

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DİFERENSİYEL CEBİRSEL DENKLEMLERİN KUVVET  
SERİSİ İLE ÇÖZÜMÜ**

**Matematikçi Muhammet KURULAY**

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında  
Hazırlanan**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Tez Danışmanı:** Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

**İSTANBUL, 2006**

# İÇİNDEKİLER

|                                                                       | Sayfa |
|-----------------------------------------------------------------------|-------|
| ŞEKİL LİSTESİ.....                                                    | iii   |
| ÇİZELGE LİSTESİ .....                                                 | iv    |
| ÖNSÖZ.....                                                            | v     |
| ÖZET .....                                                            | vi    |
| ABSTRACT .....                                                        | vii   |
| 1. GİRİŞ.....                                                         | 1     |
| 2. TEMEL BİLGİLER.....                                                | 3     |
| 2.1. Önbilgiler.....                                                  | 3     |
| 2.2. Diferensiyel Cebirsel Denklemler .....                           | 9     |
| 2.2.1. Diferensiyel Cebirsel Denklemlerin Index'i .....               | 10    |
| 2.2.2. Diferensiyel Cebirsel Denklemlerin Özel Formları.....          | 12    |
| 2.2.2.1. l-index'li Hessenberg Formu.....                             | 12    |
| 2.2.2.2. 2-index'li Hessenberg Formu.....                             | 12    |
| 2.2.2.3. 3-index'li Hessenberg Formu.....                             | 13    |
| 2.2.2.4. r-index'li Hessenberg Formu .....                            | 15    |
| 2.3. Kuvvet Serilerinin Aritmetiği .....                              | 16    |
| 3. MATERYAL ve YÖNTEM .....                                           | 18    |
| 3.1. Diferensiyel Cebirsel Denklemleri Çözmek İçin Nümerik Metot..... | 18    |
| 3.2. Nümerik Metodun Kuvvet Serilerine Uygulanışı.....                | 18    |
| 4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI.....                                           | 20    |
| 5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....                                             | 30    |
| KAYNAKLAR.....                                                        | 31    |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                                         | 32    |

## ŞEKİL LİSTESİ

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 4.1 Test problemi (4.1) deki $y_2(t)$ ve $y_2^*(t)$ in grafiği.....  | 23 |
| Şekil 4.2 Test problemi (4.2) deki $y_1(x)$ ve $y_1^*(x)$ in grafiği ..... | 27 |
| Şekil 4.3 Test problemi (4.2) deki $y_2(x)$ ve $y_2^*(x)$ in grafiği.....  | 29 |

## ÇİZELGE LİSTESİ

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Çizelge 4.1 Test problemi (4.1) deki $y_2(t)$ ile $y_2^*(t)$ nin karşılaştırılması. .... | 22 |
| Çizelge 4.2 Test problemi (4.2) deki $y_1(x)$ ile $y_1^*(x)$ nin karşılaştırılması ..... | 26 |
| Çizelge 4.3 Test problemi (4.2) deki $y_2(x)$ ile $y_2^*(x)$ nin karşılaştırılması ..... | 28 |

## ÖNSÖZ

Matematiksel modellerinin oluşturulması uygulamalı bilim dallarında büyük bir önem taşımaktadır. Bu konuda yapılan çalışmalar bilgisayar teknolojisinin gelişmesi sonucunda oldukça büyük bir hız kazanmıştır. Yapılan araştırmalar sonucunda, matematiksel modelleme problemlerinin genelde diferensiyel cebirsel denklem olarak karşımıza çıktığı gözlemlenmiştir. Bu nedenle, diferensiyel cebirsel denklemlerin sayısal çözümlerinin araştırılması, matematiksel modelleme teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır.

Bu çalışmanın hazırlanmasında her türlü yardımı benden esirgemeyen çok değerli hocam, Prof. Dr. Mustafa Bayram'a teşekkür ediyorum.

Çalışmam sırasında yol gösterici olan Yrd. Doç. Dr. Ercan Çelik ve Yrd. Doç. Dr. Nuran Güzel'e de ayrıca teşekkür ediyorum.

## ÖZET

Bu tezde, mühendislik ve fen bilimlerinde ortaya çıkan diferensiyel cebirsel denklem sistemlerini çözmek için bir metot sunuldu. İlk olarak, diferensiyel cebirsel denklem sistemi keyfi mertebede kuvvet serisine dönüştürüldü, daha sonra nümerik sistem çözüldü. Test metodumuzda 1-index ile iki farklı problem ele aldık. Problemlerin çözümleri tam çözümleri ile karşılaştırıldı.

**Anahtar kelimeler:** Diferensiyel cebirsel denklem, kuvvet serileri, index, keyfi mertebe.

## **ABSTRACT**

In this thesis, a method is described for solving systems of differential-algebraic equations arising in sciences and engineering. Firstly, differential-algebraic equations system is transformed into power series in arbitrary order, then the system solved numerically. We have handled two kind of problems with index-1 to test our method. The solutions of the problems have been compared with their exact solution.

**Keywords:** Differential-algebraic equations, power series, Index, arbitrary order.

## 1. GİRİŞ

Yapılan araştırmalar sonucunda, uygulamalı bilim dallarında, pratikte karşılaşılan problemlerin matematiksel modellemeler oluşturması büyük bir önem taşımaktadır. Bu konuda yapılan çalışmalar bilgisayar teknolojisinin gelişmesi sonucunda 20. yüzyılın sonuna doğru oldukça büyük bir hız kazanmıştır. Matematiksel modelleme problemlerin genelde diferansiyel-cebirselsel denklem olarak karşımıza çıktığı gözlenmiştir. Bu nedenle, diferansiyel-cebirselsel denklemlerin nümerik çözümlerinin araştırılması, matematiksel modelleme teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır.

Son yıllarda yapılan araştırmalar, matematiksel modelleme teorisinde ortaya çıkan, bilgisayar destekli tasarım (CAD/CAM), mekanik sistemlerin simülasyonu, güç sistemleri, kimyasal işlemlerin simülasyonu ve optimal kontrol gibi problemlerin matematiksel modellemelerin sonucu olarak elde edilen diferansiyel cebirselsel denklem sistemlerinin sayısal çözümü üzerinde odaklanmıştır.

Çelik (2002) Diferansiyel-cebirselsel denklemlerin Padé yaklaşımı ile nümerik çözümü üzerinde çalışmalar yapmıştır. Pierlugi Amodio ve Francesco Mazzia (1992) başlangıç/sınır değer metotlarını kullanarak diferansiyel cebirselsel denklemlerin çözümlerine uyguladı. Müller (2000) diferansiyel cebirselsel denklemlerle modellenmiş dinamik sistemin iyi yönleri (pros) ve kötü yönleri (cons) ile ilgili bir çalışma yapmıştır. Feng-Sheng Wang (2000) mühendislikteki diferansiyel cebirselsel denklemleri çözmek için sıralama (Collocation) metodunu geliştirmiştir.

Bu metotların yanısıra diferansiyel cebirselsel denklemleri çözmek için araştırmacılar çeşitli bilgisayar paket programları geliştirmişlerdir. Deuflhard (1982) lineer kapalı (implicit) 0 ve 1 index'li diferansiyel cebirselsel denklem sistemleri için bilinenden bilinmeyenlerin tahmini (extrapolation) metodunu kullanarak *LİMEX* bilgisayar paket programı, Petzold (1989) genel implicit 0 ve 1 index'li diferansiyel cebirselsel denklem sistemleri için Backward diferansiyel formüllerini kullanarak *DASSL* bilgisayar paket programı kullandı. Hairer ve Wanner (1992) lineer kapalı (implicit) 0 ve 1 index'li, 2 ve 3 index'li diferansiyel cebirselsel denklemlerin Hessenberg formları için Runge-Kutta metodunu kullanarak (başlangıç değer problemlerini çözmek için) *RADAU5* bilgisayar paket programı ve sınır değer problemlerini çözmek için

*COLDAE* bilgisayar paket programlarını kullanmışlardır.

Kunkel (1995) değişken katsayılı genel lineer sistemler için hem Runge-Kutta hem de geri fark (backward) formüllerini kullanarak *GELDA* bilgisayar paket programlarını sunmuşlardır.

Bu tez çalışmasında, diferensiyel cebirsel denklemlerin kuvvet serileri ile çözümlerini elde etmek için bir metot sunuldu. Metot, iki değişik test problemine uygulandı. İndex'i 1 olan diferensiyel cebirsel denklemler keyfi dereceye kadar kuvvet serilerine dönüştürüldü. Sonra, diferensiyel cebirsel denklemlerin yaklaşık çözümleri elde edildi. Keyfi dereceye kadar kuvvet serilerine dönüştürülen diferensiyel cebirsel denklemlerin çözümleri tam çözümlerle karşılaştırıldı.

## 2. TEMEL BİLGİLER

### 2.1 Önbilgiler

Bu bölümde, tezdeki boşlukları doldurmak için çalışmada kullanılan bazı temel kavramlar verilecektir. Diferensiyel denklemlerde bulunan bilinmeyen fonksiyonun tek bir değişkene ya da birden fazla değişkene bağlı olup olmadığına bakılır.

**2.1.1 Tanım:** Bir bağımsız değişken ile bir bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denkleme diferensiyel denklem denir. Bu tür denklemlerin en genel formu;

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklindedir. Burada  $y''$ ,  $y'$ 'nin  $x$ 'e göre  $n$ 'yinci türevidir. Yukarıdaki denklemi  $y''$  ye göre çözümlürse

$$y'' = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

elde edilir. Bu da denkleminin açık formda yazılmış halidir.

**2.1.2. Tanım:**  $m$  inci dereceden bir

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

polinomunu göz önüne alalım. Bu polinomun sıfıra eşit kılınmasıyla yazılan

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

şeklindeki denkleme cebirsel denklem denir. Pozitif  $m$  tamsayısına  $f(x) = 0$  denkleminin derecesi denir.  $f(x)$  polinomunda  $f(x_i) = 0$  denklemini sağlayan  $x_i$  ye denklemin kökü denir.

**2.1.3. Tanım:** Eğer  $f(x)$  fonksiyonunun  $x = c$  de her mertebeden türevi varsa

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots$$

serisine

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$

fonksiyonunun  $x_0 = c$  'deki Taylor serisi denir. Eğer  $c = 0$  alınırsa bu seriye

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

fonksiyonuna Maclaurin serisi adı verilir.

**2.1.4. Tanım:**  $a_{ij}$  ve  $b_i$  gerçel sayılar  $x_1, x_2, \dots, x_n$  'lerde bilinmeyenler olmak üzere  $n$  tane bilinmeyenli  $m$  tane lineer denklemden oluşan

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i=1, 2, 3, \dots, m$$

denklem topluluğuna lineer denklem sistemi denir. Bu denklem sistemi daha açık olarak aşağıdaki şekilde gösterilir.

$a_{ij}, b_i \in R$  ve  $x_i$  bilinmeyenler olmak üzere,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

şeklindeki bir ifadeye lineer denklem sistemi adı verilir. Burada  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  matrisine sistemin

katsayılar matrisi ve

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ ile } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

matrislerine de sistemin ikinci yanı ve bilinmeyenler matrisi denir.

$$[A:B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & : & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & : & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & : & b_m \end{bmatrix}$$

matrisine de sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi denir.

Yukarıdaki lineer denklem sistemini, matrisleri kullanarak  $Ax = B$  şeklinde de gösterebiliriz. Bir lineer denklem sisteminde, sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi üzerinde yapılan elementer satır işlemleri, sistemin çözümünü değiştirmez.

i. Yani herhangi  $i$  inci ve  $j$  inci satırları kendi aralarında yer değiştirilirse:

$$S_i \leftrightarrow S_j$$

ii. Herhangi bir  $i$ . satırı, sıfırdan farklı bir  $k$  sayısı ile çarpmak:

$$S_i \rightarrow kS_i, k \neq 0$$

iii. Herhangi bir satırı bir  $k$  sayısı ile çarpıp diğer bir satıra eklemek:

$$S_i \rightarrow kS_j + S_i$$

işlemlerinden herhangi biri yapılırsa sistemin çözümleri aynı kalır.

$[A:B]$  genişletilmiş katsayılar matrisini eşelon forma getirerek denklem sisteminin çözümleri bulunabilir. Yani her satırının sıfırdan farklı ilk elemanından önce gelen sıfırların sayısı, satır numarası büyüdükçe artıyorsa eşelon form uygulanır. Bu metotla sistemi çözmeye Gauss-Jordan yok etme ve katsayılar matrisini indirgenmiş eşelon forma getirerek çözmeye de Gauss-Jordan indirgeme metodu adı verilir.

**2.1.5. Tanım:**  $A$ ,  $n \times n$  boyutlu bir matris olsun. Eğer  $|A| \neq 0$  ise  $A$  matrisine (tersi mevcut ise) non-singüler(regüler) matris,  $|A| = 0$  ise  $A$  matrisine (tersi mevcut olmayan) singüler (regüler olmayan) matris denir.

**2.1.6. Tanım:**  $A$ ,  $n$ . mertebeden bir regüler matris ( $|A| \neq 0$ ) ise  $Ax = B$  lineer denklem

sisteminin tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$x = A^{-1}B$$

eşitliği ile verilir. Ayrıca;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$\vdots$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

lineer denklem sisteminin çözümü;  $\Delta$ ,  $A$  matrisinin determinanı olmak üzere,

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

determinantları hesaplanarak,

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$$

çözümleri bulunur.  $Ax = B$  lineer denklemini çözmek için uygulanan bu kurala Cramer kuralı denir.

### 2.1.7 Tanım:

$F$  boş kümeden farklı bir küme olsun.

$$F \times F \rightarrow F$$

$$(a, b) \rightarrow a + b$$

Fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $(F, +)$  ye değişmeli grup denir.

$$\text{Her } a, b, c \in F \text{ için } a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$\text{Her } a, b \in F \text{ için } a + b = b + a$$

Her  $a \in F$  için en az bir  $0_F \in F$  vardır öyleki  $a + 0_F = a$

Her  $a \in F$  en az bir  $x \in F$  vardır ki  $a + x = 0$

(iii)'deki  $0_F$  elemanına grubun etkisiz elemanı denir. (iv)'deki  $x$  elemanına  $a$  nın tersi denir ve  $-a$  ile gösterilir.

### 2.1.8 Tamm:

$(F, +)$  değişmeli grubunda  $F \times F \rightarrow F, (a, b) \rightarrow ab$  ile tanımlanan fonksiyon aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $F$  'ye cisim denir;

Her  $(F - \{0_F\}, \cdot)$  değişmeli grup

Her  $a, b, c \in F$  için  $a(b + c) = ab + ac, (b + c)a = ba + ca$

$(F, +, \cdot)$  cisminde "." işleminin etkisiz elemanı  $1_F, 0 \neq a \in F$  nin tersi  $a^{-1}$  ile gösterilir.

### 2.1.9 Tanım:

$(V, +)$  değişmeli grup,  $F$  bir cisim olsun.  $F \times V \rightarrow V, (k, v) \rightarrow k.v$  ile tanımlanan fonksiyon aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $V$  ye  $F$  üzerinde vektör uzayı denir.

i) Her  $k \in F, v_1, v_2 \in V$  için  $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$

ii) Her  $k_1, k_2 \in F, v \in V$  için  $(k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v$

iii)  $(k_1.k_2)v = k_1(k_2v)$

iv)  $1_F V = V$

$V, F$  üzerinde bir vektör uzayı olsun.  $F$  nin elemanlarına skaler,  $V$  nin elemanlarına vektör denir.

### 2.1.10 Tamm:

$V, F$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

a)  $v_1, v_2, \dots, v_r \in V$  ve  $k_1, k_2, \dots, k_r \in F$  için  $k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_rv_r$  elemanına  $v_1, v_2, \dots, v_r$  nin lineer kombinasyonu denir.

b)  $S, V$  nin bir alt kümesi olsun. Eğer  $V$  nin her elemanı  $S$  nin elemanlarının lineer kombinasyonu şeklinde yazılabiliyorsa  $S$  ye  $V$  yi üretir (gerer) denir.

c)  $V, F$  cismi üzerinde bir vektör uzayı ve

$v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  ve  $k_1, k_2, \dots, k_n \in F$  olsun. Herhangi  $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = 0$  denklemi

$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$  koşulunda sağlanıyorsa  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  kümesinin elemanlarına lineer bağımsız elemanlar denir.

d)  $S, V$  nin altkümesi eğer  $S$  nin her hangi bir elemanlar ailesi lineer bağımsız ise  $S$  ye lineer bağımsız küme denir.

e)  $S, V$  nin lineer bağımsız altkümesi olsun.  $S, V$  yi geriyorsa (üretiyorsa)  $S$  ye  $V$  nin bir tabanı (bazı) denir.

Sonuç olarak  $V, F$  cismi üzerinde bir vektör uzayı ve  $B, V$  'nin bir alt kümesi olsun.  $B$  'nin elemanları lineer bağımsız ve  $V$  'yi geriyorsa,  $B$  'ye  $V$  'nin tabanı (bazı) denir.

### 2.1.11 Tanım:

$a$  pozitif bir reel sayı ve  $a \neq 1$  olmak üzere  $f: R \rightarrow R^+, f(x) = a^x$  fonksiyonuna üstel fonksiyon,  $a$  ya da üstel fonksiyonun tabanı denir.

### 2.1.12 Tanım:

$F_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevleri  $R^n$  uzayının bir  $D$  bölgesinde mevcut olsun.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

determinantına  $F_1, F_2, \dots, F_n$  fonksiyonlarının fonksiyonel determinanı veya jakobiye denir ve

$$\frac{\partial (F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \text{ veya } J \left( \begin{matrix} F_1, F_2, \dots, F_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{matrix} \right)$$

ile gösterilir.

$$f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevleri ile oluşturulan  $m$  satır ve  $n$  sütunlu

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

matrisine  $f_1, f_2, \dots, f_m$  fonksiyonlarının  $x_1, x_2, \dots, x_n$  değişkenlerine göre fonksiyonel

matrisi veya jakobiyen matrisi denir.

## 2.2. Diferansiyel Cebirsel Denklemler

Diferansiyel cebirsel denklem sistemi başlangıç değeri ile birlikte

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0 \quad (2.1)$$

formundadır. (2.1) denkleminde genel nonlinear kapalı (implicit) diferansiyel cebirsel denklem denir. Burada  $y \in R^n$  ve  $t \in R$  dır.

Diferansiyel cebirsel denklem açık formda

$$F(y', y, x, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$G(y, x, t) = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. (2.3) kısmında görüldüğü gibi diferansiyel cebirsel denklemler üzerinde cebirsel kısıtlamalar vardır. Burada  $y$  diferansiyel değişkenin ve  $x$  de cebirsel değişkenin vektörleridir. Eğer (2.1) sistemi  $k$  tane denkleme sahip ve  $m$  tanesi diferansiyel değişken ise

$(k - m)$  tanesi cebirsel değişkendir. Değişkenler üzerinde cebirsel kısıtlamaların varlığı  $\frac{\partial F}{\partial y'}$  Jakobian matrisinin singülerliği ile ifade edilir.

Dolayısıyla, burada  $y'$  'ye göre  $F$  'nin Jakobiyesi  $\left( \frac{\partial F}{\partial y'} = F_{y'} \right)$  nonsingülerdir.\*

### 2.2.1. Diferensiyel Cebirsel Denklemlerin Index'i

Bir diferensiyel cebirsel denklem index ile karakterize edilir. Bu yüzden diferensiyel cebirsel denklemlerin incelenmesinde ve sınıflandırılmasında index önemli bir rol oynar. (2.2) ve (2.3) diferensiyel cebirsel denkleminin bir özel formu

$$y' = f(y, x, t) \quad (2.4)$$

$$0 = g(x, y, t) \quad (2.5)$$

olarak yazılabilir. Bu özel forma yarı-açık(semi-explicit) diferensiyel cebirsel denklem denir. Burada da  $y$  diferensiyel değişkenin ve  $x$  de cebirsel değişkenin vektörleridir. Eğer  $t$  ye göre (2.3) denkleminin diferensiyeli alınırsa,

$$y' = f(y, x, t) \quad (2.6)$$

$$g_y(y, x, t)y' + g_x(y, x, t)x' = -g_t(y, x, t) \quad (2.7)$$

sistemi elde edilir. Eğer  $g_x$  nonsingüler ise, (2.6) ve (2.7) sistemi kapalı(implicit) diferensiyel denklem olur. Dolayısıyla (2.6) ve (2.7) sisteminin index'inin1 olduğunu söyleyebiliriz.

**2.2.1.1. Tanım:**  $F(t, y, y') = 0$  genel diferensiyel cebirsel denkleminde,  $y$ 'nin index'i; (sistemde  $y$  ve  $t$  cinsinden)  $y'$  'nü elde etmek için gerekli olan diferensiyelin mertebesinin minimum sayısıdır, veya

---

\*Unger, J., Kröner., and Marquardt, W., (1992), "Structural Analysis of differential-Algebraic Theory and Applications". Computers Chem. Engng. 19.867-882

$$F(t, y, y') = 0$$

$$F'(t, y, y', y'') = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^p F}{dt^p}(t, y, y', \dots, y^{p+1}) = 0$$

sistemiyle de tanımlanır.

Burada  $p$  en küçük tamsayıdır. Şimdi index için aşağıdaki örnekleri inceleyelim \*

$y = q(t)$  skaler denklemi göz önüne alalım. Bu denklem, index'i 1 olan diferensiyel cebirsel denklemdir. Çünkü  $y$  'ye göre bir diferensiyel denklem elde etmek için  $q(t)$  'nin bir kez diferensiyeli alınmalıdır.

$y_1 = q_1(t)$  sistemine göre  $y_2 = y_1' = q_1'(t)$  ifadesini elde etmek için ilk denklemin  $y_2 = y_1'$

diferensiyeli alındığında  $y_2' = y_1'' = q_1''(t)$  elde edilir.  $q_1(t)$  'nin iki kez diferensiyeline ihtiyaç olduğundan, index 2 dir.

$u = q(t)$  sistemini alalım.  $y_3$  'e göre bir diferensiyel denklem elde etmek için  $y_3 = u''$

$$y_3 = u'' = q''(t) \Rightarrow y_3' = q'''(t)$$

eşitlikleri yazılır. Dolayısıyla  $q(t)$  'nin üç kez diferensiyeline ihtiyaç olduğundan index'i 3 tür.

İndex'i birden büyük olan diferensiyel cebirsel denklemleri çözmek genellikle zordur ve hala araştırma konusudur. Bu tür diferensiyel cebirsel denklemleri çözmek için index indirgemesine gidilir. Yani, denklem index'i 1 olan diferensiyel cebirsel denklemlere indirgenir. Bu çalışmada; index'i 1 olan diferensiyel cebirsel denklemlerin çözümleri ile ilgilenilecektir.

---

\* Ascher, U.M., Petzold, L.R., (1998), "Computer Methods for Ordinary Differential Equations and differential-Algebraic Equations." Society for industrial and Applied Mathematics 233,

## 2.2.2. Diferensiyel Cebirsel Denklemlerin Özel Formları

### 2.2.2.1. 1-index'li Hessenberg Formu

1-index'li Hessenberg formu

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(x_1, x_2, t) \\ 0 &= F_2(x_1, x_2, t) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada  $\begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$  Jacobian matrisi nonsingülerdir. (Bu sistem semi-explicit

1-indexli diferensiyel- cebirsel denklem olarak ta bilinir).

### 2.2.2.2. 2-index'li Hessenberg Formu

2-index'li Hessenberg formu

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(x_1, x_2, t) \\ 0 &= F_2(x_1, t) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada  $\begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$  Jacobian matrisi nonsingülerdir.

Aşağıda verilen diferensiyel cebirsel denklemi düşünelim.

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda y_1 - y_4, \\ y_2' + y_3' &= (2\lambda - \sin^2 t)(y_2 + y_3) + \frac{1}{2}(y_2 - y_3)^2, \\ 0 &= y_2 - y_3 - 2(\sin t)(y_1 - 1), \\ 0 &= y_2 + y_3 - 2(y_1 - 1)^2, \end{aligned}$$

Burada  $\lambda$  bir parametredir ve başlangıç şartları  $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$  olarak verilmiştir. Bu

diferensiyel cebirsel denklem semi-explicit formda değildir. Diferensiyel cebirsel denklemde eğer

$$x_1 = y_1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3),$$

$$z_1 = \frac{1}{2}(y_2 - y_3),$$

$$z_2 = y_4$$

olarak alınır, diferensiyel cebirsel denklem

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 - z_2,$$

$$\dot{x}_2 = (2\lambda - \sin^2 t)x_2 + z_1^2,$$

$$0 = z_1 - (\sin t)(x_1 - 1),$$

$$0 = x_2 - (x_1 - 1)^2,$$

şeklinde yazılır. Buradan,

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 - z_2,$$

$$\dot{x}_2 = (2\lambda - \sin^2 t)x_2 - (\sin^2 t)(x_1 - 1)^2,$$

$$0 = x_2 - (x_1 - 1)^2,$$

diferensiyel cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu ise 2-indexli hessenberg formundadır<sup>\*</sup>

### 2.2.2.3. 3-index'li Hessenberg Formu

3-index'li Hessenberg formu

$$\dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, x_3, t),$$

$$\dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, t),$$

$$0 = F_3(x_2, t),$$

---

<sup>\*</sup> Ascher, U.M., Petzold, L.R., (1998), "Computer Methods for Ordinary Differential Equations and differential-Algebraic Equations." Society for industrial and Applied Mathematics, 240,

şeklindedir. Burada  $\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\right)$  Jacobian matrisi non-singülerdir.

Örneğin,

$$\dot{q}_1 = v_1 \quad (2.8.a)$$

$$\dot{q}_2 = v_2 \quad (2.8.b)$$

$$\dot{v}_1 = -\lambda q_1 \quad (2.8.c)$$

$$\dot{v}_2 = -\lambda q_2 - g \quad (2.8.d)$$

$$0 = q_1^2 + q_2^2 - 1 \quad (2.8.e)$$

diferensiyel cebirsel denklem sistemini ele alalım. (Burada  $\lambda = \lambda(t)$  bilinmeyen bir fonksiyon ve  $g$  bilinen bir fonksiyondur. (2.8.e) denkleminin diferensiyeli alındığında,

$$q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2 = 0 \quad (2.9)$$

denklemini elde edilir. (2.8.a) ve (2.8.b) denklemleri (2.9)'da yerine yazılırsa,

$$q_1 v_1 + q_2 v_2 = 0 \quad (2.10)$$

elde edilir. (2.9) denkleminin diferensiyeli alınır ve (2.8.a) ve (2.8.b) denklemleri bu denklemde yerine yazılırsa,

$$q_1 \dot{v}_1 + q_2 \dot{v}_2 + v_1^2 + v_2^2 = 0 \quad (2.11)$$

elde edilir. (2.8.c) ve (2.8.d) denklemleri, (2.11) de yerine yazılırsa,

$$-\lambda - q_2 g + v_1^2 + v_2^2 = 0 \quad (2.12)$$

elde edilir. (2.8.c) ve (2.8.d) denklemlerinde (2.12) denklemini yerine yazılır.  $q$  ve  $v$  için bir diferensiyel denklem elde etmek için (2.12) denkleminin ardışık üç diferensiyeline ihtiyaç vardır. Dolayısıyla bu denklemin index'i 3 olduğu söylenebilir. Bu sistem 3-indexli Hessenberg formundadır.

### 2.2.2.4 r-index'li Hessenberg Formu

Şimdi,

$$F(t, y, y') = 0$$

diferensiyel cebirsel denklemini göz önüne alalım. Eğer bu denklem

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_r, t) \\ x_2' &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, t) \\ &\vdots \\ x_i' &= F_i(x_{i-1}, x_i, \dots, x_{r-1}, t), 3 \leq i \leq r-1 \\ &\vdots \\ 0 &= F_r(x_{r-1}, t) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Burada Jacobian  $\left(\frac{\partial F_r}{\partial x_{r-1}}\right) \dots \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_{i-1}}\right) \dots \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right) \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_r}\right)$  matrisi nonsingülerdir.

Bu denkleme  $r$  -indexli Hessenberg formu denir<sup>\*</sup>

---

<sup>\*</sup> Brenan, K.E., Campbell, S.L., Petzold, L.R., (1989), "Numerical Solution of Initial-value problems in Differential-Algebraic Equations"

## 2.3. Kuvvet Serileri

### 2.3.1. Tanım:

$x$  bir değişken ve  $c$  bir sabit olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \cdots + a_n (x-c)^n + \cdots$$

serisine  $c$  merkezli kuvvet serisi denir. Eğer bu tanımda  $c = 0$  alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

elde edilir. Ayrıca  $x = c$  olması durumunda  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0$  olur.

### 2.3.2. Kuvvet Serilerinin Aritmetiği\*

$f(t)$ ,  $g(t)$  ve  $h(t)$  birer kuvvet serisi olmak üzere;

katsayıları arasında toplama çıkarma ve çarpma işlemlerinde şu özellikler vardır.

$$h(t) = f(t) \pm g(t), h^{[n]}(t) = f^{[n]}(t) \pm g^{[n]}(t);$$

$$h(t) = f(t) \cdot g(t), h^{[n]}(t) = \sum_{i=0}^n f^{[n-i]}(t) g^{[i]}(t);$$

$$h(t) = f(t) / g(t), g(t) \neq 0$$

$$h^{[n]}(t) = \frac{1}{g^{[0]}(t)} \left\{ f^{[n]}(t) - \sum_{i=1}^n h^{[n-i]}(t) g^{[i]}(t) \right\};$$

$$h(t) = f(t)^\alpha, h^{[0]}(t) = \left( f^{[0]}(t) \right)^\alpha, n > 0 \text{ için}$$

$$h^{[n]}(t) = \frac{1}{n f^{[0]}(t)} \sum_{i=0}^{n-1} (n\alpha - i(\alpha + 1)) f^{[n-i]}(t) h^{[i]}(t);$$

---

\*Barrio R.,(2005), "Performance of the Taylor series method for ODEs/DAEs",Applied Mathematics Computation,163 525-545

$$h(t) = e^{(f(t))}, h^{[0]}(t) = e^{(f^{[0]}(t))} \text{ ve } n > 0 \text{ için,}$$

$$h^{[n]}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (n-1) f^{[n-i]}(t) h^{[i]}(t);$$

$$h(t) = \ln(f(t)), h^{[0]}(t) = \ln(f^{[0]}(t)) \text{ ve } n > 0 \text{ için}$$

$$h^{[n]}(t) = \frac{1}{f^{[0]}(t)} \left\{ f^{[n]}(t) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) h^{[n-i]}(t) f^{[i]}(t) \right\};$$

$$g(t) = \cos(f(t)) \text{ ve } h(t) = \sin(f(t)),$$

$$g^{[0]}(t) = \cos(f^{[0]}(t)), g^{[n]}(t) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i h^{[n-i]}(t) f^{[i]}(t);$$

$$h^{[0]}(t) = \sin(f^{[0]}(t)), h^{[n]}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i g^{[n-i]}(t) f^{[i]}(t);$$

$$h(t) = \arctan(f(t)), h^{[0]}(t) = \arctan(f^{[0]}(t)) \text{ ve } n > 0 \text{ için}$$

$$\begin{cases} f_2^{[n]}(t) = \sum_{i=0}^n f^{[n-i]}(t) f^{[i]}(t), \\ h^{[n]}(t) = \frac{1}{1 + (f^{[0]}(t))^2} \left( f^{[n]}(t) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i h^{[i]}(t) f_2^{[n-i]}(t) \right). \end{cases}$$

şeklinde bağıntılar vardır.

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1. Diferansiyel Cebirsel Denklemleri Çözmek İçin Nümerik Metot

$$F(y, y', x) = 0 \quad (3.1)$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \quad (3.2)$$

şeklinde verilmiş diferansiyel cebirsel denklemi göz önüne alalım. Burada  $F$  ve  $y$  her mertebeden diferensiyellenebilen vektörel fonksiyonlardır. Başlangıç değerleri yerine yazıldığında bu denklem,

$$F(y(x_0), y'(x_0), x_0) = 0$$

şeklini alır. (3.1) denkleminin çözümlerinin

$$y = y_0 + y_1 x + e x^2 \quad (3.3)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Burada  $e, y_0$  ve  $y_1$  ile aynı boyutta olan bir vektörel fonksiyondur. (3.1) denkleminde (3.3) ifadesi ve türevleri yerlerine yazılıp yüksek dereceden terimler ihmal edilirse,

$$Ae = B \quad (3.4)$$

şeklinde  $e$ 'ye göre lineer denklem sistemi elde edilir. Burada  $A$  ve  $B$  sabit matrislerdir. (3.4) denklemi çözülürse  $e$  değeri bulunur ve bu  $e$  değeri (3.3) denkleminde yerine yazılır. Yüksek dereceden terimler için yukarıdaki işlemler tekrar edilirse (3.1) denkleminin çözümü için keyfi dereceden kuvvet serileri elde edilir.

#### 3.2. Nümerik Metodun Kuvvet Serilerine Uygulanışı

(3.3) fonksiyonu (3.1)'de yerine yazıldığında

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + (f_n + p_1 e_1 + \dots + p_m e_m) x^n \quad (3.5)$$

şeklinde bilinen kuvvet serisinden farklı, (3.5) gibi başka bir kuvvet serisi tanımlayalım.

Burada  $p_1, p_2, \dots, p_m$  ler sabitlerdir.  $e_1, e_2, \dots, e_m$  (3.3) denklemindeki  $e$  vektörünün tabanıdır,  $m$  ise  $e$  vektörünün boyutudur. (3.3) denklemindeki  $y$ ,  $m$  elemanlı bir vektörel fonksiyondur. (3.3) denklemden

$$y_i = y_{i,0} + y_{i,1}x + y_{i,2}x^2 + \dots + e_i x^n \quad (3.6)$$

olarak tanımlanır.  $y_i$ ,  $y$  'nin  $i$  nci elemanıdır. (3.1) denkleminde, (3.6) ifadesi yerine yazılırsa

$$f_i = (f_{i,n} + p_{i,1}e_1 + \dots + p_{i,m}e_m)x^{n-j} + O(x^{n-j+1}) \quad (3.7)$$

elde edilir. Burada  $f_i$  (3.1) denklemindeki  $f(y, y', x)$  'in  $i$ .elemanıdır. Eğer  $f(y, y', x)$ ,  $y'$  'nü içeriyorsa  $j = 1$ ; içermiyorsa  $j = 0$  dır. (3.4) ve (3.7) den;

$$A_{i,j} = P_{i,j} \quad (3.8)$$

$$B_i = -f_{i,n} \quad (3.9)$$

şeklinde lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sistemi çözülürse  $e_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) bulunur. Bu  $e_i$  değeri (3.6) denkleminde yerine yazılırsa  $n$ .dereceden bir polinom olan  $y_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) elde edilir. (3.6) denklemden (3.9) denklemine kadar bu işlemler tekrar edilirse (3.1) denklemindeki diferensiyel cebirsel denklemin çözümü için keyfi dereceden kuvvet serileri elde edilir.  $x$  'in adım aralığı  $h$  olsun. Bu değer  $y$  ve  $y'$  de yerine yazılırsa,  $x = x_0 + h$  noktasında  $y$  ve  $y'$  elde edilir. Eğer bu işlem devam ettirilirse (3.1) diferensiyel cebirsel denkleminin nümerik çözümü elde edilmiş olur.

#### 4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI

##### Test problemi\* 4.1

$$\begin{aligned} x' &= 1, \\ 0 &= x + y^2, \end{aligned} \tag{4.1}$$

Diferensiyel cebirsel denklemini göz önüne alalım. Başlangıç şartları

$$y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = -1. \tag{4.2}$$

Problemin tam çözümleri aşağıdaki şekildedir.

$$y_1 = t - 1, \quad y_2 = -\sqrt{1 - t}. \tag{4.3}$$

Başlangıç değerlerinden (4.1) denkleminin çözümlerinin

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_{0,1} + e_1 t = -1 + e_1 t \\ y_2(t) &= y_{0,2} + e_2 t = -1 + e_2 t \end{aligned} \tag{4.4}$$

şeklinde olduğunu kabul edelim.

(4.4) denklemi ve türevleri (4.1) denkleminde yerine yazılır yüksek mertebeli terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned} e_1 - 1 + O(t) &= 0, \\ (e_1 - 2e_2)t + O(t^2) &= 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

(3.7) formundaki denklemi elde edilir. (3.8) ve (3.9) denklemlerine karşılık gelen lineer denklem sistemi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

olup verilenlerden  $Ae = B$  eşitliğinden denklem çözülürse

---

\* Basem S.A, (2006) "Continuation method for computing certain singular points for index-1 differential algebraic equations", Applied Mathematics and Computation 175, 1026-1038

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

olarak bulunur. Bulunan değerler (4.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -1 + t \\ y_2(t) &= -1 + \frac{1}{2}t \end{aligned} \quad (4.9)$$

olur. (4.9) denklemini kullanarak (4.1) denkleminin çözümleri

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -1 + t + e_1 t^2 \\ y_2(t) &= -1 + \frac{1}{2}t + e_2 t^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

şeklinde olduğu kabul edelim. Benzer şekilde (4.1) denkleminde (4.10) denklemini ve türevleri yerinde yazılıp yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse

$$\begin{aligned} 2e_1 t + O(t^2) &= 0 \\ \left( \frac{1}{4} + e_1 - 2e_2 \right) t^2 + O(t^3) &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir. Burada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.25 \end{pmatrix} \text{ ve } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

dir.  $Ae = B$  lineer denkleminde

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.25 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

$$e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.125 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -1 + t \\ y_2(t) &= -1 + 0.5t + 0.125t^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

olur. Aynı şekilde yukarıdaki işlemler devam edilirse

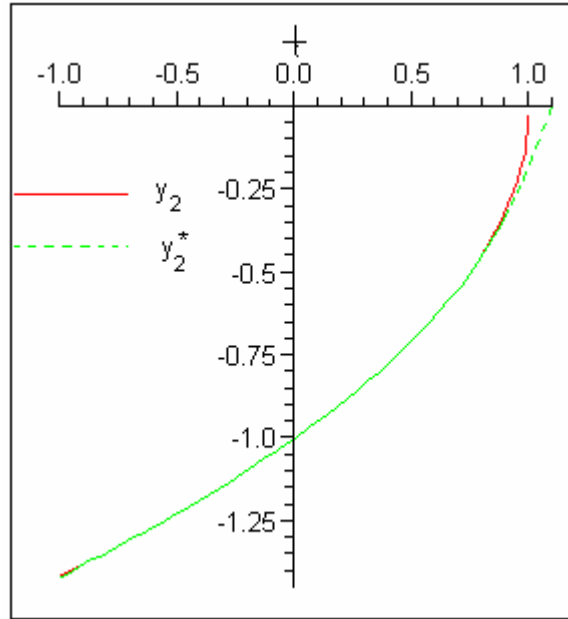
$$\begin{aligned} y_1^*(t) &= -1 + t \\ y_2^*(t) &= -1 + 0.5000000000t + 0.1250000000t^2 + 0.0625000000t^3 + 0.0390625000t^4 \\ &+ 0.0273437500t^5 + 0.0205078125t^6 + 0.1611328125t^7 + 0.01309204102t^8 \\ &+ 0.01091003418t^9 \end{aligned}$$

Dokuzuncu dereceye kadar  $y_1^*(t), y_2^*(t)$  kuvvet serileri elde edilir.

Şimdi tam çözümle yaklaşık çözümleri aşağıdaki tablo ve şekilde karşılaştıralım.

Çizelge 4.1 Test problemi (4.1) deki  $y_2(t)$  ile  $y_2^*(t)$  nin karşılaştırılması.

| $t$ | $y_2(t)$      | $y_2^*(t)$    | $ y_2(t) - y_2^*(t) $        |
|-----|---------------|---------------|------------------------------|
| 0.1 | -0.9486832981 | -0.9486832982 | $1 \times 10^{-10}$          |
| 0.2 | -0.8944271910 | -0.8944271921 | $1.1 \times 10^{-9}$         |
| 0.3 | -0.8366600265 | -0.8366601006 | $7.41 \times 10^{-3}$        |
| 0.4 | -0.7745966692 | -0.7745981600 | $1.4908 \times 10^{-5}$      |
| 0.5 | -0.7071067812 | -0.7071228325 | $6.806613 \times 10^{-4}$    |
| 0.6 | -0.6324555320 | -0.6325735248 | $1.179928 \times 10^{-4}$    |
| 0.7 | -0.5477225575 | -0.5484032188 | $6.806613 \times 10^{-4}$    |
| 0.8 | -0.4472235955 | -0.4506240000 | $3.4104045 \times 10^{-3}$   |
| 0.9 | -0.3162277660 | -0.3329442928 | $1.67165268 \times 10^{-2}$  |
| 1.0 | 0             | -0.1854705810 | $1.854705810 \times 10^{-1}$ |



Şekil 4.1 Test problemi (4.1) deki  $y_2(t)$  ve  $y_2^*(t)$  in grafiği

#### Test problemi\* 4.2

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= e^x + y_2(x) + xy_2'(x) \\ y_2(x) &= \cos x \end{aligned} \quad (4.16)$$

Diferensiyel cebirsel denklemi verilsin. Başlangıç şartları

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_1'(0) = 2, y_2'(0) = 0$$

dir. (4.17)

Problemin tam çözümleri aşağıdaki şekilde verildi.

$$\begin{aligned} y_1 &= e^x + x \cos x \\ y_2 &= \cos x \end{aligned} \quad (4.18)$$

şeklindedir.

Başlangıç değerlerinden (4.16) denkleminin çözümlerinin

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_{0,1} + y'_{0,1}x + e_1x^2 = 1 + 2x + e_1x^2 \\ y_2(x) &= y_{0,2} + y'_{0,2}x + e_2x^2 = 1 + e_2x^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Şeklinde olduğunu kabul edelim.

(4.19) denklemi ve türevleri (4.16) denkleminde yerine yazılır yüksek mertebeli terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned} (-1 + 2e_1)x + O(x^2) &= 0 \\ \left(\frac{1}{2} + e_2\right)x^2 + O(x^3) &= 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

(3.7) formundaki denklemi elde edilir. (3.8) ve (3.9) denklemlerine karşılık gelen lineer denklem

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix} \text{ ve } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

olup verilenlerden  $Ae = B$  eşitliğinden denklem çözülürse

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

$$e = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

elde edilir. Bulunan değerler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 \\ y_2(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

olur. (4.24) denklemini kullanarak (4.16) denkleminin çözümleri

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + e_1x^3 \\ y_2(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + e_2x^3 \end{aligned} \quad (4.25)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Benzer şekilde (4.16) denkleminde (4.25) denklemi ve türevleri yerinde yazılıp yüksek mertebeden türevler ihmal edilirse

$$\begin{aligned} (3e_1 + 1)x^2 + O(x^3) &= 0 \\ e_2x^3 + O(x^4) &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

denklemleri elde edilir. Burada

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ve } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

dir.  $Ae = B$  lineer denklem sisteminden

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

$$e = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \\ y_2(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 \end{aligned} \quad (4.30)$$

olur. Benzer şekilde yukarıdaki işlemlere devam edilirse

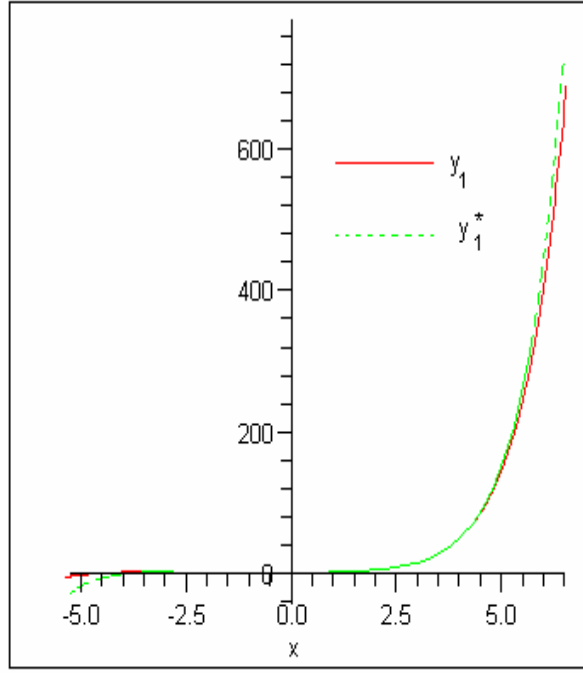
$$\begin{aligned} y_1^*(x) &= 1 + 2. x + 0.5000000000 x^2 - \\ &0.3333333333. x^3 + 0.04166666667 x^4 + 0.05000000000 x^5 + 0.001388888889 x^6 - \\ &0.001190476190 x^7 + 0.00002480158730 x^8 + 0.00002755731922 x^9 \end{aligned}$$

$$y_2^*(x) = 1 - 0.5000000000 x^2 + 0.04166666667 x^4 - 0.001388888889 x^6 + 0.00002480158730 x^8$$

Dokuzuncu dereceye kadar  $y_1^*(x), y_2^*(x)$  kuvvet serileri elde edilir.

Çizelge 4.2 Test problemi (4.2) deki  $y_1(x)$  ile  $y_1^*(x)$  nin karşılaştırılması

| $x$ | $y_1(x)$    | $y_1^*(x)$  | $ y_1(x) - y_1^*(x) $ |
|-----|-------------|-------------|-----------------------|
| 0.1 | 1.204671335 | 1.204671335 | 0                     |
| 0.2 | 1.417416074 | 1.417416074 | 0                     |
| 0.3 | 1.636459755 | 1.636459755 | 0                     |
| 0.4 | 1.860249096 | 1.860249096 | 0                     |
| 0.5 | 2.087512552 | 2.087512551 | $0.1 \cdot 10^{-8}$   |
| 0.6 | 2.317320169 | 2.317320169 | 0                     |
| 0.7 | 2.549142238 | 2.549142236 | $0.2 \cdot 10^{-8}$   |
| 0.8 | 2.782906295 | 2.782906288 | $0.7 \cdot 10^{-8}$   |
| 0.9 | 3.019052082 | 3.019052064 | $0.18 \cdot 10^{-7}$  |
| 1.0 | 3.258584134 | 3.258584106 | $0.28 \cdot 10^{-7}$  |

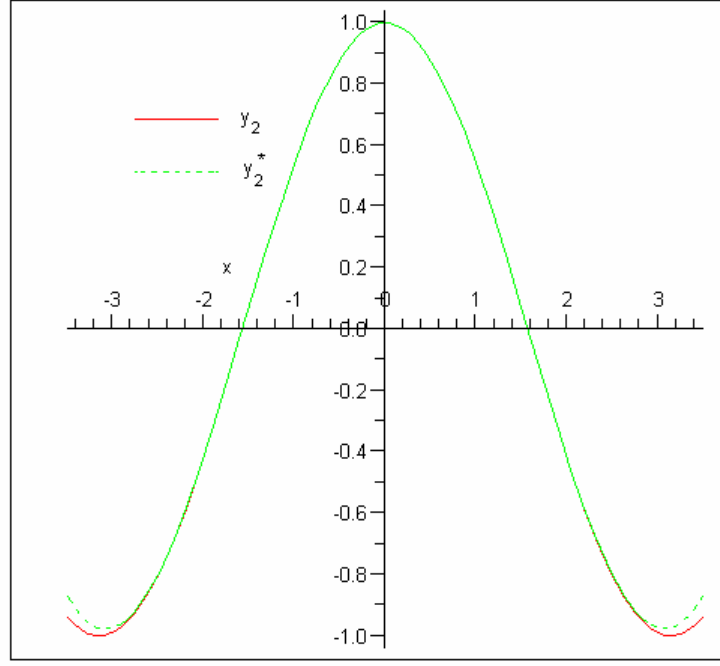


Şekil 4.2 Test problemi (4.2) deki  $y_1(x)$  ve  $y_1^*(x)$  in grafiği

Çizelge 4.3 Test problemi (4.2) deki  $y_2(x)$  ile  $y_2^*(x)$  nin karşılaştırılması

| $x$ | $y_2(x)$     | $y_2^*(x)$   | $ y_2(x) - y_2^*(x) $   |
|-----|--------------|--------------|-------------------------|
| 0.1 | 0.9950041653 | 0.9950041653 | 0                       |
| 0.2 | 0.9800665778 | 0.9800665779 | $-0.1 \cdot 10^{-9}$    |
| 0.3 | 0.9553364891 | 0.9553364891 | 0                       |
| 0.4 | 0.9210609940 | 0.9210609941 | $-0.1 \cdot 10^{-9}$    |
| 0.5 | 0.8775825619 | 0.8775825622 | $-0.3 \cdot 10^{-9}$    |
| 0.6 | 0.8253356149 | 0.8253356166 | $-0.17 \cdot 10^{-8}$   |
| 0.7 | 0.7648421873 | 0.7648421951 | $-0.78 \cdot 10^{-8}$   |
| 0.8 | 0.6967067093 | 0.6967067388 | $-0.295 \cdot 10^{-7}$  |
| 0.9 | 0.6216099683 | 0.6216100638 | $-0.955 \cdot 10^{-7}$  |
| 1.0 | 0.5403023059 | 0.5403025794 | $-0.2735 \cdot 10^{-6}$ |

$y_2(x)$  in kuvvet serisi ile karşılaştırılmasının grafiğini şekil üzerinde gösterelim.



Şekil 4.3 Test problemi (4.2) deki  $y_2(x)$  ve  $y_2^*(x)$  in grafiği

## 5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada sunulan kuvvet serileri çözüm metodu, diferensiyel-cebirsal denklemlerin nümerik çözümleri için etkili bir metottur. Metot test problemlerine uygulandı.

Problemlerde tam çözümlerle, kuvvet serileri çözümü ile elde edilen nümerik çözümler tablolar ve şekiller üzerinde karşılaştırıldı. Bu karşılaştırma sonucunda tam çözümlerle kuvvet serileri çözümü uyumlu olduğu görüldü.

**KAYNAKLAR**

- Ascher, U.M., Petzold, L.R., (1998), "Computer Methods for Ordinary Differential Equations and differential-Algebraic Equations", Society for industrial and Applied Mathematics, 240, 1998.
- Barrio R., (2005), "Performance of the Taylor series method for ODEs/DAEs", Applied Mathematics Computation, 163 525-545
- Basem, S.A, (2006), "Continuation method for computing certain singular points for index-1 differential algebraic equations", Applied Mathematics and Computation 175 ,1026-1038.
- Bayram, M. and Çelik, E., (2003), "Arbitrary Order Numerical Method for Solving Differential- Algebraic Equations by Padé Series", Applied Mathematics and Computation.
- Brenan, K. E., Campbell, S. L., Petzold, L. R., (1989), "Numerical solution of Initial-value problems in Differential- Algebraic Equations", North-Holland, Amsterdam.
- Çelik, E., (2002), "Diferential-Cebirsel Denklemlerin Nümerik Çözümü", Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Çelik, E., Karaduman, E. and Bayram, M., (2002), "A Numerical Method to Solve Chemical Differential-Algebraic Equations", International Journal of Quantum Chemistry.
- Çelik, E., and Bayram, M., (2003), "On The Numerical Solution of Differential- Equations by Padé Series", Applied Mathematics and Computation 89, 447-451.
- Fox, L., Parker, I. B., (1972), "Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis", Oxford University Press, Ely House, London.
- Güzel N., Bayram M., (2005), "On the numerical solution of differential-algebraic equations with index-3", Applied mathematics and Computation.
- Hairer, E., Wanner, G., (1991), "Solving ordinary differential equations II: stiff and differential algebraic problems", Springer-Verlag.
- Müller, P. C., (2000), "Descriptor systems: pros and cons of system modelling by differential-algebraic equations", Mathematics Computers in Simulation. 53, 273-279.
- Pierluigi, A., and Mazzia, F., (1992), "1. Numerical solution of differential- algebraic equations and computation of consistent initial/boundary conditions". Journal of Computational and Applied Mathematics. 87, 135-142.
- Unger, J., Kröner, and Marquardt, W., (1992), "Structural Analysis of Differential-Algebraic Theory and Applications". Computers Chem. Engng. 19, 867-882
- Wang, F. S., (2000). "A Modified Collocation Method For Solving Differential-Algebraic Equations", Applied Mathematics and Computation. 116, 257-278.
- Weiming Wang, (2005), "An algorithm for solving DAEs with mechanization", Applied Mathematics and Computation, 67 1350-1372

**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi 25.07.1978

Doğum yeri Of

Lise 1994-1997 Ahmet Rasim Lisesi

Lisans 1997-2001 Atatürk Üniversitesi Fen Edb. Fak.  
Matematik Bölümü

**Çalıştığı kurumlar**

2001-2005 Milli Eğitim Bakanlığı

2005-Devam ediyor YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi

