_i), \mathbf{X}(a)\mathbf{Q}(t_i)\mathbf{A} = h_1(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (3.80)$$

olarak yazılabilir. Böylece, her koşul her bir kollokasyon noktası için $a_{i,j}$ bilinmeyenlerinin doğrusal bir denklemine karşılık geleceğinden, bütün başlangıç ve sınır koşullarından toplam $4N+4$ adet doğrusal denklem elde edilir. Burada, $\mathcal{L}_1$ ve $\mathcal{L}_2$ doğru parçaları üzerinde herhangi bir sayıda kollokasyon noktası alınabilecekken, yönteme yeni bir parametre eklememek için $N+1$ sayısında karar kılınmıştır.

Başlangıç ve sınır koşullarına karşılık gelen (3.79) ve (3.80) denklemlerini ifade etmenin daha öz bir yolu vardır. Bu iş için, $(N+1) \times (N+1)^2$ boyutundaki $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{Y}$ ve $\mathbf{Z}$ matrisleri

$$\begin{aligned} N+1 \mid j-1 \text{ ise } \mathbf{U}_{ij} &= x_i^{\frac{j-1}{N+1}}, \text{ aksi durumda } \mathbf{U}_{ij} = 0, \\ N+1 \mid j-2 \text{ ise } \mathbf{V}_{ij} &= x_i^{\frac{j-2}{N+1}}, \text{ aksi durumda } \mathbf{V}_{ij} = 0, \\ 1 \leq j \leq N+1 \text{ ise } \mathbf{Y}_{ij} &= t_i^{j-1}, \text{ aksi durumda } \mathbf{Y}_{ij} = 0, \\ \mathbf{Z}_{i,j(N+1)+k+1} &= a^j t_i^k, \quad 0 \leq j \leq N, \quad 0 \leq k \leq N \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Burada $0^0=1$ varsayılmıştır. Ayrıca, g_0, g_1, h_0 ve h_1 fonksiyonlarının x_i ve t_i noktalarındaki değerlerini tutan $N+1$ uzunluğundaki $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\mu}$ ve $\boldsymbol{\psi}$ sütun matrislerinin girdileri, $i=0, 1, \dots, N$ için

$$\boldsymbol{\lambda}_{i,1} = g_0(x_i), \boldsymbol{\gamma}_{i,1} = g_1(x_i), \boldsymbol{\mu}_{i,1} = h_0(t_i), \boldsymbol{\psi}_{i,1} = h_1(t_i)$$

olarak tanımlanır. Böylece, (3.76) ve (3.77) başlangıç ve sınır koşullarına karşılık gelen denklemler

$$\mathbf{U}\mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{V}\mathbf{A} = \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{Y}\mathbf{A} = \boldsymbol{\mu}, \mathbf{Z}\mathbf{A} = \boldsymbol{\psi}$$

doğrusal sistemleri ile ifade edilebilirler. Son olarak, $a_{i,j}$ bilinmeyenlerini tespit edebilmek için bu dört sistemin $\mathbf{W}\mathbf{A}=\mathbf{F}$ sistemine katılması gerekir. Bu amaçla, $\mathbf{W}$ 'nin ve

F' 'nin ilk $4N+4$ satırları silinerek yerlerine bu dört sisteme karşılık gelen matrisler yazılır. Böylece, W ve F 'nin kalan kısımları sırayla W_{kalan} ve F_{kalan} ile gösterilmek üzere

$$\widetilde{W} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ Y \\ Z \\ W_{\text{kalan}} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{F} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \gamma \\ \mu \\ \psi \\ F_{\text{kalan}} \end{bmatrix}$$

matrisleri oluşur. $\widetilde{W}A = \widetilde{F}$ doğrusal sisteminin çözülmesiyle $a_{i,j}$ bilinmeyenleri ve dolaşısıyla $u_N(x, t)$ yaklaşık çözümü bulunur.

Örnek 3.21. Bu kısımda çalışılacak ilk örnek, Saadatmandi ve Dehghan (2010) ve Yüzbaşı (2016) tarafından da incelenen

$$u_{tt} + u_t + u = u_{xx} + (2 - 2t + t^2)(x - x^2)e^{-t} + 2t^2e^{-t}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.81)$$

denklemdir. Bu denklem

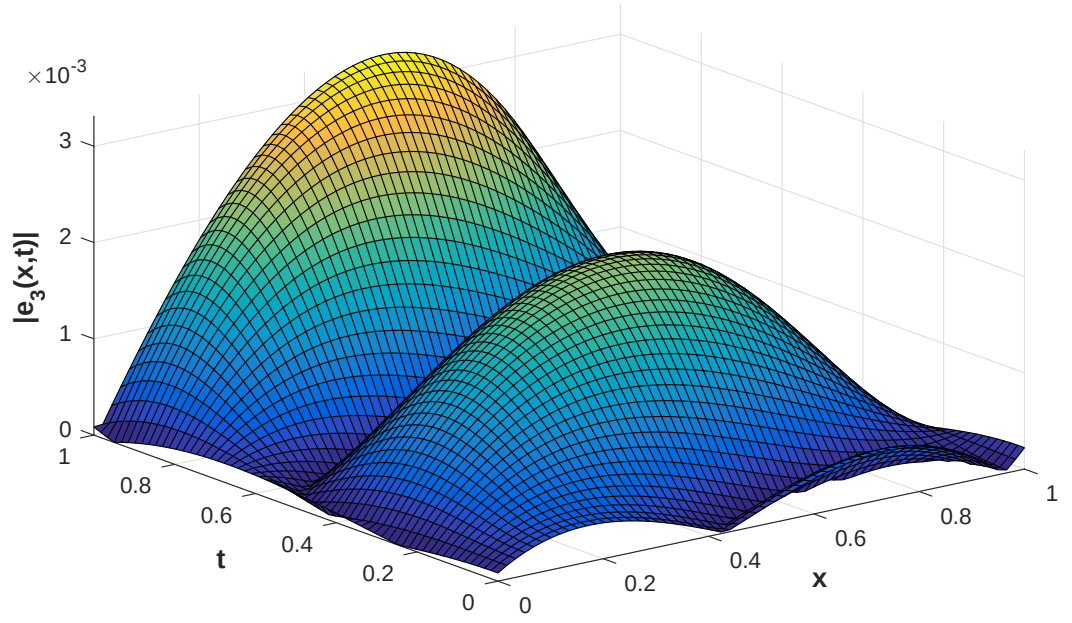
$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (3.82)$$

homojen başlangıç ve sınır koşulları altında ele alınacaktır. Bu problemin tam çözümünün $u_{\text{tam}}(x, t) = t^2(x - x^2)e^{-t}$ fonksiyonu olduğu bilinmektedir. Elde edilecek yaklaşık çözümleri değerlendirmek amacıyla $|e_N(x, t)| = |u_{\text{tam}}(x, t) - u_N(x, t)|$ mutlak hata fonksiyonunun yanı sıra

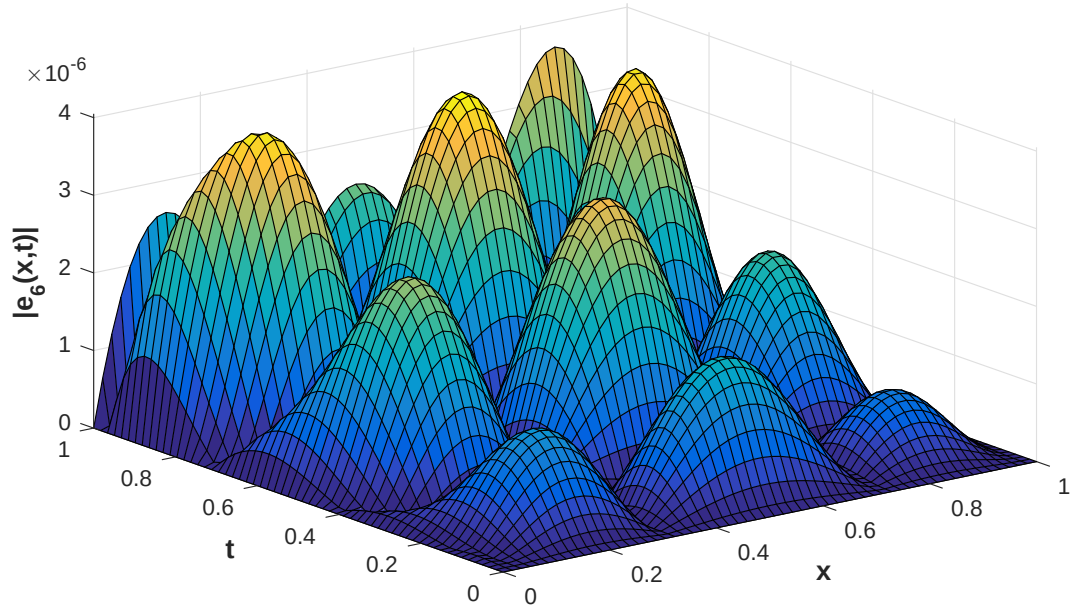
$$\begin{aligned} \|f\|_{L_2} &= \left(\int_0^b \int_0^a (f(x, t))^2 dx dt \right)^{1/2} \\ \|f\|_{L_\infty} &= \sup_{(x,t) \in \Omega} \{|f(x, t)|\} \end{aligned}$$

ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hatalar kullanılacaktır.

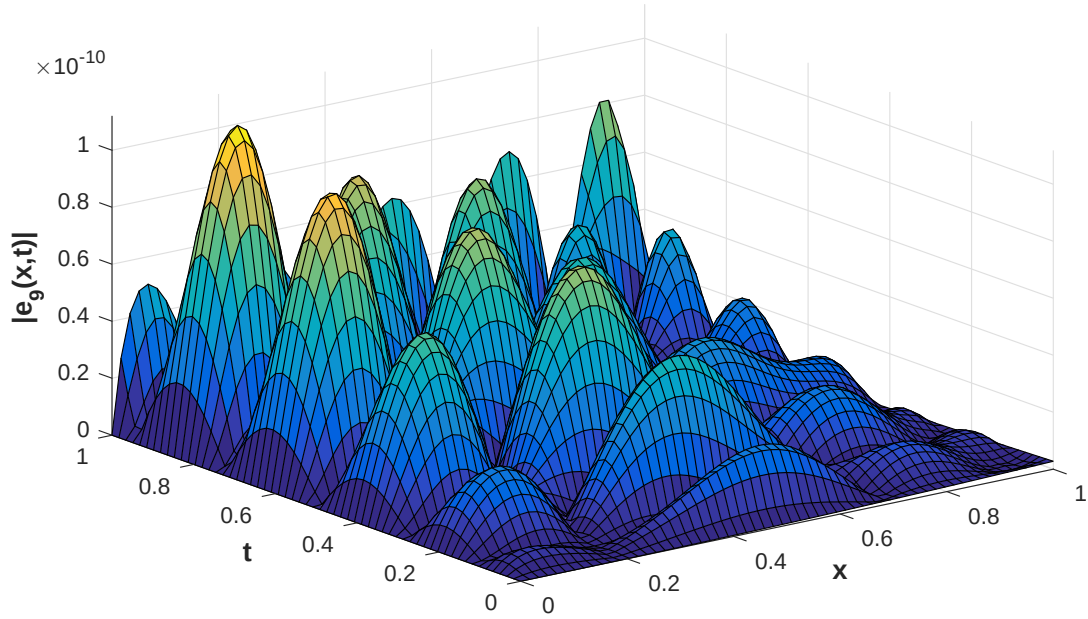
Problem (3.81)-(3.82)'ye Galerkin-tipi yöntem çeşitli N değerleri için uygulanmış ve $N=3, 6, 9$ seçimleri için elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları sırasıyla Şekil 3.20, 3.21 ve 3.22'de gösterilmiştir. Şekillerden, N değerini arttırmanın çözümleri açık biçimde iyileştirdiği anlaşılmaktadır. Çeşitli N değerlerine karşılık olarak elde edilen L_2



Şekil 3.20. Örnek 3.21’de $N=3$ seçimine karşılık elde edilen mutlak hata.



Şekil 3.21. Örnek 3.21’de $N=6$ seçimine karşılık elde edilen mutlak hata.



Şekil 3.22. Örnek 3.21’de $N=9$ seçimine karşılık elde edilen mutlak hata.

Çizelge 3.21. Örnek 3.21’in çeşitli N seçimleriyle elde edilen yaklaşık çözümlerinin L_2 ve L_∞ hataları.

	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$
$\ e_N\ _{L_2}$	1.251E - 3	1.249E - 4	6.460E - 6	1.475E - 6	1.191E - 7
$\ e_N\ _{L_\infty}$	3.317E - 3	3.014E - 4	1.574E - 5	4.039E - 6	3.482E - 7

Çizelge 3.22. Örnek 3.21’in $N=5$ ve $N=7$ seçimleriyle elde edilen çözümlerinin L_2 ve L_∞ hata bakımından iki diğer yöntemle karşılaştırılması.

	BKY ($N = 5$)	BKY ($N = 7$)	CTY ($N = 5$)	CTY ($N = 7$)	GTY ($N = 5$)	GTY ($N = 7$)
$\ e_N\ _{L_2}$	1.5E - 4	6.4E - 7	1.2E - 5	6.7E - 8	6.4E - 6	1.1E - 7
$\ e_N\ _{L_\infty}$	3.9E - 4	1.4E - 6	4.1E - 5	1.7E - 7	1.5E - 5	3.4E - 7

ve L_∞ hatalar da Çizelge 3.21’de sunulmuştur. Aynı sonuca çizelgedeki değerlere dayalı olarak da varılabilir.

Çizelge 3.22’de Galerkin-tipi yöntem $N=5$ ve $N=7$ seçimleri için Chebyshev tau yöntemi (CTY) (Saadatmandi ve Dehghan 2010) ve Bessel kollokasyon yöntemi (BKY) (Yüzbaşı 2016) ile karşılaştırılmıştır. Çizelgedeki değerlere göre, Galerkin-tipi yöntem her iki N değeri için Bessel kollokasyon yöntemini geride bırakmışken, Chebyshev tau yöntemini yalnızca $N=5$ seçimi için geride bırakmıştır.

Örnek 3.22. Bu kısımda ele alınacak ikinci örnek, daha önce Yüzbaşı ve Şahin (2013) tarafından incelenen ve bir ε tekil pertürbasyon parametresine bağlı olarak tanımlanan

$$u_t - \varepsilon u_{xx} + (2x + 1)u_x + x^2 u = \frac{e^{x+t}}{\varepsilon} (x^2 + 2x + 2 - \varepsilon) \quad (3.83)$$

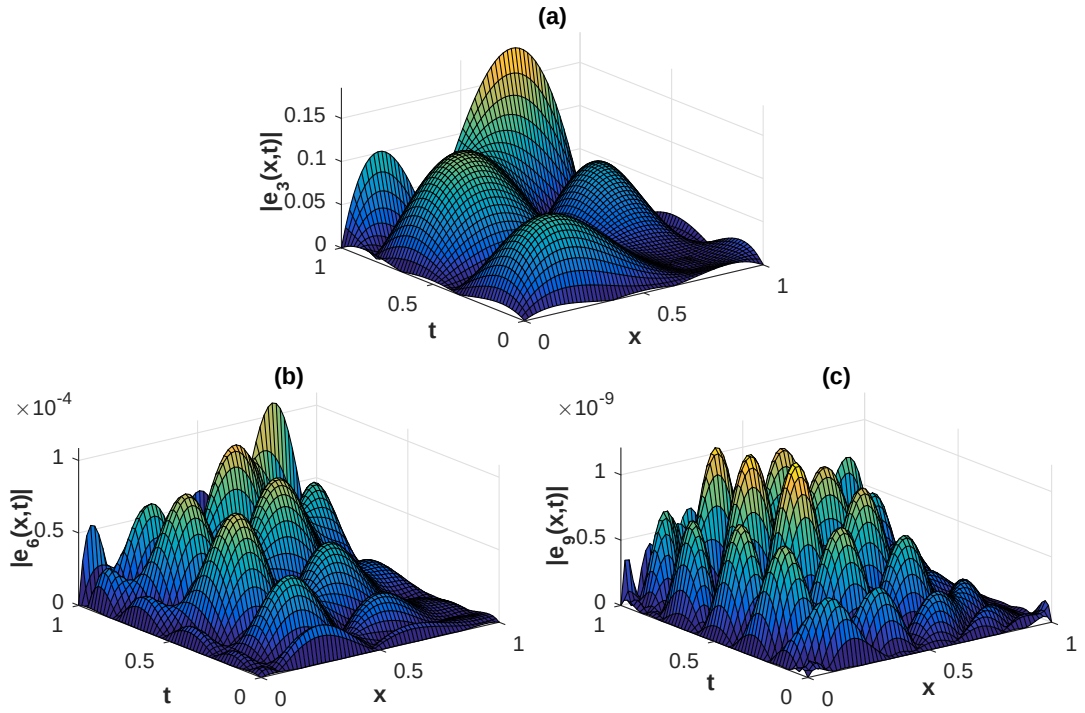
"konveksiyon-difüzyon denklemi"dir (*İng. "convection-diffusion equation"*). Bu problem

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{e^x}{\varepsilon}, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \frac{e^t}{\varepsilon}, \quad u(1, t) = \frac{e^{1+t}}{\varepsilon}, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (3.84)$$

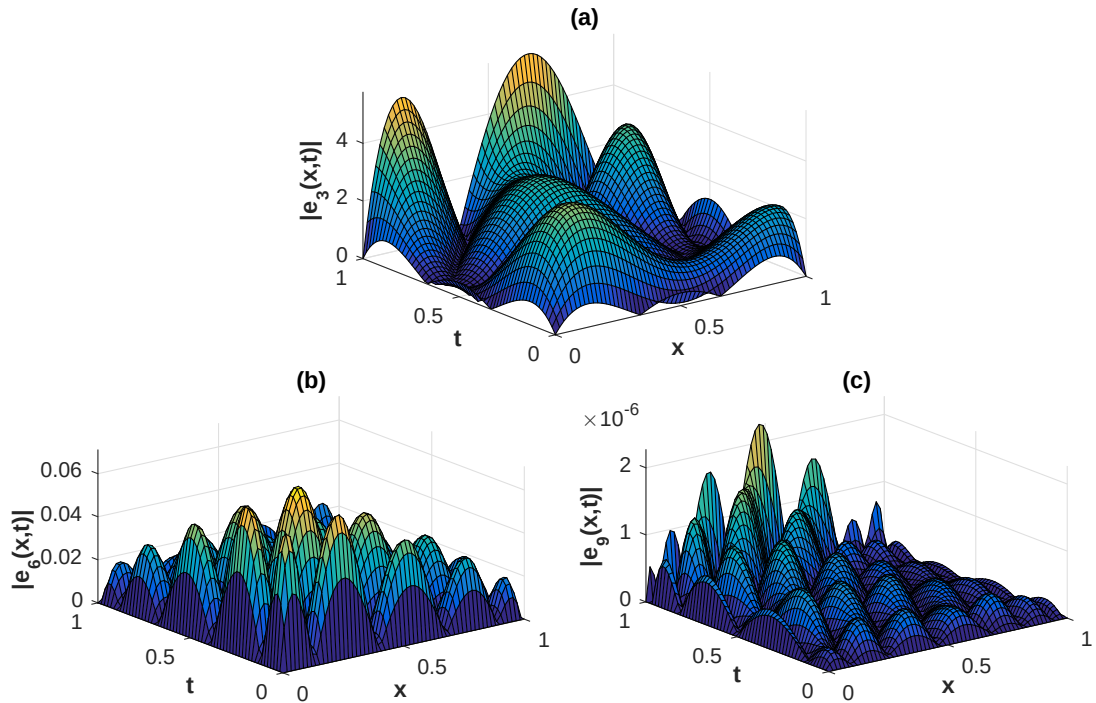
başlangıç ve sınır koşulları altında çözülecektir. Problemin tam çözümü $u_{\text{tam}}(x, t) = \frac{e^{x+t}}{\varepsilon}$ fonksiyonudur.

Problem (3.83)-(3.84) Galerkin-tipi yöntemle çeşitli ε ve N değerleri için çözülmüştür. Örnek olarak, pertürbasyon parametresinin $\varepsilon=10^{-1}$ ve $\varepsilon=10^{-3}$ değerlerine karşılık $N=3, 6$ ve 9 seçimleriyle elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hataları sırayla Şekil 3.23 ve 3.24’te görsel olarak sunulmuştur. Şekillerden, N değerini arttırmanın sonuçları iyileştirdiği anlaşılmaktadır. Ayrıca, tekil olarak pertürbe edilmiş adi diferansiyel denklemde olduğu gibi, sabit N değeri için daha büyük ε değeriyle elde edilen çözümlerin daha isabetli olduğu görülmektedir. Çizelge 3.23’te ise Galerkin-tipi yöntemle elde edilen sonuçların L_2 hataları Bessel kollokasyon yöntemiyle (Yüzbaşı ve Şahin 2013) karşılaştırılmıştır. $N=9$ için Galerkin-tipi yöntemin, diğer N değerleri için Bessel kollokasyon yönteminin daha isabeti sonuçlar verdiği göze çarpmaktadır.

Galerkin-tipi yöntemin başlangıç ve sınır koşullarının belli kollokasyon noktalarında sağlatılması yoluyla kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması, doğal bir şekilde yüksek boyutlu problemlere uygulanabilir. Örnek olarak, uzayın x ’in yanında ikinci bir y



Şekil 3.23. Örnek 3.22'nin $\varepsilon=10^{-1}$ değerine karşılık (a) $N=3$, (b) $N=6$, (c) $N=9$ seçimiyle elde edilen yaklaşık çözümlerinin mutlak hataları.



Şekil 3.24. Örnek 3.22'nin $\varepsilon=10^{-3}$ değerine karşılık (a) $N=3$, (b) $N=6$, (c) $N=9$ seçimiyle elde edilen yaklaşık çözümlerinin mutlak hataları.

Çizelge 3.23. Örnek 3.22'nin çeşitli N ve ϵ değerlerine karşılık elde edilen L_2 hatalarının Bessel kollokasyon yöntemiyle karşılaştırılması.

Galerkin-tipi yöntem	$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$	$N = 8$	$N = 9$
$\epsilon = 10^{-1}$	5.004E - 4	3.145E - 5	2.348E - 6	3.039E - 8	4.040E - 10
$\epsilon = 10^{-2}$	7.059E - 3	4.091E - 4	2.319E - 5	3.588E - 7	7.924E - 9
$\epsilon = 10^{-3}$	8.470E - 2	2.179E - 2	1.988E - 3	3.224E - 5	4.195E - 7
$\epsilon = 10^{-4}$	8.668E - 1	2.678E - 1	3.247E - 2	2.023E - 3	1.971E - 5
Bessel kollokasyon	$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$	$N = 8$	$N = 9$
$\epsilon = 10^{-1}$	1.998E - 4	4.385E - 6	1.943E - 7	7.022E - 9	3.388E - 9
$\epsilon = 10^{-2}$	1.753E - 3	5.352E - 5	2.320E - 6	5.113E - 8	4.877E - 8
$\epsilon = 10^{-3}$	1.736E - 2	5.371E - 4	2.328E - 5	5.554E - 7	5.187E - 7
$\epsilon = 10^{-4}$	1.735E - 1	5.372E - 3	2.329E - 4	5.598E - 6	5.215E - 6

boyutuyla birlikte iki boyutlu olarak göz önüne alındığı telgraf denklemini ele alalım. Yalnızca mekan boyutlarına referansla "iki boyutlu telgraf denklemi" olarak anılan bu denklem

$$u_{tt}(x, y, t) + 2\alpha u_t(x, y, t) + \beta^2 u(x, y, t) = \delta u_{xx}(x, y, t) + \gamma u_{yy}(x, y, t) + F(x, y, t) \quad (3.85)$$

şeklinde olup

$$u(x, y, 0) = f_0(x, y), u_t(x, y, 0) = f_1(x, y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

başlangıç koşulları ve

$$u(0, y, t) = g_0(y, t), u(1, y, t) = g_1(y, t), 0 \leq y \leq 1, 0 \leq t \leq T,$$

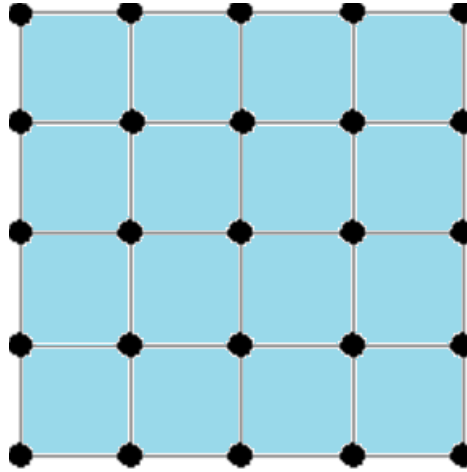
$$u(x, 0, t) = h_0(x, t), u(x, 1, t) = h_1(x, t), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T$$

sınır koşullarıyla ele alınır. (3.85) denklemi üç tane bağımsız değişken içerdiğinden, bu problem için deneme uzayının tabanı

$$\Phi = \bigcup_{i,j,k=0..N} \{x^i y^j t^k\} = \{1, t, \dots, t^N, y, yt, \dots, yt^N, \dots, x^N y^N, x^N y^N t, \dots, x^N y^N t^N\}$$

ve deneme fonksiyonu da

$$u_N(x, y, t) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N a_{i,j,k} x^i y^j t^k$$



Şekil 3.25. Galerkin-tipi yöntemin iki boyutlu telgraf denklemine $N=4$ seçimi ile uygulanması sırasında başlangıç ve sınır koşulları için seçilen kollokasyon noktaları.

şeklinde olur. Bir başka önemli değişiklik başlangıç ve sınır koşullarının uygulanışıyla ilgilidir. Bu koşullar bu kez doğru parçaları yerine düzlem parçaları üzerinde verildiğinden, kollokasyon noktalarının seçimi Şekil 3.25'te görüldüğü gibi olur. Her bir başlangıç ya da sınır koşulu için $(N+1)^2$ tane kollokasyon noktası seçilir. Böylece, $a_{i,j,k}$ bilinmeyenlerini tespit etmek için gereken $(N+1)^3$ denklemin $6(N+1)^2$ tanesi başlangıç ve sınır koşullarının kollokasyon noktalarına sağlatılmasıyla elde edilir.

Örnek 3.23. Galerkin-tipi yöntemin iki boyutlu telgraf denklemine uygulanması, daha önce Jiware vd. (2012), Mittal ve Bhatia (2012) ve Ma vd. (2016) tarafından çözülen bir örnek problem üzerinde gerçekleştirilecektir. Bu problem

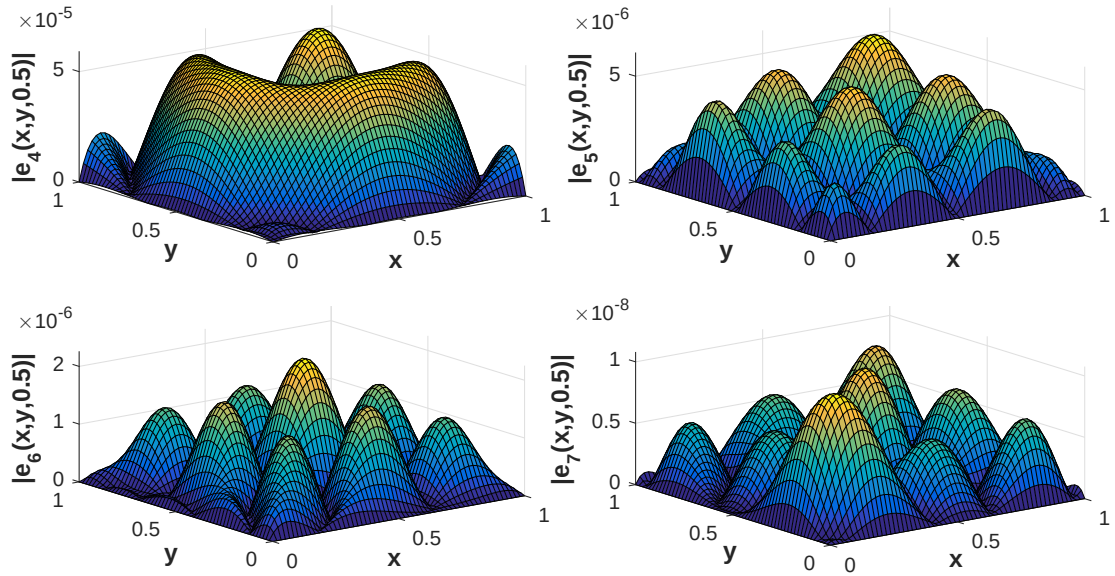
$$u_{tt} + 2u_t + u = u_{xx} + u_{yy} + 2(\cos(t) - \sin(t)) \sin(x) \sin(y) \quad (3.86)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \sin(x) \sin(y), \quad u_t(x, y, 0) = 0, \\ u(0, y, t) &= 0, \quad u(1, y, t) = \sin(1) \cos(t) \sin(y), \\ u(x, 0, t) &= 0, \quad u(x, 1, t) = \sin(1) \cos(t) \sin(x) \end{aligned} \quad (3.87)$$

başlangıç ve sınır koşullarına sahiptir. $\Omega=[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ bölgesinde ele alınan problemin tam çözümü $y_{\text{tam}}(x, y, t) = \cos(t) \sin(x) \sin(y)$ fonksiyonudur.

(3.86)-(3.87) problemine çeşitli N seçimleriyle Galerkin-tipi yöntem uygulanmıştır. Sonunda elde edilen $e_N(x, y, t)$ hataları üç değişkenli fonksiyonlar olduğundan, bunların



Şekil 3.26. Örnek 3.23'ün $N=4, 5, 6, 7$ seçimleriyle bulunan çözümlerinin mutlak hatalarının $t = 0.5$ anındaki grafikleri.

Çizelge 3.24. Örnek 3.23'ün $N=4, 5, 6, 7$ seçimleriyle bulunan çözümlerinin L_2 ve L_∞ hataları.

	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$
L_2	$4.7045\text{E} - 4$	$8.6989\text{E} - 5$	$2.5840\text{E} - 6$	$6.5945\text{E} - 7$	$4.7107\text{E} - 9$
L_∞	$1.6252\text{E} - 3$	$4.7974\text{E} - 4$	$1.3065\text{E} - 5$	$4.7123\text{E} - 6$	$2.8518\text{E} - 8$

grafiklerini doğrudan çizmek mümkün değildir. Bu sebeple, hata fonksiyonunun sabit bir $t=t_0$ zamanındaki seviye yüzeyini çizmek, çözümlerin iyiliğini karşılaştırmak için daha elverişli bir yöntemdir. Bu düşünceyle, $t=0.5$ anı için elde edilen mutlak $|e_N(x, y, 0.5)|$ seviye hataları Şekil 3.26'da çizilmiştir. N değerini arttırdıkça hataların belirgin düzeyde azaldığı görülmektedir. Bu durum, elde edilen çözümlerin L_2 ve L_∞ normlarına göre hesaplanmış hatalarının yer aldığı Çizelge 3.24'ten de anlaşılmaktadır.

Galerkin-tipi yöntemle elde edilen sonuçları diğer yöntemlerle karşılaştırmak için, belli bir $t=t_0$ anındaki hatanın L_2 -normunun gerçek çözümün L_2 -normuna oranına eşit olan,

$$\varepsilon_{\text{rms}} = \frac{\|e_N(x, y, t_0)\|_{L_2}}{\|u_{\text{tam}}(x, y, t_0)\|_{L_2}}$$

Çizelge 3.25. Örnek 3.23'ün $N=6$ ve $N=7$ seçimleriyle elde edilen çözümlerinin $t=0.5$ ve $t=1$ anlarındaki bağıl hatalarının üç farklı yöntemle karşılaştırılması.

	GTY ($N=6$)	GTY ($N=7$)	DDY ($\Delta t=0.001$)	KBK ($\Delta t=0.001$)	REK ($\Delta t=0.001$)
$\epsilon_{\text{rms}} (t=0.5)$	$2.7557\text{E} - 6$	$1.9685\text{E} - 8$	$1.2448\text{E} - 5$	–	$7.8418\text{E} - 7$
$\epsilon_{\text{rms}} (t=1)$	$4.4760\text{E} - 6$	$3.1974\text{E} - 8$	$2.6696\text{E} - 5$	$6.2977\text{E} - 4$	$7.7780\text{E} - 7$

ile tanımlı ϵ_{rms} bağıl hatası kullanılmıştır. $t=0.5$ ve $t=1$ anlarında ölçülen ϵ_{rms} hataların diferansiyel dörtgenleme yöntemi (DDY) (Jiwari vd. 2012), kübik B-spline kollokasyon yöntemi (KBK) (Mittal ve Bhatia 2013) ve rasyonel enterpolasyonlu kollokasyon yöntemi (REK) (Ma vd. 2016) ile karşılaştırılması Çizelge 3.25'te sunulmuştur. Çizelgeye göre, Galerkin-tipi yöntemle elde edilen sonuçlar diferansiyel dörtgenleme yöntemi ve rasyonel enterpolasyonlu kollokasyon yönteminden iyiyken, kübik B-spline kollokasyon yöntemine kıyasla $N=6$ için daha kötü, $N=7$ için daha iyidir. Diğer üç yöntem için sunulan sonuçlar, zaman boyutunda $\Delta t=0.001$ adım boyu kullanılarak elde edilmiştir.

3.4.2. Galerkin-tipi yöntemin bir aralığın parçalanışlarına uygulanması

İncelenmiş olan örnek problemlerde elde edilen sonuçlar, yaklaşık sonucun derecesi N 'yi arttırmanın her zaman daha isabetli çözümler vermediğini göstermiştir. Ayrıca, belli bir iyileşmenin olduğu durumlarda, söz konusu iyileşme, daha büyük bir denklem sistemini çözmenin getirdiği hesapsal maliyeti karşılayacak kadar fazla olmayabilmektedir.

Bu kısımda, bir $[a, b]$ aralığında ele alınan başlangıç değer problemlerinde bu problemin üstesinden gelmek için yeni bir yol önerilmektedir. Bu yeni yol, Galerkin sonlu elemanlar yöntemi için bilinen ve bu tezin giriş bölümünde bahsedilen

$$\|u_{\text{tam}} - u_{h,k}\|_{\infty} \leq Ch^k$$

eşitsizliğinden esinlenmiştir. Galerkin-tipi yöntem bir sonlu elemanlar yöntemi olmasa da, bu eşitsizlik, yöntemi tek seferde daha küçük bir bölgeye uygulamanın sonucu iyileştirebileceğini düşündürmektedir. Önerilen çözümün adımları şu şekildedir:

(1) Bir k pozitif tamsayısı ve yaklaşık çözüm polinomunun derecesi N 'yi belirle.

(2) $h = \frac{b-a}{k}$ hesapla.

(3) Problemi $[a, a+h]$ aralığında çözerek $y_{1,N}$ yaklaşık çözümünü belirle.

(4) Her $i=2, 3, \dots, k$ için şunları yap:

- (i) $y_{i-1,N}$ yaklaşık çözümünü kullanarak $a+ih$ noktasında başlangıç koşullarını belirle.
- (ii) Bu başlangıç koşullarıyla problemi $[a+(i-1)h, a+ih]$ aralığında çözerek $y_{i,N}$ yaklaşık çözümünü bul.

(5) Problemin yaklaşık çözümünü

$$y_{N,k}(x) = \begin{cases} y_{N,k,1}(x), & a \leq x \leq a+h \text{ ise} \\ y_{N,k,2}(x), & a+h \leq x \leq a+2h \text{ ise} \\ \vdots \\ y_{N,k,k}(x), & a+(k-1)h \leq x \leq b \text{ ise} \end{cases}$$

olarak belirle.

Şimdi, bu yöntem Bölüm 3.1.2'de çözölen

$$(x+1)y''(x) - (2x+3)y'(x) + (x+2)y(x) = e^{2x}(x+1)^2 - 2e^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5 \quad (3.88)$$

başlangıç değeri problemine uygulanacaktır. Tam çözümü $y_{\text{tam}}(x) = (2x+2)e^x + xe^{2x}$ olan bu probleme Galerkin-tipi yöntemin $N=5$ seçimi ile uygulanması

$$y_5(x) = 2 + 5x + 3.5028427932x^2 + 6.4736990458x^3 - 2.6303836191x^4 + 3.1527224593x^4$$

yaklaşık çözümünü vermişti. Yukarıda önerilen yöntemin $k=2$ seçimi ile nasıl sonuç verdiğini görmek için, ilk olarak $[0, 1]$ aralığı $[0, 0.5]$ ve $[0.5, 1]$ olmak üzere iki eşit parçaya ayrılmalıdır. Galerkin-tipi yöntemin probleme önce $[0, 0.5]$ aralığında uygulanmasıyla

$$y_{5,2,1}(x) = 2 + 5x + 4.9577947400x^2 + 3.5518652365x^3 + 11368435595x^4 \\ + 1.5372977232x^5$$

yaklaşık çözümü bulunur. Yöntemi $[0.5, 1]$ aralığında uygulayarak $y_{5,2,2}$ yaklaşık çözümünü bulmak için, $y_{5,2,1}$ kullanılarak $x=0.5$ noktasındaki başlangıç koşulları belirlenmelidir. Bu koşullar

$$y_{5,2,1}(0.5) = 6.3025251159, \quad y'_{5,2,1}(0.5) = 13.6705209857$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, yöntemi $[0.5, 1]$ aralığında uygulayacağımız başlangıç değer problemi

$$(x+1)y''(x) - (2x+3)y'(x) + (x+2)y(x) = e^{2x}(x+1)^2 - 2e^x,$$

$$y(0.5) = 6.3025251159, y'(0.5) = 13.6705209857$$

şeklindedir. Galerkin-tipi yöntemin bu probleme $[0.5, 1]$ aralığında uygulanmasıyla

$$y_{5,2,2}(x) = 1.7951318811 + 6.6873237049x - 0.6299349944x^2 + 12.9116100644x^3 \\ - 6.8542879894x^4 + 4.3410199093x^5$$

yaklaşık çözümü bulunur. $y_{5,2,1}$ ve $y_{5,2,2}$ yaklaşık çözümlerinin birleştirilmesiyle, (3.88) başlangıç değer probleminin, $(N, k)=(5, 2)$ seçimine karşılık gelen

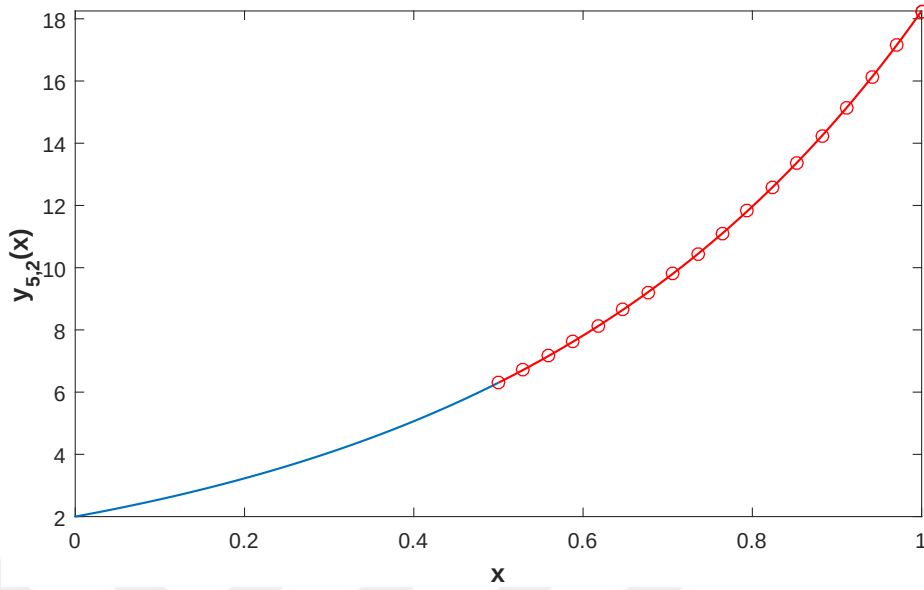
$$y_{5,2}(x) = \begin{cases} 2 + 5x + 4.9577947400x^2 + 3.5518652365x^3 \\ + 11368435595x^4 + 1.5372977232x^5, & 0 \leq x \leq 0.5 \text{ için} \\ 1.7951318811 + 6.6873237049x - 0.6299349944x^2 + 12.9116100644x^3 \\ - 6.8542879894x^4 + 4.3410199093x^5, & 0.5 \leq x \leq 1 \text{ için} \end{cases}$$

parçalı yaklaşık çözümü bulunur. $y_{5,2}$ 'nin grafiği Şekil 3.27'de verilmiştir.

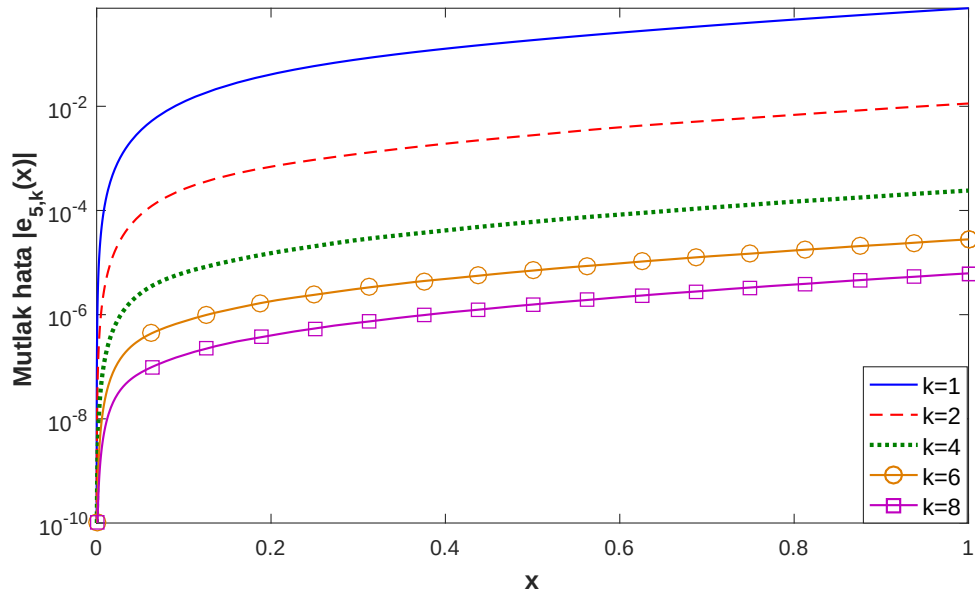
Bu yöntem, (3.88) problemine sabit $N=5$ değeri için $k=4, 6$ ve 8 alt aralık sayılarıyla da uygulanmış ve $|e_{5,k}(x)|$ mutlak hataları Şekil 3.28'de verilen yaklaşık çözümler elde edilmiştir. $k=2$ ile elde edilen $y_{5,2}$ yaklaşık çözümünün $y_{5,1}=y_5$ yaklaşık çözümünden belirgin biçimde daha isabetli olduğu, ayrıca parça sayısı k 'yi arttırdıkça bulunan çözümlerin iyileştiği anlaşılmaktadır. Bu yöntem, bu çalışmada ele alınan diğer problemlere de uygulanabilir.

3.4.3. Yaklaşık çözümün kalıntısı yardımıyla hata tahmini

Bu kısımda, doğrusal denklem sistemlerinin sayısal olarak çözülmesinde kullanılan (Wilkinson 1963) ve "yinelemeli iyileştirme" (İng. "*Iterative refinement*") olarak bilinen yöntemin, Galerkin-tipi yöntemle elde edilen sonuçların doğruluğunu arttırmak amacıyla nasıl kullanılabileceği anlatılacaktır. Bu yöntem, ilk olarak Oliveira (1980) tarafından, ikinci mertebeden bir sınır değer probleminin kollokasyon yöntemiyle çözümlerine uygulanmış, daha sonra çeşitli araştırmacılarca (örn. Yüzbaşı vd. 2013) farklı problemlerde kullanılmıştır.



Şekil 3.27. (3.88) başlangıç değer probleminin $N=5$ ve $k=2$ seçimleriyle bulunan yaklaşık çözümünün grafiği.



Şekil 3.28. (3.88) başlangıç değer probleminde sabit $N=5$ değeri için çeşitli k seçimlerine karşılık elde edilen mutlak hatalar.

Galerkin-tipi yöntem, L bir doğrusal diferansiyel operatör olmak üzere, herhangi bir N seçimiyle, tam çözümü y_{tam} olan

$$L[y(x)] - f(x) = 0 \quad (3.89)$$

diferansiyel denkleminin uygulanmış ve y_N yaklaşık çözümü elde edilmiş olsun. Bu çözümün

$$R[y_N(x)] = L[y_N(x)] - f(x)$$

kalıntısının (3.89) denkleminin çıkarılması, L 'nin doğrusallığının kullanılması ve y_{tam} tam çözümünün denklemi sağladığının hatırlanmasıyla

$$L[y_{\text{tam}}(x)] - L[y_N(x)] = L[y_{\text{tam}}(x) - y_N(x)] = -R[y_N(x)]$$

denklemi elde edilir. Böylece, y_N yaklaşık çözümünün $e_N(x) = y_{\text{tam}}(x) - y_N(x)$ ile tanımlı hata fonksiyonunun bilinmeyen olduğu

$$L[e_N(x)] - f(x) = 0 \quad (3.90)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem (3.89) denkleminin aynısıdır ve tam çözümü e_N hata fonksiyonudur. Bu tam çözümün bilinmesi,

$$y_{\text{tam}}(x) = y_N(x) + e_N(x) \quad (3.91)$$

ile (3.89) denkleminin tam çözümünün bulunmasını sağlayacaktır. Böylece, (3.90) denkleminin herhangi bir $N=M$ seçimiyle Galerkin-tipi yöntem uygulanarak e_N hata fonksiyonu yaklaşık olarak hesaplanabilir. (3.90) denkleminin Galerkin-tipi yöntemin $N=M$ seçimiyle uygulanması sonucu elde edilen yaklaşık çözüm $e_{N,M}$ ile gösterilecek olursa, $e_{N,M}$ yaklaşık çözümüne y_N yaklaşık çözümüne ilişkin "hata tahmini" denir. Bu hata tahmini kullanılarak, (3.91) eşitliğine atıfla

$$y_{N,M}(x) := y_N(x) + e_{N,M}(x)$$

"düzeltilmiş çözüm"ü oluşturulur. Bu düzeltilmiş çözümün $E_{N,M}$ ile gösterilecek hata fonksiyonu için

$$E_{N,M}(x) := y_{\text{tam}}(x) - y_{N,M}(x) = e_N(x) - e_{N,M}(x)$$

eşitliği geçerlidir. Şu durumda, $e_{N,M}$ hata tahmini ne kadar isabetliyse $y_{N,M}$ düzeltilmiş çözümü de o kadar isabetlidir. Böylece, "rezidüel düzeltme" (İng. "residual correction") olarak bilinen bu tekniğin başarısı $e_{N,M}$ hata tahmininin doğruluğuna bağlıdır.

Rezidüel düzeltmenin uygulanması sırasında dikkat çekilmesi gereken bir ayrıntı da, hem y_{tam} tam çözümü hem de y_N yaklaşık çözümünün (3.89) denkleminin bütün başlangıç (veya sınır) koşullarını sağlamasıyla ilgilidir. Örneğin, bir a noktasında verilmiş bir başlangıç koşulunu K diferansiyel operatörü ile gösterirsek

$$K[y_{\text{tam}}(x)]|_{x=a} = K[y_N(x)]|_{x=a} = \alpha$$

geçerli olacağından, y_N yaklaşık çözümüne ilişkin e_N hata fonksiyonu

$$K[e_N(x)]|_{x=a} = K[y_{\text{tam}}(x)]|_{x=a} - K[y_N(x)]|_{x=a} = \alpha - \alpha = 0 \quad (3.92)$$

şeklindeki homojen koşulları sağlar. (3.90) denklemi (3.92) türünde bütün başlangıç (veya sınır) koşullarıyla birlikte y_N yaklaşık çözümüne ilişkin "hata problemi" olarak bilinir. Özetle, $e_{N,M}$ hata tahmini Galerkin-tipi yöntemin bu hata problemine $N=M$ seçimiyle uygulanması sonucunda bulunur.

Rezidüel düzeltme tekniğinin ne kadar iyileştirme sağladığını görmek için, tam çözümü bilinen bir örneğe uygulamak faydalı olacaktır. Bu amaçla, Bölüm 3.1.2'deki şu örnek problemi tekrar ele alalım:

$$(x+1)y''(x) - (2x+3)y'(x) + (x+2)y(x) = e^{2x}(x+1)^2 - 2e^x, \quad y(0) = 2, y'(0) = 5 \quad (3.93)$$

Bu probleme Galerkin-tipi yöntemi $N=5$ seçimi ile uygulamak,

$$y_5(x) = 2 + x + 3.5028427932x^2 + 6.4736990458x^3 - 2.6303836191x^4 + 3.1527224593x^5$$

yaklaşık çözümünü vermişti. Bu yaklaşık çözümü (3.93) denkleminde yazmak

$$\begin{aligned} R[y_5(x)] = & -0.0041692884 - (x+1)^2 e^{2x} - 2e^x - 0.0041692884x + (x+2)x \\ & + 0.4979153557(x+2)x^2 + 0.1736461731(x+2)x^3 + 0.0313506858(x+2)x^4 \\ & + 0.0152032619(x+2)x^5 + 1.0418770387(x+1)x + 0.3762082296(x+1)x^2 \\ & + 0.3040652391(x+1)x^3 - 0.9958307115(2x+3)x - 0.5209385193(2x+3)x^2 \\ & - 0.1254027432(2x+3)x^3 - 0.0760163097(2x+3)x^4 \end{aligned}$$

kalıntısını verir. Bu kalıntıdan yararlanılarak

$$(x+1)e_N''(x) - (2x+3)e_N'(x) + (x+2)e_N(x) = -R[y_5(x)], \quad e_N(0) = 0, \quad e_N'(0) = 0$$

hata problemi oluşturulur. Bu hata problemini $M=7$ ve $M=8$ seçimleriyle çözmek, aşağıdaki hata tahminlerini verir:

$$\begin{aligned} e_{5,7}(x) &= 1.4671888559x^2 - 2.9939001754x^3 + 3.9501642100x^4 - 1.6959056679x^5 \\ &\quad - 0.3238297829x^6 + 0.3509972438x^7, \\ e_{5,8}(x) &= 1.5002643471x^2 - 3.1609268117x^3 + 4.4607019724x^4 - 2.5659583395x^5 \\ &\quad - 0.5255016594x^6 - 0.0905099456x^7 + 0.0949294844x^8. \end{aligned}$$

Bu hata tahminlerinin bazı x noktalarındaki değerleri gerçek hata olan e_5 fonksiyonununla birlikte Çizelge 3.26'da verilmiştir. $M=8$ seçimiyle yapılan tahminlerin biraz daha iyi olduğu dikkat çekmektedir. Bunun sonucunda, $e_{5,7}$ ve $e_{5,8}$ tahminleri kullanılarak hesaplanan

$$y_{5,7}(x) = y_5(x) + e_{5,7}(x), \quad y_{5,8}(x) = y_5(x) + e_{5,8}(x)$$

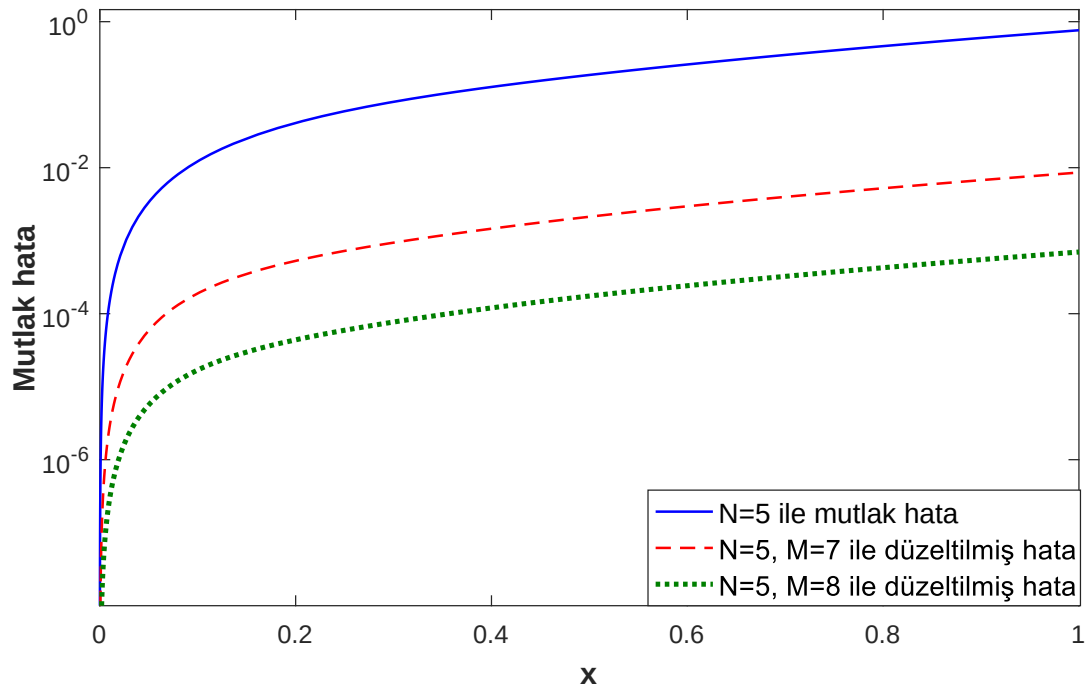
düzeltilmiş çözümlerinden $y_{5,8}$ 'in mutlak hatası $y_{5,7}$ 'ninkine göre biraz daha küçüktür. Bu durum, bu iki düzeltilmiş çözümün mutlak hatalarının y_5 'inkiyle birlikte sunulduğu Şekil 3.29'da da görülmektedir. İki düzeltilmiş çözüm de orijinal y_5 çözümüne göre çok daha isabetlidir. Bu durum, rezidüel düzeltme tekniğinin (3.93) problemi için işe yaradığını göstermektedir.

Bulunan yaklaşık çözümlerin hatalarını tahmin etmek yoluyla çözümlerin iyileştirilmesi, diferansiyel denklem sistemlerinde de uygulanabilir. Örnek olarak, aşağıda hatırlatılan Bölüm 3.1.3'teki Problem (3.19) ele alınabilir:

$$\begin{aligned} y_1^{(4)}(x) - \cos(x)y_2''(x) + xy_3'(x) - y_1(x) &= xe^x + \cos^2(x), \\ y_2^{(4)}(x) + \sin(x)y_1^{(3)}(x) + \cos(x)y_1(x) - \cos(x)y_3(x) &= \cos(x)(1 - e^x), \\ e^{-x}y_3^{(4)}(x) + y_2''(x) - \cos(x)y_1'(x) + y_2(x) &= \sin^2(x), \\ y_1(0) = 0, y_1'(0) = 1, y_1''(0) = 0, y_1^{(3)}(0) = -1, y_2(0) = 1, y_2'(0) = 0, \\ y_2''(0) = -1, y_2^{(3)}(0) = 0, y_3(0) = y_3'(0) = y_3''(0) = y_3^{(3)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Çizelge 3.26. (3.93) probleminde $N=5$ seçimiyle elde edilen gerçek hatalar için $M=7$ ve $M=8$ seçimleriyle yapılan tahminlerin bazı x noktalarındaki değerleri.

x	Gerçek hata $e_N(x)$	Hata tahmini $e_{N,M}(x)$	
	$N = 5$	$N = 5, M = 7$	$N = 5, M = 8$
0.2	0.0410279976	0.0404976934	0.0410718924
0.4	0.1276078816	0.1261474025	0.1277279129
0.6	0.2592499340	0.2562902812	0.2594915857
0.8	0.4623410178	0.4571162917	0.4627672740
1	0.7633027335	0.7547146836	0.7640023663



Şekil 3.29. (3.93) probleminde $N=5$ seçimiyle hesaplanan yaklaşık çözümün ve $M=7$ ve $M=8$ seçimleriyle düzeltilmiş çözümlerin mutlak hataları.

Bu probleme Galerkin-tipi yöntem çeşitli N seçimleri için uygulanmış ve $N=5$ için

$$y_{1,5}(x) = x - 0.1666666666x^3 + 0.0013640718x^4 + 0.0071405934x^5,$$

$$y_{2,5}(x) = 1 - 0.5x^2 + 0.0447611736x^4 - 0.0038808396x^5,$$

$$y_{3,5}(x) = 1 + x + 0.5x^2 + 0.1666666666x^3 + 0.0373933310x^4 + 0.0136144154x^5$$

yaklaşık çözümleri bulunmuştu. Bu yaklaşık çözümlerin $M=6$ ve $M=7$ seçimleri ile bulunan hata tahminleri, gerçek hata değerleri ile birlikte Çizelge 3.27’de sunulmuştur. $M=7$ değerine karşılık gelen hata tahminlerinin daha isabetli olduğu çizelgeden anlaşılmaktadır. Dolayısıyla, rezidüel düzeltme tekniği bu problemde $M=7$ seçimi ile $M=6$ seçimine kıyasla daha iyi sonuç verir. Bu durum, Şekil 3.30’da gösterilmiştir.

Çizelge 3.27. (3.19) probleminin $N=5$ seçimi ile elde edilmiş çözümlerinin $M=6$ ve $M=7$ ile bulunan hata tahminleri.

x	$N = 5$			$N = 5, M = 6$			$N = 5, M = 7$		
	$e_{1,5}(x)$	$e_{2,5}(x)$	$e_{3,5}(x)$	$e_{1,5,6}(x)$	$e_{2,5,6}(x)$	$e_{3,5,6}(x)$	$e_{1,5,7}(x)$	$e_{2,5,7}(x)$	$e_{3,5,7}(x)$
0	5.551E-17	0	0	3.841E-18	3.266E-34	0	-2.062E-17	-4.809E-35	0
0.2	-1.803E-6	-3.798E-6	5.238E-6	-2.095E-6	-3.649E-6	5.628E-6	-1.810E-6	-3.812E-6	5.220E-6
0.4	-2.303E-5	-4.515E-5	6.135E-5	-2.553E-5	-4.380E-5	6.439E-5	-2.307E-5	-4.522E-5	6.127E-5
0.6	-8.956E-5	-1.636E-4	2.139E-4	-9.559E-5	-1.602E-4	2.198E-4	-8.960E-5	-1.637E-4	2.139E-4
0.8	-2.091E-4	-3.557E-4	4.301E-4	-2.171E-4	-3.511E-4	4.338E-4	-2.091E-4	-3.558E-4	4.302E-4
1	-3.670E-4	-5.780E-4	6.074E-4	-3.750E-4	-5.737E-4	6.048E-4	-3.670E-4	-5.780E-4	6.075E-4

Rezidüel düzeltme tekniğinin doğrusal bir problemde gösterdiği bu başarı, onun doğrusal olmayan bir problemde de işe yarayacağını düşündürebilir. Bunu görmek için, bu tekniği Bölüm 3.1.4’te incelenmiş olan Lotka-Volterra denklemleri üzerinde deneyelim. Galerkin-tipi yöntemi

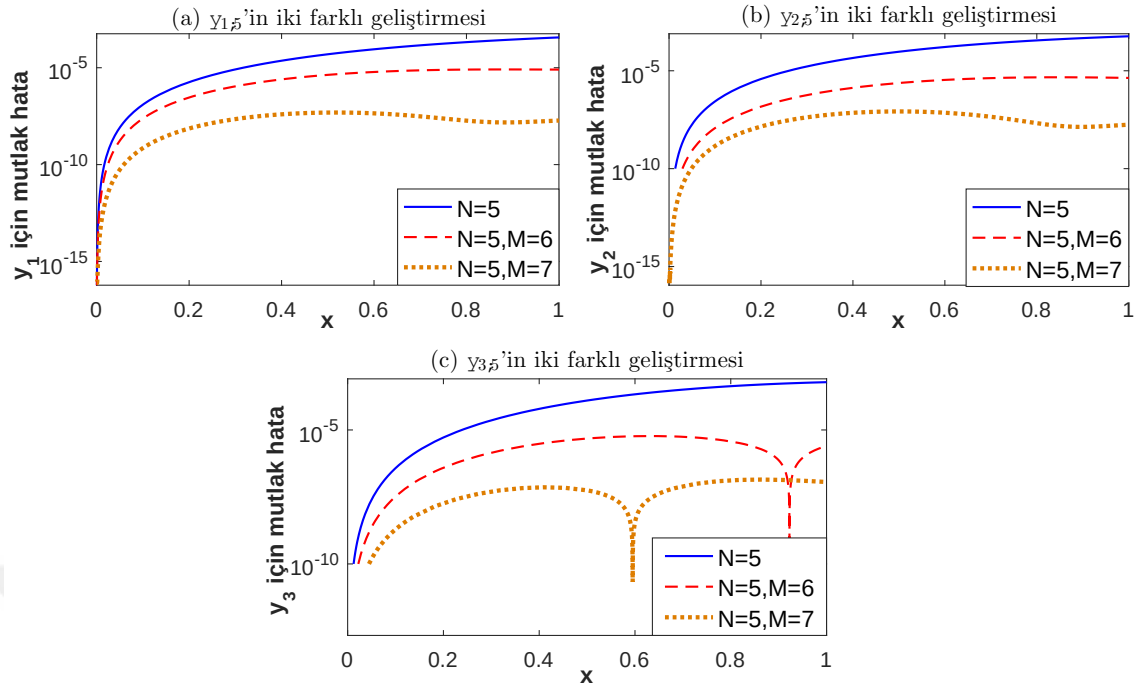
$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= p(1 - q) \\ \frac{dq}{dt} &= q(p - 1) \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$p(0) = 1.3, q(0) = 0.6$$

problemine $N=3$ seçimiyle uygulamak

$$p_3(t) = 1.3 + 0.5152921081t + 0.0240177066t^2 - 0.1913425996t^3,$$

$$q_3(t) = 0.6 + 0.1740260386t + 0.2107064508t^2 + 0.0222944792t^3$$



Şekil 3.30. (3.19) probleminin $N=5$ seçimi ile bulunmuş çözümlerinin ve $M=6$ ve $M=7$ seçimleriyle elde edilmiş düzeltmelerinin mutlak hataları.

yaklaşık çözümlerini vermişti. Bu yaklaşık çözümlerin $M=4$ seçimi ile elde edilmiş hata tahminleri

$$e_{p,3,4}(t) = 0.0023030232t - 0.0162542904t^2 + 0.0295874683t^3 - 0.0156052449t^4,$$

$$e_{q,3,4}(t) = 0.0080525260t - 0.0474485435t^2 + 0.0778400345t^3 - 0.0384465258t^4$$

şeklinde. Bu hata tahminleri kullanılarak

$$p_{3,4}(t) = p_3(t) + e_{p,3,4}(t)$$

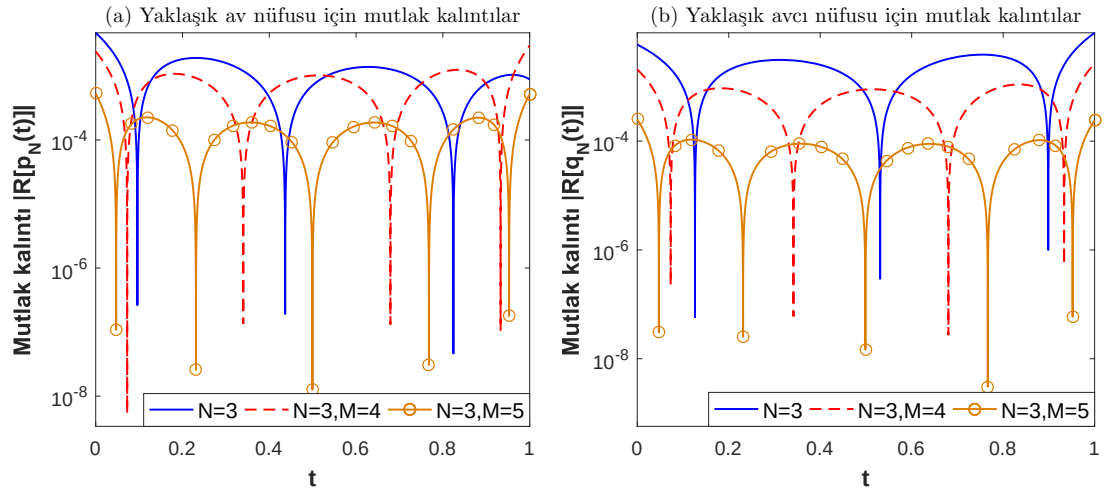
$$= 1.3 + 0.5175951313t + 0.0077634161t^2 - 0.1617551312t^3 - 0.0156052449t^4$$

ve

$$q_{3,4}(t) = q_3(t) + e_{q,3,4}(t)$$

$$= 0.6 - 0.0156052449t + 0.1632579072t^2 + 0.1001345138t^3 - 0.0384465258t^4$$

düzeltilmiş çözümleri elde edilmiştir. Bu probleme $M=5$ seçimi ile de rezidüel düzeltme uygulanmış ve yukarıdakilere ek olarak $p_{3,5}$, $q_{3,5}$ düzeltilmiş çözümleri elde edilmiştir.



Şekil 3.31. (3.94) probleminde $N=3$ seçimine karşılık gelen yaklaşık çözümlerin ve iki farklı düzeltmesinin mutlak kalıntıları.

Çizelge 3.28. (3.94) probleminde $N=3$ seçimine karşılık gelen yaklaşık çözümlerin ve iki farklı düzeltmelerinin mutlak kalıntıları.

t	$ R[p_3(t)] $	$ R[q_3(t)] $	$ R[p_{3,4}(t)] $	$ R[q_{3,4}(t)] $	$ R[p_{3,5}(t)] $	$ R[q_{3,5}(t)] $
0	4.707E-3	5.973E-3	2.404E-3	2.078E-3	5.3329E-4	2.5069E-4
0.2	1.827E-3	2.018E-3	1.055E-3	9.2266E-4	8.3180E-5	4.0044E-5
0.4	4.622E-4	2.528E-3	5.3526E-4	4.5956E-4	1.6642E-4	7.9522E-5
0.6	1.347E-3	1.643E-3	7.1710E-4	6.4139E-4	1.6721E-4	8.0307E-5
0.8	2.708E-4	3.574E-3	0.0011	0.0010	8.5019E-5	4.1883E-5
1	8.799E-4	9.801E-3	0.0029	0.0026	5.2294E-4	2.4034E-4

Düzeltilmiş çözümlerin mutlak kalıntıları hem Şekil 3.31’de hem de Çizelge 3.28’de orijinal p_3 ve q_3 yaklaşık çözümlerinin mutlak kalıntılarıyla birlikte verilmiştir. Rezidüel düzeltmenin, bu problemde doğrusal (3.93) problemindeki kadar olmasa da belli bir iyileşme sağladığı anlaşılmaktadır.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmanın gösterdiğine göre, Galerkin-tipi yöntemin diferansiyel, fonksiyonel diferansiyel ve integro-diferansiyel denklemlere uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar, söz konusu denklemlerin doğrusal olması durumunda, bu sonuçların hem hızlı bir şekilde elde edilebilmesi, hem de benzer yöntemlere göre genel olarak daha iyi sonuçlar vermesi bakımından tatmin edicidir. Yöntemin, denklem sistemlerine ve farklı türde başlangıç veya sınır koşullarının varlığı durumunda kolayca uyarlanabilir olması, yöntemin bir başka güçlü tarafı olarak ortaya çıkmıştır. Ayrıca, tam çözümün polinom olması durumunda yöntemin bu çözümü bulması, önemli sayılabilecek bir ayrıntıdır.

Öte yandan, Lotka-Volterra sistemi, T4 hücrelerinin HIV ile enfekte olmasına ilişkin gecikmeli model ve Volterra nüfus modeli üzerinde yapılan uygulamalar, Galerkin-tipi yöntemin doğrusal olmayan problemlere uygulandığında doğrusal problemlere kıyasla daha düşük performansa sahip olduğunu ortaya koymuştur. Doğrusal olmayan problemlerde, hem çözüme ulaşılma süresi çok uzamakta hem de yaklaşık çözümün kalıntı değerleri N 'nin küçük değerleri için kabul edilebilir seviyeye ulaşmakta zorlanmaktadır. Daha büyük N değerleri için ise, hem yöntemin sonuç vermesi uzun sürmekte hem de elde edilen kalıntı fonksiyonu her zaman daha iyi olmamaktadır. Bu yorumlar ışığında, Galerkin-tipi yöntemi geliştirme yapmaksızın doğrusal olmayan problemlere uygulamak tavsiye edilmemektedir.

Galerkin-tipi yöntem, bu tezde tarif edilen ilk hâliyle kısmi diferansiyel denklemlere uygun olmamasına karşın, başlangıç ve sınır değerlerinin eşit aralıklı kollokasyon noktalarıyla ele alınması sonucunda kısmi türev içeren problemlere uygulanabilir duruma getirilmiştir. Bu yöntemle elde edilen sonuçlar, literatürde mevcut olan diğer çalışmalarla kıyaslandığında tatmin edicidir. Kollokasyon noktalarının da işleme dahil edildiği bu melez yöntemin, çok büyük matrisler üretmesi ve dolayısıyla çözümü hesaplamanın uzun sürmesi gibi bir zayıflığı vardır.

Yaklaşık çözüm polinomlarının derecesi olan N değerini sınırsızca arttırmanın yöntemin tam sonuca yakınsamasını genel olarak garanti etmediği bilinmektedir. Bu durum, sonlu elemanlar yöntemine benzer bir şekilde, problem aralığının küçük alt aralıklara bölünmesi ve her birine Galerkin-tipi yöntemin uygulanması yoluyla aşılmıştır. Bu yön-

temle, küçük alt aralık sayıları için bile yaklaşık çözümlerde belirgin iyileşmeler gözlenmiştir. Bu yöntem, yöntemin kısmi diferansiyel diferansiyel denklemlere uygulanışıyla birlikte, bu çalışmanın özgün yanını teşkil etmektedir.

Galerkin-tipi yöntemin bazı örnek problemlere uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar, diğer problemlere kıyasla farklı davranışlar sergilemiştir. Örneğin, dördüncü mertebeden bir Fredholm integro-diferansiyel denklem için bulunan yaklaşık sonuçlar, yöntemin parametresi olan N sayısının çift veya tek olmasına göre farklı davranışlar göstermiştir. Bu durumun sebeplerinin irdelenmesinin, Galerkin-tipi yöntemin daha iyi anlaşılmasına katkı sunacağı değerlendirilebilir.

Üzerinde durulması gereken başka bir konu, bu tez çalışmasındaki uygulamalarda kullanılan polinom tabanının her probleme uygun olmayışdır. Bu tabanın N sonsuza götürüldüğünde sürekli fonksiyonlar uzayı için bir tam sistem olduğu bilinmekle birlikte, ele alınan aralık genişledikçe belli bir sürekli fonksiyonu bir polinomla yeterli yakınlıkta temsil etmek zorlaşmaktadır. Bu durum, Galerkin-tipi yöntemin aralık genişledikçe performansının düşeceğini gösterir. Yöntemi bir aralığın parçalanışlarına uygulamakla bu sorun kısmen aşılabılır. Öte yandan, gecikmeli HIV modeli için elde edilen sonuçların tablolanmasıyla görüldüğü gibi, polinom tabanının kullanılması, virüs ya da enfekte olmuş hücre sayısının bazı anlarda negatif olması gibi anlamsız sonuçlara da yol açabilmektedir. Deneme ve test uzaylarının, problemin özelliklerine göre belirlenmesiyle bu durumun üstesinden gelineceği düşünülebilir. Örneğin, bazı problemlerde tabanı $\{e^x, e^{-x}, e^{2x}, e^{-2x}, \dots\}$ olan üstel fonksiyonlar uzayının kullanılması daha uygun olacaktır.

Sonuç olarak, bu tez çalışmasının, hem ele alınması faydalı olabilecek birtakım yeni problemleri ortaya çıkardığı hem de sayısal yöntemlerle ilgili literatürü zenginleştirdiği görüşünü taşımaktayız.

5. KAYNAKLAR

- Bates, A.P., Khalid, Z. and Kennedy, R.A. 2017. Slepian Spatial-Spectral Concentration Problem on the Sphere: Analytical Formulation for Limited Colatitude-Longitude Spatial Region. *IEEE T. Signal. Proces.*, 65(6): 1527-1537.
- Battisti, D.S. 1989. On the role of off-equatorial oceanic Rossby waves during ENSO. *J. Phys. Oceanogr.*, 19(4): 551-559.
- Bellomo, N., Firmani, B. and Guerri, L. 1999. Bifurcation analysis for a nonlinear system of integro-differential equations modelling tumor-immune cells competition. *Appl. Math. Lett.*, 12(2): 39-44.
- Bloom, F. 1980. Asymptotic bounds for solutions to a system of damped integro-differential equations of electromagnetic theory. *J. Math. Anal. Appl.*, 73(2): 524-542.
- Body, J.P. 2000. Chebyshev and Fourier Spectral Methods. Dover Publications, New York, 668 s.
- Boyd, J.P. and Ong, J.R. 2009. Exponentially-convergent strategies for defeating the Runge phenomenon for the approximation of non-periodic functions, Part I: Single-interval schemes. *Commun. Comput. Phys.*, 5(2-4): 484-497.
- Brunner, H. 2004. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations. Cambridge University Press, Cambridge, 597 s.
- Coombes, S. and Laing, C. 2009. Delays in activity-based neural networks. *Philos. T. Roy. Soc. A*, 367(1891): 1117-1129.
- Courant R. 1943. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *B. Am. Math. Soc.*, 49:1-23.
- Culshaw, R.V. and Ruan, S. 2000. A delay-differential model of HIV infection of CD4⁺ T-cells. *Math. Biosci.*, 165(1): 27-39.

- Davis, M.E. 1984. Numerical Methods and Modeling for Chemical Engineers. John Wiley & Sons, New York, 258 s.
- Diekman, O. 1978. Thresholds and traveling waves for the geographical spread of infection. *J. Math. Biol.*, 6(2): 109-130.
- Durán, R. 2005. Galerkin Approximations and Finite Element Methods: Retrieved from http://mate.dm.uba.ar/~rduran/class_notes/fem.pdf. [Son erişim tarihi: 05.05.2018]
- Fairweather, G. 1978. Finite Element Galerkin Methods for Differential Equations. Marcel Dekker, New York, 263 s.
- Feng, X. 2013. An analytic study on the multi-pantograph delay equations with variable coefficients. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome*, 56(104): 205-215.
- Finlayson, B.A. 1972. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles. Academic Press, New York, 427 s.
- Forde, J.E. 2005. Delay Differential Equation Models in Mathematical Biology. Doktora tezi, University of Michigan, Michigan, 94 s.
- Gushing, J.M. 1977. Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics. Springer Verlag, Berlin, 196 s.
- Gülsu, M. and Sezer, M. 2011. A collocation approach for the numerical solution of certain linear retarded and advanced integro-differential equations with linear functional arguments. *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, 27(2): 447-459.
- Gülsu, M. and Sezer, M. 2016. Taylor collocation method for solution of systems of high-order linear Fredholm-Volterra integro-differential equations. *Int. J. Comput. Math.*, 83(4): 429-448.
- Hirsch, M.W. and Smale, S. 1974. Differential equations, dynamical systems, and linear algebra. Academic Press, New York, 358 s.

- Huang, Y. and Li, X.F. 2010. Approximate solution of a class of linear integro-differential equations by Taylor expansion method. *Int. J. Comput. Math.*, 87(6): 1277-1288.
- Işık, O.R., Güney, Z. and Sezer, M. 2012. Bernstein series solutions of pantograph equations using polynomial interpolation. *J. Differ. Equ. Appl.*, 18(3): 357-374.
- Işık, O.R., Sezer, M. and Güney, Z. 2011. Bernstein series solution of a class of linear integro differential equations with weakly singular kernel. *Appl. Math. Comput.*, 217(16): 7009-7020.
- Jackiewicz, Z., Rahman, M. and Welfert, B.D. 2006. Numerical solution of a Fredholm integro-differential equation modelling neural networks. *Appl. Numer. Math.*, 56(3-4): 423-432.
- Jiwari, R., Pandit, S. and Mittal, R.C. 2012. A differential quadrature algorithm to solve the two dimensional linear hyperbolic telegraph equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions. *Appl. Math. Comput.*, 218(13): 7279-7294.
- Kadalbajoo, M.M. and Patidar, K.C. 2006. ε -Uniformly convergent fitted mesh finite difference methods for general singular perturbation problems. *Appl. Math. Comput.*, 179(1): 248-266.
- Kapur, J.N. 1988. Mathematical Modelling. New Age International, New Delhi, 259 s.
- Kuang, Y. 1993. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, Academic Press, New York, 398 s.
- Kürkçü, Ö.K., Aslan, E. and Sezer, M. 2016. A numerical approach with error estimation to solve general integro-differential-difference equations using Dickson polynomials. *Appl. Math. Comput.*, 276(C): 324-339.
- Lane, H.C. and Fauci, A.S. 1985. Immunologic abnormalities in the acquired immunodeficiency syndrome. *Annu. Rev. Immunol.*, 3(1):77-500.

- Lascsáková, M. 2016. The analysis of the commodity price forecasting success considering different numerical models sensitivity to prognosis error. *Acta Logitica*, 3(4): 7-15.
- Longtin, A. and Milton, J.G. 1988. Complex oscillations in the human pupil light reflex with mixed and delayed feedback. *Math. Biosci.*, 90(1-2): 183-199.
- Lotka, A.J. 1920. Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 6(7): 410-415.
- Ma, W., Zhang, B. and Ma, H. 2016. A meshless collocation approach with barycentric rational interpolation for two-dimensional hyperbolic telegraph equation. *Appl. Math. Comput.*, 279(C): 236-248.
- MacCamy, R.C. 1977. An integro-differential equation with application in heat flow. *Q. Appl. Math.*, 35(1): 1-19.
- MacDonald, N. 1989. *Biological Delay Systems: Linear Stability Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 235 s.
- Mikhlin, S.G. 1964. *Variational methods in Mathematical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 584 s.
- Mittal, R.C. and Bhatia, R. 2013. Numerical solution of second order one dimensional hyperbolic telegraph equation by cubic B-spline collocation method. *Appl. Math. Comput.*, 220: 496-506.
- Muroya, Y., Ishiwata, E. and Brunner, H. 2003. On the attainable order of collocation methods for pantograph integro-differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 152(1-2): 347-366.
- Newman, E.H. and Kingsley K. 1991. An introduction to the method of moments. *Comput. Phys. Commun.*, 68(1-3): 1-18.
- Ockendon, J.R. and Tayler, A.B. 1971. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 322(1551): 447-468.

- Oden, J.T. and Reddy, J.N. 1976. An introduction to the mathematical theory of finite elements, Wiley, Michigan, 429 s.
- Oghonyon, J.G., Okunuga, S.A., Omoregbe, N.A.I. and Agboola O.O. 2015. A Computational Approach in Estimating the Amount of Pond Pollution and Determining the Long Time Behavioural Representation of Pond Pollution Model. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 11(15): 2773-2875.
- Oğuz, C. and Sezer, M. 2015. Chelyshkov collocation method for a class of mixed functional integro-differential equations. *Appl. Math. Comput.*, 259(C): 943-954.
- Oliveira, F. 1980. Collocation and residual correction. *Numer. Math.*, 36(1): 27-31.
- O'Malley, Jr., R.E. 1997. Thinking About Ordinary Differential Equations, Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 260 s.
- Öztürk, Y. and Gülsu, M. 2012. Approximate solution of linear generalized pantograph equations with variable coefficients on Chebyshev-Gauss grid. *J. Adv. Res. Sci. Comput.*, 4(1): 36-51.
- Pamuk, S. 2005. The decomposition method for continuous population models for single and interacting species *Appl. Math. Comput.*, 163(1): 79-88.
- Pamuk, S. and Pamuk, N. 2010. He's homotopy perturbation method for continuous population models for single and interacting species. *Comput. Math. Appl.*, 59(2): 612-621.
- Perelson, A.S., Kirschner, D.E., De Boer, R. 1993. Dynamics of HIV Infection of CD4⁺ T-cells. *Math. Biosci.*, 114(1): 81-125.
- Pont, J. 2012. Le destin douloureux de Walther Ritz (1878-1909). Archives de l'état du Valais, 264 s.
- Prandtl, L. 1904. On the motion of a fluid with very small viscosity. *Proceedings of 3rd International Mathematics Congress*, 484-491.

- Ramadan, M.A., El-Sherbeiny, A. and Sherif, M.N. 2009. The use of polynomial spline functions for the solution of system of second order delay differential equations. *Int. J. Comput. Math.*, 86(7): 1167-1181.
- Redfield, R.R., Wright, D.C. and Tramont, E.C. 1986. The Walter Reed staging classification for HTLV-III/LAV infection. *New Engl. J. Med.*, 314(2): 131-132.
- Roberts, Jr., C.E. 2010. Ordinary Differential Equations, CRC Press, New York, 600 s.
- Runge, C. 1901. Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 46: 224-243.
- Saadatmandi, A. and Dehghan, M. 2009. Variational iteration method for solving a generalized pantograph equation. *Comput. Math. Appl.*, 58(11-12): 2190-2196.
- Saadatmandi, A., Dehghan, M. and Eftekharia, A. 2009. Application of He's homotopy perturbation method for non-linear system of second-order boundary value problems. *Nonlinear Anal-Real*. 10(3): 1912 - 1922.
- Saadatmandi, A., Dehghan, M. 2010. Numerical solution of hyperbolic telegraph equation using the Chebyshev Tau method. *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, 26(1): 239-252.
- Sasser, J.E. 1992. History of ordinary differential equations: Retrieved from <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.112.3646&rep=rep1&type=pdf>. [Son erişim tarihi: 07.05.2018]
- Scudo, F.M. 1971. Vito Volterra and theoretical ecology. *Theor. Popul. Biol.*, 2(1): 1-23.
- Shampine L.F. and Gahinet, P. 2006. Delay-differential-algebraic equations in control theory. *Appl. Numer. Math.*, 56(3-4): 574-578.
- Shampine, L.F. and Thompson, L. 2015. Numerical Solution of Delay Differential Equations. Retrieved from <http://www.radford.edu/~thompson/RP/solvingddes.pdf>. [Son erişim tarihi: 10.05.2018]

- Sezer, M. and Akyüz Daşcıoğlu, A. 2007. A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument. *J. Comput. Appl. Math.*, 200(1): 217-225.
- Sezer, M., Yalçınbaş, S. and Gülsu M. 2008. A Taylor polynomial approach for solving generalized pantograph equations with nonhomogenous term. *Int. J. Comput. Math.*, 85(7): 1055-1063.
- Taiwo, O.A. and Adio, A.K. 2014. Variational Iteration and Homotopy Perturbation Methods for Solving Fredholm-Volterra Integro-Differential Equations. *IJMSI*, 2(1): 49-55.
- Taylor, A.B. 1986. *Mathematical Models in Applied Mechanics*. Clarendon Press, Oxford, 280 s.
- Thieme, H.R. 1977. A model for the spatio spread of an epidemic. *J. Math. Biol.*, 4(4): 337-351.
- Tohidi, E., Bhrawy, A.H. and Erfani, K. 2013. A collocation method based on Bernoulli operational matrix for numerical solution of generalized pantograph equation. *Appl. Math. Model.*, 37(6): 4283-4294.
- Türkyılmazoğlu, M. 2014. An effective approach for numerical solutions of high-order Fredholm integro-differential equations. *Appl. Math. Comput.* 227: 384-398.
- Verhulst, P.F. 1838. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance mathématique et physique*, 10: 113-121.
- Volterra, V. 1926. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. *Memoria della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, 2: 31-113.
- Wazwaz, A. 1999. Analytical approximations and Padé approximants for Volterra's population model. *Appl. Math. Comput.*, 100(1): 13-25.
- Wilkinson, J.H. 1963. *Rounding Errors in Algebraic Processes*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 161 s.

- Yusufoğlu, E. 2009. Improved homotopy perturbation method for solving Fredholm type integrodifferential equations. *Chaos Soliton Fract.*, 41(1): 28-37.
- Yüzbaşı, Ş. 2012. Bessel collocation approach for solving continuous population models for single and interacting species. *Appl. Math. Model.*, 36(8): 3787-3802.
- Yüzbaşı, Ş. 2012. On the solutions of a system of linear retarded and advanced differential equations by the Bessel collocation approximation. *Comput. Math. Appl.*, 63(10): 1442-1455.
- Yüzbaşı, Ş. 2014. Laguerre approach for solving pantograph-type Volterra integro-differential equations. *Appl. Math. Comput.*, 232: 1183-1199.
- Yüzbaşı, Ş. 2015. A collocation method based on the Bessel functions of the first kind for singular perturbed differential equations and residual correction. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 38(14): 3033-3042.
- Yüzbaşı, Ş. 2015. Numerical solutions of system of linear Fredholm-Volterra integro-differential equations by the Bessel collocation method and error estimation. *Appl. Math. Comput.*, 250(C): 320-338.
- Yüzbaşı, Ş. 2016. Numerical solutions of hyperbolic telegraph equation by using the Bessel functions of first kind and residual correction. *Appl. Math. Comput.*, 287(C): 83-93.
- Yüzbaşı, Ş., Gök, E. and Sezer, M. 2013. Müntz-Legendre polynomial solutions of linear delay Fredholm integro-differential equations and residual correction. *Math. Comput. Appl.*, 18(3): 476-485.
- Yüzbaşı, Ş. and Ismailov, N. 2018. An operational matrix method for solving linear Fredholm-Volterra integro-differential equations. *Turk. J. Math.*, 42(1): 243-256.
- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. 2016. A Galerkin-like approach to solve high-order integro-differential equations with weakly singular kernel. *Kuwait J. Sci.*, 43(2): 106-120.

- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. 2016. A Galerkin-like scheme to solve Riccati equations encountered in quantum physics. *Journal of Physics: Conference Series*, 766(1): 012036.
- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. 2017. A Galerkin-like approach to solve continuous population models for single and interacting species. *Kuwait J. Sci.*, 44(2): 9-26.
- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. 2017. A Galerkin-like scheme to solve two-dimensional telegraph equation using collocation points in initial and boundary conditions. *Comput. Math. Appl.*, 74(12): 3242-3249.
- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. 2018. A Galerkin-Like Approach to Solve Multi-Pantograph Type Delay Differential Equations. *Filomat*, 32(2): 409-422.
- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. 2018. A Galerkin-Type Method for Solving a Delayed Model on HIV Infection of $CD4^+$ T-cells. *Iran. J. Sci. Technol. Trans. Sci.*, Article in press. doi: 10.1007/s40995-018-0529-5.
- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. 2018. A Galerkin-Type Method to Solve One-Dimensional Telegraph Equation Using Collocation Points in Initial and Boundary Conditions. *Int. J. Comput. Methods*, 15(5): 1850031.
- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. 2018. A Numerical Approach for Solving High-Order Linear Delay Volterra Integro-Differential Equations. *Int. J. Comput. Methods*, 15(5): 1850042.
- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. 2018. A numerical method for solutions of Lotka-Volterra predator-prey model with time-delay. *Int. J. Biomath.*, 11(2): 1850028.
- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. 2018. A Numerical Scheme to Solve Boundary Value Problems Involving Singular Perturbation. *European Journal of Computational Mechanics*, Article in press. doi: 10.1080/17797179.2018.1479552.
- Yüzbaşı, Ş. and Sezer, M. 2012. A numerical method to solve a class of linear integro-differential equations with weakly singular kernel. *Math. Method. Appl. Sci.*, 35(6): 621-632.

- Yüzbaşı, Ş. and Şahin, N. 2013. Numerical Solutions Of Singularly Perturbed One-Dimensional Parabolic Convection-Diffusion Problems By The Bessel Collocation Method. *Appl. Math. Comput.*, 220: 305-315.
- Yüzbaşı, Ş., Şahin, N. and Sezer, M. 2011. A Bessel collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations. *Numer. Meth. Part. D. E.*, 28(4): 1105-1123.
- Yüzbaşı, Ş., Şahin, N. and Sezer, M. 2011. A numerical approach for solving linear differential equation systems. *J. Adv. Res. Dif. Equ.*, 3(3): 8-32.
- Yüzbaşı, Ş., Şahin, N. and Yıldırım, A. 2012. A collocation approach for solving high-order linear Fredholm-Volterra integro-differential equations. *Math. Comput. Model.*, 55(3-4): 547-563.
- Zaidan, L.I. 2012. Solving linear delay Volterra integro-differential equations by using Galerkin's method with Bernstein polynomial. *J. Babylon Univ.*, 20(5): 1405-1413.
- Zhang, Z.M. 2002. On the hp finite element method for the one dimensional singularly perturbed convection-diffusion problems. *J. Comput. Math.*, 20(6): 599-610.
- Zhu, H. and Sankar, B.V. 2004. A Combined Fourier Series-Galerkin Method for the Analysis of Functionally Graded Beams, *J. Appl. Mech.*, 71(3): 421-424.

ÖZGEÇMİŞ

MURAT KARAÇAYIR

E-mail: mkaracayir@akdeniz.edu.tr



ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2007-2010	Orta Doğu Teknik Üniversitesi Uygulamalı Matematik Enstitüsü, Kriptografi Ana Bilim Dalı, Ankara
Lisans 2003-2007	Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Ankara

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Araştırma Görevlisi 2013-Devam ediyor	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya
VHKİ 2012-2013	İçişleri Bakanlığı Avrupa Birliği ve Dış İlişkiler Daire Başkanlığı, Ankara

ESERLER:

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

- 1- Yüzbaşı, Ş. ve Karaçayır, M. 2016. A Galerkin-like approach to solve high-order integro-differential equations with weakly singular kernel. *Kuwait J. Sci.*, 43(2): 106-120.
- 2- Yüzbaşı, Ş. ve Karaçayır, M. 2016. A Galerkin-like scheme to solve Riccati equations encountered in quantum physics. *Journal of Physics: Conference Series*, 766(1): 012036.
- 3- Yüzbaşı, Ş. ve Karaçayır, M. 2017. A Galerkin-like approach to solve continuous population models for single and interacting species. *Kuwait J. Sci.*, 44(2): 9-26.

- 4- Yüzbaşı, Ş. ve Karaçayır, M. 2017. An exponential Galerkin method for solutions of HIV infection model of $CD4^+$ T-cells. *Comput. Biol. Chem.*, 67: 205-212.
- 5- Yüzbaşı, Ş. ve Karaçayır, M. 2017. Application of homotopy perturbation method to solve two models of delay differential equation systems. *Int. J. Biomath.*, 10(6): 1750080.
- 6- Yüzbaşı, Ş. ve Karaçayır, M. 2017. A Galerkin-like scheme to solve two-dimensional telegraph equation using collocation points in initial and boundary conditions. *Comput. Math. Appl.*, 74(12): 3242-3249.
- 7- Yüzbaşı, Ş. ve Karaçayır, M. 2018. A Galerkin-Like Approach to Solve Multi-Pantograph Type Delay Differential Equations. *Filomat*, 32(2): 409-422.
- 8- Yüzbaşı, Ş. ve Karaçayır, M. 2018. A Galerkin-Type Method for Solving a Delayed Model on HIV Infection of $CD4^+$ T-cells. *Iran. J. Sci. Technol. Trans. Sci.*, Makale bas-kıda. doi: 10.1007/s40995-018-0529-5.
- 9- Yüzbaşı, Ş. ve Karaçayır, M. 2018. A Galerkin-Type Method to Solve One-Dimensional Telegraph Equation Using Collocation Points in Initial and Boundary Conditions. *Int. J. Comput. Methods*, 15(5):1850031.
- 10- Yüzbaşı, Ş. ve Karaçayır, M. 2018. A Numerical Approach for Solving High-Order Linear Delay Volterra Integro-Differential Equations. *Int. J. Comput. Methods*, 15(5): 1850042.
- 11- Yüzbaşı, Ş. ve Karaçayır, M. 2018. A numerical method for solutions of Lotka-Volterra predator-prey model with time-delay. *Int. J. Biomath.*, 11(2): 1850028.
- 12- Yüzbaşı, Ş. ve Karaçayır, M. 2018. A Numerical Scheme to Solve Boundary Value Problems Involving Singular Perturbation. *European Journal of Computational Mechanics*, Kabul edilen makale. doi: 10.1080/17797179.2018.1479552.

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

- 1- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. Application Of The Homotopy Perturbation Method For Solving Delay Hiv Infection Model Of $CD4^+$ T-Cells. Karatekin Mathematics Days, Çankırı, 11-13 Haziran 2014.
- 2- Yüzbaşı, Ş. ve Karaçayır, M. Lotka-Volterra Nüfus Modelinin Galerkin Tipi Bir Yöntemle Yaklaşık Çözülmesi. 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, Antalya, 7-9 Eylül 2015.

- 3- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. A numerical method to obtain approximate solutions of a model on HIV infection of $CD4^+$ T-cells. International Conference on Advancements in Mathematical Sciences (AMS), Antalya, 5-7 Kasım 2015.
- 4- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. A Galerkin-like scheme to solve Riccati equations encountered in quantum physics. International Conference on Quantum Science and Applications (ICQSA-2016), Eskişehir, 25-27 Mayıs 2016.
- 5- Yüzbaşı, Ş., Karaçayır, M. and Sezer, M. Determination of the curves of constant breadth according to Bishop Frame in Euclidean 3-space by a Galerkin-like method. 14'üncü Uluslararası Geometri Sempozyumu, Denizli, 25-28 Mayıs 2016.
- 6- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. A Numerical Scheme to Obtain Approximate Solutions of Two-dimensional Telegraph Equation. International Conference on Mathematics and Engineering, İstanbul, 10-12 Mayıs 2017.
- 7- Karaçayır, M. and Yüzbaşı, Ş. Approximate Solutions of Singularly Perturbed Differential Equations by a Numerical Scheme Based on Inner Product. International Conference on Mathematics and Engineering, İstanbul, 10-12 Mayıs 2017.
- 8- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. A numerical approach to obtain approximate solutions of Volterra's population model with single species. II. International Symposium on Multidisciplinary Studies, Roma, İTALYA (Telekonferansla), 18-21 Mayıs 2017.
- 9- Yüzbaşı, Ş., İsmailov, N. and Karaçayır, M. An operational matrix approach for solutions of multi-pantograph equations. II. International Symposium on Multidisciplinary Studies, Roma, İTALYA (Telekonferansla), 18-21 Mayıs 2017.
- 10- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. Application of Galerkin-like method to Lotka-Volterra Predator-prey model. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling, İstanbul, 3-7 Temmuz 2017.
- 11- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. Numerical solution of initial value problems by a Galerkin-like method using multiple intervals. 2nd International Conference on Advances in Science. İstanbul, 13-15 Eylül 2017.