



**DİFERANSİYELLENEBİLEN BAZI FARKLI
TÜRDEN KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN
KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İÇEREN
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ
ZUHAL BAYRAM
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEZ YÖNETİCİSİ
Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR
AĞRI –2025
(Her hakkı saklıdır.)**

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZUHAL BAYRAM

DİFERANSİYELLENEBİLEN BAZI FARKLI TÜRDE KONVEKS FONKSİYON
SINIFLARI İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İÇEREN İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR
JÜRİ ÜYELERİ
Prof. Dr. Mustafa GÜRBÜZ
Doç. Dr. Abdullah ÇAĞMAN

AĞRI-2025

	LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI	Doküman No	FR-211
		İlk Yayın Tarihi	26.02.2024
		Revizyon Tarihi	
		Revizyon No	00
		Sayfa No	1/1

DİFERANSİYELLENEBİLEN BAZI FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYON
SINIFLARI İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İÇEREN İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR danışmanlığında, Zuhul BAYRAM tarafından hazırlanan bu çalışma, 25.08.2025 tarihinde aşağıda isimleri belirtilen jüri tarafından değerlendirilmiş olup Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisans olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

İmza:

Üye : Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

İmza:

Üye : Doç. Dr. Abdullah ÇAĞMAN

İmza:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../... tarih ve / numaralı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet TEYFUR
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

HAZIRLAYAN	KONTROL EDEN	ONAYLAYAN



LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK RAPORU

Doküman No	FR-213
İlk Yayın Tarihi	26.02.2024
Revizyon Tarihi	
Revizyon No	00
Sayfa No	1 / 1

Benzerlik Oranlarına Dair Beyannamedir		
Öğrenci Adı Soyadı	Zuhal BAYRAM	
Numarası	230601035	
Ana Bilim Dalı	Matematik	
Bilim Dalı	Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi	
Programı		
Danışman Unvanı Adı Soyadı	Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR	
Tez Başlığı	DİFERANSİYELLENEBİLEN BAZI FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ	
Bölümler	Turnitin Sonucu	En Yüksek Değer
Giriş	%0	% 25
Kuramsal Temeller/Kavramsal Çerçeve	%25	% 30
Materyal ve Yöntem	%2	% 30
Araştırma Bulguları	%6	% 20
Sonuç/Tartışma/Öneri	%0	% 20
TEZ (GENEL)	%19	% 25

28.08.2025

Yukarıda bilgileri yazılı tez çalışmasının benzerlik oranları Turnitin raporundan alındığı haliyle yazılmış olup tüm bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Zuhal BAYRAM

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

HAZIRLAYAN	KONTROL EDEN	ONAYLAYAN
------------	--------------	-----------

İçindekiler

ÖZET	ii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1. Genel Kavramlar.....	3
2.2. Özel Fonksiyonlar	6
2.3. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler	6
3. MATERYAL VE YÖNTEM	7
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	17
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	48
Kaynakça	49
ÖZGEÇMİŞ	51

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERANSİYELLENEBİLEN BAZI FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Jüri: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Jüri: Prof. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

Jüri: Doç. Dr. Abdullah ÇAĞMAN

Bu tez çalışmasında, diferansiyellenebilir bazı farklı türden konveks fonksiyon sınıfları için kesirli integral operatörleri içeren yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Konveks fonksiyon kavramı, analizin birçok alanında olduğu gibi, eşitsizlikler kuramında da önemli bir yere sahiptir. Bu kapsamda, eksponansiyel konvekslik, trigonometrik konvekslik, s -konvekslik ve h -konvekslik gibi özel konvekslik türleri ele alınarak, bu fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerin genelleştirilmiş biçimleri elde edilmiştir.

Tezin birinci bölümünde, konveks fonksiyon kavramının tarihsel gelişimi sunulmuş; klasik konvekslikten başlayarak, farklı türden konveks fonksiyonlara dair literatürde yer alan çalışmalar değerlendirilmiş ve bu fonksiyonların integral eşitsizliklerdeki yeri aktarılmıştır. Bu bölüm, tezin konusuna yön veren temel araştırmaların tanıtılması açısından önem arz etmektedir.

İkinci bölüm olan Kuramsal Temeller kısmında, çalışmanın ispat sürecinde sıkça kullanılan tanım ve teoremlere yer verilmiş; ayrıca, ilgili fonksiyonel analiz kavramları ayrıntılı biçimde sunulmuştur. Böylece sonraki bölümlerde yapılan çıkarımların kuramsal altyapısı oluşturulmuştur.

Üçüncü bölüm olan Materyal ve Yöntemler kısmında, araştırma bulgularına yön veren ve literatürde daha önce ortaya konmuş olan belirli lemma, teorem ve teknik yöntemler açıklanmıştır. Bu bölümde, çalışmada kullanılan analitik teknikler ile Hermite-Hadamard tipi

eşitsizliklerin geliştirilmesinde uygulanan matematiksel yapılar sistematik bir biçimde sunulmuştur.

Dördüncü bölümde Araştırma Bulguları başlığı altında, çalışmanın orijinal katkısını oluşturan yeni teoremlere yer verilmiştir. Ekspansiyel, trigonometrik, h -konveks ve s -konveks fonksiyon sınıfları için çeşitli integral eşitsizlikleri elde edilmiş; bu eşitsizliklere Hölder, Young ve Power Mean eşitsizlikleri uygulanarak sonuçların sınırları belirlenmiştir. Ayrıca, belirli özel fonksiyonlar ve seçimler için elde edilen sonuçlara örnekler verilmiştir.

Beşinci ve son bölüm olan Tartışma ve Sonuç kısmında ise çalışmanın özgün yönleri ve literatüre katkıları vurgulanmış, çalışmanın sınırlılıkları değerlendirilmiş ve ileride yapılabilecek olası araştırmalara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

Sonuç olarak bu tez, farklı konvekslik türlerine sahip diferansiyellenebilir fonksiyonlar için kesirli integral operatörlerini içeren yeni ve kapsamlı integral eşitsizlikleri ortaya koyarak hem eşitsizlikler kuramına hem de konveks analiz literatürüne anlamlı katkılar sunmaktadır.

2025, ?? sayfa

Anahtar Kelimeler: Eşitsizlikler, konveks fonksiyonlarda integral eşitsizlikler, konveks fonksiyon, ekspansiyel konveks fonksiyon, trigonometrik konveks fonksiyon, h konveks fonksiyon, s -konveks fonksiyon.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

INTEGRAL INEQUALITIES INVOLVING FRACTIONAL INTEGRAL OPERATORS FOR CERTAIN DIFFERENTIABLE TYPES OF CONVEX FUNCTION CLASSES

Jury: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Jury: Prof. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

Jury: Doc. Dr. Abdullah ÇAĞMAN

In this thesis, new integral inequalities involving fractional integral operators have been obtained for certain differentiable classes of convex functions. The concept of convex functions plays a central role in many areas of analysis, as well as having significant applications in inequality theory. In this context, specific types of convexity—such as exponential convexity, trigonometric convexity, s -convexity, and h -convexity—have been considered, and generalized forms of Hermite-Hadamard type inequalities have been derived for these function classes.

In the first chapter, the historical development of the concept of convexity is presented. Starting from classical convexity, studies in the literature on various types of convex functions have been evaluated, and the role of these functions in integral inequalities has been discussed. This chapter is important for introducing the foundational research that guides the topic of the thesis.

The second chapter, titled Theoretical Foundations, includes definitions and theorems frequently used in the proof processes of the study. Relevant concepts from functional analysis are presented in detail to provide the theoretical groundwork for the arguments developed in subsequent sections.

The third chapter, Materials and Methods, presents specific lemmas, theorems, and technical methods previously established in the literature, which guide the research findings. This chapter systematically explains the analytical techniques used in the study and the mathematical structures applied to generalize Hermite-Hadamard type inequalities.

In the fourth chapter, titled Research Findings, original contributions of the thesis are introduced in the form of new theorems. Various integral inequalities have been obtained for exponential, trigonometric, h -convex, and s -convex function classes. Hölder, Young, and Power Mean inequalities have been applied to these results to determine their bounds. Additionally, results obtained for specific special functions and parameter selections are presented.

The fifth and final chapter, Discussion and Conclusion, emphasizes the original aspects and contributions of the study. The limitations of the work are discussed, and suggestions for future research directions are provided.

In conclusion, this thesis presents new and comprehensive integral inequalities involving fractional integral operators for differentiable functions with various convexity properties, offering significant contributions to both inequality theory and the literature on convex analysis.

2025, ?? pages

Key Words: Inequalities, integral inequalities for convex functions, convex function, exponentially convex function, trigonometrically convex function, h -convex function, s -convex function.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, yüksek lisans tezi olarak Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde gerçekleştirilmiştir.

Yüksek lisans tezimin her aşamasında bilgi, birikim ve deneyimiyle yolumu aydınlatan; desteğini hiçbir zaman esirgemeyen; yalnızca akademik anlamda değil, düşünsel gelişimimde de büyük katkıları olan değerli danışman hocam

Sayın Prof. Dr. Ahmet Ocak Akdemir'e;

en derin minnet ve şükranlarımı sunarım. Bilimsel bakış açımı şekillendirmemde ve bu süreci öz güvenle yürütebilmemde gösterdiği sabır, anlayış ve rehberlik benim için son derece kıymetlidir.

Eğitim hayatım boyunca üzerimde emeği bulunan tüm değerli öğretmenlerime; en başta da ilkokul öğretmenim ve aynı zamanda annem olan, yalnızca bana okuma yazmayı öğrettiği için değil, hayata, öğrenmeye ve insan olmaya dair attığım her adımda yanımda olduğu; bana hem bir evlat hem de bir öğrenci gözüyle sabırla rehberlik ettiği için

Sayın Başöğretmen Gönül Bayram'a

en derin minnet ve şükranlarımı sunuyorum.

Rehberliği, güven veren duruşu ve destekleyici tavrıyla yolumu aydınlatan; karşılaştığım zorluklar karşısında vazgeçmememe vesile olan kıymetli babam ve aynı zamanda ilkokul öğretmenim olan

Sayın Başöğretmen Erol Bayram'a

en derin minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca, sabırları, güvenleri ve sevgileriyle her zaman yanımda olan; desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli dostlarıma ve meslektaşlarıma gönülden teşekkür eder, minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ağustos 2025

Zuhal BAYRAM

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif Reel Sayılar Kümesi
I	: $\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
I°	: I 'nın İçi
g''	: g Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
$g^{(n)}$	: g Fonksiyonunun n 'inci Mertebeden Türevi
$\Gamma(\cdot)$	: Gamma fonksiyonu
$\beta(\cdot)$	: Beta fonksiyonu
$L(\Delta)$	: Δ Bölgesi Üzerinde İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$L_1[a, b]$	: $[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$SX(h, I)$	: h -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$C(I)$	: Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$QC(I)$	: <i>Quasi</i> -Konveks Fonksiyonlar Sınıfı

1. GİRİŞ

Eşitsizlikler, matematiğin temel taşlarından biri olarak sadece matematik alanında değil; mühendislik, istatistik, fizik, ekonomi ve optimizasyon gibi uygulamalı bilimlerde de önemli uygulama alanlarına sahiptir. Bu alanlarda karşılaşılan pek çok problem, çeşitli eşitsizliklerin sağlanması veya iyileştirilmesiyle çözülmektedir. Eşitsizlik teorisinin temelleri 20. yüzyılın başlarında Hardy, Littlewood ve Pólya'nın yazdığı "Inequalities" adlı klasik eserle atılmıştır Hardy et al. (1952). Daha sonra Beckenbach ve Bellman Beckenbach and Bellman (1961), Mitrinović Mitrinovic (1970), Mitrinović ve arkadaşları Mitrinovic et al. (1993), ve Pachpatte Pachpatte (2005) tarafından eşitsizlikler üzerine kapsamlı çalışmalar gerçekleştirilmiştir.

Konveks fonksiyonlar eşitsizlik teorisinin en çok araştırılan konularından biridir. Hermite-Hadamard tipi integral eşitsizliği, konveks fonksiyonlara uygulanan en klasik ve temel eşitsizliklerden biri olarak bilinir. Bu eşitsizlik, ilk olarak Hermite tarafından 1881'de önerilmiş, daha sonra Hadamard tarafından ispatlanarak literatüre kazandırılmıştır. Jensen'in 1906 tarihli eşitsizliği ile birlikte, konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikleri araştırmaları hız kazanmıştır.

Zaman içinde konveks fonksiyon kavramı genelleştirilerek birçok yeni konvekslik sınıfı tanımlanmıştır. Bunlar arasında s -konvekslik Breckner (1978), h -konvekslik Varošanec (2007), eksponansiyel konvekslik Awan et al. (2018) ve trigonometrik konvekslik gibi sınıflar yer almaktadır. Bu yeni yapıların her biri için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerin özel biçimleri türetilmiş ve elde edilen sonuçların fonksiyonel analizdeki yeri derinleşmiştir.

S. S. Dragomir'in çalışmaları, özellikle Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerin geliştirilmesi ve çeşitli konvekslik türleri üzerindeki uygulamaları açısından öncü niteliktedir Dragomir and Pearce (2000, 1998).

Bu tez çalışmasında, diferansiyellenebilir bazı farklı türden konveks fonksiyon sınıfları için (eksponansiyel konveks fonksiyonlar, trigonometrik konveks fonksiyonlar, s -konveks fonksiyonlar ve h -konveks fonksiyonlar) Hermite-Hadamard tipi integral eşitsizliklerin genelleştirilmiş biçimleri elde edilmiştir. Bu eşitsizliklerin sınırları, klasik Hölder eşitsizliği, Power Mean eşitsizliği ve Young eşitsizliği yardımıyla daraltılmış ve literatürde daha önce verilmiş bazı eşitsizliklere alternatif yeni sınırlar kazandırılmıştır. Ayrıca özel fonksi-

yonlar için bu sınırlar somut örneklerle desteklenmiş, böylece literatüre yeni teoremler ve bu teoremlerden türetilmiş yeni sonuçlar kazandırılmıştır.

Bu kapsamda, tezin ilk bölümünde eşitsizlik kuramı ve konveks fonksiyonların tarihçesi aktarılmış, ikinci bölümde kuramsal temeller oluşturulmuş; üçüncü bölümde materyal ve yöntemler sunulmuş, dördüncü bölümde ise araştırma bulguları detaylı biçimde verilmiştir. Özellikle araştırma bulguları kısmı, yeni eşitsizliklerin ve bunların uygulanabilirliğinin matematiksel ispatlarla ortaya konduğu bölümdür.



2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, çalışmanın kuramsal altyapısını oluşturan ve literatürde yaygın olarak bilinen bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Söz konusu tanım ve teoremler, tezin ilerleyen bölümlerinde geliştirilen eşitsizliklerin ispatında ve elde edilen sonuçların yorumlanmasında önemli bir rol oynamaktadır. Bu nedenle, tezin bütünlüğü açısından bu temel kavramların açık ve sistematik biçimde sunulması gerekli görülmüştür.

2.1. Genel Kavramlar

Tanım 2.1 (Konveks Küme): L bir doğrusal uzay ve $B \subseteq L$ olsun. Eğer her $u, v \in B$ için $\theta \in [0, 1]$ aralığında

$$\theta u + (1 - \theta)v \in B$$

koşulu sağlanıyorsa, B kümesi konveks olarak adlandırılır.

Eşitsizlik teorisi için büyük önem taşıyan ve özellikle bu alanda sıklıkla kullanılan konvekslik kavramından birçok bilim adamı büyük ölçüde yararlanmaktadır. Konveks fonksiyonların tanımını aşağıdaki gibi verilmektedir:

Tanım 2.2 (Konveks Fonksiyon): Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı $J \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde verilen $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için, her $x_1, x_2 \in J$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$g(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha g(x_1) + (1 - \alpha)g(x_2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, g fonksiyonu konveks olarak adlandırılır (Pečarić and Tong, 1992).

I üzerinde tanımlanan bir f fonksiyonunun konveks olması demek geometrik olarak $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f 'nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır.

Tanım 2.3 (Ekspansiyel Konveks Fonksiyon): $f : K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in K$ $\gamma \in [0, 1]$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ iken fonksiyonu eğer;

$$f((1 - \gamma)a + \gamma b) \leq (1 - \gamma) \frac{f(a)}{e^{\alpha a}} + \gamma \frac{f(b)}{e^{\alpha b}}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna *eksponansiyel konveks fonksiyon* denir.(Awan et al. (2018)). $\alpha = 0$ alınırse *eksponansiyel konveks fonksiyon tanımı konveks fonksiyona dönüşür*

Tanım 2.4 (Trigonometrik Konveks Fonksiyon): Negatif olmayan bir f fonksiyonunda $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere eğer

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)f(x) + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye *trigonometrik konveks fonksiyon* denir.KADAKAL (2018).

Tanım 2.5 (Birinci anlamda s -konveks fonksiyon): $\alpha, \beta \geq 0, \alpha^s + \beta^s = 1$ ve $s \in (0, 1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye *birinci anlamda s -konveks fonksiyon* denir.

Bu fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir Hudzik and Maligranda (1994).

Tanım 2.6 (h -konveks fonksiyon): $h : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Negatif olmayan $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mu_1, \mu_2 \in I, \theta \in (0, 1)$ olmak üzere

$$f(\theta\mu_1 + (1 - \theta)\mu_2) \leq h(\theta)f(\mu_1) + h(1 - \theta)f(\mu_2)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye *h -konveks fonksiyon* veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir (Varošanec, 2007).

$h(\theta) = \theta$ alınırse, tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına aittir; $h(\theta) = \frac{1}{\theta}$ alınırse, $SX(h, I) = Q(I)$; $h(\theta) = 1$ alınırse, $SX(h, I) \supseteq P(I)$ ve $h(\theta) = \theta^s, s \in (0, 1)$ alınırse $SX(h, I) \supseteq K_s^2$ olacağı açıktır.

Tanım 2.7 (Beta Fonksiyonu):

$$\beta(\mu_1, \mu_2) = \int_0^1 t^{\mu_1-1} (1 - t)^{\mu_2-1} dt, \quad \mu_1, \mu_2 > 0$$

şeklindedir. Bu eşitlik Euler tipi Beta fonksiyonu yada birinci çeşit Euler integrali olarak adlandırılır (Dragomir et al., 1999a).

Teorem 2.1 (Üçgen Eşitsizliği): (Mitrinovic et al., 1993). Herhangi μ_1, μ_2 reel sayıları için

$$|\mu_1 + \mu_2| \leq |\mu_1| + |\mu_2|,$$

$$||\mu_1| - |\mu_2|| \leq |\mu_1 - \mu_2|,$$

$$||\mu_1| - |\mu_2|| \leq |\mu_1 + \mu_2|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|\mu_1 + \dots + \mu_n| \leq |\mu_1| + \dots + |\mu_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinovic et al., 1993).

Teorem 2.2 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Biçimi): g fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \int_a^b g(\mu) d\mu \right| \leq \int_a^b |g(\mu)| d\mu \quad (a < b)$$

Bu eşitsizlik, sürekli fonksiyonlar için integral alma işleminin mutlak değeriyle, mutlak değerli fonksiyonun integrali arasındaki ilişkiyi ifade eder (Mitrinovic et al., 1993).

Teorem 2.3 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(\mu)g(\mu)| d\mu \leq \left(\int_a^b |f(\mu)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(\mu)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic et al., 1993).

Benzer şekilde çift katlı integraller için Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b |f(\mu_1, \mu_2)g(\mu_1, \mu_2)| d\mu_1 d\mu_2 &\leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(\mu_1, \mu_2)|^p d\mu_1 d\mu_2 \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\times \left(\int_a^b \int_a^b |g(\mu_1, \mu_2)|^q d\mu_1 d\mu_2 \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 2.1 (Power Mean Eşitsizliği): $q \leq 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(\mu)g(\mu)| d\mu \leq \left(\int_a^b |f(\mu)| d\mu \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(\mu)||g(\mu)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Benzer şekilde çift katlı integraller için power mean eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b |f(\mu_1, \mu_2)g(\mu_1, \mu_2)| d\mu_1 d\mu_2 \\ \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(\mu_1, \mu_2)| d\mu_1 d\mu_2 \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \int_a^b |f(\mu_1, \mu_2)||g(\mu_1, \mu_2)|^q d\mu_1 d\mu_2 \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Teorem 2.4 (Young Eşitsizliği): $f, c > 0$ için $[0, c]$ üzerinde tanımlı gerçekteğerli, sürekli ve artan fonksiyon olsun. Eğer $f(0) = 0, a \in [0, c]$, ve $b \in [0, f(c)]$ için ünlü Young eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \geq ab,$$

Burada f^{-1} , f fonksiyonunun tersidir. Eğer $f(b) = f(a)$ ise eşitsizlik eşitliğe dönüşür.

f 'i kuvvet fonksiyonu olan $f(x) = x^{p-1}$ seçersek, $a, b \geq 0, p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. şartları altında:

$$\frac{a^p}{p} + \left(\frac{p-1}{p}\right) b^{p/p-1} \geq ab,$$

Benzer şekilde;

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab,$$

(Mitrinovic et al., 1993).

2.2. Özel Fonksiyonlar

Tanım 2.8 (Gama Fonksiyonu): $\alpha > 0$ için

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \sigma^{\alpha-1} e^{-\sigma} d\sigma$$

fonksiyona Gama Fonksiyonu denir (Kannappan, 2009)

Tanım 2.9 (Beta Fonksiyonu): $\varphi, \alpha > 0$ için

$$\beta(\varphi, \alpha) = \int_0^1 \sigma^{\varphi-1} (1-\sigma)^{\alpha-1} d\sigma$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona beta fonksiyonu denir (Rainville, 1971)

2.3. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler

Teorem 2.5 $I, \mathbb{R}'$ de bir aralık, $\mu_1, \mu_2 \in I$ ve $\mu_1 < \mu_2$ olmak üzere $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \int_{\mu_1}^{\mu_2} f(z)dz \leq \frac{f(\mu_1) + f(\mu_2)}{2}$$

eşitsizliği literatürde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić and Tong, 1992).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, çalışmanın temelini oluşturan yöntemsel yaklaşımlar açıklanmakta ve elde edilen bulgulara ışık tutacak şekilde literatürde yer alan bazı lemma ve teoremler sunulmaktadır. İlgili eşitsizliklerin ispatında kullanılan analitik teknikler, integral eşitsizlikleri kuramı bağlamında ele alınacak ve çalışmada elde edilen sonuçların dayandığı matematiksel altyapı ayrıntılı biçimde ortaya konacaktır.

Lemma 3.1 $g : [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlı ve (u, v) aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, $u < v$ koşulu sağlansın. Eğer $g' \in L[u, v]$ ise, bu durumda her $x \in [u, v]$ ve $\alpha > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(x-u)^\alpha + (v-x)^\alpha}{v-u} \right) g(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{v-u} [J_x^\alpha g(u) + J_{x+}^\alpha g(v)] \\ &= \frac{(x-u)^{\alpha+1}}{v-u} \int_0^1 z^\alpha g'(zx + (1-z)u) dz - \frac{(v-x)^{\alpha+1}}{v-u} \int_0^1 z^\alpha g'(zx + (1-z)v) dz \end{aligned} \quad (3.1)$$

Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-z} z^{\alpha-1} dz$. (Set, 2012)

İspat Kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 z^\alpha g'(zx + (1-z)u) dz &= z^\alpha \frac{g(zx + (1-z)u)}{x-u} \Big|_0^1 - \int_0^1 \alpha z^{\alpha-1} \frac{g(zx + (1-z)u)}{x-u} dz \\ &= \frac{g(x)}{x-u} - \frac{\alpha}{x-u} \int_0^1 (u-w)^{\alpha-1} \frac{g(w)}{(u-x)^{\alpha-1}} dw \\ &= \frac{g(x)}{x-u} - \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{(x-u)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_u^x (r-u)^{\alpha-1} g(r) dr \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 z^\alpha g'(zx + (1-z)v) dz &= z^\alpha \frac{g(zx + (1-z)v)}{x-v} \Big|_0^1 - \int_0^1 \alpha z^{\alpha-1} \frac{g(zx + (1-z)v)}{x-v} dz \\ &= \frac{g(x)}{x-v} - \frac{\alpha}{x-v} \int_v^x (v-r)^{\alpha-1} g(r) dr \\ &= \frac{g(x)}{x-v} - \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{(v-x)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^v (v-r)^{\alpha-1} g(r) dr \end{aligned} \quad (3.3)$$

Yukarıdaki (3.2) ve (3.3) numaralı eşitliklerin her iki tarafı sırasıyla

$\frac{(x-u)^{\alpha+1}}{v-u}$ ve $\frac{(v-x)^{\alpha+1}}{v-u}$, ile çarpıldığında, aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\frac{(x-u)^{\alpha+1}}{v-u} \int_0^1 z^\alpha g'(zx + (1-z)u) dz = \frac{(x-u)^\alpha g(x)}{v-u} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{v-u} J_x^\alpha g(u) \quad (3.4)$$

$$\frac{(v-x)^{\alpha+1}}{v-u} \int_0^1 z^\alpha g'(zx + (1-z)v) dz = \frac{(v-x)^\alpha g(x)}{v-u} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{v-u} J_{x+}^\alpha g(v) \quad (3.5)$$

(3.4) ve (3.5) numaralı eşitliklerden istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.1 $g : [u, v] \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, (u, v) aralığında türevlenebilir bir fonksiyondur ve $u < v$ olmak üzere $g' \in L[u, v]$ sağlanıyor.

Eğer $|g'|^q$, sabit bir $s \in (0, 1)$ için $[u, v]$ aralığında ikinci türden s -konveks ise, $p > 1$, $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulları sağlanıyorsa ve ayrıca

$$|g'(x)| \leq M, \quad \text{tüm } x \in [u, v]$$

ise, aşağıdaki kesirli integral eşitsizliği geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{(x-u)^\alpha + (v-x)^\alpha}{v-u} \right) g(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{v-u} [J_x^\alpha g(u) + J_{x+}^\alpha g(v)] \right| \\ & \leq \frac{M}{(1+p\alpha)^{1/p}} \left(\frac{2}{\alpha+1} \right)^{1/q} \left(\frac{(x-u)^{\alpha+1} + (v-x)^{\alpha+1}}{v-u} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Burada $\alpha > 0$ ve Γ Euler gamma fonksiyonudur. (Set, 2012)

Teorem 3.2 $g : [u, v] \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, (u, v) aralığında türevlenebilir bir fonksiyondur ve $u < v$ olmak üzere $g' \in L[u, v]$ sağlanıyor.

Eğer $|g'|^q$, sabit bir $s \in (0, 1)$ için $[u, v]$ aralığında ikinci türden s -konveks ise, $p > 1$, $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulları sağlanıyorsa ve ayrıca

$$|g'(x)| \leq M, \quad \text{tüm } x \in [u, v]$$

ise, aşağıdaki kesirli integral eşitsizliği geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{(x-u)^\alpha + (v-x)^\alpha}{v-u} \right) g(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{v-u} [J_x^\alpha g(u) + J_{x+}^\alpha g(v)] \right| \\ & \leq \frac{M}{(1+p\alpha)^{1/p}} \left(\frac{2}{\alpha+1} \right)^{1/q} \left(\frac{(x-u)^{\alpha+1} + (v-x)^{\alpha+1}}{v-u} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Burada $\alpha > 0$ ve Γ Euler gamma fonksiyonudur. (Set, 2012)

Lemma 3.2 $g : J = [v_1, v_2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlı bir fonksiyon, J aralığında türevlenebilir olsun. Burada $v_1, v_2 \in J$ ve $v_1 < v_2$ koşulları sağlanmaktadır.

Eğer $g' \in L^1[v_1, v_2]$, $\gamma \in [0, 1]$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ ise, aşağıdaki kesirli özdeşlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \frac{(x - v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}} + (v_2 - x)^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\frac{\alpha}{\beta k}(v_2 - v_1)} g(x) - \frac{\Gamma_k(\beta + k)}{v_2 - v_1} \left[\frac{\beta}{k} J_{x-}^{\alpha} g(v_1) + \frac{\beta}{k} J_{x+}^{\alpha} g(v_2) \right] \\ &= \frac{(x - v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{v_2 - v_1} \int_0^1 [1 - (1 - \gamma)^{\alpha}]^{\frac{\beta}{k}} g'(\gamma x + (1 - \gamma)v_1) d\gamma \\ &+ \frac{(v_2 - x)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{v_2 - v_1} \int_0^1 [1 - (1 - \gamma)^{\alpha}]^{\frac{\beta}{k}} g'(\gamma x + (1 - \gamma)v_2) d\gamma. \end{aligned} \quad (3.8)$$

(Tariq et al., 2023)

İspat Tanımlayalım:

$$I_1 = \int_0^1 [1 - (1 - \gamma)^{\alpha}]^{\frac{\beta}{k}} g'(\gamma x + (1 - \gamma)v_1) d\gamma$$

Kısmi integrasyon uygulanırsa:

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[(1 - (1 - \gamma)^{\alpha})^{\frac{\beta}{k}} g(\gamma x + (1 - \gamma)v_1) \right]_0^1 \\ &- \int_0^1 g(\gamma x + (1 - \gamma)v_1) (x - v_1) (1 - (1 - \gamma)^{\alpha})^{\frac{\beta}{k}-1} (1 - \gamma)^{\alpha-1} d\gamma \end{aligned}$$

Buradan

$$I_1 = \frac{1}{\alpha\beta k} g(x)(x - v_1) - \frac{\Gamma_k(\beta + k)}{(x - v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}} \cdot \frac{\beta}{k} J_{x-}^{\alpha} g(v_1) \quad (3.9)$$

Benzer şekilde:

$$I_2 = -\frac{1}{\alpha\beta k} g(x)(v_2 - x) + \frac{\Gamma_k(\beta + k)}{(v_2 - x)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}} \cdot \frac{\beta}{k} J_{x+}^{\alpha} g(v_2) \quad (3.10)$$

Buradan, (3.9) eşitliği $\frac{(x - v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{v_2 - v_1}$ ile ve (3.10) eşitliği $\frac{(v_2 - x)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{v_2 - v_1}$ ile çarpılıp çıkarılırsa, sonuç elde edilir.

Teorem 3.3 $g : [v_1, v_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $J \subset \mathbb{R}$ aralığında türevlenebilir olsun. Burada $v_1 < v_2$ ve $v_1, v_2 \in J$; ayrıca $\alpha, \beta, k > 0$ olsun. $g' \in L^1[v_1, v_2]$ ve g' fonksiyonu $[v_1, v_2]$ üzerinde yarı konvektir (quasi-convex), bu durumda aşağıdaki kesirli integral eşitsizliği sağlanır:

$$\begin{aligned} & \frac{(x - v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}} + (v_2 - x)^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\frac{\alpha}{\beta k}(v_2 - v_1)} g(x) - \frac{\Gamma_k(\beta + k)}{v_2 - v_1} \left[\frac{\beta}{k} J_{x-}^{\alpha} g(v_1) + \frac{\beta}{k} J_{x+}^{\alpha} g(v_2) \right] \\ & \leq \frac{g\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{\beta}{k} + 1\right)}{(v_2 - v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}} \cdot \\ & \left[(x - v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1} \max\{|g'(x)|, |g'(v_1)|\} + (v_2 - x)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1} \max\{|g'(x)|, |g'(v_2)|\} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

(Tariq et al., 2023)

İspat Lemma 3.2 eşitliğinin sol tarafı $\mathcal{A}$ olarak tanımlansın. Lemma 3.2 eşitliği ve $|g'|$ fonksiyonunun yarı konveks olması dikkate alınarak:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &\leq \frac{(x - v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{v_2 - v_1} \int_0^1 [1 - (1 - \gamma)^\alpha]^{\frac{\beta}{k}} |g'(\gamma x + (1 - \gamma)v_1)| d\gamma \\ &\quad + \frac{(v_2 - x)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{v_2 - v_1} \int_0^1 [1 - (1 - \gamma)^\alpha]^{\frac{\beta}{k}} |g'(\gamma x + (1 - \gamma)v_2)| d\gamma \end{aligned} \quad (3.12)$$

Yarı konvekslik özelliğine göre:

$$\int_0^1 [1 - (1 - \gamma)^\alpha]^{\frac{\beta}{k}} |g'(\gamma x + (1 - \gamma)u)| d\gamma \leq \int_0^1 [1 - (1 - \gamma)^\alpha]^{\frac{\beta}{k}} \max \{|g'(x)|, |g'(u)|\} d\gamma \quad (3.13)$$

Benzer şekilde:

$$\int_0^1 [1 - (1 - \gamma)^\alpha]^{\frac{\beta}{k}} |g'(\gamma x + (1 - \gamma)v_2)| d\gamma \leq \int_0^1 [1 - (1 - \gamma)^\alpha]^{\frac{\beta}{k}} \max \{|g'(x)|, |g'(v_2)|\} d\gamma \quad (3.14)$$

Şimdi, değişken dönüşümü olarak $y = (1 - \gamma)^\alpha$ alınırsa:

$$\int_0^1 [1 - (1 - \gamma)^\alpha]^{\frac{\beta}{k}} d\gamma = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\frac{\beta}{k}} g\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{\beta}{k} + 1\right) = \frac{1}{\alpha \cdot \frac{\beta}{k}} g\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{\beta}{k} + 1\right) \quad (3.15)$$

(3.13) , (3.14) ve (3.15) eşitsizlikleri birlikte kullanılarak, teoremden belirtilen sonuç elde edilir.

Lemma 3.3 Verilen $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, açık aralık I° üzerinde iki kez türevlenebilir olsun. Eğer $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $g'' \in L_1[a, b]$ koşulu sağlanıyorsa, bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b - a} \int_a^b g(x) dx = \frac{(b - a)^2}{2} \int_0^1 t(1 - t) g''(ta + (1 - t)b) dt. \quad (3.16)$$

(Alomari et al., 2009)

Lemma 3.4 $g : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve J° aralığında türevlenebilir olsun. $u, v \in J$ olmak üzere ve $u < v$ varsayalım. Eğer $g' \in L([u, v])$ ise, her $\theta \in [0, 1]$ ve $y \in [u, v]$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} &(1 - \theta)g(y) + \theta \cdot \frac{g(u) + g(v)}{2} - \frac{1}{v - u} \int_u^v g(s) ds \\ &= \frac{(y - u)^2}{v - u} \int_0^1 \left(r - \frac{\theta}{2} \cdot \frac{y - u}{v - u}\right) g'(ry + (1 - r)u) dr \\ &\quad - \frac{(v - y)^2}{v - u} \int_0^1 \left(r - \frac{\theta}{2} \cdot \frac{v - y}{v - u}\right) g'(ry + (1 - r)v) dr. \end{aligned} \quad (3.17)$$

(Liu, 2012)

İspat

$$\begin{aligned}
& (1 - \theta)g(y) + \theta \frac{g(u) + g(v)}{2} - \frac{1}{v - u} \int_u^v g(r) dr \\
&= \frac{1}{v - u} \left\{ \int_u^y \left[r - \left(u + \theta \frac{v - u}{2} \right) \right] g'(r) dr + \int_y^v \left[r - \left(v - \theta \frac{v - u}{2} \right) \right] g'(r) dr \right\}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Burada $r = u + (y - u)s$, ve $r = v - (v - y)s$ değişken dönüşümleri yapılır, integral sınırları $s \in [0, 1]$ aralığında tanımlanırsa bu değişken dönüşümleri sonucunda integraller hesaplandığında, denklem (3.18) ifadesi doğrudan Lemma 3.4 eşitliğine dönüşür. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.5 $\tau + \theta > 0$ ve $\nu > 0$ olmak üzere, $g \in L_\theta[s, t]$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
& \frac{g(s) + g(t)}{2} - \frac{(\tau + \theta)^\nu (\Gamma(\nu + 1))}{(4(t^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta}))^\nu} [\tau \theta K_\nu^s + H(t) + \tau \theta K_\nu^t - H(s)] \\
&= \frac{t - s}{4(t^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu} \int_0^1 \Delta_{\tau+\theta}^\nu(\eta) g'(\eta s + (1 - \eta)t) d\eta,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

burada

$$\begin{aligned}
\Delta_{\tau+\theta}^\nu(\eta) &= [(\eta s + (1 - \eta)t)^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta}]^\nu - [(\eta t + (1 - \eta)s)^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta}]^\nu \\
&\quad + [t^{\tau+\theta} - ((1 - \eta)s + \eta t)^{\tau+\theta}]^\nu - [t^{\tau+\theta} - ((1 - \eta)t + \eta s)^{\tau+\theta}]^\nu.
\end{aligned}$$

Açıklama: Burada Γ Gamma fonksiyonunu, g' ise g fonksiyonunun türevini göstermektedir. Fonksiyonlar K_ν^s , K_ν^t , $H(s)$ ve $H(t)$ ise probleme özel tanımlanmış fonksiyonlardır. (Khan and Khan, 2020)

İspat Kısmi integrasyon yöntemi yardımıyla aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\tau \theta K_\nu^s + H(t) &= \frac{(t^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu}{(\tau + \theta)^\nu \Gamma(\nu + 1)} H(s) \\
&\quad + \frac{(t - s)^\nu}{(\tau + \theta)^\nu \Gamma(\nu + 1)} \int_0^1 [t^{\tau+\theta} - ((1 - \eta)s + \eta t)^{\tau+\theta}]^\nu H'(\eta t + (1 - \eta)s) d\eta.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\tau \theta K_\nu^t - H(s) &= \frac{(t^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu}{(\tau + \theta)^\nu \Gamma(\nu + 1)} H(t) \\
&\quad - \frac{(t - s)^\nu}{(\tau + \theta)^\nu \Gamma(\nu + 1)} \int_0^1 [((1 - \eta)s + \eta t)^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta}]^\nu H'(\eta t + (1 - \eta)s) d\eta.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Denklem (3.20) ve (3.21)'yi kullanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \frac{4(t^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu}{t-s} \left[\frac{g(s) + g(t)}{2} - \frac{\tau + \theta}{\nu\Gamma(\nu+1)} (t^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu (\tau\theta K_\nu^t - H(s) + \tau\theta K_\nu^s + H(t)) \right] \\ &= \int_0^1 \{ [((1-\eta)s + \eta t)^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta}]^\nu - [t^{\tau+\theta} - ((1-\eta)s + \eta t)^{\tau+\theta}]^\nu \} H'(\eta t + (1-\eta)s) d\eta. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ayrıca, aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$H'(\eta t + (1-\eta)s) = g'(\eta t + (1-\eta)s) - g'(\eta s + (1-\eta)t), \quad \eta \in [0, 1]. \quad (3.23)$$

Buna ek olarak,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [((1-\eta)s + \eta t)^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta}]^\nu H'(\eta t + (1-\eta)s) d\eta \\ &= \int_0^1 [((1-\eta)t + \eta s)^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta}]^\nu g'(\eta s + (1-\eta)t) d\eta \\ &- \int_0^1 [((1-\eta)s + \eta t)^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta}]^\nu g'(\eta s + (1-\eta)t) d\eta. \end{aligned} \quad (3.24)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [t^{\tau+\theta} - ((1-\eta)s + \eta t)^{\tau+\theta}]^\nu H'(\eta t + (1-\eta)s) d\eta \\ &= \int_0^1 [t^{\tau+\theta} - ((1-\eta)t + \eta s)^{\tau+\theta}]^\nu g'(\eta s + (1-\eta)t) d\eta \\ &- \int_0^1 [t^{\tau+\theta} - ((1-\eta)s + \eta t)^{\tau+\theta}]^\nu g'(\eta s + (1-\eta)t) d\eta. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Son olarak, (3.22), (3.23) ve (3.25) denklemleri birlikte kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.4 $g : [s, t] \rightarrow \mathbb{R}$ aralığında tanımlı, konform olarak integrallenebilir bir fonksiyon olsun ve $|g'(x)|$ fonksiyonu konveks olsun. $\nu > 0$ ve $\tau + \theta > 0$ şartları altında aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \frac{g(s) + g(t)}{2} - \frac{(\tau + \theta)}{\nu\Gamma(\nu+1)} (4(t^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta}))^\nu (\tau\theta K_\nu^s + H(t) + \tau\theta K_\nu^t - H(s)) \\ &\leq \frac{K_\nu^{\tau+\theta}(s, t)}{4(t-s)(t^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu} (|g'(s)| + |g'(t)|), \end{aligned} \quad (3.26)$$

burada

$$K_\nu^{\tau+\theta}(s, t) = \Omega_1^\nu(t, t, \tau + \theta) + \Omega_2^\nu(s, s, \tau + \theta) - \Omega_2^\nu(t, s, \tau + \theta) - \Omega_1^\nu(s, t, \tau + \theta).$$

Not: Burada $\Gamma(\cdot)$ Gamma fonksiyonunu, $H(x)$ uygun şekilde tanımlanmış integral fonksiyonu, K_ν^s, K_ν^t ise fractional (kesirli) integral operatörleriyle ilişkili katsayıları göstermektedir. Ω_1^ν ve Ω_2^ν terimleri ise literatürde tanımlı özel çekirdek fonksiyonlardır. (Khan and Khan, 2020)

İspat (3.19) eşitiği ve $|H'|$ 'nin konveksliği kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \frac{H(s) + H(t)}{2} - \frac{(t-s)^\theta (T(t) + 1)}{4\Gamma(\theta + 1)} [K_r^\theta H(t) + K_r^\theta H(s)] \\
& \leq \frac{t-s}{4(t^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu} \int_0^1 |\Lambda_{\tau+\theta}^\nu(\eta)| H'(\eta s + (1-\eta)t) d\eta \\
& \leq \frac{t-s}{4(t^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu} \left(|H'(s)| \int_0^1 \eta |\Lambda_{\tau+\theta}^\nu(\eta)| d\eta + |H'(t)| \int_0^1 (1-\eta) |\Lambda_{\tau+\theta}^\nu(\eta)| d\eta \right) \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Burada

$$\int_0^1 \eta |\Lambda_{\tau+\theta}^\nu(\eta)| d\eta = \frac{1}{(t-s)^2} \int_s^t |\psi(u)|(t-u) du$$

ve

$$\psi(u) = (u^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu - ((t+s-u)^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu + (t^{\tau+\theta} - (s+t-u)^{\tau+\theta})^\nu - (t^{\tau+\theta} - u^{\tau+\theta})^\nu.$$

$\psi(u)$ fonksiyonu, $[s, t]$ aralığında artan bir fonksiyondur. Bu nedenle

$$\psi(s) = -2(t^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu < 0,$$

ve

$$\psi\left(\frac{s+t}{2}\right) = 0$$

olduğundan,

$$\begin{cases} \psi(u) \leq 0 & \text{eğer } s \leq u \leq \frac{s+t}{2}, \\ \psi(u) > 0 & \text{eğer } \frac{s+t}{2} < u \leq t. \end{cases}$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \eta |\Lambda_{\tau+\theta}^\nu(\eta)| d\eta = \frac{1}{(t-s)^2} \int_s^t |\psi(u)|(t-u) du \\
& = \frac{1}{(t-s)^2} \left[- \int_s^{\frac{s+t}{2}} \psi(u)(t-u) du + \int_{\frac{s+t}{2}}^t \psi(u)(t-u) du \right] \quad (3.28) \\
& = \frac{1}{(t-s)^2} [K_1 + K_2 + K_3 + K_4]
\end{aligned}$$

Burada:

$$K_1 = - \int_s^{\frac{s+t}{2}} (t-u)(u^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu du + \int_{\frac{s+t}{2}}^t (t-u)(u^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu du \quad (3.29)$$

$$K_2 = \int_s^{\frac{s+t}{2}} (t-u)((t+s-u)^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu du + \int_{\frac{s+t}{2}}^t (t-u)((t+s-u)^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu du \quad (3.30)$$

$$K_3 = - \int_s^{\frac{s+t}{2}} (t-u)((t+s-u)^{\tau+\theta})^\nu du + \int_{\frac{s+t}{2}}^t (t-u)(t^{\tau+\theta} - (s+t-u)^{\tau+\theta})^\nu du \quad (3.31)$$

$$K_4 = \int_s^{\frac{s+t}{2}} (t-u)(s+t-u)^{\tau+\theta})^\nu du + \int_{\frac{s+t}{2}}^t (t-u)(t^{\tau+\theta} - u^{\tau+\theta})^\nu du \quad (3.32)$$

Buradan:

$$K_1 = -\Omega_2^\nu(t, s, \tau + \theta), \quad K_4 = \Omega_1^\nu(t, t + \tau\theta).$$

Değişken dönüşümüyle $v = s + t - u$ alınarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$K_2 = -\Omega_2^\nu(s, s, \tau + \theta), \quad K_3 = -\Omega_1^\nu(s, t + \tau\theta), \quad .$$

Bu ifadeler (4.2) eşitsizliğine yerleştirilirse,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \eta |\Lambda_{\tau+\theta}^\nu(\eta)| d\eta \\ &= \frac{-\Omega_2^\nu(t, s, \tau + \theta) + \Omega_1^\nu(t, t + \tau + \theta) + \Omega_2^\nu(s, s + \tau + \theta) - \Omega_1^\nu(s, t + \tau + \theta)}{(t-s)^2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1-\eta) |\Lambda_{\tau+\theta}^\nu(\eta)| d\eta \\ &= \frac{+\Omega_2^\nu(s, s, \tau + \theta) - \Omega_2^\nu(t, s + \tau + \theta) + \Omega_1^\nu(t, t + \tau + \theta) - \Omega_1^\nu(s, t + \tau + \theta)}{(t-s)^2} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Eşitlikleri elde edilir. Sonuç olarak, (4.2), (4.7) ve (4.8) ifadeleri birlikte kullanıldığında ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.6 $g : [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve $g^{(n-1)}, [u, v]$ aralığında mutlak sürekli olsun. O hâlde her $x \in [u, v]$ için aşağıdaki integral özdeşliği sağlanır:

$$\int_u^v g(t) dt = \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) + (-1)^n \int_u^v M_n(x, t) g^{(n)}(t) dt \quad (3.35)$$

Burada, çekirdek fonksiyon $M_n : [u, v]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in [u, v]$ ve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$M_n(x, t) = \begin{cases} \frac{(t-u)^n}{n!}, & \text{eğer } t \in [u, x] \\ \frac{(t-v)^n}{n!}, & \text{eğer } t \in (x, v] \end{cases}$$

(Dragomir et al., 1999b)

Teorem 3.5 $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli n -defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve $g^{(n)} \in L([u, v])$ olmak üzere $n \geq 1$ ve $0 < s \leq 1$. Eğer $|g^{(n)}|$ fonksiyonu s - φ -konveks ise, o hâlde her $x \in [u, v]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\ & \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{n+1} |g^{(n)}(u)| + \frac{1}{n+s+1} \varphi(|g^{(n)}(u)|, |g^{(n)}(x)|) \right) \\ & + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\frac{|g^{(n)}(x)|}{n+1} + \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{(-1)^r}{r+s+1} \varphi(|g^{(n)}(x)|, |g^{(n)}(v)|) \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

(Agarwal et al., 2022)

İspat (3.35) eşitsizliğinden, mutlak değer özelliklerinden ve uygun değişken dönüşümlerinden ($u = (1-t)u + tx$ ve $u = (1-t)x + tv$) faydalanılarak:

$$\begin{aligned} & \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\ & \leq \int_u^x \frac{(s-u)^n}{n!} |g^{(n)}(s)| ds + \int_x^v \frac{(v-s)^n}{n!} |g^{(n)}(s)| ds \\ & = \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n |g^{(n)}((1-t)u + tx)| dt + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n |g^{(n)}((1-t)x + tv)| dt \end{aligned} \quad (3.37)$$

$s - \varphi$ konvekslik tanımı uygulandığında:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\
& \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n (|g^{(n)}(u)| + t^s \varphi(|g^{(n)}(u)|, |g^{(n)}(x)|)) dt \\
& + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n (|g^{(n)}(x)| + t^s \varphi(|g^{(n)}(x)|, |g^{(n)}(v)|)) dt \\
& = \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{n+1} |g^{(n)}(u)| + \frac{1}{n+s+1} \varphi(|g^{(n)}(u)|, |g^{(n)}(x)|) \right) \\
& + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\frac{|g^{(n)}(x)|}{n+1} + \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^r \frac{1}{r+s+1} \varphi(|g^{(n)}(x)|, |g^{(n)}(v)|) \right) \quad (3.38)
\end{aligned}$$

İntegral hesaplamaları yapılırsa ispat tamamlanır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, eksponansiyel, trigonometrik ve h -konveks fonksiyon sınıfları üzerinde yapılan analizler sonucunda Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerin yeni biçimleri elde edilmiştir. Çalışmada, söz konusu eşitsizliklerin genelleştirilmesi amacıyla Hölder, Young ve Power-Mean gibi temel eşitsizlikler kullanılarak literatüre katkı sağlayacak yeni integral eşitsizlikleri türetilmiştir. Bu kapsamda sunulan her bir sonuç, ilgili fonksiyon sınıfının karakteristik özellikleri dikkate alınarak sistematik bir şekilde oluşturulmuştur.

Teorem 4.1 $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, (a, b) aralığında türevlenebilir ve eksponansiyel konvekslik özelliğine sahip olsun; ayrıca $a < b$ koşulu sağlansın. Eğer türevi g' , $[a, b]$ üzerinde Lebesgue integrallenebilir ise, o halde tüm $x \in [a, b]$ ve her pozitif $\alpha > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) g(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [J_x^\alpha g(a) + J_{x+}^\alpha g(b)] \\ & \leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left[\frac{1}{\alpha+2} \frac{|g'(x)|}{e^{\alpha x}} + \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} \right) \frac{|g'(a)|}{e^{\alpha a}} \right] \\ & + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \left[\frac{1}{\alpha+2} \frac{|g'(x)|}{e^{\alpha x}} + \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} \right) \frac{|g'(b)|}{e^{\alpha b}} \right] \end{aligned}$$

İspat Lemma3.1'den (3.1) eşitliğine ilk olarak üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) g(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [J_x^\alpha g(a) + J_{x+}^\alpha g(b)] \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha |g'(tx + (1-t)a)| dt + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha |g'(tx + (1-t)b)| dt \end{aligned}$$

g fonksiyonuna eksponansiyel konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha \left(\frac{t|g'(x)|}{e^{\alpha x}} + \frac{(1-t)|g'(a)|}{e^{\alpha a}} \right) dt \\ & + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha \left(\frac{t|g'(x)|}{e^{\alpha x}} + \frac{(1-t)|g'(b)|}{e^{\alpha b}} \right) dt \\ & \leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \left[\frac{1}{\alpha+2} \frac{|g'(x)|}{e^{\alpha x}} + \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} \right) \frac{|g'(a)|}{e^{\alpha a}} \right] \\ & + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \left[\frac{1}{\alpha+2} \frac{|g'(x)|}{e^{\alpha x}} + \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} \right) \frac{|g'(b)|}{e^{\alpha b}} \right] \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1 Verilen eşitsizlikte $g'(a) = g'(b)$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) g(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [J_x^\alpha g(a) + J_{x+}^\alpha g(b)] \right| \\ \leq \left[\frac{|g'(x)|}{e^{\alpha x}} \left(\frac{1}{\alpha+2} \right) + \frac{|g'(a)|}{e^{\alpha a}} \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} \right) \right] \left(\frac{(x-a)^{\alpha+1} (b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \right)$$

Sonuç 4.2 Verilen eşitsizlikte $g'(a) = g'(b) = g'(x)$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) g(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [J_x^\alpha g(a) + J_{x+}^\alpha g(b)] \right| \\ \leq \left(\frac{(x-a)^{\alpha+1} (b-x)^{\alpha+1}}{(b-a)(\alpha+1)} \right) \frac{|g'(x)|}{e^{\alpha x}}$$

Teorem 4.2 $g : J = [v_1, v_2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlı bir eksponansiyel konveks fonksiyon, J aralığında türevlenebilir olsun. Burada $v_1, v_2 \in J$ ve $v_1 < v_2$ koşulları sağlanmaktadır. Ayrıca $\alpha > 0, \beta > 1$. $g' \in L^1[v_1, v_2]$, $\gamma \in [0, 1]$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ ise, aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\left| \frac{(x-v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}} + (v_2-x)^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\frac{\alpha}{\beta k}(v_2-v_1)} g(x) - \frac{\Gamma_k(\beta+k)}{v_2-v_1} \left[\frac{\beta}{k} J_{x-}^\alpha g(v_1) + \frac{\beta}{k} J_{x+}^\alpha g(v_2) \right] \right| \\ \leq \frac{(x-v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{v_2-v_1} \left[\frac{|g(x)|}{\alpha^{\beta k} e^{\alpha x}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{\alpha\beta}{k}+2} + \frac{1}{\frac{\alpha\beta}{k}+1} \right) + \frac{|g(v_1)|}{\alpha^{\beta k} e^{\alpha v_1}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{\alpha\beta}{k}+2} \right) \right] \\ + \frac{(v_2-x)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{v_2-v_1} \left[\frac{|g(x)|}{\alpha^{\beta k} e^{\alpha x}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{\alpha\beta}{k}+2} + \frac{1}{\frac{\alpha\beta}{k}+1} \right) + \frac{|g(v_2)|}{\alpha^{\beta k} e^{\alpha v_2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{\alpha\beta}{k}+2} \right) \right]$$

İspat Lemma3.2'den (3.8) eşitliğine üçgen eşitsizliği uygulayalım:

$$\left| \frac{(x-v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}} + (v_2-x)^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\frac{\alpha}{\beta k}(v_2-v_1)} g(x) - \frac{\Gamma_k(\beta+k)}{v_2-v_1} \left[\frac{\beta}{k} J_{x-}^\alpha g(v_1) + \frac{\beta}{k} J_{x+}^\alpha g(v_2) \right] \right| \\ \leq \frac{(x-v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{v_2-v_1} \int_0^1 [1 - (1-\gamma)^\alpha]^{\frac{\beta}{k}} |g'(\gamma x + (1-\gamma)v_1)| d\gamma \\ + \frac{(v_2-x)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{v_2-v_1} \int_0^1 [1 - (1-\gamma)^\alpha]^{\frac{\beta}{k}} |g'(\gamma x + (1-\gamma)v_2)| d\gamma.$$

g fonksiyonuna eksponansiyel konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa eşitsizliğin sağ tarafı:

$$\leq \frac{(x - v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{v_2 - v_1} \int_0^1 \left| \frac{1 - (1 - \gamma)^\alpha}{\alpha} \right|^{\frac{\beta}{k}} \left(\frac{\gamma |g(x)|}{e^{\alpha x}} + \frac{(1 - \gamma) |g(v_1)|}{e^{\alpha v_1}} \right) d\gamma$$

$$+ \frac{(v_2 - x)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{v_2 - v_1} \int_0^1 \left| \frac{1 - (1 - \gamma)^\alpha}{\alpha} \right|^{\frac{\beta}{k}} \left(\frac{\gamma |g(x)|}{e^{\alpha x}} + \frac{(1 - \gamma) |g(v_2)|}{e^{\alpha v_2}} \right) d\gamma$$

Teoremin şartları altında $|1 - (1 - \gamma)^\alpha|^\beta \leq 1 - (1 - \gamma)^{\alpha\beta}$ yazılabilir. Buna göre:

$$\left| \frac{(x - v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}} + (v_2 - x)^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\frac{\alpha}{\beta k}(v_2 - v_1)} g(x) - \frac{\Gamma_k(\beta + k)}{v_2 - v_1} \left[\frac{\beta}{k} J_{x-}^\alpha g(v_1) + \frac{\beta}{k} J_{x+}^\alpha g(v_2) \right] \right|$$

$$\leq \frac{(x - v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{v_2 - v_1} \left(\int_0^1 \frac{1 - (1 - \gamma)^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\alpha^{\frac{\beta}{k}}} \gamma \frac{|g(x)|}{e^{\alpha x}} d\gamma + \int_0^1 \frac{(1 - (1 - \gamma)^{\frac{\alpha\beta}{k}})(1 - \gamma)}{\alpha^{\frac{\beta}{k}}} \frac{|g(v_1)|}{e^{\alpha v_1}} d\gamma \right)$$

$$+ \frac{(v_2 - x)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{v_2 - v_1} \left(\int_0^1 \frac{1 - (1 - \gamma)^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\alpha^{\frac{\beta}{k}}} \gamma \frac{|g(x)|}{e^{\alpha x}} d\gamma + \int_0^1 \frac{(1 - (1 - \gamma)^{\frac{\alpha\beta}{k}})(1 - \gamma)}{\alpha^{\frac{\beta}{k}}} \frac{|g(v_2)|}{e^{\alpha v_2}} d\gamma \right)$$

$(1 - \gamma) = u$ değişken dönüşümü yapılarak integral çözülürse:

$$\left| \frac{(x - v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}} + (v_2 - x)^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\frac{\alpha}{\beta k}(v_2 - v_1)} g(x) - \frac{\Gamma_k(\beta + k)}{v_2 - v_1} \left[\frac{\beta}{k} J_{x-}^\alpha g(v_1) + \frac{\beta}{k} J_{x+}^\alpha g(v_2) \right] \right|$$

$$\leq \frac{(x - v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{v_2 - v_1} \left[\frac{|g(x)|}{\alpha^{\beta k} e^{\alpha x}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{\alpha\beta}{k} + 2} + \frac{1}{\frac{\alpha\beta}{k} + 1} \right) + \frac{|g(v_1)|}{\alpha^{\beta k} e^{\alpha v_1}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{\alpha\beta}{k} + 2} \right) \right]$$

$$+ \frac{(v_2 - x)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{v_2 - v_1} \left[\frac{|g(x)|}{\alpha^{\beta k} e^{\alpha x}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{\alpha\beta}{k} + 2} + \frac{1}{\frac{\alpha\beta}{k} + 1} \right) + \frac{|g(v_2)|}{\alpha^{\beta k} e^{\alpha v_2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{\alpha\beta}{k} + 2} \right) \right]$$

İspat tamamlanır.

Sonuç 4.3 Burada $g(v_1) = g(v_2) = g(x)$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \frac{(x - v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}} + (v_2 - x)^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\frac{\alpha}{\beta k}(v_2 - v_1)} g(x) - \frac{\Gamma_k(\beta + k)}{v_2 - v_1} \left[\frac{\beta}{k} J_{x-}^\alpha g(v_1) + \frac{\beta}{k} J_{x+}^\alpha g(v_2) \right] \right|$$

$$\leq \left(\frac{(x - v_1)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1} + (v_2 - x)^{\frac{\alpha\beta}{k}+1}}{v_2 - v_1} \right) \left(\frac{|g(x)|}{\alpha^{\frac{\beta}{k}} e^{\alpha x}} \right) \left(\frac{2k + \alpha\beta}{k + \alpha\beta} \right)$$

Teorem 4.3 $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° içinde iki kez türevlenebilir ve eksponansiyel konveks özellik taşıyın. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere, ayrıca $g'' \in L_1[a, b]$ koşulu sağlandığında, aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b - a} \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{(b - a)^2}{24} \left(\frac{|g''(a)|}{e^{\alpha a}} + \frac{|g''(b)|}{e^{\alpha b}} \right)$$

İspat Lemma3.3'den (3.16) eşitliğine üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 t(1-t) |g''(ta + (1-t)b)| dt.$$

g fonksiyonuna eksponansiyel konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 \left((t-t^2) \frac{t|g''(a)|}{e^{\alpha a}} + (t-t^2) \frac{(1-t)|g''(b)|}{e^{\alpha b}} \right) dt \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 \left((t^2-t^3) \frac{|g''(a)|}{e^{\alpha a}} \right) dt + \int_0^1 \left((t^3-2t^2+t) \frac{|g''(b)|}{e^{\alpha b}} \right) dt \end{aligned}$$

integraller çözülürse:

$$\left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{24} \left(\frac{|g''(a)|}{e^{\alpha a}} + \frac{|g''(b)|}{e^{\alpha b}} \right)$$

elde edilir. ispat tamamlanır.

Teorem 4.4 $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, iç kümesi I° üzerinde iki kez türevlenebilir ve eksponansiyel konveks olsun. $a, b \in I$ olup $a < b$ koşulunu sağlayan ve $g'' \in L_1[a, b]$ olan durumda, aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{\Gamma_{(p+1)} \Gamma_{(p+1)}}{\Gamma_{(2p+2)}} \right) + \frac{1}{2q} \left(\frac{|g''(a)|^q}{e^{\alpha a}} + \frac{|g''(b)|^q}{e^{\alpha b}} \right) \end{aligned}$$

İspat Lemma3.3'den (3.16) eşitliğine üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 t(1-t) |g''(ta + (1-t)b)| dt.$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Young Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 |t - t^2|^p dt + \frac{1}{q} \int_0^1 |g''(ta + (1-t)b)|^q dt \right) \end{aligned}$$

g fonksiyonuna eksponansiyel konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 |t - t^2|^p dt + \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{t |g''(a)|^q}{e^{\alpha a}} dt + \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{(1-t) |g''(b)|^q}{e^{\alpha b}} dt \right) \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 t^p \cdot (1-t)^p dt + \frac{1}{2q} \left(\frac{|g''(a)|^q}{e^{\alpha a}} + \frac{|g''(b)|^q}{e^{\alpha b}} \right) \right) \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{1}{p} \beta(p+1, p+1) + \frac{1}{2q} \left(\frac{|g''(a)|^q}{e^{\alpha a}} + \frac{|g''(b)|^q}{e^{\alpha b}} \right) \right) \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(2p+2)} \right) + \frac{1}{2q} \left(\frac{|g''(a)|^q}{e^{\alpha a}} + \frac{|g''(b)|^q}{e^{\alpha b}} \right) \end{aligned}$$

İspat tamamlanır.

Teorem 4.5 $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, iç noktalar kümesi I° üzerinde ikinci türev alabilir ve eksponansiyel konveks olsun. $a, b \in I$ ve $a < b$ koşulları sağlandığında, ayrıca $g'' \in L_1[a, b]$ ise, aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left[\left(\frac{1}{6} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|g''(a)|^q}{12e^{\alpha a}} + \frac{|g''(b)|^q}{12e^{\alpha b}} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

İspat Lemma3.3'den (3.16) eşitliğine üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 t(1-t) |g''(ta + (1-t)b)| dt.$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Power Mean Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left[\left(\int_0^1 |t-t^2| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |t-t^2| \cdot |g''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

g fonksiyonuna eksponansiyel konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left[\left(\int_0^1 |t-t^2| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |t-t^2| \cdot \left(\frac{t|g''(a)|^q}{e^{\alpha a}} + \frac{(1-t)|g''(b)|^q}{e^{\alpha b}} \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left[\left(\frac{1}{6} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|g''(a)|^q}{12e^{\alpha a}} + \frac{|g''(b)|^q}{12e^{\alpha a}} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

İspat tamamlanır.

Teorem 4.6 $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, iç noktalar kümesi I° üzerinde iki kez türevlenebilir ve trigonometrik konveks özellik taşıyın. $a, b \in I$ ve $a < b$ koşulları sağlandığında, ayrıca $g'' \in L_1[a, b]$ olduğu durumda, aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \left(\frac{16-4\pi}{\pi^3} \right) \cdot (|g''(a)| + |g''(b)|)$$

İspat Lemma3.3'den (3.16) eşitliğine üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 t(1-t) |g''(ta + (1-t)b)| dt.$$

g fonksiyonuna trigonometrik konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 |t-t^2| \left(|g''(a)| \left| \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right| + |g''(b)| \left| \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right| \right) dt \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 |t-t^2| \left(|g''(a)| \left| \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right| \right) dt + \int_0^1 |t-t^2| \left(|g''(b)| \left| \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right| \right) dt \end{aligned}$$

Kısmi integral uygulayarak her iki integral çözülürse:

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \left(\frac{16-4\pi}{\pi^3} \right) \cdot (|g''(a)| + |g''(b)|)$$

İspat tamamlanır.

Teorem 4.7 $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° iç kümesi üzerinde iki kez türevlenebilir ve trigonometrik konvekslik özelliği taşıyın. $a, b \in I$ olup $a < b$ koşulunu sağlayan ve $g'' \in L_1[a, b]$ şartı geçerli olduğunda, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{\Gamma_{(p+1)} \Gamma_{(p+1)}}{\Gamma_{(2p+2)}} + \frac{1}{q} \cdot \frac{2}{\pi} (|g''(a)| + |g''(b)|) \right)$$

İspat Lemma3.3'den eşitliğine üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 t(1-t) |g''(ta + (1-t)b)| dt.$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Young Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 |t - t^2|^p dt + \frac{1}{q} \int_0^1 |g''(ta + (1-t)b)|^q dt \right) \end{aligned}$$

g fonksiyonuna trigonometrik konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 t^p (1-t)^p dt + \frac{1}{q} \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g''(a)|^q dt + \frac{1}{q} \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g''(b)|^q dt \right) \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{1}{p} \cdot \beta(p+1, p+1) + \frac{1}{q} \cdot \frac{2}{\pi} (|g''(a)| + |g''(b)|) \right) \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{\Gamma_{(p+1)} \Gamma_{(p+1)}}{\Gamma_{(2p+2)}} + \frac{1}{q} \cdot \frac{2}{\pi} (|g''(a)| + |g''(b)|) \right) \end{aligned}$$

İspat tamamlanır.

Teorem 4.8 $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° iç kümesi üzerinde iki kez türevlenebilir ve trigonometrik konvekslik özelliği taşıyın. $a, b \in I$ olup $a < b$ koşulunu sağlayan ve $g'' \in L_1[a, b]$ şartı geçerli olduğunda, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left[\left(\frac{1}{6} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{16-4\pi}{\pi^3} (|g''(a)|^q + |g''(b)|^q) \right]^{\frac{1}{q}} \right]$$

İspat Lemma3.3'den (3.16) eşitliğine üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 t(1-t) |g''(ta + (1-t)b)| dt.$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Power Mean Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left[\left(\int_0^1 |t-t^2| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |t-t^2| \cdot |g''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

g fonksiyonuna trigonometrik konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left[\left(\int_0^1 |t-t^2| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^1 |t-t^2| \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cdot |g''(a)|^q + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cdot |g''(b)|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left[\left(\frac{1}{6} \right)^{1-\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^1 |t-t^2| \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cdot |g''(a)|^q dt + \int_0^1 |t-t^2| \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cdot |g''(b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left[\left(\frac{1}{6} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{16-4\pi}{\pi^3} (|g''(a)|^q + |g''(b)|^q) \right]^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

İspat tamamlanır.

Teorem 4.9 $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° iç kümesi üzerinde iki kez türevlenebilir ve s -konvekslik özelliği taşıyın. $a, b \in I$ olup $a < b$ koşulunu sağlayan ve $g'' \in L_1[a, b]$ şartı geçerli olduğunda, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \left(\frac{\Gamma_{(p+1)} \Gamma_{(p+1)}}{\Gamma_{(2p+2)}} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{|g''(a)|^q + |g''(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}}$$

İspat Lemma3.3'den (3.16) eşitliğine üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 t(1-t) |g''(ta + (1-t)b)| dt.$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Hölder Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\int_0^1 |t - t^2|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^1 |g''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

g fonksiyonuna s -konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\int_0^1 |t - t^2|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^1 t^s \cdot |g''(a)|^q dt + \int_0^1 (1-t)^s \cdot |g''(b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\int_0^1 t^p \cdot (1-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{|g''(a)|^q + |g''(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} (\beta(p+1, p+1))^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{|g''(a)|^q + |g''(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(2p+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{|g''(a)|^q + |g''(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

İspat tamamlanır.

Teorem 4.10 $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° üzerinde türevlenebilir olsun ve $a, b \in I$ ile $a < b$ koşulları sağlansın. Eğer türevi g' , $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir ve g eksponansiyel konveks bir fonksiyon ise, her $\lambda \in [0, 1]$ ve $x \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{b-a}{x-a}\right)\right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda}{2} \left(\frac{b-a}{x-a}\right)\right)^{p+1}}{p+1} \right]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|g''(x)|^q}{2e^{\alpha x}} + \frac{|g''(a)|^q}{2e^{\alpha a}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{b-a}{b-x}\right)\right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda}{2} \left(\frac{b-a}{b-x}\right)\right)^{p+1}}{p+1} \right]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|g''(x)|^q}{2e^{\alpha x}} + \frac{|g''(b)|^q}{2e^{\alpha b}} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

İspat Lemma3.4'den (3.17) eşitliğine üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right| |g'(tx + (1-t)a)| dt \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right| |g'(tx + (1-t)b)| dt. \end{aligned}$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Hölder Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left(\int_0^1 \left(t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g'(tx + (1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left(\int_0^1 \left(t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g'(tx + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

g fonksiyonuna eksponansiyel konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left(\int_0^1 \left(t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^1 \frac{t|g'(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{(1-t)|g'(a)|^q}{e^{\alpha a}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left(\int_0^1 \left(t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^1 \frac{t|g'(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{(1-t)|g'(b)|^q}{e^{\alpha b}} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Burada, $u = \left(t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)$ değişken dönüşümü yapılarak integral çözülürse:

$$\begin{aligned} & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^{p+1}}{p+1} \right]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|g''(x)|^q}{2e^{\alpha x}} + \frac{|g''(a)|^q}{2e^{\alpha a}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)^{p+1}}{p+1} \right]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|g''(x)|^q}{2e^{\alpha x}} + \frac{|g''(b)|^q}{2e^{\alpha b}} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

İspat tamamlanır.

Sonuç 4.4 Burada $\alpha = 0$ için eksponansiyel konvekslik bilinen konveksliğe dönüşür:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^{p+1}}{p+1} \right]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|g''(x)|^q}{2} + \frac{|g''(a)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)^{p+1}}{p+1} \right]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|g''(x)|^q}{2} + \frac{|g''(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Sonuç 4.5 Burada $\lambda = 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| g(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|g''(x)|^q}{2e^{\alpha x}} + \frac{|g''(a)|^q}{2e^{\alpha a}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|g''(x)|^q}{2e^{\alpha x}} + \frac{|g''(b)|^q}{2e^{\alpha b}} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Sonuç 4.6 Burada $\lambda = 1$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\frac{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1} - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1}}{p+1} \right]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|g''(x)|^q}{2e^{\alpha x}} + \frac{|g''(a)|^q}{2e^{\alpha a}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\frac{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1} - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1}}{p+1} \right]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|g''(x)|^q}{2e^{\alpha x}} + \frac{|g''(b)|^q}{2e^{\alpha b}} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Teorem 4.11 $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° üzerinde türevlenebilir olsun ve $a, b \in I$ ile $a < b$ koşulları sağlansın. Eğer g' fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir ve g eksponansiyel konveks ise, her $\lambda \in [0, 1]$ ve $x \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1}}{p^2 + p} + \frac{|g'(x)|^q}{2qe^{\alpha x}} + \frac{|g'(a)|^q}{2qe^{\alpha a}} \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1}}{p^2 + p} + \frac{|g'(x)|^q}{2qe^{\alpha x}} + \frac{|g'(b)|^q}{2qe^{\alpha b}} \right] \end{aligned}$$

İspat Lemma3.4'den (3.17) eşitliğine üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right| |g'(tx + (1-t)a)| dt \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right| |g'(tx + (1-t)b)| dt. \end{aligned}$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Young Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a} \right|^p dt + \frac{1}{q} \int_0^1 |g'(tx + (1-t)a)|^q dt \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x} \right|^p dt + \frac{1}{q} \int_0^1 |g'(tx + (1-t)b)|^q dt \right] \end{aligned}$$

g fonksiyonuna eksponansiyel konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a} \right|^p dt + \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{t|g'(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{(1-t)|g'(a)|^q}{e^{\alpha a}} \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x} \right|^p dt + \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{t|g'(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{(1-t)|g'(b)|^q}{e^{\alpha b}} \right] \end{aligned}$$

Burada $u = t - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{b-a}{x-a} \right)$ değişken dönüşümü yapılarak integral çözülürse:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1}}{p^2 + p} + \frac{|g'(x)|^q}{2qe^{\alpha x}} + \frac{|g'(a)|^q}{2qe^{\alpha a}} \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1}}{p^2 + p} + \frac{|g'(x)|^q}{2qe^{\alpha x}} + \frac{|g'(b)|^q}{2qe^{\alpha b}} \right] \end{aligned}$$

İspat tamamlanır.

Sonuç 4.7 Burada $\alpha = 0$ için eksponansiyel konvekslik bilinen konveksliğe dönüşür:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1}}{p^2 + p} + \frac{|g'(x)|^q}{2q} + \frac{|g'(a)|^q}{2q} \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1}}{p^2 + p} + \frac{|g'(x)|^q}{2q} + \frac{|g'(b)|^q}{2q} \right] \end{aligned}$$

Sonuç 4.8 Burada $\lambda = 0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| g(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\frac{1}{p^2+p} + \frac{|g'(x)|^q}{2qe^{\alpha x}} + \frac{|g'(a)|^q}{2qe^{\alpha a}} \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\frac{1}{p^2+p} + \frac{|g'(x)|^q}{2qe^{\alpha x}} + \frac{|g'(b)|^q}{2qe^{\alpha b}} \right] \end{aligned}$$

Sonuç 4.9 Burada $\lambda = 1$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\frac{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1} - \left(-\frac{1}{2} \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1}}{p^2+p} + \frac{|g'(x)|^q}{2qe^{\alpha x}} + \frac{|g'(a)|^q}{2qe^{\alpha a}} \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\frac{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1} - \left(-\frac{1}{2} \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1}}{p^2+p} + \frac{|g'(x)|^q}{2qe^{\alpha x}} + \frac{|g'(b)|^q}{2qe^{\alpha b}} \right] \end{aligned}$$

Teorem 4.12 $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° üzerinde türevlenebilir ve $a, b \in I$ olup $a < b$ koşulunu sağlasın. Eğer türevi g' , $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir ve g eksponansiyel konveks ise, her $\lambda \in [0, 1]$ ve $x \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^{1-\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\frac{|g'(x)|^q}{e^{\alpha x}} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{|g'(a)|^q}{e^{\alpha a}} \left(\left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^3 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^3 \right) \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left(\frac{|g'(x)|^q}{e^{\alpha x}} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{|g'(b)|^q}{e^{\alpha b}} \left(\left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)^3 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)^3 \right) \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

İspat Lemma3.4'den (3.17) eşitliğine üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right| |g'(tx + (1-t)b)| dt \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right| |g'(tx + (1-t)b)| dt. \end{aligned}$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Power Mean Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right| \cdot |g'(tx + (1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right| \cdot |g'(tx + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

g fonksiyonuna eksponansiyel konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right| \left(\frac{t|g'(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{(1-t)|g'(a)|^q}{e^{\alpha a}} \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right| \left(\frac{t|g'(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{(1-t)|g'(b)|^q}{e^{\alpha b}} \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

Burada $u_1 = \left(t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)$ $u_2 = \left(t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)$ değişken dönüşümü yapılrısa:

$$\begin{aligned} & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right| \left(\frac{t|g'(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{(1-t)|g'(a)|^q}{e^{\alpha a}} \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right| \left(\frac{t|g'(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{(1-t)|g'(b)|^q}{e^{\alpha b}} \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

İntegraller hesaplanırsa:

$$\begin{aligned} & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^{1-\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\frac{|g'(x)|^q}{e^{\alpha x}} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{|g'(a)|^q}{e^{\alpha a}} \left(\left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^3 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^3 \right) \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left(\frac{|g'(x)|^q}{e^{\alpha x}} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{|g'(b)|^q}{e^{\alpha b}} \left(\left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)^3 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)^3 \right) \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

İspat Tamamlanır

Teorem 4.13 $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° üzerinde türevlenebilir olsun ve $a, b \in I$ ile $a < b$ koşulları sağlansın. Eğer türevi g' , $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir ve g trigonometrik konveks ise, her $\lambda \in [0, 1]$ ve $x \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| (1 - \lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b - a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x - a)^2}{b - a} \left(\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1}}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2|g'(x)|^q}{\pi} + \frac{2|g'(a)|^q}{\pi} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{(b - x)^2}{b - a} \left(\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1}}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2|g'(x)|^q}{\pi} + \frac{2|g'(b)|^q}{\pi} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

İspat Lemma3.4'den (3.17) eşitliğine üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| (1 - \lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x - a)^2}{b - a} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b - a}{x - a} \right| |g'(tx + (1 - t)a)| dt \\ & + \frac{(b - x)^2}{b - a} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b - a}{b - x} \right| |g'(tx + (1 - t)b)| dt. \end{aligned}$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Hölder Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| (1 - \lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b - a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x - a)^2}{b - a} \left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b - a}{x - a} \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g'(tx + (1 - t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{(b - x)^2}{b - a} \left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b - a}{b - x} \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g'(tx + (1 - t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

g fonksiyonuna trigonometrik konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| (1 - \lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b - a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x - a)^2}{b - a} \left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b - a}{x - a} \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g'(x)|^q dt + \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g'(a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{(b - x)^2}{b - a} \left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b - a}{b - x} \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g'(x)|^q dt + \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g'(b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Burada $u_1 = \left(t - \frac{\lambda b - a}{2b - x}\right)$ $u_2 = \left(t - \frac{\lambda b - a}{2b - x}\right)$ değişken dönüşümü yapılrısa:

$$\begin{aligned} &\leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left(\frac{\left(1 - \frac{\lambda b-a}{2x-a}\right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda b-a}{2x-a}\right)^{p+1}}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2|g'(x)|^q}{\pi} + \frac{2|g'(a)|^q}{\pi} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \frac{(b-x)^2}{b-a} \left(\frac{\left(1 - \frac{\lambda b-a}{2b-x}\right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda b-a}{2b-x}\right)^{p+1}}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2|g'(x)|^q}{\pi} + \frac{2|g'(b)|^q}{\pi} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

İspat tamamlanır.

Sonuç 4.10 Burada $\lambda = 1$ olarak alınırda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ &\leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left(\frac{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1} - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1}}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2|g'(x)|^q}{\pi} + \frac{2|g'(a)|^q}{\pi} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \frac{(b-x)^2}{b-a} \left(\frac{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1} - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1}}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2|g'(x)|^q}{\pi} + \frac{2|g'(b)|^q}{\pi} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Teorem 4.14 $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° aralığında türevlenebilir olsun ve $a, b \in I$ olmak üzere $a < b$ koşulu sağlansın. Eğer g' , $[a, b]$ aralığında Lebesgue integrallenebilir ve g trigonometrik konveks bir fonksiyon ise, her $\lambda \in [0, 1]$ ve $x \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} &\left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ &\leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left(\frac{\left(1 - \frac{\lambda b-a}{2x-a}\right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda b-a}{2x-a}\right)^{p+1}}{p^2 + p} + \frac{2}{\pi q} (|g'(x)|^q + |g'(a)|^q) \right) \\ &+ \frac{(b-x)^2}{b-a} \left(\frac{\left(1 - \frac{\lambda b-a}{2b-x}\right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda b-a}{2b-x}\right)^{p+1}}{p^2 + p} + \frac{2}{\pi q} (|g'(x)|^q + |g'(b)|^q) \right) \end{aligned}$$

İspat Lemma3.4'den (3.17) eşitliğine üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right| |g'(tx + (1-t)a)| dt \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right| |g'(tx + (1-t)b)| dt. \end{aligned}$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Young Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)f(x) + \lambda \cdot \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a} \right|^p dt + \frac{1}{q} \int_0^1 |g'(tx + (1-t)a)|^q dt \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x} \right|^p dt + \frac{1}{q} \int_0^1 |g'(tx + (1-t)b)|^q dt \right] \end{aligned}$$

g fonksiyonuna trigonometrik konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a} \right|^p dt + \frac{1}{q} \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g'(x)|^q dt + \frac{1}{q} \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g'(a)|^q dt \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x} \right|^p dt + \frac{1}{q} \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g'(x)|^q dt + \frac{1}{q} \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g'(b)|^q dt \right] \end{aligned}$$

Burada $u_1 = \left(t - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a} \right)$ $u_2 = \left(t - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x} \right)$ değişken dönüşümü yapılırsa:

$$\begin{aligned} & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left(\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1}}{p^2 + p} + \frac{2}{\pi q} (|g'(x)|^q + |g'(a)|^q) \right) \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left(\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1} - \left(-\frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1}}{p^2 + p} + \frac{2}{\pi q} (|g'(x)|^q + |g'(b)|^q) \right) \end{aligned}$$

İspat tamamlanır.

Sonuç 4.11 Burada $\lambda = 0$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left| g(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \cdot \frac{2}{\pi q} (|g'(x)|^q + |g'(a)|^q) + \frac{(b-x)^2}{b-a} \cdot \frac{2}{\pi q} (|g'(x)|^q + |g'(b)|^q) \end{aligned}$$

Sonuç 4.12 Burada $\lambda = 1$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left(\frac{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1} - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a}\right)^{p+1}}{p^2 + p} + \frac{2}{\pi q} (|g'(x)|^q + |g'(a)|^q) \right) \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left(\frac{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1} - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x}\right)^{p+1}}{p^2 + p} + \frac{2}{\pi q} (|g'(x)|^q + |g'(b)|^q) \right) \end{aligned}$$

Teorem 4.15 $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve $a, b \in I$ ile $a < b$ olsun. Eğer $g' \in L([a, b])$ ve f trigonometrik konveks fonksiyon ise, her $\lambda \in [0, 1]$ ve $x \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda(b-a)}{2(x-a)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. \left(\frac{|g'(x)|^q \cdot \left(4 - \lambda\pi \cdot \frac{b-a}{x-a}\right)}{\pi^2} \right) + \left(\frac{|g'(a)|^q \cdot \left(2 - \lambda \cdot \frac{b-a}{x-a}\right) - 4}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda(b-a)}{2(b-x)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. \left(\frac{|g'(x)|^q \cdot \left(4 - \lambda\pi \cdot \frac{b-a}{b-x}\right)}{\pi^2} \right) + \left(\frac{|g'(b)|^q \cdot \left(2 - \lambda \cdot \frac{b-a}{b-x}\right) - 4}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

İspat Lemma 3.4'den (3.17) eşitliğine üçgen eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right| |g'(tx + (1-t)b)| dt \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right| |g'(tx + (1-t)b)| dt. \end{aligned}$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Power Mean Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a} \right| \cdot |g'(tx + (1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x} \right| \cdot |g'(tx + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

g fonksiyonuna trigonometrik konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| (1-\lambda)g(x) + \lambda \cdot \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a} \right| \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g'(x)|^q + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g'(a)|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^1 \left| t - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x} \right| \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g'(x)|^q + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g'(b)|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

İntegraller hesaplanırsa:

$$\begin{aligned} & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{x-a} \right)^{1-\frac{1}{q}} \cdot \left(\frac{|g'(x)|^q \cdot (4 - \lambda\pi \cdot \frac{b-a}{x-a})}{\pi^2} \right) + \left(\frac{|g'(a)|^q \cdot (2 - \lambda \cdot \frac{b-a}{x-a}) - 4}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \frac{b-a}{b-x} \right)^{1-\frac{1}{q}} \cdot \left(\frac{|g'(x)|^q \cdot (4 - \lambda\pi \cdot \frac{b-a}{b-x})}{\pi^2} \right) + \left(\frac{|g'(b)|^q \cdot (2 - \lambda \cdot \frac{b-a}{b-x}) - 4}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

İspat tamamlanır.

Sonuç 4.13 Burada $\lambda = 0$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left| g(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\frac{4|g'(x)|^q + 2|g'(a)|^q - 4}{\pi^2} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\frac{4|g'(x)|^q + 2|g'(b)|^q - 4}{\pi^2} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Sonuç 4.14 Burada $\lambda = 1$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(a) + g(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^2}{b-a} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{x-a} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left(\frac{|g'(x)|^q \cdot (4 - \pi \cdot \frac{b-a}{x-a}) + |g'(a)|^q \cdot (2 - \frac{b-a}{x-a}) - 4}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{b-x} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left(\frac{|g'(x)|^q \cdot (4 - \pi \cdot \frac{b-a}{b-x}) + |g'(b)|^q \cdot (2 - \frac{b-a}{b-x}) - 4}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right] \end{aligned}$$

Teorem 4.16 $g : [s, t] \rightarrow \mathbb{R}$ aralığında tanımlı, konform olarak integrallenebilir bir fonksiyon olsun ve $|g'(x)|$ fonksiyonu eksponansiyel konveks olsun. Eğer $\nu > 0$ ve $\tau + \theta > 0$ ise, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(s) + g(t)}{2} - \frac{(\tau + \theta)}{\nu \Gamma(\nu + 1)} (4(t^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta}))^\nu (\tau \theta K_\nu^s + H(t) + \tau \theta K_\nu^t - H(s)) \right| \\ & \leq \frac{t-s}{4(b^{\tau+\theta} - a^{\tau+\theta})} \\ & \left[\left(\frac{|g'(s)|}{e^{\alpha s}} \cdot \frac{-\Omega_2^\nu(t, s, \tau + \theta) + \Omega_1^\nu(t, t + \tau + \theta) + \Omega_2^\nu(s, s + \tau + \theta) - \Omega_1^\nu(s, t + \tau + \theta)}{(t-s)^2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{|g'(t)|}{e^{\alpha t}} \cdot \frac{+\Omega_2^\nu(s, s, \tau + \theta) - \Omega_2^\nu(t, s + \tau + \theta) + \Omega_1^\nu(t, t + \tau + \theta) - \Omega_1^\nu(s, t + \tau + \theta)}{(t-s)^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Burada $\Gamma(\cdot)$ Gamma fonksiyonunu, $H(x)$ uygun şekilde tanımlanmış integral fonksiyonu, K_ν^s, K_ν^t ise fractional (kesirli) integral operatörleriyle ilişkili katsayıları göstermektedir. Ω_1^ν ve Ω_2^ν terimleri ise literatürde tanımlı özel çekirdek fonksiyonlardır.

Not 4.1 Burada $\alpha = 0$ alınırsa eksponansiyel konvekslik bilinen konveksliğe dönüşür. 3.26 eşitliğine dönüşür. (Khan and Khan, 2020)

İspat 3.19 ve $|H'|$ 'nin konveksliği kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \frac{H(s) + H(t)}{2} - \frac{(t-s)^\theta (T(t) + 1)}{4\Gamma(\theta + 1)} [K_r^\theta H(t) + K_r^\theta H(s)] \\ & \leq \frac{t-s}{4(t^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu} \int_0^1 |\Lambda_{\tau+\theta}^\nu(\eta)| H'(\eta s + (1-\eta)t) d\eta \\ & \leq \frac{t-s}{4(t^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu} \left(\frac{|H'(s)|}{e^{\alpha s}} \int_0^1 \eta |\Lambda_{\tau+\theta}^\nu(\eta)| d\eta + \frac{|H'(t)|}{e^{\alpha t}} \int_0^1 (1-\eta) |\Lambda_{\tau+\theta}^\nu(\eta)| d\eta \right) \quad (4.1) \end{aligned}$$

Burada

$$\int_0^1 \eta |\Lambda_{\tau+\theta}^\nu(\eta)| d\eta = \frac{1}{(t-s)^2} \int_s^t |\psi(u)|(t-u) du$$

ve

$$\psi(u) = (u^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu - ((t+s-u)^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu + (t^{\tau+\theta} - (s+t-u)^{\tau+\theta})^\nu - (t^{\tau+\theta} - u^{\tau+\theta})^\nu.$$

$\psi(u)$ fonksiyonu, $[s, t]$ aralığında artan bir fonksiyondur. Bu nedenle

$$\psi(s) = -2(t^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu < 0,$$

ve

$$\psi\left(\frac{s+t}{2}\right) = 0$$

olduğundan,

$$\begin{cases} \psi(u) \leq 0 & \text{eğer } s \leq u \leq \frac{s+t}{2}, \\ \psi(u) > 0 & \text{eğer } \frac{s+t}{2} < u \leq t. \end{cases}$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \eta |\Lambda_{\tau+\theta}^\nu(\eta)| d\eta &= \frac{1}{(t-s)^2} \int_s^t |\psi(u)|(t-u) du \\ &= \frac{1}{(t-s)^2} \left[- \int_s^{\frac{s+t}{2}} \psi(u)(t-u) du + \int_{\frac{s+t}{2}}^t \psi(u)(t-u) du \right] \\ &= \frac{1}{(t-s)^2} [K_1 + K_2 + K_3 + K_4] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Burada:

$$K_1 = - \int_s^{\frac{s+t}{2}} (t-u)(u^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu du + \int_{\frac{s+t}{2}}^t (t-u)(u^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu du \quad (4.3)$$

$$K_2 = \int_s^{\frac{s+t}{2}} (t-u)((t+s-u)^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu du + \int_{\frac{s+t}{2}}^t (t-u)((t+s-u)^{\tau+\theta} - s^{\tau+\theta})^\nu du \quad (4.4)$$

$$K_3 = - \int_s^{\frac{s+t}{2}} (t-u)((t+s-u)^{\tau+\theta})^\nu du + \int_{\frac{s+t}{2}}^t (t-u)(t^{\tau+\theta} - (s+t-u)^{\tau+\theta})^\nu du \quad (4.5)$$

$$K_4 = \int_s^{\frac{s+t}{2}} (t-u)(s+t-u)^{\tau+\theta})^\nu du + \int_{\frac{s+t}{2}}^t (t-u)(t^{\tau+\theta} - u^{\tau+\theta})^\nu du \quad (4.6)$$

Buradan:

$$K_1 = -\Omega_2^\nu(t, s, \tau + \theta), \quad K_4 = \Omega_1^\nu(t, t + \tau\theta).$$

Değişken dönüşümüyle $v = s + t - u$ alınarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$K_2 = -\Omega_2^\nu(s, s, \tau + \theta), \quad K_3 = -\Omega_1^\nu(s, t + \tau\theta), \quad .$$

Bu ifadeler (4.2) eşitsizliğine yerleştirilirse,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \eta |\Lambda_{\tau+\theta}^\nu(\eta)| d\eta \\
&= \frac{-\Omega_2^\nu(t, s, \tau + \theta) + \Omega_1^\nu(t, t + \tau + \theta) + \Omega_2^\nu(s, s + \tau + \theta) - \Omega_1^\nu(s, t + \tau + \theta)}{(t - s)^2} \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (1 - \eta) |\Lambda_{\tau+\theta}^\nu(\eta)| d\eta \\
&= \frac{+\Omega_2^\nu(s, s, \tau + \theta) - \Omega_2^\nu(t, s + \tau + \theta) + \Omega_1^\nu(t, t + \tau + \theta) - \Omega_1^\nu(s, t + \tau + \theta)}{(t - s)^2} \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak, (4.2), (4.7) ve (4.8) ifadeleri birlikte kullanıldığında ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.17 $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli n -defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve $g^{(n)} \in L([u, v])$ olmak üzere $n \geq 1$ ve $0 < s \leq 1$. Eğer $|g^{(n)}|$ fonksiyonu eksponansiyel konveks ise, o hâlde her $x \in [u, v]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\
& \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} \left(\frac{1}{2} \frac{|g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{1}{2} \frac{|g^{(n)}(u)|^q}{e^{\alpha u}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(v-x)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} \left(\frac{1}{2} \frac{|g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{1}{2} \frac{|g^{(n)}(u)|^q}{e^{\alpha u}} \right) \frac{1}{q}
\end{aligned}$$

İspat Lemma3.6 (3.35) eşitliğinden, mutlak değer özelliklerinden ve uygun değişken dönüşümlerinden ($u = (1-t)u + tx$ ve $u = (1-t)x + tv$) faydalanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\
& \leq \int_u^x \frac{(w-u)^n}{n!} |g^{(n)}(w)| dw + \int_x^v \frac{(v-w)^n}{n!} |g^{(n)}(w)| dw \\
& = \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n |g^{(n)}((1-t)u + tx)| dt + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n |g^{(n)}((1-t)x + tv)| dt
\end{aligned}$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Hölder Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\ & \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 t^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g^{(n)}((1-t)u + tx)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 (1-t)^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g^{(n)}((1-t)x + tv)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

g fonksiyonuna eksponansiyel konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\ & \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 t^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{t |g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{(1-t) |g^{(n)}(u)|^q}{e^{\alpha u}} \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 (1-t)^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{t |g^{(n)}(v)|^q}{e^{\alpha v}} + \frac{(1-t) |g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

İntegraller hesaplanırsa:

$$\begin{aligned} & \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} \left(\frac{1}{2} \frac{|g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{1}{2} \frac{|g^{(n)}(u)|^q}{e^{\alpha u}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{(v-x)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} \left(\frac{1}{2} \frac{|g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{1}{2} \frac{|g^{(n)}(u)|^q}{e^{\alpha u}} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

İspat tamamlanır.

Teorem 4.18 $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli n -defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve $g^{(n)} \in L([u, v])$ olmak üzere $n \geq 1$ ve $0 < s \leq 1$. Eğer $|g^{(n)}|$ fonksiyonu eksponansiyel konveks ise, o hâlde her $x \in [u, v]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\ & \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{n+2} \frac{|g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{1}{n^2+3n+2} \frac{|g^{(n)}(u)|^q}{e^{\alpha u}} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{n+2} \frac{|g^{(n)}(v)|^q}{e^{\alpha v}} + \frac{1}{n^2+3n+2} \frac{|g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

İspat Lemma3.6 (3.35) eşitliğinden, mutlak değer özelliklerinden ve uygun değişken dönüşümlerinden ($w = (1-t)u + tx$ ve $w = (1-t)x + tv$) faydalanılarak aşağıdaki eşitsizlik

elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\
& \leq \int_u^x \frac{(w-u)^n}{n!} |g^{(n)}(w)| dw + \int_x^v \frac{(v-w)^n}{n!} |g^{(n)}(w)| dw \\
& = \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n |g^{(n)}((1-t)u + tx)| dt + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n |g^{(n)}((1-t)x + tv)| dt
\end{aligned}$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Power Mean Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\
& \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 |t|^n dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |t|^n |g^{(n)}((1-t)u + tx)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 |t|^n dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |t|^n |g^{(n)}((1-t)x + tv)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

g fonksiyonuna eksponansiyel konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\
& \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 |t|^n dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |t|^n \left(\frac{|g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{(1-t)|g^{(n)}(u)|^q}{e^{\alpha u}} \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 |t|^n dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |t|^n \left(\frac{|g^{(n)}(v)|^q}{e^{\alpha v}} + \frac{(1-t)|g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} \right) dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

İntegraller hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{n+2} \frac{|g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{1}{n^2+3n+2} \frac{|g^{(n)}(u)|^q}{e^{\alpha u}} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left[\left(\frac{1}{n+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{n+2} \frac{|g^{(n)}(v)|^q}{e^{\alpha v}} + \frac{1}{n^2+3n+2} \frac{|g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

İspat tamamlanır.

Teorem 4.19 $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli n -defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve $g^{(n)} \in L([u, v])$ olmak üzere $n \geq 1$ ve $0 < s \leq 1$. Eğer $|g^{(n)}|$ fonksiyonu eksponansiyel konveks ise, o hâlde her $x \in [u, v]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\
& \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{np^2+p} + \frac{1}{2q} \left(\frac{|g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} - \frac{|g^{(n)}(u)|^q}{e^{\alpha u}} \right) \right) \\
& + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\frac{-1}{np^2+p} + \frac{1}{2q} \left(\frac{|g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} - \frac{|g^{(n)}(v)|^q}{e^{\alpha v}} \right) \right)
\end{aligned}$$

İspat Lemma3.6 (3.35) eşitliğinden, mutlak değerin özelliklerinden ve uygun değişken dönüşümlerinden ($w = (1-t)u + tx$ ve $w = (1-t)x + tv$) faydalanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r(x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\ & \leq \int_u^x \frac{(w-u)^n}{n!} |g^{(n)}(w)| dw + \int_x^v \frac{(v-w)^n}{n!} |g^{(n)}(w)| dw \\ & = \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n |g^{(n)}((1-t)u + tx)| dt + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n |g^{(n)}((1-t)x + tv)| dt \end{aligned}$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Young Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 t^{np} dt + \frac{1}{q} \int_0^1 |g^{(n)}((1-t)u + tx)|^q dt \right) \\ & + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 (1-t)^{np} dt + \frac{1}{q} \int_0^1 |g^{(n)}((1-t)x + tv)|^q dt \right) \end{aligned}$$

g fonksiyonuna eksponansiyel konveks özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 t^{np} dt + \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{t |g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{(1-t) |g^{(n)}(u)|^q}{e^{\alpha u}} dt \right) \\ & + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 (1-t)^{np} dt + \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{t |g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} + \frac{(1-t) |g^{(n)}(v)|^q}{e^{\alpha v}} dt \right) \end{aligned}$$

İntegraller hesaplanırsa

$$\begin{aligned} & \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{np^2 + p} + \frac{1}{2q} \left(\frac{|g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} - \frac{|g^{(n)}(u)|^q}{e^{\alpha u}} \right) \right) \\ & + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\frac{-1}{np^2 + p} + \frac{1}{2q} \left(\frac{|g^{(n)}(x)|^q}{e^{\alpha x}} - \frac{|g^{(n)}(v)|^q}{e^{\alpha v}} \right) \right) \end{aligned}$$

İspat tamamlanır.

Teorem 4.20 $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli n -defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve $g^{(n)} \in L([u, v])$ olmak üzere $n \geq 1$ ve $0 < s \leq 1$. Eğer $|g^{(n)}|$ fonksiyonu trigonometrik konveks ise, o hâlde her $x \in [u, v]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r(x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\ & \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{n+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t^n \left(\sin \left(\frac{\pi t}{2} \right) |g^{(n)}(x)| + \cos \left(\frac{\pi t}{2} \right) |g^{(n)}(u)| \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{n+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t^n \left(\sin \left(\frac{\pi t}{2} \right) |g^{(n)}(v)| + \cos \left(\frac{\pi t}{2} \right) |g^{(n)}(x)| \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

İspat Lemma3.6 (3.35) eşitliğinden, mutlak değerin özelliklerinden ve uygun değişken dönüşümlerinden ($z = (1-t)u + tx$ ve $z = (1-t)x + tv$) faydalanılarak aşağıdaki eşitsizlik

elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\
& \leq \int_u^x \frac{(z-u)^n}{n!} |g^{(n)}(z)| dz + \int_x^v \frac{(v-z)^n}{n!} |g^{(n)}(z)| dz \\
& = \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n |g^{(n)}((1-t)u + tx)| dt + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n |g^{(n)}((1-t)x + tv)| dt
\end{aligned}$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Power Mean Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 |t|^n dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |t|^n |g^{(n)}((1-t)u + tx)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 |t|^n dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |t|^n |g^{(n)}((1-t)x + tv)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

g fonksiyonuna trigonometrik konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 t^n dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t^n \left(\sin \left(\frac{\pi t}{2} \right) |g^n(x)| + \cos \left(\frac{\pi t}{2} \right) |g^n(u)| \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 t^n dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t^n \left(\sin \left(\frac{\pi t}{2} \right) |g^n(v)| + \cos \left(\frac{\pi t}{2} \right) |g^n(x)| \right) dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

İntegraller hesaplanırsa:

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{n+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t^n \left(\sin \left(\frac{\pi t}{2} \right) |g^n(x)| + \cos \left(\frac{\pi t}{2} \right) |g^n(u)| \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{n+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t^n \left(\sin \left(\frac{\pi t}{2} \right) |g^n(v)| + \cos \left(\frac{\pi t}{2} \right) |g^n(x)| \right) dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

İspat tamamlanır.

Sonuç 4.15 $n=1$ için eşitsizlik aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_u^v g(t) dt - (v-x)g(x) - (x-u)g(x) \right| \\
& \leq \frac{(x-u)^2}{1!} \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{4|g'(x)| + 2(\pi-2)|f'(u)|}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(v-x)^2}{1!} \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{4|g'(x)| + 2(\pi-2)|g'(v)|}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Sonuç 4.16 $n=2$ için eşitsizlik aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} & \left| \int_u^v g(t) dt - (v-x)g(x) - \frac{(v-x)^2 - (x-u)^2}{2} g'(x) - \frac{(v-x)^3 + (x-u)^3}{6} g''(x) \right| \\ & \leq \frac{(x-u)^3}{2!} \left(\frac{1}{3} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{8(\pi-2)}{\pi^3} |g''(x)| + \left(\frac{-16}{\pi^3} + \frac{2}{\pi} \right) |g''(u)| \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(v-x)^3}{2!} \left(\frac{1}{3} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{8(\pi-2)}{\pi^3} |g''(x)| + \left(\frac{-16}{\pi^3} + \frac{2}{\pi} \right) |g''(v)| \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Sonuç 4.17 $n=3$ için eşitsizlik aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} & \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^3 \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\ & \leq \frac{(x-u)^4}{3!} \left(\frac{1}{4} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{12(\pi^2-8)}{\pi^4} |g^{(3)}(x)| + \frac{2(\pi^3-24\pi+48)}{\pi^4} |g^{(3)}(u)| \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(v-x)^4}{3!} \left(\frac{1}{4} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{12(\pi^2-8)}{\pi^4} |g^{(3)}(x)| + \frac{2(\pi^3-24\pi+48)}{\pi^4} |g^{(3)}(v)| \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Teorem 4.21 $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli n -defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve $g^{(n)} \in L([u, v])$ olmak üzere $n \geq 1$ ve $0 < s \leq 1$. Eğer $|g^{(n)}|$ fonksiyonu trigonometrik konveks ise, o hâlde her $x \in [u, v]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\ & \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{np^2+p} + \frac{2}{\pi q} (|g^{(n)}(x)|^q + |g^{(n)}(u)|^q) \right) \\ & \quad + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\frac{-1}{np^2+p} + \frac{2}{\pi q} (|g^{(n)}(x)|^q + |g^{(n)}(v)|^q) \right) \end{aligned}$$

İspat Lemma3.6 (3.35) eşitliğinden, mutlak değer özelliklerinden ve uygun değişken dönüşümlerinden ($z = (1-t)u + tx$ ve $z = (1-t)x + tv$) faydalanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\ & \leq \int_u^x \frac{(z-u)^n}{n!} |g^{(n)}(z)| dz + \int_x^v \frac{(v-z)^n}{n!} |g^{(n)}(z)| dz \\ & = \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n |g^{(n)}((1-t)u + tx)| dt + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n |g^{(n)}((1-t)x + tv)| dt \end{aligned}$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Young Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 t^{np} dt + \frac{1}{q} \int_0^1 |g^{(n)}((1-t)u+tx)|^q dt \right) \\ + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 (1-t)^{np} dt + \frac{1}{q} \int_0^1 |g^{(n)}((1-t)v+tx)|^q dt \right)$$

g fonksiyonuna trigonometrik konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 t^{np} dt + \frac{1}{q} \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g^{(n)}(x)|^q + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g^{(n)}(u)|^q dt \right) \\ + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 (1-t)^{np} dt + \frac{1}{q} \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g^{(n)}(x)|^q + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) |g^{(n)}(v)|^q dt \right)$$

İntegraller hesaplanırsa

$$\leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{np^2+p} + \frac{2}{\pi q} (|g^{(n)}(x)|^q + |g^{(n)}(u)|^q) \right) \\ + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\frac{-1}{np^2+p} + \frac{2}{\pi q} (|g^{(n)}(x)|^q + |g^{(n)}(v)|^q) \right)$$

Sonuç 4.18 $n = 1$ için eşitsizlik aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\left| \int_u^v g(t) dt - (v-x)g(x) - (x-u)g(x) \right| \leq \\ \frac{(u-x)^2 [2p(p+1) (|g'(u)|^q + |g'(x)|^q) + \pi q] + (v-x)^2 [2p(p+1) (|g'(v)|^q + |g'(x)|^q) - \pi q]}{\pi p q (p+1)}$$

Sonuç 4.19 $n = 2$ için eşitsizlik aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^2 \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \leq \\ \frac{-(u-x)^3 [2p(2p+1) (|g''(u)|^q + |g''(x)|^q) + \pi q] + (v-x)^3 [2p(2p+1) (|g''(v)|^q + |g''(x)|^q) - \pi q]}{2\pi p q (2p+1)}$$

Teorem 4.22 $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli n -defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve $g^{(n)} \in L([u, v])$ olmak üzere $n \geq 1$ ve $0 < s \leq 1$. Eğer $|g^{(n)}|$ fonksiyonu s konveks ise, o hâlde her $x \in [u, v]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\ \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} \left(\frac{|g^{(n)}(x)|^q - |g^{(n)}(u)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + \frac{(v-x)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} \left(\frac{|g^{(n)}(v)|^q - |g^{(n)}(x)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}}$$

İspat Lemma 3.6 (3.35) eşitliğinden, mutlak değer özelliklerinden ve uygun değişken dönüşümlerinden ($z = (1-t)u + tx$ ve $z = (1-t)x + tv$) faydalanılarak aşağıdaki eşitsizlik

elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\
& \leq \int_u^x \frac{(z-u)^n}{n!} |g^{(n)}(z)| dz + \int_x^v \frac{(v-z)^n}{n!} |g^{(n)}(z)| dz \\
& = \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n |g^{(n)}((1-t)u + tx)| dt + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n |g^{(n)}((1-t)x + tv)| dt
\end{aligned}$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Hölder Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 t^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g^{(n)}((1-t)u + tx)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 (1-t)^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g^{(n)}((1-t)x + tv)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

g fonksiyonuna s konveks fonksiyon özelliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 t^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t^s |g^{(n)}(x)|^q dt + \int_0^1 (1-t)^s |g^{(n)}(u)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 (1-t)^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t^s |g^{(n)}(v)|^q dt + \int_0^1 (1-t)^s |g^{(n)}(x)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

İntegraller hesaplanırsa:

$$\leq \frac{(x-u)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} \left(\frac{|g^{(n)}(x)|^q - |g^{(n)}(u)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + \frac{(v-x)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} \left(\frac{|g^{(n)}(v)|^q - |g^{(n)}(x)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}}$$

İspat tamamlanır.

Teorem 4.23 $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli n -defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve $g^{(n)} \in L([u, v])$ olmak üzere $n \geq 1$ ve $0 < s \leq 1$. Eğer $|g^{(n)}|$ fonksiyonu h konveks ise, o hâlde her $x \in [u, v]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\
& \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} \left(\int_0^1 h(t) \cdot |g^{(n)}(x)|^q dt + \int_0^1 h(1-t) \cdot |g^{(n)}(u)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(v-x)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} \left(\int_0^1 h(t) \cdot |g^{(n)}(v)|^q dt + \int_0^1 h(1-t) \cdot |g^{(n)}(x)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

İspat Lemma3.6 (3.35) eşitliğinden, mutlak değer özelliklerinden ve uygun değişken dönüşümlerinden ($u = (1-t)u + tx$ ve $u = (1-t)x + tv$) faydalanılarak aşağıdaki eşitsizlik

elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\
& \leq \int_u^x \frac{(w-u)^n}{n!} |g^{(n)}(w)| dw + \int_x^v \frac{(v-w)^n}{n!} |g^{(n)}(w)| dw \\
& = \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n |g^{(n)}((1-t)u + tx)| dt + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n |g^{(n)}((1-t)x + tv)| dt
\end{aligned}$$

Eşitsizliğe literatürde iyi bilinen Hölder Eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\
& \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 t^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g^{(n)}((1-t)u + tx)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(v-x)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 (1-t)^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g^{(n)}((1-t)x + tv)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

g fonksiyonuna h konveks fonksiyon özelliği uygulanır ve integraller hesaplanırsa:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\
& \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} \left(\int_0^1 h(t) \cdot |g^{(n)}(x)|^q dt + \int_0^1 h(1-t) \cdot |g^{(n)}(u)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(v-x)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} \left(\int_0^1 h(t) \cdot |g^{(n)}(v)|^q dt + \int_0^1 h(1-t) \cdot |g^{(n)}(x)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

İspat tamamlanır.

Sonuç 4.20 $|g^{(n)}|^q$ fonksiyonu h konvektir ve $h(t) = t$ seçilsin. O hâlde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\
& \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} \left(\frac{1}{2} (|g^{(n)}(x)|^q + |g^{(n)}(u)|^q) \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(v-x)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} \left(\frac{1}{2} (|g^{(n)}(x)|^q + |g^{(n)}(v)|^q) \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Sonuç 4.21 $|g^{(n)}|^q$ fonksiyonu h konvektir ve $h(t) = t^s$ seçilsin. O hâlde aşağıdaki eşitsizlik

sağlanır:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\
& \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} \left(\frac{1}{s+1} (|g^{(n)}(x)|^q + |g^{(n)}(u)|^q) \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(v-x)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} \left(\frac{1}{s+1} (|g^{(n)}(x)|^q + |g^{(n)}(v)|^q) \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Sonuç 4.22 $|g^{(n)}|^q$ fonksiyonu h konvektir ve $h(t) = 1$ seçilsin. O hâlde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_u^v g(t) dt - \sum_{r=0}^n \left[\frac{(v-x)^{r+1} + (-1)^r (x-u)^{r+1}}{(r+1)!} \right] g^{(r)}(x) \right| \\
& \leq \frac{(x-u)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} (|g^{(n)}(x)|^q + |g^{(n)}(u)|^q)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(v-x)^{n+1}}{(np+1)^{\frac{1}{p}} n!} (|g^{(n)}(x)|^q + |g^{(n)}(v)|^q)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, konveks fonksiyonlar teorisi ve kesirli integral operatörleri alanında yeni integral eşitsizlikleri geliştirilmiştir. Tezin temel amacı, çeşitli konvekslik sınıflarına (özellikle eksponansiyel konvekslik, trigonometrik konvekslik ve h -konvekslik) yönelik uygun kesirli integral operatörleri aracılığıyla yeni eşitsizlikler elde etmektir.

Çalışmada, toplam altı farklı lemma kullanılarak bu farklı konvekslik türleri için geniş kapsamlı analizler yapılmış ve her bir sınıfa özgü yeni integral eşitsizlikleri içeren teoremler literatüre kazandırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, klasik Hermite-Hadamard türü eşitsizliklerin kesirli türev ve integral operatörleriyle genelleştirilmesi açısından önemli bir katkı sağlamaktadır.

Özellikle tezimizin dördüncü bölümünde sunulan araştırma bulguları, farklı konvekslik sınıflarının özelliklerini kullanarak yeni eşitsizliklerin nasıl oluşturulabileceğini göstermiştir. Bu bölümde verilen teoremler, hem teorik matematik alanında hem de fonksiyonel analiz gibi uygulamalı disiplinlerde çalışmak isteyen araştırmacılar için değerli bir kaynak teşkil etmektedir.

Araştırmacıların, bu tezde geliştirilen yöntemlerin diğer konvekslik türlerine, örneğin s -konvekslik veya m -konvekslik gibi farklı yapıdaki fonksiyonlara uygulanması ve farklı kesirli operatör türleriyle karşılaştırılması önerilmektedir. .

Sonuç olarak, bu çalışma konveks fonksiyonlarda kesirli integral eşitsizliklerine yönelik teorik altyapıyı önemli ölçüde genişletmiş ve matematiksel analiz literatürüne özgün ve faydalı katkılar sunmuştur. Bu katkıların ileride yapılacak çalışmalar için sağlam bir temel oluşturması ve ilgili disiplinlerde yeni araştırma yolları açması beklenmektedir.

Kaynakça

- Agarwal, P., Vivas-Cortez, M., Rangel-Oliveros, Y., and Ali, M. A. (2022). New ostrowski type inequalities for generalized s-convex functions with applications to some special means of real numbers and to midpoint formula. *AIMS Mathematics*, 7(1):1429–1444.
- Alomari, M., Darus, M., and Dragomir, S. S. (2009). Inequalities of hermite-hadamard's type for functions whose derivatives absolute values are quasi-convex. *Research report collection*, 12(Supp).
- Awan, M. U., Noor, M. A., and Noor, K. I. (2018). Hermite-hadamard inequalities for exponentially convex functions. *Appl. Math. Inf. Sci*, 12(2):405–409.
- Beckenbach, E. and Bellman, R. (1961). *Inequalities*. Springer.
- Breckner, W. (1978). Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen. *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, 23:13–20.
- Dragomir, S., Agarwal, R., and Barnett, N. (1999a). Inequalities for Beta and Gamma functions via some classical and new integral inequalities. *RGMIA research report collection*, 2(3).
- Dragomir, S. and Pearce, C. (1998). Quasi-convex functions and hadamard's inequality. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 57(3):377–385.
- Dragomir, S. and Pearce, C. (2000). *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*. RGMIA Monographs, Victoria University.
- Dragomir, S. S., Cerone, P., Roumeliotis, J., and Wang, S. (1999b). A weighted version of ostrowski inequality for mappings of holder type and applications in numerical analysis. *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 42(90)(4):301–314.
- Hardy, G., Littlewood, J., and Pólya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge University Press.
- Hudzik, H. and Maligranda, L. (1994). Some remarks on s-convex functions. *Aequationes*

mathematicae, 48(1):100–111.

KADAKAL, H. (2018). Hermite-hadamard type inequalities for trigonometrically convex functions. *Scientific Studies & Research. Series Mathematics & Informatics*, 28(2).

Kannappan, P. (2009). *Functional equations and inequalities with applications*. Springer Science & Business Media.

Khan, T. U. and Khan, M. A. (2020). Hermite-hadamard inequality for new generalized conformable fractional operators. *AIMS Math*, 6:23–38.

Liu, Z. (2012). A note on ostrowski type inequalities related to some s-convex functions in the second sense. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 49(4):775–785.

Mitrinovic, D. (1970). *Analytic Inequalities*. Springer.

Mitrinovic, D., Pecaric, J., and Fink, A. (1993). *Classical and new inequalities in analysis*. Kluwer Academic, Dordrecht.

Pachpatte, B. (2005). *Mathematical Inequalities*. Elsevier.

Pečarić, J. and Tong, Y. (1992). *Convex functions, partial orderings, and statistical applications*. Academic press.

Rainville, E. D. (1971). *Special functions*, reprint of 1960.

Set, E. (2012). New inequalities of ostrowski type for mappings whose derivatives are s-convex in the second sense via fractional integrals. *Computers Mathematics with Applications*, 63(7):1147–1154.

Tariq, M., Sahoo, S., Ahmad, H., Iampan, A., and Shaikh, A. (2023). New ostrowski-type inequalities pertaining to conformable fractional operators. *J. Math. Comput. Sci*, 29:28–39.

Varošanec, S. (2007). On h-convexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 326(1):303–311.

Varošanec, S. (2007). On h -convexity. *J. Math. Anal. Appl.*, 326:303–311.



ÖZGEÇMİŞ

Zuhal BAYRAM

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Eğitim

- Yüksek Lisans (2023 Ekim - 2025 Haziran)
 - Analiz Ve Fonksiyonlar Teorisi, Matematik Anabilim Dalı, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Ağrı, Türkiye
 - Alınan Dersler : Konveks Fonksiyonlar I, Konveks Fonksiyonlar II, Eşitsizlik Teorisi II, Bilimsel Araştırma Yöntemleri Ve Yayın Etiği, İleri Analiz I, Cebirsel Analiz, İntegral Eşitsizlikler Ve Uygulamaları I, Latex İle Döküman Hazırlama
 - Ortalama : 3.81
 - Tez Başlığı : "DİFERANSİYELLENEBİLEN BAZI FARKLI TÜRDE KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ"
- Lisans (2016 Eylül - 2020 Haziran)
 - İlköğretim Matematik Öğretmenliği, Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Ağrı, Türkiye
 - Ortalama : 2.9

Deneyimler

- İlköğretim Matematik Öğretmeni (2021 Eylül - Halen)
 - Eleşkirt Anadolu Lisesi, Ağrı/ Eleşkirt
 - Vali Ali Yerlikaya Ortaokulu, Ağrı

Bilgisayar Becerileri

- İleri düzey MS Excel ve MS Word
- Python

- Geogebra
- Latex

Diller

- İngilizce - Orta seviye

Zuhal Bayram

