

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE SİMPLEKS YAPILAR VE UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Simge ÖZTUNÇ

Anabilim Dalı: MATEMATİK

Programı : TOPOLOJİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ali MUTLU

MANİSA 2013

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ	v
TEŞEKKÜR	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
GİRİŞ	ix
 I. BÖLÜM	
TEMEL KAVRAMLAR	1
 II. BÖLÜM	
DİJİTAL KATEGORİLER	6
 III. BÖLÜM	
DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE SİMPLEŞİL KÜMELERİN	
İNŞASI	13
3.1. Dijital Simplişil Kompleksler.....	13
3.2. Dijital Simplişil Dönüşümler.....	17
3.3. Yönlü Dijital Simplişil Kompleksler ve Yüz Dönüşümleri.....	18
3. 4. Dijital Görüntülerde Yüz Dönüşümleri.....	19
3. 5. Dijital Görüntülerde Delta Kümeler ve Delta Dönüşümler	21
3. 6. Dijital Görüntülerde Delta Dönüşümleri	24
3. 7. Dijital Simplişil Kümeler ve Morfizmler	24
3. 8. Dijital Görüntülerde Dejenere Simpleksler	25
3. 9. Dijital Görüntülerde Dejenere Dönüşümler	27
3. 10. Dijital Görüntülerde Simplişil Küme Yapısı	28
3. 11. Dijital Görüntülerde Nondejenere Simpleksler	30
3. 12. Dijital Görüntülerde Simplişil Morfizmler	35

IV. BÖLÜM

DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE SİMPLEŞİL GRUPLAR	37
4.1. Dijital Görüntülerde Kan Kompleksleri	38
4.2. Dijital Görüntülerde Simples Homotopi	39
4.2.1. Yollar ve Yol Bileşenleri	39
4.2.2. Dönüşümlerin Homotopisi	41
4.3. Bir Dijital Simples Grubun Homoloji Grubu	42

V. BÖLÜM

DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE HİPERKROSS KOMPLEKS ÇİFTLERİ	46
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	61
REFERANSLAR.....	63
ÖZGEÇMİŞ.....	66

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi.
$\mathbb{R}^n$	: n – boyutlu Euclidean uzay.
κ	: Dijital görüntüdeki yakınlık bağıntısı.
$[0, m]_{\mathbb{Z}}$	: Dijital aralık.
$\approx_{\kappa, \lambda}$	: Dijital Görüntülerde (κ, λ) – homotopi.
$\approx_{p(\kappa, \lambda)}$	: Dijital Görüntülerde (κ, λ) – yol homotopi.
$[f]$	: f dönüşümünün homotopi sınıfı.
$[X, Y]$	: X den Y ye olan dönüşümlerin yol homotopi sınıfı.
$\mathcal{C}$	: Dijital görüntülerde kategori
$\mathcal{O}$	: Dijital nesneler sınıfı.
$\mathcal{M}$	: Dijital morfizmler sınıfı.
$dom(f)$	: f in tanım bölgesi.
$cod(f)$	: f in değer bölgesi.
(K, κ)	: κ – yakınlıklı dijital simpleksler kompleksi.
$ K $	: K simpleksler kompleksinin geometrik realizasyonu.
$[v_0, v_1, v_2]$	: $(8, 2)$ – simpleks.
$\hat{j}$	: Çıkartılan j terimi.
d	: Yüz dönüşümü.
$DSet$	: Dijital delta kümelerin kategorisi.
$\hat{\Delta}^{op}$	: Delta opposite kategorisi.
s	: Dejenere dönüşüm.
π	: Dijital simplişil dönüşüm.
Hom_{Top}	: Topolojik uzaylar kategorisinde morfizmler sınıfı.
G	: Dijital simplişil grup.
$ {}_k \Lambda_{\kappa}^n $	: (κ, n) – simpleksi üzerindeki k . horn.
$C_n(X)$	: Serbest abel grup.
∂	: Sınır homomorfizması.

$Z_q^\kappa(X)$	: q – devirlerin dijital simplişıl grubu.
$B_q^\kappa(X)$	: q – sınırların dijital simplişıl grubu.
$H_q^\kappa(X)$	: q . dijital homoloji grubu.
(NG, ∂)	: Moore kompleksi.
NG_n	: Moore kompleksinin n . boyuttaki elemanı.
$Kerd_i$	: d_i nin çekirdeği.
$[,]$	: Komutatör işlemi.
$F_{\alpha, \beta}$	: Peiffer çifti.

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1. Sırasıyla bir noktanın 2–, 4– ve 8– yakınlığı	2
Şekil 3.1. Sırasıyla $(2, 0)$ –, $(2, 1)$ –, $(8, 2)$ –, $(26, 3)$ – simpleksler.....	14
Şekil 3.2. Noktalar birbirine 8– yakın olmak üzere bir dijital simplişil kompleks.....	16
Şekil 3.3. Daha büyük bir simplişil kompleks içinde $[v_2, v_3, v_4]$ simpleksinin içerilmesi.....	17
Şekil 3.4. Bir $(\kappa, 2)$ – simpleksin bir $(\kappa, 1)$ – simplekse toplanması.....	18
Şekil 3.5. Standart yönlendirilmiş $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(8, 2)$, $(26, 3)$ – simpleksler.....	19
Şekil 3.6. $ \Delta^2 _{\kappa}$ nın görüntüsü olarak $[v_2, v_3, v_4]$	20
Şekil 3.7. $ \Delta^2 _8$ nın yüz dönüşümleri.....	20
Şekil 3.8. $\hat{\Delta}$ kategorisinin kısmi bir gösterimi.....	23
Şekil 3.9. Elemanter $(8, 2)$ – simpleksdeki dejenere $(2, 1)$ – simpleksler.....	26
Şekil 3.10. Bir singüler (κ, n) – simpleks.....	31
Şekil 3.11. Bir singüler (κ, n) – simpleksin bir yüzü.....	31
Şekil 3.12. Bir dejenere (κ, n) – singüler simpleks.....	32
Şekil 3.13. D_i , d_i , S_i ve s_i nin nasıl işlediği.....	34
Şekil 4.1. Bir simplişil grubun $(8, 2)$ – simplekslerinin bir gösterimi.....	37
Şekil 4.2. $ \Delta^2 _8$ üzerindeki üç horn	39
Şekil 4.3. Dijital görüntü üzerinde simetri bağıntısı	40
Şekil 4.4. Dijital görüntü üzerinde geçişme bağıntısı	41

TEŞEKKÜR

Bana bu tez konusunu veren ve doktora eğitimim boyunca danışmanlığımı yürüten Sayın Hocam Doç. Dr. Ali MUTLU'ya, bu tez çalışmasını yakından izleyen, bilgi ve tecrübeleri ile bana yol gösteren değerli Hocalarım Prof. Dr. Necdet BİLDİK'e ve Prof. Dr. İsmet KARACA'ya sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Eğitimimi tamamlamam için her türlü fedakârlığı ortaya koyan, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme ve eğitim hayatım boyunca üzerimde emeği olan Hocalarıma sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

Dijital görüntüler görsel bilgi iletişimi kurmak için temel araçlardan biri haline gelmiştir. Bu çalışmada yer alan resimler, bir dijital kameradaki resimler ve bir hesap makinesi ekranındaki grafik dijital olarak inşa edilen ya da sunulan örneklerdendir. Dijital görüntü yöntemi oluşturma, depolama, manipülasyon dijital görüntülerin gösterimiyle ilgilidir.

Diğer taraftan dijital görüntüler topolojik ve cebirsel açıdan belirli özelliklere sahip olup, dijital görüntülerde diskrit bir yapı mevcuttur.

Bu tezde İ. Karaca ve öğrencileri tarafından çalışılan, dijital görüntülerde simpleks ve simplişil kompleks tanımı kullanılarak dijital görüntülerde simplişil küme ve simplişil grup yapısı oluşturuldu. Dijital görüntülerde toplamsal bir grup yapısı söz konusu olduğundan, komutatör işlemi yeniden tanımlandı ve Moore kompleksinden simplişil gruba olan p operatörü toplamsal yapıda yeniden ifade edildi. Bu işlemlere göre 2 – ve 3 – boyutlu Moore kompleksleri ele alındı ve nasıl bir komutatör alt grup yapısına sahip olduğu incelendi.

ABSTRACT

Digital images become one of the basic tools in order to communicate visual information. The pictures in this paper, the pictures in a digital camera, a graphic on the calculator screen are the examples which are digitally constructed or presented. The construction of digital image processing, the storage, the manipulation are dealt with representation of digital images.

On the other hand digital images have certain topological and algebraic properties and a discrete structure exist in digital images.

In this thesis, the structure of simplicial set and simplicial group are constructed by using the definition of simplex and simplicial complex in digital images, studied by İ. Karaca et al. Since there is additive group structure in digital images, the commutator operation redefined and the operator p , which is from the Moore complex to the simplicial group was reconstructed. 2- and 3- dimensional Moore complexes are considered due to these operations and investigated how they have a commutator subgroup structure.

1.0. GİRİŞ

Dijital topoloji kavramı ilk kez 1979 da Azrael Rosenfeld tarafından bahsedilmiştir. Buna karşılık dijital topolojinin temelleri Alexandroff ve Hopf'a kadar dayanmaktadır. 1937'de Alexandroff, başlığında 'Diskret Topoloji' teriminin kullanıldığı bir çalışma yayınlamıştır. E. Khalimsky sıralı bağlantılı topolojik uzaylar konusunu incelemiş ve 1977'de bu konu üzerine de bir kitap yazmıştır. Daha sonra New York Topoloji Okulundaki çalışmalarda (Kopperman, Mayer, Kong ve diğerleri) sıralı bağlantılı topolojik uzayların dijital topoloji çalışmaları için çok uygun olduğunu farketmiştir. 1980 lerin sonunda V. Kovalevsky, Alexandroff Teorisinin bir kısmıyla ilgili olan dijital topoloji için temel bir sonucu vermiştir. Benzer Teori aynı zamanda G.Herman tarafından 1979 da doğrulanmıştır. Bunun yanında A. Rosenfeld 'Dijital Topology' adı altında bir makale yayınlamıştır. Bu çalışma dijital topolojideki zor problemlerin ilk kez incelenmesi bakımından önemlidir. Dijital görüntülerde süreklilik ve homotopi kavramı ise Boxer ve Han tarafından çalışılmıştır. Dijital görüntülerde simplişil kompleks yapısı İ. Karaca ve öğrencileri tarafından [11] ve [14] de incelenmiştir. Ayrıca İ. Karaca ve öğrencileri dijital görüntülerin homoloji ve homotopi grupları ile ilgili çalışmalarda da bulunmuştur.

Diğer taraftan Simplişil gruplar ilk olarak D. M. Kan tarafından 1950 lerde çalışılmıştır. J. H. C. Whitehead cebirsel modellerin homotopi tiplerini ve homotopi teorisini incelemiştir. Zaman içinde Moore, Milnor, Carrasco, Conduche, Brown, Loday, Porter, Arvasi, Mutlu gibi matematikçiler çeşitli çalışmalarıyla bu alana katkıda bulunmuştur. Çarpımsal bir komutatör işlemiyle birlikte Moore kompleksinin bu komutatör işlemiyle üretilen normal alt gruba karşılık geldiği Mutlu [25] ve [26] de gösterilmiştir. Ayrıca "Homotopi grubu homoloji grubuna izomorftur" bağıntısı kullanılarak Moore komplekslerinin homotopi ve homoloji grupları hakkında bilgi verilmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde yakınlık bağıntısı, dijital süreklilik, dijital bağlantılılık, dijital homotopi, dijital yol homotopisi gibi dijital topolojinin temel kavramları verilir. Ayrıca dijital yolların dijital homotopisi incelenir ve bununla ilgili bazı teoremler ele alınır.

İkinci bölümde dijital görüntülerde kategori oluşturulur ve dijital kategorinin özellikleri incelenir.

Üçüncü bölümde dijital görüntülerde $(2,0)$ – simpleks, $(2,1)$ – simpleks, $(8,2)$ – simpleksler incelenir. Dijital simplişil dönüşümler, dijital yüz dönüşümleri ve dijital dejenere dönüşümler tanımlanır ve bunlar arasındaki özdeşlikler verilir. Ayrıca dijital görüntülerde simplişil küme yapısı oluşturulur.

Dördüncü bölümde dijital görüntülerde simplişil gruplar ve Kan kompleksleri tanımlanır. Kan komplekslerinden yararlanılarak dijital simplişil kümelerin homotopi özellikleri incelenir. Ayrıca 2-boyutlu, 8-yakınlıklı bir dijital simplişil grubun $(2,0)-$, $(2,1)-$ ve $(8,2)-$ simplekslerinin dijital homoloji grupları belirlenir.

Beşinci bölümde dijital görüntülerde Moore kompleksleri tanımlanır. Dijital görüntülerdeki toplamsal grup yapısı göz önüne alınır ve bu işleme göre dijital görüntülerde Moore kompleksinin ikinci ve üçüncü boyuttaki elemanlarına karşılık gelen normal alt grup incelenir.

I. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Dijital topoloji ve geometri dijital kümeler olarak adlandırılan dijital düzlemin alt kümelerinin topolojik ve geometrik özellikleri ile ilgilidir. Dijital düzlemde görüntü işlemi siyah-beyaz görüntülerin matematiksel bir modeli olarak alınır. Bu uygulamada genellikle dijital görüntüde, S siyah noktaların bir kümesine ve beyaz noktalardan oluşan S nin tümleyenine sahip olunur.

$\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}$ sırasıyla tamsayılar ve reel sayılar kümesi olsun. $\mathbb{Z}^n$, n – boyutlu Euclid uzay $\mathbb{R}^n$ deki lattis noktalarının kümesi olsun. Bir X dijital görüntüsü, $\mathbb{Z}^n$ in sonlu bir alt kümesi ve k da X in elemanları için yakınlık bağıntısını göstermek üzere bir (X, k) çiftidir. k – yakınlık bağıntıları $\mathbb{Z}^n$ deki dijital görüntü çalışmalarında kullanılır. $1 \leq u \leq n$ olmak üzere pozitif bir u tamsayısı için $\mathbb{Z}^n$ deki bir dijital görüntünün bir yakınlık bağıntısını şu şekilde tanımlarız:

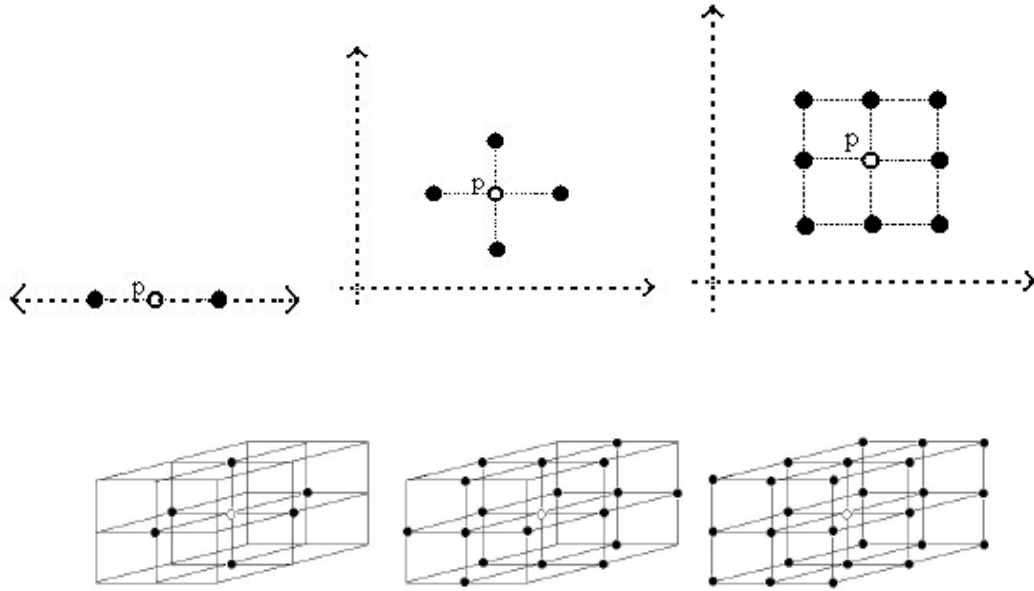
$\mathbb{Z}^n$ deki farklı iki $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ noktaları için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa bu iki noktaya $k(u, n) - yakın$ denir.

- $|p_i - q_i| = 1$ olacak şekilde en fazla u tane farklı i indisi vardır; ve
- Tüm j indisleri için $|p_j - q_j| \neq 1$ ise bu takdirde $p_j = q_j$.

$\mathbb{Z}^n$ üzerindeki bir $k(u, n) - yakınlık$ bağıntısı, $p \in \mathbb{Z}^n$ noktasına $k(u, n) - yakın$ olan noktaların sayısı ile de gösterilebilir. Üstelik

- $\mathbb{Z}$ in $k(1, 1) - yakın$ noktaları $2 - yakın$;
- $\mathbb{Z}^2$ nin $k(1, 2) - yakın$ noktaları $4 - yakın$ ve $k(2, 2) - yakın$ noktaları $8 - yakın$;

- $\mathbb{Z}^3$ nin $k(1,3)$ -yakın noktaları 6-yakın, $k(2,3)$ -yakın noktaları 18-yakın ve $k(3,3)$ -yakın noktaları 26-yakın olarak adlandırılır;
- $\mathbb{Z}^4$ ün $k(1,4)$ -, $k(2,4)$ -, $k(3,4)$ -, $k(4,4)$ -yakın noktaları sırasıyla 8-yakın, 32-yakın, 64-yakın ve 80-yakın olarak isimlendirilir. [3]



Şekil 1.1. Sırasıyla bir noktanın 2-, 4-, 8-, 6-, 18-, 26-yakınlığı.

Tanım 1.1.1. Bir $p \in \mathbb{Z}^n$ noktasının κ -komşuluğu, $\mathbb{Z}^n$ in p ye κ -yakın olan bir noktasıdır.

κ nın $\mathbb{Z}^n$ üzerinde bir yakınlık bağıntısı olduğunu kabul edelim. Bir $X \subset \mathbb{Z}^n$ dijital görüntüsünün κ -bağlantılı olması için gerek ve yeter şart her $\{x, y\} \subset X$, $x \neq y$ nokta çifti için $x = x_0, x_c = y$ ve, x_i ve x_{i+1} κ -komşu, $i \in \{0, 1, \dots, c-1\}$ olacak şekilde bir $\{x_0, x_1, \dots, x_c\} \subset X$ alt kümesinin var olmasıdır. [3]

Tanım 1.1.2. X ve Y $X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$, $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ olacak şekilde dijital görüntüler olsun. Bu takdirde $f : X \rightarrow Y$ dijital fonksiyonu dijital görüntüler arasında tanımlanmış bir fonksiyondur.

Tanım 1.1.3. X ve Y $X \subset \mathbb{Z}^{n_0}$ ve $Y \subset \mathbb{Z}^{n_1}$ olacak şekilde dijital görüntüler olsun. $f : X \rightarrow Y$ nin bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. κ_i , $i \in \{0, 1\}$ olmak üzere $\mathbb{Z}^{n_i}$ üzerinde tanımlı bir

yakınlık bağıntısı olsun. Eğer X in her κ_0 –bağlantılı alt kümesinin f altındaki görüntüsü k_1 –bağlantılı ise $f, (\kappa_0, \kappa_1)$ –süreklidir ([3]).

Tanım 1.1.3 ü sağlayan bir fonksiyon dijital sürekli olarak göz önüne alınacaktır. Bu tanımın sonucu aşağıda verilmiştir.

Önerme 1.1.4. X ve Y dijital görüntüler olsun. Bu takdirde $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun (k_0, k_1) –sürekliliği için gerek ve yeter şart her $\{x, y\} \subset X$ için x_0 ve x_1 k_0 –yakın olacak şekilde $f(x_0) = f(x_1)$ veya $f(x_0)$ ve $f(x_1)$ k_1 –yakın olmasıdır ([3], [18]).

Tanım 1.5. $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$ olsun. Bir dijital aralık,

$$[a, b]_{\mathbb{Z}} = \{z \in \mathbb{Z} \mid a \leq z \leq b\}$$

şeklindeki bir kümedir ([3]).

Örneğin k bir Y dijital görüntüsü üzerinde bir yakınlık bağıntısı ise, bu takdirde, $f : [a, b]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$, $(2, k)$ –bağlantılıdır ancak ve ancak her $\{c, c+1\} \subset [a, b]_{\mathbb{Z}}$ için $f(c) = f(c+1)$ veya $f(c)$ ve $f(c+1)$ k –yakındır [3].

Tanım 1.1.6. $X \subset \mathbb{Z}^n$ ve $Y \subset \mathbb{Z}^n$ in dijital görüntüler olduğunu kabul edelim. $f, g : X \rightarrow Y$, (κ, λ) –sürekliliği fonksiyonlar olsun. Pozitif bir m tamsayısının ve aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde bir $F : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$ fonksiyonunun var olduğunu kabul edelim.

i) Tüm $x \in X$ ler için $F(x, 0) = f(x)$ ve $F(x, m) = g(x)$;

ii) Tüm $x \in X$ ler için ve tüm $t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$ ler için

$$F_x(t) = F(x, t)$$

ile tanımlı $F_x : [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$ fonksiyonu $(2, \lambda)$ –sürekliliği dir.

iii) Tüm $t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$ ler için

$$F_t(x) = F(x, t)$$

ile tanımlı $F_t : [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$ fonksiyonu $(2, \lambda)$ –sürekliliği dir.

Bu takdirde F , f ve g arasında (κ, λ) –homotopisi olarak adlandırılır ve f ve g nin Y de (κ, λ) –homotopik olduğu söylenir.

Burada f ve g nin Y de dijital olarak (κ, λ) –homotopik olması

$$f \simeq_{\kappa, \lambda} g$$

ile gösterilir ([3], [5], [11], [21]).

Tanım 1.1.7. Bir dijital görüntüdeki bir dijital k –yolu $f : [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$, $(2, k)$ –süreklili bir dönüşümdür. Ayrıca $f(0) = f(m)$ ise f nin bir dijital k –kapalı yol (loop) olduğu söylenir. $p = f(0)$ noktasına f kapalı yolunun (loop) baz noktası denir. Eğer f sabit fonksiyon ise trivial (aşıkâr) loop olarak adlandırılır.

f ve g X de f in bittiği yerden g başlayacak şekilde dijital k –yolları ise f ve g nin çarpımı $f * g$ olarak yazılır. Formal olarak; $f : [0, m_1]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$, $g : [0, m_2]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ ve $f(m_1) = g(0)$ ise, bu takdirde $(f * g) : [0, m_1 + m_2]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ dönüşümü

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(t) & t \in [0, m_1]_{\mathbb{Z}} \text{ ise} \\ g(t - m_1) & t \in [m_1, m_1 + m_2]_{\mathbb{Z}} \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlıdır. [5].

Tanım 1.1.8. f ve f' $(2, \lambda)$ –süreklili fonksiyonlar olsun. $[0, m]_{\mathbb{Z}}$ dijital aralığı üzerinde tanımlı f ve f' yolu aynı x_0 başlangıç ve x_1 bitiş noktasına sahipse ve her bir $s \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$ ve her bir $t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$ için

$$F(s, 0) = f(s) \text{ ve } F(s, m) = f'(s),$$

$$F(0, t) = x_0 \text{ ve } F(m, t) = x_1$$

olacak şekilde bir $F : [0, m]_{\mathbb{Z}} \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ dönüşümü varsa f ve f' dönüşümleri dijital yol homotopiktir. F , f ve f' arasında bir dijital yol homotopisi olarak adlandırılır ve $f \simeq_{p(\kappa, \lambda)} f'$ olarak gösterilir. [5]

Tanım 1.1.9. $i_X : X \rightarrow X$ birim dönüşümü nullhomotopik ise, bir $X \subset \mathbb{Z}^n$ uzayının büzülebilir olduğunu söyleriz.

Teorem 1.1.10. $X \subset \mathbb{Z}^n$ olmak üzere X bir dijital görüntü olsun, $I_{\mathbb{Z}} = [0, m]_{\mathbb{Z}}$ bir dijital aralık ve $[I_{\mathbb{Z}}, X], I_{\mathbb{Z}}$ den X e dönüşümlerin dijital yol homotopi sınıfını gösterebilir. X dijital yol bağlantılı ise, bu takdirde $[I_{\mathbb{Z}}, X]$ kümesi tek elemana sahiptir.

İspat: X bir dijital görüntü, $f : I_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ ve $g : I_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ ise dijital sürekli dönüşümler olsun. X dijital yol bağlantılı olduğundan her bir $f(s), g(s) \in X$ için ve tüm $s \in I_{\mathbb{Z}}$ için $f(s) = H(0)$ ve $g(s) = H(m)$ olacak şekilde dijital bir $H : I_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ dönüşümü vardır.

Diğer taraftan G dönüşümünü

$$\begin{aligned} G : I_{\mathbb{Z}} \times I_{\mathbb{Z}} &\rightarrow X \\ (s, t) &\mapsto G(s, t) = H(t) \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlansın.

Bu takdirde $G(s, 0) = H(0) = f(s)$ ve $G(s, m) = H(m) = g(s)$ olup, böylece $f \simeq_{(\kappa, \lambda)} g$ ve buradan da $[I_{\mathbb{Z}}, X] = \{[f]\}$ bulunur. ■

Sonuç 1.1.11. X ve Y dijital görüntüler olsun. X dijital büzülebilir ve Y dijital yol bağlantılı ise bu takdirde $[X, Y]$ kümesi tek elemanlıdır.

İspat: $[f], [g] \in [X, Y]$ olduğunu kabul edelim. $[f] = [g]$ olduğunu göstermek istiyoruz.

Burada $f, g : X \rightarrow Y$ ve Y dijital yol bağlantılı olduğundan

$$\begin{aligned} F : X \times I_{\mathbb{Z}} &\rightarrow Y \\ F(x, s) &= \alpha(s) \\ F(x, 0) &= \alpha(0) = f(x) \\ F(x, m) &= \alpha(m) = g(x) \end{aligned}$$

$$\exists \alpha : I_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y, \alpha(0) = f(x), \alpha(m) = g(x)$$

bulunur. O halde $f \simeq g \Rightarrow [f] = [g]$ olup, böylece $[X, Y] = \{[f]\}$. ■

II. BÖLÜM

DİJİTAL KATEGORİLER

Tanım 2.1. [9] Bir dijital kategori, aşağıdaki özellikler sağlanacak şekilde bir $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, dom, cod, \circ)$ beşlisidir.

- (i) $\mathcal{O}$ elemanları dijital görüntüler olan ve $\mathcal{C}$ – dijital nesneler olarak adlandırılan bir nesneler sınıfı,
- (ii) $\mathcal{M}$ elemanları dijital görüntüler arasında tanımlanmış dijital sürekli fonksiyonlar olan ve $\mathcal{C}$ – dijital morfizmler olarak adlandırılan bir morfizmler sınıfı,
- (iii) dom ve cod $\mathcal{M}$ den $\mathcal{O}$ ya tanımlanmış dijital fonksiyonlar ($dom(f)$, f in tanım bölgesi ve $cod(f)$, f in değer bölgesi olarak adlandırılır)
- (iv) $\circ$ işlemi

$$D = \{(f, g) \mid f, g \in \mathcal{M} \text{ ve } dom(f) = cod(g)\}$$

den $\mathcal{M}$ içine aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde bir fonksiyon olup, bu ve $\mathcal{C}$ nin birleşim kuralı olarak adlandırılır:

(1) Eşleme Özelliği: Eğer $f \circ g$ tanımlıysa, bu takdirde $dom(f \circ g) = dom(g)$ ve $cod(f \circ g) = cod(f)$;

(2) Birleşme Özelliği: Eğer $f \circ g$ ve $h \circ f$ tanımlı ise, bu takdirde $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$;

(3) Birim Eleman Özelliği: Her bir $A \in \mathcal{C}$ –dijital nesnesi için $dom(e) = A = cod(e)$ ve

(a) $f \circ e$ tanımlı oldukça $f \circ e = f$ ve,

(b) $e \circ g$ tanımlı oldukça $e \circ g = g$;

olacak şekilde $e \in \mathcal{C}$ –dijital morfizmi vardır.

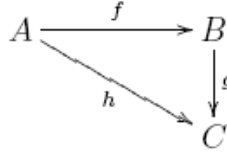
(4) Morfizm Sınıfının Küçüklüğü Şartı: $\mathcal{C}$ – dijital nesnelerinin herhangi bir (A, B) çifti için

$$\{f \mid f \in \mathcal{M}, \text{dom}(f) = A \text{ ve } \text{cod}(f) = B\}$$

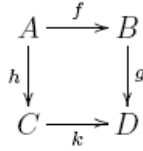
sınıfı bir kümedir.

A, B, C ve D dijital görüntüler olsun. $g \circ f$ bileşke fonksiyonu göstermek için $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ notasyonu ile gösterilir.

Bu takdirde



üçgeni ifadesi $g \circ f = h$ ifadesine denktir. Eğer f ve g morfizmleri yukarıdaki üçgen değişmeli olacak şekilde mevcutsa, h ın B yi parçaladığı söylenir. Benzer şekilde



karesinin değişmeli olması $g \circ f = k \circ h$ olması anlamına gelir.

Önerme 2.2. [9] $\mathcal{C}$ bir dijital kategori ve A ise bir dijital görüntü olacak şekilde bir $\mathcal{C}$ – nesne olsun. Bu takdirde Tanım 3.1 in 3(a) ve 3(b) şartını sağlayan, yani

(a) $f \circ e$ tanımlı oldukça $f \circ e = f$ ve,

(b) $e \circ g$ tanımlı oldukça $e \circ g = g$

olacak şekilde bir tek $e : A \rightarrow A$, $\mathcal{C}$ – dijital morfizmi vardır.

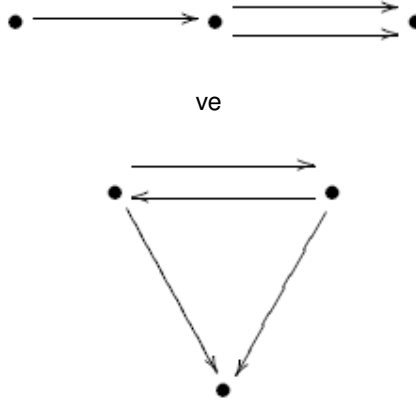
İspat: e ve $\tilde{e}$ nin ikisinin de böyle bir dijital morfizm olduğunu kabul edelim. Bu takdirde (a) $\tilde{e} \circ e = \tilde{e}$ ve (b) den $\tilde{e} \circ e = e$; böylece, $e = \tilde{e}$. ■

Tanım 2.3. [9] $\mathcal{C}$ kategorisinin herhangi bir A nesnesi için, yukarıdaki (a) ve (b) yi sağlayan bir tek $\mathcal{C}$ – dijital morfizmi $e : A \rightarrow A$, 1_A ile gösterilir ve A ın $\mathcal{C}$ – birimi olarak adlandırılır.

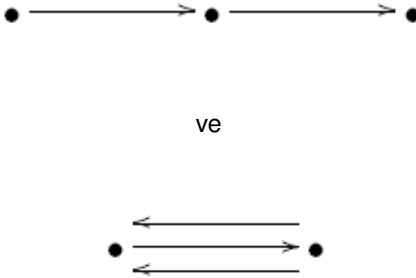
Tanım 2.4. [9] Bir $\mathcal{C}$ dijital kategorisinin:

- (1) $\mathcal{C}$ dijital görüntüyse *Small (Küçük)*;
- (2) Tüm morfizmleri birim ise *diskret*;
- (3) Dijital $\mathcal{C}$ – nesnelerinin her bir (A, B) çifti için $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \neq \emptyset$ ise *kategorik olarak dijital bağlantılı* olduğu söylenir.

Örnek 2.5. Aşağıdaki diyagramda dijital nesnelerin tümü $\mathbb{Z}^2$ nin sonlu bir alt kümesi olan dijital görüntüler olsun $\mathbb{Z}^2$ de 8 – yakın lık bağıntısını kullansın. Dijital nesneler noktalarla birimden farklı dijital morfizmler oklarla gösterilsin. Şu halde



dijital kategoriler olarak göz önüne alınabilir, fakat



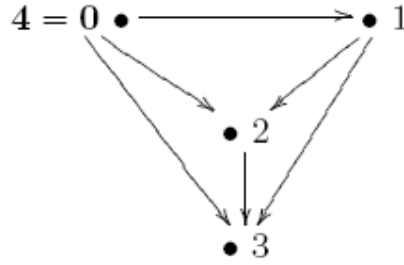
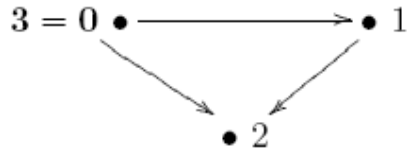
dijital kategoriler olamaz.

Tanım 2.6. Her bir n doğal sayısı için, alışılmış sıralamayla donatılan $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ kümesi $\mathbf{n}$ dijital kategorisi olarak göz önüne alınabilir, bu durumda bazı özel küçük dijital kategoriler aşağıdaki gibidir:

$\mathbf{0}$ = Boş Kategori

$\mathbf{1} = \bullet$

$\mathbf{2} = 0 \bullet \longrightarrow \bullet 1$



vb.

Boxer [5] çalışmasında dijital yol homotopisini tanımladı. Diğer yandan dijital yol homotop olma bağıntısı bir denklik bağıntısı olduğundan bu durumda dijital yolların denklik sınıflarından yani yol homotopi sınıflarından bahsedilebilir.

Örnek 2.7: Verilen bir X dijital görüntüsü ve $x, y \in X$ için x den y ye bir dijital κ -yolu $f(0) = x$ ve $f(m) = y$ olacak şekilde bir $[0, m]_{\mathbb{Z}}$ dijital aralığından X üzerine tanımlanan $(2, \kappa)$ -sürekli bir f dönüşümüdür.

$f : [0, m_1]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$, x den y ye bir dijital yol ve $g : [0, m_2]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$, y den z ye bir dijital yol ise (bu yollar birinin bittiği yerden diğeri başlayacak şekilde dijital yollar olmalı) bu takdirde x den z ye

$$g * f(t) = \begin{cases} f(t) & t \in [0, m_1]_{\mathbb{Z}} \\ g(t - m_1) & t \in [m_1, m_1 + m_2]_{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

ile tanımlı $gf : [0, m_1 + m_2]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ yolu vardır. Bu X in dijital yol kategorisi olarak adlandırılan bir kategoriye meydana getirir. Şimdi verilen $f : [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$, $g : [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$ dijital yollarının ikisi de x den y ye olsun. Bu takdirde $\mathbb{Z}^2$ deki bir dijital görüntüde

$$F(t, 0) = f(t)$$

$$F(t, m) = g(t)$$

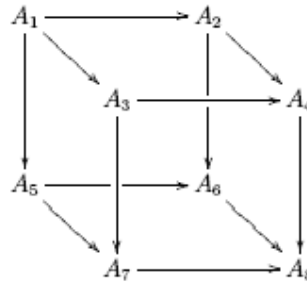
$$F(0, s) = x \quad s \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$$

$$F(m, s) = y \quad s \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$$

olacak şekilde dijital sürekli bir $F : [0, m]_{\mathbb{Z}} \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ dönüşümü vardır. Bunun bir denklik bağıntısı olduğu kolayca görülebilir. Dijital yol kategorisinin bu denklik bağıntısıyla bölümü X deki dijital yolların dijital homotopi sınıflarının kategorisi olarak adlandırılır.

Tanım 2.8. [9] $\mathcal{C}$ bir dijital kategori ve A, B dijital görüntüler olsun. $\mathcal{C}$ deki bir $f : A \rightarrow B$ dijital morfizmi soldan sadeleştirilebilirse bu morfizmin mono, sağdan sadeleştirilebilirse epi olduğu söylenir.

Teorem 2.9. $A_i, i \in \{1, \dots, 8\}$ kümelerinin dijital görüntüler olduğunu kabul edelim. Diğer yandan $\mathcal{C}$ kategorisinde verilen dijital nesnelerin ve dijital morfizmlerin oluşturduğu 'küpü' ise aşağıdaki biçimde göz önüne alalım:



(i) Üst yüz hariç diğer tüm yüzlerin değişmeli olduğunu kabul edelim. Eğer $A_4 \rightarrow A_8$ mono ise, bu takdirde üst yüz değişmelidir.

(ii) Alt yüz hariç diğer tüm yüzlerin değişmeli olduğunu kabul edelim. Eğer $A_1 \rightarrow A_5$ epi ise, bu takdirde alt yüz değişmelidir.

İspat: $[i, j]$, A_i den A_j ye dijital morfizmi gösterebiliriz.

(i) $[3, 4] \circ [1, 3] = [2, 4] \circ [1, 2]$ olduğu ispat edilmelidir. Hipotezden $[4, 8]$ mono olduğundan; ($\circ$ sembolünü kısaltarak)

$$\begin{aligned} [4, 8][3, 4][1, 3] &= [7, 8][5, 7][1, 5] \\ &= [6, 8][5, 6][1, 5] \\ &= [6, 8][2, 6][1, 2] \\ &= [4, 8][2, 4][1, 2] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu takdirde sonuç $[4, 8]$ in sadeleştirilmesiyle bulunur.

(ii) $[7, 8] \circ [5, 7] = [6, 8] \circ [5, 6]$ olduğu gösterilmelidir. $[1, 5]$ epi olduğundan, böylece

$$\begin{aligned} [7, 8][5, 7][1, 5] &= [4, 8][2, 4][1, 2] \\ &= [7, 8][3, 7][1, 3] \\ &= [6, 8][5, 6][1, 5]. \end{aligned}$$

olup, sonuç $[1, 5]$ in sağdan sadeleştirilmesiyle elde edilir. ■

Örnek 2.10: X dijital görüntü olmak üzere $x, y \in X$ noktaları verilsin. x den y ye bir κ yolu $f(0) = x$ ve $f(m_1) = y$ iken bir $[0, m]_{\mathbb{Z}}$ dijital kümesinden X e $(2 - \kappa) -$ sürekli olan bir f dönüşümüdür. $f : [0, m_1]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ x den y ye bir dijital yol ve $g : [0, m_2]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$ de y den z ye bir dijital yol ise,

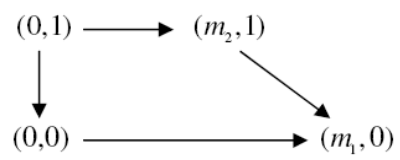
$$gf(t) = \begin{cases} f(t) & t \in [0, m_1]_{\mathbb{Z}} \\ g(t - m_1) & t \in [m_1, m_1 + m_2]_{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

ile tanımlı x den z ye bir $gf : [0, m_1 + m_2] \rightarrow X$ yolu vardır.

Bu, X i, X in dijital yol kategorisi olan bir kategori haline getirir. Şimdi ikiside x den y ye $f : [0, m_1]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$, $g : [0, m_2]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$ biçiminde iki dijital yolun olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $\mathbb{Z}^2$ de

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= f(s) \\ H(s, m_2) &= g(s) \\ H(0, t) &= x \\ H(m_1, t) &= y. \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $H : [0, m_1]_{\mathbb{Z}} \times [0, m_2]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ dönüşümü varsa $f \sim_{(2, \kappa)} g$ tanımlanabilir.



III. BÖLÜM

DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE SİMPLEŞİL KÜMELERİN İNŞASI

Simplişil kümeler elemanter cebirsel topolojide simplişil komplekslerin genelleştirmeleridir. Dijital görüntülerde de simplişil kümeler daha önce [11] ve [14] de tanımlanan dijital simplişil komplekslerin bir genelleştirmesi olacaktır.

3.1. DİJİTAL SİMPLEŞİL KOMPLEKSLER

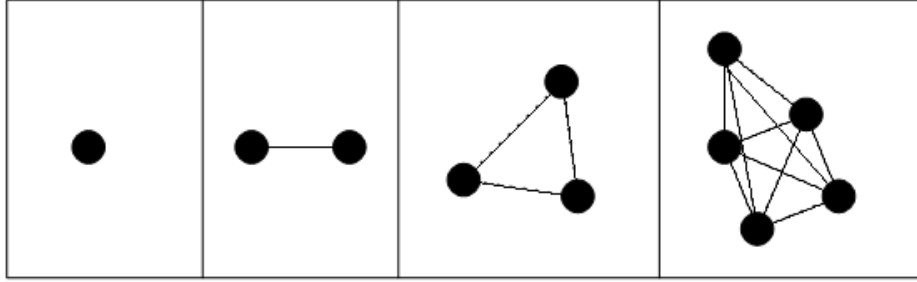
Tanım 3.1.1. [10,13] $P = \{p_0, p_1, \dots, p_m\} \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$ bir dijital görüntü olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa P ye dijital (κ, m) – simpleks denir.

(i) $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ farklı elemanlar ve $t_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\sum_{i=1}^m t_i p_i = 0$ ve $\sum_{i=1}^m t_i = 0$ ise $t_0 = t_1 = \dots = t_m = 0$ dır.

(ii) Her $i, j \in \{0, 1, \dots, m\}$, $i \neq j$ için p_i ve p_j κ – yakın.

$P = \langle p_0, p_1, \dots, p_m \rangle$ ile gösterilir ve m ye simpleksin boyutu denir.

Bu durumda bazı simpleksler, bütün noktalar birbirine sırasıyla 2–, 2–, 8–, 26 – yakın olmak üzere gösterilmiştir.



Şekil 3.1. Sırasıyla $(2,0)$ –, $(2,1)$ –, $(8,2)$ –, $(26,3)$ –simpleksler

Tanım 3.1.2. [11, 14] Aşağıdaki özellikleri sağlayan $P = \{p_0, p_1, \dots, p_m\} \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$ dijital (κ, m) –simplekslerinin sonlu koleksiyonu olan K ya dijital simplişil kompleks denir:

(i) $s \in K$ ise s nin yüzü de bu simplişil komplekse aittir. (s nin yüzü, $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ nin bir alt kümesi tarafından gerilen herhangi bir simplekstir)

(ii) $s, t \in K$ iken $s \cap t$ boştur ya da s ve t nin ortak bir dijital simpleksi vardır.

Tanım 3. 1.3. [11, 14] Dijital simplişil kompleks (K, κ) ya ait köşeler kümesi üzerinde bir sıralama var ise (K, κ) ya yönlü dijital simplişil kompleks denir.

Tanım 3. 1.4. [11, 14] (K, κ) bir dijital simplişil kompleksinin geometrik realizasyonu $|K|$ tüm dijital simplekslerin birleşimi olarak tanımlanır. Yani

$$|K| = \bigcup_{s \in K} s.$$

Dijital görüntüler aynı zamanda $(\kappa, 0)$ –simplekslerin birleşimi gibi düşünülebilir. Bu durumda her dijital görüntü bir dijital simplişil kompleksdir.

Tanım 3. 1.5. [11, 14] (K, κ_0) bir dijital görüntü olsun. Bir (K, κ_1) simplişil kompleksi ve olmak üzere bir $h : |K| \rightarrow X$ (κ_0, κ_1) –izomorfizması varsa, bu takdirde X dijital görüntüsü çok yüzlüdür denir.

Bu durumda dijital görüntülerin çokyüzlüsü yerine kendisiyle doğrudan çalışılabilir.

Önerme 3. 1.6. [11, 14] $P \subset (\mathbb{Z}^{n_0}, \kappa_0)$, $Q \subset (\mathbb{Z}^{n_1}, \kappa_1)$ sırasıyla dijital (κ_0, m) ve (κ_1, m) simpleksler olsun. Bu takdirde P ve Q dijital (κ_0, κ_1) –izomorfiktir.

İspat: $P = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ ve $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}$ olsun.

$$h: (P, \kappa_0) \rightarrow (Q, \kappa_1), \quad p_i \mapsto h(p_i) = q_i$$

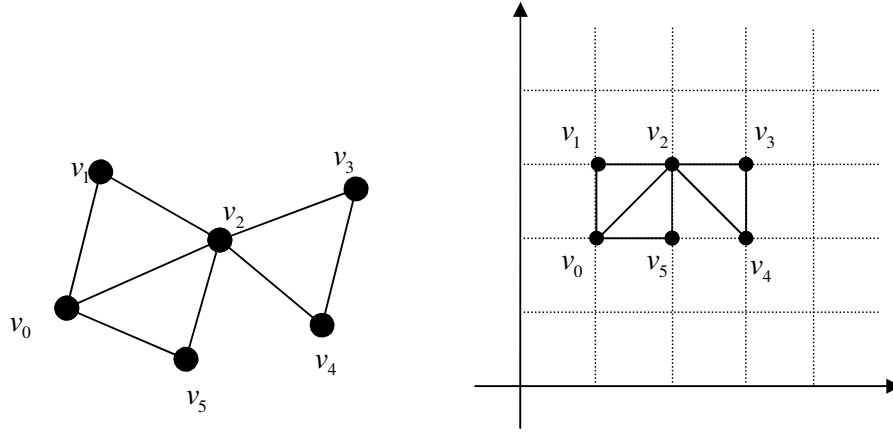
şeklinde tanımlanan dönüşüm her $p_i \in P$ için (κ_0, κ_1) – izomorfizmdir. ■

Örnek 3.1.7: Eğer X bir dijital simplişil kompleks ve $[v_{i_0}, \dots, v_{i_m}]$ X in bir dijital (κ, m) – simpleksi ise, bu takdirde $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_m}\} \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$ nin herhangi bir alt kümesi bu dijital simpleksin bir yüzüdür ve bu takdirde kendisi X in bir dijital simpleksidir. Özel olarak, $[v_{i_0}, \dots, v_{i_m}]$ (κ, m) – simpleksini kendisinden ve kendi yüzlerinden oluşan bir geometrik dijital simplişil kompleks olarak düşünebiliriz.

Bir dijital kompleksin κ – yakınlıklı $X^m \subset (\mathbb{Z}^n, \kappa)$ iskeleti X in tüm (κ, m) – simplekslerinin kümesidir. $X^0 = \{v_i\}_{i \in I}$ olacak şekilde köşeler işaretlenirse X^m in her bir elemanını X^0 in $m+1$ kardinalitiden κ – yakınlıklı bir alt cümlesi olarak düşünebiliriz. $[v_{i_0}, \dots, v_{i_m}]$ X in bir (κ, m) – simpleksi ise $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_m}\} \subset X^0$ dijital görüntüsü X^k nin bir elemanıdır.

Bir geometrik dijital simplişil kompleksi tarif etmek için köşelerin kümesi verilsin. $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_m}\}$ köşelerinin hangi koleksiyonunun dijital simplişil kompleksin $[v_{i_0}, \dots, v_{i_m}]$ dijital (κ, m) – simpleksine karşı geldiğini bilmek yeterlidir.

Tanım 3. 1.8: Bir soyut dijital simplişil kompleks her bir m tamsayısı için X^0 in $m+1$ kardinalitiden κ – yakınlıklı (hepsi olması gerekmeyen) alt kümelerinden oluşan bir X^m ile birlikte köşelerin bir X^0 kümesinden oluşur. Bu, “ X^m in κ – yakınlıklı bir elemanının $(j+1)$ – elemanlı herhangi bir alt kümesi X^j nin κ – yakınlıklı bir elemanıdır ” bağıntısını sağlamalıdır.



Şekil 3.2: Noktalar birbirine 8 – yakın olmak üzere bir dijital simplişil kompleks.

Yukarıdaki şekilde $[v_0, v_1, v_2]$ nin bir $(8, 2)$ – simpleks olduğuna, fakat $[v_1, v_2, v_4]$ ün bir dijital $(8, 2)$ – simpleks olmadığına dikkat edelim.

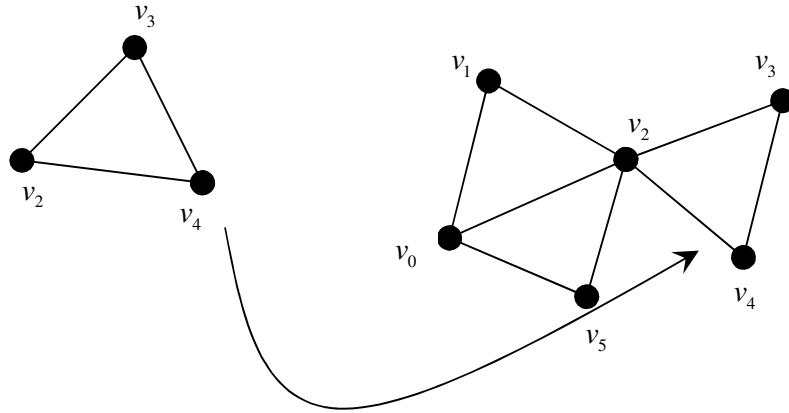
X^m in her bir elemanı bir soyut (κ, m) – simplekstir, ve tanımın son şartı soyut dijital simplişil kompleksteki soyut κ – yakınlıklı bir dijital (κ, m) – simpleksin her yüzünün de dijital simplişil kompleksin bir κ – yakınlıklı dijital simpleksi olduğunu garanti eder.

Böylece bir soyut dijital simplişil kompleks bir geometrik simplişil kompleks ile tam olarak aynı kombinatorik yapıya sahiptir. Nasıl büyük dijital simpleks olduğu hakkındaki ve $\mathbb{Z}^m$ in bir alt kümesine nasıl gömüleceği vs. hakkında geometrik bilgiye sahip olmamakla birlikte, dijital izomorfizmaya bağlı dijital kompleksi yeniden oluşturmak için gerekli tüm altyapı bilinmektedir. Bir geometrik dijital simplişil kompleksin soyut simplişil kompleksi vermesi kolaydır, fakat tersine soyut simplişil komplesten (dijital izomorfizmaya bağlı) bir geometrik dijital simplişil kompleksi X^0 in her bir elemanını bir noktaya işaretleyerek ve uygun köşelerle gerilen ve bölüm topolojisine göre bu dijital simplekslerle yapıştırılarak bir geometrik dijital (κ, m) – simpleks olan $[v_{i_0}, \dots, v_{i_m}]$ soyut dijital simpleksi ile birlikte işaretleyerek belirli bir simplişil kompleks elde edilir.

3.2. DİJİTAL SİMLİŞİL DÖNÜŞÜMLER

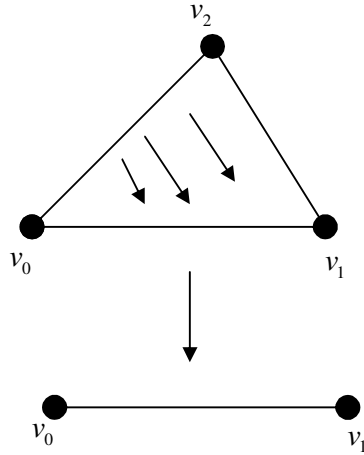
K ve L geometrik dijital simlişil kompleks ise, bu takdirde $f : K \rightarrow L$ dijital simlişil dönüşümü K nın $\{v_i\}$ köşelerini $[v_{i_0}, \dots, v_{i_m}]$ K nın bir (κ_1, m) –simpleksi ise, bu takdirde $f(v_{i_0}), \dots, f(v_{i_m})$ L deki bir (κ_2, m) –simpleksin (birim olması gerekmeyen) tüm köşeleri olacak şekilde L nin $\{f(v_i)\}$ köşelerine götürerek belirlenir. Böyle bir $K^0 \rightarrow L^0$ fonksiyonunun verildiği düşünülürse, $f : K \rightarrow L$ her bir (κ_1, m) –simpleks üzerindeki lineer interpolasyonla belirlenir. ($x \in K$, v_{i_j} ile gerilen (κ_1, m) –simpleksin barisentrik koordinatlarında $t_j \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = \sum_{j=1}^m t_j v_{i_j}$ ile belirlenebiliyorsa, bu takdirde $f(x) = \sum_{j=1}^m t_j f(v_{i_j})$). Böylece elde edilen $f : K \rightarrow L$ fonksiyonu (κ_1, κ_2) –sürekli.

Örnek 3.2.9: Basit ama ilginç bir örnek bir (κ, m) –simpleksin bir dijital simlişil komplekste içerilmesidir. X bir dijital simlişil kompleks ve $v_{i_0}, \dots, v_{i_m}$ X in (κ, m) –simplekslerini geren X in köşelerinin bir koleksiyonu ise, bu takdirde $K = [v_{i_0}, \dots, v_{i_m}]$ in kendisi bir dijital simlişil komplekstir. Bu takdirde her bir v_{i_j} köşesini X de karşılık gelen köşeye dönüştüren ve böylece K yı X içinde özdeş olarak kendine dönüştüren $K \rightarrow X$ dijital simlişil dönüşümüne sahip olunur.



Şekil 3.3: Daha büyük bir simlişil kompleks içinde $[v_2, v_3, v_4]$ simpleksinin içerilmesi.

Örnek 3. 2.10: $[v_0, v_1, v_2]$ $(2,1)$ –yüzlerinden biri $[v_0, v_1]$ olan bir $(8,2)$ –simpleks olsun. $(8,2)$ –simpleksi $(2,1)$ –simplekse toplayan $f(v_0) = v_0, f(v_1) = v_1, f(v_2) = v_1$ ile tanımlı bir $f : [v_0, v_1, v_2] \rightarrow [v_0, v_1]$ dijital simlişıl dönüşümü göz önüne alınsın. Dijital simlişıl kümeler teorisinin burada göze çarpan büyük bir katkısı bir dejenere (κ, m) –simpleks olarak $(\kappa,1)$ –simplekste saklanmış $(\kappa,2)$ –simpleksin görüntüsünün hala görülebilecek biçimdeki bir bilgiyi korumaya yönelik bu tür dönüşümleri genelleştirmek için bir yol olmasıdır.



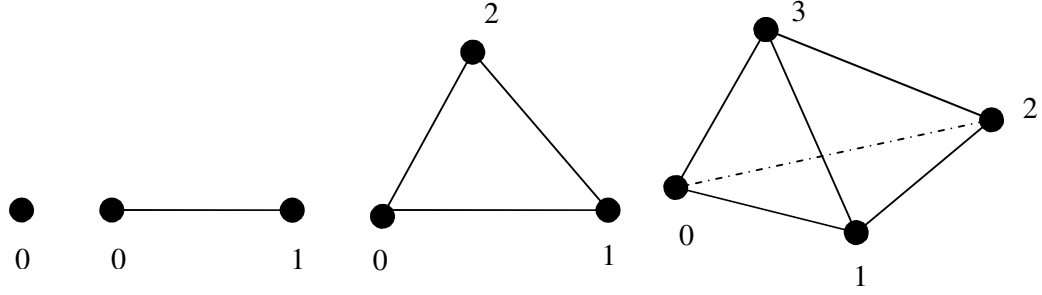
Şekil 3.4: Bir $(\kappa, 2)$ –simpleksin bir $(\kappa, 1)$ –simplekse toplanması.

3.3. YÖNLÜ DİJİTAL SİMLİŞİL KOMPLEKSLER VE YÜZ DÖNÜŞÜMLERİ

Bir X dijital simlişıl kompleksin X^0 köşelerinin kümesi üzerinde bir yönlendirme mevcut olsun, bu durumda yönlü bir dijital simlişıl kompleks elde edilir. Bu yapılırken $[v_{i_0}, \dots, v_{i_m}]$ sembolünün bir dijital simpleksi ifade etmesi için gerek ve yeter şart $j < l$ iken $v_{i_j} < v_{i_l}$ olmasıdır. Bu m kardinaliteden her bir $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_m}\}$ koleksiyonu hala en fazla bir tane dijital simplekse karşılık geldiğinden, bu herhangi bir karmaşıklığa yol açmaz.

Örnek 3.3.11: Yönlü dijital simlişıl komplekslerin tipik bir örneği (yönlü) (κ, n) –simplekslerinin kendisidir. Yönlü (κ, n) –simpleks basitçe köşeleri yönlü bir (κ, n) –simplekstir. Örnek 3.2.7 deki gibi kendi yüzleriyle göz önüne alındığında bir yönlü dijital komplekstir. Burada yönlü (κ, n) –simpleksi $|\Delta^n|_\kappa$ ile gösterilir. Burada Δ^n yerine neden $|\Delta^n|_\kappa$ sembolünün kullanıldığı ise daha sonra açıklanacaktır. Diğer yandan $|\Delta^n|_\kappa = [0, 1, \dots, n]$

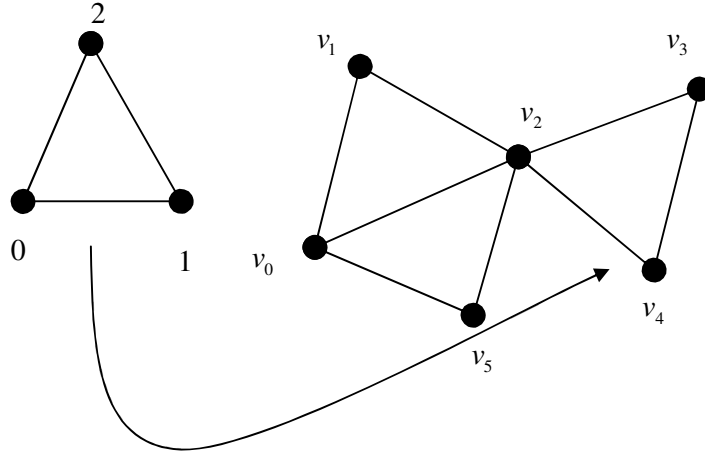
olacak şekilde $0, \dots, n$ sayıları ile köşelerin basitçe işaretlenmiş olduğu (κ, n) – simpleksi bu çalışmada temel olanlardır. Bu takdirde $|\Delta^n|_{\kappa}$ nin her bir k – yüzü $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$ iken $[i_0, \dots, i_k]$ şeklindedir.



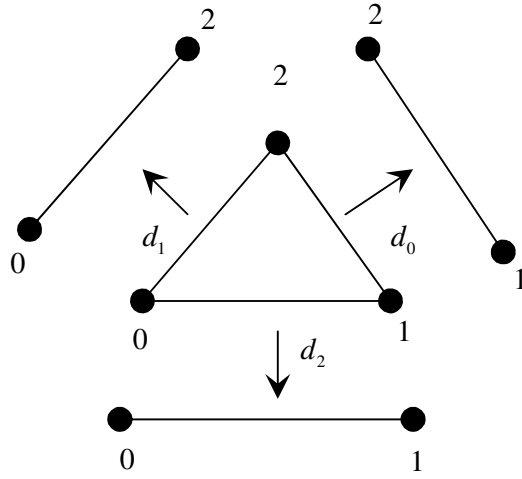
Şekil 3.5: Standart yönlendirilmiş $(2,0), (2,1), (8,2), (26,3)$ – simpleksler.

3.4. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE YÜZ DÖNÜŞÜMLERİ

Bir (κ, n) – simpleksinin verildiğini kabul edelim. Eğer bu (κ, n) – simpleksin $(n-1)$ – boyutlu yüzleri elde edilmek istenirse, bu ancak dijital yüz dönüşümleri ile bulunur. Bu durumda standart (κ, n) – simpleksi üzerinde $\wedge$ göz ardı edilen terimi göstermek üzere $d_j[0, \dots, n] = [0, \dots, \widehat{j}, \dots, n]$ olacak şekilde tanımlı $n+1$ tane $d_0, \dots, d_n$ yüz dönüşümü vardır. O halde d_j nin $[0, \dots, n]$ e uygulanmasıyla j köşesi kaybedilerek $(n-1)$ – yüz bulunmuş olur. Her bir d_j nin (κ, n) – simpleksi onun yüzlerinden birine götürdüğüne dikkat etmek önemlidir; nokta küme topolojisi veya simplişil dönüşüm anlamında altı çizilen bir şey yoktur.



Şekil 3.6: $|\Delta^2|_\kappa$ nın görüntüsü olarak $[v_2, v_3, v_4]$



Şekil 3.7: $|\Delta^2|_8$ nın yüz dönüşümleri.

Yukarıdaki şekilde oklar uzayların sürekli dönüşümlerini değil, eşleştirmeleri gösterir.

Daha genel yönlendirilmiş dijital simplişıl kompleksler için de şu genişlemeyi alalım:

$[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}] \in X^n$ X dijital kompleksinin bir (κ, n) -simpleksi ise, bu takdirde

$d_j[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}] = [v_{i_0}, \dots, \widehat{v_{i_j}}, \dots, v_{i_n}]$. Böylece hepsi birleştirilerek her bir sabit n için fonksiyonların

$d_0, \dots, d_n : X^n \rightarrow X^{n-1}$ koleksiyonu elde edilir. Bu noktanın (κ, n) –simplekslerin köşelerinin sıralamasının önemli hale geldiği yer olduğuna dikkat edelim.

X^n den X^{n-1} e yüz dönüşümleri $d_0^n, \dots, d_n^n$ şeklinde işaretlenirken oldukça dikkatli olunmalıdır, fakat bu pratikte nadiren yapılır. Şu halde d_j j . köşeyi herhangi bir boyutta ($\geq j$) çıkaran yüz dönüşümünü göstermek için kullanılır.

Üstelik yüz dönüşümünün sağladığı belirli bağıntılar vardır. Özel olarak $i < j$ ise, bu takdirde

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i \quad \dots\dots\dots (1)$$

Gerçekten $d_i d_j [0, \dots, n] = [0, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{j}, \dots, n] = d_{j-1} d_i [0, \dots, n]$. Açık olarak $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ bağıntısı ($|\Delta^n|_\kappa$ nın kopyalarının oluşturduğu) bir X dijital kompleksindeki herhangi bir (κ, n) –simpleksi için sağlanmalıdır. Bu bağıntı, bir dijital simplişil kümenin tanımındaki aksiyomlardan biri haline gelir.

Daha sonra meydana gelecek diğer bir husus daha genel yüz dönüşümlerinin mevcut olmasıdır. Örneğin $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$ yı $[1, 3, 4]$ e götüren ve sistematik olarak böyle genel yüz dönüşümleri tanımlanabilir. Bununla birlikte herhangi bir yüz, 1 ile daha küçük boyutlu yüz dönüşümlerinin bileşkesi şeklinde elde edilebilir. Örneğin dönüşümü $d_0 d_2 d_5 d_6$ şeklinde parçalanabilir. Tüm j ler için $i_j < i_{j+1}$ ise,

$$d_{i_1} \cdots d_{i_m}$$

şeklinde genelleştirilebilir.

3.5. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE DELTA KÜMELER VE DELTA DÖNÜŞÜMLER

Delta kümeler (bazen Δ –kümeler olarak adlandırılır) dijital görüntülerde simplişil kümeler ve simplişil kompleksler arasında bir yapı oluşturur.

Tanım 3.5.12: Bir dijital delta küme her bir $n \geq 0$ için $X_0, X_1, \dots$ dijital kümelerin dizisinden ve her bir i , $0 \leq i \leq n+1$ için $i < j$ iken $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ olacak şekilde $d_i : X_{n+1} \rightarrow X_n$ dönüşümlerinden oluşur.

Elbette bu, X_n lerin (κ, n) –simplekslerinin kümesi ve d_i lerin dijital yüz dönüşümü olduğu dijital yönlendirilmiş simplişil komplekslerin genelleştirmesi ve özetlemesidir. Bununla birlikte dijital delta kümeler dijital simplişil kompleksler değildir.

Örnek 3.5.13: Standart yönlü $(8, 2)$ –simpleks $|\Delta^2|_8 = [0, 1, 2]$ den başlayarak ve $[0, 2]$ kenarını $[1, 2]$ kenarına yapıştırarak elde edilmiş olsun. Bir dijital simplişil komplekste verilen dijital simpleksin yüzleri tek olması gerektiğinden bu uzay artık bir dijital simplişil komplekstir. Bu durumda $[0, 1]$ kenarının her iki uç noktası diğerlerine eşittir.

Kategorik Tanım: Yönlü dijital simplişil kompleks dijital standart (κ, n) –simplekslerin izomorfik görüntülerinin bir koleksiyonu olarak düşünülebilir. Elbette dijital simplişil kompleksi tarif etmek için sadece dijital standart (κ, n) –simplekslerin bu kopyalarını değil, onların yüzlerinin birlikte nasıl eklendiğini de bilmek gerekir. Bu bilgi iki dijital simpleksin bir yüzü ne zaman paylaşacağını anlatıldığı yüz dönüşümlerinde içerilir. Dijital delta komplekslerinin daha farklı bakış açısını ortaya koyan alternatif bir tanımı vardır.

İlk olarak $\hat{\Delta}$ kategorisini tanımlayalım:

Tanım 3.5.14: $\hat{\Delta}$ kategorisi nesneler olarak κ –yakınlıklı bir dijital görüntü olan sonlu yönlendirilmiş $[0] = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ kümelerine sahiptir. $\hat{\Delta}$ nın morfizmleri sırayı koruyan $[m] \xrightarrow{f} [n]$ fonksiyonlarıdır; burada $[m]$ ve $[n]$ kümesi 2–yakınlıklı dijital görüntülerdir.

$\hat{\Delta}$ nın nesneleri yönlü (κ, n) –simpleksler olarak düşünülebilir. Morfizmler sadece $m \leq n$ olduğunda tanımlıdır ve bu morfizmleri (κ_0, m) –simpleksi (κ_1, n) –simpleksinin bir yüzüne götüren bir gömme dönüşümdür.

Daha sonra $\hat{\Delta}^{op}$ opposite (ters) kategorisini göz önüne alalım. Bu $\hat{\Delta}$ nın aynı $[n]$ nesnelerinin alınması anlamına gelir. Fakat burada $\hat{\Delta}$ daki $[m] \rightarrow [n]$ yerine $\hat{\Delta}^{op}$ daki $[n] \rightarrow [m]$ dönüşümünü alacağız.

Bu ne anlam gelir? Verilen $[m] \rightarrow [n]$ morfizmi eğer bir yüzün kapsaması ise, bu takdirde yeni $[n] \rightarrow [m]$ opposite dönüşümü $[n]$ (κ_1, n) –simpleksini dönüştürmek ve verilen bir yüzü tarif etmek şeklinde düşünülebilir. Bu daha önce yapılanların bir genelleştirmesidir. Eğer $\hat{\Delta}$ da sırayı koruyan $\{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, \hat{i}, \dots, n+1\}$ ile tanımlı $D_i : [n] \rightarrow [n+1]$ morfizmi

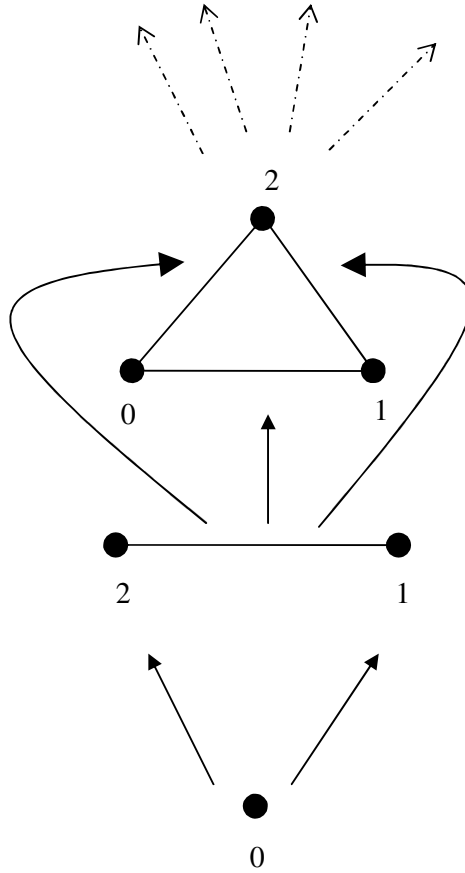
göz önüne alınırsa, bu takdirde $\hat{\Delta}^{op}$ daki bu karşılık getirmeler (κ, n) -simpleksin d_i yüz dönüşümlerine karşılık gelir. Böylece bu tanımla $i < j$ iken $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ olduğunu kontrol etmek kolaydır.

Sonuç olarak $\hat{\Delta}^{op}$ kategorisi (yüz dönüşümü aksiyomunu sağlayan) dijital yüz dönüşümleri ve dijital yüz dönüşümlerinin iterasyonları ile birlikte (κ, n) -simplekslerinin bir koleksiyonudur. Fakat diğer yandan bu tüm delta kümeleri için kullanışlı olmalıdır.

Tanım (Delta Kümeler için Alternatif bir Tanım):

Bir dijital delta kümesi, $DSet$ dijital görüntülerin ve fonksiyonların kategorisi olmak üzere

$X : \hat{\Delta}^{op} \rightarrow DSet$ kovaryant fonktordur. Bu tanıma denk olan bir dijital delta kümesi $\hat{\Delta} \rightarrow DSet$ kontravaryant fonktordur.



Şekil 3.8: $\hat{\Delta}$ kategorisinin kısmi bir gösterimi.

Bir fonktor nesneleri nesnelere ve morfizmleri morfizmlere götürür ve bileşke kuralını korur. Bu tanımdan dolayı bir kovaryant fonktor $\hat{\Delta}^{op} \rightarrow DSet$ $[n] \in \hat{\Delta}^{op}$ dijital görüntüsünü bir X_n dijital görüntüsüne dönüştürür. (Burada X_n , (κ, n) -simplekslerin kümesi olarak da düşünülebilir.) Daha önce ifade edildiği gibi, genelleştirilmiş dijital yüz dönüşümleri, standart d_i yüz dönüşümlerinin tüm bileşkeleridir.

Bu tanımları kuvvetli yönü gerçekten bakış açısı yaratmasıdır. Her seferinde simplekslerin tüm demetinin oluşturulması şeklinde bir Delta kümesi düşünmek yerine X_n deki tüm simpleksler için ifade edildiği gibi (κ, n) -standart simpleksini düşünebiliriz. X fonktoru X_n deki (κ, n) -simplekslerin tümünü $[n]$ e dönüştürür. Standart (κ, n) -simpleksine uygulanan d_i dijital yüz dönüşümü eş zamanlı olarak tüm (κ, n) -simplekslerin i . yüzlerinin tümünü gösterir.

Tersine, X deki herhangi bir durumun $\hat{\Delta}$ ya geri döndüğünde nasıl meydana geldiğini görürüz. Bir X dijital delta kümesindeki $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ aksiyomu bunun $[n]$ (κ, n) -simpleksinde sağlanmasının ve fonktora özgü özelliklerin bir sonucudur.

3.6. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE DELTA DÖNÜŞÜMLERİ

Direkt olarak kategorik tanımdan ilerleyerek X, Y dijital delta kümeleri verilsin. Bununla birlikte $\hat{\Delta} \rightarrow DSet$ kontravaryant fonktorlarını göz önüne alalım. Bu durumda bir $X \rightarrow Y$ morfizması X den Y ye fonktorların doğal dönüşümüdür. Diğer bir ifadeyle morfizm, dijital yüz dönüşümleri ile değişen $X_n \rightarrow Y_n$ küme dönüşümlerinin bir koleksiyonundan oluşur.

3.7. DİJİTAL SİMPLEKSİL KÜMELER VE MORFİZMLER

Dijital simpleksli kümeler hem dijital simpleksli komplekslerin hem de dijital delta kümelerin genelleştirmesidir.

Literatürü araştırırken okuyucu terminoloji ile ilgili dikkatli olmalıdır. Orijinal olarak dijital delta kümeler semi-simpleksli kompleksler olarak alınır ve dejenere operatörler öncelikle daha önce tanımlanmış 'complete semi-simplicial complex' terimi ile ilgilidir. Daha sonra Delta kümeleri daha az ilginç hale gelir, 'complete semi-simplicial' yerini 'semi-simplicial' a ve ardından da 'simplicial' a bıraktı. Günümüzde 'simpleksli küme' olarak ele alınır. Delta kümeler

dendiğinde, $\hat{\Delta}$ prototip kategorisinin kullanıldığı delta kümeleri değil, simplişil kümeler için prototip olan Δ kategorisi anlaşılır. Bundan dolayı okuyucu literatürü incelerken dikkatli olmalıdır.

Biz çalışma süresince ‘Dijital Simplişil Kompleks’, ‘Dijital Delta Küme’ ve ‘Dijital simplişil küme’ adı ile kullanılan notasyonlara dikkat edilmiş, Özel olarak ‘Dijital Simplişil Kompleks’ ve ‘Dijital simplişil küme’ arasındaki fark konusunda emin olunmaya çalışılmıştır.

3.8. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE DEJENERE SİMPLEKSLER

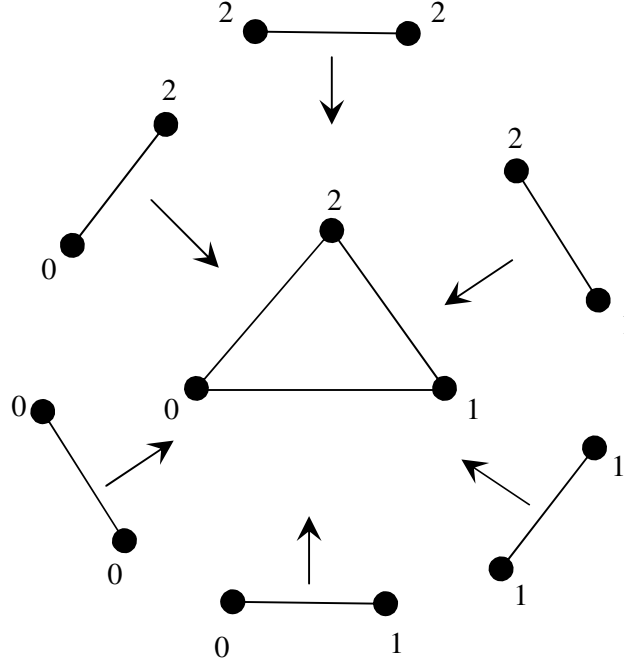
Örnek 3.2.10 dan bir dijital simplişil dönüşümün bir (κ, n) –simplekse toplanabileceği hatırlatıldığında, burada, $\pi(0) = 0, \pi(1) = \pi(2) = 1$ olacak şekilde köşeler üzerinde tanımlı $\pi: |\Delta^2|_8 \rightarrow |\Delta^1|_2$ dijital simplişil dönüşümü vardı. Bunun yanında uygun dönüşümler altında standart (κ, n) –simplekslerinin görüntülerinin koleksiyonu olarak dijital delta kümeler ve dijital simplişil komplekslerin var olduğunu düşünelim. Burada önemli bir soru ise, $(8, 2)$ –simpleksin π altındaki görüntüsü $|\Delta^1|_2$ da neyi verir? Dijital simplişil kümeler alanında $\pi(|\Delta^2|_8)$ görüntüsü dejenere simpleks için bir örnektir.

Kabaca dijital görüntülerde dejenere simpleksler ‘doğru’ boyuta sahip olmayan simplekslerdir. Dijital görüntülerde bir dejenere $(26, 3)$ –simpleks 2–boyutlu, 1–boyutlu veya 0–boyutlu nesne şeklinde realize edilebilir. Geometrik olarak dejenere simpleksler ‘gizlenmiş’tir. Şu halde bunlarla ilgili en açık yaklaşım, tümünün içerisinde tarafımızca geliştirmiş olan kombinatorik gösterimde bulunur.

Bu fikir ve gösterim için anahtar köşelerin tekrarının sağlanmasındadır. Burada doğal yol ise, örneğimizde $\pi(|\Delta^2|_8) = \pi([0, 1, 2])$ yi $|\Delta^2|_8$ nın köşelerinin dönüşüm altında yansımasıyla $[0, 1, 1]$ olarak işaretlemektir. Bu komplekslerdeki simplekslerin v_i sıra ile yazılmış farklı köşeler olmak üzere $[v_0, \dots, v_n]$ olarak yazılması gerektiğini söyleyen prensibi ihlal eder, fakat bazen matematikte bundan daha genel yeni prensiplere ihtiyaç duyulur. Dijital dejenere simpleksler için teklik olmaksızın sıralama korunmalıdır. Bu takdirde bir dijital dejenere simpleks $k < l$ ise $i_k \leq i_l$ olması gerektiği ayrık olmayan v_{i_j} ler için $[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}]$ biçiminde düşünülmelidir.

Örnek 3.8.15: Elemanter $(8, 2)$ –simpleks $[0, 1, 2]$ nin içinde kaç tane dejenere olanları içeren $(2, 1)$ –simpleks vardır?

Bir $(\kappa, 1)$ – simpleks, $a \leq b$ olmak üzere $[a, b]$ olarak yazılır, böylece simpleksler aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi $[0, 1], [0, 2], [1, 2], [0, 0], [1, 1]$ ve $[2, 2]$ biçimindedir.



Şekil 3.9: Elemanter $(8, 2)$ – simpleksdeki dejenere $(2, 1)$ – simpleksler.

Benzer şekilde $|\Delta^2|_8 = [0, 1, 2]$ de üç çeşit $(8, 2)$ – simpleks vardır. Bunlar dejenere olmayan $[0, 1, 2]$ simpleksler, $[0, 1, 1]$, $[0, 0, 2]$ şeklinde 1 – boyuta dejenere olan $(8, 2)$ – simpleksler ve $[0, 0, 0]$ ve $[2, 2, 2]$ şeklinde 0 – boyuta dejenere olan $(8, 2)$ – simpleksler biçimindedir.

Yukarıdaki diyagramda görüldüğü gibi dejenere (κ, n) – simpleksler Örnek 3.2.10 daki gibi çökme dönüşümlerinin görüntüleri olarak düşünülebilir.

Elbette herhangi bir dijital simplişil kompleks veya dijital delta küme kavramsal olarak dejenere simpleksleri içermeye yönelik genişletilebilir.

Ayrıca n – boyutlu küçük dijital simplişil komplekslerin keyfi daha küçük boyutlu dejenere simplişil komplekslerde içerildiğine dikkat edilmelidir. Hatta $(\kappa, 0)$ – simpleks $|\Delta^0|_\kappa = [0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ şeklinde dejenere simpleksleri içerisinde barındırmaktadır.

3.9. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE DEJENERE DÖNÜŞÜMLER

Dijital görüntülerde dejenere dönüşümler, bir anlamda, yüz dönüşümlerinin kavramsal olarak tersidir. d_j yüz dönüşümü bir (κ, n) –simpleksi alır ve j . $(n-1)$ –yüzü tekrar bize geri verir.

Diğer taraftan s_j dijital dejenere dönüşümü bir (κ, n) –simpleksi alır ve bize dijital görüntülerde j . dejenere $(\kappa, (n+1))$ –simpleksi geri verir.

Alışılmış olduğu gibi tüm dijital simplişil kümede herhangi bir model standart (κ, n) –simpleksle gösterilir. $|\Delta^n|_\kappa = [0, \dots, n]$ standart (κ, n) –simpleksi verilsin, $s_j[0, \dots, n] = [0, \dots, j, j, \dots, n]$ ile tanımlı $(n+1)$ –tane $s_0, \dots, s_n$ dijital dejenere dönüşüm vardır. Diğer bir ifadeyle $s_j[0, \dots, n]$ sadece j . köşenin tekrarlanmasıyla $|\Delta^n|_\kappa$ da bir tek $(\kappa, (n+1))$ –simpleksi verir.

Geometrik olarak $s_j |\Delta^n|_\kappa$ nın $i < j$ için $\pi_j(i) = i$, $i > j+1$ için $\pi_j(j) = \pi_j(j+1) = j$ ve $\pi_j(j) = i-1$ ile tanımlı π_j dijital simplişil dönüşümüyle Δ^{n+1} in Δ^n e gömmesi düşünülebilir.

Bu düşünce doğal olarak dijital simplişil komplekslere, dijital delta kümelerine ve zaten dejenere olan (κ, n) –simplekslere genişletilebilir. Eğer her bir k , $0 \leq k < n$ için $i_k \leq i_{k+1}$ olmak üzere (mümkünse dejenere) $[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}]$ (κ, n) –simpleksine sahip olunursa, bu takdirde $s_j[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}] = [v_{i_0}, \dots, v_{i_j}, v_{i_j}, \dots, v_{i_n}]$ olup, diğer bir deyişle v_{i_j} tekrarlanır. Bu $[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}]$ de bir dijital dejenere simplekstir.

Herhangi bir dijital dejenere simpleksin dijital dejenere dönüşümlerin uygulanmasının tekrarlanmasıyla normal bir simpleksten elde edilebilmesi çok zor değildir. O halde bir (κ, n) –simpleksin herhangi bir yüzünün d_i nin bileşkelerinin kullanılmasıyla elde edilebildiği gibi, herhangi bir dijital dejenere simpleks de s_i lerin bileşkelerinden elde edilebilir.

Ayrıca d_i için dijital dejenere dönüşümlerin sahip olduğu belirli doğal dönüşümler vardır. Özel olarak $i \leq j$ ise, bu takdirde $s_i s_j[0, \dots, n] = [0, \dots, i, i, \dots, j, j, \dots, n] = s_{j+1} s_i[0, \dots, n]$. Burada s_i nin uygulanması j yi sağ tarafa ittiğinden dolayı son formülde s_j değil de s_{j+1} e sahip olduğuna dikkat edilmelidir.

Diğer yandan dijital yüz ve dejenere operatörler arasında doğrudan ispat edilebilir bazı bağıntılar vardır. Bunlar:

$$d_i s_j = s_{j-1} d_i \quad i < j \text{ ise}$$

$$d_j s_j = d_{j+1} s_j = id$$

$$d_i s_j = s_j d_{i-1}, \quad i > j+1 \text{ ise}$$

biçimindedir. Örneğin $d_i s_j = s_{j-1} d_i$ formülünün her iki yanına $[0, \dots, n]$ in uygulanmasıyla $[0, \dots, \hat{i}, \dots, j, j, \dots, n]$ elde edilir. Ayrıca $d_j s_j = d_{j+1} s_j = id$ formülü $i = j$ ve $i = j+1$ alınarak eşitliğin ispatı kolayca yapılır.

3.10. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE SİMLİŞİL KÜME YAPISI

Tanım 3.10.16: Bir dijital simlişıl küme $X_0, X_1, \dots$ dijital görüntülerinin kümesinden, her bir i ve $n \geq 0$ için $0 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i \quad i < j$$

$$d_i s_j = s_{j-1} d_i \quad i < j$$

$$d_j s_j = d_{j+1} s_j = id \quad i = j \text{ veya } i = j+1$$

$$d_i s_j = s_j d_{i-1}, \quad i > j+1$$

$$s_i s_j = s_j s_{i-1}, \quad i > j$$

olacak şekilde her bir i için $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ ve $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$ fonksiyonlarından oluşur.

Örnek 3.2.17: Burada ele alınan ilk örnek her dijital yönlü simlişıl kompleksin mümkün olan tüm dijital dejenere simplekslerin eklenmesiyle bir dijital simlişıl küme haline getirilebilmesi ile ilgilidir. Daha açık bir ifade ile X in yönlü dijital simlişıl kompleks olduğu farz edilir. Bu takdirde $\overline{X_n}$, $v_{i_k} \leq v_{i_{k+1}}$ olmak üzere $[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}]$ dijital simplekslerinden oluşur. Diğer yandan $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_n}\}$ köşelerinin kümesi olan X bir (κ, n) -simpleksini gerdiğinde $\overline{X}$ dijital simlişıl kümesi elde edilir. Burada v_{i_j} lerin tek olmak zorunda olmadığına da ayrıca dikkat edilmelidir.

Bunu söylemenin diğer bir yolu X in her $[v_{i_0}, \dots, v_{i_m}]$ biçimindeki (κ, n) -simpleksi için, her bir köşesi herhangi bir sayıda tekrarlandığından, $\overline{X}$ de $[v_{i_0}, \dots, v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_1}, \dots, v_{i_m}, \dots, v_{i_m}]$

şeklinde tüm (κ, n) – simplekslerin yer aldığı görülür. Dijital yüz ve dejenere dönüşümler çeşitli yollarla bu simpleksler üzerinde tanımlıdır. Benzer şekilde her dijital delta küme benzer yöntemle bir dijital simplişil kümeye tamamlanabilir. Böylece gibi dijital delta kümenin onun köşeleriyle belirlenmesi gerekmediği sonucuna ulaşılır.

Tersine olarak her bir dijital simplişil küme bir dijital delta kümeyi verir. Bununla birlikte bir dijital simplişil kümenin yukarıda tarif edilen yöntemle bir yönlü dijital simplişil kompleksten elde edilmesi gerekmez. Örneğin her dijital delta küme bir yönlü dijital simplişil kompleks değildir.

Örnek 3.2.18 $X = [0]$ standart $(\kappa, 0)$ – simpleks, bir dijital simplişil küme olarak düşünülürse her bir X_n de, $n \geq 0$ bir elemanlı bir tek dijital simplişil küme olduğu görülür. n . boyuttaki eleman $\underbrace{[0, 0, \dots, 0]}_{n+1\text{-tane}}$ biçimindedir.

Örnek 3.2.19 Bir dijital simplişil küme olarak standart yönlü $(\kappa, 1)$ – simpleks $X = [0, 1]$ olmak üzere her bir X_n de $n + 2$ elemana sahiptir. Diğer bir deyişle; $X_2 = \{[0, 0, 0], [0, 0, 1], [0, 1, 1], [1, 1, 1]\}$.

Uyarı 3.2.20 Burada bir dijital simplişil küme olarak düşünülen standart (κ, n) – simpleks yerine Δ_κ^n veya $[0, \dots, n]$ gösterimleri kullanılır.

Örnek 3.2.21 Şimdi cebirsel topolojiden aşına olunan örneği göz önüne alalım. Bir dijital görüntü üzerinde X discrete topolojik uzayı verilsin, ve $\mathcal{S}(X)_n$ ise $|\Delta^n|_\kappa$ dan X e dijital sürekli fonksiyonların kümesi olsun. Dijital yüz ve dijital dejenere dönüşümlerle birlikte bunun X in singüler dijital kümesi olarak adlandırılan dijital simplişil küme oluşturulabilir. $S_*(X)$ singüler zincir kompleksi cebirsel topolojiden $\mathcal{S}(X)_n$ ile üretilen serbest abelyen grup olan her bir $S_n(X)$ e eşittir.

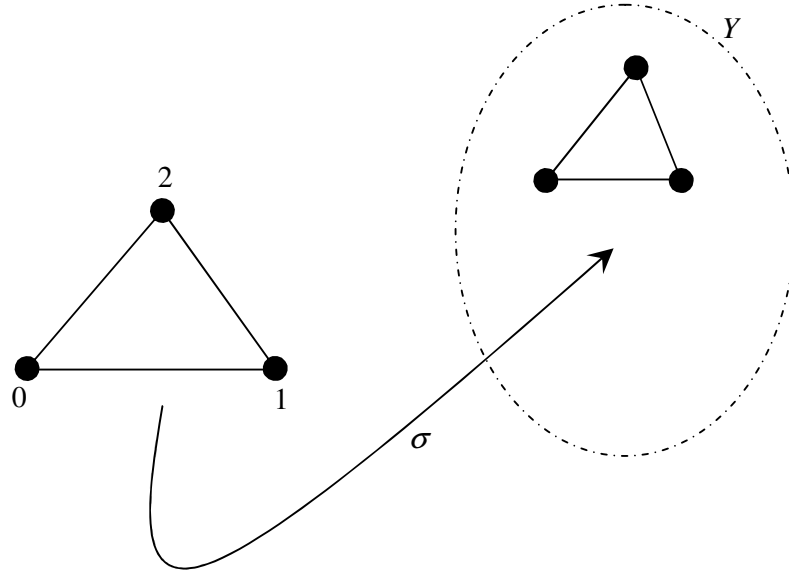
Dijital yüz ve dejenere dönüşümleri tanımlamak için $\sigma : |\Delta^n|_\kappa \rightarrow X$ bir dijital singüler simpleksi gösteren dijital bir dönüşüm olsun. $d_i \sigma$ dijital singüler simpleksi σ dönüşümünün $|\Delta^n|_\kappa$ nın i . yüzüne kısıtlanmasıyla tanımlanır. Böylece σ ve $[0, \dots, n-1] \rightarrow [0, \dots, i, \dots, n]$ simplişil kapsama dönüşümünün bileşkesidir. Bu açık olarak $\partial = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$ olmak üzere dijital singüler zincir kompleksin sınır dönüşümünün gösterimi ile aynıdır.

Diğer taraftan s_i dejenere dönüşümü σ dijital singüler simpleksini $\sigma: \Delta^n|_x = [0, \dots, n] \rightarrow X$ nin $[0, \dots, n+1] \rightarrow [0, \dots, i, i, \dots, n]$ dejenere dönüşümü ile gösterilen geometrik gömme dönüşümü vasıtası ile bunların bileşkesine götürür. Tekrar edilecek olursa bir dijital dejenere simpleks başka bir dijital simpleksin çökmüş versiyonudur.

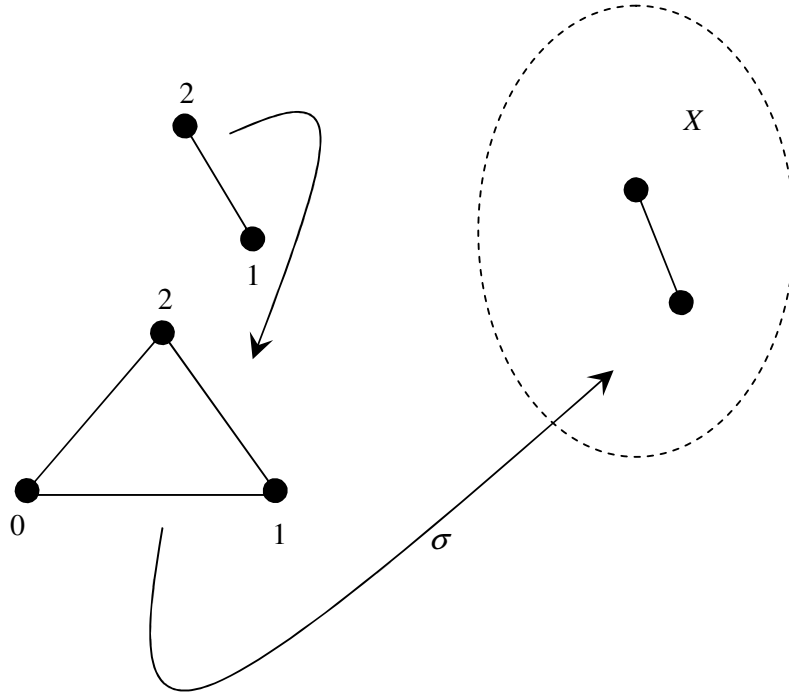
3.11. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE DEJENERE OLMAYAN SİMPLEKSLER

Bir $x \in X_n$ (κ, n) –simpleksi, eğer herhangi bir $y \in X_{n-1}$ ve herhangi bir i için $x, s_i y$ şeklinde yazılamıyorsa dejenere olmayan olarak adlandırılır.

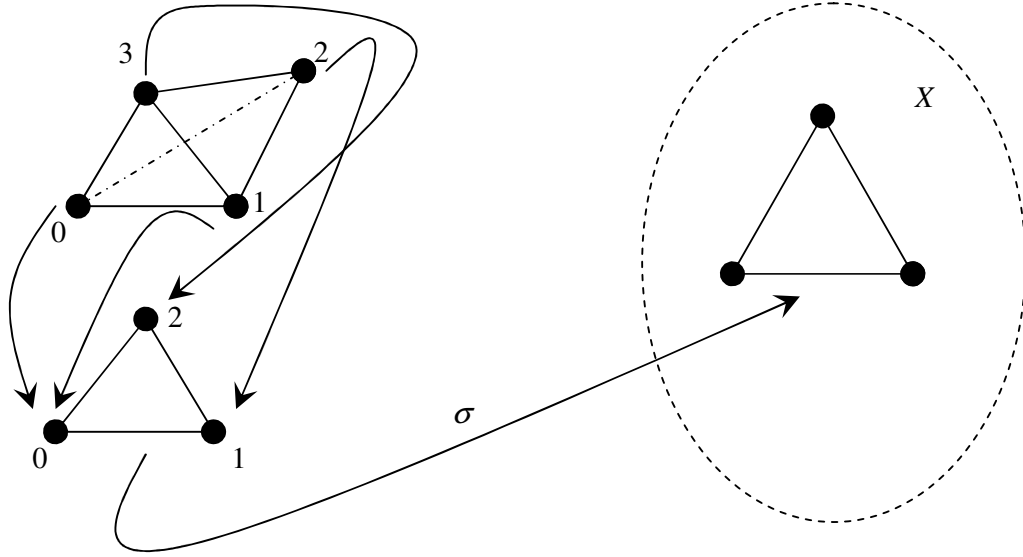
Bir dijital simplişil kompleks veya dijital delta kümenin her (κ, n) –simpleksi dijital simplişil kümeye karşılık gelen bir dejenere olmayan simplekstir. Y bir discrete topolojik uzaysa ve eğer $\pi, k < n$ olmak üzere bir simplişil çökme dönüşümü ve σ da bir singüler (κ, k) –simpleks olmak üzere $\Delta_\kappa^n \xrightarrow{\pi} \Delta_\kappa^k \xrightarrow{\sigma} Y$ bileşkesi şeklinde yazılamıyorsa, bu takdirde $\mathcal{S}(Y)$ nin bir (κ, n) –simpleksi dejenere olmayan bir simplekstir.



Şekil 3.10: Bir singüler (κ, n) – simpleks.



Şekil 3.11: Bir singüler (κ, n) – simpleksin bir yüzü.



Şekil 3.12: Bir dejenere (κ, n) – singüler simpleks.

Bir dejenere olmayan (κ, n) – simpleksin dejenere olan bir (κ, n) – yüze sahip olması mümkündür. Ayrıca bir dejenere (κ, n) – simpleksin bir dejenere olmayan (κ, n) – yüze sahip olması da mümkündür. (Örneğin herhangi bir x için, dejenere veya dejenere değil ise $d_j s_j x = x$ olduğunu biliyoruz.)

Kategorik Tanım: Dijital delta kümelerdeki gibi, dijital simplişil kümelerin temel özellikleri, onun standart yönlü (κ, n) – simplekslerinden türetilir. Aslında bu, bununla ilgili ilk aksiyomun ilk geliştirmesi ve dejenere ve yüz dönüşümlerinin ikisinin de kullanışlı olmasından kaynaklanır. Şu halde Δ nın funktoral görüntüsü olduğu dijital delta kümelere benzeyen her bir dijital simplişil kümenin kategorik tanımının olması şaşırtıcı değildir.

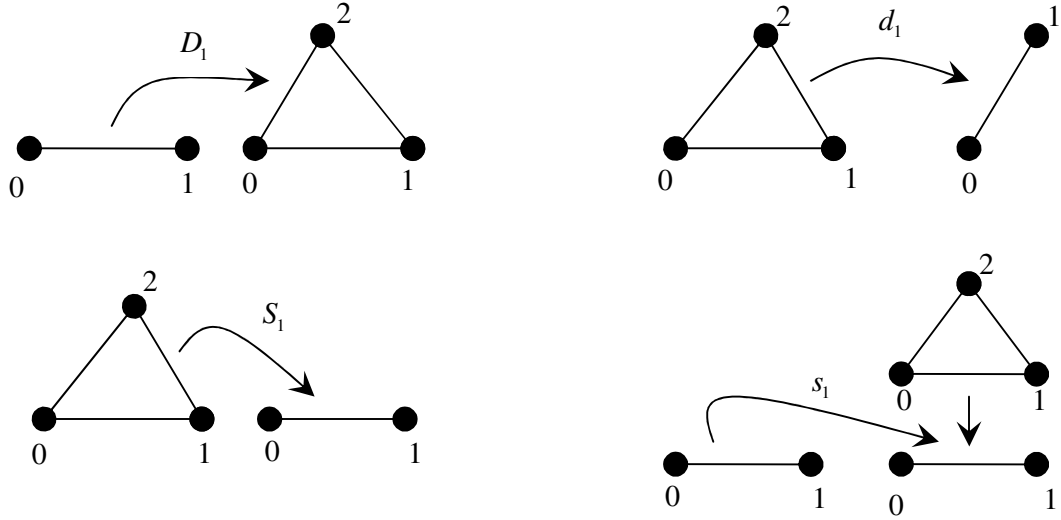
Tanım 3.11.22 Δ kategorisi nesneler olarak $[n] = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ sonlu yönlü kümelerine sahiptir. Δ nın morfizmleri sırayı koruyan $[m] \rightarrow [n]$ fonksiyonlarıdır.

$\hat{\Delta}$ ve Δ arasındaki tek farkın sadece Δ daki morfizmlerin sırayı koruması gerektiğine dikkat edilmelidir. O halde $[n]$ nesnelerinin Δ^n deki yönlü simplekslerle eşitlenerek morfizmlerin sadece simplekslerin kapsamalarıyla temsil edilmesine gerek yoktur, fakat dejenerelemlerle temsil edilebilir. Daha aşına olunan bir gösterimle ise bir tipik morfizm

$f:[5] \rightarrow [3]$, $(\kappa, 5)$ –simpleksin dejenere olarak 0, 2 ve 3 ile gerilen $(\kappa, 3)$ –simpleksin 2–yüzüne götüren bir dijital simplişil kompleks olarak düşünülmesi ve $f[0, 1, 2, 3, 4, 5] = [0, 0, 2, 2, 2, 3]$ ile tarif edilebilir olmasıdır.

$\hat{\Delta}$ daki gibi Δ daki morfizmler, $D_i:[n] \rightarrow [n+1]$ ve $S_i:[n+1] \rightarrow [n]$, $0 \leq i \leq n$ komşu kardinaliteler arasındaki belirli dönüşümlerle üretilir. D_i ler $\hat{\Delta}: D_i[0, \dots, n] \rightarrow [0, \dots, \hat{i}, \dots, n+1]$ şeklindedir. $\hat{\Delta}$ da bulunmayan yeni dönüşümler ise $S_i[0, \dots, n+1] = [0, \dots, i, \dots, n]$ ile tanımlıdır. Δ daki tüm morfizmlerin D_i ve S_i lerin bileşkeleri olduğunu ve bunların dijital simplişil kümenin tanımındaki aksiyomlara benzer aksiyomları sağladığının gerçekleşmesini göstermek kolaydır. Daha sonra ayrıca D_i ve S_i ler standart geometrik (κ, n) –simpleksler üzerinde ürettikleri geometrik dönüşümleri belirtmek için kullanılır.

Dijital simplişil kümelerin kategorik tanımını elde etmek için dijital delta kümeler olarak Δ^{op} i göz önüne alınır. D_i dönüşümü d_i ile gösterilen yüz dönüşümünün tersi gibi düşünülebilir: i . yüzün $D_i:[n] \rightarrow [n+1]$ kapsamasının tersi, i . yüzü (κ, n) –simpleksine götüren d_i , i . dijital yüz dönüşümüdür. S_i dönüşümünün tersi dejenerele oluşturur; bir $(\kappa, n+1)$ –simpleksin i . ve $(i+1)$. köşelerini bir araya getiren $S_i:[n+1] \rightarrow [n]$ çökme dönüşümünün tersi olan Δ_{κ}^n , i . köşenin tekrarlandığı Δ_{κ}^n deki $(\kappa, n+1)$ –simplekse götüren s_i dönüşümünün i . dejenere dönüşümü olduğu görülür.



Şekil 3.13: D_i , d_i , S_i ve s_i nin işlenişi.

Yukarıdaki şekildeki dejenereleri çizerken ortaya çıkan zorluk, S_i nin resimsel olarak S_i nin görüntüsünü temsil ederken onu genişletmekten ortaya çıkar. Diğer bir ifadeyle sağ alttaki s_i in görüntüsü S_i çökme dönüşümünden meydana gelen $(\kappa, 2)$ –dejenere simplekstir.

Elbette d_i ve s_i nin yukarıda verilen dijital simplişil küme tanımındaki aksiyomları sağlaması kontrol edilebilir.

Tanım 3.11.23 (Dijital Simplişil Kümenin Kategorik Tanımı)

Bir dijital simplişil küme $X : \Delta \rightarrow DSet$ kontravaryant fonktordur. (Buna denk olan $X : \Delta^{op} \rightarrow DSet$ kovaryant fonktordur.)

Bu dijital delta kümenin kategorik tanımıyla karşılaştırmalıdır ve bu tanımın Tanım 3.2.2 ye denk olduğu konusunda emin olunmalıdır. Dijital delta kümelerdeki gibi bu tanımın kuvvetli yönü, standart yönlü (κ, n) –simpleksi X_n deki (κ, n) –simplekslerin tümünün ifade edilmesi şeklinde düşünebilmemizdir, hepsinden önce - X fonktoru X_n deki (κ, n) –simplekslerin tümü olan $[n]$ e gider ve d_i ve s_i standart yüz ve dejenere dönüşümler, funktoral olarak X_n in dejenereleri ve yüzlerinin tümüne toplanır.

Örnek 3.11.24 Bu bakış açısından hareketle Y discrete uzayının $\mathcal{S}(Y)$ singüler kümesi yeniden incelenir. $\mathcal{S}(Y)$ singüler kümesi, $Hom_{Top}(|\Delta_\kappa^n|, Y)$ kümesini $[n]$ e giden bir $\Delta \rightarrow DSet$ fonktordur.

Bu örnek 3.21 in yüz ve dejenere dönüşümleri olan Δ nın yüz ve dejenere dönüşümlerine gider, yani aşağıdaki karşılık getirmeye sahibiz (burada Hom_{Top} topolojik uzaylar kategorisindeki $|\Delta_\kappa^n| \rightarrow Y$ morfizmler sınıfını göstermektedir):

$$\begin{array}{ccc}
 [n] & Hom_{Top}(|\Delta_\kappa^n|, Y) & \\
 d_i \downarrow & \Rightarrow \downarrow d_i & \\
 [n-1] & Hom_{Top}(|\Delta_\kappa^{n-1}|, Y) &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 [n] & Hom_{Top}(|\Delta_\kappa^n|, Y) & \\
 s_i \downarrow & \Rightarrow \downarrow s_i & \\
 [n+1] & Hom_{Top}(|\Delta_\kappa^{n+1}|, Y) &
 \end{array}$$

3.12. Dijital Görüntülerde Simplişil Morfizmler

Dijital simplişil kümelerin kendisi bir DS kategorisi oluşturur. Bu kategorideki morfizmler dijital simplişil morfizmlerdir.

Tanım 3.12.25 Eğer X ve Y dijital simplişil kümelerse $(X, Y : \Delta \rightarrow DSet)$, bu takdirde bir dijital simplişil morfizm bu fonktorların $f : X \rightarrow Y$ biçimindeki doğal dönüşümdür.

Daha kısa bir ifade ile f dönüşümü dejenere operatörler ve yüz operatörleriyle değişen $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ şeklinde dijital görüntü dönüşümlerinden oluşur.

Örnek 3.12.26 Şimdi Örnek 3.2.10 daki $\pi : |\Delta^2|_\kappa \rightarrow |\Delta^1|_\kappa$ çökme dönüşümlerini ele alalım. π dönüşümünü $\pi(0) = 0$, $\pi(1) = \pi(2) = 1$ olarak tanımlar ve onu dijital simplişil kümelerin bir $\pi : \Delta_\kappa^2 \rightarrow \Delta_\kappa^1$ morfizmine genişletebiliriz. Bu takdirde Örnek 3.2.10 daki gibi bu dönüşümler $[0] \in \Delta_\kappa^2$ köşesini $[0] \in \Delta_\kappa^1$ e, $[0, 1] \in \Delta_\kappa^2 (\kappa, 1)$ –simpleksini $[0, 1] \in \Delta_\kappa^1$ e, $[1, 2] \in \Delta_\kappa^2 (\kappa, 1)$ –simpleksini $[1, 1] = s_0(1) \in \Delta_\kappa^1$ dejenere $(\kappa, 1)$ –simpleksine götürür ve hatta bu dönüşüm $[0, 1, 1, 2, 2, 2] = s_4 s_3 s_1 [0, 1, 2] \in \Delta_\kappa^2$ dijital dejenere simpleksini de $s_4 s_3 s_1 [0, 1, 1] = [0, 1, 1, 1, 1, 1] \in \Delta_\kappa^1$ dijital dejenere simpleksine taşır.

Örnek 3.12.27 Dijital simplişil kompleksler üzerindeki dijital simplişil dönüşümlerin, dijital simplişil kümeler üzerindeki morfizmlerin köşeler üzerinde neyin meydana geldiği konusunda tam olarak bir bilgi vermediğine dikkat edilmelidir.

Örnek 3.12.28 Diğer taraftan yönlendirilmiş dijital simplişil komplekslerin bir $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü verilsin. Bu Örnek 3.17 de oluşturulduğu gibi dijital simplişil kümelerin bir dönüşümünü oluşturur. Bu durumda yönlendirilmiş dijital simplişil kompleksler onların köşeleriyle tek türlü belirlendiğinden köşeler üzerindeki bir fonksiyon bir dijital simplişil dönüşümü belirler. Bu Örnek 3.26 da ele alınan dijital simplişil morfizmi için olan durumdur.

Uyarı 3.12.29 Bir dijital simplişil kompleksi tanımlamak için dijital dejenerer olmayan simplekslerde ne olduğunu bilmenin yeterli olduğuna dikkat edelim. Burada $f(s_i(x)) = s_i(f(x))$ olduğundan dijital dejenere simplekslerde ne olduğunu verilen tanımlardan tespit etmek zordur. Benzer şekilde yüzler üzerinde neyin meydana geldiği yüzler olan simplekslerde neyin meydana geldiği ile zordur. Şu halde hepsiyle birlikte dijital simplişil morfizmler dijital nondejenere simplekslerin daha küçük koleksiyonlarında neyin meydana geldiğinin belirlenmesiyle tarif edilebilir.

Buradan sonra 'dijital simplişil dönüşüm' ve 'dijital simplişil morfizm' arasındaki farkı göz ardı edeceğiz, ve dijital simplişil kümelere uygulandığı gibi terimleri değişmeli olarak kullanacağız.

IV. BÖLÜM

DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE SİMPLİŞİL GRUPLAR

Tanım 4.1.1: G κ -yakınlıklı bir dijital görüntünün alt kümesi olsun. Bir G simplişil grubu G_n gruplarının dizisinden ve aşağıdaki aksiyomları sağlayan $d_i : G_n \rightarrow G_{n-1}$ ve $s_i : G_n \rightarrow G_{n+1}$, $0 \leq i \leq n$ grup homomorfizmlerinin koleksiyonundan oluşur:

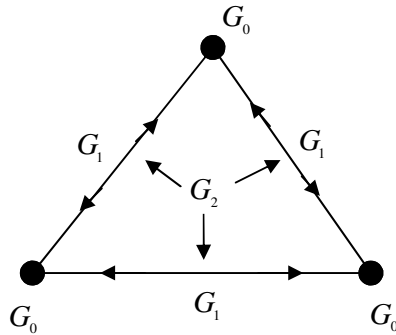
$$d_i d_j = d_{j-1} d_i \quad i < j \text{ ise}$$

$$d_i s_j = s_{j-1} d_i \quad i < j \text{ ise}$$

$$d_j s_j = d_{j+1} s_j = id \quad i = j \text{ veya } i = j+1 \text{ ise}$$

$$d_i s_j = s_j d_{i-1}, \quad i > j+1 \text{ ise}$$

$$s_i s_j = s_j s_{i-1}, \quad i > j \text{ ise}$$



Şekil 4.1: Oklar boyut 2 den boyut 1 e ve boyut 1 den boyut 0 a yüz morfizmlerini göstermek üzere bir simplişil grubun $(8, 2)$ -simplekslerinin bir gösterimi.

Örnek 4.1.2: X in κ -yakınlıklı bir dijital simplişil küme olduğunu kabul edelim. Bu takdirde X in s_i ve d_i yüz dönüşümlerinin lineer genişlemeleri olarak alınan $C_*(X)$ deki d_i ve s_i dönüşümleri kullanılarak X_n in elemanları tarafından üretilen serbest abelyen grup olarak tanımlanan $(C_*X)_n = C_n(X)$ ile $C_*(X)$ simplişil grubu oluşturulabilir.

Ayrıca $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ biçiminde total yüz dönüşü gerçekleştirilebilirse

ve bu takdirde $(C_*(X), d)$ zincir kompleksinin homolojisi olarak $H_*(X)$ homolojisi tanımlanabilir.

Örnek 4.3: Bu örnek dijital görüntülerde homoloji gruplarının teorisinde, dijital görüntülerdeki simplişil grupların önemli bir örneğidir. G dijital görüntü elemanlarının bir grubu ve DG de simplişil grup olsun. Bu takdirde $DG_n = G^{\times n}$, G nin kendisiyle n - defa çarpımı olsun. Şu halde $G^{\times 0}$, $\{e\}$ aşikar grubudur. Eğer $(g_1, \dots, g_n) \in DG_n$ elemanı için $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_0(g_1, \dots, g_n) &= (g_2, \dots, g_n) \\ d_i(g_1, \dots, g_n) &= (g_1, \dots, g_i, g_{i+1}, \dots, g_n), \quad 0 < i < n \\ d_n(g_1, \dots, g_n) &= (g_1, \dots, g_{n-1}) \\ s_i(g_1, \dots, g_n) &= (g_1, \dots, g_i, e, g_{i+1}, \dots, g_n). \end{aligned}$$

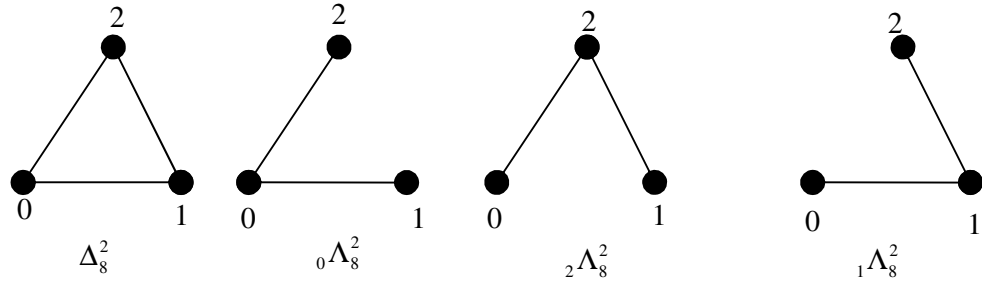
biçiminde tanımlanırsa, bu dijital görüntülerde bir simplişil gruptur.

4.1. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE KAN KOMPLEKSLERİ

Bir $|\Delta_\kappa^n|$ dijital simplişil kompleksi, (κ, n) -simpleksi üzerindeki $|\Lambda_\kappa^n|$ k . hornu, $|\Delta_\kappa^n|$ in iç piksellerinin ve $d_k \Lambda_\kappa^n$ iç yüzünün kaldırılmasıyla elde edilen $|\Delta_\kappa^n|$ in bir alt kompleksidir. Eğer Λ_κ^n böyle bir dijital simplişil küme ise, bu takdirde bu dijital simplişil küme

- 1) Tüm sayılar temsil edilmeyecek,
- 2) k hariç tüm sayılar temsil edilmeyecek

biçiminde $0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_m \leq n$ olmak üzere $[i_0, \dots, i_m]$ (κ, m) -simplekslerinden oluşur.



Şekil 4.2: $|\Delta_8^2|$ üzerindeki üç horn

Kan şartı (Daniel Kan'dan sonra) olarak da bilinen genişleme şartı, bir dijital simplişil küme içindeki (κ, n) – simpleks üzerinde bir horn görüldüğünde simpleksin geri kalanının da bir dijital simplişil küme içinde olduğunu söyler.

Tanım 4.1.4: Eğer dijital simplişil kümenin herhangi bir ${}_k\Lambda_8^n \rightarrow X$ morfizmi bir $\Delta_\kappa^n \rightarrow X$ simplişil morfizmine genişletilebiliyorsa X dijital görüntüsü genişleme şartını sağlar denir. Böyle bir X Kan kompleksi olarak adlandırılır.

Tanım 4.1.5: $i, j \neq k$ olmak üzere herhangi bir $i < j$ için $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ olacak şekilde X deki $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ $(\kappa, (n-1))$ – simplekslerinin herhangi bir koleksiyonu için, tüm $i \neq k$ lar için $d_i x = x_i$ olacak şekilde bir (κ, n) – simpleksi varsa, bu takdirde X dijital simplişil kümesi Kan şartını sağlar.

Bu tanım bu horn un X deki bir (κ, n) – simplekse genişletilebileceğini söyler.

4.2. DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE SİMPLIŞIL HOMOTOPİ

Bu bölümde dijital simplişil kümelerin homotopi özellikleri ele alınarak incelendi.

4.2.1. Yollar ve Yol Bileşenleri

Dijital topolojide olduğu gibi homotopiden bahsederken de I_m in , $\Delta_2^m = [0, m]_{\mathbb{Z}}$ nin bir dijital simplişil kümesi olduğu kabul edilir.

Tanım 4.2.6: κ –yakınlıklı bir dijital simpliştir kümesindeki bir I_m yolu 2–yakınlık bağıntısına sahip $(2, \kappa)$ –sürekli olan bir $p : I_m \rightarrow X$ simpliştir morfizmidir. Denk olarak X de bir $p \in X_2^1$ yolu $(2, 1)$ –simpleksidir. p , X de bir yorsa $d_1 p = p[0]$ başlangıç noktası, $d_0 p = p[m]$ ise bitiş noktası olarak adlandırılır.

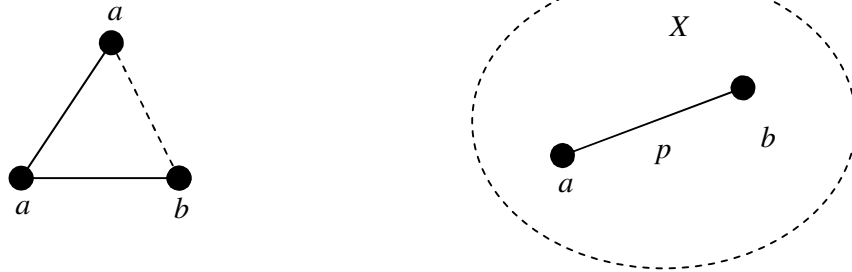
Tanım 4.2.7: X dijital simpliştir kümesinin iki a ve b $(2, 0)$ –simpleksi, eğer a başlangıç noktasında başlayan ve b bitiş noktasında biten bir p yolu varsa X in aynı yol bileşeninde olduğu söylenir.

Teorem 4.2.8: X , κ –yakınlıklı bir Kan Kompleksi ise, bu takdirde ‘aynı bileşende olma’ bir denklik bağıntısıdır.

İspat:

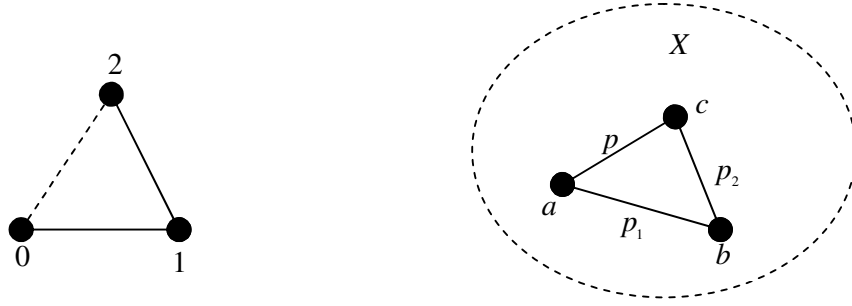
Yansıma: $[a]$ $(2, 0)$ –simpleksi için $s_0[a]$, a dan a ya bir yoldur.

Simetri: a ve b dijital görüntülerde pikseller olmak üzere p , X de a dan b ye bir yol olsun. Bu durumda bir başka yola daha ihtiyacımız vardır. Buna göre p yi Δ_8^2 nin $[0, 1]$ yüzü olarak düşünelim. Δ_8^2 nin $[0, 2]$ yüzü, X bir dijital simpliştir küme olduğundan mevcut olması gereken $s_0[a]$ yı gösterebilir. Böylece $d_0 s_0[a] = d_1 s_0[a] = [a]$ dir. Δ_8^2 nin $[0, 1, 2]$ üç köşesi $[a, b, a]$ olarak işaretlenebilir ve ${}_0\Lambda_8^2$ üzerinde $[0, 1]$ i p ye $[0, 2]$ yi de $s_0[a]$ ya götüren bir simpliştir dönüşüme sahip olunur. Buradan ise Kan şartı bu dönüşümün Δ_8^2 ye genişletilebileceğini söyler ve $[1, 2]$ b den a ya bir yol olarak elde edilir.



Şekil 4.3: Dijital görüntü üzerinde simetri bağıntısı

Geçişme: $\Delta_8^2 = [0,1,2]$ dijital simpleksini göz önüne alalım. p_1 a dan b ye ve p_2 , b den c ye bir yol ise, bu takdirde $f : \Delta_8^2 \rightarrow X$, $[0,1]$ i p_1 e $[1,2]$ yi p_2 ye götürsün. Kan şartı f i $\bar{f} : \Delta_8^2 \rightarrow X$ dönüşümüne genişletilmesini sağlar ve $\bar{f}[0,2]$, a dan c ye bir yoldur. ■



Şekil 4.4: Dijital görüntü üzerinde geçişme bağıntısı

4.2.2. Dönüşümlerin Homotopisi

Tanım 4.2.9 (Simplişil Homotopi 1): $H|_{X \times 0} = g$ ve $H|_{X \times m} = f$ olacak şekilde bir $H : X \times I_m \rightarrow Y$ simplişil dönüşümü varsa (yani i_0 ve i_1 , $i_0 : X \times [0] \rightarrow X \times I_m$ ve $i_1 : X \times [m] \rightarrow X \times I_m$ kapsama dönüşümleri olmak üzere $g = H \circ i_0$ ve $f = H \circ i_1$ ise) $f, g : X \rightarrow Y$ dönüşümleri homotopiktir.

Tanım 4.2.10 (Simplişil Homotopi 2): Her bir i , $0 \leq i \leq p$ için

$$\begin{aligned} d_0 h_0 &= f \\ d_{p+1} h_p &= g \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} d_i h_j &= h_{j-1} d_i, \quad i < j \text{ ise} \\ d_{j+1} h_{j+1} &= d_{j+1} h_j \\ d_i h_j &= h_j d_{i-1}, \quad i > j+1 \text{ ise} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} s_i h_j &= h_{j+1} s_i, \quad i \leq j \text{ ise} \\ s_i h_j &= h_j s_{i-1}, \quad i > j+1 \text{ ise} \end{aligned} \tag{3}$$

olacak şekilde $h_i = h_i^p : X_p \rightarrow Y_{p+1}$ fonksiyonları mevcutsa $f, g : X \rightarrow Y$ simplişil dönüşümü homotopiktir.

4.3. BİR DİJİTAL SİMLİŞİL GRUBUN HOMOLOJİ GRUBU

Bu bölümde X bir dijital simplişil grup olarak ele alınacaktır. Ayrıca dijital homoloji gruplarının belirlenmesinde [11] ve [14] deki yöntemi kullanacağız.

Tanım 4.3.22: $C_n(X)$ bazları X deki tüm (κ, n) -simpleksler olan serbest bir abelyen gruptur.

Sonuç 4.3.23: X , κ -yakınlıklı m -boyutlu bir dijital simplişil grup olsun. Bu takdirde $q > m$ ise $C_q^\kappa(X)$ bir aşikar gruptur.

Tanım 4.3.24: $(X, \kappa) \subset \mathbb{Z}^n$ m -boyutlu bir dijital simplişil grup olsun. Sınır homomorfizması olarak adlandırılan $\partial_q : C_q^\kappa(X) \rightarrow C_{q-1}^\kappa(X)$ dönüşümü

$$\partial_q(< x_0, \dots, x_q >) = \begin{cases} \sum_{i=0}^q (-1)^i < p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q >, & q \leq m \\ 0, & q > m \end{cases}$$

olarak tanımlanır. (Burada $\hat{p}_i$, p_i nin silinmesi anlamındadır.)

Önerme 4.3.25: $1 \leq n \leq m$ için $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. ([11], [14] e bakınız)

İspat: $\Delta = [x_0, \dots, x_n]$ bir (κ, n) -simpleks olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \circ \partial_n(\Delta) &= \partial_{n-1}(\partial_n[x_0, \dots, x_n]) \\ &= \partial_{n-1}\left(\sum_{i=1}^n (-1)^i [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^i \left[\sum_{j=1}^n (-1)^j [x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]\right] + \sum_{j=i+1}^n (-1)^{j-1} [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n] \\ &= \sum_{j < i \leq n} (-1)^{i+j} [x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n] + \sum_{i < j \leq n} (-1)^{i+j-1} [x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n] \\ &= \sum_{i \neq j} ((-1)^{i+j} + (-1)^{i+j-1}) [x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n] = 0. \end{aligned}$$

Tanım 4.3.26: X , κ -yakınlıklı bir dijital simplişil grup olsun. Eğer $Z_q^\kappa(X) = \text{Ker} \partial_q$ dijital simplişil q -devirlerin grubu, $B_q^\kappa(X) = \text{Im} \partial_{q+1}$ de dijital simplişil q -sınırların ise

$$H_q^\kappa(X) = \frac{Z_q^\kappa(X)}{B_q^\kappa(X)} = \frac{\text{Ker} \partial_q}{\text{Im} \partial_{q+1}}$$

q . dijital homoloji grubu olarak adlandırılır.

Önerme 4.3.27: $X_0 = [v_0]$, $(2,0)$ – simpleks olsun. Bu takdirde $H_0^2(X_0) \cong \mathbb{Z}$.

İspat: $X_0 = [v_0]$, $(2,0)$ – simpleksini göz önüne alalım. Bu takdirde



$$C_0^2(X_0) = \langle v_0 \rangle \cong \mathbb{Z} \text{ ve } C_i^2(X_0) = \{0\}, \quad i \geq 1.$$

Buradan

$$0 \xrightarrow{\partial_1} C_0^2(X_0) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

dizisi elde edilir. Böylece

$$Z_0^\kappa(X_0) = \text{Ker} \partial_0 = C_0^2(X_0) \cong \mathbb{Z}$$

ve

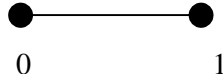
$$B_0^\kappa(X_0) = \text{Im} \partial_1 = \{0\}.$$

$$\text{Sonuç olarak } H_0^\kappa(X_0) = \frac{Z_0^\kappa(X_0)}{B_0^\kappa(X_0)} = \frac{\text{Ker} \partial_0}{\text{Im} \partial_1} \cong \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

Önerme 4.3.28: $X_1 = [0,1]$ $(8,1)$ – simpleks olsun. Bu takdirde

$$H_q^\kappa(X_1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}.$$

İspat: $X_1 = [0,1]$ $(8,1)$ – simpleksini göz önüne alalım.



Bu simplekste yönlendirme $0 < 1$ şeklinde olsun. Bu takdirde $q > 1$ için $H_q^8(X_1) \cong \{0\}$ dır.

Böylece $C_0^8(X_1)$ ve $C_1^8(X_1)$ sırasıyla aşağıdaki bazlar tarafından üretilen serbest abelyen gruptur.

$$\{<0>, <1>\}$$

$$\{<0,1>\}$$

Şu halde

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1^8(X_1) \xrightarrow{\partial_1} C_0^8(X_1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

dizisi mevcuttur. Bu diziye göre;

$$B_1^8(X_1) = \text{Im } \partial_2 = \{0\},$$

$$\partial_1(a <0,1>) = a(<1> - <0>), a \in \mathbb{Z},$$

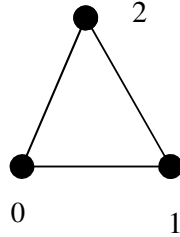
$$\begin{aligned} Z_1^8(X_1) &= \text{Ker } \partial_1 = a(<1> - <0>) = 0 \\ &\Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

olup, böylece $Z_1^8(X_1) = \{0\}$. Buradan $H_1^8(X_0) = \frac{Z_1^8(X_0)}{B_1^8(X_0)} = \frac{\text{Ker } \partial_1}{\text{Im } \partial_2} \cong \{0\}$.

Önerme4.3.29: $X_2 = [0,1,2]$ bir $(8,2)$ – simpleks olsun. Bu takdirde

$$H_q^8(X_1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}.$$

İspat: Aşağıdaki şekille gösterilen $X_2 = [0,1,2]$, $(8,2)$ – simpleksini göz önüne alalım:



Bu simpleks için yönlendirmeyi $0 < 1 < 2$ olarak seçelim, bu takdirde $q > 2$ için $H_q^8(X_1) \cong \{0\}$.

Diğer taraftan $C_0^8(X_2)$, $C_1^8(X_2)$ ve $C_2^8(X_2)$ sırasıyla aşağıdaki bazlar tarafından üretilen serbest abelyen gruptur

$$\{<0>, <1>, <2>\}$$

$$\{<0,1>, <1,2>, <0,2>\}$$

$$\{<0,1,2>\}.$$

Böylece

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2^8(X_2) \xrightarrow{\partial_2} C_1^8(X_2) \xrightarrow{\partial_1} C_0^8(X_2) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Dizisi elde edilir. Bu takdirde $B_2^8(X_2) = \text{Im } \partial_3 = \{0\}$. Buradan

$$\partial_2(a<0,1,2>) = a(<1,2> - <0,2> + <0,1>).$$

Böylece $Z_2^8(X_2) = \{0\}$ olup $H_2^8(X_2) = \{0\}$.

∂_2 nin tanımından

$$B_1^8(X_2) = \{a(<0,1> + <1,2> - <0,2>) \mid a \in \mathbb{Z}\} \text{ ve}$$

$$\partial_1(a<0,1> + b<1,2> + c<0,2>) = (a-b)<0> + (a-c)<1> + (b+c)<2> = 0$$

elde edilir. Bundan dolayı $a = -b = c$ olup, böylece

$$Z_1^8(X_2) = \{a(<0,1> + <1,2> - <0,2>) \mid a \in \mathbb{Z}\} = B_1^8(X_2).$$

Şu halde $H_1^8(X_2) = \{0\}$. Buradan

$$\{a<0,1> + b<1,2> + c<0,2> \mid a, b, c \in \mathbb{Z}, a+b+c=0\} \cong \mathbb{Z}^2,$$

$$a<0,1> + b<1,2> - (a+b)<0,2> = \partial_1(-a<0,1> - b<1,2>).$$

Bundan dolayı $B_0^8(X_2) = \mathbb{Z}^2$.

Böylece kısa tam dizi kullanılırsa,

$$Z_0^8(X_2) = \{a<0> + b<1> + c<2> \mid a, b, c \in \mathbb{Z}, a+b+c=0\} \cong \mathbb{Z}^3$$

elde edilir.

$$\text{Bu takdirde, } H_0^8(X_2) = \frac{Z_0^8(X_2)}{B_0^8(X_2)} = \mathbb{Z}.$$

$$\text{Sonuç olarak } H_q^8(X_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q=0 \\ 0, & q>0 \end{cases}.$$

■

V. BÖLÜM

DİJİTAL GÖRÜNTÜLERDE HİPERKROSS KOMPLEKS ÇİFTLERİ

Tanım 5.1: κ – yakınlıklı bir G simlişıl grubu verilsin.

(NG, ∂) Moore kompleksi $\partial : NG_n \rightarrow NG_{n-1}$, d_n den kısıtlamayla üretilmek üzere

$$NG_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{Ker} d_i$$

ile tanımlı bir zincir kompleksidir.

G nin Moore kompleksinin n . homoloji grubu

$$H_n(NG, \partial) = \bigcap_{i=0}^n \text{Ker} d_i \bigg/ d_{n+1} \left(\bigcap_{i=0}^n \text{Ker} d_i \right)$$

ile verilir.

Öncelikle Carrasco [6] ve Mutlu [24] referanslarında takip edilen yolları ele alarak dijital görüntülerdeki yapıyı oluşturalım. $P(n)$ kümesini $\alpha = (i_l, \dots, i_1)$, $\beta = (j_m, \dots, j_1) \in S(n)$ iken, $S(n)$ deki lexicographic sıralamaya göre $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ve $\beta < \alpha$ olmak üzere $S(n)$ deki (α, β) elemanlarından oluşan bir küme olarak tanımlayalım. Bunun için aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{array}{ccc}
NG_{n-\#\alpha} \times NG_{n-\#\beta} & \xrightarrow{F_{\alpha,\beta}} & NG_n \\
\downarrow s_\alpha \times s_\beta & & \downarrow p \\
G_n \times G_n & \xrightarrow{[,] = \mu} & G_n
\end{array}$$

Burada $\{F_{\alpha,\beta} : NG_{n-\#\alpha} \times NG_{n-\#\beta} \rightarrow NG_n : (\alpha, \beta) \in P(n), n \geq 0\}$ dır. Diğer yandan bu diyagramda

$$\begin{aligned}
s_\alpha &= s_{i_1} \cdots s_{i_l} : NG_{n-\#\alpha} \rightarrow G_n \\
s_\beta &= s_{j_1} \cdots s_{j_m} : NG_{n-\#\beta} \rightarrow G_n
\end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bunun yanında

$$p : G_n \rightarrow NG_n \text{ olmak üzere } p(x) = p_{n-1} \cdots p_0(x) \text{ dönüşümü ise}$$

$$p_j(z) = z - s_j d_j z, \quad j = 0, \dots, n-1$$

B biçiminde belirlensin. Bu takdirde $[,] : G_n \times G_n \rightarrow G_n$ komutatör işlemi dijital görüntülerde toplamsal bir grup yapısı olacağından

$$[x, y] = xy - yx$$

olarak tanımlanır. Bu takdirde aşağıdaki önerme verilebilir

Önerme 5.2: $[x, y] = xy - yx$ olmak üzere $[,] : G_n \times G_n \rightarrow G_n$ komutatör işlemi 0 grubun birim elemanı olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) Her $x \in G_n$ için $[x, x] = 0$.
- (ii) Her $x \in G_n$ için $[0, x] = [x, 0] = 0$.
- (iii) Her $x, y \in G_n$ için $[x, y] = -[y, x]$.
- (iv) Her $x, y, z \in G_n$ için $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$ ve $[x, y + z] = [x, y] + [x, z]$.

İspat:

(i) Her $x \in G_n$ için komutatörün tanımlanışı göz önüne alınırsa $[x, x] = xx - xx = 0$.

(ii) Her $x \in G_n$ için $[0, x] = 0x - x0 = 0$ ve $[x, 0] = x0 - 0x = 0$ olduğundan

$$[0, x] = [x, 0] = 0.$$

(iii) Her $x, y \in G_n$ için $[x, y] = xy - yx = -(yx - xy) = -[y, x]$.

(iv) Her $x, y, z \in G_n$ için

$$\begin{aligned} [x + y, z] &= (x + y)z - z(x + y) \\ &= xz + yz - zx - zy \\ &= xz - zx + yz - zy \\ &= [x, z] + [y, z] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} [x, y + z] &= x(y + z) - (y + z)x \\ &= xy + xz - yx - zx \\ &= xy - yx + xz - zx \\ &= [x, y] + [x, z]. \end{aligned}$$

■

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} F_{\alpha, \beta}(x_\alpha, y_\beta) &= p\mu(s_\alpha \times s_\beta)(x_\alpha, y_\beta) \\ &= p[s_\alpha x_\alpha, s_\beta y_\beta] \end{aligned}$$

olup, G_n in NG_n normal alt grubu, $x_\alpha \in NG_{n-\#\alpha}$ ve $y_\beta \in NG_{n-\#\beta}$ olmak üzere

$$F_{\alpha, \beta}(x_\alpha, y_\beta)$$

şeklindeki elemanlarla üretilir.

Teorem 5.3: 2 – boyutlu, N_2 normal alt grubu

$$[s_0 x_1 - s_1 x_1, s_1 y_1]$$

şeklindeki elemanlarla üretilir.

İspat: $n = 2$ için $\alpha = (1)$, $\beta = (0)$ olsun. Böylece $x_1, y_1 \in NG_1 = \text{Kerd}_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 F_{(1),(0)}(x_1, y_1) &= p_1 p_0 [s_1 x_1, s_0 y_1] \\
 &= p_1 \{ [s_1 x_1, s_0 y_1] - s_0 d_0 [s_1 x_1, s_0 y_1] \} \\
 &= p_1 \{ [s_1 x_1, s_0 y_1] - [s_0 d_0 s_1 x_1, s_0 \underbrace{d_0 s_0}_{id} y_1] \} \\
 &= p_1 \{ [s_1 x_1, s_1 y_1] - [s_0 x_1, s_0 s_0 d_0 y_1] \} \\
 &= p_1 \{ [s_0 x_1, s_1 y_1] \} \\
 &= [s_0 x_1, s_1 y_1] - s_1 d_1 [s_0 x_1, s_1 y_1] \\
 &= [s_0 x_1, s_1 y_1] - [s_1 d_1 s_0 x_1, s_1 d_1 s_1 y_1] \\
 &= [s_0 x_1, s_1 y_1] - [s_1 x_1, s_1 y_1] \\
 &= [s_0 x_1 - s_1 x_1, s_1 y_1]
 \end{aligned}$$

Bulunur. Buradan $F_{(0),(1)}(x_1, y_1) = [s_0 x_1 - s_1 x_1, s_1 y_1]$ olup, bu ise N_2 normal alt grubunu üreten bir elemandır. ■

Önerme 5.4: 3 – boyutlu N_3 normal alt grubu

- i) $[s_1 s_0 x_1 - s_0 s_1 x_1, s_2 y_2]$
- ii) $[s_2 s_0 x_1 - s_2 s_1 x_1, s_1 y_2 - s_2 y_2]$
- iii) $[s_0 x_2 - s_1 x_2 + s_2 x_2, s_1 s_1 y_1]$
- iv) $[s_1 x_2 - s_2 x_2, s_2 y_2]$
- v) $[s_0 x_2, s_2 y_2]$
- vi) $[s_0 x_2 - s_1 x_2, s_1 y_2] + [s_2 x_2, s_2 y_2]$

şeklindeki elemanlarla üretilir.

İspat: $n = 3$ için mümkün olabilecek üreteç çiftleri aşağıdaki gibidir:

- i) $F_{(1,0)(2)}$
- ii) $F_{(2,0)(1)}$
- iii) $F_{(0)(2,1)}$

iv) $F_{(1)(2)}$ v) $F_{(0)(2)}$ vi) $F_{(0)(1)}$

Böylece $x_1 \in NG_1$ ve $y_2 \in NG_2$ için N_3 ün üreteçleri $F_{\alpha,\beta} : NG_1 \times NG_2 \rightarrow NG_3$ ve $n = 3$ için

$p(x) = p_2 p_1 p_0(x)$ olmak üzere;

$$\text{i) } F_{(1,0)(2)}(x_1, y_2) = p[s_1 s_0 x_1, s_2 y_2]$$

$$= p_2 p_1 p_0[s_1 s_0 x_1, s_2 y_2]$$

$$= p_2 p_1 \{[s_1 s_0 x_1, s_2 y_2] - s_0 d_0[s_1 s_0 x_1, s_2 y_2]\}$$

$$= p_2 p_1 \{[s_1 s_0 x_1, s_2 y_2] - [s_0 d_0 s_1 s_0 x_1, s_0 d_0 s_2 y_2]\}$$

$$= p_2 p_1 \{[s_1 s_0 x_1, s_2 y_2] - [s_0 d_0 s_1 s_0 x_1, s_0 s_1 \underbrace{d_0 y_2}_{=0}]\}$$

$$= p_2 p_1[s_1 s_0 x_1, s_2 y_2]$$

$$= p_2 \{[s_1 s_0 x_1, s_2 y_2] - s_1 d_1[s_1 s_0 x_1, s_2 y_2]\}$$

$$= p_2 \{[s_1 s_0 x_1, s_2 y_2] - [s_1 d_1 s_1 s_0 x_1, s_1 d_1 s_2 y_2]\}$$

$$= p_2 \{[s_1 s_0 x_1, s_2 y_2] - [s_1 d_1 s_1 s_0 x_1, s_1 s_1 \underbrace{d_1 y_2}_{=0}]\}$$

$$= p_2[s_1 s_0 x_1, s_2 y_2] = \{[s_1 s_0 x_1, s_2 y_2] - s_2 d_2[s_1 s_0 x_1, s_2 y_2]\}$$

$$= \{[s_1 s_0 x_1, s_2 y_2] - [s_2 \underbrace{d_2 s_1}_{id} s_0 x_1, s_2 \underbrace{d_2 s_2}_{id} y_2]\}$$

$$= [s_1 s_0 x_1, s_2 y_2] - [s_2 s_1 x_1, s_2 y_2]$$

$$= [s_1 s_0 x_1 - s_2 s_1 x_1, s_2 y_2].$$

$$\text{ii) } F_{(2,0)(1)}(x_1, y_2) = p[s_2 s_0 x_1, s_1 y_2]$$

$$= p_2 p_1 p_0[s_2 s_0 x_1, s_1 y_2]$$

$$= p_2 p_1 \{[s_2 s_0 x_1, s_1 y_2] - s_0 d_0[s_2 s_0 x_1, s_1 y_2]\}$$

$$= p_2 p_1 \{[s_2 s_0 x_1, s_1 y_2] - [s_0 d_0 s_2 s_0 x_1, s_0 d_0 s_1 y_2]\}$$

$$\begin{aligned}
&= p_2 p_1 \{ [s_2 s_0 x_1, s_1 y_2] - [s_0 d_0 s_2 s_0 x_1, s_0 s_0 \underbrace{d_0 y_2}_{=0}] \} \\
&= p_2 p_1 [s_2 s_0 x_1, s_1 y_2] \\
&= p_2 \{ [s_2 s_0 x_1, s_1 y_2] - s_1 d_1 [s_2 s_0 x_1, s_1 y_2] \} \\
&= p_2 \{ [s_2 s_0 x_1, s_1 y_2] - [s_1 d_1 s_2 s_0 x_1, s_1 \underbrace{d_1 s_1}_{id} y_2] \} \\
&= p_2 \{ [s_2 s_0 x_1, s_1 y_2] - [s_1 s_1 \underbrace{d_1 s_0}_{id} x_1, s_1 y_2] \} \\
&= p_2 \{ [s_2 s_0 x_1, s_1 y_2] - [s_1 s_1 x_1, s_1 y_2] \} \\
&= p_2 [s_2 s_0 x_1 - s_2 s_1 x_1, s_1 y_2] \\
&= [s_2 s_0 x_1 - s_2 s_1 x_1, s_1 y_2] - s_2 d_2 [s_2 s_0 x_1 - s_2 s_1 x_1, s_1 y_2] \\
&= [s_2 s_0 x_1 - s_2 s_1 x_1, s_1 y_2] - [s_2 \underbrace{d_2 s_2}_{id} s_0 x_1 - s_2 \underbrace{d_2 s_2}_{id} s_1 x_1, s_2 \underbrace{d_2 s_1}_{id} y_2] \\
&= [s_2 s_0 x_1 - s_2 s_1 x_1, s_1 y_2] - [s_2 s_0 x_1 - s_2 s_1 x_1, s_2 y_2] \\
&= [s_2 s_0 x_1 - s_2 s_1 x_1, s_1 y_2 - s_2 y_2]
\end{aligned}$$

şeklinde dir. Diğer yandan $x_2 \in NG_2$ ve $y_1 \in NG_1$ ve $F_{\alpha, \beta} : NG_2 \times NG_1 \rightarrow NG_3$ olmak üzere

N_3 ün üretici

$$\begin{aligned}
\text{iii) } F_{(0)(2,1)}(x_2, y_1) &= p[s_0 x_2, s_2 s_1 y_1] \\
&= p_2 p_1 p_0 [s_0 x_2, s_2 s_1 y_1] \\
&= p_2 p_1 \{ [s_0 x_2, s_2 s_1 y_1] - s_0 d_0 [s_0 x_2, s_2 s_1 y_1] \} \\
&= p_2 p_1 \{ [s_0 x_2, s_2 s_1 y_1] - [s_0 \underbrace{d_0 s_0}_{id} x_2, s_0 d_0 s_2 s_1 y_1] \} \\
&= p_2 p_1 \{ [s_0 x_2, s_2 s_1 y_1] - [s_0 x_2, s_0 s_1 s_0 \underbrace{d_0 y_1}_{=0}] \} \\
&= p_2 p_1 [s_0 x_2, s_2 s_1 y_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p_2\{[s_0x_2, s_2s_1y_1] - s_1d_1[s_0x_2, s_2s_1y_1]\} \\
&= p_2\{[s_0x_2, s_2s_1y_1] - [s_1\underbrace{d_1s_0}_{id}x_2, s_1d_1s_2s_1y_1]\} \\
&= p_2\{[s_0x_2, s_2s_1y_1] - [s_1x_2, s_2s_1\underbrace{d_1s_1}_{id}y_1]\} \\
&= p_2[s_0x_2, s_2s_1y_1] - p_2[s_1x_2, s_1s_1y_1] \\
&= \{[s_0x_2, s_2s_1y_1] - s_2d_2[s_0x_2, s_2s_1y_1]\} - \{[s_1x_2, s_1s_1y_1] - s_2d_2[s_1x_2, s_1s_1y_1]\} \\
&= \{[s_0x_2, s_2s_1y_1] - [s_2s_0\underbrace{d_1x_2}_{=0}, s_2\underbrace{d_2s_2}_{id}s_1y_1]\} - \{[s_1x_2, s_2s_1y_1] - [s_2\underbrace{d_2s_1}_{id}x_2, s_2\underbrace{d_2s_1}_{id}s_1y_1]\} \\
&= \{[s_0x_2, s_2s_1y_1] - [s_2d_2s_0x_2, s_2s_1y_1]\} - \{[s_1x_2, s_2s_1y_1] - [s_2x_2, s_2s_1y_1]\} \\
&= [s_0x_2, s_2s_1y_1] - [s_1x_2, s_2s_1y_1] + [s_2x_2, s_2s_1y_1] \\
&= [s_0x_2 - s_1x_2 + s_2x_2, s_2s_1y_1]
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca $x_2, y_2 \in NG_2$ ve $F_{\alpha, \beta} : NG_2 \times NG_2 \rightarrow NG_3$ olmak üzere N_3 ün üreteçleri ise:

$$\begin{aligned}
\text{iv) } F_{(1)(2)}(x_2, y_2) &= p[s_1x_2, s_2y_2] \\
&= p_2p_1p_0[s_1x_2, s_2y_2] \\
&= p_2p_1\{[s_1x_2, s_2y_2] - s_0d_0[s_1x_2, s_2y_2]\} \\
&= p_2p_1\{[s_1x_2, s_2y_2] - [s_0d_0s_1x_2, s_0d_0s_2y_2]\} \\
&= p_2p_1\{[s_1x_2, s_2y_2] - [s_0s_0\underbrace{d_0x_2}_{=0}, s_0d_0s_2y_2]\} \\
&= p_2p_1[s_1x_2, s_2y_2] \\
&= p_2\{[s_1x_2, s_2y_2] - s_1d_1[s_1x_2, s_2y_2]\} \\
&= p_2\{[s_1x_2, s_2y_2] - [s_1\underbrace{d_1s_1}_{id}x_2, s_1s_1\underbrace{d_1y_2}_{=0}]\} \\
&= p_2[s_1x_2, s_2y_2] \\
&= [s_1x_2, s_2y_2] - s_2d_2[s_1x_2, s_2y_2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [s_1 x_2, s_2 y_2] - [s_2 \underbrace{d_2 s_1}_{id} x_2, s_2 \underbrace{d_2 s_2}_{id} y_2] \\
&= [s_1 x_2, s_2 y_2] - [s_2 x_2, s_2 y_2] \\
&= [s_1 x_2 - s_2 x_2, s_2 y_2].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v)} \quad F_{(0)(2)}(x_2, y_2) &= p[s_0 x_2, s_2 y_2] \\
&= p_2 p_1 p_0 [s_0 x_2, s_2 y_2] \\
&= p_2 p_1 \{[s_0 x_2, s_2 y_2] - s_0 d_0 [s_0 x_2, s_2 y_2]\} \\
&= p_2 p_1 \{[s_0 x_2, s_2 y_2] - [s_0 \underbrace{d_0 s_0}_{id} x_2, s_0 d_0 s_2 y_2]\} \\
&= p_2 p_1 \{[s_0 x_2, s_2 y_2] - [s_0 x_2, s_0 s_1 \underbrace{d_0 y_2}_{=0}]\} \\
&= p_2 p_1 [s_0 x_2, s_2 y_2] \\
&= p_2 \{[s_0 x_2, s_2 y_2] - s_1 d_1 [s_0 x_2, s_2 y_2]\} \\
&= p_2 \{[s_0 x_2, s_2 y_2] - [s_1 \underbrace{d_1 s_0}_{id} x_2, s_1 d_1 s_2 y_2]\} \\
&= p_2 \{[s_0 x_2, s_2 y_2] - [s_1 x_2, s_1 s_1 \underbrace{d_1 y_2}_{=0}]\} \\
&= p_2 [s_0 x_2, s_2 y_2] \\
&= [s_0 x_2, s_2 y_2] - s_2 d_2 [s_0 x_2, s_2 y_2] \\
&= [s_0 x_2, s_2 y_2] - [s_2 d_2 s_0 x_2, s_2 d_2 s_2 y_2] \\
&= [s_0 x_2, s_2 y_2] - [s_2 s_0 \underbrace{d_1 x_2}_{=0}, s_2 d_2 s_2 y_2] \\
&= [s_0 x_2, s_2 y_2].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{vi)} \quad F_{(0)(1)}(x_2, y_2) &= p[s_0 x_2, s_1 y_2] \\
&= p_2 p_1 p_0 [s_0 x_2, s_1 y_2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p_2 p_1 \{ [s_0 x_2, s_1 y_2] - s_0 d_0 [s_0 x_2, s_1 y_2] \} \\
&= p_2 p_1 \{ [s_0 x_2, s_1 y_2] - [s_0 \underbrace{d_0 s_0}_{id} x_2, s_0 d_0 s_1 y_2] \} \\
&= p_2 p_1 \{ [s_0 x_2, s_1 y_2] - [s_0 x_2, s_0 s_0 \underbrace{d_0 y_2}_{=0}] \} \\
&= p_2 p_1 [s_0 x_2, s_1 y_2] \\
&= p_2 \{ [s_0 x_2, s_1 y_2] - s_1 d_1 [s_0 x_2, s_1 y_2] \} \\
&= p_2 \{ [s_0 x_2, s_1 y_2] - [s_1 \underbrace{d_1 s_0}_{id} x_2, s_1 \underbrace{d_1 s_1}_{id} y_2] \} \\
&= p_2 \{ [s_0 x_2, s_1 y_2] - [s_1 x_2, s_1 y_2] \} \\
&= p_2 [s_0 x_2 - s_1 x_2, s_1 y_2] \\
&= \{ [s_0 x_2 - s_1 x_2, s_1 y_2] - s_2 d_2 [s_0 x_2 - s_1 x_2, s_1 y_2] \} \\
&= \{ [s_0 x_2 - s_1 x_2, s_1 y_2] - [s_2 d_2 s_0 x_2 - s_2 d_2 s_1 x_2, s_2 d_2 s_1 y_2] \} \\
&= \{ [s_0 x_2 - s_1 x_2, s_1 y_2] - [s_2 s_0 \underbrace{d_1 x_2}_{=0} - s_2 \underbrace{d_2 s_1}_{id} x_2, s_2 \underbrace{d_2 s_1}_{id} y_2] \} \\
&= [s_0 x_2 - s_1 x_2, s_1 y_2] + [s_2 x_2, s_2 y_2]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorem 5.5: NG_2 , 2-boyutlu bir G simplişil grubunun Moore kompleksi olsun. Bu takdirde ∂_2, d_2 den kısıtlamayla üretilmek üzere $\partial_2(NG_2) \subseteq [Kerd_0, Kerd_1]$.

İspat: $n = 2$ için $\alpha = (0)$, $\beta = (1)$ ve $x_1, y_1 \in NG_1 = Kerd_0$ olmak üzere $d_n F_{\alpha, \beta}$ yı ele alalım.

Burada

$$F_{(0),(1)}(x_1, y_1) = [s_0 x_1 - s_1 x_1, s_1 y_1] \text{ olduğundan, böylece}$$

$$\begin{aligned}
d_2 F_{(0),(1)}(x_1, y_1) &= [d_2 s_0 x_1 - \underbrace{d_2 s_1}_{id} x_1, \underbrace{d_2 s_1}_{id} y_1] \\
&= [s_0 d_1 x_1 - x_1, y_1].
\end{aligned}$$

İlk olarak $s_0 d_1 x_1 - x_1$ in $Kerd_0$ in elemanı olup olmadığı araştırılır. Bunun için

$$\underbrace{d_0 s_0}_{id} d_1 x_1 - \underbrace{d_0 x_1}_{=0} = d_1 x_1 \text{ olduğundan böylece } s_0 d_1 x_1 - x_1 \notin \text{Kerd}_0.$$

İkinci olarak $s_0 d_1 x_1 - x_1$ in Kerd_1 in elemanı olup olmadığını inceleyelim:

$$\text{Burada } \underbrace{d_1 s_0}_{id} d_1 x_1 - \underbrace{d_1 x_1}_{=0} = d_1 x_1 - d_1 x_1 = 0 \text{ olup } s_0 d_1 x_1 - x_1 \in \text{Kerd}_1 \text{ dir. Diğer yandan}$$

$$y_1 \in \text{Kerd}_0 \text{ olduğundan } F_{(0),(1)}(x_1, y_1) \subseteq [\text{Kerd}_1, \text{Kerd}_0] \text{ yazılır. } \blacksquare$$

Teorem 5.6: NG_3 , 3– boyutlu bir G simplişil grubunun Moore kompleksi olsun. Bu takdirde

∂_3 , d_3 den kısıtlamayla üretilmek üzere

$$\begin{aligned} \partial_3(NG_3) \subseteq & [\text{Kerd}_2, \text{Kerd}_0 \cap \text{Kerd}_1] + [\text{Kerd}_1, \text{Kerd}_0 \cap \text{Kerd}] + [\text{Kerd}_1 \cap \text{Kerd}_2, \text{Kerd}_0] \\ & + [\text{Kerd}_1 \cap \text{Kerd}_2, \text{Kerd}_1 \cap \text{Kerd}_0] + [\text{Kerd}_0 \cap \text{Kerd}_1, \text{Kerd}_0 \cap \text{Kerd}_2] \\ & + [\text{Kerd}_0 \cap \text{Kerd}_2, \text{Kerd}_0 \cap \text{Kerd}_1] + [\text{Kerd}_1 \cap \text{Kerd}_2, \text{Kerd}_0 \cap \text{Kerd}_2]. \end{aligned}$$

İspat: $n=3$ için $x_1 \in NG_1$ ve $y_2 \in NG_2 = \text{Kerd}_0 \cap \text{Kerd}_1$ olmak üzere $d_n F_{\alpha, \beta}$ yı inceleyelim:

Önerme 5.4 de elde edilenleri kullanak;

$$\text{i) } F_{(1,0)(2)}(x_1, y_2) = [s_1 s_0 x_1 - s_2 s_0 x_1, s_2 y_2] \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} d_3 F_{(1,0)(2)}(x_1, y_2) &= [d_3 s_1 s_0 x_1 - \underbrace{d_3 s_2}_{id} s_0 x_1, \underbrace{d_3 s_2}_{id} y_2] \\ &= [s_1 d_2 s_0 x_1 - s_0 x_1, y_2] \\ &= [s_1 s_0 d_1 x_1 - s_0 x_1, y_2]. \end{aligned}$$

yazılır, böylece önce $s_1 s_0 d_1 x_1 - s_0 x_1$ in Kerd_0 in elemanı olup olmadığı araştırılır. Bunun için

$$\begin{aligned} d_0(s_1 s_0 d_1 x_1 - s_0 x_1) &= d_0 s_1 s_0 d_1 x_1 - d_0 s_0 x_1 \\ &= s_0 \underbrace{d_0 s_0}_{id} d_1 x_1 - \underbrace{d_0 s_0}_{id} x_1 \\ &= s_0 d_1 x_1 - x_1 \notin \text{Kerd}_0. \end{aligned}$$

Benzer şekilde $s_1 s_0 d_1 x_1 - s_0 x_1$ in Kerd_1 in elemanı olup olmadığını incelenirse

$$\begin{aligned} d_1(s_1 s_0 d_1 x_1 - s_0 x_1) &= d_1 s_1 s_0 d_1 x_1 - d_1 s_0 x_1 \\ &= \underbrace{d_1 s_1}_{id} s_0 d_1 x_1 - \underbrace{d_1 s_0}_{id} x_1 \\ &= s_0 d_1 x_1 - x_1 \notin \text{Kerd}_1 \end{aligned}$$

bulunur.

Daha sonra $s_1 s_0 d_1 x_1 - s_0 x_1$ in $Kerd_2$ nin elemanı olup olmadı kontrol edilirse

$$\begin{aligned} d_2(s_1 s_0 d_1 x_1 - s_0 x_1) &= \underbrace{d_2 s_1}_{id} s_0 d_1 x_1 - d_2 s_0 x_1 \\ &= s_0 d_1 x_1 - s_0 d_1 x_1 = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $s_1 s_0 d_1 x_1 - s_0 x_1 \in Kerd_2$.

Burada $y_2 \in Kerd_0 \cap Kerd_1$ olduğundan $F_{(0,1),(2)}(x_1, y_1) \in [Kerd_2, Kerd_0 \cap Kerd_1]$ elde edilir.

ii) $F_{(2,0)(1)}(x_1, y_2) = [s_2 s_0 x_1 - s_2 s_1 x_1, s_1 y_2 - s_2 y_2]$ ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} d_3 F_{(2,0)(1)}(x_1, y_2) &= d_3([s_2 s_0 x_1 - s_2 s_1 x_1, s_1 y_2 - s_2 y_2]) \\ &= [\underbrace{d_3 s_2}_{id} s_0 x_1 - \underbrace{d_3 s_2}_{id} s_1 x_1, d_3 s_1 y_2 - \underbrace{d_3 s_2}_{id} y_2] \\ &= [s_0 x_1 - s_1 x_1, s_1 d_2 y_2 - y_2]. \end{aligned}$$

Öncelikle $s_0 x_1 - s_1 x_1$ in $Kerd_0, Kerd_1, Kerd_2$ in elemanı olup olmadığını kontrol edelim:

Burada $d_0(s_0 x_1 - s_1 x_1) = \underbrace{d_0 s_0}_{id} x_1 - d_0 s_1 x_1 = x_1 - d_0 s_1 x_1$ iken $s_0 x_1 - s_1 x_1 \notin Kerd_1$.

$$d_1(s_0 x_1 - s_1 x_1) = \underbrace{d_1 s_0}_{id} x_1 - \underbrace{d_1 s_1}_{id} x_1 = x_1 - x_1 = 0 \text{ olduğunda } s_0 x_1 - s_1 x_1 \in Kerd_1 \text{ ve sonuçta}$$

$$d_2(s_0 x_1 - s_1 x_1) = d_2 s_0 x_1 - \underbrace{d_2 s_1}_{id} x_1 = s_0 d_1 x_1 - x_1 \notin Kerd_2 \text{ bulunur.}$$

Benzer şekilde $s_1 d_2 y_2 - y_2$ in $Kerd_0, Kerd_1, Kerd_2$ in elemanı olup olmadığı araştırıldığında

$$\begin{aligned} d_0(s_1 d_2 y_2 - y_2) &= d_0 s_1 d_2 y_2 - d_0 y_2 \\ &= s_0 d_0 d_2 y_2 - d_0 y_2 \\ &= s_0 d_1 \underbrace{d_0 y_2}_{=0} - \underbrace{d_0 y_2}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

olup $s_1 d_2 y_2 - y_2 \in Kerd_0$ dir. Diğer yandan

$$d_1(s_1 d_2 y_2 - y_2) = \underbrace{d_1 s_1}_{id} d_2 y_2 - \underbrace{d_1 y_2}_{=0} = d_2 y_2 \notin Kerd_1,$$

$$d_2(s_1 d_2 y_2 - y_2) = \underbrace{d_2 s_1}_{id} d_2 y_2 - d_2 y_2 = d_2 y_2 - d_2 y_2 = 0 \Rightarrow s_1 d_2 y_2 - y_2 \in \text{Kerd}_2 \text{ olup, böylece}$$

$$F_{(2,0)(1)}(x_1, y_2) = [\text{Kerd}_1, \text{Kerd}_0 \cap \text{Kerd}_2].$$

iii) $x_2 \in NG_2$, $y_1 \in NG_1$ için

$$F_{(0)(2,1)}(x_2, y_1) = [s_0 x_2 - s_1 x_2 + s_2 x_2, s_1 s_1 y_1] \text{ ise, bu takdirde}$$

$$\begin{aligned} d_3 F_{(0)(2,1)}(x_2, y_1) &= d_3([s_0 x_2 - s_1 x_2 + s_2 x_2, s_2 s_1 y_1]) \\ &= [d_3 s_0 x_2 - d_3 s_1 x_2 + \underbrace{d_3 s_2}_{id} x_2, \underbrace{d_3 s_2}_{id} s_1 y_1] \\ &= [s_0 d_2 x_2 - s_1 d_2 x_2 + x_2, s_1 y_1]. \end{aligned}$$

İlk olarak $s_0 d_2 x_2 - s_1 d_2 x_2 + x_2$ nin Kerd_0 , Kerd_1 , Kerd_2 nin elemanı olup olmadığı araştırılır.

Bunun için

$$\begin{aligned} d_0(s_0 d_2 x_2 - s_1 d_2 x_2 + x_2) &= \underbrace{d_0 s_0}_{id} d_2 x_2 - d_0 s_1 d_2 x_2 + \underbrace{d_0 x_2}_{=0} \\ &= d_2 x_2 - s_0 d_1 \underbrace{d_0 x_2}_{=0} = d_2 x_2 \end{aligned}$$

olduğundan $s_0 d_2 x_2 - s_1 d_2 x_2 + x_2 \notin \text{Kerd}_0$. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} d_1(s_0 d_2 x_2 - s_1 d_2 x_2 + x_2) &= \underbrace{d_1 s_0}_{id} d_2 x_2 - \underbrace{d_1 s_1}_{id} d_2 x_2 + \underbrace{d_1 x_2}_{=0} \\ &= d_2 x_2 - d_2 x_2 = 0 \end{aligned}$$

olup, buradan $s_0 d_2 x_2 - s_1 d_2 x_2 + x_2 \in \text{Kerd}_1$. Diğer yandan

$$\begin{aligned} d_2(s_0 d_2 x_2 - s_1 d_2 x_2 + x_2) &= d_2 s_0 d_2 x_2 - \underbrace{d_2 s_1}_{id} d_2 x_2 + d_2 x_2 \\ &= s_0 d_1 d_2 x_2 - d_2 x_2 + d_2 x_2 \\ &= s_0 d_1 \underbrace{d_1 x_2}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

İken $s_0 d_2 x_2 - s_1 d_2 x_2 + x_2 \in \text{Kerd}_2$.

Daha sonra $s_2 s_1 y_1$ in Kerd_0 , Kerd_1 , Kerd_2 nin elemanı olup olmadığı incelendiğinde

$$d_0(s_1 y_1) = s_0 \underbrace{d_0 y_1}_{=0} = 0 \text{ olduğundan } s_1 y_1 \in \text{Kerd}_0.$$

$d_1(s_1 y_1) = \underbrace{d_1 s_1}_{id} y_1 = y_1$ olduğundan $s_1 y_1 \notin \text{Kerd}_1$, ve sonuçta

Benzer şekilde $d_2(s_1 y_1) = \underbrace{d_2 s_1}_{id} y_1 = y_1$ olduğundan $s_1 y_1 \notin \text{Kerd}_2$ olduğu görülür.

Şu halde $d_3 F_{(0)(2,1)}(x_2, y_1) \in [\text{Kerd}_1 \cap \text{Kerd}_2, \text{Kerd}_0]$.

Diğer yandan $x_2, y_2 \in NG_2$ için;

$$\text{iv) } F_{(0)(2)}(x_2, y_2) = [s_0 x_2, s_2 y_2],$$

$$\begin{aligned} d_3 F_{(0)(2)}(x_2, y_2) &= d_3([s_0 x_2, s_2 y_2]) \\ &= [d_3 s_0 x_2, \underbrace{d_3 s_2}_{id} y_2] \\ &= [s_0 d_2 x_2, y_2]. \end{aligned}$$

olduğundan komutatörün özellikleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} [s_0 d_2 x_2 - s_1 d_2 x_2 + x_2, y_2] &= [s_0 d_2 x_2 + (x_2 - s_1 d_2 x_2), y_2] \\ &= [s_0 d_2 x_2, y_2] + [x_2 - s_1 d_2 x_2, y_2] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} [s_0 d_2 x_2 - s_1 d_2 x_2 + x_2, y_2] + [y_2, x_2 - s_1 d_2 x_2] &= [s_0 d_2 x_2, y_2] \\ &= d_3 F_{(0)(2)}(x_2, y_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Şu halde

$$\begin{aligned} d_3 F_{(0)(2)}(x_2, y_2) &\in [\text{Kerd}_1 \cap \text{Kerd}_2, \text{Kerd}_1 \cap \text{Kerd}_0] \\ &\quad + [\text{Kerd}_0 \cap \text{Kerd}_1, \text{Kerd}_0 \cap \text{Kerd}_2]. \end{aligned}$$

v) $F_{(1)(2)}(x_2, y_2) = [s_1 x_2 - s_2 x_2, s_2 y_2]$ ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} d_3 F_{(1)(2)}(x_2, y_2) &= d_3([s_1 x_2 - s_2 x_2, s_2 y_2]) \\ &= [d_3 s_1 x_2 - \underbrace{d_3 s_2}_{id} x_2, \underbrace{d_3 s_2}_{id} y_2] \\ &= [s_1 d_2 x_2 - x_2, y_2] \end{aligned}$$

İlk olarak $s_1 d_2 x_2 - x_2$ nin $\text{Kerd}_0, \text{Kerd}_1, \text{Kerd}_2$ in elemanı olup olmadığı kontrol edildiğinde:

$$\begin{aligned}
d_0(s_1 d_2 x_2 - x_2) &= d_0 s_1 d_2 x_2 - \underbrace{d_0 x_2}_{=0} \\
&= s_0 d_0 d_2 x_2 \\
&= s_0 d_1 \underbrace{d_0 x_2}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan $s_1 d_2 x_2 - x_2 \in \text{Kerd}_0$.

$$\begin{aligned}
d_1(s_1 d_2 x_2 - x_2) &= \underbrace{d_1 s_1}_{id} d_2 x_2 - \underbrace{d_1 x_2}_{=0} \\
&= d_2 x_2
\end{aligned}$$

olup $s_1 d_2 x_2 - x_2 \notin \text{Kerd}_1$. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
d_2(s_1 d_2 x_2 - x_2) &= \underbrace{d_2 s_1}_{id} d_2 x_2 - d_2 x_2 \\
&= d_2 x_2 - d_2 x_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan $s_1 d_2 x_2 - x_2 \in \text{Kerd}_2$.

$y_2 \in \text{Kerd}_0 \cap \text{Kerd}_1$ olduğundan,

$$d_3 F_{(1)(2)}(x_2, y_2) \in [\text{Kerd}_0 \cap \text{Kerd}_2, \text{Kerd}_0 \cap \text{Kerd}_1].$$

vi) Eğer $F_{(0)(1)}(x_2, y_2) = [s_0 x_2 - s_1 x_2, s_1 y_2] + [s_2 x_2, s_2 y_2]$ ise, bu takdirde

$$\begin{aligned}
d_3 F_{(0)(1)}(x_2, y_2) &= [d_3 s_0 x_2 - d_3 s_1 x_2, s_1 y_2] + [\underbrace{d_3 s_2}_{id} x_2, \underbrace{d_3 s_2}_{id} y_2] \\
&= [s_0 d_2 x_2 - s_1 d_2 x_2, s_1 d_2 y_2] + [x_2, y_2].
\end{aligned}$$

$[s_0 d_2 x_2 - s_1 d_2 x_2, s_1 d_2 y_2] + [x_2, y_2]$ nin çekirdeğini belirlemek için ilk olarak aşağıdaki komutatörü göz önüne alalım:

$$[s_0 d_2 x_2 - s_1 d_2 x_2 + x_2, s_1 d_2 y_2 - y_2].$$

Cebirsel işlemleri kolaylaştırmak için bu komutatördeki terimler aşağıdaki gibi kodlanırsa:

$$a = s_0 d_2 x_2, \quad b = s_1 d_2 y_2, \quad c = s_1 d_2 x_2, \quad d = x_2, \quad e = y_2$$

Şu halde komutatörün tanımlanışını ve özelliklerini kullanarak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$[a - c + d, b - e] = [a - c, b] + [d, e]$$

$$\begin{aligned} & (a - c + d)(b - e) - (b - e)(a - c + d) \\ &= ab - cb + db - ae + ce - de \\ & \quad - \{ba - bc + bd - ea + ec - ed\} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi aşağıdaki durumlar göz önüne alınırsa, buradan

$$\begin{aligned} ab - cb - ba + bc &= (a - c)b - b(a - c) \\ &= [a - c, b] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ce - de - ec + ed &= (c - d)e - e(c - d) \\ &= [c - d, e], \end{aligned}$$

kalan terimlerden ise aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} db - bd - [d, e] &= db - bd - de + ed \\ &= d(b - e) - (b - e)d \\ &= [d, b - e]. \end{aligned}$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} [(a - c + d), (b - e)] &= (a - c + d)(b - e) - (b - e)(a - c + d) \\ &= \underbrace{ab - cb - ba - bc}_{[a - c, b]} + \underbrace{de - ed}_{[d, e]} - \underbrace{ae + ea}_{[a, e]} \\ & \quad + \underbrace{ce - de + ec - ed}_{[c - d, e]} + \underbrace{db + bd - de + ed}_{[d, b - e]} \\ &= \underbrace{[a - c, b] + [d, e]}_{d_3 F_{(0)(1)}(x_2, y_2)} - \underbrace{[a, e]}_{d_3 F_{(0)(2)}(x_2, y_2)} + [c - d, e] + [d, b - e] \end{aligned}$$

Bu değerler yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} [s_0 d_2 x_2 - s_1 d_2 x_2 + x_2, s_1 d_2 y_2 - y_2] &= d_3 F_{(0)(1)}(x_2, y_2) - d_3 F_{(0)(2)}(x_2, y_2) \\ & \quad + [s_1 d_2 x_2 - x_2, y_2] + [x_2, s_1 d_2 y_2 - y_2] \end{aligned}$$

$$[s_0 d_2 x_2 - s_1 d_2 x_2 + x_2, s_1 d_2 y_2 - y_2] + [s_1 d_2 y_2 - y_2, x_2] + [y_2, s_1 d_2 x_2 - x_2] + d_3 F_{(0)(2)}(x_2, y_2) = d_3 F_{(0)(1)}(x_2, y_2).$$

$$[s_0 d_2 x_2 - s_1 d_2 x_2 + x_2, s_1 d_2 y_2 - y_2] \in [Kerd_1 \cap Kerd_2, Kerd_0 \cap Kerd_2],$$

$$[s_1 d_2 y_2 - y_2, x_2] \in [Kerd_0 \cap Kerd_2, Kerd_1 \cap Kerd_0],$$

$$[s_1 d_2 y_2 - y_2, x_2] \in [Kerd_1 \cap Kerd_0, Kerd_0 \cap Kerd_2]$$

$$d_3 F_{(0)(2)}(x_2, y_2) \in [Kerd_1 \cap Kerd_2, Kerd_1 \cap Kerd_0] + [Kerd_0 \cap Kerd_1, Kerd_0 \cap Kerd_2]$$

olup, buradan

$d_3 F_{(0)(1)}(x_2, y_2)$ nin çekirdeği

$$\begin{aligned} d_3 F_{(0)(1)}(x_2, y_2) \in [Kerd_1 \cap Kerd_2, Kerd_0 \cap Kerd_2] + [Kerd_0 \cap Kerd_2, Kerd_1 \cap Kerd_0] \\ + [Kerd_1 \cap Kerd_0, Kerd_0 \cap Kerd_2] + [Kerd_1 \cap Kerd_2, Kerd_1 \cap Kerd_0]. \end{aligned}$$

biçiminde bulunur.

Sonuç olarak $n = 3$ için

$$\begin{aligned} d_3 F_{(0)(1)}(x_2, y_2) \subseteq [Kerd_1 \cap Kerd_2, Kerd_0 \cap Kerd_2] + [Kerd_0 \cap Kerd_2, Kerd_1 \cap Kerd_0] \\ + [Kerd_1 \cap Kerd_0, Kerd_0 \cap Kerd_2] + [Kerd_1 \cap Kerd_2, Kerd_1 \cap Kerd_0]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Böylece

$$\begin{aligned} \partial_3(NG_3) \subseteq [Kerd_2, Kerd_0 \cap Kerd_1] + [Kerd_1, Kerd_0 \cap Kerd] + [Kerd_1 \cap Kerd_2, Kerd_0] \\ + [Kerd_1 \cap Kerd_2, Kerd_1 \cap Kerd_0] + [Kerd_0 \cap Kerd_1, Kerd_0 \cap Kerd_2] \\ + [Kerd_0 \cap Kerd_2, Kerd_0 \cap Kerd_1] + [Kerd_1 \cap Kerd_2, Kerd_0 \cap Kerd_2]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında dijital görüntülerde simplişil küme ve simplişil grup yapısı oluşturulmuş, dijital görüntülerde toplamsal bir grup yapısı olacağından komutatör işlemi genel simplişil gruplardakinden farklı olarak yeniden tanımlanmıştır. Ayrıca dijital görüntülerde p operatörünün $p_j(z) = z - s_i d_i z$, $j = 0, \dots, n-1$ şeklinde yeniden tanımlanmasıyla bir simplişil grubun 2 ve 3 boyutlu Moore komplekslerinin alışılmış simplişil grupların sahip olduğu normal alt grup yapısından daha farklı bir normal alt grup yapısına sahip olduğu elde edilmiştir.

Bu çalışmanın devamı olarak dijital görüntülerde “semi-direkt çarpım” ve “etki” kavramlarının tanımlanmasıyla Teorem 5.6 ve Teorem 5.7 deki ifadelerin ters kapsamalarının gerçekleşip gerçekleşmediği, eğer gerçekleşiyorsa elde edilen normal alt grupların simplişil grubun homoloji grubuna karşılık geleceği gösterilebilir. Böylece bu yöntem dijital görüntülerde homoloji grubu için kullanışlı bir araç olacaktır.

Diğer taraftan bu çalışmanın devamı olarak dijital görüntülerde kross modül, kross kompleks, 2-kross modül, 2-kross kompleksler tanımlanarak homotopi ve homoloji teorileri ile ilgili çalışmalara ışık tutabilecek yeni yöntemler elde edilebilirler.

REFERANSLAR

1. Z. Arvasi, Applications in commutative algebra of the Moore complex of a simplicial algebra, Ph.D Thesis, University of Wales, BANGOR, 1994.
2. K. Borsuk, Theory of retracts, Polish Scientific Publishers: Warsaw, 1967.
3. L. Boxer, Digitally continuous functions, *Pattern Recognition Letters*, Vol. 15, pp. 833–839, 1994.
4. L. Boxer, A classical construction for the dijital fundamental group, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 10, pp. 51–62, 1999.
5. L. Boxer, Properties of dijital homotopy, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 22, pp. 19–26, 2005.
6. P.Carrasco and A.M.Cegarra. Group-theoretic algebraic models for homotopy types, *Journal Pure Appl. Algebra*, **75** (1991) 195-235.
7. G. Freidman, An elemantary illustrated introduction to simplicial set, 2011
8. G.T. Herman, Oriented surfaces in dijital spaces, *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, Vol. 55, pp. 381–396, 1993.
9. H. Herlich and G.E. Strecker, Category theory, Allyn and Bacon Inc, Boston.
10. D. M. Kan, A combinatorial definition of homotopy groups, *Annals of Maths.*, **61**, (1958), 288-312.
11. I. Karaca, H. Arslan, and A. Oztel, Homology groups of n-dimensional images, Proceeding of XXI. Turkish National Symposium 2008, B1-13.
12. I. Karaca, and O. Ege, Some results on simplicial homology groups of 2D digital images, *International Journal of Information and Computer Science* 1(2012) No.8, 198-203.
13. I. Karaca, and L. Boxer, Fundamental groups of digital products, *The Advances and Applications in Mathematical Science* 11 (2012) No. 4, 161-180.
14. I. Karaca, L. Boxer and A. Öztel, Topological Invariants in dijital images, *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, 11(2011) No 2, 109-140
15. I. Karaca and L. Boxer., Some properties of dijital covering spaces, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 37(2010), 17-26.
16. I. Karaca and L. Boxer., The classification of dijital covering spaces, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 32(2008), 23-29.

17. E. Khalimsky, Motion, deformation, and homotopy in finite spaces, in *Proceedings IEEE Intl. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics*, 1987, pp. 227–234.
18. T.Y. Kong, A dijital fundamental group, *Computers and Graphics*, Vol. 13, pp. 159–166, 1989.
19. T.Y. Kong, A.W. Roscoe, and A. Rosenfeld, Concepts of dijital topology, *Topology and its Applications*, Vol. 46, pp. 219–262, 1992.
20. D.-W. Lee, On the dijital homology groups of dijital images, arXiv: 1109.3850v1 [cs. CV] 18 Sep 2011
21. R. Malgouyres, Homotopy in 2-dimensional dijital images, *Theoretical Computer Science*, Vol. 230, pp. 221–233, 2000.
22. W.S. Massey, Algebraic topology: An introduction, Harcourt, Brace, and World: New York, 1967.
23. J.P. May, Simplicial objects in algebraic topology, Van Nostrand, Math. Studies, 11, (1967).
24. J.R. Munkres, Topology a first course, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
25. A. Mutlu, Peiffer pairings in the Moore complex of a simplicial group, Ph.D Thesis, University of Walles, Bangor, 1997.
26. A. Mutlu, T. Porter, Application of Peiffer pairings in the Moore complex of a simplicial Group, *Theory and Applications of Categories*, Vol:4, No:7, pp:148-173, 1998.
27. A. Mutlu, B. Mutlu, S. Öztunç, On digital homotopy of digital paths, *Research Journal of Algebra*, Vol 2, No:6, 147-154, 2012.
28. S. Öztunç, Ali. Mutlu, Categories in digital images, *American Journal of Mathematics and Statistics*, Vol.3, No.1, 62-66, 2013.
29. S. Öztunç, A. Mutlu, The structure of simplicial sets in digital images, *International Conference on Applied Analysis and Algebra (ICAAA2012)*, 20-24 June 2012, Yıldız Technical University, Istanbul, TURKEY, pp. 246.
30. S. Öztunç, N. Bildik, A. Mutlu, The construction of simplicial groups in digital images, *International Congress in Honour of Proffessor Hari M. Srivastava*, 23-26 August 2012, Uludağ University Görükle/BURSA, TURKEY, Pp. 126.
31. S. Öztunç, N. Bildik, A. Mutlu, The construction of simplicial groups in digital images, *Journal of Inequalities and Applications*, <http://www.journalofinequalitiesandapplications.com/content/2013/1/143>.

- 31.** S. Öztunç, N. Bildik, A. Mutlu, Simplicial homotopy in digital images, 1st International Eurasian Conference on Mathematical Science and Applications (IECMSA 2012), 03-07 September 2012, Prishtine/KOSOVA, Pp. 240.
- 32.** A. Rosenfeld, 'Continuous' functions on digital pictures, *Pattern Recognition Letters*, Vol. 4, 1986, pp. 177–184.
- 33.** Q.F. Stout, Topological matching, in *Proc. 15th Annual Symp. on Theory of Computing*, 1983, pp. 24–31.

ÖZGEÇMİŞ

ADI SOYADI : Simge ÖZTUNÇ
ÜNVANI : Araştırma Görevlisi
DOĞUM TARİHİ : 26.12.1982
DOĞUM YERİ : İzmir

İlköğrenimini Edirne’de Trakya Birlik İlköğretim Okulunda, Ortaokulu Bornova Yahya Kemal Beyatlı İlköğretim Okulunda, Lise öğrenimini Suphi Koyuncuoğlu Lisesinde tamamladı. 2005 yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2005-2006 Öğretim yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansa başladı. Ocak 2009 da Yüksek Lisans eğitimini tamamlayarak, aynı dönem Doktora eğitimine başladı. Halen Doktora eğitimine devam etmekte ve 2005 yılından beri Celal Bayar Üniversitesinde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.