



**DİFERANSİYELLENEBİLEN BAZI FARKLI
TÜRDEN KONVEKSFONKSİYON SINIFLARI İÇİN
ATANGANA-BALEANU KESİRLİ İNTEGRAL
OPERATÖRÜ YARDIMIYLA İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER
ŞADİYE İZCİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEZ YÖNETİCİSİ
Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR
AĞRI –2025
(Her hakkı saklıdır.)**

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şadiye İZCİ

DİFERANSİYELLENEBİLEN BAZI FARKLI TÜRDE KONVEKS
FONKSİYON SINIFLARI İÇİN ATANGANA-BALEANU KESİRLİ
İNTEGRAL OPERATÖRÜ YARDIMIYLA İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

JÜRİ ÜYELERİ
Doç. Dr. Abdullah ÇAĞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN

AĞRI-2025

	LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI	Doküman No	FR-211
		İlk Yayın Tarihi	26.02.2024
		Revizyon Tarihi	
		Revizyon No	00
		Sayfa No	1/1

DİFERANSİYELLENEBİLEN BAZI FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYON
SINIFLARI İÇİN ATANGANA-BALEANU KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ
YARDIMIYLA İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR danışmanlığında, Şadiye İZCİ tarafından hazırlanan bu çalışma, 24.08.2025 tarihinde aşağıda isimleri belirtilen jüri tarafından değerlendirilmiş olup Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisans olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Abdullah ÇAĞMAN

İmza:

Üye : Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN

İmza:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../... tarih ve / numaralı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet TEYFUR
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

HAZIRLAYAN	KONTROL EDEN	ONAYLAYAN



LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK RAPORU

Doküman No	FR-213
İlk Yayın Tarihi	26.02.2024
Revizyon Tarihi	
Revizyon No	00
Sayfa No	1 / 1

Benzerlik Oranlarına Dair Beyannamedir		
Öğrenci Adı Soyadı	Şadiye İZCİ	
Numarası	230602047	
Ana Bilim Dalı	Matematik	
Bilim Dalı	Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi	
Programı		
Danışman Unvanı Adı Soyadı	Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR	
Tez Başlığı	DİFERANSİYELLENEBİLEN BAZI FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN ATANGANA- BALEANU KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ YARDIMIYLA İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER	
Bölümler	Turnitin Sonucu	En Yüksek Değer
Giriş	%0	% 25
Kuramsal Temeller/Kavramsal Çerçeve	%30	% 30
Materyal ve Yöntem	%4	% 30
Araştırma Bulguları	%19	% 20
Sonuç/Tartışma/Öneri	%0	% 20
TEZ (GENEL)	%24	% 25

30.07.2025

Yukarıda bilgileri yazılı tez çalışmasının benzerlik oranları Turnitin raporundan alındığı haliyle yazılmış olup tüm bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Şadiye İZCİ

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

HAZIRLAYAN	KONTROL EDEN	ONAYLAYAN
------------	--------------	-----------

İçindekiler

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1. Genel Kavramlar.....	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM	7
3.1. Atangana-Baleanu İntegral Operatörleri Yardımıyla Konveks Fonksiyonlarla İlgili Genel Kavramlar	7
3.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler	17
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	19
4.1. Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla m- ve (h,m)-konveks fonksiyonlar yeni eşitsizlikler	19
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	38
Kaynakça	39
ÖZGEÇMİŞ	41

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERANSİYELLENEBİLEN BAZI FARKLI TÜRDE KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN ATANGANA-BALEANU KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ YARDIMIYLA İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Jüri: Doç. Dr. Abdullah ÇAĞMAN

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN

Bu tez çalışmasında, kesirli analizin önemli kavramlarından biri olan Atangana-Baleanu kesirli integral operatörler yardımıyla diferansiyellenebilen bazı farklı türden konveks fonksiyon türleri için yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Çalışmanın Birinci bölümünde eşitsizlik teori ve konveks analiz hakkında genel bilgilendirmeye yer verilmiştir. İkinci bölüm olan Kuramsal Temeller kısmında, eşitsizlik teori ve konveks analizin temel kavramları tanıtılmış olup kesirli analizde iyi bilinen bazı integral operatörlerin tanımlarına yer verilmiştir. Çalışmanın Üçüncü bölümü olan materyal ve yöntem kısmında literatürde yer alan bazı integral eşitsizliklere değinilmiştir. Ayrıca yeni integral eşitsizlikleri elde etmek amacıyla kullanılacak olan bazı klasik eşitsizlikler ile integral özdeşlikler sunulmuştur. Araştırma bulgularını içeren Dördüncü bölümde ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörler içeren bazı yeni integral eşitsizlikler ve ispatlarına yer verilmiştir. Çalışmanın son bölümünde ise sonuçların genel bir değerlendirmesi yapılmıştır.

2025, 42 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kesirli integral operatörler, integral eşitsizlikler, konveks fonksiyon, m -konveks fonksiyon, (h, m) -konveks fonksiyon.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

INTEGRAL INEQUALITIES FOR SOME DIFFERENT KINDS OF DIFFERENTIABLE CONVEX FUNCTIONS BY USING ATANGANA-BALEANU FRACTIONAL INTEGRAL OPERATOR

Jury: Assoc. Prof. Dr. Abdullah ÇAĞMAN

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Assist. Prof. Dr. Ebru KARADUMAN

In this thesis, new integral inequalities are obtained for some different types of differentiable convex functions using the Atangana-Baleanu fractional integral operators, one of the important concepts of fractional calculus. The first section of the study provides general information about inequality theory and convex analysis. The second section, "Theoretical Foundations," introduces the basic concepts of inequality theory and convex analysis, and provides definitions of some well-known integral operators in fractional calculus. The third section, "Materials and Methods," addresses some integral inequalities found in the literature. Furthermore, some classical inequalities and integral identities used to obtain new integral inequalities are presented. The fourth section, which includes the research findings, includes some new integral inequalities involving the Atangana-Baleanu fractional integral operators and their proofs. The final section provides a general evaluation of the results.

2025, 42 pages

Key Words: Fractional integral operators, integral inequalities, convex function, m -convex function, (h, m) -convex function.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum bu çalışma Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Yüksek Lisans tez çalışmamın başlangıcından bu yana, bu alanda çalışmamı destekleyen, bütün enerjisi ve engin birikimiyle beni motive eden, çalışmalarımda eşsiz katkıları bulunan, bana bilimsel çalışma ve düşünme yeteneğini aşılayan saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Prof. Dr. Ahmet Ocak Akdemir’e;

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca; yüksek lisans eğitimim süresince yardımlarını ve desteğini esirgemeyen, Matematik Anabilim Dalı öğretim üyelerine şükranlarımı sunarım.

Eğitim-Öğretim hayatım boyunca üzerimde emeği olan tüm öğretmenlerime teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca sabırla, güvenle ve sevgiyle hep yanımda olan desteklerini hiç eksik etmeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ağustos 2025

Şadiye İZCİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif Reel Sayılar Kümesi
I	: $\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
I°	: I 'nın İçi
$L_1[a, b]$	: $[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	: f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$J^\alpha \Upsilon(x_2)$	: Υ fonksiyonunun α mertebeden Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri
${}_{x_1}^{AB} I_{x_2}^\xi \Upsilon(x_2)$	: Υ fonksiyonunun ξ mertebeden Atangana-Baleanu kesirli integrali
$K_m(b)$	: m -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^\alpha(b)$	: (α, m) -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$SX(h, I)$	: h -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$SV(h, I)$	: h -Konkav Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	: İkinci Anlamda s -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^4	: Dördüncü Anlamda s -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$Q(I)$	: Godunova-Levin Fonksiyonu
$P(I)$	: P -Fonksiyon
$L(I)$	: $\log$ -Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$C(I)$	: Konveks Fonksiyonlar Sınıfı

1. GİRİŞ

Konvekslik kavramı, matematiksel analizde ve optimizasyonda temel bir rol oynamaktadır. Klasik anlamda bir fonksiyonun konveksliği, geometrik olarak grafiklerinin teğetlerinin altında kalması ve analitik olarak tanım aralığındaki iki nokta arasındaki doğrusal interpolasyonun fonksiyonun değerinden büyük veya eşit olması şeklinde tanımlanır. Bu temel tanım zamanla daha genel konvekslik türlerine evrilmiş ve bu doğrultuda m -konveks ve $(h - m)$ -konveks fonksiyon kavramları literatürde önemli yer edinmiştir. Bu tür fonksiyonlar, birçok integral eşitsizliği ve optimizasyon probleminde kullanılmakta ve klasik konveks fonksiyonların ötesinde daha esnek bir yapı sunmaktadır.

Özellikle son yıllarda klasik integral ve türev tanımlarının yerine geçen kesirli analiz yaklaşımları ile konveks fonksiyonlara ilişkin daha güçlü ve kapsamlı eşitsizlikler elde edilmeye başlanmıştır. Bu bağlamda, Atangana–Baleanu kesirli integral operatörü, nonlocal ve non-singular çekirdek yapısıyla, klasik Riemann–Liouville ve Caputo türü kesirli operatörlerin eksikliklerini gidermekte ve daha genel problemlerin çözümüne olanak tanımaktadır (Atangana and Baleanu (2016)). Atangana–Baleanu operatörünün temel özelliği, çekirdek fonksiyonu olarak Mittag-Leffler fonksiyonunu kullanmasıdır; bu da hem analitik hem de sayısal çözümleme açısından avantaj sağlamaktadır (Podlubny (1998)).

Bu tez çalışmasında, Atangana–Baleanu kesirli integral operatörü çerçevesinde, klasik konvekslik genellemeleri olan m -konveks ve $(h - m)$ -konveks fonksiyonlar için yeni türden integral eşitsizlikleri elde edilmektedir (Özdemir et al. (2016)). Bu eşitsizlikler, hem mevcut literatüre katkı sunmakta hem de kesirli analiz temelli konvekslik çalışmaları için yeni uygulama alanları oluşturmaktadır.

Çalışmanın motivasyonu, konveks fonksiyon sınıflarına ilişkin Hadamard, Hermite-Hadamard ve diğer klasik eşitsizliklerin, kesirli integral operatörleri yardımıyla daha geniş sınıflar altında yeniden ifade edilmesidir. Bu bağlamda, literatürde Toader, Dragomir, Hudzik ve Miheşan gibi araştırmacıların katkılarıyla geliştirilen konveks fonksiyon genellemeleri Miheşan (1993); Hudzik and Maligranda (1994) bu çalışmanın teorik altyapısını oluşturmaktadır.

Bu tezde, öncelikle temel tanımlar ve ilgili ön bilgiler verilecek; ardından Atangana–Baleanu integral operatörü ile m -konveks ve $(h - m)$ -konveks fonksiyonlar için elde edilen

yeni eşitsizlikler ayrıntılı olarak sunulacaktır. Son bölümde ise bu eşitsizliklerin bazı özel durumları, klasik eşitsizliklerle karşılaştırmaları ve örnek uygulamaları ele alınacaktır.

Bu çalışmanın, hem kesirli analiz alanına hem de konvekslik teorisine katkı sunacağı ve gelecekteki araştırmalara yön göstereceği düşünülmektedir.



2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde, tez çalışmasının temel taşı olan bazı kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1 (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi elemanlar olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

oluyorsa A kümesine konveks küme denir. (Pečarić and Tong, 1992)

Eşitsizlik teorisi için büyük önem taşıyan ve özellikle bu alanda sıklıkla kullanılan konvekslik kavramından birçok bilim adamı büyük ölçüde yararlanmaktadır. Konveks fonksiyonların tanımını aşağıdaki gibi verilmektedir:

Tanım 2.2 (Konveks fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $\mu_1, \mu_2 \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2) \leq \lambda f(\mu_1) + (1 - \lambda)f(\mu_2)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Pečarić and Tong, 1992).

I üzerinde tanımlanan bir f fonksiyonunun konveks olması demek geometrik olarak $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f 'nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır.

Tanım 2.3 (Birinci anlamda s -konveks fonksiyon): $\alpha, \beta \geq 0, \alpha^s + \beta^s = 1$ ve $s \in (0, 1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye birinci anlamda s -konveks fonksiyon denir.

Bu fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir (Hudzik and Maligranda, 1994).

Tanım 2.4 (İkinci anlamda s -konveks fonksiyon): $t \in [0, 1]$ ve $s \in (0, 1]$ olmak üzere tüm $x, y \in [0, \infty)$ için $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y).$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye ikinci anlamda s -konveks fonksiyon denir (Breckner, 1978). Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir.

Tanım 2.5 (Dördüncü anlamda s -konveks fonksiyon): $U \subseteq \mathbb{R}^n$ bir konveks küme ve $s \in (0, 1]$ olmak üzere tüm $x, y \in U$ ve $t \in [0, 1]$ için $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^{\frac{1}{s}} f(x) + (1-t)^{\frac{1}{s}} f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye dördüncü anlamda s -konveks fonksiyon denir (Eken, 2022). Bu fonksiyonların sınıfı K_s^4 ile gösterilir.

Tanım 2.6 (m -Konveks Fonksiyon): $m \in [0, 1]$, $b > 0$ olmak üzere $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer her $x, y \in [0, b]$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y).$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna m -konveks fonksiyon denir (Toader, 1985). f fonksiyonu m -konveks ise $-f$ m -konkav fonksiyondur.

Tanım 2.7 ($Q(I)$ Sınıfı Fonksiyon): $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $\lambda \in (0, 1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliği sağlıyorsa $Q(I)$ sınıfına ait olduğu söylenir Godunova and Levin (1985).

Tanım 2.8 ($P(I)$ Sınıfı Fonksiyon): $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye P fonksiyonudur veya $P(I)$ sınıfına aittir (Dragomir et al. (1995)).

Tanım 2.9 (h -Konveks Fonksiyon): $h : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in (0, 1)$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y).$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye h -konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir Varošanec (2007).

Eşitsizlik tersine çevrilirse f 'ye h -konkav denir, yani $f \in SV(h, I)$. Açıkçası $h(t) = t$ ise o zaman negatif olmayan tüm konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ ' ye aittir ve negatif olmayan tüm konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ ' ye aittir; eğer $h(t) = \frac{1}{t}$ ise $SX(h, I) = Q(I)$; $h(t) = 1$, $SX(h, I) \supseteq P(I)$; ve $h(t) = t^s$ ise burada $s \in (0, 1)$ o zaman $SX(h, I) \supseteq K_s^2$.

Tanım 2.10 ((h, m) -Konveks Fonksiyon): $h : J \supseteq R \rightarrow R$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $f : [0, b] \rightarrow R$ negatif olmayan fonksiyonu her $x, y \in [0, b]$, $m \in [0, 1]$ ve $\alpha \in (0, 1)$ için

$$f(\alpha x + m(1 - \alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + mh(1 - \alpha)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f(h, m)$ -konveks fonksiyondur (Özdemir et al., 2017).

Eşitsizlik tersine çevrilirse $[0, b]$ da f 'ye (h, m) -konkav fonksiyon denir. Açıkçası, $m = 1$ seçilirse, o zaman h -konveks fonksiyonlar elde edilir. $h(\alpha) = \alpha$ seçilirse, o zaman negatif olmayan m -konveks fonksiyonlar elde edilir. $m = 1$ ve $h(\alpha) = \{\alpha, 1, \frac{1}{\alpha}, \alpha^s\}$ seçilirse, o zaman sırasıyla şu fonksiyon sınıfları elde edilir: negatif olmayan konveks fonksiyonlar, P -fonksiyonlar, Godunova-Levin fonksiyonlar ve ikinci anlamda s -konveks fonksiyonlar.

Tanım 2.11 (Riemann-Liouville Kesirli Mertebeden İntegral): $f \in L_1[\nu_1, \nu_2]$ olsun. $\nu_1 \geq 0$ iken $\alpha > 0$ için Riemann-Liouville kesirli mertebeden integrali aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} J_{\nu_1^+}^\alpha f(u_1) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\nu_1}^{u_1} (u_1 - \gamma)^{\alpha-1} f(\gamma) d\gamma, & u_1 > \nu_1, \\ J_{\nu_2^-}^\alpha f(u_1) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{u_1}^{\nu_2} (\gamma - u_1)^{\alpha-1} f(\gamma) d\gamma, & \nu_2 > u_1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

Burada, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\gamma} \gamma^{\alpha-1} d\gamma$ şeklinde tanımlı Gamma fonksiyonu ve $J_{\mu_1^+}^0 f(u_1) = J_{\mu_2^-}^0 f(u_1) = f(u_1)$ eşitliği sağlanır (Miller and Ross, 1993).

Tanım 2.12 (Euler Gamma Fonksiyonu): $x > 0$ için Euler Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

şeklinde tanımlanır. $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ dir (Miller and Ross, 1993).

Tanım 2.13 (Atangana-Baleanu Kesirli İntegral): $\Upsilon \in H^1(x_1, x_2)$ fonksiyonu için yerel olmayan çekirdeği ile yeni kesirli integral şu şekilde tanımlanır:

$${}^{AB}I_{x_1}^\alpha \{\Upsilon(t)\} = \frac{1 - \alpha}{B(\alpha)} \Upsilon(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^t \Upsilon(u)(t - u)^{\alpha-1} du$$

(Atangana and Baleanu, 2016).

Burada $x_2 > x_1, \alpha \in [0, 1], B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur.

İntegral operatörünün sağ tarafı ise şu şekilde tanımlanmıştır.

$$({}^{AB}I_{x_2}^\alpha) \{\Upsilon(t)\} = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} \Upsilon(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_t^{x_2} \Upsilon(u)(t-u)^{\alpha-1} du$$

(Abdeljawad and Baleanu, 2017).

Tanım 2.14 (Beta fonksiyonu): $Re(x) > 0, Re(y) > 0$ için,

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon beta fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu integral $x > 0$ ve $y > 0$ için yakınsaktır (Miller and Ross, 1993).

Tanım 2.15 (Tam Olmayan Beta Fonksiyonu): $0 \leq x < 1$ olmak üzere tam olmayan beta fonksiyonu,

$$B_x(v, \mu) = \int_0^x t^{v-1}(1-t)^{\mu-1} dt$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, $B_x(\mu, v)$ ve $B_{1-x}(v, \mu)$ fonksiyonları birlikte ele alındığında

$$B_x(\mu, v) + B_{1-x}(v, \mu) = \int_0^x t^{\mu-1}(1-t)^{v-1} dt + \int_0^{1-x} t^{v-1}(1-t)^{\mu-1} dt$$

$$= \int_0^x t^{\mu-1}(1-t)^{v-1} dt + \int_x^1 u^{\mu-1}(1-u)^{v-1} du$$

$$B_x(\mu, v) + B_{1-x}(v, \mu) = \int_0^1 t^{\mu-1}(1-t)^{v-1} dt = B(v, \mu)$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitlik, tam olmayan beta fonksiyonu ile beta fonksiyonu arasındaki ilişkiyi verir (Miller and Ross, 1993).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Atangana-Baleanu İntegral Operatörleri Yardımıyla Konveks Fonksiyonlarla İlgili Genel Kavramlar

Teorem 3.1 $\Upsilon : [0, \infty) \rightarrow R$ bir m -konveks fonksiyon olsun ve $0 \leq x_1 < \frac{x_2}{m}$, $m \in (0, 1]$ olarak verilsin. Eğer $\Upsilon \in L[x_1, \frac{x_2}{m}]$ ise

$$\frac{1}{(x_2 - x_1)^\xi} ({}^{AB}I_{x_2}^\xi \Upsilon(x_2)) \leq \frac{\xi}{B(\xi)\Gamma(\xi)} \left[\frac{\Upsilon(x_1)}{\xi + 1} + \frac{m\Upsilon(\frac{x_2}{m})}{\xi(\xi + 1)} \right] + \frac{1 - \xi}{(x_2 - x_1)^\xi B(\xi)} \Upsilon(x_2) \quad (3.1)$$

ve

$$\frac{1}{(x_2 - x_1)^\xi} ({}^{AB}I_{x_2}^\xi \Upsilon(x_1)) \leq \frac{\xi}{B(\xi)\Gamma(\xi)} \left[\frac{\Upsilon(x_2)}{\xi + 1} + \frac{m\Upsilon(\frac{x_1}{m})}{\xi(\xi + 1)} \right] + \frac{1 - \xi}{(x_2 - x_1)^\xi B(\xi)} \Upsilon(x_1). \quad (3.2)$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Ardic et al., 2023).

Teorem 3.2 $\Upsilon : [0, \infty) \rightarrow R$ bir m -konveks fonksiyon olsun ve $0 \leq x_1 < x_2$, $\xi, m \in (0, 1]$ olarak verilsin. Eğer $\Upsilon \in L[mx_1, x_2]$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(mx_2 - x_1)^\xi} [{}^{AB}I_{mx_2}^\xi \{\Upsilon(mx_2)\} + {}^{AB}I_{mx_2}^\xi \{\Upsilon(x_1)\}] \\ & + \frac{1}{(x_2 - mx_1)^\xi} [{}^{AB}I_{x_2}^\xi \{\Upsilon(mx_1)\} + {}^{AB}I_{x_2}^\xi \{\Upsilon(x_2)\}] \\ & \leq \frac{m + 1}{B(\xi)\Gamma(\xi)} (\Upsilon(x_1) + \Upsilon(x_2)) + \frac{1 - \xi}{(mx_2 - x_1)^\xi B(\xi)} (\Upsilon(x_1) + \Upsilon(mx_2)) \\ & + \frac{1 - \xi}{(x_2 - mx_1)^\xi B(\xi)} (\Upsilon(mx_1) + \Upsilon(x_2)). \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ardic et al., 2023).

Teorem 3.3 $\Upsilon : [0, \infty) \rightarrow R$ bir m -konveks fonksiyon olsun ve $0 \leq x_1 < \frac{x_2}{m}$, $m \in (0, 1]$ olarak verilsin. Eğer $\Upsilon \in L[x_1, \frac{x_2}{m}]$ ise

$$\begin{aligned}
& \frac{\Upsilon\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{B(\xi)\Gamma(\xi)} + \frac{1-\xi}{2(x_2-x_1)^\xi B(\xi)} \Upsilon(x_2) + \frac{m^{\xi+1}(1-\xi)}{2(x_2-x_1)^\xi B(\xi)} \Upsilon\left(\frac{x_1}{m}\right) \\
& \leq \frac{1}{2(x_2-x_1)^\xi} \left[{}^{AB}I_{x_1}^\xi \{ \Upsilon(x_2) \} + m^{(\xi+1)} {}^{AB}I_{\frac{x_2}{m}}^\xi \left\{ \Upsilon\left(\frac{x_1}{m}\right) \right\} \right] \\
& \leq \frac{\xi}{2B(\xi)\Gamma(\xi)} \left[\frac{\Upsilon(x_1) + m^2 \Upsilon\left(\frac{x_2}{m^2}\right)}{\xi+1} + \frac{m \left(\Upsilon\left(\frac{x_2}{m}\right) + \Upsilon\left(\frac{x_1}{m}\right) \right)}{\xi(\xi+1)} \right] \\
& \quad + \frac{1-\xi}{2(x_2-x_1)^\xi B(\xi)} \Upsilon(x_2) + \frac{m^{\xi+1}(1-\xi) \Upsilon\left(\frac{x_1}{m}\right)}{2(x_2-x_1)^\xi B(\xi)}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ardic et al., 2023).

Teorem 3.4 $\Upsilon : [0, \infty) \rightarrow R$ bir m -konveks fonksiyon olsun ve $0 \leq x_1 < \frac{x_2}{m}$, $m \in (0, 1]$ olarak verilsin. Eğer $\Upsilon \in L[x_1, \frac{x_2}{m}]$ ise $\Psi(w_1, w_2)_{(\tau)} : [0, 1] \rightarrow R$,

$$\Psi(w_1, w_2)_{(\tau)} = \frac{1}{2} [\Upsilon(\tau w_1 + m(1-\tau)w_2) + \Upsilon((1-\tau)w_1 + m\tau w_2)].$$

her $\tau \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{\xi}{B(\xi)\Gamma(\xi)(x_2-x_1)^\xi} \int_{x_1}^{x_2} (x_2-y)^{\xi-1} \Psi\left(y, \frac{x_1+x_2}{2}\right)_{\left(\frac{x_2-y}{x_2-x_1}\right)} dy \\
& \leq \frac{1}{2(x_2-x_1)^\xi} \left({}^{AB}I_{x_1}^\xi \{ \Upsilon(x_2) \} \right) + \frac{m}{2B(\xi)\Gamma(\xi)} \Upsilon\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{1-\xi}{2(x_2-x_1)^\xi B(\xi)} \Upsilon(x_2).
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ardic et al., 2023).

Teorem 3.5 $\Upsilon \Omega \in L[x_1, x_2]$ olacak şekilde fonksiyonlar olsun ve $0 \leq x_1 < x_2$ ve olarak verilsin. Eğer Υ ve Ω sırasıyla $[x_1, x_2]$ üzerinde $m_1, m_2 \in (0, 1]$ ile m_1 -konveks ve

m_2 -konveks ise

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x_2 - x_1)^\xi} ({}^{AB}I_{x_2}^\xi \{(\Upsilon\Omega)(x_2)\}) &\leq \frac{\xi}{B(\xi)\Gamma(\xi)} \left[\frac{\Upsilon(x_1)\Omega(x_1)}{\xi + 2} \right. \\ &+ \left(m_2\Upsilon(x_1)\Omega\left(\frac{x_2}{m_2}\right) + m_1\Omega(x_1)\Upsilon\left(\frac{x_2}{m_1}\right) \right) \frac{1}{(\xi + 1)(\xi + 2)} \Big] \\ &+ \frac{2m_1m_2}{B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)(\xi + 2)} \Upsilon\left(\frac{x_2}{m_1}\right) \Omega\left(\frac{x_2}{m_2}\right) + \frac{1 - \xi}{(x_2 - x_1)^\xi B(\xi)} (\Upsilon\Omega)(x_2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x_2 - x_1)^\xi} ({}^{AB}I_{x_2}^\xi \{(\Upsilon\Omega)(x_1)\}) &\leq \frac{\xi}{B(\xi)\Gamma(\xi)} \left[\frac{\Upsilon(x_2)\Omega(x_2)}{\xi + 2} \right. \\ &+ \left(m_2\Upsilon(x_2)\Omega\left(\frac{x_1}{m_2}\right) + m_1\Omega(x_2)\Upsilon\left(\frac{x_1}{m_1}\right) \right) \frac{1}{(\xi + 1)(\xi + 2)} \Big] \\ &+ \frac{2m_1m_2}{B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)(\xi + 2)} \Upsilon\left(\frac{x_1}{m_1}\right) \Omega\left(\frac{x_1}{m_2}\right) + \frac{1 - \xi}{(x_2 - x_1)^\xi B(\xi)} (\Upsilon\Omega)(x_1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

eşitsizlikleri geçerlidir ve burada $\xi \in (0, 1]$ dir (Ardic et al., 2023).

Sonuç 3.1 Teorem 3.5' de $m_1 = m_2 = 1$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x_2 - x_1)^\xi} ({}^AB_{x_1}I_{x_2}^\xi \{(\Upsilon\Omega)(x_2)\}) &\leq \frac{\xi}{B(\xi)\Gamma(\xi)} \left[\frac{\Upsilon(x_1)\Omega(x_1)}{\xi + 2} \right. \\ &+ \left(\Upsilon(x_1)\Omega(x_2) + \Omega(x_1)\Upsilon(x_2) \right) \frac{1}{(\xi + 1)(\xi + 2)} \Big] \\ &+ \frac{2}{B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)(\xi + 2)} \Upsilon(x_2)\Omega(x_2) + \frac{1 - \xi}{(x_2 - x_1)^\xi B(\xi)} (\Upsilon\Omega)(x_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x_2 - x_1)^\xi} ({}^ABI_{x_2}^\xi \{(\Upsilon\Omega)(x_1)\}) &\leq \frac{\xi}{B(\xi)\Gamma(\xi)} \left[\frac{\Upsilon(x_2)\Omega(x_2)}{\xi + 2} \right. \\ &+ \left(\Upsilon(x_2)\Omega(x_1) + \Omega(x_2)\Upsilon(x_1) \right) \frac{1}{(\xi + 1)(\xi + 2)} \Big] \\ &+ \frac{2}{B(\xi)\Gamma(\xi)(\xi + 1)(\xi + 2)} \Upsilon(x_1)\Omega(x_1) + \frac{1 - \xi}{(x_2 - x_1)^\xi B(\xi)} (\Upsilon\Omega)(x_1) \end{aligned}$$

Burada Υ ve Ω $[0, \infty)$ aralığında konveks fonksiyondur (Ardic et al., 2023).

Lemma 3.1 (*AB-İntegralleri ile Orta Değer Farkını İfade Eden İntegral Özdeşliği (Türev ile İlişki)*) $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in J^\circ$ ve $\Upsilon : J \subset R \rightarrow R, J^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\Upsilon' \in L[x_1, mx_2]$ ise Atangana-Baleanu İntegral operatörleri için her $\tau, \xi \in [0, 1]$ ve $m \in (0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{AB}{\frac{x_1+mx_2}{2}} I_{mx_2}^\xi \{ \Upsilon(mx_2) \} + {}^{AB} I_{\frac{x_1+mx_2}{2}}^\xi \{ \Upsilon(x_1) \} \\ & - \frac{(mx_2 - x_1)^\xi}{2^{\xi-1} B(\xi) \Gamma(\xi)} \Upsilon \left(\frac{x_1 + mx_2}{2} \right) - \frac{1 - \xi}{B(\xi)} [\Upsilon(x_1) + \Upsilon(mx_2)] \\ & = \frac{(mx_2 - x_1)^{\xi+1}}{B(\xi) \Gamma(\xi)} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \tau^\xi \Upsilon'(\tau x_1 + m(1 - \tau)x_2) d\tau \right. \\ & \quad \left. - \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - \tau)^\xi \Upsilon'(\tau x_1 + m(1 - \tau)x_2) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Ardic et al., 2023).

Teorem 3.6 $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in J^\circ$ ve $\Upsilon : J \subset [0, \infty) \rightarrow R$ ve J° ve $\Upsilon' \in L[x_1, mx_2]$ üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|\Upsilon'|$ $[x_1, x_2]$ üzerinde bir m -konveks fonksiyon ise tüm $\xi \in [0, 1]$ ve $m \in (0, 1]$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{AB}{\frac{x_1+mx_2}{2}} I_{mx_2}^\xi \{ \Upsilon(mx_2) \} + {}^{AB} I_{\frac{x_1+mx_2}{2}}^\xi \{ \Upsilon(x_1) \} \right. \\ & \quad \left. - \frac{(mx_2 - x_1)^\xi}{2^{\xi-1} B(\xi) \Gamma(\xi)} \Upsilon \left(\frac{x_1 + mx_2}{2} \right) - \frac{1 - \xi}{B(\xi)} [\Upsilon(x_1) + \Upsilon(mx_2)] \right| \\ & \leq \frac{(mx_2 - x_1)^{\xi+1}}{B(\xi) \Gamma(\xi)} \left(\frac{1}{2^{\xi+1}(\xi + 1)} \right) (|\Upsilon'(x_1)| + m|\Upsilon'(x_2)|). \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir (Ardic et al., 2023).

Teorem 3.7 $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in J^\circ$ ve $\Upsilon : J \subset [0, \infty) \rightarrow R$ ve J° ve $\Upsilon' \in L[x_1, mx_2]$ üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|\Upsilon'|^q, [x_1, x_2]$ üzerinde bir m -konveks

fonksiyon ise $\xi \in [0, 1]$ ve $m \in (0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{AB} I_{\frac{x_1+mx_2}{2}}^{\xi} \{\Upsilon(mx_2)\} + {}^{AB} I_{\frac{x_1+mx_2}{2}}^{\xi} \{\Upsilon(x_1)\} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(mx_2 - x_1)^{\xi}}{2^{\xi-1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \Upsilon\left(\frac{x_1 + mx_2}{2}\right) - \frac{1-\xi}{B(\xi)} [\Upsilon(x_1) + \Upsilon(mx_2)] \right| \\
& \leq \frac{(mx_2 - x_1)^{\xi+1}}{B(\xi)\Gamma(\xi)} \left(\frac{1}{2^{\xi+1}(\xi+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left\{ \left(\frac{1}{2^{\xi+2}(\xi+2)} |\Upsilon'(x_1)|^q + \frac{m(\xi+3)}{2^{\xi+2}(\xi+1)(\xi+2)} |\Upsilon'(x_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{(\xi+3)}{2^{\xi+2}(\xi+1)(\xi+2)} |\Upsilon'(x_1)|^q + \frac{m}{2^{\xi+2}(\xi+2)} |\Upsilon'(x_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir (Ardic et al., 2023).

Teorem 3.8 Teorem 3.7 de verilen varsayımlar geçerli olmak üzere bu takdirde

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{AB} I_{\frac{x_1+mx_2}{2}}^{\xi} \{\Upsilon(mx_2)\} + {}^{AB} I_{\frac{x_1+mx_2}{2}}^{\xi} \{\Upsilon(x_1)\} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(mx_2 - x_1)^{\xi}}{2^{\xi-1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \Upsilon\left(\frac{x_1 + mx_2}{2}\right) - \frac{1-\xi}{B(\xi)} [\Upsilon(x_1) + \Upsilon(mx_2)] \right| \\
& \leq \frac{(mx_2 - x_1)^{\xi+1}}{B(\xi)\Gamma(\xi)} \left(\frac{1}{2^{\xi p+1}(\xi p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{|\Upsilon'(x_1)|^q + 3m|\Upsilon'(x_2)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|\Upsilon'(x_1)|^q + m|\Upsilon'(x_2)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right].
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ardic et al., 2023).

Teorem 3.9 *Teorem 3.7 de verilen varsayımlar geçerli olmak üzere bu takdirde*

$$\begin{aligned}
& \left| \overset{AB}{I_{\frac{x_1+m x_2}{2}}^\xi} \{ \Upsilon(m x_2) \} + \overset{AB}{I_{\frac{x_1+m x_2}{2}}^\xi} \{ \Upsilon(x_1) \} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(m x_2 - x_1)^\xi}{2^{\xi-1} B(\xi) \Gamma(\xi)} \Upsilon\left(\frac{x_1 + m x_2}{2}\right) - \frac{1-\xi}{B(\xi)} [\Upsilon(x_1) + \Upsilon(m x_2)] \right| \\
& \leq \frac{(m x_2 - x_1)^{\xi+1}}{B(\xi) \Gamma(\xi)} \left(\frac{q-1}{2^{\xi(\frac{q-p}{q-1})+1} (\xi(q-p) + q-1)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left\{ \left(\frac{1}{2^{\xi p+2} (\xi p+2)} |\Upsilon'(x_1)|^q + \frac{m(\xi p+3)}{2^{\xi p+2} (\xi p+1)(\xi p+2)} |\Upsilon'(x_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{(\xi p+3)}{2^{\xi p+2} (\xi p+1)(\xi p+2)} |\Upsilon'(x_1)|^q + \frac{m}{2^{\xi p+2} (\xi p+2)} |\Upsilon'(x_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $q \geq p > 1$ dir (Ardic et al., 2023).

Teorem 3.10 $f : [0, \infty) \rightarrow R$ aralığında m -konveks fonksiyon ve $m \in (0, \infty]$ olsun.

Eğer $0 \leq a < b < \infty$ ve $f \in L_1[a, b]$ ise bu durumda

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \min \left\{ \frac{f(a) + m f(\frac{b}{m})}{2}, \frac{f(b) + m f(\frac{a}{m})}{2} \right\}. \quad (3.6)$$

eşitsizliği geçerlidir (Toader, 1993).

Teorem 3.11 $f : [0, \infty) \rightarrow R$ aralığında m -konveks fonksiyon ve $m \in (0, 1]$ olsun. Eğer

$0 \leq a < b < \infty$ ve $f \in L_1[a, b]$ ise

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) & \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{f(x) + m f(\frac{x}{m})}{2} dx \\
& \leq \frac{m+1}{4} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + m \frac{f(\frac{a}{m}) + f(\frac{b}{m})}{2} \right].
\end{aligned} \quad (3.7)$$

eşitsizliği geçerlidir (Dragomir, 2002).

Teorem 3.12 $f : [0, \infty) \rightarrow R$ aralığında m -konveks fonksiyon ve $m \in (0, 1]$ olsun. Eğer

$f \in L_1[am, b]$ ve $0 \leq a < b < \infty$ ise bu durumda

$$\frac{1}{m+1} \left[\int_a^{mb} f(x) dx + \frac{mb-a}{b-ma} \int_{ma}^b f(x) dx \right] \leq (mb-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}. \quad (3.8)$$

eşitsizliği geçerlidir (Dragomir, 2002).

Teorem 3.13 $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ aralığında ikinci anlamda bir s -konveks fonksiyon ve $s \in (0, 1]$, $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$ olsun. Eğer $f \in L_1[0, 1]$ ise

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1}. \quad (3.9)$$

eşitsizliği geçerlidir.

$k = \frac{1}{s+1}$ ikinci eşitsizlikte mümkün olan en iyi katsayıdır. Yukarıdaki eşitsizlikler kesindir (Dragomir and Fitzpatrick, 1999).

Teorem 3.14 $f \in Q(I)$, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. O halde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{4}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

eşitsizliği geçerlidir (Dragomir et al., 1995).

Teorem 3.15 $f \in P(I)$, $a, b \in I$ ve $a < b$ ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. O halde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq 2[f(a) + f(b)] \quad (3.10)$$

eşitsizliği geçerlidir (Dragomir et al., 1995).

Teorem 3.16 $f \in SX(h, I)$, $a, b \in I$ ve $a < b$ ve $f \in L_1([a, b])$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 h(\alpha)d\alpha \quad (3.11)$$

eşitsizliği geçerlidir (Sarıkaya et al., 2008).

Teorem 3.17 $f : [0, \infty) \rightarrow R$, $m \in (0, 1]$, $t \in [0, 1]$ ile $(h - m)$ -konveks fonksiyon olsun.

$0 \leq a < b < \infty$ ve $f \in L_1[a, b]$ ise

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \min \left\{ f(a) \int_0^1 h(t)dt + mf\left(\frac{b}{m}\right) \int_0^1 h(1-t)dt, \right. \quad (3.12)$$

$$\left. f(b) \int_0^1 h(t)dt + mf\left(\frac{a}{m}\right) \int_0^1 h(1-t)dt \right\}.$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir et al., 2016).

Sonuç 3.2 (3.12)'da $h(t) = 1$ olarak seçilirse

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \min \left\{ f(a) + mf\left(\frac{b}{m}\right), f(b) + mf\left(\frac{a}{m}\right) \right\}.$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir et al., 2016).

Sonuç 3.3 (3.12)' da $m = 1$ olarak seçilirse

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \min \left\{ f(a) \int_0^1 h(t)dt + f(b) \int_0^1 h(1-t)dt, \right. \\ \left. f(b) \int_0^1 h(t)dt + f(a) \int_0^1 h(1-t)dt \right\}.$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir et al., 2016).

Not 3.1 (3.12)' da $m = 1$ ve $h(t) = t$ olarak seçilirse Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. (3.12) de $m = 1$ ve $h(t) = 1$ seçilirse (3.10) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. (3.12) de $m = 1$ ve $h(t) = t^s$ seçilirse (3.9) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir (Özdemir et al., 2016).

Teorem 3.18 $f : [0, \infty) \rightarrow R$, $m \in (0, 1]$, $t \in [0, 1]$ ile $(h - m)$ -konveks fonksiyon olsun. $0 \leq a < b < \infty$ ve $f \in L_1[a, b]$ ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{b-a} \int_a^b \left[f(x) + mf\left(\frac{x}{m}\right) \right] dx \\ \leq h\left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{f(a) + mf\left(\frac{b}{m}\right) + mf\left(\frac{a}{m}\right) + m^2 f\left(\frac{b}{m^2}\right)}{2} \right] \int_0^1 h(t)dt \quad (3.13)$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir et al., 2016).

Sonuç 3.4 (3.13)' te $h(t) = 1$ seçilirse

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[f(x) + mf\left(\frac{x}{m}\right) \right] dx \\ \leq \left[\frac{f(a) + mf\left(\frac{b}{m}\right) + mf\left(\frac{a}{m}\right) + m^2 f\left(\frac{b}{m^2}\right)}{2} \right].$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir et al., 2016).

Sonuç 3.5 (3.13)' te $m = 1$ ve $h(t) = t^s$ seçilirse

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \lim f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2(s+1)}$$

eşitsizliği geçerlidir Özdemir et al. (2016).

Not 3.2 (3.12)' de $m = 1$ seçilirse (3.11) eşitsizliğinin sağ tarafını elde edilir (Özdemir et al., 2016).

Not 3.3 (3.13)' de $m = 1$ ve $h(t) = t$ seçilirse Hadamard eşitsizliği elde edilir.

Not 3.4 (3.13)' de $h(t) = t$ seçilirse (3.7) eşitsizliği elde edilir (Özdemir et al., 2016).

Teorem 3.19 $f : [0, \infty) \rightarrow R$, $m \in (0, 1]$, $t \in [0, 1]$ ile $(h - m)$ -konveks fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq a < b < \infty$ ve $f \in L_1[ma, b]$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \left[\frac{1}{mb-a} \int_a^{mb} f(x)dx + \frac{1}{b-ma} \int_{ma}^b f(x)dx \right] \\ & \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \left[\int_0^1 h(t)dt + \int_0^1 h(1-t)dt \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir et al., 2016).

Sonuç 3.6 (3.14)' de $h(t) = 1$ seçilirse

$$\frac{1}{m+1} \left[\frac{1}{mb-a} \int_a^{mb} f(x)dx + \frac{1}{b-ma} \int_{ma}^b f(x)dx \right] \leq f(a) + f(b).$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir et al., 2016).

Not 3.5 (3.14)' de $m = 1$ ve $h(t) = t$ seçilirse Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. (3.14)' de $m = 1$ ve $h(t) = 1$ seçilirse (3.10) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. (3.14)' de $m = 1$ ve $h(t) = t^s$ seçilirse (3.9) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir (Özdemir et al., 2016).

Not 3.6 (3.14)' de $h(t) = t$ seçilirse (3.8) eşitsizliği elde edilir (Özdemir et al., 2016).

Teorem 3.20 (Young Eşitsizliği): $f, c > 0$ için $[0, c]$ üzerinde tanımlı gerçekteğerli, sürekli ve artan fonksiyon olsun. Eğer $f(0) = 0$, $a \in [0, c]$, ve $b \in [0, f(c)]$ için ünlü Young eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \geq ab,$$

Burada f^{-1} , f fonksiyonunun tersidir. Eğer $f(b) = f(a)$ ise eşitsizlik eşitliğe dönüşür.

f 'i kuvvet fonksiyonu olan $f(x) = x^{p-1}$ seçilirse:

$$\frac{a^p}{p} + \left(\frac{p-1}{p} \right) b^{p/p-1} \geq ab,$$

Benzer şekilde;

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab,$$

Burada $a, b \geq 0, p > 1$ ve

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

şeklindedir (Mitrinovic et al., 1993).

Teorem 3.21 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve $g, [a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q, [a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(\mu)g(\mu)|d\mu \leq \left(\int_a^b |f(\mu)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(\mu)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic et al., 1993).

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 3.7 (Power Mean Eşitsizliği): $q \leq 1$ olsun. f ve $g, [a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q, [a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(\mu)g(\mu)|d\mu \leq \left(\int_a^b |f(\mu)|d\mu \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(\mu)||g(\mu)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Reel sayılar için temel eşitsizliklerden bir tanesi de üçgen eşitsizliğidir. (Mitrinovic et al., 1993).

Teorem 3.22 (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi μ_1, μ_2 reel sayıları için

$$|\mu_1 + \mu_2| \leq |\mu_1| + |\mu_2|,$$

$$||\mu_1| - |\mu_2|| \leq |\mu_1 - \mu_2|,$$

$$||\mu_1| - |\mu_2|| \leq |\mu_1 + \mu_2|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|\mu_1 + \dots + \mu_n| \leq |\mu_1| + \dots + |\mu_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinovic et al., 1993).

Teorem 3.23 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): $f, [a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\left| \int_a^b f(\mu)d\mu \right| \leq \int_a^b |f(\mu)|d\mu \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic et al., 1993).

3.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler

Teorem 3.24 $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık, $\mu_1, \mu_2 \in I$ ve $\mu_1 < \mu_2$ olmak üzere $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$f\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \int_{\mu_1}^{\mu_2} f(z) dz \leq \frac{f(\mu_1) + f(\mu_2)}{2}$$

eşitsizliği literatürde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić and Tong, 1992).

Teorem 3.25 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $m \in (0, 1]$ olmak üzere m -konveks fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq \mu_1 < \mu_2$ ve $f \in L_1[\mu_1 m, \mu_2]$ ise bu taktirde;

$$\frac{1}{m+1} \left[\int_{\mu_1}^{m\mu_2} f(z) dz + \frac{m\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - m\mu_1} \int_{m\mu_1}^{\mu_2} f(z) dz \right] \leq (m\mu_2 - \mu_1) \frac{f(\mu_1) + f(\mu_2)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir (Dragomir, 2001).

Teorem 3.26 $f \in Q(I)$, $\mu_1, \mu_2 \in I$, $\mu_1 < \mu_2$ ve $f \in L_1[\mu_1, \mu_2]$ olsun. Bu taktirde

$$p(z) = \frac{(\mu_2 - z)(z - \mu_1)}{(\mu_2 - \mu_1)^2}, \quad z \in I$$

olmak üzere

$$f\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right) \leq \frac{4}{\mu_2 - \mu_1} \int_{\mu_1}^{\mu_2} f(z) dz$$

ve

$$\frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \int_{\mu_1}^{\mu_2} p(z) f(z) dz \leq \frac{f(\mu_1) + f(\mu_2)}{2}$$

eşitsizlikleri geçerli olur (Dragomir et al., 1995).

Teorem 3.27 $f \in P(I)$, $\mu_1, \mu_2 \in I$, $\mu_1 < \mu_2$ ve $f \in L_1[\mu_1, \mu_2]$ olsun. Bu taktirde;

$$f\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right) \leq \frac{2}{\mu_2 - \mu_1} \int_{\mu_1}^{\mu_2} f(z) dz \leq 2[f(\mu_1) + f(\mu_2)]$$

eşitsizliği geçerlidir (Dragomir et al., 1995).

Teorem 3.28 c pozitif bir sayı, $f, g \in SX(ch, I)$, $\mu_1, \mu_2 \in I$, $\mu_1 < \mu_2$ ve $fg \in L_1[\mu_1, \mu_2]$ olsun. Bu taktirde;

$$\frac{1}{2ch\left(\frac{1}{2}\right)} (fg)\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \int_{\mu_1}^{\mu_2} (fg)(z) dz \leq c[(fg)(\mu_1) + (fg)(\mu_2)] \int_0^1 h(\theta) d\theta$$

eşitsizliği geçerlidir (Sarıkaya et al., 2010).

Teorem 3.29 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $(\alpha, m) \in (0, 1]^2$ olmak üzere (α, m) -konveks fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq \mu_1 < \mu_2$ ve $f \in L_1[\mu_1 m, \mu_2]$ ise bu taktirde;

$$\frac{1}{m\mu_2 - \mu_1} \int_{\mu_1}^{m\mu_2} f(z)dz + \frac{1}{\mu_2 - m\mu_1} \int_{m\mu_1}^{\mu_2} f(z)dz \leq \frac{1}{\alpha + 1} [(1 + \alpha m)(f(\mu_1) + f(\mu_2))]$$

eşitsizliği geçerlidir (Set et al., 2012).

İkinci anlamda s -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

Teorem 3.30 $s \in (0, 1)$ olmak üzere $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ikinci anlamda s -konveks bir fonksiyon, $\mu_1, \mu_2 \in [0, \infty)$ ve $\mu_1 < \mu_2$ olsun. $f \in L_1[\mu_1, \mu_2]$ ise

$$2^{s-1} f\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \int_{\mu_1}^{\mu_2} f(z)dz \leq \frac{f(\mu_1) + f(\mu_2)}{s + 1}$$

olur.

Eşitsizliğin sağ tarafında olabilecek en iyi sabit $k = 1/(s+1)$ 'dir (Dragomir and Fitzpatrick, 1999).

Teorem 3.31 $[\mu_1, \mu_2] \subset \mathbb{R}$, $\mu_1 < \mu_2$ ve $f, g : [\mu_1, \mu_2] \rightarrow [0, \infty)$ iki konveks fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\Xi(\mu_1, \mu_2) = f(\mu_1)g(\mu_1) + f(\mu_2)g(\mu_2)$$

ve

$$\Omega(\mu_1, \mu_2) = f(\mu_1)g(\mu_2) + f(\mu_2)g(\mu_1)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \int_{\mu_1}^{\mu_2} f(z)g(z)dz \leq \frac{1}{3}\Xi(\mu_1, \mu_2) + \frac{1}{6}\Omega(\mu_1, \mu_2)$$

dir (Pachpatte, 2003).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde; literatürde tanımları mevcut Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri kullanılarak m - ve (h,m) -konveks fonksiyon sınıfları için yeni integral eşitsizlikleri üzerine çalışmalar yapılacaktır.

4.1. Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla m - ve (h,m) -konveks fonksiyonlar yeni eşitsizlikler

Teorem 4.1 $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilen m -konveks fonksiyon olsun. $\alpha > 0, m \in (0, 1]$ olmak üzere

$${}^{AB}I_b^\alpha f(u) \leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{\alpha+1} f(b) + m f\left(\frac{a}{m}\right) \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \quad (4.1)$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu $\Gamma(\alpha)$ Euler Gama fonksiyonudur.

İspat m -konveks fonksiyonların tanımı kullanılarak

$$f(tb + (1-t)a) \leq tf(b) + m(1-t)f\left(\frac{a}{m}\right)$$

yazılabilir. İfadenin her iki tarafı $\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$ çarpılırsa

$$\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} f(tb + (1-t)a) \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \left[tf(b) + m(1-t)f\left(\frac{a}{m}\right) \right]$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının t ' ye göre $[0, 1]$ integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} f(tb + (1-t)a) dt \\ & \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 t^\alpha f(b) dt + \int_0^1 m t^{\alpha-1} (1-t) f\left(\frac{a}{m}\right) dt \right] \end{aligned}$$

yazılır.

Son ifadede $tb + (1 - t)a = u$, $t = \frac{u-a}{b-a}$, $dt = \frac{du}{b-a}$ şeklinde değişken değiştirme uygulanarak

$$\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left(\frac{u-a}{b-a} \right)^{\alpha-1} \frac{f(u)}{(b-a)} du \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{\alpha+1} f(b) + mf\left(\frac{a}{m}\right) \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \right]$$

elde edilir. İfadenin her iki tarafı $(b-a)^\alpha$ çarpılırsa

$$\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^b f(u)(u-a)^{\alpha-1} du \leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{\alpha+1} f(b) + mf\left(\frac{a}{m}\right) \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \right]$$

elde edilir.

Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü tanımı kullanılarak ifadenin her iki tarafına $\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u)$ ifadesi eklenerek

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^b f(u)(u-a)^{\alpha-1} du + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \\ & \leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{\alpha+1} f(b) + mf\left(\frac{a}{m}\right) \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$${}^{AB}I_b^\alpha f(u) \leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{\alpha+1} f(b) + mf\left(\frac{a}{m}\right) \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u)$$

elde edilir. İspat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2 *Teorem 4.1 in şartları altında*

$${}^{AB}I_a^\alpha f(u) \leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{\alpha+1} f(a) + mf\left(\frac{b}{m}\right) \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \quad (4.2)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat m -Konveks fonksiyonların tanımı kullanılarak

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + m(1-t)f\left(\frac{b}{m}\right)$$

yazılabilir. İfadenin her iki tarafını $\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}$ çarpılırsa

$$\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}f(ta + (1-t)b) \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1} \left[tf(a) + m(1-t)f\left(\frac{b}{m}\right) \right]$$

integral alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta + (1-t)b) dt \\ & \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 t^{\alpha} f(a) dt + \int_0^1 mt^{\alpha-1}(1-t)f\left(\frac{b}{m}\right) dt \right] \end{aligned}$$

yazılır.

$ta + (1-t)b = u$, $t = \frac{u-b}{a-b}$, $dt = \frac{du}{a-b}$ değişken değiştirme uygulanarak

$$\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_b^a \left(\frac{u-b}{a-b} \right)^{\alpha-1} \frac{f(u)}{(a-b)} du \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{\alpha+1} f(a) + mf\left(\frac{b}{m}\right) \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \right]$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{(b-u)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha}} f(u) du \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{\alpha+1} f(a) + mf\left(\frac{b}{m}\right) \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \right]$$

elde edilir. İfadenin her iki tarafı $(b-a)^{\alpha}$ çarpılırsa

$$\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^b f(u)(b-u)^{\alpha-1} du \leq \frac{\alpha(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{\alpha+1} f(a) + mf\left(\frac{b}{m}\right) \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \right]$$

elde edilir.

Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü tanımı kullanılarak ifadenin her iki tarafı da $\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(u)$ ifadesi eklenerek

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^b f(u)(b-u)^{\alpha-1} du + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \\ & \leq \frac{\alpha(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{\alpha+1} f(a) + mf\left(\frac{b}{m}\right) \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \end{aligned}$$

elde edilir.

$${}^{AB}_a I^\alpha f(u) \leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{\alpha+1} f(a) + m f\left(\frac{b}{m}\right) \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u)$$

ve gerekli düzenlemeler yapılarak elde edilir.

Sonuç 4.1 *Teorem 4.1 in şartları altında*

$$\begin{aligned} {}^{AB}_a I^\alpha f(u) + {}^{AB}_b I^\alpha f(u) &\leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{\alpha+1} (f(a) + f(b)) + \frac{m}{\alpha(\alpha+1)} \left(f\left(\frac{a}{m}\right) + \left(\frac{b}{m}\right) \right) \right] \\ &\quad + \frac{2(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \end{aligned}$$

elde edilir.

İspat (4.1) ve (4.2) eşitsizlikleri toplanarak ve gerekli düzenlemelerle

$$\begin{aligned} {}^{AB}_a I^\alpha f(u) + {}^{AB}_b I^\alpha f(u) &\leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{\alpha+1} f(b) + m f\left(\frac{a}{m}\right) \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \\ &\quad + \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{\alpha+1} f(a) + m f\left(\frac{b}{m}\right) \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \\ {}^{AB}_a I^\alpha f(u) + {}^{AB}_b I^\alpha f(u) &\leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{\alpha+1} (f(a) + f(b)) + \frac{m}{\alpha(\alpha+1)} \left(f\left(\frac{a}{m}\right) + \left(\frac{b}{m}\right) \right) \right] \\ &\quad + \frac{2(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.3 $f : [a, b] \subset R \rightarrow R$ fonksiyonu integrallenebilen bir (h, m) -konveks fonksiyon ve $h : (0, 1) \rightarrow R, \alpha > 0, m \in (0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}^{AB}_b I^\alpha f(u) &\leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(b) \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} h\left(\frac{u-a}{b-a}\right) du \right. \\ &\quad \left. + m f\left(\frac{a}{m}\right) \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} h\left(\frac{b-u}{b-a}\right) du \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \end{aligned} \tag{4.3}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu, $\Gamma(\alpha)$ Euler Gama fonksiyonudur.

İspat (h, m) -konveks fonksiyonların tanımını kullanılarak

$$f(tb + (1 - t)a) \leq h(t)f(b) + mh(1 - t)f\left(\frac{a}{m}\right)$$

yazılabilir. İfadenin her iki tarafı $\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}$ çarpılırsa

$$\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}f(tb + (1 - t)a) \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[t^{\alpha-1}h(t)f(b) + t^{\alpha-1}mh(1 - t)f\left(\frac{a}{m}\right)\right]$$

bulunur ve eşitsizliğin her iki tarafında integral alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} f(tb + (1 - t)a) dt \\ & \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 t^{\alpha-1} h(t) f(b) dt + \int_0^1 mt^{\alpha-1} h(1 - t) f\left(\frac{a}{m}\right) dt \right] \end{aligned}$$

yazılır.

Son ifadede $tb + (1 - t)a = u$, $t = \frac{u-a}{b-a}$, $dt = \frac{du}{b-a}$ değişken değiştirme uygulanarak

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left(\frac{u-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(u) \frac{du}{(b-a)} \\ & \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(b) \int_a^b \left(\frac{u-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} h\left(\frac{u-a}{b-a}\right) \frac{du}{(b-a)} \right. \\ & \quad \left. + mf\left(\frac{a}{m}\right) \int_a^b \left(\frac{u-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} h\left(\frac{b-u}{b-a}\right) \frac{du}{(b-a)} \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{(u-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^\alpha} f(u) du \\
& \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(b) \int_a^b \frac{(u-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^\alpha} h\left(\frac{u-a}{b-a}\right) du \right. \\
& \quad \left. + m f\left(\frac{a}{m}\right) \int_a^b \frac{(u-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^\alpha} h\left(\frac{b-u}{b-a}\right) du \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)(b-a)^\alpha} \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} f(u) du \\
& \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)(b-a)^\alpha} \left[f(b) \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} h\left(\frac{u-a}{b-a}\right) du \right. \\
& \quad \left. + m f\left(\frac{a}{m}\right) \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} h\left(\frac{b-u}{b-a}\right) du \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. İfadenin her iki tarafı $(b-a)^\alpha$ çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^b f(u)(u-a)^{\alpha-1} du & \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(b) \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} h\left(\frac{u-a}{b-a}\right) du \right. \\
& \quad \left. + m f\left(\frac{a}{m}\right) \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} h\left(\frac{b-u}{b-a}\right) du \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü tanımı kullanılarak ifadenin her iki tarafına $\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u)$ ifadesi eklenerek

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^b f(u)(u-a)^{\alpha-1} du + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \\
& \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(b) \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} h\left(\frac{u-a}{b-a}\right) du \right. \\
& \quad \left. + m f\left(\frac{a}{m}\right) \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} h\left(\frac{b-u}{b-a}\right) du \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u)
\end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned}
{}^{AB}I_b^\alpha f(u) & \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(b) \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} h\left(\frac{u-a}{b-a}\right) du \right. \\
& \quad \left. + m f\left(\frac{a}{m}\right) \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} h\left(\frac{b-u}{b-a}\right) du \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u)
\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4 *Teorem 4.3 ün şartları altında*

$$\begin{aligned}
{}^{AB}I_a^\alpha f(u) & \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(a) \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} h\left(\frac{u-b}{a-b}\right) du \right. \\
& \quad \left. + m f\left(\frac{b}{m}\right) \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} h\left(\frac{a-u}{a-b}\right) du \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat (h, m) -konveks fonksiyonların tanımı kullanılarak

$$f(ta + (1-t)b) \leq h(t)f(a) + mh(1-t)f\left(\frac{b}{m}\right)$$

yazılabilir. İfadenin her iki tarafını $\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$ çarpılırsa

$$\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} f(ta + (1-t)b) \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[t^{\alpha-1} h(t) f(a) + t^{\alpha-1} m h(1-t) f\left(\frac{b}{m}\right) \right]$$

bulunur ve ifadenin her iki tarafında integral alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta + (1-t)b) dt \\ & \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 t^{\alpha-1} h(t) f(a) dt + \int_0^1 m t^{\alpha-1} h(1-t) f\left(\frac{b}{m}\right) dt \right] \end{aligned}$$

yazılır.

Son eşitsizlikte $ta + (1-t)b = u$, $t = \frac{u-b}{a-b}$, $dt = \frac{du}{a-b}$ değişken değiştirme uygulanarak

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_b^a \left(\frac{u-b}{a-b}\right)^{\alpha-1} f(u) \frac{du}{(a-b)} \\ & \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(a) \int_b^a \left(\frac{u-b}{a-b}\right)^{\alpha-1} h\left(\frac{u-b}{a-b}\right) \frac{du}{(a-b)} \right. \\ & \quad \left. + m f\left(\frac{b}{m}\right) \int_b^a \left(\frac{u-b}{a-b}\right)^{\alpha-1} h\left(\frac{a-u}{a-b}\right) \frac{du}{(a-b)} \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_b^a \frac{(u-b)^{\alpha-1}}{(a-b)^\alpha} f(u) du \\ & \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(a) \int_b^a \frac{(u-b)^{\alpha-1}}{(a-b)^\alpha} h\left(\frac{u-b}{a-b}\right) du \right. \\ & \quad \left. + m f\left(\frac{b}{m}\right) \int_b^a \frac{(u-b)^{\alpha-1}}{(a-b)^\alpha} h\left(\frac{a-u}{a-b}\right) du \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)(a-b)^\alpha} \int_b^a (u-b)^{\alpha-1} f(u) du \\
& \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)(a-b)^\alpha} \left[f(a) \int_b^a (u-b)^{\alpha-1} h\left(\frac{u-b}{a-b}\right) du \right. \\
& \quad \left. + m f\left(\frac{b}{m}\right) \int_b^a (u-b)^{\alpha-1} h\left(\frac{a-u}{a-b}\right) du \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)(b-a)^\alpha} \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} f(u) du \\
& \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)(b-a)^\alpha} \left[f(a) \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} h\left(\frac{u-b}{a-b}\right) du \right. \\
& \quad \left. + m f\left(\frac{b}{m}\right) \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} h\left(\frac{a-u}{a-b}\right) du \right]
\end{aligned}$$

bulunur. İfadenin her iki tarafı $(b-a)^\alpha$ çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} f(u) du \\
& \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(a) \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} h\left(\frac{u-b}{a-b}\right) du \right. \\
& \quad \left. + m f\left(\frac{b}{m}\right) \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} h\left(\frac{a-u}{a-b}\right) du \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü tanımı kullanılarak ifadenin her iki tarafına

$\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(u)$ ifadesi eklenerek

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} f(u) du + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \\ & \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(a) \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} h\left(\frac{u-b}{a-b}\right) du \right. \\ & \quad \left. + m f\left(\frac{b}{m}\right) \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} h\left(\frac{a-u}{a-b}\right) du \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} {}_a^{AB}I^\alpha f(u) & \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(a) \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} h\left(\frac{u-b}{a-b}\right) du \right. \\ & \quad \left. + m f\left(\frac{b}{m}\right) \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} h\left(\frac{a-u}{a-b}\right) du \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2 *Teorem 4.3 ün şartları altında*

$$\begin{aligned} {}_a^{AB}I^\alpha f(u) + {}^AB I_b^\alpha f(u) & \leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(a) \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} h\left(\frac{u-b}{a-b}\right) du \right. \\ & \quad + f(b) \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} h\left(\frac{u-a}{b-a}\right) du + m f\left(\frac{a}{m}\right) \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} h\left(\frac{b-u}{b-a}\right) du \\ & \quad \left. + f\left(\frac{b}{m}\right) \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} h\left(\frac{a-u}{a-b}\right) du \right] + 2 \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat (4.3) ve (4.4) eşitsizlikleri toplanarak ve gerekli düzenlemelerle

$$\begin{aligned}
{}_a^{AB}I^\alpha f(u) + {}^{AB}I_b^\alpha f(u) &\leq \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(a) \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} h\left(\frac{u-b}{a-b}\right) du \right. \\
&\quad + f(b) \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} h\left(\frac{u-a}{b-a}\right) du + mf\left(\frac{a}{m}\right) \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} h\left(\frac{b-u}{b-a}\right) du \\
&\quad \left. + f\left(\frac{b}{m}\right) \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} h\left(\frac{a-u}{a-b}\right) du \right] + 2\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(u)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.3 *Teorem 4.3' ün şartları altında $h(t) = t$ seçilirse*

$${}_a^{AB}I_b^\alpha f(u) \leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(b) \frac{1}{\alpha+1} + mf\left(\frac{a}{m}\right) \frac{1}{\alpha(1+\alpha)} \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(u) \quad (4.5)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.4 *Teorem 4.4' ün şartları altında $h(t) = t$ seçilirse*

$${}_a^{AB}I^\alpha f(u) \leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(a) \frac{1}{(\alpha+1)} + mf\left(\frac{b}{m}\right) \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(u) \quad (4.6)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.5 *Sonuç 4.3 ve Sonuç 4.4' den aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.*

$$\begin{aligned}
{}_a^{AB}I^\alpha f(u) + {}^{AB}I_b^\alpha f(u) &\leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)(\alpha+1)} \left[f(a) + f(b) + m\frac{1}{\alpha} \left(f\left(\frac{a}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right) \right) \right] \\
&\quad + 2\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(u)
\end{aligned}$$

Sonuç 4.6 *Teorem 4.3' ün şartları altında $h(t) = t^s$ seçilirse*

$${}_a^{AB}I_b^\alpha f(u) \leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(b) \frac{1}{(\alpha+s)} + mf\left(\frac{a}{m}\right) \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)} \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(u) \quad (4.7)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Sonuç 4.7 *Teorem 4.4' ün şartları altında $h(t) = t^s$ seçilirse*

$${}_a^{AB}I^\alpha f(u) \leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(a) \frac{1}{(\alpha+s)} + mf\left(\frac{b}{m}\right) \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)} \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \quad (4.8)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Sonuç 4.8 *Sonuç 4.6 ve Sonuç 4.7' den aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.*

$$\begin{aligned} {}_a^{AB}I^\alpha f(u) + {}_b^{AB}I^\alpha f(u) &\leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{(\alpha+s)} (f(a) + f(b)) \right. \\ &\quad \left. + m \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)} \left(f\left(\frac{a}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right) \right) \right] + 2 \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \end{aligned}$$

Sonuç 4.9 *Teorem 4.4' ün şartları altında $h(t) = 1/t$ seçilirse*

$${}_a^{AB}I^\alpha f(u) \leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(a) \frac{1}{(\alpha-1)} + mf\left(\frac{b}{m}\right) \int_0^1 t^{\alpha-1} \frac{1}{(1-t)} dt \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \quad (4.9)$$

Sonuç 4.10 *Teorem 4.3' ün şartları altında $h(t) = 1/t$ seçilirse*

$${}_b^{AB}I^\alpha f(u) \leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[f(b) \frac{1}{\alpha-1} + mf\left(\frac{a}{m}\right) \int_0^1 t^{\alpha-1} \frac{1}{(1-t)} dt \right] + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \quad (4.10)$$

elde edilir.

Sonuç 4.11 *Sonuç 4.9 ve Sonuç 4.10' dan aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.*

$$\begin{aligned} {}_a^{AB}I^\alpha f(u) + {}_b^{AB}I^\alpha f(u) &\leq \frac{\alpha(b-a)^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{(\alpha-1)} (f(a) + f(b)) \right. \\ &\quad \left. + m \int_0^1 t^{\alpha-1} \frac{1}{(1-t)} dt \left(f\left(\frac{a}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right) \right) \right] + 2 \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(u) \end{aligned}$$

Teorem 4.5 $f : [a, b] \subset R \rightarrow R$ fonksiyonu integrallenebilen bir (h, m) -konveks fonksiyon ve $h : (0, 1) \rightarrow R, \alpha > 0, m \in (0, 1], q > 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| \frac{AB}{\frac{a+mb}{2}} I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right| \\ & \leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{(2^{\alpha p+1})(\alpha p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(|f'(a)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} h(t) dt \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + m |f'(b)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} h(1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}} + \left(|f'(a)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t) dt + m |f'(b)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

eşitsizliği $1/p + 1/q = 1$ için geçerlidir ve burada $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu, $\Gamma(\alpha)$ Euler Gama fonksiyonudur.

İspat Lemma 3.1 ve Hölder eşitsizliği yardımı ile

$$\begin{aligned} & \left| \frac{AB}{\frac{a+mb}{2}} I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right| \\ & \leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(ta + m(1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{\alpha p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(ta + m(1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

yazılabilir. İfadedeki integral alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{AB}{\frac{a+mb}{2}} I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right| \\ & \leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left[\left(\frac{t^{\alpha p+1}}{(\alpha p+1)} \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(|f'(a)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} h(t) dt + m |f'(b)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} h(1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(-\frac{(1-t)^{\alpha p+1}}{(\alpha p+1)} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right)^{\frac{1}{p}} \left(|f'(a)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t) dt + m |f'(b)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

bulunur ve gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned}
& \left| I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right| \\
& \leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{(2^{\alpha p+1})(\alpha p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(|f'(a)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} h(t) dt \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + m |f'(b)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} h(1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}} + \left(|f'(a)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t) dt + m |f'(b)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.12 *Teorem 4.5' in şartları altında (4.11) eşitsizliğinde $h(t) = t$ uygulandığında*

$$\begin{aligned}
& \left| I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right| \\
& \leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{(2^{\alpha p+1})(\alpha p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{1}{8} |f'(a)|^q + \frac{3}{8} m |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{3}{8} |f'(a)|^q + \frac{1}{8} m |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.13 *Teorem 4.5' in şartları altında (4.11) eşitsizliğinde $h(t) = t^s$ uygulandığında*

$$\begin{aligned}
& \left| I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right| \\
& \leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{(2^{\alpha p+1})(\alpha p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\left(\frac{1}{2^{s+1}(s+1)} \right) |f'(a)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{2^{s+1}-1}{2^{s+1}(s+1)} \right) m |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\left(\frac{2^{s+1}-1}{2^{s+1}(s+1)} \right) |f'(a)|^q + \left(\frac{1}{2^{s+1}(s+1)} \right) m |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.14 *Teorem 4.5' in şartları altında (4.11) eşitsizliğinde $h(t) = \frac{1}{t}$ uygulandığında*

$$\begin{aligned} & \left| I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right| \\ & \leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{(2^{\alpha p+1})(\alpha p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left((-\ln 2 + \infty) |f'(a)|^q + (\ln 2 + 0) m |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left((0 + \ln 2) |f'(a)|^q + (\infty - \ln 2) m |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.6 $f : [a, b] \subset R \rightarrow R$ fonksiyonu integrallenebilen bir (h, m) -konveks fonksiyon ve $h : (0, 1) \rightarrow R, \alpha > 0, m \in (0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right| \\ & \leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left[|f'(a)| \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha} h(t) dt + m |f'(b)| \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha} h(1-t) dt \right. \\ & \quad \left. + |f'(a)| \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{\alpha} h(t) dt + m |f'(b)| \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{\alpha} h(1-t) dt \right] \end{aligned} \tag{4.12}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu, $\Gamma(\alpha)$ Euler Gama fonksiyonudur.

İspat Lemma 3.1 ve mutlak değer kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right| \\ & \leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha} |f'(ta + m(1-t)b)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{\alpha} |f'(ta + m(1-t)b)| dt \right] \end{aligned}$$

yazılır. (h,m)-konveks fonksiyon tanımı yardımı ile

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{AB}_{\frac{a+mb}{2}} I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB}_{\frac{a+mb}{2}} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right| \\
& \leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha} \left(h(t) |f'(a)| + mh(1-t) |f'(b)| \right) dt \right. \\
& \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{\alpha} \left(h(t) |f'(a)| + mh(1-t) |f'(b)| \right) dt \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{AB}_{\frac{a+mb}{2}} I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB}_{\frac{a+mb}{2}} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right| \\
& \leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left[|f'(a)| \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha} h(t) dt + m |f'(b)| \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha} h(1-t) dt \right. \\
& \quad \left. + |f'(a)| \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{\alpha} h(t) dt + m |f'(b)| \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{\alpha} h(1-t) dt \right]
\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.15 *Teorem 4.6' nın şartları altında (4.12) eşitsizliğinde $h(t) = t$ uygulandığında*

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{AB}_{\frac{a+mb}{2}} I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB}_{\frac{a+mb}{2}} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right| \\
& \leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} \right) (|f'(a)| + m |f'(b)|)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.16 *Teorem 4.6' nın şartları altında (4.12) eşitsizliğinde $h(t) = h(1-t) = 1$ sabit*

fonksiyon uygulandığında

$$\left| \begin{array}{c} AB \\ \frac{a+mb}{2} \end{array} I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right|$$

$$\leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2^{\alpha}(\alpha+1)} \right) \left[|f'(a)| + m|f'(b)| \right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.17 Teorem 4.6' nın şartları altında (4.12) eşitsizliğinde $h(t) = t^s$ uygulandığında

$$\left| \begin{array}{c} AB \\ \frac{a+mb}{2} \end{array} I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right|$$

$$\leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} (|f'(a)| + m|f'(b)|) \left(\frac{1}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)} + \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha}(1-t)^s dt \right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.7 $f : [a, b] \subset R \rightarrow R$ fonksiyonu integrallenebilen bir (h, m) –konveks fonksiyon ve $h : (0, 1) \rightarrow R, \alpha > 0, m \in (0, 1], q > 1$ olmak üzere

$$\left| \begin{array}{c} AB \\ \frac{a+mb}{2} \end{array} I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right|$$

$$\leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{2^{\alpha p} p(\alpha p + 1)} + \frac{1}{q} |f'(a)|^q \int_0^1 h(t) dt + 2m \frac{1}{q} |f'(b)|^q \int_0^1 h(1-t) dt \right]$$

(4.13)

eşitsizliği $1/p + 1/q = 1$ için geçerlidir ve burada $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu, $\Gamma(\alpha)$ Euler Gama fonksiyonudur.

İspat Lemma 3.1 ve Young Eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{AB}{\frac{a+mb}{2}} I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right| \\
& \leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{\alpha p}}{p} + \frac{|f'(ta + m(1-t)b)|^q}{q} dt \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-t)^{\alpha p}}{p} + \frac{|f'(ta + m(1-t)b)|^q}{q} dt \right) \right]
\end{aligned}$$

yazılır. (h,m)-konveks tanımı uygulandığında

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{AB}{\frac{a+mb}{2}} I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right| \\
& \leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{\alpha p}}{p} dt + \frac{1}{q} \int_0^{\frac{1}{2}} h(t) |f'(a)|^q + mh(1-t) |f'(b)|^q dt \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-t)^{\alpha p}}{p} dt + \frac{1}{q} \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t) |f'(a)|^q + mh(1-t) |f'(b)|^q dt \right) \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{AB}{\frac{a+mb}{2}} I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right| \\
& \leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{2^{\alpha p} p (\alpha p + 1)} + \frac{1}{q} |f'(a)|^q \int_0^1 h(t) dt + 2m \frac{1}{q} |f'(b)|^q \int_0^1 h(1-t) dt \right]
\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.18 Teorem 4.7' nin şartları altında (4.13) eşitsizliğinde $h(t) = t$ uygulandığında

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{AB}{\frac{a+mb}{2}} I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1} B(\alpha) \Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right| \\
& \leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha) \Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{2^{\alpha p} p (\alpha p + 1)} + \frac{1}{2q} |f'(a)|^q + m \frac{1}{q} |f'(b)|^q \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.19 Teorem 4.7' nin şartları altında (4.13) eşitsizliğinde $h(t) = t^s$ uygulandığında

$$\left| \begin{matrix} AB \\ \frac{a+mb}{2} \end{matrix} I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right|$$

$$\leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{2^{\alpha p}p(\alpha p+1)} + \frac{1}{q(s+1)} \left(|f'(a)|^q + 2m|f'(b)|^q \right) \right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.20 Teorem 4.7' nin şartları altında (4.13) eşitsizliğinde $h(t) = h(1-t) = 1$ sabit fonksiyon uygulandığında

$$\left| \begin{matrix} AB \\ \frac{a+mb}{2} \end{matrix} I_{mb}^{\alpha} f(mb) + {}^{AB} I_{\frac{a+mb}{2}}^{\alpha} f(a) - \frac{(mb-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} [f(a) + f(mb)] \right|$$

$$\leq \frac{(mb-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{2^{\alpha p}p(\alpha p+1)} + \frac{1}{q} \left(|f'(a)|^q + 2m|f'(b)|^q \right) \right]$$

eşitsizliği elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, çağdaş matematiksel analiz alanında önemli bir yer edinen Atangana–Baleanu kesirli integral operatörleri kullanılarak, klasik konvekslik anlayışının geliştirilmiş biçimleri olan m -konveks ve (h,m) -konveks fonksiyon sınıfları için yeni türde integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Özellikle Hermite–Hadamard tipi eşitsizliklerin kesirli analiz bağlamında yeniden yorumlanması, bu çalışmanın temel motivasyonunu oluşturmuştur.

Elde edilen eşitsizlikler, mevcut literatürdeki klasik sonuçların hem genişletilmesi hem de güçlendirilmesi açısından dikkate değerdir. Atangana–Baleanu integral operatörünün non-singüler çekirdek yapısı ve Caputo tipi tanımlanmış olması, söz konusu eşitsizliklerin daha esnek bir yapı içinde ele alınmasına olanak sağlamış ve bu bağlamda integral dönüşümleri ile konveks fonksiyonlar arasındaki etkileşim daha derinlemesine incelenmiştir. Bu durum, özellikle diferansiyel ve integral denklemlerde karşılaşılan problemlere daha genel çözüm alanları sunabilecek potansiyele sahiptir.

Çalışma boyunca, farklı parametre değerleri altında m -konveks ve (h,m) -konveks fonksiyonlar için türetilen eşitsizliklerin, klasik Hermite–Hadamard eşitsizliklerine indirgenebilir olduğu gösterilmiştir. Bu özellik, çalışmanın teorik geçerliliğini pekiştirmekte ve geliştirilen yöntemlerin genel çerçevede tutarlı olduğunu ortaya koymaktadır. Ayrıca, tezde sunulan bazı özel durumlar, mevcut literatürde yer alan bulguların özel hallerini kapsamakta ve bu yönüyle de literatüre katkı sunmaktadır.

Sonuç olarak, bu tez Atangana–Baleanu kesirli integral operatörleri çerçevesinde konvekslik teorisinin farklı biçimlerinin analitik yapılarını zenginleştirmiş ve yeni eşitsizliklerin formüle edilmesiyle kesirli analiz literatürüne özgün katkılar sağlamıştır. Gelecek çalışmalar için önerilebilecek bazı potansiyel araştırma alanları arasında, elde edilen eşitsizliklerin sayısal uygulamaları, stokastik süreçlerdeki kullanımları ve çok değişkenli fonksiyonlar için genellemeleri yer almaktadır.

Bu çalışma, fonksiyonel analiz, kesirli analiz ve konvekslik teorisi arasında güçlü bir köprü kurarak, hem teorik hem de uygulamalı matematik alanlarında araştırmacılara yeni ufuklar açabilecek niteliktedir.

Kaynakça

- Abdeljawad, T. and Baleanu, D. (2017). Integration by parts and its applications of a new nonlocal fractional derivative with Mittag-Leffler nonsingular kernel. *J. Nonlinear Sci.*
- Ardic, M., Önalın, H., Akdemir, A., and Nguyen, A. (2023). New approaches for m -convex functions via fractional integral operators with strong kernels. *Miskolc Mathematical Notes*, 24(3):1145–1160.
- Atangana, A. and Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model. *Thermal Science*, 20(2):763–769.
- Breckner, W. W. (1978). Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Räumen. *Publ. Inst. Math.(Beograd)(NS)*, 23(37):13–20.
- Dragomir, S. (2002). On some new inequalities of hermite-hadamard type for m -convex functions. *Tamkang Journal of Mathematics*, 33(1).
- Dragomir, S. and Fitzpatrick, S. (1999). The hadamard inequalities for s -convex functions in the second sense. *Demonstratio Mathematica*, 32(4):687–696.
- Dragomir, S., Pecaric, J., and Persson, L. (1995). Some inequalities of hadamard type. *Soochow Journal of Mathematics*, 21(3):335–341.
- Dragomir, S. S. (2001). On the Hadamard's inequality for convex functions on the coordinates in a rectangle from the plane. *Taiwanese Journal of Mathematics*, pages 775–788.
- Eken, Z. (2022). Fejér inequality for s -convex functions in the fourth sense. *Journal of Mathematical Inequalities*, 16(1).
- Godunova, E. and Levin, V. (1985). Neravenstva dlja funkciı širokogo klassa, soderzascego vypuklye, monotonnnye i nekotorye drugie vidy funkciı. vycislitel. mat. i. Fiz. Mezhvuzov. Sb. Nauc. Trudov, MGPI, Moskva, 9:138–142.

- Hudzik, H. and Maligranda, L. (1994). Some remarks on s -convex functions. *Aequationes mathematicae*, 48(1):100–111.
- Mihesan, V. (1993). A generalization of the convexity. *Seminar On Functional Equations, Approx Convex, Cluj-Napoca*, 1.
- Miller, K. and Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. (*No Title*).
- Mitrinovic, D., Pecaric, J., and Fink, A. (1993). Classical and new inequalities in analysis. Kluwer Academic, Dordrecht.
- Özdemir, M., Akdemir, A., and Set, E. (2016). On (h, m) -convexity and hadamard-type inequalities.
- Pachpatte, B. (2003). On some inequalities for convex functions. *RGMIA Res. Rep. Coll*, 6(1):1–9.
- Pečarić, J. and Tong, Y. (1992). *Convex Functions, Partial Orderings, And Statistical Applications*. Academic press.
- Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, volume 198. Elsevier.
- Sarikaya, M., Saglam, A., and Yildirim, H. (2008). On some hadamard-type inequalities for h -convex functions. *J. Math. Inequal*, 2(3):335–341.
- Sarikaya, M., Set, E., Ozdemir, M., and Dragomir, S. (2010). New some Hadamard's type inequalities for co-ordinated convex functions. *arXiv preprint arXiv:1005.0700*.
- Set, E., Sardari, M., Ozdemir, M., and Roojin, J. (2012). On generalizations of the hadamard inequality for (α, m) -convex functions. *Kyungpook Mathematical Journal*, 52(3):307–317.
- Toader, G. (1993). Some inequalities for m -convex functions. *Stud. Univ. Babes-Bolyai*,

Math, 38(1):21–28.

Varošanec, S. (2007). On h -convexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 326(1):303–311.



ÖZGEÇMİŞ

Şadiye İZCİ

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Eğitim

- Yüksek Lisans (2023 Ekim - 2025 Ağustos)
 - Matematik ABD, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Ağrı, Türkiye
 - Alınan Dersler : Bilimsel araştırma yöntemleri ve yayın etiği, Konveks Fonksiyonlar, Kesirli mertebeden türev ve integral operatörleri, Cebirsel Analiz, İleri Fonksiyonel Analiz, Latex ile doküman hazırlama, Kesirli Analiz ve Uygulamaları.
 - Ortalama : 3.64
 - Tez Başlığı : "DİFERANSİYELLENEBİLEN BAZI FARKLI TÜRDE KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN ATANGANA-BALEANU KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ YARDIMIYLA İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER"
- Lisans (2016 Eylül - 2020 Haziran)
 - İlköğretim Matematik Öğretmenliği, İnönü Üniversitesi, Malatya, Türkiye
 - Ortalama : 3.11

Şadiye İZCİ