



**DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRAL
TEORİSİNDE AÇILIM TEOREMLERİ**

Akın ALGÜN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

AĞUSTOS-2017

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN
SPEKTRAL TEORİSİNDE AÇILIM TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
AKIN ALGÜN

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Danışmanı : Prof. Dr. Etibar PENAHLI

AĞUSTOS 2017

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN
SPEKTRAL TEORİSİNDE AÇILIM TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
AKIN ALGÜN
(141121121)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Danışmanı : Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 17 Temmuz 2017

AĞUSTOS 2017

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN
SPEKTRAL TEORİSİNDE AÇILIM TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
AKIN ALGÜN
(141121121)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 17 Temmuz 2017

Tezin Savunulduğu Tarih: 4 Ağustos 2017

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü.)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mustafa İNÇ (F.Ü.)

: Doç. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ (Munzur Ü.)

AĞUSTOS 2017

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması esnasında hiç bir yardımı esirgemeyen ve her konuda yardımcım olan başta çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Etibar PENAHLI' ya, Arş. Gör. Ahu ERCAN'a ve Arş. Gör. Dr. Tuba GÜLŞEN' e teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Akın ALGÜN

ELAZIĞ-2017



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VI
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Spektral Teoride Sturm Liouville Problemi ve Genel Bilgiler.....	2
1.2. Regüler ve Singüler Sturm-Liouville Problemi.....	5
1.4. Özdeğerler ve Özfonksiyonların Asimptotik Formülleri.....	10
2. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN OSİLASYON TEORİSİ.....	15
2.1. Özfonksiyonların Sıfırları.....	15
2.2. Birinci Mukayese Teoremi.....	16
2.4. İkinci Mukayese Teoremi.....	18
2.6. Sturm Osilasyon Teoremi.....	19
2.7. Genel Sturm Mukayese Teoremi.....	22
3. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN AÇILIM TEOREMLERİ.....	24
3.1. İntegral Denklemler Metodu ile Açılım Teoremi.....	24
3.3. Sonlu Farklar Metodu İle Açılım Teoremi.....	29
4. FOURIER-BESSEL AÇILIMI.....	37
SONUÇ.....	41
KAYNAKLAR.....	42
ÖZGEÇMİŞ.....	43

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez içerisinde kullanacağımız temel tanım ve teoremlere yer verilmiş aynı zamanda Sturm-Liouville operatörünün bazı temel özellikleri incelenmiştir.

İkinci bölümde Sturm-Liouville operatörü için Osilasyon Teorisi incelenmiş. Birinci ve ikinci mukayese teoremi ile Sturm osilasyon teoremi ve genel osilasyon teoremi incelenmiştir.

Üçüncü bölümde integral denklemler ve sonlu farklar metodu ile açılım teoremlerinin ispatı yapılmıştır.

Dördüncü bölümde Fourier-Bessel açılımı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville (S-L) Problemi, Mukayese Teoremleri, Genel Osilasyon Teorisi, İntegral Denklemler Metodu, Sonlu Farklar Metodu

SUMMARY

Spectral Theory of Differential Operators Opening Theorems

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, some concepts which are used in this thesis are given and some fundamental properties of Sturm Liouville operator are examined.

In the second chapter, the Sturm-Liouville operator for Oscillation Theory has been investigated. The first and second comparison theorems and Sturm Oscillation theorem and General oscillation theorem have been investigated.

In the third chapter, Integral equations and finite difference method and expansion theorem have been mentioned and the expansion theorem's evidence has been taken.

In the fourth chapter, Fourier-Bessel expansion examined.

Key Words: Sturm-Liouville (S-L) Problem, Comparison Theorems, General
Ossilation Theory, Integral Equations Method, Finite Difference
Method

SEMBOLLER LİSTESİ

L : S-L Operatörü

λ : Lamda

$u(x)$: Çözüm Fonksiyonu

$v(x)$: Çözüm Fonksiyonu

ε : Ebsilon

ξ : Xi

φ : Phi

ψ : Psi

C^k : k. mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonlar uzayı

1. GİRİŞ

Diferansiyel operatörlerin spektral teorisi bir çok uygulama alanında: Kuantum fiziği, kuantum mekaniği, elektronik ve diğer dallarda geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Özellikle XIX.-XX. yüzyıllarda bir çok matematikçi çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon ve farklı yöntemler kullanarak asimptotik formülleri bulmuştur [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

Diferansiyel operatörler regüler ve singüler olmak üzere iki gruba ayrılmış olup bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Bu tezde Regüler Sturm Liouville operatörünün spektral özellikleri ve açılım teoremleri araştırılmıştır [13, 14, 15, 16, 17]. Singüler operatörler için spektral teori ise ilk H. Weyl tarafından incelenmiştir daha sonra bir çok matematikçi tarafından incelenen bir konu olmuştur. Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesi ve bunların spektral teorisi için önemli yere sahip olan çalışmalar B.M.Levitan tarafından 1949 yılında yapılmıştır. Bu çalışmalar daha sonra bir çok matematikçi tarafından geliştirilerek günümüze kadar gelmiştir.

1.1 Spektral Teoride Sturm Liouville Problemi ve Genel Bilgiler

Tanım 1.1

λ bir gerçel parametre olmak üzere,

$$\left[p(x) \frac{du}{dx} \right]' + [-q(x) + \lambda r(x)]u = 0, \quad (I)$$

şeklindeki diferansiyel denklem ailesini ele alalım. L diferansiyel operatörü

$$L = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x),$$

olarak tanımlanırsa (I) denklemi L diferansiyel operatörü yardımıyla

$$Lu - \lambda r(x)u = 0, \quad (II)$$

biçiminde yazabiliriz. Burada L ikinci mertebeden lineer diferansiyel operatör, λ spektral parametre, $q(x)$ ise potansiyel fonksiyondur.

(II) denklemi için,

$$\begin{aligned} k_1 u(a) + k_2 u'(a) &= 0, \\ l_1 u(b) + l_2 u'(b) &= 0, \end{aligned} \quad (III)$$

şartlarını sağlayan çözümün bulunması problemine Sturm-Liouville sınır-değer problemi adı verilir [13].

$$\begin{aligned} k_1^2 + k_2^2 &\neq 0, \\ l_1^2 + l_2^2 &\neq 0, \end{aligned}$$

olmak üzere burada k_1, k_2, l_1, l_2 ler reel sabitlerdir.

Özel olarak bu şartlar

a) $k_2 = l_2 = 0$ için $u(a) = u(b) = 0$ şeklinde tanımlanan Dirichlet şartlarına,

b) $k_1 = l_1 = 0$ için $u'(a) = u'(b) = 0$ şeklinde tanımlanan Neumann şartlarına

indirgenir.

$p(x), l(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonları reel ve sonlu $[a, b]$ aralığında sürekli olmak üzere

S-L operatörü için özdeğer ve özfonksiyonları inceleyelim.

$p(x)$ ve $r(x)$, $[a, b]$ aralığında pozitif fonksiyonlar olacak şekilde S-L denklemini

$$Lu = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = \lambda r(x)u, \quad (1.1)$$

genel ifadesini ele alalım. $p(x)$, 1. mertebeden, $p(x)r(x)$, 2.mertebeden sürekli türeve

sahip olmak üzere

$$z = \frac{1}{c} \int_a^x \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}} dx,$$

$$v = (r(x)p(x))^{\frac{1}{4}} u,$$

$$\mu = c\lambda,$$

dönüşümlerini yaparsak (1.1) denklemini

$$c = \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}} dx,$$

$$q(z) = \frac{Q''(x)}{Q(x)} - c^2 \frac{p(x)}{r(x)},$$

$$Q(z) = (r(x)p(x))^{\frac{1}{4}},$$

olacak şekilde

$$-z'' + Q(z)z = \mu z,$$

şeklinde yazılır.

LEMMA 1.1

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ise $y(x, \lambda_1)$ ve $y(x, \lambda_2)$ öz fonksiyonları diktir.

Yani

$$\int_0^\pi y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0, \quad x \in [0, \pi],$$

dir [2].

İspat

f ve g fonksiyonları sürekli ve ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olsun.

$$Lf = f''(x) - g(x)f(x),$$

eşitliğini alalım. Burada f ve g fonksiyonları için Wronskian determinanı

$$W_x(f, g) = \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix},$$

şeklindedir. Şimdi iki kez kısmi integrasyon yöntemini uygulayalım

$$\begin{aligned} \int_0^\pi L[f(x)]g(x)dx &= \int_0^\pi (f''(x) - q(x)f(x))g(x)dx, \\ &= \int_0^\pi f''(x)g(x)dx - \int_0^\pi q(x)f(x)g(x)dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [f'(x)g(x)]_0^\pi - \int_0^\pi g'(x)f'(x)dx - \int_0^\pi q(x)f(x)g(x)dx, \\
&= [f'(\pi)g(\pi) - f'(0)g(0) - g'(x)f(x)]_0^\pi + \int_0^\pi g''(x)f(x)dx - \int_0^\pi q(x)f(x)g(x)dx, \\
&= f'(\pi)g(\pi) - g'(\pi)f(\pi) - f'(0)g(0) + g'(0)f(0) + \int_0^\pi [g'(x) - q(x)g(x)]f(x)dx, \\
&= W_\pi[f, g] - W_0[f, g] + \int_0^\pi f(x)Lg(x)dx, \tag{1.2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonrasında ise

$$\begin{aligned}
y'(0)\cos\alpha + y(0)\sin\alpha &= 0, \\
y'(\pi)\cos\beta + y(\pi)\sin\beta &= 0,
\end{aligned}$$

sınır şartlarını kullanırsak,

$$W_\pi(f, g) = 0 \text{ ve } W_0(f, g) = 0,$$

olur. Bunu ise (1.2) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\int_0^\pi Lfg(x)dx = \int_0^\pi Lgf(x)dx, \tag{1.3}$$

eşitliği bulunur. Buradan $f(x)$ yerine $y(x, \lambda_1)$ ve $g(x)$ yerine ise $y(x, \lambda_2)$ yazıp

$$\begin{aligned}
Ly(x, \lambda_1) &= \lambda_1 y(x, \lambda_1), \\
Ly(x, \lambda_2) &= \lambda_2 y(x, \lambda_2),
\end{aligned}$$

ifadelerini yukarıda elde ettiğimiz (1.3) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \lambda_1 y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx &= \int_0^\pi \lambda_2 y(x, \lambda_2) y(x, \lambda_1) dx, \\
&= (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0,
\end{aligned}$$

olur ve $\lambda_1 \neq \lambda_2$ için

$$\int_0^\pi y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0, \tag{1.4}$$

ifadesi elde edilir ki böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 1.2

$[a, b]$ aralığında sürekli 2. mertebeden türevelere sahip ve (III) sınır şartlarını sağlayan her bir $f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta düzgün ve mutlak yakınsak

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x),$$

serisine açılabilir. Burada c_n katsayıları

$$c_n = \frac{\langle f, u_n \rangle_r}{\|u_n\|_r^2} = \frac{\int_a^b r(x) f(x) u_n(x) dx}{\int_a^b r(x) u_n^2(x) dx}, \quad (1.5)$$

ile hesaplanır [2].

Tanım 1.3

Reel değerli bir $f(x)$ fonksiyonu I aralığında

$$\int_I f^2(x) r(x) dx < \infty,$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna I da $r(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre karesi integrallenebilir fonksiyon denir.

Tanım 1.4

Bir S-L probleminin bütün özdeğerler cümlesine operatörün spektrumu denir.

Tanım 1.5

$r(x) > 0$ ve $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $x \in [a, b]$ de tanımlı sürekli fonksiyonlar olsun.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b r(x) f(x) g(x) dx,$$

ifadesine $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının $r(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre skaler çarpımı denir.

1.2. Regüler ve Singüler Sturm-Liouville Problemleri

S-L operatörü için

$$Ly = -\frac{d^2}{dx^2} y + q(x)y = \lambda y, \quad \lambda \in [a, b] \quad (1.6)$$

denklemini ve

$$\begin{aligned} y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha &= 0, \\ y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta &= 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

sınır şartlarını göz önüne alalım. (1.7) de verilen sınır şartları için $\sin \alpha \neq 0$ ve $\sin \beta \neq 0$ olacak şekilde verilen sınır şartlarını $\sin \alpha$ ve $\sin \beta$ ile bölersek

$$\begin{aligned} y(a) \cot(\alpha) + y'(a) &= 0, \\ y(b) \cot(\beta) + y'(b) &= 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

olacak şekilde (1.8) eşitliğini elde edilir. Bu eşitlikte ise $\cot \alpha = -h$ ve $\cot \beta = H$ olarak alırsak

$$\begin{aligned} y'(a) - hy(a) &= 0, \\ y'(b) + Hy(b) &= 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

ifadesi bulunur. $q(x)$, kapalı $[a, b]$ aralığında tanımlı reel ve aynı zamanda sürekli bir fonksiyon olup, H ve h sonlu reel sayılar ise (1.6)-(1.9) problemine Regüler Sturm-Liouville problemi denir. Bu şartlardan herhangi biri veya birkaçı sağlanmadığı taktirde ise (1.6)-(1.9) problemine Singüler Sturm-Liouville problemi adı verilir [2].

(1.9) ile belirttiğimiz denklemin ilk şartında $h = \infty$ alınır

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -h = \infty,$$

olur. Yani, $\sin \alpha = 0$, $\alpha = 0$ olup $\cos \alpha = \cos 0 = 1$ elde edilir ve buradan ise $y(a) = 0$ olduğu görülür. O halde verilen S-L problemi

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, \\ y(a) &= 0, \quad y'(b) + Hy(b) = 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

şeklini alır.

Teorem 1.2.1

$q(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad \lambda \in [a, b],$$

denkleminin

$$\varphi(a, \lambda) = \sin \alpha, \quad \varphi'(\alpha, \lambda) = -\cos \alpha, \quad (1.11)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü $\varphi(x, \lambda)$ olsun. Bu taktirde her α reel sayısı için $\lambda \in [a, b]$ olacak biçimde bir tek $\varphi(x, \lambda)$ çözümü vardır. Ayrıca her sabit $x \in (a, b)$ sayısı için $\varphi(x, \lambda)$ çözümü λ ya göre bir tam fonksiyondur [8,14].

İspat

Başlangıç fonksiyonunu

$$\varphi_0(x, \lambda) = \sin \alpha - (x - a) \cos \alpha,$$

olarak seçelim. Bu fonksiyon (1.6) ile verdiğimiz denklemin (1.11) koşullarını sağlayan bir çözümdür.

$n > 0$ için

$$\varphi_n(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x [q(t) - \lambda \varphi_{n-1}(t, \lambda)](x-t)dt, \quad (1.12)$$

şeklinde alalım. $q(x) \in [a, b]$ aralığında sürekli olduğu için $|q(x)| < M$ dir. $|\lambda| \leq N$ olsun.

Bu taktirde $\forall x \in [a, b]$ için $|\varphi_0(x, \lambda)| \leq K$ olur. Böylece $n = 1$ için (1.12) denklemi

$$\varphi_1(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x [q(t) - \lambda \varphi_0(t, \lambda)](x-t)dt,$$

şeklinde olur. Bu sebeple

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x, \lambda) - \varphi_0(x, \lambda)| &= \left| \int_a^x [q(t) - \lambda \varphi_0(t, \lambda)](x-t)dt \right|, \\ &\leq \int_a^x |q(t)| + |\lambda| |\varphi_0(t, \lambda)| |x-t| dt, \\ &\leq (M + N)K \int_a^x (x-t)dt, \\ &= (M + N)K \left(-\frac{(x-t)^2}{2} \right)_a^x, \\ &= \frac{1}{2} (M + N)K (x-a)^2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

olur. Şimdi $n = 2$ için

$$\varphi_2(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x [q(t) - \lambda \varphi_1(t, \lambda)](x-t)dt, \quad (1.14)$$

$$\varphi_1(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x [q(t) - \lambda \varphi_0(t, \lambda)](x-t)dt, \quad (1.15)$$

(1.14) ile verilen eşitlikten (1.15) eşitliğini çıkarıp her iki tarafın da mutlak değerini alırsak

$$|\varphi_2(x, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda)| = \left| \int_a^x (q(t) - \lambda) [\varphi_1(t, \lambda) - \varphi_0(t, \lambda)](x-t)dt \right|,$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_a^x |q(t) - \lambda| |\varphi_1(t, \lambda) - \varphi_0(t, \lambda)| |x - t| dt, \\
&\leq (M + N) \frac{1}{2} (M + N) K \int_a^x (t - a)^2 (x - t) dt, \\
&= \frac{(M + N)^2 K (b - a)(x - a)^3}{1.2.3}, \\
&= \frac{K(M + N)^2 (b - a)(x - a)^3}{3!}, \\
&\leq \frac{1}{2} (M + N)^2 K (b - a) \int_a^x (t - a)^2 dt
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$|\varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda)| \leq \frac{(M + N)^n K (b - a)^{n-1} (x - a)^{n+1}}{(n + 1)!}, \quad (1.16)$$

sonucu bulunur. Buradan

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda), \quad (1.17)$$

$x \in [a, b]$ için $\lambda \leq N$ olacak biçimde λ ya göre düzgün yakınsak olur. Şimdi ise $n \geq 2$ için $\varphi(x, \lambda)$ nın λ ya göre tam fonksiyon olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\varphi_n'(x, \lambda) - \varphi_{n-1}'(x, \lambda) &= \int_a^x [q(t) - \lambda] [\varphi_{n-1}(t, \lambda) - \varphi_{n-2}(t, \lambda)(x - t)] dt, \\
\varphi_n''(x, \lambda) &= q(x) - \lambda \varphi_n(x, \lambda), \\
\varphi_{n-1}''(x, \lambda) &= q(x) - \lambda \varphi_{n-1}(x, \lambda), \\
\varphi_n''(x, \lambda) - \varphi_{n-1}''(x, \lambda) &= q(x) - \lambda [\varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda)],
\end{aligned}$$

elde edilir. (1.17) ile verdiğimiz eşitliği iki sefer diferansiyellersek

$$\begin{aligned}
\varphi''(x, \lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n''(x, \lambda) - \varphi_{n-1}''(x, \lambda), \\
&= \varphi_1''(x, \lambda) - \varphi_0''(x, \lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n''(x, \lambda) - \varphi_{n-1}''(x, \lambda), \\
&= q(x) - \lambda \left[\varphi_0(x, \lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_{n-1}''(x, \lambda) - \varphi_{n-2}''(x, \lambda) \right], \\
&= q(x) - \lambda \varphi(x, \lambda),
\end{aligned}$$

olacak şekilde $\varphi(x, \lambda)$ çözümü mevcuttur. Yani $\varphi(x, \lambda)$ nın, (1.6) S-L denkleminin (1.11) başlangıç şartlarını sağlayan bir çözümü olduğu görülür. Aynı zamanda (1.17) ile verilen seri düzgün yakınsak bir seri olduğu için $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu λ ya göre tam fonksiyondur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 1.2.2

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad \lambda \in [a, b],$$

denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h, \quad (1.18)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü $\varphi(x, \lambda)$,

$$\psi(0, \lambda) = 0, \quad \psi'(0, \lambda) = 1, \quad (1.19)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü ise $\psi(x, \lambda)$ olsun. (1.6)-(1.18) ve (1.6)-(1.19) problemlerinin çözümleri olan $\varphi(x, \lambda)$ ile $\psi(x, \lambda)$ fonksiyonları için aşağıdaki bağıntıları yazılabilir.

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{h}{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x + \frac{1}{\lambda} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \tau) q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau, \quad (1.20)$$

$$\psi(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \tau) q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau \quad (1.21)$$

İspat

(1.20) eşitliğinin ispatını yapalım. $\varphi(x, \lambda)$, (1.6) ile verilen denklemin bir çözümü olduğu için

$$-\varphi''(\tau, \lambda) + q(\tau)\varphi(\tau, \lambda) = \lambda\varphi(\tau, \lambda),$$

ve

$$q(\tau)\varphi(\tau, \lambda) = \varphi''(\tau, \lambda) + \lambda\varphi(\tau, \lambda),$$

yazabiliriz. (1.20) ile verilen eşitliği sağ tarafındaki integrali hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin(x - \tau) \sqrt{\lambda} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau &= \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \tau) [\varphi''(\tau, \lambda) + \lambda \varphi(\tau, \lambda)] d\tau, \\ &= \lambda \int_0^x \sin(x - \tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau + \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x - \tau) \varphi''(\tau, \lambda) d\tau, \end{aligned} \quad (1.22)$$

elde edilir. Buradan ise son eşitiği sağ tarafındaki ikinci integrali hesaplamak için iki kez kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x-\tau) \varphi''(\tau, \lambda) d\tau = \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x-\tau) d\varphi'(\tau, \lambda), \\
& = \left[\sin \sqrt{\lambda}(x-\tau) \varphi'(\tau, \lambda) \right]_0^x - \int_0^x \varphi'(\tau, \lambda) d \sin \sqrt{\lambda}(x-\tau), \\
& = \varphi'(x, \lambda) \sin \sqrt{\lambda}(x-x) - \varphi'(0, \lambda) \sin \sqrt{\lambda}(x-0) + \sqrt{\lambda} \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(x-\tau) \varphi'(\tau, \lambda) d\tau, \\
& = -h \sin(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda} \int_0^x \cos(\sqrt{\lambda}(x-\tau)) d\varphi(\tau, \lambda), \\
& = -h \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda} \left[\varphi(\tau, \lambda) \cos \sqrt{\lambda}(x-\tau) \right]_0^x - \int_0^x \varphi(\tau, \lambda) d \cos(\sqrt{\lambda}(x-\tau)), \\
& = -h \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}(\varphi(x, \lambda) \cos(\sqrt{\lambda}(x-x)) - \varphi(0, \lambda) \cos(\sqrt{\lambda}(x-0))), \\
& \quad - \sqrt{\lambda} \int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau)) \varphi(\tau, \lambda) d\tau, \\
& = -h \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}(\varphi(x, \lambda) - \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x)) - \sqrt{\lambda} \int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau)) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \quad (1.23)
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi (1.23) de bulduğumuz ifadeyi (1.22) formülünde yerine yazarsak

$$\int_0^x \sin \left[(x-\tau) \sqrt{\lambda} \right] q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau = -h \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda} \varphi(x, \lambda) - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x - \lambda \int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau))$$

$$\varphi(\tau, \lambda) d\tau + \lambda \int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau)) \varphi(\tau, \lambda) d\tau,$$

$$\int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau)) q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau = -h \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda} \varphi(x, \lambda) - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x$$

$$\sqrt{\lambda} \varphi(x, \lambda) = \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x + h \sin \sqrt{\lambda}x + \int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau)) q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau$$

$$+ \lambda \int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau)) \varphi(\tau, \lambda) d\tau,$$

olur. Burada eşitliğin her iki tarafını da $\sqrt{\lambda}$ ile böldüğümüz takdirde (1.20) eşitliğinin sağlandığı gösterilmiş olur. Şimdi ise (1.21) eşitliğini gösterelim.

$\psi(x, \lambda)$, (1.6) denkleminin (1.19) başlangıç şartlarını sağlayan bir çözümü olduğu için

$$\begin{aligned}
-\psi''(x, \lambda) + q(x)\psi(x, \lambda) &= \lambda \psi(x, \lambda), \\
q(x)\psi(x, \lambda) &= \psi''(x, \lambda) + \lambda \psi(x, \lambda),
\end{aligned} \quad (1.24)$$

olur. Buradan

$$\int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau))q(\tau)\psi(\tau, \lambda)d\tau = \int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau))\psi(\tau, \lambda)d\tau,$$

elde edilir. Bulduğumuz son eşitiğin sağ tarafındaki integrale iki defa kısmi integrasyon uygulayıp (1.19) başlangıç koşullarını göz önüne alırsak

$$\int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau))\psi''(\tau, \lambda)d\tau = -\sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda} \int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau))\psi(\tau, \lambda)d\tau,$$

bulunur. Buradan ise

$$\int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-\tau))q(\tau)\psi(\tau, \lambda)d\tau = -\sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}\psi(x, \lambda),$$

eşitliği elde edilir. Yine eşitliğin her iki yanını da $\sqrt{\lambda}$ ile bölüp, $\psi(x, \lambda)$ çekilirse (1.21) elde edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

1.4. Özdeğerler ve Özfonksiyonların Asimptotik Formülleri

$q(x)$, $[0, \pi]$ aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} -y' + q(x)y &= \lambda y, \\ y'(0) - hy(0) &= 0, \\ y'(\pi) - Hy(\pi) &= 0, \end{aligned}$$

denkleminde $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = h$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümü $\varphi(x, \lambda)$ ve

$\psi(0, \lambda) = 0$, $\psi'(0, \lambda) = 1$ çözümünü de $\psi(x, \lambda)$ olarak alalım.

Özel olarak

$\lambda = s^2$ olarak alırsak (1.20) ve (1.21) ifadelerini aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin[s(x-\tau)]q(\tau)\varphi(\tau, \lambda)d\tau,$$

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s} \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}q(\tau)\psi(\tau, \lambda)d\tau,$$

bulunmuş olur.

Lemma 1.4.1: $\sigma + it$ olmak üzere öyle bir $s_0 > 0$ vardır ki $|s| > s_0$ için aşağıdaki eşitlikler doğru olur [17].

$x \in [0, \pi]$ için

$$\varphi(x, \lambda) = O\left(e^{|l|x}\right), \quad \psi(x, \lambda) = O\left(|s|^{-1} e^{|l|x}\right), \quad (1.25)$$

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + O\left(|s|^{-1} e^{|l|x}\right), \quad (1.26)$$

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin sx}{s} + O\left(\frac{e^{|l|x}}{|s|^{-1}}\right), \quad (1.27)$$

Asimptotik formülleri hesaplamak için $\lambda = s^2$ olmak üzere Lemma 1.4.1 ele alındığında

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin[s(x-\tau)] q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau, \\ \varphi(x, \lambda) &= \cos sx + O\left(|s|^{-1} e^{|l|x}\right), \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $h \neq 0$ ve $H \neq 0$ ve $\varphi(x, \lambda)$ verilen S-L denkleminin bir çözümü olsun. Bu fonksiyonun π noktasındaki değerini ikinci sınır şartında yerine yazarsak özdeğerler elde edilir ve bu özdeğerler reeldir. Negatif olan özdeğerler isesonlu sayıdadır. Buradan

$$\varphi(x, \lambda) = \cos x + O\left(\frac{1}{s}\right) \text{ olup}$$

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin[s(x-\tau)] q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \text{ ifadesini } x' \text{ e göre}$$

diferansiyelleyip yukarıda yerine yazdığımızda

$$\varphi'(x, \lambda) = -\sin sx + h \cos x + h \cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right),$$

elde edilir. Bu ifadeyi ve (1.26) eşitsizliğini ikinci sınır şartında yerine yazarsak

$$-s \sin s\pi + (h + H) \cos s\pi + O\left(\frac{1}{s}\right) = 0, \quad (1.28)$$

denklemini elde edilir.

Bulduğumuz son denklemde sol tarafın s ye göre diferansiyelini alırsak

$$-\pi s \cos s\pi - \sin s\pi - \pi(h + H) \sin s\pi + O(1) = 0$$

bulunur. Denklemin n . kökü s_n olmak üzere $\lambda = s^2$ olsun. Özdeğerler

$$\varphi(\pi, \lambda) + H \varphi'(\pi, \lambda) \equiv \omega(\lambda) = 0,$$

denkleminin kökleri olmak üzere $\omega(\lambda) = \omega_1(s)$ dir. Burada

$$\omega_1(s) = -Hs \sin s\pi \left[1 + O\left(\frac{1}{|s|}\right) \right] \text{ bulunur.}$$

s düzleminde yarıçapı $R = \frac{1}{2} + N$, merkezi ise orijin olan bir D_R dairesi alalım.

$$\omega_1(s) = -Hs \sin s\pi \left[1 + O\left(\frac{1}{|s|}\right) \right] \text{ asimptotik formülünden } \omega_1(s) \text{ fonksiyonunun sıfırlarının}$$

sayısı D_R dairesinin içinde eşittir. Bu sayı $2n+2$ olup yani çifttir. Bu fonksiyonun her pozitif sıfırına bir özdeğer karşılık gelir. Buradan s_n için asimptotik formül $s_n = n + O(1)$ olarak bulunur.

$$\varphi(x, \lambda) = \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{1}{s} \int_0^x \sin[s(x-\tau)] q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \quad \text{ifadesinde } x \text{ 'e göre}$$

türevini alıp ve $\varphi(x, \lambda)$ ile $\varphi'(x, \lambda)$ ifadelerini verilen sınır şartlarından ikincisinde kullanarak bazı dönüşümler yaparsak

$$A = h + H + \int_0^\pi \left\{ \cos t + \frac{H}{s} \sin s\tau \right\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau,$$

$$B = \frac{hH}{s} + \int_0^\pi \left\{ \sin st + \frac{H}{s} \sin s\tau \right\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau,$$

olur ki buradan $(-s + B) \sin s\pi + A \cos s\pi = 0$ bulunur. A ve B için

$$A = H + h + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) \cos 2s\tau d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right),$$

$$B = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) \sin 2s\tau d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right),$$

elde edilir. $q(x)$ fonksiyonu sınırlı türeve sahiptir. Buradan kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_0^\pi q(t) \cos 2s\tau d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right) \quad \text{ve} \quad \int_0^\pi q(t) \sin 2s\tau d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right),$$

bulunur. Buradan da

$$A = h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right), \quad h_1 = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) d\tau, \quad B = O\left(\frac{1}{s}\right),$$

elde edilir ki böylece

$$(-s + B) \sin s\pi + A \cos s\pi = 0,$$

denklemini

$$\tan s\pi = \frac{h+H+h_1+O\left(\frac{1}{s}\right)}{s+O\left(\frac{1}{s}\right)},$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi $s_n = n + \delta_n$ şeklinde alınırsa

$$\delta_n = \frac{h+H+h_1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{s}\right),$$

olmak üzere

$$\tan \pi \delta_n = \frac{h+H+h_1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

elde edilir. Buradan da

$$c = \frac{1}{\pi} \left(h+H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) d\tau \right),$$

olmak üzere

$$s_n = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

olur. $q(x) \in C^2(0, \pi)$ olmak üzere yaklaşık bir asimptotik formül elde edeceğiz. c sabit bir sayı olsun, bu taktirde

$$s_n = n + \frac{c}{n} + \frac{c}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

bulunur. Bu formülü kullanarak $\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x, \lambda)$ öz fonksiyonları için

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda_n) &= \varphi(x) = \cos nx - \frac{cx}{n} \sin x + \frac{h}{n} nx + \frac{\sin nx}{2n} \int_0^x q(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ &= \cos nx + \frac{\beta x}{n} \sin nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

asimptotik formülü elde edilir. Burada $\beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau) d\tau$ dir.

2. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN OSİLASYON TEORİSİ

2.1. Özfonksiyonların Sıfırları

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad \lambda \in [a, b],$$

$$y(a)\cos \alpha + y'(a)\sin \alpha = 0,$$

$$y(b)\cos \beta + y'(b)\sin \beta = 0,$$

S-L problemini ele alalım. S-L probleminin öz fonksiyonların sıfırlarının dağılımına ilişkin önemli sonuçlara ait çalışmalardan faydalanan XX. yüzyıl civarlarında Sturm tarafından bu problemin sonsuz sayıda öz değerlerinin varlığı ispatlanmıştır.

$q(x) = 0$ olacak şekilde aşağıdaki basit sınır-değer problemini ele alalım:

$$y'' + \lambda y = 0,$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

probleminin özdeğerleri

$\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1^2, \lambda_2 = 2^2, \dots, \lambda_n = n^2 \dots$ olmak üzere bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar

$$\varphi(x, \lambda_0) = \varphi_0(x) = 0,$$

$$\varphi(x, \lambda_1) = \varphi_1(x) = \cos x,$$

$$\varphi(x, \lambda_2) = \varphi_2(x) = \cos 2x, \dots, \varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x) = \cos nx, \dots$$

şeklindedir.

Böylece sıfırdan başlanacak şekilde özdeğerlerin artış sırasına göre özfonksiyonlar dizisini oluşturmuş oluruz.

$\varphi(x, \lambda_n)$ özfonksiyonlarının sıfırları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) n . özfonksiyon olan $\varphi(x, \lambda_n)$ 'nin $[0, \pi]$ aralığında tam olarak n -tane sıfırı vardır.

2) n . ve $(n+1)$. öz fonksiyonların sıfırları sıralıdır (veya çaprazlaşırlar).

Yani n . özfonksiyonun ardışık iki sıfırı arasında $(n+1)$. özfonksiyonun bir sıfırı bulunur.

Özfonksiyonların bu özellikleri genel halde de sağlanır.

Bu özellikleri aşağıdaki örnek üzerinde kolayca açıklayabiliriz.

Örnek

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

probleminde $\varphi_2(x) = \cos 2x$, $\varphi_3(x) = \cos 3x$ olup

$$\varphi_2(x) = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(\frac{1}{2} + k), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ 'dir.}$$

$$k = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{4},$$

$$k = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4},$$

$$k = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{4} \notin \dots, \notin 0, \pi$$

$$\varphi_3(x) = 0 \Rightarrow \cos 3x = 0$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(\frac{1}{2} + k)$$

$$k = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$k = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$k = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

$$k = 3 \Rightarrow x_3 = \frac{7\pi}{6} \notin 0, \pi \text{ olur.}$$

Teorem 2.2 (1. Mukayese Kriteri)

$$u'' + g(x)u = 0, \tag{2.1}$$

$$v'' + h(x)v = 0, \tag{2.2}$$

olsun. Eğer tüm $[a, b]$ aralığında $g(x) < h(x)$ ise (2.1) denkleminin aşıkâr olmayan iki ardışık sıfırı arasında (2.2) denkleminin en az bir sıfırı bulunur [2].

İSPAT

(2.1) denklemi v ile (2.2) denklemini u ile çarpıp birbirinden çıkarırsak

$$u''v - v''u + g(x) - h(x)uv = 0,$$

$$u''v - v''u = \frac{d}{dx}(u'v - v'u) = h(x) - g(x)uv, \quad (2.3)$$

elde edilir.

u 'nin iki ardışık sıfırı x_1 ile x_2 olsun. Kabul edelim ki v 'nin (x_1, x_2) aralığında sıfırı bulunmasın.

Bu durumda (2.3) eşitliğini x_1 'den x_2 'ye kadar integrallersek

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}(u'v - v'u) dx &= [u'v - v'u]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} h(x) - g(x)u(x)v(x) dx, \\ &= u'(x_2)v(x_2) - v'(x_2)u(x_2) - u'(x_1)v(x_1) + v'(x_1)u(x_1), \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (h(x) - g(x))u(x)v(x) dx, \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi v 'nin hiç bir yerde sıfıra eşit olmadığını kabul edelim. Genelliği bozmadan (x_1, x_2) aralığında $u(x) > 0$, $v(x) > 0$ alınabilir. Dolayısıyla bir önceki eşitliğin sağ tarafı pozitifdir. $u(x) > 0$ olduğu için x_1 noktasının komşuluğunda $u(x)$ fonksiyonu artandır. Dolayısıyla $u'(x_1) > 0$ 'dır. Benzer olarak x_2 noktasının komşuluğunda $u(x)$ fonksiyonu azalandır ve $u'(x_2) < 0$ olduğu sonucuna varılır. Bu sebeple

$u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) < 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece (x_1, x_2) aralığında v 'nin sıfırlarının varlığı ispatlanmış olur.

Teorem 2.3

$g(x) < -m^2 < 0$ ve $(-\infty \leq a \leq x \leq b \leq \infty)$ olmak üzere

$$y'' + g(x)y = 0$$

denkleminin her çözümünün en fazla bir sıfırı vardır.

İspat

$$g(x) < h(x) = -m^2 < 0 \text{ ise}$$

$y'' - m^2 y = 0$ denkleminin çözümünün sıfırının olmadığını göstereceğiz. Bu denklemin çözüm fonksiyonu e^{mx} şeklinde olup sıfırları varolmadığı için her sonlu aralıkta $y'' + g(x)y = 0$ denkleminin en fazla bir sıfırı vardır.

Teorem 2.4 (2. Mukayese Teoremi)

(2.1) ve (2.2) denklemlerinin

$$\begin{aligned} u(a) &= \sin \alpha & u'(a) &= -\cos \alpha \\ v(a) &= \sin \alpha & v'(a) &= -\cos \alpha \end{aligned} \quad (2.4)-(2.5)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri $u(x)$ ve $v(x)$ olsun. Ayrıca $[a, b]$ aralığının tamamında $g(x) < h(x)$ olsun.

Eğer $u(x)$ fonksiyonu, $a < x \leq b$ aralığında m -tane sifıra sahip ise, diyebiliriz ki $v(x)$ fonksiyonunun aynı aralıkta en az m -tane sıfırları var olup, $v(x)$ 'in k . sıfırı $u(x)$ 'in k . sıfırından küçüktür [2].

İspat

$u(x)$ 'in a noktasına en yakın sıfırını x_1 ile gösterelim. Bir önceki teoreme dayanarak $v(x)$ 'in $(a, x_1]$ aralığında en az bir sifıra sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Bu $v(x)$ 'in sifıra sahip olmadığını kabul edelim.

Genelliği bozmadan $(a, x_1]$ aralığında $u(x) > 0$ ve $v(x) > 0$ alabiliriz. $u(x_1) = 0$ olduğundan $u(x)$ fonksiyonu x_1 noktasının bir komşuluğunda azalandır. Bu yüzden $u'(x_1) \leq 0$ 'dır. (2.3) eşitliğini a 'dan x_1 'e integrallersek

$$u'(x_1)v(x_1) = \int_a^{x_1} (h(x) - g(x))u(x)v(x)dx,$$

elde edilir. $(a, x_1]$ aralığında $u(x) > 0$, $v(x) > 0$ ve $g(x) < h(x)$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı pozitifdir. Fakat sol tarafı pozitif değildir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece teorem ispatlanmıştır.

Lemma 2.5

Eğer x_0 ($a < x_0 < b$), $\varphi(x, \lambda)$ öz fonksiyonunun sıfırı ise o halde yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısı için $\exists \delta > 0$ bulmak mümkün ki $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ olacak biçimde $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun $|x - x_0| < \varepsilon$ için sadece bir tek sıfırı vardır [2].

Teorem 2.6 (Sturm Osilasyon Teoremi)

(1.6)-(1.7) sınır-değer probleminin sınırsız olarak artan $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ öz değerleri vardır. $m \rightarrow \infty$, $\lambda_m \rightarrow \infty$ olsun. Bu takdirde λ_m özdeğerlerine karşılık gelen $\varphi(x, \lambda)$ özfonksiyonunun $x \in (a, b)$ aralığında m tane sıfırı vardır [15].

İspat

$$u(a) = \sin \alpha, u'(a) = -\cos \alpha \quad (2.6)$$

başlangıç koşullarını sağlayan

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [a, b],$$

denkleminin çözümü $\varphi(x, \lambda)$ olsun. 2. Mukayese teoreminden λ artarken $\varphi(x, \lambda)$

fonksiyonunun sıfırlarının sayısı azalır. $x \in [a, b]$ ve $|q(x)| < c$ olsun. Bu takdirde bu denklemi

$$-y'' + (\lambda + c) y = 0, \quad (2.7)$$

denkleminin (2.6) başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün görüntüsü

$$y(x, \lambda) = \sin \alpha \cosh\{(-\lambda - c)^{1/2} (x - a)\} - \frac{\cos \alpha}{-\lambda - c} \sinh\{(-\lambda - c)^{1/2} (x - a)\},$$

şeklindedir. parametresinin negatif değerlerinin mutlak değerleri için yeterince büyük değerleri için bu fonksiyonun sıfır noktalarının mevcut olmadığı aşîkârdır. Bu sebeple tekrar 2.Mukayese teoreminden faydalanarak λ parametresinin negatiflerinin yeterince büyük mutlak değerleri için $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının mevcut olmadığı kanaatine varılır.

Karşılaştırma için

$$-y'' + (\lambda - c) y = 0,$$

denklemini seçersek pozitif ve sınırsız olarak artan λ 'lar için (1.6)-(1.7) probleminin çözümü olan $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısının $[a, b]$ aralığında sınırsız olarak arttığını elde ederiz.

Şimdi $\varphi(x, \lambda) = 0$ denklemini ele alalım. Bu durumda Lemma (2.5)'den ötürü bu denklemin kökleri λ 'ya bağılı sürekli fonksiyonlardır.

Ayrıca 2.Mukayese teoreminden dolayı λ 'lar artarken $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunun her sıfırı sola kaymış olur. Sıfırlarının sayısı azalmadığı için a noktasının dışında sıfır noktası bulunamaz.

Bu sebeple Lemma (2.5)'den dolayı bu fonksiyonun yeni sıfırları b noktasından içeri girer.

Böyle bir değerin bulunacağı açıktır. $\varphi(b, \lambda) = 0$ olmak üzere μ_1 ile bu eşitliği sağlayan parametresinin ikinci değerini gösterelim. Böylece $\varphi(b, \mu_m) = 0$ olacak şekilde,

$\varphi(x, \mu_m)$ fonksiyonu açık (a, b) aralığının içerisinde m tane sıfıra sahip olmak üzere

$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{m-1}, \mu_m, \dots$ sayı dizisi elde edilir. Eğer $\sin \beta = 0$ ise bu takdirde (1.7) sınır şartlarında ikinci eşitliğin $[y(b, \lambda) \cos \beta + y'(b, \lambda) \sin \beta = 0]$ sağlandığını görürüz.

Dolayısıyla μ_m 'ler özdeğerlerdir. Ayrıca (1.6)-(1.7) probleminin çözümü olan $\varphi(x, \lambda)$ (2.6) başlangıç koşullarını sağladığı için bu çözümün (1.7) sınır koşullarından birincisini de sağladığını görürüz. Böylece bu durumda $\sin \beta = 0$ durumunda teorem ispatlanmış olur.

Şimdi $\sin \beta \neq 0$ olsun. $u(x)$ ve $v(x)$ ise 2. Mukayese teoreminde ele alınan fonksiyonlar olsun.

$$u'' + g(x)u = 0,$$

$$v'' + h(x)v = 0,$$

(2.6) başlangıç koşullarını sağlayan denklemler olsunlar. Basit işlemler sonucunda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ u^2 \left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} \right) \right\} &= 2uu' \left[\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} \right] + u^2 \left[\frac{u''}{u} - \frac{v''}{v} \right] - u^2 \left(\frac{u'^2}{u^2} - \frac{v'^2}{v^2} \right) = \\ &= \frac{(u'v - v'u)}{v^2} + u^2 [h(x) - g(x)] > 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

elde edilir.

Bu nedenle v fonksiyonunun sıfıra dönüşmediği her aralıkta $u^2 \left(\frac{u'}{v'} - \frac{v'}{v} \right)$ fonksiyonu monoton artandır. $u(x), v(x)$ fonksiyonlarının (a, b) aralığında eşit sayıda sıfıra sahip olduğunu varsayalım.

x_i ile $u(x)$ fonksiyonunun b noktasına en yakın sıfırını gösterelim. $x_i \leq x \leq b$ aralığında $v(x)$ fonksiyonunun sıfırlarının mevcut olmadığını gösterelim.

2. Mukayese teoreminden dolayı a ve x_i noktaları arasında $v(x)$ fonksiyonunun en az i -tane sayıda sıfırları bulunur.

Eğer $v(x)$ fonksiyonu $x_i \leq x \leq b$ aralığında sıfıra sahip olursa o halde (a, b) aralığında $v(x)$ fonksiyonunun varsayımımıza rağmen $u(x)$ fonksiyonundan daha fazla sıfıra sahip olur. Şimdi (2.8) eşitliğini x_i ve b arasında integrallersek

$$\begin{aligned} u^2(b) \left\{ \frac{u'(b)}{u(b)} - \frac{v'(b)}{v(b)} \right\} &> u^2(x_i) \left\{ \frac{u'(x_i)}{u(x_i)} - \frac{v'(x_i)}{v(x_i)} \right\} = 0 \\ \frac{u'(b)}{u(b)} &> \frac{v'(b)}{v(b)} \end{aligned}$$

$\mu_m < \lambda' < \lambda'' < \mu_{m+1}$ olacak şekilde $u(x)$ yerine $v(x, \lambda')$, $v(x)$ yerine $u(x, \lambda'')$ alırsak son eşitsizliğinden dolayı $\frac{\varphi'(b, \lambda)}{\varphi(b, \lambda)}$ fonksiyonu μ_m, μ_{m+1} aralığında monoton azalır ve

$\varphi(b, \mu_m) = \varphi(b, \mu_{m+1})$ olduğu için $\frac{\varphi'(b, \lambda)}{\varphi(b, \lambda)} = -\cot \beta$ olmak üzere

μ_m, μ_{m+1} aralığında bir tane λ_{m+1} noktası bulunur. Dolayısıyla bu noktada (1.7) şartının ikinci eşitliği sağlanır. Bu ise λ_{m+1} 'in bir özdeğer olması demektir. $v(x, \lambda_{m+1})$ ise bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyondur. Böylece açık a, b aralığında bulunan $v(x, \lambda_{m+1})$ fonksiyonunun $(m+1)$ -tane sıfırı vardır. Bununla teorem ispatlanmıştır.

Tanım 2.7

p ve q sabitler olmak üzere

$$-u'' + pu = 0, \quad (2.9)$$

$$-v'' + qv = 0, \quad (2.10)$$

denklemlerinin aşikar olmayan çözümleri $u(x)$ ve $v(x)$ için,

- i) $q < p$ ise $u(x)$ 'in ardışık sıfırları $v(x)$ 'in bir sıfırı tarafından ayrılır.
- ii) $p \geq 0$ ise $u(x)$ 'in herhangi (x_0, ∞) aralığında en çok bir sıfırı vardır.
- iii) $q < 0$ ise her (x_0, ∞) aralığında $v(x)$ 'in bir sıfırı vardır.

Osilasyon teorisinde bir çok klasik sonuç,

$p_k(x)$ ve $q_k(x)$ fonksiyonları C^k sınıfından, $p_1(x)$ ve $q_1(x)$ uygun aralıkta pozitif olmak üzere

$$-[p_1(x)u']' + p_0(x)u = 0, \quad (2.11)$$

$$-[q_1(x)v']' + q_0(x)v = 0, \quad (2.12)$$

self-adjoint S-L denklemlerinin çözümleri için elde edilmiştir. 1836 yılında bu teori için başlangıç sayılabilecek ve C. Sturm tarafından keşfedilen Mukayese Teoremi aşağıdaki şekildedir:

Teorem 2.7 (Genel Sturm Mukayese Teoremi)

Eğer α, β (2.11) denkleminin aşikar olmayan çözümü olan $u(x)$ 'in ardışık sıfırları ise $x \in v = [\alpha, \beta]$ için

- i) $q_1(x) \equiv p_1(x)$,
- ii) $q_0(x) \leq p_0(x)$, $q_0(x) \neq p_0(x)$,

ise (2.12)'nin her $v(x)$ çözümünün (α, β) aralığında bir sıfırı vardır [2].

İspat

Eğer $u(x)$ ve $v(x)$, (2.9) ve (2.10) denklemlerinin çözümleri ise

$$\frac{d}{dx}vp_1u' - up_1v' = (p_0 - q_0)uv \quad (2.13)$$

olur. Eğer $u(\alpha) = u(\beta) = 0$ ise

$$(vp_1u')_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta (p_0 - q_0)uvdx,$$

integrasyonu elde edilir. (α, β) aralığında $u(x)$ 'in pozitif olduğunu varsayarsak

$$u'(\alpha) > 0,$$

$$u'(\beta) < 0,$$

bulunur. (2.13) den $v(x)$, (α, β) aralığında sabit işaretli olamaz. Doğrusal argüman (α, β) aralığında $u(x) < 0$ ise uygun olur.

3. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN AÇILIM TEOREMLERİ

3.1. İntegral Denklemler Metodu ile Açılım Teoremi

$f(x) \neq 0$ sürekli fonksiyon olacak biçimde

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = f(x, y) \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} y(0, \lambda) \cos \alpha + y'(0, \lambda) \sin \alpha &= 0, \\ y(\pi, \lambda) \cos \beta + y'(\pi, \lambda) \sin \beta &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

problemini ele alalım. λ kompleks sabit bir sayı olsun.

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \quad (3.3)$$

denkleminin

$$u(0, \lambda) = \sin \alpha, \quad u'(0, \lambda) = -\cos \alpha,$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü $v(x, \lambda)$ ile gösterelim. Eğer $u(x, \lambda)$ ve $v(x, \lambda)$ lineer bağımsız ise, yani $u(x, \lambda)$, (3.1)-(3.2) probleminin özfonksiyonları olmayacak biçimde Wronskian determinanı

$$W(u, v) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \neq 0,$$

dır ve tersine, eğer Wronskian determinanı sıfıra eşit ise $u = Cv$ olur.

Dolayısıyla u özfonksiyondur. Böylece (3.2)-(3.3) probleminin özdeğerleri Wronskian determinantının sıfırları ile çakışır. Bu durumda birinci mertebeden türevin yanındaki katsayı sıfıra eşit olduğundan belirli Liouville formülünden dolayı W , λ 'dan bağımsızdır.

$$W(u, v) = w(\lambda),$$

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{w(\lambda)} u(x, \lambda) v(t, \lambda) & \dots x \leq t \\ \frac{1}{w(\lambda)} u(t, \lambda) v(x, \lambda) & \dots x \geq t \end{cases}$$

şeklinde $G(x, t, \lambda)$ Green fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon x ve t değişkenlerine göre simetriktir ve reel λ değerleri için reeldir.

$$y(x, \lambda) = \int_0^x G(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad (3.4)$$

şeklindeki fonksiyonun (3.1)-(3.2) sınır probleminin çözümü olduğunu gösterelim:

$$y(x, \lambda) = \frac{1}{w(x)} \left\{ v(x, \lambda) \int_0^x u(t, \lambda) f(t) dt + u(x, \lambda) \int_0^x v(t, \lambda) f(t) dt \right\}, \quad (3.5)$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned} y''(x, \lambda) &= \frac{1}{w(x)} \left\{ v''(x, \lambda) \int_0^x u(t, \lambda) f(t) dt + u''(x, \lambda) \int_0^x v(t, \lambda) f(t) dt + \right. \\ &\quad \left. + x'(x, \lambda) u(x, \lambda) f(x) - u'(x, \lambda) v(x, \lambda) f(x) \right\}, \\ &= \frac{1}{w(x)} \left[q(x) - \lambda \right] \left\{ v(x, \lambda) \int_0^x u(t, \lambda) f(t) dt + u(x, \lambda) \int_0^x v(t, \lambda) f(t) dt \right\} + f(x) \\ &= [q(x) - \lambda] y(x, \lambda) + f(x) \end{aligned}$$

olup

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = f(x),$$

elde edilir. $y(x, \lambda)$ fonksiyonunun (3.2) sınır koşullarını sağladığını kolayca kontrol edebiliriz. Böylece λ , (3.2)-(3.3) homojen probleminin özdeğeri olmayacak şekilde, her $f(x)$ fonksiyonu için homojen olmayan (3.1)-(3.2) problemi çözülebilir ve çözüm (3.4) formülü ile verilir.

Tersine eğer λ homojen problemin özdeğeri ise homojen olmayan (3.1)-(3.2) problemi genelde çözülebilir değildir. λ , homojen problemin özdeğeri olmayacak biçimde (3.1)-(3.2) sisteminin ek çözümü vardır.

Gerçekten, homojen olmayan problemin iki çözümünün farkının homojen problemin özfonksiyonu olacağı aşıkardır ve varsayımdan dolayı bu sıfıra eşittir. $\lambda = 0$ için bir özdeğer olmadığını kabul edebiliriz. Sabit bir η sayısı için,

$$y'' + (\lambda + \eta) - q(x) y = 0,$$

$$y(0, \lambda) \cos \alpha + y'(0, \lambda) \sin \alpha = 0,$$

$$y(\pi, \lambda) \cos \beta + y'(\pi, \lambda) \sin \beta = 0,$$

sınır problemini göz önüne alalım. Bu problemin özdeğeri, (3.2)-(3.3) probleminin özdeğerinin aynısıdır. Özdeğerlerin tümü η kadar sağa ötelenmiş olur. Son sınır problemi için sıfır özdeğeri olmayacak şekilde η sayısını seçebiliriz. $G(x, t, \lambda) = G(x, t)$ eşitliğini ele alırsak

$$y(x) = \int_0^x G(x,t) f(t) dt, \quad (3.6)$$

fonksiyonu (3.2) sınır koşullarını sağlayan

$$y'' - q(x)y = f(x),$$

denkleminin çözümüdür. Böylece (3.1)-(3.2) sistemi

$$y + \lambda \int_0^\pi G(x,t) y(t) dt = \int_0^\pi G(x,t) f(t) dt \equiv g(x),$$

integral denklemine denk olduğunu söyleyebiliriz. Özellikle homojen problem $f(x) \equiv 0$

$$y(x) = \lambda \int_0^\pi G(x,t) y(t) dt = 0, \quad (3.7)$$

integral denklemine denktir.

(3.2) ve (3.3) problemi için özdeğerleri $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ve bunlara karşılık gelen normlaştırılmış özfonksiyonlar $v_0(x), v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$ olsun.

$$H(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n(\xi)}{\lambda_n}$$

çekirdeği ele alalım. Burada $\sqrt{\lambda_n} = n + O(1)$ asimptotik formülünden dolayı $H(x, \xi)$ için yazılan seri, mutlak ve düzgün yakınsaktır ve dolayısıyla $H(x, \xi)$ çekirdeği sürekli. Şimdi ise

$$Q(x, \xi) = G(x, \xi) + H(x, \xi) = G(x, \xi) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n(\xi)}{\lambda_n}$$

çekirdeğini ele alalım. Bu çekirdek sürekli ve simetrik olacağı aşıkardır. Sıfıra denk olmayan her simetrik $Q(x, \xi)$ çekirdeği en az bir özfonksiyona sahiptir. Yani

$$u(x) + \lambda_0 \int_0^\pi Q(x, \xi) u(\xi) d\xi = 0, \quad (3.8)$$

denklemini sağlayan λ_0 sayısı ve $u(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcuttur. Böylece $Q(x, \xi)$ çekirdeğinin özfonksiyonlara sahip olmadığını gösterirsek $Q(x, \xi) \equiv 0$ olduğunu elde ederiz. Yani,

$$G(x, \xi) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n(\xi)}{\lambda_n} \quad (3.9)$$

açılımından, özfonksiyonların tamlığını kolayca elde ederiz. (3.7) denkleminde

$$\int_0^{\pi} G(x, \xi) v_n(\xi) d\xi = - \frac{1}{\lambda_n} v_n(x),$$

elde edilir. Böylece

$$\int_0^{\pi} Q(x, \xi) v_n(\xi) d\xi = 0,$$

olup $Q(x, \xi)$ çekirdeği (3.2)-(3.3) probleminin tüm özfonksiyonlarına ortogonaldır. (3.8)

integral denkleminin çözümü $u(x)$ olsun. $u(x)$ 'in $v_n(x)$ 'lerin tümüne dik olduğunu gösterelim. Gerçekten (3.8) denkleminde

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\pi} u(x) v_n(x) dx + \lambda_0 \int_0^{\pi} v_n(x) \left\{ \int_0^{\pi} Q(x, \xi) u(\xi) d\xi \right\} dx, \\ &= \int_0^{\pi} u(x) v_n(x) dx + \lambda_0 \int_0^{\pi} u(\xi) \left\{ \int_0^{\pi} Q(x, \xi) v_n(x) dx \right\} d\xi, \\ &= \int_0^{\pi} u(x) v_n(x) dx, \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$0 = u(x) + \lambda_0 \int_0^{\pi} Q(x, \xi) u(\xi) d\xi = u(x) + \lambda_0 \int_0^x G(x, \xi) u(\xi) d\xi,$$

bulunur. Yani $u(x)$, (3.2)-(3.3) probleminin özfonksiyonudur. Ayrıca $u(x)$, $v_n(x)$ 'lerin tümüne ortogonal olduğu için $u(x) \equiv 0$ ve dolayısıyla, $Q(x, \xi) \equiv 0$ olur. Böylece (3.9) formülü ispatlanmış olur.

Teorem 3.1 (Açılım Teoremi)

Eğer $f(x)$ ikinci mertebeden sürekli türeve sahipse ve (3.2) ile verilen koşulları sağlamıyorsa

$f(x)$ fonksiyonu için (3.2)-(3.3) probleminin özfonksiyonlarına göre mutlak yakınsak ve düzgün yakınsak Fourier seri açılımı şeklinde yazılabilir. Yani

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x), \quad (3.10)$$

$$a_n = \int_0^{\pi} f(x) v_n(x) dx,$$

olur.

İspat

$f''(x) - q(x)f(x) = h(x)$ olsun. Bu taktirde (3.4) ve (3.9) ' dan dolayı

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\pi} G(x, \xi) h(\xi) d\xi \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\pi} v_n(\xi) h(\xi) d\xi \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x) \end{aligned}$$

bulunur.

$v_n(x)$ fonksiyonunun ortogonalliği ve normlu olmasından

$$a_n = \int_0^{\pi} f(x) v_n(x) dx$$

olur.

Teorem 3.2

$[0, \pi]$ aralığında karesi integrallenebilen her $f(x)$ fonksiyonu için

$$\int_0^{\pi} f^2(x) dx = \sum_{h=0}^{\infty} a_n^2$$

parseval eşitliği sağlanır [11].

Şimdi $f(x)$ fonksiyonunun açılımı belirli olacak şekilde Rezolvent için Fourier serisine açılımını bulalım. (3.4) formülüne göre $y(x, \lambda)$ fonksiyonu (3.2) ile verilen sınır koşullarını sağladığından , kısmi integrasyon yaparsak,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} y''(x, \lambda) - q(x) y(x, \lambda) v_n(x) dx &= \int_0^{\pi} v_n''(x) - q(x) v_n(x) y(x, \lambda) dx, \\
&= -\lambda_n \int_0^{\pi} y(x, \lambda) v_n(x) dx, \\
&= -\lambda_n d_n(\lambda),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

elde ederiz.

$$y(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\lambda) v_n(x), \quad a_n = \int_0^{\pi} f(x) v_n(x) dx,$$

olsun. Bu taktirde (3.1) ve (3.12)'den

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^{\pi} y''(x, \lambda) + [\lambda - q(x)] y(x, \lambda) v_n(x) dx \\
&= -\lambda_n d_n(\lambda) + \lambda d_n(\lambda)
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$d_n(\lambda) = \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla, rezolvent için açılım

$$y(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} v_n(x), \tag{3.13}$$

şekindedir.

3.3. Sonlu Farklar Metodu ile Açılım Teoremi

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \tag{3.14}$$

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \tag{3.15}$$

$$y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0, \tag{3.16}$$

şeklinde tanımlanan S-L problemini ele alalım. Bu problemin sonlu farklar metodu ile tamlığını göstereceğiz. (3.14)-(3.16) probleminin bir çözümü $y = y(x, \lambda)$ ise bu çözüm başlangıç şartlarını sağlayacaktır. Ayrıca

$$y(0) = \sin \alpha, \tag{3.17}$$

$$y'(0) = -\cos \alpha, \tag{3.18}$$

şartları (3.15) şartlarını sağlayacaktır.

Şimdi ise n keyfi pozitif bir tam sayı olmak üzere $[0, \pi]$ aralığını n eşit parçaya bölelim ve $h = \pi / n$ alalım. $x_v = vh$, $q_v = q(vh)$ ve $v = 0, 1, \dots, n-1$ olsun. Bu şekilde birinci ve ikinci türevi sonlu farklar yardımıyla yazarsak

$$\begin{aligned} y' &\approx \frac{y_v - y_{v-1}}{h}, \\ y'' &\approx \frac{y_{v+1} - 2y_v + y_{v-1}}{h^2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

elde edilir. Buradan (3.17) şartı

$$y_0 = \sin \alpha, \quad (3.20)$$

şeklindedir ve

$$y_{-1} = \sin \alpha + h \cos \alpha, \quad (3.21)$$

elde edilir. (3.14) ile verdiğimiz denklemi sonlu farklar metodu ile yeniden yazarsak

$$\frac{y_{v+1} - 2y_v + y_{v-1}}{h^2} + (\lambda - q_v) y_v = 0, \quad (3.22)$$

bulunur.

(3.22) ile bulduğumuz denkleme (3.20) ve (3.21) sınır şartlarını eklersek

$$y_{n-1} \cos \beta + \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \sin \beta = 0, \quad (3.23)$$

eşitliği elde edilir ki bu da (3.16) denkleminin sonlu farklı halidir. Bu problem artık n boyutlu vektör uzayında cebirsel probleme dönüşür. (3.21) ve (3.23) denklemlerinden

$$y_{-1} = y_0(1 + h \cot \alpha), \quad (3.24)$$

$$y_n = y_{n-1}(1 - h \cot \beta), \quad (3.25)$$

elde edilir. Elde ettiğimiz son iki denklemi (3.22) de yerine yazarsak n tane n bilinmeyenli homojen denklem elde edilir ve oluşan bu matris simetrik ve Jakobi matrisidir.

$y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ ve $z = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ olacak şekilde özdeğerleri reel, öz fonksiyonları ortogonal olan iç çarpımları

$$(y, z) = \sum_{v=0}^{n-1} h y_v z_v,$$

olarak elde edilir.

Şimdi özdeğerlerin basit olduğunu gösterelim. Varsayalım ki λ nın birden fazla değeri

olsun. Bu sistem simetrik olduğundan en az iki tane lineer bağımsız özfonksiyon olmak zorundadır. $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ ve $z = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ olsun. $y_0 \neq 0$ ve $z_0 = 0$ olduğunu varsayalım. Buna ek olarak (3.22) denklemi homojen olduğundan $y_0 = z_0$ kabul edelim. Fakat (3.24) denklemi $y_{-1} = z_{-1}$ ve (3.22) den $y_v = z_v$ ($v = 1, 2, \dots, n$) olur ki bir özdeğere tek bir özfonksiyon karşılık gelir.

Şimdi $\lambda_{k,h}$ $k = (1, 2, \dots, n)$, $y_k^h = (y_{0,k}^h, \dots, y_{n-1,k}^h)$ olmak üzere

$$\alpha_{k,h}^2 = \|y_k^h\|^2 = (y_k^h, y_k^h) = \sum_{v=0}^{n-1} h [y_{v,k}^h]^2,$$

şeklinde tanımlanır. n boyutlu vektör uzayında ortogonal vektörler $y_1^h, \dots, y_n^h$ olsun. $f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ olmak üzere Parseval denklemi de

$$(f, f) = \sum_{v=0}^{n-1} h f_v^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_{k,h}^2} (f, y_k^h)^2, \quad (3.26)$$

şeklinde tanımlanır.

(3.24) denkleminin (3.22) ve (3.23) başlangıç şartlarını $y_v(\lambda)$ sağlasın. Eğer $h \rightarrow 0$ ve $vh \rightarrow x$ ise $y_v(\lambda) \rightarrow y(x, \lambda)$ olur. $\lambda_{1,h}, \lambda_{2,h}, \dots, \lambda_{n,h}$ ifadeleri $y_n(\lambda) = y_{n-1}(\lambda)(1 - h \cot \beta)$ denkleminin kökleri olur. $h \rightarrow 0$ olduğunda $\lambda_{k,h}$ ların her biri $(-N, N)$ aralığında sınırlıdır.

Şimdi (3.26) da elde ettiğimiz Parseval denklemini $h \rightarrow 0$ yaparsak (3.14), (3.15), (3.16) denkleminin de Parseval denklemine döndüğünü elde ederiz. Göstereceğiz ki $f(x)$, $x \in [0, \pi]$ aralığında ikinci türevi sürekli ve $x=0$ ve $x=\pi$ noktalarının bazı komşuluklarında kaldırılabilir sıfırlardır. $f = \{f(vh)\} = \{f_v\}$ ($v = 0, 1, \dots, n-1$) olup (3.26) denklemini tekrar yazarsak

$$\begin{aligned} (f, f) &= \sum_{v=0}^{n-1} h f_v^2(vh) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_{k,h}^2} (f, y_k^h)^2 \\ &= \sum_{|\lambda_{k,h}| \leq N} \frac{1}{\lambda_{k,h}^2} (f, y_k^h)^2 + \sum_{|\lambda_{k,h}| > N} \frac{1}{\alpha_{k,h}^2} (f, y_k^h)^2 \equiv I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir. Burada N keyfi pozitif sayıdır. Şimdi I_2 yi hesaplayalım. İşlemin sonunda (f, y_k^h) ifadesini Fourier katsayılarına dönüştüreceğiz.

$$(f, y_k^h) = \sum_{v=0}^{n-1} h f_v y_{k,v}^h \quad (3.28)$$

$$= -\frac{1}{\lambda_{k,h}} \sum_{v=0}^{n-1} h f_v \left[\frac{y_{k,v+1}^h - 2y_{k,v}^h + y_{k,v-1}^h}{h^2} - q_v y_{k,v}^h \right] = -\frac{1}{\lambda_{k,h}} \left\{ \left[-f_{-1} y_{k,0}^h + f_{n-1} y_{k,n}^h + f_0 y_{k,-1}^h - f_n y_{k,n-1}^h \right] h^{-1} + \sum_{v=0}^{n-1} h y_{k,v}^h \left[\frac{f_{v+1} - 2f_v + f_{v-1}}{h^2} - q_v h_v \right] \right\}$$

Eğer h yeterince küçük bir değer olursa $f_0 = 0, f_{n-1} = 0$ ve $f_n = 0$ olur. $f_{-1} = 0$ elde edilir.

(3.28) den

$$(f, y_k^h) = -\frac{1}{\lambda_{k,h}} \sum_{v=0}^{n-1} h y_{k,v}^h \left[\frac{f_{v+1} - 2f_v + f_{v-1}}{h^2} - q_v f_v \right] = -\frac{1}{\lambda_{k,h}} \left(y_k^h, \frac{\Delta^2 f}{h^2} - qf \right),$$

elde ederiz. Bessel eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{|\lambda_{k,h}| > N} \frac{1}{\alpha_{k,h}^2} \left(y_k^h, \frac{\Delta^2 f}{h^2} - qf \right)^2 < \frac{1}{N^2} \sum_{|\lambda_{k,h}| > N} \frac{1}{\alpha_{k,h}^2} \left(y_k^h, \frac{\Delta^2 f}{h^2} - qf \right)^2 \\ &= \frac{1}{N^2} \left\| \frac{\Delta^2 f}{h^2} - qf \right\|^2, \end{aligned} \quad (3.29)$$

olur. Eğer $h \rightarrow 0$ olursa o zaman

$$\left\| \frac{\Delta^2 f}{h^2} - qf \right\|^2 \rightarrow \int_0^\pi \{ f''(x) - q(x)f(x) \}^2 dx$$

olur. (3.29) dan sabit bir $A > 0$ vardır öyle ki $h \rightarrow 0$ ise

$$I_2 < A / N^2 \text{ olur.}$$

(3.27) den

$$\left| \sum_{v=0}^{n-1} h f^2(vh) - \sum_{|\lambda_{k,h}| \leq N} \frac{1}{\alpha_{k,h}^2} (f, y_k^h)^2 \right| < \frac{A}{N^2}, \quad (3.30)$$

$h \rightarrow 0$ için

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{n-1} h f^2(vh) &\rightarrow \int_0^\pi f^2(x) dx, \\ \alpha_{k,h}^2 &\rightarrow \int_0^\pi y^2(x, \lambda_k) dx = \alpha_k^2, \\ (f, y_k^h) &\rightarrow \int_0^\pi f(x) y(x, \lambda_k) dx, \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left| \int_0^\pi f^2(x) dx - \sum_{|\lambda_k| < N} \frac{1}{\alpha_k^2} \left\{ \int_0^\pi f(x) y(x, \lambda_k) dx \right\}^2 \right| < \frac{A}{N^2},$$

elde ederiz. Bu eşitsizlikte $N \rightarrow \infty$ olursa

$$\int_0^\pi f^2(x)dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\alpha_k^2} \left\{ \int_0^\pi f(x)y(x,\lambda_k)dx \right\}^2, \quad (3.31)$$

sürekli Parseval eşitliğini elde ederiz.

Şimdi $v_k(x)$ normalleştirilmiş özfonksiyonu tanımlayalım.

$$v_k(x) = (1/\alpha_k) y(x, \lambda_k),$$

(3.31) de verilen Parseval denklemi

$$a_k = \int_0^\pi f(x)v_k(x)dx,$$

şeklinde olduğunda

$$\int_0^\pi f^2(x)dx = \sum_{k=1}^\infty a_k^2,$$

elde edilir. Bilindiği üzere karesel anlamda $f(x)$ e yakınsayan iki kez türevlenebilen $f_k(x)$ fonksiyonunu bulabiliriz. (3.31) de

$$a_n^k = \int_0^\pi f_k(x)v_n(x)dx,$$

şeklinde yazarsak

$$\int_0^\pi \{f_k(x) - f_l(x)\}^2 dx = \sum_{n=0}^\infty \{a_n^k - a_n^l\}^2, \quad (3.32)$$

elde ederiz. Eğer $k, l \rightarrow \infty$ olursa (3.32) nin sol tarafı 0'a gider dolayısıyla sağ tarafta 0'a yaklaşır.

Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinden

$$|a_n^k - a_n^l| \leq \left\{ \int_0^\pi [f(x) - f_k(x)]^2 dx \right\}^{1/2},$$

elde edilir. $f_k(x)$, $f(x)$ e yakınsadığından $\lim_{k \rightarrow \infty} a_n^k = a_n$ ($n = 0, 1, \dots$) olur. (3.32) den

$$\sum_{n=0}^N \{a_n^k - a_n^l\}^2 \leq \int_0^\pi \{f_k(x) - f_l(x)\}^2 dx,$$

yazılır. $k \rightarrow \infty$ ise

$$\sum_{n=0}^N \{a_n - a_n^l\}^2 \leq \int_0^\pi \{f(x) - f_l(x)\}^2 dx,$$

elde ederiz. Şimdi $N \rightarrow \infty$ alırsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{a_n - a_n^l\}^2 \leq \int_0^{\pi} \{f(x) - f_l(x)\}^2 dx,$$

elde ederiz. Bu eşitsizliklerden (özellikle Minkowski eşitsizliğinden) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ yakınsak serisi elde edilir.

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n^l\}^2 \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n - a_n^l\} \{a_n + a_n^l\} \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_n^l|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n + a_n^l|^2 \right)^{1/2},$$

yazabiliriz ve $l \rightarrow \infty$ ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{a_n^l\}^2 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2,$$

olur. Öte yandan $f_l(x)$ ile $f(x)$ arasındaki karesel yakınsaklıktan dolayı

$$\int_0^{\pi} f_l^2(x) dx \rightarrow \int_0^{\pi} f^2(x) dx,$$

olur. Bu yüzden $l \rightarrow \infty$ iken eşitlik

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f_l^2(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n^l\}^2, \\ \int_0^{\pi} f_l^2(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2, \end{aligned}$$

elde ederiz.

Teorem 3.3 : Karesi integrallenebilen her fonksiyon

$$a_n = \int_0^{\pi} f(x) v_n(x) dx, \quad (3.33)$$

Fourier katsayılarının olduğu yerde

$$\int_0^{\pi} f^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2, \quad (3.34)$$

Parseval eşitliğine sahiptir [8].

İspat: $\delta < \pi$ olmak üzere

$$f_{\delta}(x) = \begin{cases} 1/\delta, 0 \leq x \leq \delta \\ 0, \delta < x \leq \pi \end{cases},$$

olarak tanımlayalım. $\overline{f_{\delta}}$ vektörünün bileşenleri $f_{\delta v} = f_{\delta}(vh)$ ($v = 0, 1, \dots, n-1$) şeklinde

tanımlayalım. $\overline{f_\delta}$ vektörüne (3.24) ü uygularsak

$$(f_\delta, f_\delta) = \sum_{v=0}^{n-1} h f_{\delta v}^2 = \frac{h}{\delta^2} \left[\frac{\delta}{h} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{k,h}^2} (f_\delta, y_k^h)^2,$$

Bundan dolayı $N > 0$ için denklemi

$$\sum_{|\lambda_{k,h}| \leq N} \frac{1}{a_{k,h}^2} (f_\delta, y_k^h)^2 \leq \frac{1}{\delta}, \quad (3.35)$$

elde ederiz. $h \rightarrow 0$ ve $vh \rightarrow x$ iken $y_v(\lambda) \rightarrow y(x, \lambda)$ olur. Buradan

$$\frac{1}{\delta} \int_0^\delta y(x, \lambda_{k,h}) dx,$$

olur. $|\lambda_{k,h}| \leq N$ dir. $\sin \alpha \neq 0$ için

$$(\overline{f_\delta}, y_k^h)^2 > \frac{1}{2} \sin^2 \alpha,$$

olur ve (3.35) den dolayı

$$\sum_{|\lambda_{k,h}| \leq N} \frac{1}{a_{k,h}^2} < \frac{2}{\delta \sin^2 \alpha},$$

elde edilir. $h \rightarrow 0$ olduğunda $\alpha_{k,h}^2$ düzgün sınırlıdır. Aynı zamanda (3.35) denkleminde $(-N, N)$ aralığında $\lambda_{k,h}$ da sınırlıdır. $h_1, h_2, \dots \rightarrow 0$ şeklinde bir dizi seçelim. Öyle ki

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_{k,h_p} = \lambda_k \quad (k = 1, 2, \dots; |\lambda_{k,h_p}| \leq N),$$

olur. λ_k lar (3.16) nın kökleridir. $\sin \alpha = 0$ aldığımız zaman yine aynı sonucu elde ederiz.

$$f_\delta(x) = \begin{cases} 1/\delta^2, & 0 \leq x \leq \delta \\ 0, & \delta < x \leq \pi \end{cases},$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4 (Açılım Teoremi) : Eğer sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu için

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x), \quad a_n = \int_0^\pi f(x) v_n(x) dx,$$

$[0, \pi]$ aralığında yakınsak ise

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x),$$

şeklinde yazılır [8].

İspat: $h(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x)$ olsun. $h(x)$, $[0, \pi]$ aralığında sürekli ise

$b_n = \int_0^{\pi} h(x) v_n(x) dx = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) şeklinde olur. $h(x)$ e (3.31) deki Parseval eşitliği

uygulanırsa $\int_0^{\pi} h^2(x) dx = 0$ olur. $h(x)$ sürekli olduğundan $h(x) \equiv 0$ olur ispat tamamlanır.



4. Fourier-Bessel Açılımı

λ, x ve p reel sayılar olacak biçimde

$$x \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dz}{dx} + \left(\lambda x - \frac{p^2}{x} \right) z = 0, \quad (4.1)$$

Bessel denklemini ele alalım. $y = z\sqrt{x}$ dönüşümünü yaparak (4.1) denklemini

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\lambda - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right) y = 0, \quad (4.2)$$

şeklinde yazalım. $\sqrt{\lambda} = s$ olacak şekilde (4.2) denkleminin lineer bağımsız

$$y_1(x, \lambda) = \sqrt{x} Y_p(sx),$$

$$y_2(x, \lambda) = \sqrt{x} Y_{-p}(sx),$$

çözümleri vardır. Burada $Y_p(t)$ birinci tür Bessel fonksiyonu ve

$$Y_p(t) = \frac{Y_p(t) \cos p\pi - Y_{-p}(t)}{\sin p\pi},$$

2. tür (veya Henkel) fonksiyonudur.

Bessel fonksiyonlarının kuvvet serilerine açılımlarından $x \rightarrow 0$

$$y_1 = O\left(x^{p+\frac{1}{2}}\right),$$

$$y_2 = O\left(x^{-p+\frac{1}{2}}\right),$$

elde edilir. Bu değerlerden, $p \geq 1$ için sadece y_1 in sıfırı komşuluğunda karesi integrallenen olduğu elde edilir. $0 \leq p < 1$ olacak biçimde ise her iki çözümün de karesi integrallenebilir.

$0 < a < b$ ve α, β keyfi reel sayılar olsun. (4.1) denklemini için

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0, \quad (4.3)$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0, \quad (4.4)$$

sınır koşullarını ele alalım. $[a, b]$ aralığında (4.2) denkleminin tekil noktaları olmadığı için (4.3) sınır koşulları ile birlikte regüler S-L problemini tanımlar. Bu sebeple klasik S-L teorisi uygulanabilir.

(4.2), (4.3), (4.4) probleminin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda, \dots$ bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar ise $\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \lambda), \dots$ ($\varphi_i(x) = \varphi(x, \lambda_i)$) olsun. Kökleri λ_n sayıları olan transendent denklemi bulmak için, (4.2) denkleminin (4.4) sınır koşulunu sağlayan çözümünü bulalım. Bu tür çözümün görüntüsünün

$$y(x, \lambda) = cy_1(x, \lambda) + y_2(x, \lambda),$$

olduğu kolayca görülüyor. Burada

$$c = -\frac{y_2(b, \lambda) \cot \beta + y_2'(b, \lambda)}{y_1(b, \lambda) \cot \beta + y_1'(b, \lambda)}, \quad (4.5)$$

dır. Bu sebeple λ_n özdeğerleri

$$y(a, \lambda) \cos \alpha + y'(a, \lambda) \sin \alpha = 0,$$

denkleminin kökleridir. Bu denklemi c sabiti (4.5 formülü) ile tanımlanacak şekilde

$$c\{y_1(a, \lambda) \cot \alpha + y_1'(a, \lambda)\} + \{y_2(a, \lambda) \cot \alpha + y_2'(a, \lambda)\} = 0, \quad (4.6)$$

şeklinde yazmak mümkündür. $x \rightarrow 0$ için $y_2(x, \lambda) \rightarrow \infty$, $y_1(x, \lambda) \rightarrow 0$ olduğundan her sabit λ için $a \rightarrow 0$ iken $[a, b]$ aralığında $y(x, \lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı sınırlı sayıda olur. Buradan (4.2) denklemi ve (4.4) sınır koşulunun sonsuzlukta sadece bir tek limit noktası olan özdeğerlerinden oluşan $(0, b]$ aralığında diskret spektrumu tanımladığı elde edilir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların kareleri integrallenebilir. $p \geq 1$ için sonuncu koşul birebir olarak (2.3) koşulunun yerine alınabilir çünkü bu durumda sadece $y_1(x, \lambda) = \sqrt{x}Y_p(x\sqrt{\lambda})$ nın karesi integrallenebilir.

Böylece, $[0, b]$ aralığında özdeğerleri tanımlamak için (4.4) sınır koşulunda $y(x, \lambda)$ nın yerine $\sqrt{\lambda}Y_p(\sqrt{\lambda}x)$ ele almak gerekiyor ve dolayısıyla

$$Y_p(sb) \left\{ \sqrt{b} \cos \beta + \frac{1}{y\sqrt{b}} \sin \beta \right\} + \sqrt{b}Y_p'(sb) \sin \beta = 0, \quad (4.7)$$

transendent denklemi elde ederiz.

Eğer $\sin \beta = 0$ ise daha basit transendent denklem olarak

$$Y_p(sb) = 0, \quad (4.8)$$

elde ederiz.

Son durumda özdeğerler s_n olsun (yani 4.8 denkleminin kökleri) [Watson G (Bessel fonksiyonlar teorisi sayfa 147). Bilinen

$$\int_0^b x Y_p^2(sx) dx = \frac{b^2}{2} \left\{ \left[Y_p'(sb) \right]^2 + \left(1 - \frac{p^2}{s^2 b^2} \right) \left[Y_p(sb) \right]^2 \right\},$$

formülünden dolayı, $s = s_n$ olduğunu ele alırsak

$$\int_0^b x Y_p^2(s_n x) dx = \frac{b^2}{2} \left[Y_p'(s_n b) \right]^2,$$

ede ederiz. Bu sebeple normlaştırılmış öz fonksiyonların görüntüsü

$$\frac{\sqrt{2x} Y_p(s_n x)}{b Y_p'(s_n b)},$$

Fourier-Bessel serisine açılımın görüntüsü ise

$$f(x) = \frac{2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x} Y_p(s_n x)}{Y_p'(s_n b)} \int_0^b \sqrt{t} Y_p(s_n t) f(t) dt, \quad (4.9)$$

şeklindedir.

$p < 1$ için (4.2) denkleminin çözümlerinin tamamının karesi integrallenendir. Bu sebeple bu durumda karesinin integrallenebilirlik şartı (4.3) sınır koşulunun yerine geçerli değildir.

(4.2) denkleminde 1. mertebeden türev bulunmadığı için $y_1(x, \lambda)$ ve $y_2(x, \lambda)$ Wronski determinantı sabittir. Yani

$$\begin{aligned} W\{y_1, y_2\} &= y_1(x, \lambda) y_2'(x, \lambda) - y_2(x, \lambda) y_1'(x, \lambda) \\ &= \sqrt{x} y_p(sx) \left\{ \sqrt{x} Y_p(sx) \right\}' - \sqrt{x} Y_p(sx) \left\{ \sqrt{x} y_p(sx) \right\}' \\ &= sx \left\{ y_p(sx) Y_p'(sx) - Y_p(sx) y_p'(sx) \right\} = \frac{2}{\pi}, \end{aligned}$$

sonuç olarak $W\{y_1, y_2\}$ yi hesaplamak için büyük arguman durumunda Bessel fonksiyonlar için bilinen asimptotik formüllerden faydalanalım

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left[\sin\left(t - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right) \right], \\ Y_p'(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left[\cos\left(t - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right) \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

Bu ifadeleri $W\{y_1, y_2\}$ formülünde yazarsak ve daha sonra da $x \rightarrow \infty$ iken

$$W\{y_1, y_2\} = \frac{2}{\pi},$$

elde ederiz.



SONUÇ

Regüler ve singüler S-L operatörleri için sınır değer problemlerini tanımladık ve bunlar için Sturm karşılaştırma teoremleri, Osilasyon (salınım) teoremi, özdeğerler, özfonksiyonlar, özvektörlere ilişkin bazı özellikler ve asimptotik formüller elde ettik. Daha sonra açılım teoremi için integral denklemler ve sonlu farklar metodunu uygulayarak bu teoremin ispatını elde ettik.



KAYNAKLAR

- [1] **Richard Bronson Ph.D. Schaum Serisinden**, “Diferansiyel Denklemler Teori ve Problemleri”, İkinci baskı çeviri Prof.Dr.H.Hilmi Hacısalihoğlu, Nobel Yayın Dağıtım, 1993.
- [2] **S. Tuncer**, "Operatörlerin Spektral Teorisinde Açılım ve Salınım Teoremleri", *Yüksek Lisans Tezi*, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, (2011)
- [3] **M.Aydın, B.Kuryel, G.Gündüz ve G. Oturaç**, “Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları”(3. Baskı), Fakülteler Kitapevi, Barış Yayınları, 1995.
- [4] **Liusternik L.A., Sobolev V.J.**, "Elements of Functional Analysis", Frederick Ungar Publishing, Company New York, 1961
- [5] **Kurt Kreith**, “Oscillation Theory” ,University of California, Davis , CA/USA
- [6] **Kreyszig E.** , “Introductory Functional Analysis with Applications”, Newyork,1978
- [7] **U. Kaya**, "Dirac Sistemi İçin Bir Sınır Değer Problemi, *Yüksek Lisans Tezi*, Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Mersin, (2008)
- [8] **Levitan B.M. and I.S. Sargsjan**, Introduction to Spectral Theory: “Selfadjoint Ordinary Differential Operators”, Amer. Math. Soc. Transl. Math.
- [9] **Markushevich A.I.** , “Introduction to Analytic Functions Theory I,II”, Moskow,1977
- [10] **Yosida K.**, “Theory of Integral Equations” , 2nd ed.(Japanese),Iwanami,1978
- [11] **Titmarsh,E.C.**, “Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations I” ,1946, II,1958
- [12] **Naimark M.A.**, “Linear Differential Operators” ,NAUKA,1969
- [13] **Marchenko V.A.**, “S-L Operators and Their Applications” , Nawkava Dumka,Kiew,1977
- [14] **Levinson N.**, “The Inverse S-L Problem,Mat.” Tidsskr,1949
- [15] **Swanson C.A.**, “Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations”, Newyork and London,1968
- [16] **Willett D.**, “Classification of Second-order Linear Differential Equations with respect to Oscillation,Advances in Math” .3(1969), 594-623
- [17] **Oliver, F.W.J.**, "Introduction to Asymptotics and Special Functions",1974

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Elazığ'da doğdum. İlkokulu İsmet Paşa İ.Ö.O.'nda, ortaokulu Mezre İ.Ö.O.'nda okuduktan sonra lise öğrenimimi Elazığ Gazi Lisesi'nde tamamladım. 2009 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne yerleştim ve 2013 yılında mezun oldum. 2013-2014 eğitim-öğretim döneminde Fırat Üniversitesi'nde formasyon eğitimimi aldım. Ardından 2014 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Ana Bilim dalında Tezli Yüksek Lisans programına kayıt yaptırdım. Bu esnada 2016 yılı Şubat ayında Gaziantep 8 Şubat Anadolu Lisesi'ne Matematik Öğretmeni olarak atandım. Halen aynı okulda görev yapmaktayım.