

**DİK LATİN KARE TAM SETLERİNİN
TASARIM TEORİSİNDEKİ YERİ**

Fatma ÖZBEN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EYLÜL 2006
ANKARA**

Fatma ÖZBEN tarafından hazırlanan DİK LATİN KARE TAM SETLERİNİN TASARIM TEORİSİNDEKİ YERİ adlı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Hülya BAYRAK

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile İSTATİSTİK Anabilim Dalında Yüksek lisans/Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan:: Doç. Dr. Gül ERGÜN

Üye: Prof. Dr. Semra ORAL ERBAŞ

Üye: Prof. Dr. Hamza GAMGAM

Üye: Prof. Dr. Hasan BAL

Üye: Prof. Dr. Hülya BAYRAK

Tarih: 11/09/2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Fatma ÖZBEN

**DİK LATİN KARE TAM SETLERİNİN
TASARIM TEORİSİNDEKİ YERİ
(Yüksek Lisan tezi)**

Fatma ÖZBEN

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Eylül 2006

ÖZET

Latin kareler istatistik biliminde önemli bir yere sahip olup, deney düzenlemelerinde kullanılır. Bu çalışmada istatistiksel anlamda dik Latin kare tam setleri (MOLS), üçlü sistemler, Stenier üçlü sistemler (STS), transversal tasarımlar (TD), dengeli tamamlanmamış blok tasarımları (BIBD), ikili dengeli tasarımlar (PBD),dik dizimler (OA) ile yakın ilişkisi bulunan Latin kareler ve Latin kare tam setlerinin tanıtılması esas alınmıştır. Bu maksatla Latin karelerin tanımlarına ve sözü geçen tasarımlarla ilişkilerine teorik anlamda değinilip açıklayıcı örnekler verilmiştir.

Bilim Kodu : 212

Anahtar Kelimeler : Latin Kare, Dik Latin Kare Tam Setleri (MOLS), Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları (BIBD), İkili Dengeli Tasarımlar (PBD), Sonlu Geometri.

Sayfa Adedi : 91

Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Hülya BAYRAK

**THE POSITION IN THE DESIGN THEORY
OF MUTUALLY ORTHOGONAL LATIN SQUARES**

(M. Sc. Thesis)

Fatma ÖZBEN

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

September 2006

ABSTRACT

Latin squares essential in statistics and they are primarily used in designing experiment. In this study, we showed the close relationship between Latin squares and Mutually orthogonal Latin squares (MOLS) and the following designs; triple systems , Stenier triple systems (STS), transversal design (TD), balanced incomplete block design (BIBD), pairwise balanced design (PBD), orthogonal arrays (OA). We have concluded this study by showing the relationship between Latin squares and the above mentioned designs in theoretical and mathematical samples.

Science Code : 212

Key Words : Latin Square, Mutually Orthogonal Latin Squares (MOLS), Balanced Incomplete Block Design (BIBD), Pairwise Balanced Designs (PBD), Finite Geometry.

Number of Pages : 91

Supervisor : Prof. Dr. Hülya BAYRAK

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın gerçekleşmesi sürecinde bilgi ve deneyimleri ile beni yönlendiren, çalışmalarının yoğunluğuna rağmen zaman ayırarak her konuda yardımlarını benden esirgemeyen sevgili Hocam Prof. Dr. Hülya BAYRAK 'a, bugünkü bilgilerimi elde etmede katkısı olan tüm hocalarıma ve her koşulda benden desteğini esirgemeyen aileme ve arkadaşım Nuran GÜRTEKİN 'e teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR	xi
1. GİRİŞ	1
2. LATİN KARELER ve ÜÇLÜ SİSTEMLER	4
2.1. Latin Karelerin Temel Özellikleri	4
2.2. Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları (BIBD)	9
2.2.1. BIBD ‘in koşulları ve bazı tanımlar	9
2.2.2. BIBD ‘in isabet matrisleri	10
2.3. Üçlü Sistemler İçin Varlık Kriteri	11
2.3.1. Yapı 1	13
2.3.2. Yapı 2	15
2.3.3. Yapı 3	18
2.3.4. Yapı 4	22
2.3.5. Yapı 5	23
2.3.6. Yapı 6	24
2.4. Basit Üçlü Sistemler	25
2.4.1. Yapı 7	25
2.4.2. Yapı 8	25
2.5. Stenier üçlü sistemleri (STS)	26
2.5.1. Stenier üçlü sistemlerinde kullanılan bose ve skolem kuruluşları	27
3. İKİLİ DENGELİ TASARIM (PBD) ve TRANSVERSAL TASARIM (TD)	36
3.1. İkili Dengeli Tasarım (PBD)	36
3.2. Transversal Tasarım (TD)	37
4. DİK LATİN KARE TAM SETLERİ (MOLS)	39
4.1. Latin Karelerin Dikliği	39

	Sayfa
4.2. Dik Latin Karelerin Kuruluşu	42
4.3. 6. Mertebeden Dik Latin Karelerin Yokluğu	48
5. DİK DİZİMLER (OA)	50
5.1. Dik Dizimlerin Kuruluş Teknikleri	50
5.1.1. Dik dizimlerin kuruluşunda sonlu projektif geometrinin kullanımı	50
5.1.2. Dik dizimlerin kuruluşunda dik latin Kare tam setlerinin kullanımı	52
6. LATİN KARE ÇEŞİTLERİ	54
6.1. Semi-Latin Kare	54
6.2. Trojen Kare	55
6.3. Yarı Tam Latin Kare	55
6.3.1. Satır-yarı tam latin kare	55
6.3.2. Sütun-yarı tam latin kare	56
6.4. Latin Kare İsoptopy	56
6.5. Yakın Dik Latin Kare	56
7. PROJEKTİF GEOMETRİLER VE DÜZLEMLER	58
7.1. Afın Düzlem	61
7.2. Projektif Düzlem	62
7.2.1. 3. mertebeden MOLs 'a karşılık gelen projektif düzlem	65
7.3. Latisler	70
7.3.1. Kare latisler	70
7.3.2. Dikdörtgensel latisler	71
7.3.3 Latinleştirilmiş dikdörtgensel latisler	72
8. GRAFİKLER ve LATİN KARE	80
8.1. Latin Kare ve İki Kısımlı (Bipartite) Grafikler	80
8.2. Latin Kare ve Grafik Faktörleşmesi	81
9. SONUÇ	87
KAYNAKLAR	88
ÖZGEÇMİŞ	91

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1 Latin karelerin bazı örnekleri.....	4
Çizelge 2.2 Z_4 ve $Z_2 \times Z_2$ 'nin grup tablolarından elde edilen Latin kareler	6
Çizelge 2.3 ν, b, r, k parametrelili tasarımı isabet matrisi	11
Çizelge 2.4 $B[3,1;6n+3]$ tasarımının blokları	14
Çizelge 2.5 $B[3,1;6n+1]$ tasarımının blokları	16
Çizelge 2.6 (mod 4) 'ün grup tablosu.....	17
Çizelge 2.7 $B[3,1;13]$ tasarımının blokları.....	17
Çizelge 2.8 $B[3,2;6]$ tasarımının blokları.....	20
Çizelge 2.9 $B[3,2;3n]$ tasarımının blokları.....	21
Çizelge 2.10 $n=3$ ve $n=4$ için Latin kareler.....	21
Çizelge 2.11 $B[3,2;12]$ tasarımının blokları.....	22
Çizelge 2.12 $B[3,2;3n+1]$ tasarımının blokları	23
Çizelge 2.13 $B[3,6;3n+2]$ tasarımının blokları	24
Çizelge 2.14 $B[3,2;12]$ tasarımı	25
Çizelge 2.15 $B[3,2;6n+3]$ tasarımının blokları	26
Çizelge 2.16 $B[3,2;9]$ tasarımının blokları.....	26
Çizelge 3.1 $T[3,1;3]$ tasarımının blokları ve grupları	38
Çizelge 4.1 $n=3$ ve $n=4$ için Latin kareler.....	39
Çizelge 4.2 $n=3$ için dik Latin kareler.....	40
Çizelge 4.3 satırları değiştirilmiş dik Latin kareler.....	41
Çizelge 4.4 birbirine dik Latin kareler	42
Çizelge 4.5 $GF(2^2)$ nin doğal hali.....	45
Çizelge 4.6 $GF(2^2)$ den elde edilmiş dik Latin kareler	46
Çizelge 4.7 P tasarımının grupları.....	49
Çizelge 7.1 LRL_1 'in birliktelik yapısı.....	75
Çizelge 7.2 $k(k-w)$ dikdörtgensel latisi için birliktelik yapısı.....	77
Çizelge 7.3 homojen tekrarlar ilişkili birliktelik yapısı.....	78

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1 Yapı I 'in üçlüsü.....	14
Şekil 2.2 $B[3,2;6]$ tasarımının 5 bloğunun iki ayrı gösterimi	18
Şekil 2.3 Şekil 2.3.3.1 in sınıflandırılmış hali.....	19
Şekil 7.1 2. mertebeden afin düzlem.....	63
Şekil 7.2 2. mertebeden projektif düzlem	64
Şekil 7.3 3. mertebeden afin düzlem.....	66
Şekil 7.4 Tekrarların afin düzlemde bir gösterimi	69
Şekil 7.5 $(3,2,1)$ kısmi geometrisinin bir gösterimi	79
Şekil 8.1 G grafiği	80
Şekil 8.2 L_1, L_2, L_3, L_4 Latin karelerinin noktalarla gösterimi.....	82
Şekil 8.3 Üç köşe üzerinde tamamlanmış grafikler	83
Şekil 8.4 K_6 'nın bir 1-faktörleşmesi	85
Şekil 8.5 K_5	86

1. GİRİŞ

Latin kareler istatistikte sıkça başvurulanan deney düzenleme yöntemlerinden biridir. Eğer denemelerin her biri, belirli bir gruptaki tüm deneysel birimlere uygulanıyor ise bu durumda deney düzeni için Latin kare yapısı uygun olacaktır.

Çalışmanın amacı, Latin kareleri, dik Latin kareleri ve özelliklerini Latin karelerin ilişkili olduğu tasarımları incelemek, Latin karelerin yapısında kullanılan geometrileri irdelemektir.

1971 ‘de Hedayat ve Shrikhande, Latin kareler, MOLS ve deneysel çalışmalarda kullanılmış diğer tasarımları incelemiştir. Stenier üçlü sistemler için $\nu = 1$ yada 3 durumunun yeterliliği ($\lambda = 1$ ile) pek çok araştırmacı tarafından irdelenmiştir. Bose 1939, $\lambda = 2$ durumunu ve Hanani 1961 geri kalan durumları oluşturmuştur. Bu yapılar biraz uzun ve tekrara dayalıdır. $[3,2;\nu]$ tasarımının varlığı Van Buggenhaut 1974 tarafından kanıtlanmıştır. Jhonsen, Dulmage ve Mendelshon 1961 ‘de 12. mertebden 5 MOLS ‘un yapısını incelemiş ve Horton 1974 ‘de 6. mertebden yaklaşık iki dik Latin kare setinin yapısını incelemiştir. W. D. Wallis, MOLS ‘un kullanımına ilişkin örneklerini vermiştir [1].

Denes ve Keedwel 1974 ‘de Latin kareler hakkında detaylı bilgi vermiştir [2].

Laywine ve Mullen 1959 ‘da Grafik teori, Latin kare ve grafikleri, MOLS grafikleri hakkında bilgi vermiştir [3].

Hughes 1985 “de faktöriyel düzenler hakkında detaylı bilgi vermiştir [4].

Aigner 1972 “de dik dizimler hakkında bilgi vermiştir[5].

1952 ‘de Bose ve Bush ortogonal düzenler hakkında bilgi vermiş ve MOLS ile ilişkisini açıklamışlardır [6].

1963 “de Aigner, projektif düzlemler ve sonlu net hakkında bilgi vermiştir [7].

Cherowitzo 2002 “de yayınladığı makalesinde blok düzenlerine yer vermiştir [8].

1984 ‘de Stinson 6. mertebeden MOLS ‘un varolmadığının ispatını yapmıştır [9].

Bose 1963 “de güçlü düzgün grafikler (SRG) ve dengeli tasarımlar hakkında bilgi vermiştir [10].

Gönen ve Bayrak 1998 “de latisler ve dikdörtgensel latislerin kuruluşunda dik Latin kare tam setlerinin kullanımı hakkında bilgi vermiştir [11].

Gönen ve Bayrak yine 1998 “de projektif düzlemler ve geometriler hakkında bilgi vermiştir [12].

Harsberger 1947 “de dikdörtgensel latisler hakkında detaylı bilgi vermiştir [13].

1991 “de Bayrak tamamlanmamış blokları incemiştir [14].

1782 ‘de Euler $N(2)=1$ ve $N(6)=1$ olduğunu, n tek sayı olduğunda $N(4) \geq 2$ ve $N(n) \geq 2$ olduğunu göstermiştir. $n \equiv (\text{mod } 4)$ ise $N(n)=1$ dir. Bose ve Shrikhande, Euler sayıları üzerine çalışmalar yapmış, $N(22) \geq 2$ olduğunu kanıtlamışlar ve $N(66) \geq 5$ olduğunu göstermişlerdir [15].

1952 “de Harsberg ve Davis dikdörtgensel latisleri incelemiştir [16].

Hedayat ve Stufken 1999 “da dik dizimler hakkında detaylı bilgi vermektedir [17].

Hedayat Stufken ve Sloane 1999 “da dik dizimleri incelemişlerdir [18].

1982 “de Jungnickel ve Sane sonlu projektif geometrileri incelemiş netlerle ilişkisini araştırmışlardır [19].

MacNeish 1922 “de Latin kareleri incelemiş özellikle de Euler “in kareleri ile karşılaştırmıştır [20].

Bayrak ve Alhan 2002 “de dik dizimleri incelemişlerdir [21].

Mann 1950 “de varyans analizi ve düzenlerini incelemiştir [22].

1974 ‘de Hanani transversal tasarımları geniş bir biçimde incelemiştir [23].

Raghavarao, BIBD tanım ve özelliklerini vermiş BIBD ‘lerin sonlu geometriler yardımıyla oluşturulmasını ve simetrik BIBD ‘lerin varlığını göstermiştir. Ayrıca $STS(\nu)$ ‘lerden bahsetmiştir. BIBD ‘lerin $\nu, b \leq 100, r, k \leq 15$ parametre aralığı için oluşturma metotlarını listelemiştir [24].

1966 ‘da Preece, bazen, değişkenlerin birbirinden bağımsız setleri aynı parselde kullanılır. Biri birinci setten ve diğeri ikinci setten olmak üzere bu iki seriyi BIBD ‘e göre şekillendirmiş ve bu farklı iki seti aynı parselde tam bir kez göstermiştir [25].

1942 yılında Levi, sonlu projektif geometri ve afin geometri arasındaki ilişkiyi vurgulamış, 1949 ‘da Bruck ve Ryser, Bose, Sthützenberger, bu geometrileri çalışmak için isabet matrislerini kullanmışlardır [26].

1993 “de Owens Latin karelerin setleri ile projektif geometrinin ilişkisi hakkında detaylı bilgi vermiştir [27].

1963 “de Chakvarti Dik altın kareleri ve dik dizimleri incelemiş özellikle dik dizimler hakkında detaylı bilgi vermiştir [28].

Bu tez çalışması kapsamındaki konuların, bölümlere göre dağılımı “İçindekiler” tablosunda yer almaktadır.

2. LATİN KARELER VE ÜÇLÜ SİSTEMLER

2.1. Latin Karelerin Temel Özellikleri

Deneyde kullanılacak materyal iki yönden farklılık gösterdiğinde, denemeleri bu farklılıkları giderilmiş ünitelerle deneyebilmek için Latin kare düzeni kullanılır. Latin kare denemelerin (işlemlerin) her satır ve her sütunda bir defa denendiği düzendir. Bir defa denenebilme için satır ve sütun sayılarının işlem sayısı kadar olması gerekir. Buna göre Latin kare düzeninde deneme sayısının karesi kadar parsel bulunur.

Çizelge 2.1 de Latin karelerin bazı örnekleri verilmiştir.

Çizelge 2.1 Latin karelerin bazı örnekleri

				1 2 3 4 5
			4 3 2 1	5 1 2 3 4
1 2	1 2 3	1 3 2	3 4 1 2	4 5 1 2 3
2 1	3 1 2	3 2 1	2 1 4 3	3 4 5 1 2
	2 3 1	2 1 3	1 2 3 4	2 3 4 5 1
	A	B	C	D
n=2		n=3	n=4	n=5

Her n pozitif tamsayısı için, n mertebeden bir Latin kare vardır. Örneğin bir $n \times n$ diziminin (i,j) girişine sahip olduğu durumda;

$$l_{ij} = j - i + 1 \pmod{n}, \quad 1 \leq l_{ij} \leq n \text{ alınmak üzere bir Latin kareye ulaşılır.}$$

2.1. Tanım

Gurup: $A \neq \emptyset$ olmak üzere, A kümesinde tanımlı $*$ işlemi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, A kümesi $*$ işlemine göre bir gruptur denir [15].

- i. A kümesi, $*$ işlemine göre kapalıdır.
- ii. A kümesi üzerinde $*$ işleminin birleşme özelliği vardır.
- iii. A kümesi üzerinde $*$ işleminin birim (etkisiz) elemanı vardır.
- iv. A kümesi üzerinde $*$ işlemine göre her elemanın tersi vardır.

2.2. Tanım

Yarı-gurup (Quasigroup): $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ olsun $A = (a_{ij})$ $n \times n$ matrisi ile $\{1, 2, \dots, n\}$ setinin girişleri olsun. G üzerinde bir çift işlem tanımlanabilir [15].

$$g_i \circ g_j = g_k \text{ ancak ve ancak } a_{ij} = k$$

Her çift operasyon G üzerinde bir matris oluşturur.

(sol bölme) $\forall g_j, g_k \in G$ için, bir $g_i \in G$ ile $g_i g_j = g_k$ vardır.

(sağ bölme) $\forall g_i, g_k \in G$ için, bir $g_j \in G$ ile $g_i g_j = g_k$ vardır.

G 'nin bir yarı-grup olabilmesi için gerek ve yeter koşul, A matrisinin bir Latin kare olmasıdır.

Bir Latin karenin kurulması için belli yol, uygun mertebeden grup tablosunu yazmaktır. $n=4$ 'ün iki grubu düşünölsün. Toplama altında $Z_4(\text{mod } 4)$ ve bileşen yönünde toplama altında $Z_2 \times Z_2(\text{mod } 2)$ olduğu düşünöldüğünde, bunların grup tabloları çizelge 2.2'de verildiği gibidir. Çizelge kenarlarının silinmesi ve sembollerin uygun olarak yerleştirilmesi ile sırasıyla $\{1, 2, 3, 4\}$ 'e dayalı Latin kareler olan E ve F' ye ulaşılır. Latin özelliği grup aksiyomlarını sağlar.

Z_4 'ün grup tablosu

$+4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$Z_2 \times Z_2$ 'nin grup tablosu

$+2$	00	01	10	11
00	00	01	10	11
01	01	00	11	10
10	10	11	00	01
11	11	10	01	00

Çizelge 2.2. Z_4 ve $Z_2 \times Z_2$ 'nin grup tablolarından elde edilen Latin kareler

4	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
E (Z_4 ' den)			
4	1	2	3
1	4	3	2
2	3	4	1
3	2	1	4
F ($Z_2 \times Z_2$ 'den)			

Yarı-grup tablosu bir Latin karedir ve satır ve sütun kenarı ile kurulmuş bir Latin kare de bir yarı-grubu belirtir. Bu yüzden, $Q = \{ 1, 2, 3 \}$ kümesinde, Çizelge 2.1 'in A ve B kareleri sırasıyla Q_A ve Q_B yarı-gruplarını tanımlar.

Q_A 'da Latin kare

$$\begin{aligned} 1*1 &= 2*2 = 3*3 = 1 \\ 1*2 &= 2*3 = 3*1 = 2 \\ 1*3 &= 2*1 = 3*2 = 3 \end{aligned}$$

ve

Q_B 'de Latin kare

$$\begin{aligned}
1*1 &= 2*3 = 3*2 = 1 \\
1*3 &= 2*3 = 3*2 = 2 \\
1*2 &= 2*1 = 3*3 = 3
\end{aligned}$$

Bir Latin karenin satır ve sütun sembollerinin değişmesi Latin özelliğini korur.

Latin özellikleri yarı-grup özelliklerini yansıtır. Genel olarak, n mertebeli Latin kare

$$L_n \text{ için; } l_{ii} = i \quad i=1, 2, \dots, n$$

İdempotent bir yarı-grubu belirttiği için, idempotent bir Latin kare olduğu söylenir. n mertebeden bir Latin karedeki konum kümelerinin eğer, her bir satırda bir konum ve her bir sütunda bir konum ve aralarındaki konumlar $\{1,2,\dots,n\}$ kümesinin her bir elemanını bir defa içeriyorsa transversal oldukları söylenebilir. Bir transversal kare, bir transversal içeren Latin karedir. Bir idempotent kare, bir transversal, yani kendi temel köşegenini içerir. Fakat idempotent bir kare transversal olmak zorunda değildir. Çizelge 2.1 'deki A, üç transversal içerir. Sırasıyla 1, 2, 3 sembollerini içeren; (1,1),(2,3),(3,2) konumlarını bulundurur. Böylece (2,2),(3,1),(1,3) konumları ve tekrar (3,3),(1,2),(2,1) konumları. Çizelge 2.1 'deki B, D ve Çizelge 2.2 'deki F transversal karelerdir. Çizelge 2.1 'deki n=2 karesi ve Çizelge 2.2 'deki E transversal değildir. n mertebeden bir transversal kare verilmişse, ana köşegen üstündeki pozisyonları transversal hale getirmek için sütunlar değiştirilebilir. Böylelikle köşegen elemanlar kendi doğal sıralarında olurlar. Başka bir deyişle transversal bir kareden değiştirme ile idempotent bir kare elde edilir. n mertebeden bir transversal kare L' den aşağıdaki yolla n+1 mertebeden bir Latin kare M oluşturulabilir. L transversalinin şu konumlarda olduğu varsayalım;

$$(1, j_1), (2, j_2), \dots, (n, j_n)$$

bu durumda M' nin girişleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$m_{i,j_i} = n+1 \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ için}$$

$$m_{n+1,n+1} = n+1 ;$$

$$m_{i,n+1} = l_{i,j_i} = m_{n+1,j_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ için}$$

$$m_{i,j} = l_{i,j} \quad \text{diğer bütün } (i,j) \text{ çiftleri için}$$

Girişlerin $n+1$ ile yer değiştirdiği ve $1, 2, \dots, n$ elemanlarının hepsini kapsadığı için M bir Latin karedir ve L 'nin genişlemesi diye adlandırılır.

Örneğin $n=3$ olan L Latin karesi göz önüne alınsın.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ L \end{array}$$

Bundan $n=4$ olan M karesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = m_{44} = 4$$

$$m_{14} = m_{41} = l_{11} = 1$$

$$m_{24} = m_{42} = l_{22} = 2$$

$$m_{34} = m_{43} = l_{33} = 3$$

$$\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ M \end{array}$$

2.2. Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları (Balanced Incomplete Block Design - BIBD)

2.2.1. BIBD 'in koşulları ve bazı tanımlar

v, k ve λ $v > k \geq 2$ gibi pozitif tamsayı olsun. (X, A) çifti aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $B(k, \lambda; v)$ (BIBD) olarak tanımlanır.

- i. v , noktalar olarak adlandırılan elemanların bir setidir.
- ii. X 'in alt setlerinin koleksiyonu olan A , blok olarak adlandırılır.
- iii. Her blok i nokta içerir.
- iv. Farklı noktaların her çifti λ blokta içerilir.
- v. Her nokta r blokta gözüktür, $r > 0$ [4].

Bu tasarımların adındaki tamamlanmamış sözcüğü, $v > \lambda$ koşulunu ifade eder. Burada blok genişliği k , noktaların toplam sayısından azdır, böylece hiç bir blok noktaların tamamını içermez. $v = k$ kabul edilirse koşulların tamamı sağlanır. Dengeli deyimi, λ parametresinin değişmezliğini ifade eder. BIBD $2-(k, \lambda; v)$ tasarımıdır. BIBD ler genellikle (v, b, r, k, λ) -tasarımları şeklinde ifade edilir.

2.1. Örnek

$(7, 7, 3, 3, 1)$ tasarımı örneği 1,2,3,4,5,6,7 noktalarından oluşan X seti ve aşağıdaki bloklar ile verilir.

$$\{1,2,4\} \{2,3,5\} \{3,4,6\} \{4,5,7\} \{5,6,1\} \{6,7,2\} \{7,1,3\}$$

blok genişliği $k=3$ ve yinleme sayısı $r=3$ 'tür. Noktaların her çifti sadece bir blokta birlikte görülür, $\lambda=1$ 'dir.

2.2.2. BIBD 'in isabet matrisleri

Verilen (ν, b, r, k, λ) -tasarımı isabet (incidence) matrisi olarak isimlendirilen $\nu \times b$ boyutlu matris ile gösterilir. Satırlar tasarımın noktaları ile sütunlarda bloklar ile sınıflandırılmıştır. j. blokta i. nokta içerilmiş ise matrisin (i, j) hücresine 1 ve diğer hücrelerine 0 yazılır. İsbet matrisinin her bir satırı r tane 1 'e, her bir bloğu k tane 1 'e sahiptir ve ayrı satırların her çifti ortak olarak λ bloktadır.

(X, A) bir $B[k, \lambda; \nu]$ olsun, (X, A) 'nın isabet matrisi $\nu \times b$ boyutlu (0-1 matris) $M=(m_{ij})$ 'dir [2].

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & , x_i \in A_j \\ 0 & , x_i \notin A_j \end{cases} \text{ 'dir.}$$

2.2. Örnek

$B[3,1;9]$ göz önüne alınsın tasarımın isabet matrisi 9×12 'lik matristir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Latin kareler, ileriki bölümde detaylı bir şekilde ele alınacak olan üçlü sistemler (yada $B[3, \lambda; \nu]$ tasarımları) ile yakından ilişkilidirler.

2.3. Üçlü Sistemler İçin Varlık Kriteri

2.1. Teorem

Parametreleri v, b, r, k olan, Herhangi bir blok tasarımında;

$$i. vr = bk \text{ dır.} \quad (2.1)$$

Eğer blok tasarımı dengeli ise;

$$ii. \lambda(v-1) = r(k-1) \text{ dır [1].} \quad (2.2)$$

Satır ve sütun toplamı ayrı ayrı s olarak düşünüldüğünde, tasarım isabet matrisidir. Her bir satır r tane 1 içerir ve v tane satır vardır, bu yüzden $s = vr$. Her bir sütun k tane 1 içerir ve b tane sütun vardır, bu yüzden $s = bk$ olacaktır. Bundan dolayı $vr = bk$ dır.

Tasarımın blokları, Çizelge 2.1 de gösterilen matris 1 olayını veren bloklar olmasını sağlamak için yeniden düzenlenir.

Burada 1 'den r 'ye kadar olan sütunları ve 2 'den v 'ye kadar olan satırları içeren $(v-1) \times r$ ikincil matrisi bulunur. İkincil matrisin her satırı λ tane 1 içerdiği ve $v-1$ satır olduğu için, $s = \lambda(v-1)$ olur. İkincil matrisin her sütunu $k-1$ tane 0 içerdiği ve r tane sütun olduğu için, $s = r(k-1)$ olur. Bundan dolayı $\lambda(v-1) = r(k-1)$ dir.

Çizelge 2.3 v, b, r, k parametrelili tasarımın isabet matrisi

	← r →	← b - r →
1	1 1 1	0 0 0
2		
⋮		
⋮		
⋮		
v		

2.1. Teorem' den blok tasarımı v, b, r, k parametrelerinden oluşuyorsa $v.r = b.k$ dır ve λ ile dengelenirse $\lambda(v-1) = r(k-1)$ dir. Böylelikle (2.3.1) ve (2.3.2) bir BIBD için gerekli koşullardır.

Eğer ki $k=2$ ve $B[2, \lambda; v]$ tasarımı varsa, o zaman

eşitlik 2.2. $r = \lambda(v-1)$

ve eşitlik 2.1. $b = \frac{vr}{2} = \frac{v\lambda(v-1)}{2} = \lambda \binom{v}{2}$ elde edilir

$k=3$ ve $B[3, \lambda; v]$ tasarımı mevcutsa, o zaman

eşitlik 2.2. den; $r = \frac{\lambda(v-1)}{2}$

ve eşitlik 2.1. den; $b = \frac{v.r}{3} = \frac{\lambda v(v-1)}{6}$

(x, y) , x, y nin en büyük ortak bölenlerini göstermek üzere, v üzerine kısıtlamalar aşağıdaki gibidir.

- i. Eğer $\lambda \equiv 1$ yada $5 \pmod{6}$, $(\lambda, 6)=1$, ise $v \equiv 1$ yada $3 \pmod{6}$
- ii. Eğer $\lambda \equiv 2$ yada $4 \pmod{6}$, $(\lambda, 6)=2$, ise $v \equiv 0$ yada $1 \pmod{3}$
- iii. Eğer $\lambda \equiv 3 \pmod{6}$, $(\lambda, 6)=3$, ise $v \equiv 1 \pmod{2}$
- iv. Eğer $\lambda \equiv 0 \pmod{6}$, $(\lambda, 6)=6$, ise v sınırsızdır.

Ayrıca $v \geq 3$ durumu da irdelenebilir.

Eğer $(\lambda, 6) = d$ ise, bazı m tamsayıları için $\lambda = m.d$ olacaktır, o zaman bir $B[3, \lambda; \nu]$ 'nın m çarpanları dikkate alınır. Bu şekilde $\nu \geq 3$ ü göstermek için, i ' den iv ' e kadar olan koşullar yeterlidir, aşağıdaki tasarımlar da irdelenebilir.

$B[3, 1; \nu]$ ise, $\nu \equiv 1$ yada $3 \pmod{6}$;

$B[3, 2; \nu]$ ise, $\nu \equiv 0$ yada $4 \pmod{6}$;

$B[3, 3; \nu]$ ise, $\nu \equiv 5 \pmod{6}$;

$B[3, 6; \nu]$ ise, $\nu \equiv 2 \pmod{6}$, $\nu \geq 8$

Bu tasarımların her birini kurmak için ilk önce uygun bir Latin kare ve ondan elde edilen üçlü sistem dikkate alınır.

2.3. Tanım

Değişmeli Grup: Tanım 2.1 'de verilen grup aksiyomlarına ek olarak $*$ işleminin değişme özelliği de varsa $(Q, *)$ sistemi değişmeli gruptur.

2.4. Tanım

Halka: $H \neq \emptyset$ bir küme, H üzerinde Δ ve $*$ işlemleri aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $(H, \Delta, *)$ sistemi bir halkadır.

- i. (H, Δ) sistemi değişmeli gruptur.
- ii. H kümesi $*$ işlemine göre kapalıdır.
- iii. $*$ işleminin Δ işlemi üzerinde dağılma özelliği vardır.

$*$ işleminin değişme özelliği de varsa $(H, \Delta, *)$ sistemi, değişmeli halkadır.

$*$ işleminin H kümesinde birim elemanı da varsa $(H, \Delta, *)$ sistemine birimli halka denir.

Aşağıda verilen bazı durumlar için Latin kareler dikkate alınacaktır.

2.3.1. Yapı 1.

$$\nu = 6n+3, \lambda = 1;$$

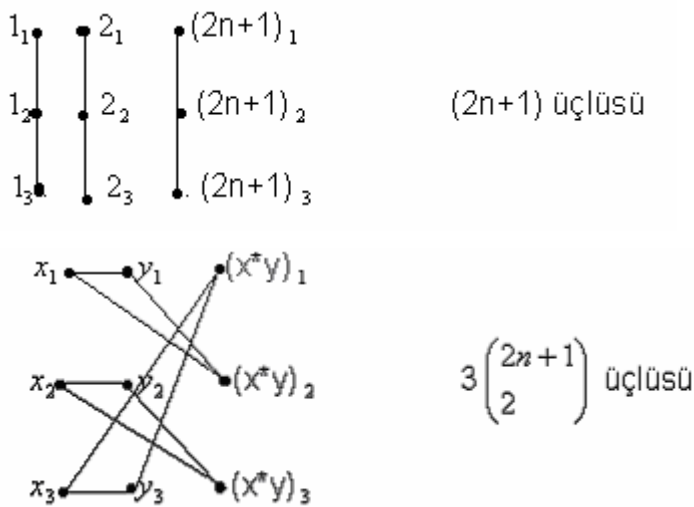
L , $2n+1$ mertebeden simetrik idempotent bir kare olsun,

$$L=[l_{ij}] \quad l_{ij} = (n+1)(i+j) \pmod{2n+1}, \quad 1 \leq l_{ij} \leq 2n+1$$

$2(n+1) \equiv 1 \pmod{2n+1}$ olduğundan Z_{2n+1} halkasında $n+1=2^{-1}$ dir. Bir başka deyişle i ve j 'nin düzeyleri alınarak l_{ij} ' bulunur. Bu yüzden L simetrik, idempotent bir Latin kareyi $Q=\{1,2,\dots,2n+1\}$ 'da $(Q,*)$ yarı-grubu belirtmektedir. $\{1,2,\dots,2n+1\}$ 'in her bir elemanının üç kopyası dikkate alınsın. Böylece $\nu=6n+3$ şunlardan oluşur.

$$\{1_1, 1_2, 1_3, 2_1, 2_2, 2_3, \dots, (2n+1)_1, (2n+1)_2, (2n+1)_3\}$$

Çizelge 2.4 'de $B[3,1;6n+3]$ tasarımının blokları verilmiştir. Şekil 2.1 'de anlatılanlar görülmektedir.



Şekil 2.1. Yapı I 'in üçlüsü

Çizelge 2.4 $B[3,1;6n+3]$ tasarımının blokları

x_1, x_2, x_3	$1 \leq x \leq 2n+1$
$\left. \begin{array}{l} x_1, y_1, (x * y)_2 \\ x_2, y_2, (x * y)_3 \\ x_3, y_3, (x * y)_1 \end{array} \right\}$	$1 \leq x < y \leq 2n+1$

Bloklar;

$$b = (2n+1) + 3 \binom{2n+1}{2} = 6n^2 + 5n + 1 = \frac{(6n+3)(6n+2)}{6}$$

olacaktır.

Bunlar her bir elemanı r kez içermektedir;

$$r = 1 + 2n + \frac{(6n+2)}{2}$$

Yapılması gereken sadece tasarımın dengelenmiş olduğunu kontrol etmektir.

x_i, x_j elemanları $\{x_1, x_2, x_3\}$ bloğunda bir araya gelirler; x_i, y_i elemanları $\{x, x_i, (x * y)_{i+1(\text{mod } 3)}\}$ bloğunda bir araya gelirler. Böylelikle elemanların her ikilisi, en azından bir blokta birlikte yer alırlar.

Fakat bu mevcut ikililerin toplam sayısıdır ve bir tanesi varolana kadar hiç biri tekrarlanmaz. Böylelikle tasarım $\lambda = 1$ ile dengelenmiş olur.

2.3.2. Yapı 2.

$$v = 6n + 1, \quad \lambda = 1;$$

İdempotent ve simetrik bir Latin kare tek mertebeye sahip olmalıdır. Bu yapı için 2^n mertebeden simetrik bir Latin kareye ihtiyaç vardır. Grup tablosunu $(\text{mod } 2^n)$ olarak alınır ve elemanların yeniden adlandırılması $M = [m_{ij}]$ aşağıdaki yolla yapılır.

Eğer $i+j$ çiftse, o zaman $1 \leq m_{ij} \leq n$, $m_{ij} = \frac{1}{2}(i+j) \pmod{2^n}$

Eğer $i+j$ tekse, o zaman $n+1 \leq m_{ij} \leq 2n$, $m_{ij} = \frac{1}{2}(i+j+1) \pmod{2^n}$

M , $Q = \{1, 2, \dots, 2n\}$ 'de $(Q, *)$ simetrik yarı-grubu gösterir. Q 'nun elemanlarının her birinin üç kopyası ek bir eleman ∞ ile alınır ve böylelikle $\nu = 6n + 1$ elemanlı küme şunlardan oluşur.

$$\{1_1, 1_2, 1_3, 2_1, 2_2, 2_3, \dots, (2n)_1, (2n)_2, (2n)_3, \infty\}$$

$B[3, 1; 6^n + 1]$ tasarımının blokları Çizelge 2.5 'de verilmiştir.

Çizelge 2.5. $B[3, 1; 6n+1]$ tasarımının blokları

x_1, x_2, x_3	$1 \leq x \leq n$
$\left. \begin{array}{l} \infty, x_1, (x-n)_2 \\ \infty, x_2, (x-n)_3 \\ \infty, x_3, (x-n)_1 \end{array} \right\}$	$n+1 \leq x \leq 2n$
$\left. \begin{array}{l} x_1, y_1, (x*y)_2 \\ x_2, y_2, (x*y)_3 \\ x_3, y_3, (x*y)_1 \end{array} \right\}$	$1 \leq x < y \leq 2n$

2.3. Örnek

$n=2$ olsun $(\text{mod } 4)$ grup tablosu Çizelge 2.6 'da verilmiştir. M Latin karesi aşağıdaki gibi elde edilir.

Eğer $i+j \equiv 2 \pmod{4}$, ise $m_{ij} = 1$	$m_{11} = m_{33} = m_{24} = m_{42} = 1$
Eğer $i+j \equiv 1 \pmod{4}$, ise $m_{ij} = 3$	$m_{41} = m_{14} = m_{23} = m_{32} = 3$
Eğer $i+j \equiv 4 \pmod{4}$, ise $m_{ij} = 2$	$m_{22} = m_{44} = m_{13} = m_{31} = 2$
Eğer $i+j \equiv 3 \pmod{4}$, ise $m_{ij} = 4$	$m_{12} = m_{21} = m_{34} = m_{43} = 4$

Çizelge 2.6. $(\text{mod } 4)$ 'ün grup tablosu

$\begin{matrix} + \\ 4 \end{matrix}$	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Yapı 2, Çizelge 2.7 'deki gibi bloklarla $B[3,1;13]$ tasarımını vermektedir.

Çizelge 2.7. $B[3,1;13]$ tasarımının blokları

$1_1, 1_2, 1_3,$	$1_1, 2_1, 4_2,$	$2_1, 3_1, 3_2$
$2_1, 2_2, 2_3,$	$1_2, 2_2, 4_3,$	$2_2, 3_2, 3_3$
	$1_3, 2_3, 4_1,$	$2_3, 3_3, 3_1$
$\infty, 3_1, 1_2,$	$1_1, 3_1, 2_2,$	$2_1, 4_1, 1_2$
$\infty, 3_2, 1_3,$	$1_2, 3_2, 2_3,$	$2_2, 4_2, 1_3$
$\infty, 3_3, 1_1,$	$1_3, 3_3, 2_1,$	$2_3, 4_3, 1_1$
$\infty, 4_1, 2_2,$	$1_1, 4_1, 3_2,$	$3_1, 4_1, 4_2$
$\infty, 4_2, 2_3,$	$1_2, 4_2, 3_3,$	$3_2, 4_2, 4_3$
$\infty, 4_3, 2_1,$	$1_3, 4_3, 3_1,$	$3_3, 4_3, 4_1$

Yapılması gereken tasarımın dengelenmiş olup olmadığını kontrol etmektir. x_i, x_j elemanları $\{x_1, x_2, x_3\}$ bloğunda bir araya gelirler; ∞, x_i elemanları $\{\infty, x_i, (x - n)_{i+1(\bmod 3)}\}$ bloğunda bir araya gelirler; x_i, y_i elemanları $\{x_i, y_i, (x * y)_{i+1(\bmod 3)}\}$ bloğunda bir araya gelirler. Böylelikle elemanların her ikilisi, en azından bir blokta yer alırlar. Böylece tasarım $\lambda = 1$ ile dengelenmiş olur.

2.3.3. Yapı 3.

$$\nu = 3n, \quad \lambda = 2 \text{ durumu}$$

$n=2$ için $B[3,2;6]$ tasarımı kurulmaya çalışılacaktır.

2.4. Örnek

$B[3,2;6]$ düşünölsün.

$$123, 124, 135, 146, 156, 236, 245, 256, 345, 346 \quad (2.3)$$

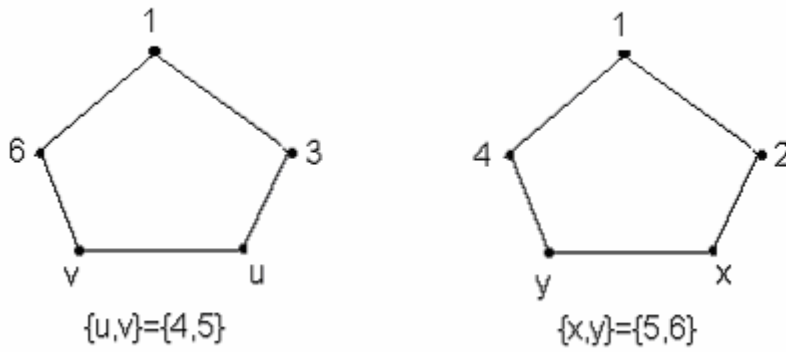
olsun. 1 işlemlerinin yakınlık grafiğı düşünölsün. Bir grafikteki bir zirvenin düğümü, onunla ilişkili olan kenarların sayısıdır; bu grafiğın her biri düğümü $\lambda = 2$ ile olan 5 dikey düzlemi vardır. Bu yüzden Şekil 2.2 ‘de gösterilen şekillerin ikisinden biri alınabilir. Gösterilen iki grafik, 1 işlemlerini içermesi gereken tasarımın 5 bloğunu gösterir, (a) durumunda 2 ve 3 işlemlerinden her biri iki kez görölür, böylece her biri üç kez daha gözökmelidir. Bu yüzden tasarımda 5 ek bloğa ihtiyaç vardır. Bu imkansızdır ve (a) ‘daki tasarım tamamlanamaz.

Şekil 2.2. $B[3,2;6]$ tasarımının 5 bloğunun iki ayrı gösterimi

Böylece her değişiklik (b) durumunda gösterilen yakın grafiğe sahip olmalıdır. (b) durumunda 5 ek blok

23*, 2**, 2**, 3**, 3**

şeklinde olmalıdır, buradaki yıldızlar, her biri 4, 5 ve 6 olan üç tekrarla doldurulacak blokları belirtir. Geri kalan yerler deneme yanılma ile doldurulabilir fakat 2 ve 3 işlemlerinin yakınlık grafiklerini göz önüne almak daha açık olabilir. Şekil 2.2 'de olduğu gibi ve her biri varolan bloklardan ayrı bir şekilde sınıflandırılabilir. Bu durumda Şekil 2.3 dikkate alınır.



Şekil 2.3. Şekil 2.1 in sınıflandırılmış hali

Eğer $u=4$ olursa, o zaman, düzendeki 234 bloğu elde edilir, bu da kenar 24 3. grafiğin yakınlığında olmak zorunda kalır, bu imkansızdır. Böylece 235, 245, 246 blokları bulunur ve $u=5$, $v=6$ olur. Şimdi kalan bloklar oluşturulabilir. Bunlar, 346, 356 dır. Böylece $x=5$, $y=6$ olur. Bu verilen parametrelerle, tek BIBD elde edildi, blokları şöyledir.

$$123, 134, 145, 156, 126, 235, 245, 246, 346, 356 \quad (2.4)$$

Dikkat edilmelidir ki, eğer (23)(56) permütasyonu

$$123, 124, 135, 146, 156, 236, 245, 256, 345, 346 \quad (2.3)$$

eşitlik 2.3 'ün bloklarına uygulanırsa, eşitlik 2.4 elde edilir.

Eğer bir ν setinin, k alt setini $\binom{\nu}{k}$ seçilirse, o zaman kesinlikle $b = \binom{\nu}{k}$, $r = \binom{\nu-1}{k-1}$ tasarımına sahip olunur. (çünkü her bir değişiklik, diğer $\nu-1$ arasından seçilen $k-1$ değişiklikleri ile k alt sette gerçekleşir.) ve benzer olarak $\lambda = \binom{\nu-2}{k-2}$ olur. Bu tasarım daima var olur. Fakat (2.3) ve (2.4) tasarımları irdelendiğinde eğer, $\binom{6}{3} = 20$ blok elde etmek için $\nu = 6, k = 3$ olursa o zaman bir $B[3,2;6]$ tasarımını oluşturmak için (Çizelge 2.8 'de gösterildiği gibi) onlardan 10 'u seçilebilir. Bu sebeple kalan 10 blok gerçekte birebir örten olan aynı parametrelili bir tasarım oluşturur.

$B[3,4;6]$ tasarımının blokları aşağıda verilmiştir. Bunlardan 10 'u seçilir ve seçilen 10 blok $B[3,2;6]$ tasarımının bloklarını oluşturur.

Çizelge 2.8. $B[3,2;6]$ tasarımının blokları

$B_1 : 123$	$B_6 : 346$	$B_{11} : 135$	$B_{16} : 236$
$B_2 : 456$	$B_7 : 126$	$B_{12} : 246$	$B_{17} : 146$
$B_3 : 124$	$B_8 : 345$	$B_{13} : 136$	$B_{18} : 235$
$B_4 : 356$	$B_9 : 134$	$B_{14} : 245$	$B_{19} : 156$
$B_5 : 125$	$B_{10} : 256$	$B_{15} : 145$	$B_{20} : 234$
$B[3,4;6]$ tasarımının blokları			
$B_1 : 125$	$B_6 : 234$		
$B_2 : 126$	$B_7 : 235$		
$B_3 : 134$	$B_8 : 246$		
$B_4 : 136$	$B_9 : 356$		
$B_5 : 145$	$B_{10} : 456$		
$B[3,2;6]$ tasarımının blokları			

$n > 2$ için, L , yarı-grup $(Q, *)$ 'ı gösteren ve daha önceden olduğu gibi $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, $1 \leq x \leq n$ sembollerini göz önünde bulundurarak idempotent bir Latin kare olsun. Bu $\nu = 3n$ değişkenlerindeki $B[3,2;3n]$ tasarımı Çizelge 2.9 'de blokları ile verilmiştir.

Çizelge 2.9. $B[3,2;3n]$ tasarımının blokları

x_1, x_2, x_3	$1 \leq x \leq n$
$\left. \begin{array}{l} x_1, y_1, (x * y)_2 \\ x_2, y_2, (x * y)_3 \\ x_3, y_3, (x * y)_1 \end{array} \right\}$	$1 \leq x \leq n, \quad 1 \leq y \leq n, \quad x \neq y$

2.5. Örnek

Çizelge 2.10 'da L ve $n=4$ durumu için M idempotent Latin karelerini vermektedir. Çizelge 2.11 'de bir $B[3,2;12]$ tasarımını oluşturarak Yapı 3 ile M 'den elde edilmiştir.

Çizelge 2.10. $n=3$ ve $n=4$ için Latin kareler

1	3	2		1	4	2	3
3	2	1		3	2	4	1
2	1	3		4	1	3	2
				2	3	1	4
	L				M		

Çizelge 2.11. B[3,2;12] tasarımının blokları

$1_1, 1_2, 1_3$	$1_1, 2_1, 4_2$	$1_2, 2_2, 4_3$	$1_3, 2_3, 4_1$
$2_1, 2_2, 2_3$	$1_1, 3_1, 2_2$	$1_2, 3_2, 2_3$	$1_3, 3_3, 2_1$
$3_1, 3_2, 3_3$	$1_1, 4_1, 3_2$	$1_2, 4_2, 3_3$	$1_3, 4_3, 3_1$
$4_1, 4_2, 4_3$	$2_1, 2_1, 3_2$	$2_2, 2_2, 3_3$	$2_3, 2_3, 3_1$
	$2_1, 3_1, 4_2$	$2_2, 3_2, 4_3$	$2_3, 3_3, 4_1$
	$2_1, 4_1, 1_2$	$2_2, 4_2, 1_3$	$2_3, 4_3, 1_1$
$1_1, 1_2, 1_3$	$3_1, 1_1, 4_2$	$3_2, 1_2, 4_3$	$3_3, 1_3, 4_1$
$2_1, 2_2, 2_3$	$3_1, 2_1, 1_2$	$3_2, 2_2, 1_3$	$3_3, 2_3, 1_1$
$3_1, 3_2, 3_3$	$3_1, 4_1, 2_2$	$3_2, 4_2, 2_3$	$3_3, 4_3, 2_1$
$4_1, 4_2, 4_3$	$4_1, 1_1, 3_2$	$4_2, 1_2, 3_3$	$4_3, 1_3, 3_1$
	$4_1, 2_1, 3_2$	$4_2, 2_2, 3_3$	$4_3, 2_3, 3_1$
	$4_1, 3_1, 1_2$	$4_2, 3_2, 1_3$	$4_3, 3_3, 1_1$

2.3.4. Yapı 4.

$$\nu = 3n + 1, \quad \lambda = 2$$

$n=2$ için daha önce de olduğu gibi bir Latin kare yoktur, ancak bir B[3,2;7] tasarımı oluşturulabilir.

$n>2$ için, L , n mertebeden bir Latin kare olsun ve bir ek sembol ile $\infty, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \dots, \{x_n\}$ sembolleri bir arada düşünölsün. Çizelge 2.12 de bir B[3,2;3ⁿ+1] tasarımı, bu $\nu = 3n + 1$ işlemleri üzerinde öçlüler tarafından verilmiştir.

Bu tasarım;

$$b=4n+3n(n-1)=2(3n+1)3n/6 \quad \text{blok}$$

$$\text{ve } r=3+2(n-1)+(n-1)=3n \text{ tekrara sahiptir.}$$

Elemanların her bir çifti en az bir blokta yer alır, mesela; $\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}$ ve $\{x_i, y_i, \infty\}$ bloklarında $x_i, x_j; \{x_i, y_i, (x * y)_{i+1(\text{mod } 3)}\}$ ve $\{y_i, x_i, (y * x)_{i+1(\text{mod } 3)}\}$ bloklarında x_i, y_i ; herhangi diğer eleman ikilisi $w * x = z$ 'de $\{w_i, x_i, (w * x)_{i+1(\text{mod } 3)}\}$ ve $x * y = z$ 'de $\{x_i, y_i, (x * y)_{i+1(\text{mod } 3)}\}$ bloklarında $x_i, z_{i+1(\text{mod } 3)}$ yeniden adlandırılır. Tasarımdaki ikililerin toplam sayısı $3b=3n(3n+1)$; $3n+1$ elemanlarından seçilen ayrı ikililerin toplam sayısı $(3n+1)3n/2$ 'dir. Her bir ikili en azından iki kere oluştuğu için, hiçbir ikili ikiden fazla oluşmaz. Dolayısıyla tasarım $\lambda = 2$ ile dengelenmiş olur.

Çizelge 2.12. $B[3,2;3n+1]$ tasarımının blokları

$\left. \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_3 \\ \infty & x_1 & x_2 & x_2 \\ \infty & x_2 & x_3 & x_3 \\ \infty & x_3 & x_1 & x_1 \end{array} \right\} 1 \leq x \leq n, \quad \left. \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & (x * y)_2 \\ x_2 & y_2 & (x * y)_3 \\ x_3 & y_3 & (x * y)_1 \end{array} \right\} 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq 3n+2$

2.3.5. Yapı 5

$$\nu = 6n + 5, \quad \lambda = 3$$

Burada modüler aritmetik $(\text{mod } \nu)$ içindeki tüm üçlülerde bloklar şu şekilde alınır.

$$\{x, x + y, x + 2y\}, 1 \leq x \leq 6n + 5, 1 \leq y \leq 3n + 2$$

$b=(6^n+5)(3^n+2)$ şeklinde bloklar vardır. Her bir eleman tam olarak $r=3(3^n+2)$ kere oluşur. ν elemanlarından seçilen ikililerin sayısı $(6^n+5)(3^n+2)$ ve tüm bloklardaki elemanların sayısı $3(6^n+5)(3^n+2)$ 'dir. y 'den farklı herhangi iki eleman i, j üç blokta oluşur.

$$\{i, i + y = j, i + 2y\}, \{i - y, i, i + y = j\}, \{j, j + (3n + 2)y, j + (6n + 4)y = j - y = i\}$$

Böylece hiçbir ikili üç defadan fazla oluşmaz, dolayısıyla $\lambda = 3$ 'tür.

2.3.6. Yapı 6.

$$\nu = 3n + 2, \lambda = 6$$

$B[3,6;3^n+2]$ tasarımından faydalanarak bir Latin kare ile sisteme ulaşılabilir.

$$\{1_1, 1_2, 1_3, 2_1, 2_2, 2_3, \dots, n_1, n_2, n_3, \infty_1, \infty_2\}$$

Çizelge 2.13 'de $B[3,6;3^n+2]$ tasarımının üçlülere verilmiştir.

Çizelge 2.13. $B[3,6;3n+2]$ tasarımının blokları

x_1	y_1	$(x * y)_2$	$\left. \begin{array}{l} x_2 \quad y_2 \quad (x * y)_3 \\ x_3 \quad y_3 \quad (x * y)_1 \end{array} \right\} 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n, x \neq y$		
x_2	y_2	$(x * y)_3$			
x_3	y_3	$(x * y)_1$			
∞_1	x_1	x_2	∞_2	x_1	x_2
∞_1	x_2	x_3	∞_2	x_2	x_3
∞_1	x_3	x_1	∞_2	x_3	x_1
$\left. \begin{array}{l} \infty_1 \quad x_1 \quad x_2 \\ \infty_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \infty_1 \quad x_3 \quad x_1 \end{array} \right\} 2 \leq x \leq n$					
∞_1	∞_2	1_1	∞_1	1_1	1_2
∞_1	∞_2	1_2	∞_1	1_2	1_3
∞_1	∞_2	1_3	∞_1	1_3	1_1
$\infty_2 \quad 1_1 \quad 1_2 \quad 1_3 \quad 1_1 \quad 1_2 \quad 1_3$					

Yapı 1, 2, 3, 4, 5, 6 dan aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Bu yapılar, λ ve ν 'nün farklı olduğu durumlarda ki üçlü sistemleri elde etmede kullanılır.

2.2. Teorem

Bir $B[3, \lambda; \nu]$ tasarımı ancak ve ancak

$$\lambda(\nu - 1) \equiv 0 \pmod{2} \text{ ve } \lambda\nu(\nu - 1) \equiv 0 \pmod{6} \text{ durumunda oluşur [1].}$$

2.4. Basit Üçlü Sistemler

Bir önceki bölümde bir çok yapı, tekrarlı blok tasarımlarını göstermektedir. Tekrarlı blok içermeyen bir tasarım “basit” diye adlandırılır. Bu bölümde, basit $B[3,2;\nu]$ tasarımları verilecektir.

2.4.1. Yapı 7.

$$\nu = 6n, \lambda = 2$$

$n=1$, $\nu = 6$ için $\lambda = 2$ ’li basit bir üçlü sistem elde edilir.

$n=2$, $\nu = 12$ için önce basit $B[3,2;4]$ tasarımını şu şekilde kurulabilir.

123, 124, 134, 234

Sırası ile $\{5, 6, 7, 8\}$ ve $\{9, A, B, C\}$ kümelerine dayanan tasarımlar kullanılır. Kalan bloklar, bu üç kümenin her birinden bir elemana sahip olmalıdır. Tasarım Çizelge 2.14 ‘de gösterilmektedir.

Çizelge 2.14. $B[3,2;12]$ tasarımı

123	567	9AB	159	25A	35B	45C	15B	25C	359	45A
124	568	9AC	16A	26B	36C	469	16C	269	36A	46B
134	578	9BC	17B	27C	379	47A	179	27A	37B	47C
234	678	ABC	18C	289	38A	48B	18A	28B	38C	489

2.4.2. Yapı 8.

$$\nu = 6n + 3, \lambda = 2$$

$2n+1$ mertebeden ve her x için $1 \leq x \leq 2n+1$ için idempotent, simetrik bir Latin kare alınır. x_i , $i=1, 2, 3$ sembolleri seçilir. Bloklar Çizelge 2.15 ‘de verilmiştir.

Çizelge 2.15. $B[3,2;6n+3]$ tasarımının blokları

x_1	x_2	x_3	$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1 \leq x \leq 2n+1$
x_1	x_2	$(x+1)_3$	
x_1	y_1	$(x * y)_2$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} 1 \leq x < y \leq 2n+1$
x_1	y_1	$((x * y) + 1)_3$	
x_2	y_2	$(x * y)_3$	
x_2	y_2	$(x * y)_1$	
x_3	y_3	$(x * y)_1$	
x_3	y_3	$((x * y) - 1)_2$	

2.6. Örnek

$n=1, v=9, \lambda=2$ alınarak Çizelge 2.1 'in B karesinden başlanabilir.

$B[3,2;9]$ tasarımının blokları Çizelge 2.16 'de verilmiştir.

Çizelge 2.16. $B[3,2;9]$ tasarımının blokları

			1_1	1_2	1_3	1_1	2_1	3_2	1_1	3_1	2_2	2_1	3_1	1_2
			1_1	1_2	2_3	1_1	2_1	1_3	1_1	3_1	3_3	2_1	3_1	2_3
1	3	2	2_1	2_2	2_3	2_1	2_2	3_3	1_2	3_2	2_3	2_2	3_2	1_3
3	2	1	2_1	2_2	3_3	2_1	2_2	3_1	1_2	3_2	2_1	2_2	3_2	1_1
2	1	3	3_1	3_2	3_3	3_1	2_3	3_1	1_3	3_3	2_1	2_3	3_3	1_1
	B		3_1	3_2	1_1	3_1	2_3	2_2	1_3	3_3	1_2	2_3	3_3	3_2

2.5. Stenier Üçlü Sistemleri (Stenier Triple Systems-STS)

$k=3$ ve $\lambda=1$ iken dengeli tamamlanmamış blok tasarımları "Stenier üçlü sistemleri," (Stenier triple systems) olarak adlandırılır. Çünkü bloklar üçlüdür ve noktaların her çifti kesinlikle bir üçlüde görünür.

BIBD 'de $k=3$ ve $\lambda = 1$ iken;

$$r = \frac{(\nu-1)}{2} \text{ ve } b = \frac{\nu(\nu-1)}{6} \text{ dır.}$$

r pozitif tamsayı olduğundan, ν tek sayı olmalıdır. b pozitif tamsayı ve ν tek sayı olduğundan ya $3 \mid \nu$ 'yü böler ya da $6, (\nu - 1)$ 'i böler. Yani;

$$\nu \equiv (3 \bmod 6) \text{ yada } \nu \equiv (1 \bmod 6) \text{ dır [8].}$$

2.5.1. Stenier üçlü sistemde kullanılan Bose ve Skolem kuruluşları

2.5.1.1. Bose kuruluşu

$S(2, 3; \nu)$ Stenier sistemine, Stenier üçlü sistem adı verilir. $STS(\nu)$ nin olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verildiği gibidir.

$$\nu \geq 3 \text{ ve } \nu \equiv 1, 3 \bmod(6)$$

Bose yöntemi ile Stenier üçlü sistem kurulurken simetrik, idempotent, yarıgrup sistemlerden yararlanılır.

Simetrik, idempotent, yarıgrup sistem elde etmek için x, y uygulanan işlem aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$xoy = \frac{n+1}{2}((x+y) \bmod n)$$

Bu durumda Bose kuruluşu yardımıyla bir Stenier sistem kurarken kullanılan notasyonlar şöyle ifade edilebilir.

X ; simetrik, idempotent, yarıgrupun satır ve sütun sayısı,

Z_3 ; mod 3 e göre tamsayılar kümesi (0,1,2)

$Y = X \times Z_3$; Stenier üçlü sistemdeki nokta sayısıdır.

Bu durumda $x \in X$ olmak üzere tasarıma ait blokların ilk kısmı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$A_x = \{(x,0), (x,1), (x,2)\} (x \in X)$$

İkinci kısmı ise $x, y \in X$ ve $x < y$ ve her $i \in Z_3$ olmak üzere;

$$B_{x,y,i} = \{(x,i), (y,i), (xoy, (i+1) \bmod 3)\}$$

şeklinde ifade edilir.

Bu durumda bloklara ait küme son olarak yukarıda ifade edilen iki kümenin birleşimi olarak B^* ile gösterilir ve aşağıda ifade edildiği gibidir.

$$B^* = \{A_x : x \in X\} \cup \{B_{x,y,i} : x, y \in X \text{ ve } x < y \text{ ve her } i \in Z_3\}$$

2.7. Örnek

Bose kuruluşu yardımıyla bir STS(21) aşağıdaki gibi elde edilir.

1.adım:

ilk olarak $n=7$ iken simetrik idempotent yarıgrup elde etmeye çalışalım

Simetrik, idempotent, yarıgrup (latin kare) sistem elde etmek için $x;y$ uygulanan işlem aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$xoy = \left(\frac{n+1}{2}(x+y)\right) \bmod n$$

2.8. Örnek

$$2o4 = \left(\frac{7+1}{2}(2+4)\right)_{\text{mod}7=3}$$

Bu şekilde 7x7 boyutlu simetrik, yarıgrupun 49 tane elemanı elde edilir.

0415263

4152630

1526304

5263041

2630415

6304152

3041526

bu simetrik yarıgrup yardımıyla elde edilen bloklar aşağıdaki gibidir.

2. adım:

a) $x \in X$ olmak üzere yani $x < 7$ iken;

$$A_x = \{(x,0), (x,1), (x,2)\} (x \in X)$$

Tasarıma ilişkin blokların ilk kısmı olan 7 blok bulunur.

Bu bloklar;

$$\left. \begin{array}{l} B_1 = A_{x=0} = \{(0,0), (0,1), (0,2)\} \\ B_2 = A_{x=1} = \{(1,0), (1,1), (1,2)\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_7 = A_{x=7} = \{(6,0), (6,1), (6,2)\} \end{array} \right\} \text{ bu şekilde 7 tane blok oluşturulur.}$$

b) İkinci kısmı ise $x, y \in X$ ve $x < y$ ve her $i \in Z_3$ olmak üzere yani $i=0,1,2$ ve $x=(0,1,2,3,4,5)$ ve $y=(1,2,3,4,5,6)$ olmak üzere,

$$B_{x,y,i} = \{(x,i), (y,i), (xoy) \bmod 3\}$$

yardımla tasarıma ilişkin blokların ikinci kısmı meydana getirilir. Buradan tasarıma ilişkin 63 blok bulunur.

$$B_{x,y,i} = \{(x,i), (y,i), (xoy) \bmod 3\} = B_{0,1,0} = \{(0,0), (1,0), (0o1) \bmod 3\} = \{(0,0), (1,0), (41)\}$$

$$\left. \begin{array}{l} B_7 = B_{0,1,0} = \{(0,0), (1,0), (4,1)\} \\ B_8 = B_{1,1,0} = \{(1,0), (1,0), (1,1)\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{70} = B_{5,6,2} = \{(5,2), (6,2), (2,0)\} \end{array} \right\} \text{ bu şekilde 63 tane blok oluşturulur.}$$

Sonuçta elde edilen düzenin 70 tane bloğu vardır ve parametreleri de $\nu=21$, $k=3$, $\lambda=1$, $b=70$, $r=10$ olarak elde edilen STS(21) tasarımıdır.

2.5.2.2. Skolem kuruluşu

Skolem kuruluşu Bose kuruluşunun modifiye edilmesiyle meydana gelir. n çift sayı olan simetrik, idempotent, yarıgrup mevcut değilken Bose kuruluşu Skolem kuruluşu

olarak yeniden adlandırılır. Skolem kuruluşunda simetrik, idempotent, yarıgrup yerine yarı idempotent, simetrik, yarıgrup kullanılır.

Simetrik, yarı idempotent, yarıgrup elde etmek için x, y yardımıyla yarıgruba ilişkin işlem aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$xoy = \pi((x + y) \bmod n)$$

Burada $\pi(x)$ aşağıdaki gibi verilir.

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , x \text{ tek ise} \\ \frac{x+n-1}{2} & , x \text{ çift ise} \end{cases}$$

2.9. Örnek

$n=6$ iken $\pi(0)=0, \pi(1)=3, \pi(2)=1, \pi(3)=4, \pi(4)=2, \pi(5)=5$ olarak elde edilir.

Skolem yöntemi ile $STS(V)$ kurarken kullanılan notasyonlar ise $V=6m+1$ ve $m \geq 1$ olmak üzere ;

$$X = \{0, 1, \dots, 2m+1\}$$

$$Z_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$Y = X \times Z_3 = \{(0, 1, \dots, 2m+1) \times (0, 1, 2)\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada düzene ait blokların oluşumu 3 kısımdan meydana gelir. birinci kısımdaki bloklar için $0 \leq x \leq m-1$ olmak üzere;

$$A_x = \{(x, 0), (x, 1), (x, 2)\}$$

İkinci kısımdaki bloklar için her $x, y \in \{0, 1, \dots, 2m+1\}$ olmak üzere $x < y$, $i \in Z_3$ olmak üzere;

$$B_{x,y,i} = \{(x,i), (y,i), (xoy(i+1) \bmod 3)\}$$

ve son kısmın blokları için ise $0 \leq x \leq m-1$ ve her $i \in Z_3$ olmak üzere ;

$$C_{x,i} = \{\infty, (x+t, i), (x, (i+1) \bmod 3)\}$$

yararlanınız. Bu durumda düzenin bloklarına ait kümeyi aşağıda ifade edildiği gibi vermek uygun olur.

$$B^* = \{A_x : 0 \leq x \leq m-1\} \cup \{B_x : x, y \in Z_2, x < y, i \in Z_3\} \cup \{C_{x,i} : 0 \leq x \leq m-1 \text{ ve her } i \in Z_3\} \text{ olur.}$$

2.10. Örnek

STS(19) tasarımını Skolem metodu yardımıyla kurmaya çalışılsın.

1.adım:

İlk olarak $n=6$ iken yarı idempotent yarıgrup elde etmeye çalışalım. Bu durumda

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , x \text{ tek ise} \\ \frac{x+n-1}{2} & , x \text{ çift ise} \end{cases}$$

olmak üzere $\pi(x)$ ler $\pi(0) = 0$ $\pi(1) = 3$ $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 4$, $\pi(4) = 2$, $\pi(5) = 5$ olarak elde edilir.

2. adım:

$xoy = \pi((x+y) \bmod n)$ yardımıyla yarı idempotent, yarıgrup oluşturmaya çalışılsın.

$$1o3 = \pi((1+3) \bmod 6) = \pi(4) = 2$$

Bu şekilde aşağıda ifade edilen 7x7 boyutlu yarı idempotent, yarıgrup elde edilir.

$$031425 \rightarrow 0o5 = \pi(0 + 5) \bmod 6 = \pi(5) = 5$$

314250

142503

425031

250314

503142

olarak elde edilir. Bu yarı idempotent yarıgrup yardımıyla elde edilen bloklar aşağıdaki gibidir.

3. adım:

a) $0 \leq x \leq m-1$ olmak üzere $0 \leq x \leq 2$

$$A_x = \{(x,0), (x,1), (x,2)\}$$

yardımla tasarıma ilişkin blokların birinci kısmı olan ilk 3 blok bulunur.

Bu bloklar ;

$$B_1 = A_{x=0} = \{(0,0), (0,1), (0,2)\}$$

$$B_2 = A_{x=1} = \{(1,0), (1,1), (1,2)\}$$

$$B_3 = A_{x=2} = \{(2,0), (2,1), (2,2)\}$$

b) $\forall x, y \in \{0, 1, \dots, 2m+1\} \ x < y, i \in Z_3$ olmak üzere; yani $i=0, 1, 2$, $x=(0, 1, 2, 3, 4)$ ve $y=(1, 2, 3, 4, 5)$ olmak üzere;

$$B_{x,y,i} = \{(x, i), (y, i), (xoy(i+1) \bmod 3)\}$$

yardımla tasarıma ilişkin blokların ikinci kısmı bulunur. Burada 45 blok bulunur.

$$B_4 = B_{0,1,0} = \{(0,0), (1,0), (0+1) \bmod 3\} = \{(0,0), (1,0), (3,1)\}$$

$$B_5 = B_{0,2,0} = \{(0,0), (2,0), (1,1)\} \ B_6 = B_{0,3,0} = \{(0,0), (3,0), (4,1)\}$$

$$B_7 = B_{0,4,0} = \{(0,0), (4,0), (2,1)\} \ B_8 = B_{0,5,0} = \{(0,0), (5,0), (5,1)\}$$

$$B_9 = B_{0,1,1} = \{(0,1), (1,1), (3,2)\} \ B_{10} = B_{0,2,1} = \{(0,1), (2,1), (1,2)\}$$

$$B_{11} = B_{0,3,1} = \{(0,1), (3,1), (4,2)\} \ B_{12} = B_{0,4,1} = \{(0,1), (4,1), (2,2)\}$$

$$B_{13} = B_{0,5,1} = \{(0,1), (5,1), (5,2)\} \ B_{14} = B_{0,1,2} = \{(0,2), (1,2), (3,0)\}$$

$$B_{15} = B_{0,2,2} = \{(0,2), (2,2), (1,0)\} \ B_{16} = B_{0,3,2} = \{(0,2), (3,2), (4,0)\}$$

$$B_{17} = B_{0,4,2} = \{(0,2), (4,2), (2,0)\} \ B_{18} = B_{0,5,2} = \{(0,2), (5,2), (5,0)\}$$

$$B_{19} = B_{1,2,0} = \{(1,0), (2,0), (4,1)\} \ B_{20} = B_{1,3,0} = \{(1,0), (3,0), (2,1)\}$$

$$B_{21} = B_{1,4,0} = \{(1,0), (4,0), (5,1)\} \ B_{22} = B_{1,5,0} = \{(1,0), (5,0), (0,1)\}$$

$$B_{23} = B_{1,2,1} = \{(1,1), (2,1), (4,2)\} \ B_{24} = B_{1,3,1} = \{(1,1), (3,1), (2,2)\}$$

$$B_{25} = B_{1,5,1} = \{(1,1), (5,1), (0,2)\} \ B_{26} = B_{1,2,2} = \{(1,2), (2,2), (4,0)\}$$

$$B_{27} = B_{1,3,2} = \{(1,2), (5,2), (2,0)\} \ B_{28} = B_{1,4,2} = \{(1,2), (4,2), (5,0)\}$$

$$B_{29} = B_{1,5,2} = \{(1,2), (5,2), (0,0)\} \ B_{30} = B_{2,3,0} = \{(2,0), (3,0), (5,1)\}$$

$$B_{31} = B_{2,4,0} = \{(2,0), (4,0), (0,1)\} \ B_{32} = B_{2,5,0} = \{(2,0), (5,0), (3,1)\}$$

$$B_{33} = B_{2,3,1} = \{(2,1), (3,1), (5,2)\} \ B_{34} = B_{2,4,1} = \{(2,1), (4,1), (0,2)\}$$

$$B_{35} = B_{2,5,1} = \{(2,1), (5,1), (3,2)\} \ B_{36} = B_{2,3,2} = \{(2,2), (3,2), (5,0)\}$$

$$B_{37} = B_{2,4,2} = \{(2,2), (4,2), (0,0)\} \ B_{38} = B_{2,5,2} = \{(2,2), (5,2), (3,0)\}$$

$$B_{39} = B_{2,3,4} = \{(2,4), (3,4), (3,2)\} \ B_{40} = B_{3,4,0} = \{(3,0), (4,0), (3,1)\}$$

$$B_{41} = B_{3,4,1} = \{(3,1), (4,1), (3,2)\} \ B_{42} = B_{3,4,2} = \{(3,2), (4,2), (3,0)\}$$

$$B_{43} = B_{3,5,0} = \{(3,0), (5,0), (1,1)\} \quad B_{44} = B_{3,5,1} = \{(3,1), (5,1), (1,2)\}$$

$$B_{45} = B_{3,5,2} = \{(3,2), (5,2), (1,0)\} \quad B_{46} = B_{4,5,0} = \{(4,0), (5,0), (4,1)\}$$

$$B_{47} = B_{4,5,1} = \{(4,1), (5,1), (4,2)\} \quad B_{48} = B_{4,5,2} = \{(4,2), (5,2), (4,0)\}$$

c) $0 \leq x \leq m-1$ ve her $i \in Z_3$ ise yani $x=0,1,2$ ve $i=0,1,2$ olmak üzere tasarıma ilişkin son 9 blok bulunur.

$$C_{x,i} = \{\infty, (x+t, i), (x, (i+1) \bmod 3)\}$$

$$B_{49} = C_{0,0} = \{\infty, (x+t=3, i=0), (x=0, (i+1) \bmod 3 = 1)\} = \{\infty, (3,0), (0,1)\}$$

$$B_{50} = C_{0,1} = \{\infty, (3,1), (0,2)\} \quad B_{51} = C_{0,2} = \{\infty, (3,2), (0,0)\}$$

$$B_{52} = C_{1,0} = \{\infty, (4,0), (1,1)\} \quad B_{53} = C_{1,1} = \{\infty, (4,1), (1,2)\}$$

$$B_{54} = C_{1,2} = \{\infty, (4,2), (1,0)\} \quad B_{55} = C_{2,0} = \{\infty, (5,0), (2,1)\}$$

$$B_{56} = C_{2,1} = \{\infty, (5,1), (2,2)\} \quad B_{57} = C_{2,2} = \{\infty, (5,2), (2,0)\}$$

buradan elde edilen 57 bloğun yerine yazılmasıyla elde edilen tasarım parametreleri $\nu=19$, $b=57$, $r=9$, $k=3$, $\lambda=1$ dir. Tasarım ise $S(3,1;19)$ tasarımıdır. Bir başka deyişle STS(19) tasarımıdır.

3. İKİLİ DENGELİ TASARIM (PBD) VE TRANSVERSAL TASARIM

İkili dengeli tasarımlar, transversal tasarımların kuruluşunda kullanılır.

3.1 İkili Dengeli Tasarım (Pairwise Balanced Block Design-PBD)

Richard Wilson , tasarımların farklı çeşitlerinin varolması için gerekli koşulların asimptotik olarak yeterli olduğunu göstermiştir. Örneğin , $k > 1$ pozitif tamsayı verilsin , $2 - (k, 1, v)$ – tasarımının var olması için gerekli koşullar $(k-1)$ 'in $(v-1)$ 'i bölmesi ve $k(k-1)$ 'in $v(v-1)$ 'i bölmesidir. Wilson'un Teoreminden ; tasarım , verilen k 'lar için mevcuttur fakat bu koşulları sağlayan v ' lerin çoğu için sonlu olarak mevcuttur.

Wilson'un Varlık Teorisini betimlemek amacıyla , her bir iki noktanın tek blokta olduğu gibi , alt setlerin (bloklar olarak adlandırılır) B koleksiyonu ile noktaların P seti olarak ' İkili dengeli tasarım (Pairwise Balanced Design) ' tanımlanır. Eğer K , blokların elemanlarının seti ise tasarımı $PBD(K)$ ile ifade edilir. Eğer $K=\{k\}$ ise v noktaları ile $PBD(K)$ $S(2, k, v)$ - Steiner Sistem olacaktır [8].

$0, 1 \in K$ kabul edilsin. En fazla bir elemana sahip olan bloklar PBD için tanımlanan özellikleri bozmayacaktır. Bir PBD bir doğrusal uzay gibi düşünülebilir.

K , negatif olmayan sayıların bir seti olsun. $B(K)$, v noktaya sahip $PBD(K)$ için v 'lerin bir setini tanımlasın. Örneğin , $B(\{3\})$, Steiner üçlü Sistemlerin bir sıralı setini gösterecektir.

$0, 1 \in B(K)$ olduğu görülebilir. Ayrıca B , N 'in alt setlerinin seti üzerinde kapanma (closure) operatörüdür; yani ,

$$i) K \subseteq B(K) ,$$

ii) $K_1 \subseteq K_2$ dolaylı olarak $B(K_1) \subseteq B(K_2)$ ifade eder.

iii) $B(B(K)) = B(K)$ dır.

i) , eğer $k \in K$ ise bütün noktaları içeren tek blok ile k genişliğinde set $PBD(K)$ ' dır.

ii) , aşıkardır.

iii), ilk ikisi $B(K) \subseteq B(B(K))$ olduğunu vurgular.

Tersine , eğer $v \in B(B(K))$ ise , o zaman blok eleman sayısının $PBD(K)$ 'ların genişlikleri olduğu v noktaları üzerinde PBD nin varlığı söylenir. v nokta üzerine $PBD(K)$ elde etmek için bazı $PBD(K)$ ile her bir blok yer değiştirir.

K negatif olmayan tamsayıların seti olsun.

$$\alpha(K) = \{k - 1 : k \in K\}$$

$$\beta(K) = \{k(k - 1) : k \in K\}$$

ile $\alpha(K)$ ve $\beta(K)$ sayıları tanımlanır.

Yardımcı Teorem 3.1 : $v > 0$ olmak üzere $v \in B(K)$ ise $\alpha(K)$ $(v-1)$ ' i ve $\beta(K)$ $v(v-1)$ 'i böler [8].

Steiner üçlü Sistemin mertebesinin 1 yada 3 (mod6)'a denk olması bilinen genel sonuçlardır.

3.2 Transversal Tasarım

Transversal tasarımlar, Latin kareler ile yakından ilişkili tasarımlardan biridir ve Latin karelerin kuruluşunda kullanılır.

3.1. Tanım

$k \geq 2$ ve $n \geq 2$ olmak üzere bir transversal tasarım $T[k, \lambda; n]$ ile ifade edilir ve aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa (X, G, A) sıralı üçlüsünden oluşur.

- i. X, kn elemanlı bir settir ve bu elemanlar noktalar olarak adlandırılır.
- ii. G, X 'in bir parçasıdır. Genişliği n olan k tane alt setten oluşur. Bu setler gruplar olarak adlandırılırlar.
- iii. A ise X 'deki k alt setin bir setidir ve bloklar olarak adlandırılır.
- iv. Herhangi bir grup ve bloğun bir tek ortak noktası vardır.
- v. Farklı gruplardan gelen tüm nokta çiftleri sadece bir blokta yer alır [1].

Bir transversal tasarımda gruplar sadece noktaların alt setidir. Ayrıca $n \geq 1$ olan tamsayılar için $T[2, \lambda; n]$ tasarımı mevcuttur.

Transversal tasarımların gösterimlerinde notasyon farklılıkları olabilir. $TD_\lambda(k, n)$ n hacimli, k grup ve λ indeksli bir transversal tasarımı ifade eder. $\lambda = 1$ durumunda tasarıma “birim indeksli transversal tasarım” denir.

3.1. Örnek

Çizelge 3.1 bir $T[4,1;3]$ tasarımının blok ve gruplarını göstermektedir.

Çizelge 3.1. $T[3,1;3]$ tasarımının blokları ve grupları

$G_1 : x_{11} \ x_{12} \ x_{13}$	$B_1 : x_{11} \ x_{21} \ x_{31} \ x_{41}$
$G_2 : x_{21} \ x_{22} \ x_{23}$	$B_2 : x_{11} \ x_{22} \ x_{32} \ x_{42}$
$G_3 : x_{31} \ x_{32} \ x_{33}$	$B_3 : x_{11} \ x_{23} \ x_{33} \ x_{43}$
$G_4 : x_{41} \ x_{42} \ x_{43}$	$B_4 : x_{12} \ x_{21} \ x_{32} \ x_{43}$
$B_5 : x_{12} \ x_{22} \ x_{33} \ x_{41}$	
$B_6 : x_{12} \ x_{23} \ x_{31} \ x_{42}$	
$B_7 : x_{13} \ x_{21} \ x_{33} \ x_{42}$	

$$B_8 : x_{13} \quad x_{22} \quad x_{31} \quad x_{43}$$

$$B_9 : x_{13} \quad x_{23} \quad x_{32} \quad x_{41}$$

Yardımcı Teorem 3.2 : Bir $A \in T[k, \lambda; n]$ tasarımı λn^2 bloğa sahiptir [1].

4. DİK LATİN KARE TAM SETLERİ (Mutually Orthogonal Latin Squares - MOLS)

n mertebeden s tane Latin kare seti olsun, buna $L_1, \dots, L_s$ densin. Eğer $1 \leq i < j \leq s$ için L_i ve L_j dik ise, bu karelere dik Latin kare tam setleri denir. Dik Latin kare tam setlerine kısaca “MOLS” (mutually orthogonal Latin squares) denir. $s\text{MOLS}(n)$, n mertebeden s tane MOLS ‘un setini ifade eder.

n mertebeden MOLS ‘un maksimum sayısı önemlidir, bu büyüklük $N(n)$ ile ifade edilir [1, 15].

4.1 Latin Karelerin Dikliği

Çizelge 4.1 deki L Latin karesi dikkate alınsın. L Latin karesinin ana köşegeni transversaldır, fakat aşağıdaki konumlarla dört farklı transversale bölünebilir;

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(1,3), (2,4), (3,1), (4,2)\} & T_2 &= \{(1,2), (2,1), (3,4), (4,3)\} \\ T_3 &= \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} & T_4 &= \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\} \end{aligned}$$

T ‘ye bağlı her bir konuma i ‘yi yazarak bir kare oluşturulur, Çizelge 4.1 ‘deki S Latin karesini elde edilir.

Çizelge 4.1. $n=3$ ve $n=4$ için Latin kareler

1	3	4	24	2	1	31	2	31	3	2
4	2	1	32	4	3	13	1	23	2	1
2	4	3	11	3	4	22	3	12	1	3
3	1	2	43	1	2	4				
L				S				A		B
n=4								n=3		

Benzer şekilde L transversallere bölünebilir.

$$\{(1,1), (2,4), (3,2), (4,3)\}, \{(1,3), (2,2), (3,4), (4,1)\}$$

$$\{(1,4), (2,1), (3,3), (4,2)\}, \{(1,2), (2,3), (3,1), (4,4)\}$$

ve bu konumlara sırası ile 1, 2, 3, 4 yazarak L^T Latin karesi elde edilir. n mertebeden bir Latin karenin n ayrık transversale ayrışması dikliği ifade eder. Eğer H ve K olmak üzere iki $n \times n$ dizim 'i mevcutsa, sadece ve sadece h , H 'ın konumunu (i,j) ve k , K 'nın konumunu (i,j) gösterirse ikili sırasının konumunu (i,j) tuttuğu yerdeki dizili ikililerin $n \times n$ dizim 'i oluşturulabilir. 1,2,...,n sembollerinin her birinin n kopyasını içeren iki $n \times n$ dizim 'i, eğer birini diğerinin üstüne koyup olası ikili bir kere verilirse dik oldukları söylenebilir.

Eğer R $n \times n$ dizim 'inin satır girişlerinin hepsi i , i 'ye eşit olursa ve eğer $C = R^T$ ise, R ve C tamamen diktirler ve n mertebeden bir Latin kare hem R hem de C 'nin dik dizim 'i olarak tanımlanabilir. Çizelge 4.2 $n=3$ için R , C ve bazı üzerine koyulmuş kareleri göstermektedir; A ve B Çizelge 4.1 'deki karelerdir ve A ve B üzerine konulduklarında oluşabilen tüm dokuz mertebeli ikilileri 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 görürüz. A ve B sadece R ve C 'ye değil birbirlerine de diktirler.

Çizelge 4.2. $n=3$ için dik Latin kareler

1	1	11	2	3(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	2	21	2	3(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	3	31	2	3(3,1)	(3,2)	(3,3)
R		C				
11	12	13	11	22	33	11 32 23
23	21	22	13	21	32	33 21 12
32	33	31	12	23	31	22 13 31
R ve A		C ve A		B ve A		
eklenerek		eklenerek		eklenerek		

bir deneydeki değişimin iki kaynağı sadece bir Latin kare kullanılması ile kontrol edildi, böylece üç kaynak bir çift Latin kare kullanılması ile kontrol edilebilir.

Yardımcı Teorem 4.1: H , K 'ya dik ise, K , H 'a diktir [1].

Çizelge 4.1 'deki S Latin karesi simetrik bir dizimdir, ve L Latin karesine diktir. Ayrıca L 'nin kendi transpozuna diktir. Böyle bir Latin kare kendine–dik diye adlandırılır. S simetriktir. Bunun anlamı L, L^T ve S birer dik Latin kare tam setidir.

Çizelge 4.1 'in A karesinin 2 ve 3 sembollerinin yerleri değiştirilirse, Çizelge 4.3 'de gösterilen Latin kare elde edilir, ayrıca, değiştirilen kare A 'ya olduğu gibi B 'ye de diktir.

Eğer bir Latin karenin, ilk satırı $1,2,...,n$ sembollerini kendi doğal dizisinde bulunduruyorsa, Latin kare standart (ya da standartlaştırılmış) formda denir. Herhangi bir Latin karenin elemanları yer değiştirilerek standartlaştırılabilir. Böylelikle L 'yi standartlaştırmak için 2 'yi 4 ile, 3 'ü 2 ile ve 4 'ü 3 ile Çizelge 4.4 de gösterildiği gibi değiştirilmesi gerekmektedir. L, L^T ve S 'nin dik oldukları görülür, sembollerin yer değiştirmesi diklik özelliğini değiştirmemektedir.

Çizelge 4.3. satırları değiştirilmiş dik Latin kareler

1	3	211	33	22
2	1	323	12	31
3	2	132	21	13
A(23)		A(23) B nin üstünde		

$N(n)$ n mertebeden MOLS 'un olası sayılarını versin. $N(1)=\infty$ alınsın. Böylece bir Latin kare her merite için var olmaktadır, böylece $N(n) \geq 1$ 'dir ve $n > 1$ için, $N(n)$ 'in üst sınırına kolaylıkla ulaşabiliriz.

Çizelge 4.4. birbirine dik Latin kareler

1	3	4	21	2	3	4
4	2	1	33	4	1	2
2	4	3	14	3	2	1
3	1	2	42	1	4	3
L				$L(243)$		
1	4	2	31	2	3	4
3	2	4	14	3	2	1
4	1	3	22	1	4	3
2	3	1	43	4	1	2
L^T				$L^T(234)$		

4.1. Teorem

$n > 1$ için, $N(n) \leq n-1$ [3].

4.2 Dik Latin Karelerin Kuruluşu

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ kümesi göz önüne alınsın. Bu küme üzerinde $L = (a_{ij})$ Latin karesi kurulsun, (b_{ij}) diğer bir Latin kare olmak üzere (a_{ij}, b_{ij}) n^2 sıralı çifti farklı ise bu Latin kareler diktir denir. Dik Latin kare setinin oluşturulmasında sonlu cisim (Galois field – GF) kullanılır.

$g_0 = 0, g_1 = 1, g_2, \dots, g_{m-1}$ sonlu cismin $(m-1)$ mertebeden elemanları olsun.

$$L_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & g_{m-1} \\ g_i & g_i + 1 & \cdots & g_i + g_{m-1} \\ g_i \cdot g_i & g_i \cdot g_i + 1 & \cdots & g_i \cdot g_i + g_{m-1} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ g_i \cdot g_{m-1} & g_i \cdot g_{m-1} + 1 & \cdots & g_i \cdot g_{m-1} + g_{m-1} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

Böyle verilen L_i düzenleri $m-1$ tane dik Latin karenin bir setini oluşturur.

$\forall$ asal p ve $\forall r \in \mathbb{Z}^+$ için p^r sonlu bir cisim vardır. $GF(p^r)$ örneğin; $GF(5) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ bu bir cisim oluşturur.

4.1. Tanım

Cisim: H değişmeli ve birimli bir halka olsun $\forall a \in H; a \neq 0$ için $\exists b \in H; ab = ba = 1$ ise yani, H halkasının sıfırdan farklı her elemanının çarpma işlemine göre bir tersi varsa H 'a bir cisim denir.

$GF(5)$ dikkate alınarak aşağıdaki dik Latin kare setleri oluşturulur.

0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
1	2	3	4	0	2	3	4	0	1	3	4	0	1	2	4	0	1	2	3
2	3	4	0	1	4	0	1	2	3	1	2	3	4	0	3	4	0	1	2
3	4	0	1	2	1	2	3	4	0	4	0	1	2	3	2	3	4	0	1
4	0	1	2	3	3	4	0	1	2	2	3	4	0	1	1	2	3	4	0
L_1					L_2					L_3					L_4				

m bir asal sayının kuvveti iken daima $(m-1)$ tane m boyutlu dik (ortogonal) Latin kare seti kurulabilir. Şayet m asalın kuvveti değil ise $m = p_1^{(e_1)} \cdot p_2^{(e_2)} \cdots p_s^{(e_s)}$ ($p_i \neq p_j$) olsun. $g^{(i)} \in GF(p_i^{e_i})$ olmak üzere, $\gamma = (g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(s)})$ noktaları göz önüne alınır.

Bu noktalar üzerinde çarpma ve toplama şöyle tanımlanır.

$$\gamma_1 \times^+ \gamma_2 = (g_1^{(1)}, g_1^{(2)}, \dots, g_1^{(s)}) \times^+ (g_2^{(1)}, g_2^{(2)}, \dots, g_2^{(s)}) = (g_1^{(1)} \times^+ g_2^{(1)}, g_1^{(2)} \times^+ g_2^{(2)}, \dots, g_1^{(s)} \times^+ g_2^{(s)})$$

4.2. Teorem

$g_{i1}^{(1)}, g_{i2}^{(2)}, \dots, g_{is}^{(s)}$ sırası ile $GF(p_1^{e_1}), GF(p_2^{e_2}), \dots, GF(p_s^{e_s})$ 'in elemanları olsun. $g_0^{(i)}, g_1^{(i)} \in GF(p_i^{e_i})$ 'nin sırası ile sıfır ve birim elemanı olsun. Bu taktirde $\gamma_j = (g_j^{(1)}, g_j^{(2)}, \dots, g_j^{(s)})$ $0 < j \leq r = \min(p_i^{e_i}) - 1$ olmak üzere aşağıdaki düzen verilsin. [22]

$$\left. \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & \gamma_{m-1} \\ \gamma_j & \gamma_j + 1 & \dots & \gamma_j + \gamma_{m-1} \\ \gamma_j \cdot \gamma_2 & \gamma_j \cdot \gamma_2 + 1 & \dots & \gamma_j \cdot \gamma_2 + \gamma_{m-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \gamma_j \cdot \gamma_{m-1} & \gamma_j \cdot \gamma_{m-1} + 1 & \dots & \gamma_j \cdot \gamma_{m-1} + \gamma_{m-1} \end{array} \right\} = L_j \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

Böylece r tane dik Latin kare (MOLS) elde edilir. Örneğin: $m=6$ olsun $p_1^{e_1} = 2, p_2^{e_2} = 3$ $r = \min(p_i^{e_i}) - 1 = 2 - 1 = 1$ $GF(2) \times GF(3)$ 'ü göz önüne alabiliriz.

$(0, 1 \in GF(2), 0, 1, 2 \in GF(3))$ $GF(2) \times GF(3) = \{(0,0), (1,1), (0,1), (0,2), (1,0), (1,2)\}$ bu kartezyen sistemindeki elemanları kullanıldığında aşağıdaki Latin kare seti elde edilir.

$$\begin{array}{cccccc} (0,0) & (1,1) & (0,1) & (0,2) & (1,0) & (1,2) \\ (1,1) & (0,2) & (1,2) & (1,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,1) & (1,2) & (0,2) & (0,0) & (1,1) & (1,0) \\ (0,2) & (1,0) & (0,0) & (0,1) & (1,2) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (1,1) & (1,2) & (0,0) & (0,2) \\ (1,2) & (0,0) & (1,0) & (1,1) & (0,2) & (0,1) \end{array}$$

Latin kare göz önüne alındığında aynı denemelerin, deney düzeni içinde belli koşullar altında tekrar ettiği görülür, bunlar aynı denemeler olmakla birlikte elde edilen sonuçlar denemenin bulunduğu konuma göre farklıdır. O halde n denemenin bulunduğu bir deney düzeninde n^2 farklı değer vardır. Bir Latin karede birinci satır doğal sırada ise; Latin kare standart biçimdedir denir. Bu dik Latin karelerin bir özelliğidir.

4.3. Teorem

n, $f_a(x, y) = ax + y$, $a \neq 0 \in F_q$ formunda polinomun bir setinden bir asalın kuvveti ise, n mertebeden Latin kare setinde tam n-1 tane Latin kare diktir. Bu sete “tamdır” (MOLS) denir [3].

3.2. Örnek

4. mertebeden üç dik Latin kare kurabilmek için 4.3. Teorem kullanılabilir. $GF(2^2)$ cismi Çizelge 4.5 deki gibi olur.

Çizelge 4.5. $GF(2^2)$ nin doğal hali

+	0	1	α	$\alpha+1$	•	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	1	α	$\alpha+1$	0	0	0	0	0
1	1	0	$\alpha+1$	α	1	0	1	α	$\alpha+1$
α	α	$\alpha+1$	0	1	α	0	α	$\alpha+1$	1
$\alpha+1$	$\alpha+1$	α	1	0	$\alpha+1$	0	$\alpha+1$	1	α

$g_0 = 0, g_1 = 1, g_2 = \alpha, g_3 = \alpha + 1$ şöyle ki;

$$a_{ij}^{(1)} = 1.g_i + g_j = g_i + g_j$$

$$a_{ij}^{(2)} = \alpha.g_i + g_j$$

$$a_{ij}^{(3)} = (\alpha + 1).g_i + g_j$$

Satırlar 0 'dan 3 'e numaralandığı ve $g_0 = 0$ olduğundan her bir kare için $a_{0j} = g_j$ dir.

Bu yüzden tüm kareler standartlaştırılmıştır. A_1 karesi için satır 1;

$a_{ij}^{(1)} = g_i + g_j = 1 + g_j$ dir. Çizelge 4.6 'de kareler verilmiştir.

Çizelge 4.6. $GF(2^2)$ den elde edilmiş dik Latin kareler

0	1	α	$\alpha + 1$	0	1	α	$\alpha + 1$
1	0	$\alpha + 1$	α	α	$\alpha + 1$	0	1
α	$\alpha + 1$	0	1	$\alpha + 1$	α	1	0
$\alpha + 1$	α	1	0	1	0	$\alpha + 1$	α
A_1				A_2			
0	1	α	$\alpha + 1$				
$\alpha + 1$	α	1	0				
1	0	$\alpha + 1$	α				
α	$\alpha + 1$	0	1				
A_3							

4.4. Teorem

Bir $T[k,1;n]$ tasarımının varlığı n mertebeden $k-2$ MOLS 'un varlığına eşittir [3].

Bir $T[k,1;n]$ tasarımı, aşağıdaki değişkenler ile $G_1, G_2, \dots, G_k$ gruplara sahiptir.

$$G_h = \{x_{h1}, x_{h2}, \dots, x_{hn}\}, h=1, 2, \dots, k.$$

$1 \leq h \leq k-2$ için, A^h nxn dizimi aşağıdaki yolla tanımlanır. $1 \leq i, j \leq n$ için $\lambda = 1$

olduğundan hem $x_{k-1,i}$ hem de $x_{k,j}$ 'yi içeren tasarımda bir tek b bloğu vardır.

B bir transversal tasarımın bloğu olduğu için, kesinlikle G_k 'nın bir elemanını içermektedir. Diyelim ki,

$$B \cap G_h = \{x_{hm}\}$$

o zaman

$$a_{ij}^h = m$$

A^h 'ın bir Latin karedir. $a_{ij}^h = a_{il}^k = m, j \neq l$; olduğunu ve satırdaki iki girişin de eşit olduğu varsayalım. Bu B_1 ve B_2 bloklarının var olduğu anlamına gelir,

$$\{x_{h,m}, x_{k-1,i}, x_{k,j}\} \subseteq B_1$$

ve

$$\{x_{hm}, x_{k-1,i}, x_{k,l}\} \subseteq B_2$$

alınsın ($x_{kj} \neq x_{kl}$) ve her bir blokta sadece her bir grubun bir elemanının oluşmasından dolayı, $B_1 \neq B_2$ ve $\lambda \geq 2$ ayrıklığı vardır. Benzer şekilde, aynı sütundaki iki giriş eşit değildir. A^h ve A^l 'nin karşılıklı dik oldukları kontrol edilebilir.

$a_{ij}^h = a_{uv}^h = p$ ve $a_{ij}^l = a_{uv}^h = q$ olduğu varsayalım

O zaman B_1, B_2, B_3, B_4 blokları vardır

$$\{x_{hp}, x_{k-1,i}, x_{kj}\} \subseteq B_1, \{x_{hp}, x_{k-1,u}, x_{kv}\} \subseteq B_2,$$

$$\{x_{lq}, x_{k-1,i}, x_{kj}\} \subseteq B_3, \{x_{lq}, x_{k-1,u}, x_{kv}\} \subseteq B_4$$

$\lambda = 1$ olduğu için, $B_1 = B_3$ ve $B_2 = B_4$ olmalıdır. Şöyle ki,

$$\{x_{hp}, x_{lq}, x_{k-1,i}, x_{kj}\} \subseteq B_1$$

ve

$$\{x_{hp}, x_{lq}, x_{k-1,u}, x_{kv}\} \subseteq B_2 \text{ dir.}$$

Fakat şimdi ayrıık olan x_{hp}, x_{lq} beraber iki blokta yer alır. Dolayısı ile, her bir $T[k,1;n]$ ‘den n mertebeden $k-2$ MOLS kurulabilir. Yapı ters çevrilebileceği için, ikisi de eşittir.

4.3. 6. Mertebeden dik Latin karelerin yokluğu

6. mertebeden dik Latin karelerin yokluğu MOLS ‘da önemli yer teşkil etmektedir. 6. mertebe dik Latin kare $T[4,1;6]$ tasarımına denktir.

6. mertebeden dik Latin Karelerin ikilisinin olmadığını diğer bir değişle $N(6)=1$ olduğunun ispatı yapılmıştır. 4.4. Teorem ile, $T[4,1;6]$ tasarımının olmadığını kanıtlamak yeterlidir. Varolduğunu varsayılarak bir tezatlığa ulaşılmıştır.

$|X|=24$ ‘te bir $T[4,1;6]$ tasarımı bir (X,G,A) üçlüsüdür. G, X ‘in bir bölümüdür.

$$X = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \quad |G_i| = 6 \text{ ve}$$

$$A, 36 \text{ bloğun bir ailesidir, } |B_i| = 4$$

PBD $P = (X, G \cup A)$ olduğuna dikkat edelim, P tasarımı 6 genişliğinde B_1, B_2, B_3, B_4 ve 4 genişliğinde $B_5, B_6, \dots, B_{40}$ bloklarına sahiptir. 4 genişliğinde 6 blokta ve 4 büyüklüğünde 1 blokta X ‘in her bir elemanı oluşur, böylece her bir

$x_i \in X$ için tekrar sayısı $r=7$ dir. Genel kayıp olmaksızın Çizelge 4.7 'de gruplar gösterilmektedir.

Çizelge 4.7. P tasarımının grupları

$B_1 = G_1 : 123456$
$B_2 = G_2 : 789101112$
$B_3 = G_3 : 131415161718$
$B_4 = G_4 : 192021222324$

M, P 'nin matrisi olsun, böylece M 24x40 'tır. Ve

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & , x_i \in B_j \\ 0 & , x_i \notin B_j \end{cases}$$

M 'nin her bir satırı için satır toplamı $r=7$ olur. i. Satır GF [2] üzerinde 40 bileşenli bir vektör olarak r_i olarak ele alırız. Böylece M 'nin satır aralığı U, GF [2] üzerinde 40 boyutlu vektör aralığının alt aralığı V olur. Bunu şu şekilde sağlarız.

$$21 \leq rank M \leq 20$$

ve dolayısıyla hiçbir T [4,1;6] tasarımı yoktur [1].

5. DİK DİZİMLER (ORTHOGONAL ARRAYS)

5.1. Tanım

Dik dizimler, faktöriyel tasarımlarda yaygın olarak kullanılır. Özellikle $OA(N, s^k, t)$ ile gösterilen, dik dizim büyüklüğü (sütun sayısı) N , k kısıtı (satır sayısı), s düzeyi ve t kuvvetli s sembollerin $k \times N$ boyutlu X matrisidir, öyle ki X 'in herhangi $t \times N$ alt matrisinin sütun vektörleri aynı dereceli sıklıkla görülür. λ genellikle dik dizimin indeksi olarak isimlendirildiğinde, $N = \lambda s^t$ biçiminde olduğu açıktır. Faktöriyel tasarımlara uygulamada, her bir satır faktöre uygundur. Semboller faktör düzeylerini ve her bir sütun faktör düzeylerinin birleşimini gösterir. Böylece her $OA(N, s^k, t)$ her biri s düzeye sahip k faktörünü için N tekrarlı faktöriyel tasarımı tanımlar.

Dik dizim, $OA(N, k, s, t)$ şeklinde de gösterilebilir [5].

5.1 Dik dizimlerin Kuruluş Teknikleri

5.1.1. Dik dizimlerin kuruluşunda sonlu projektif geometrinin kullanımı

5.1. Teorem

$k \times r$ boyutlu bir C matrisi göz önüne alınsın.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & . & . & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & . & . & c_{2r} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ c_{k1} & c_{k2} & . & . & c_{kr} \end{bmatrix}$$

Burada $c_{ij} \in GF(s)$ dir. Eğer t satırlı r ranklı alt matrisler bulunabiliyorsa, bu taktirde $OA(s^r, s^k t)$ dik dizimi kurulabilir. Burada $s = p^n$ dir . λ indeksli dik dizimde $N = \lambda s^t$ dir. Burada $\lambda = 1$ olduğundan $N = s^t$ dir [5].

C matrisinin satırları $PG(r-1, s)$ sonlu projektif uzayındaki noktanın koordinatları gibi yorumlanabilir öyle ki noktaların t tanesi birleştirilmemiştir. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

5.2. Teorem

$PG(r-1, s)$ projektif uzayında t tanesi birleştirilmemiş (t tanesi bir doğru üzerinde değil) k noktaları bulunabilirse, bu taktirde $\lambda = s^{r-t}, s = p^n$ olan $OA(s^r, s^k t)$ dik tasarımı kurulabilir [6].

5.1. Örnek

Burada $s=2$ durumu düşünölsün ve $(r-2)$ -boyutlu alt düzleminde olmayan $PG(r-1, 2)$ nin tüm noktalarının seti alınsın. Bu taktirde,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = 0 \quad (5.1)$$

dir. (5.1) özelliğini sağlayan 2^{r-1} tane nokta vardır. $PG(r-1, 2)$ deki her bir doğru üç noktadan geçmediğinden dolayı bu noktaların üçü aynı doğru üzerinde değildir ve dolayısıyla setin dışındaki doğrulardan biri (5.1) düzleminde değildir. 5.1. Teorem deki C matrisinin satırları için bu noktaların koordinatları alınır, 3 kuvvetli $OA(2^r, 2^k, 3)$ düzeni kurulabilir ve 2^{r-1} tane kısıt vardır ($k=2^{r-1}$).

$GF(2)$ üzerinde kurulan projektif geometri $PG(2, 2)$ dir ve $r=3$ bulunur. $PG(2, 2)$ bir Fano düzlemidir. Bu düzlemin $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ dört noktası $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ doğrusu üzerinde değildir. Bundan dolayı uygun C matrisi

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8 tane olası ξ sütun vektörü aşağıdaki gibidir;

0 1 0 0 0 1 1 1
 0 0 1 0 1 0 1 1
 0 0 0 1 1 1 0 1

Böylece, $OA(8, 2^4, 3)$ dik diziminde gerekli sütunlar aşağıda verilen C^ξ formuyla bulunur.

$OA(8, 2^4, 3)$ dik dizimi

0 1 0 0 0 1 1 1
 0 0 1 0 1 0 1 1
 0 0 0 1 1 1 0 1
 0 1 1 1 0 0 0 1

5.1.2. Dik dizimlerin kuruluşunda dik Latin kare tam setlerinin kullanılışı

Dik dizimlerin kuruluşunda kullanılan diğer bir yöntem dik Latin kare tam setleridir.

5.3. Teorem

s asal sayı iken s mertebeli ikişerli dik Latin kare tam setinin varlığı $OA(s^2, s^{s+1}, 2)$ dik diziminin varlığını ifade eder.

Bundan dolayı tüm s için ikişerli dik Latin karenin en az bir çifti $OA(s^2, s^{s+1}, 2)$ dik diziminin varlığını vurgular ($s=6$ hariç) [28].

3. mertebeden dik Latin kare tam seti göz önüne alınarak $OA(9,3^4,2)$ dik dizimi aşağıdaki gibi kurulur.

$OA(9,3^4,2)$ dik dizimi

000111222

012012012

012120012

012201120

böyle bir dik dizimin birim indeksli ve iki kuvvetli olduğu görülür. Bundan dolayı 3 mertebeli 2 ikişerli dik Latin kare tam setinin varlığı $OA(9,3^4,2)$ dik diziminin varlığını ifade eder [21].

6. LATİN KARE ÇEŞİTLERİ

6.1. Semi-Latin Kare

Bir $(n \times n)/k$ semi Latin Kare, her hücrede k harf olmak üzere, her harf, her satır ve her sütunda bir kez meydana gelecek şekilde, nk harfin her satır ve her sütunda mutlaka yer aldığı kare tasarımıdır.

Örnek olarak, 6×6 boyutlu, her gözede $k=3$ tane harf bulunan ve her satır ve her sütunda toplam 18 ($=nk=6 \times 3$) harf bulunan Semi-Latin Kare örneği verilebilir. Semi-Latin Kare de, Latin Kare den farklı olarak gözelerde birden fazla işlem yer almaktadır.

ALU	FKV	BGW	CHY	DIZ	EJX
CIV	BJU	HLZ	EFW	GKX	ADY
DJW	AEZ	CKU	ILX	BFY	GHV
EKY	HIW	AFX	DGU	JLV	BCZ
FGZ	CDX	IJY	ABV	EHU	KLW
BHX	GLY	DEV	JKZ	ACW	FIU

Her gözede $k=3$ harf (işlem) bulunmaktadır. ALU beraberce tüm satır, sütun ve gözelerde yalnızca bir kez gözükmiştir. A ele alınırsa , A 1. satır ve 1. sütunda yalnız bir kere gözükmiştir. Ayrıca tüm satır ve sütunlarda toplam 18 harf yer almaktadır.

6.1. Tanım

Bir $(n \times n)/k$ Semi-Latin Kare, $OA[n^2k; 3; n_1, n_2, n_3; 2]$ dik dizimine uymaktadır.

Uyarı: Semi Latin Kare ‘nin satırları, dik dizimin satırlarının birini sembolize eder. Yani her Semi Latin Kare yardımı ile dik dizimin bir satırı oluşturulur.

6.2. Trojen Kare

Trojen kare optimal Semi Latin karedir. Bir Trojen kare, $n \times n$ boyutlu Latin kerelerin k karşılıklı bağımsız (mutually orthogonal) bir setini içerir. Semi Latin karenin her bloğu, tüm tek karelerin uygun hücrelerinde meydana gelen işlemleri içerir. Greko Latin karenin varolduğu herhangi bir n değeri için Trojen kare oluşturabilir. Örneğin, $n=6$ için

Trojen kare yoktur. Trojen karede $1 < k < n$ olmalıdır.

6.3. Yarı Tam Latin Kare (Quasi Complete Latin Square)

A	B	C	D	E
E	C	A	B	D
C	D	B	E	A
D	A	E	C	B
B	E	D	A	C

Bu bir Latin karedir çünkü her harf her satır ve her sütunda yalnızca bir kere gözükmiştir. Bu aynı zamanda Yarı tam özelliğini de sağlamaktadır. Çünkü her harf komşu (bitişik) harfi ile yatay ve dikey olarak 2 kez gözükmiştir.

6.3.1. Satır – yarı tam Latin kare (Row-quasi complete Latin square)

Bir Latin kare, eğer harf sembollerinin her sıralandırılmamış (unordered) çifti, karenin her satırında ardışık pozisyonda kesin olarak iki defa gözüküyorsa “Satır Yarı Tam” olarak isimlendirilir.

Örneğin, A-C, A-D, A-E, B-D, B-E, C-E sıralanmamış çiftlerdir. A-C için, AC çifti 2. satır ve 5. satırda ardışık olarak yan yana gelmiştir. B-D için, BD çifti 2. satır ve 3. satırda yan yana gelmiştir.

6.3.2. Sütun – yarı tam Latin kare (Column-quasi complete Latin square)

Bir Latin kare, eğer harf sembollerinin her sıralandırılmamış çifti, karenin her bir sütununda ardışık pozisyonda kesin olarak 2 defa gözüküyorsa “Sütun – Yarı Tam “ Latin kare olarak adlandırılır.

Örnek olarak, sütuna göre A-C, A-D, A-B, E-D, E-B, C-B sıralanmamış çiftlerdir. A-C için, AC çifti 3. sütun ve 4. sütun ‘da ardışık olarak yan yana gelmiştir.

6.4. Latin Kare İsoptopy

Bir Latin kare, diğer bir Latin karenin satırları, sütunları ve sembollerinin yer değiştirmesi ile elde edilebiliyorsa, bu iki Latin kare ^{isotopiktir} denir.

İsoptopizm, bir denklik ilişkisidir (equivalence relation). Latin karelerin setleri ^{isotop} sınıfı adı verilen alt setlere bölünebilir. Bu bölünmede, aynı sınıftaki iki kare isotopiktir, farklı sınıftakiler isotopik olmaz.

6.5. Yakın Dik Latin Kare - MNOLS (Mutually Nearly Ortogonal Latin Square)

6.2. Tanım

L_1 ve L_2 , $v=2m$ olan ve $\{0,1,2,...,2m-1\}$ sembollerinden oluşan Latin kareler olsun.

Bu iki Latin karenin MNOLS olması için;

bu Latin karelerin her birinin i . satır ve j . sütun elemanları eşleştirildiğinde aynı elemandan iki tane yan yana olmamalıdır. Başka bir deyişle, L_1 ‘den gelen eleman l ve L_2 ‘den gelen eleman l' ise $l' \neq l$ olmalıdır.

$|l' - l| \neq m$ ise bu çift iki kere, değil ise bir kez gözükcektir.

Not : Dik Latin karelerde her çift sadece bir kez gözüküyordu.

Çift mertebeli yakın dik Latin karelerin sınırları aşağıdaki teoremdedir.

6.1. Teorem

$L_1, L_2, \dots, L_t$ $v=2m$ mertebeli ve $\{0, 1, 2, \dots, 2m-1\}$ sembollerinden oluşan t tane Latin kare olsun. Bu Latin kareler karşılıklı yakın dik ise

$$t \leq \frac{v}{2} + 1 \quad v \equiv 2 \pmod{4}$$

$$t \leq \frac{v}{2} \quad v \equiv 0 \pmod{4}$$

eşitlikleri sağlanır [6].

t tane karşılıklı yakın dik Latin kare (MNOLS) de t , sınırlara eşit olursa, bu t tane karşılıklı yakın dik Latin ^{tam (complete) MNOLS} seti oluşturur.

7. PROJEKTİF GEOMETRİLER ve DÜZLEMLER

7.1. Tanım

P noktaların, B ise doğruların bir kümesi olsun. n , p kümesine ait bir nokta, b 'de B kümesine ait bir doğru olmak üzere (n,b) ikilisi dikkate alınsın.

$*$ $\subset P \times B$ alt kümesine "üzerinde bulundurma bağlantısı" denir. $(n,b) \in *$ ise bu $n*b$ ile gösterilir. $n*b$ ifadesi, "n noktası, b doğrusu üzerindedir" anlamındadır [14].

Bu kısımda hesaplamalar $(\text{mod } p)$ 'ye göre yapılacaktır. p bir asal sayıdır. Bu durumda $(\text{mod } p)$ kalanları bir sonlu cisim oluştururlar. her p asal sayısı ve her n pozitif tam sayısı için $GF(p^n)$ mevcuttur. Projektif geometri kavramında noktalar ve doğrular $GF(p^n)$ kullanılarak tanımlanacaktır.

$GF(p^n)$ 'in hepsi birden sıfır olmayan $m+1$ elemanlı sıralı kümesi m boyutlu sonlu projektif geometride bir noktadır.

$(a_1, a_2, \dots, a_{m+1}), (a_1', a_2', \dots, a_{m+1}')$ iki küme olsun.

$$a_i = \lambda a_i', i=1,2,\dots,m, \lambda \neq 0, \lambda \in GF(p^n)$$

yani,

$(a_1, a_2, \dots, a_{m+1}) = \lambda(a_1', a_2', \dots, a_{m+1}')$ ise $(a_1, a_2, \dots, a_{m+1})$ noktası ve bununla orantılı tüm noktalar aynı noktayı gösterir.

$P_1 = (a_1, a_2, \dots, a_{m+1})$ ve $P_2 = (a_1', a_2', \dots, a_{m+1}')$ farklı iki nokta olsun.

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_1', \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2', \dots, \lambda_1 a_{m+1} + \lambda_2 a_{m+1}' \quad (7.1)$$

$\lambda_1, \lambda_2 \subset GF(p^n)$ en az bir λ sıfırdan farklı (7.1) ile verilen ifade "doğru tanımı" olarak alınır.

Bu tarzda elde edilen noktalar ve doğrular sistemine " $GF(p^n)$ 'in m-boyutlu projektif geometrisi" denir. ve $PG_m(p^n)$ ile gösterilir.

$GF(p^n)$ 'in $(m+1)$ sıralı kümelerinin sayısı $p^{n(m+1)}$ 'dir. $(0,0,...,0)$ kümesi çıkarıldığında $(p^{n(m+1)}-1)$ sıralı kümenin elemanlarından en az biri sıfırdan farklıdır. $GF(p^n)$ 'in eleman sayısı sonlu ve bu sayı p^n olduğundan (6.1) nedeniyle p^n-1 tane $(m+1)$ elemanlı sıralı kümenin aynı noktayı göstereceği açıktır. O halde $PG_m(p^n)$ 'deki farklı noktaların sayısı,

$$\frac{p^{n(m+1)}}{p^n - 1} = 1 + p^n + p^{2n} + \dots + p^{mn} \quad (7.2)$$

bulunur.

$PG_m(p^n)$ 'in k-boyutlu alt vektör uzayı $PG_k(p^n)$ olsun. bu alt uzay $P_1, P_2, \dots, P_{k+1}$ lineer bağımsız nokta ile tanımlıdır.

$PG_k(p^n)$ 'deki noktaların sayısı ise

$$1 + p^n + p^{2n} + \dots + p^{kn} \quad (7.3)$$

$PG_k(p^n)$ alt uzaylarının her biri $(k+1)$ bağımsız nokta ile tanımlanır.

İlk nokta P_1 ise P_1 noktası $(1 + p^n + p^{2n} + \dots + p^{mn})$, P_2 noktası $(p^n + p^{2n} + \dots + p^{mn})$, P_3 noktası $(p^{2n} + \dots + p^{mn})$, ..., P_1 , $(p^{1n} + p^{2n} + \dots + p^{mn})$, ..., P_{k+1} noktası $(p^{kn} + \dots + p^{mn})$ yolla seçilir.

O halde $PG_m(p^n)$ 'deki $(k+1)$ bağımsız noktanın sıralı kümelerinin sayısı,

$$(1 + p^n + p^{2n} + \dots + p^{mn}), (p^n + p^{2n} + \dots + p^{mn}), (p^{kn} + \dots + p^{mn}) \quad (7.4)$$

ile verilir.

$PG_k(p^n)$ 'deki $(k+1)$ bağımsız noktanın sıralı kümelerinin sayısı ise,

$$(1 + p^n + p^{2n} + \dots + p^{kn}), (p^n + \dots + p^{kn}), (p^{(k-1)n} + p^{kn}), (p^{kn}) \quad (7.5)$$

Eşitlik 7.4 ve eşitlik 7.5 kullanılarak $PG_m(p^n)$ 'deki $PG_k(p^n)$ alt uzaylarının sayısı bulunur ve aşağıdaki biçimde verilir.

$$\frac{(1 + p^n + \dots + p^{mn}) \dots (p^{kn} + \dots + p^{mn})}{(1 + p^n + \dots + p^{kn}) \dots (p^{(k-1)n} + p^{kn})(p^{kn})} \quad (7.6)$$

Aynı düşünce tarzıyla $PG_k(p^n)$ alt uzayını içine alan $PG_s(p^n)$ alt uzaylarından söz edilir. $PG_s(p^n)$ alt uzayının da $(s+1)$ bağımsız nokta ile tanımlanacağı açıktır.

$PG_s(p^n)$ 'nin oluşturulmasında $PG_k(p^n)$ 'de bulunmayan bir nokta seçilerek işlemlere başlanır. Bu nokta P_{k+2} olsun. P_{k+2} noktası, $(p^{(k+1)n} + \dots + p^{mn})$ noktası dışında seçilir. P_{k+3} noktası, $(p^{(k+2)n} + \dots + p^{mn})$ noktası dışında seçilir. Yani $P_{k+3} \notin PG_{k+1}(p^n)$ dir. Bu şekilde nokta seçimine devam edildiğinde $PG_s(p^n)$ 'e ulaşılır. $s > k$ $PG_k(p^n)$ 'i bulunduran $PG_s(p^n)$ alt uzaylarının $PG_m(p^n)$ 'deki sayısı,

$$\frac{(p^{(k+1)n} + \dots + p^{mn}) \dots (p^{sn} + \dots + p^{mn})}{(p^{(k+1)n} + \dots + p^{sn}) \dots (p^{(s-1)n} + p^{sn})(p^{sn})} \quad (7.7)$$

7.1. Afin Düzlem

7.2. Tanım

N , noktalar ve doğrulardan oluşan bir sistem olmak üzere,

N sisteminin her bir noktası, s farklı doğru üzerindedir. ($s > 1$)

N , sn farklı farklı doğruya sahiptir. n doğrunun oluşturduğu s tane paralel sınıf vardır. Aynı paralel sınıftaki farklı doğrular ortak noktaya sahip değilken, farklı sınıftaki iki doğru tam bir ortak noktaya sahiptir. N sisteminde n^2 farklı nokta vardır.

Yukarıdaki koşulları sağlayan N sistemi, s dereceli *n. mertebeden bir net* olarak adlandırılır.

$n=1$ ise *basit net (trival net)*

$s=1$ ise *bozulmuş net (degenerate net)* olarak adlandırılır.

Burada d , N neti için eksiklik (deficiency) olarak adlandırılır. d pozitif tam sayıdır. ($d=k-r+1$)

Her sonlu N neti aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$s + d = n + 1$$

$$n_1 = s(n-1), n_2 = d(n-1)$$

$$P_{11}^1 = n - 2 + (s-1)(s-2)$$

$$P_{12}^1 = P_{21}^1 = (s-1)d$$

$$P_{22}^1 = d(d-1)$$

$$P_{22}^2 = n - 2 + (d-1)(d-2)$$

$$P_{21}^2 = P_{12}^2 = (d-1)s$$

$$P_{11}^2 = s(s-1)$$

n mertebeden bir sonlu net için, $d=0$ ise bu net, n mertebeden bir *Afin düzlem* belirtir [7].

n mertebeden bir afin düzlemde;

- i. toplam nokta sayısı, n^2
- ii. toplam doğru sayısı, $n^2 + n$
- iii. her doğru üzerinde n nokta vardır,
- iv. her noktadan $n+1$ doğru geçer,
- v. farklı iki noktadan tek bir doğru geçer,
- vi. farklı iki doğru en çok bir noktada kesişir.

$d=0$ ise N netini öyle bir S alt seti vardır ki, N 'de birbiriyle birleşmeyen fakat S 'de birleşen nokta çiftleri mevcuttur. S setine N netinin kısmi transversali denir.

7.2. Projektif Düzlem

$B[n+1,1; n^2+n+1]$ $n \geq 2$ iken n mertebeden projektif düzlem olarak bilinir [2, 9].

n mertebeden bir projektif düzlemde;

- i. toplan nokta ve doğru sayısı, $n^2 + n + 1$
- ii. her doğru üzerinde $n+1$ nokta vardır,
- iii. her noktadan $n+1$ doğru geçer,
- iv. farklı iki noktadan tek bir doğru geçer,
- v. farklı iki doğru en az bir noktada kesişir.

Bir afin düzlemde birbirine paralel doğrular, doğru demetini oluşturur. Düzlemde her bir demet için, bu demetin tüm doğrularını üzerinde bulunduran, fakat afin düzlemin noktaları arasında bulunmayan yeni bir nokta alınır, buna ^{ideal nokta} denir. Tüm ideal noktaları üzerinde bulunduran doğru ^{ideal doğru} olup afin düzlemin doğruların katılır. Elde edilen yeni sistem afin düzlemin bir tamamlanışıdır. Her afin düzlemin tamamlanışı bir projektif düzlemdir.

2. mertebeden bir Latin kare seti göz önüne alınsın.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Eşitlik 7.8 ‘deki Latin kare setinde 1. ve 2. denemeler matrisin 2. satırında da görülmektedir. Ancak bu aynı deneylerin farklı koşullarla denendiğini ifade etmektedir. dolayısı ile elde edilen sonuçlar farklı olacaktır. Bu farklılığı ifade etmek için L , Latin karesi yeniden yazılacak olursa;

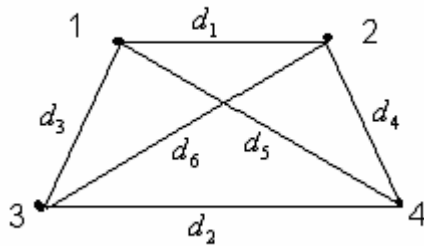
$$L = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Burada her satır ve her sütun bir doğru olarak düşünölsün. Böylece doğrular;

$$d_1 = \{N_1, N_2\}, d_2 = \{N_3, N_4\}, d_3 = \{N_1, N_3\}, d_4 = \{N_2, N_4\}$$

Eşitlik 7.8 ‘deki 1 elemanına eşitlik 7.9 ‘daki N_1 karşılık gelmektedir. Eşitlik 7.1 ‘de ikinci satırdaki 1 elemanına eşitlik 7.9 ‘da N_4 karşılık gelmiştir. Böylece $d_5 = \{N_1, N_4\}, d_6 = \{N_2, N_3\}$ olacaktır.

Böylece 4 noktası, 6 doğrusu olan bir sistem elde ederiz. Bu 2. mertebeden en küçük afin düzlemdir.

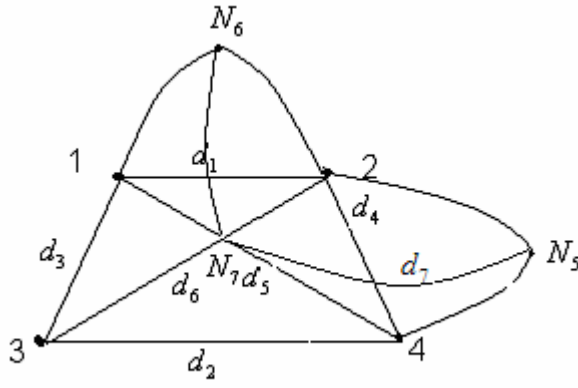


Şekil 7.1. 2. mertebeden afin düzlem

2. mertebeden afin düzlem, 2. mertebeden projektif düzleme tamamlanabilir. Bunun için ideal noktalar ve ideal doğru şöyledir;

$$\left. \begin{array}{l} d_1 \cap d_2 = N_5 \\ d_3 \cap d_4 = N_6 \\ d_5 \cap d_6 = N_7 \end{array} \right\} \text{ideal noktalar}$$

$$d_7 = \{N_5, N_6, N_7\} \text{ ideal doğru}$$



Şekil 7.2. 2. mertebeden projektif düzlem

Böylece 7 noktalı, 7 doğrulu en küçük projektif düzlem elde edilir. Buna “fano” denir.

Böylece 2. mertebeden Latin kare tam setine 2. mertebeden projektif düzlem karşılık gelmiş oldu.

Bu aynı zamanda bir Stenier sistemdir. $(t \geq 2, t - (k, 1; \nu))$

n mertebeden bir afin düzlem $2 - (n, 1; n^2)$, n mertebeden bir projektif düzlem $2 - (n + 1, 1; n^2 + n + 1)$ birer Stenier sistem örnekleridir [8].

7.2.1. 3. Mertebeden ikili dik Latin kare tam setine karşılık gelen projektif düzlem

3. mertebeden ikili dik Latin kare tam seti gözönüne alınsın.

$$L = \left\{ L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

L Latin karesinin, denemelerin elde edilen sonuçları cinsinden ifadesi,

$$L_1 = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ N_4 & N_5 & N_6 \\ N_7 & N_8 & N_9 \end{bmatrix}$$

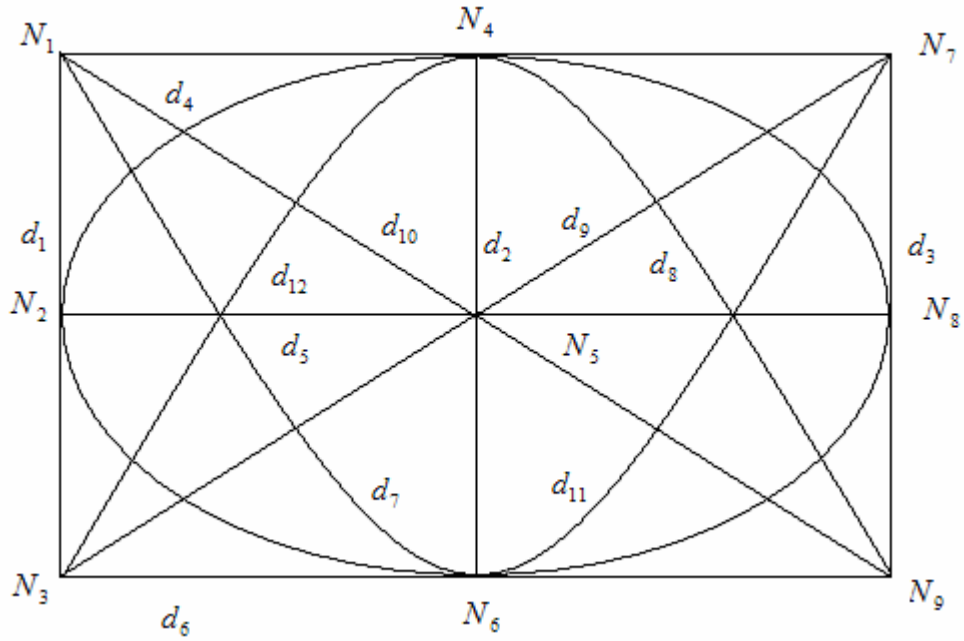
dir. L Latin karesinden elde edilen doğrular aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} d_1 &= \{N_1, N_2, N_3\} & d_4 &= \{N_1, N_4, N_7\} & d_7 &= \{N_1, N_6, N_8\} \\ d_2 &= \{N_4, N_5, N_6\} & d_5 &= \{N_2, N_5, N_8\} & d_8 &= \{N_2, N_4, N_9\} \\ d_3 &= \{N_7, N_8, N_9\} & d_6 &= \{N_3, N_6, N_9\} & d_9 &= \{N_3, N_5, N_7\} \end{aligned}$$

Aynı düşünce tarzıyla L_2 Latin karesinden elde edilen doğrular,

$$\begin{aligned} d_{10} &= \{N_1, N_5, N_9\} \\ d_{11} &= \{N_2, N_6, N_7\} \\ d_{12} &= \{N_3, N_4, N_8\} \end{aligned}$$

dir. Bu sistem 9 noktalı ve 12 doğrulu, 3. mertebeden bir afin düzlemdir. Bu afin düzlemin bir gösterimi Şekil 7.3'de verildi.



Şekil 7.3. 3. mertebeden afin düzlem

3. mertebeden afin düzlemin projektif düzleme tamamlanışındaki ideal noktalar ve ideal doğru,

$$d_1 \cap d_2 \cap d_3 = N_{10}$$

$$d_4 \cap d_5 \cap d_6 = N_{11}$$

$$d_7 \cap d_8 \cap d_9 = N_{12}$$

$$d_{10} \cap d_{11} \cap d_{12} = N_{13}$$

ve

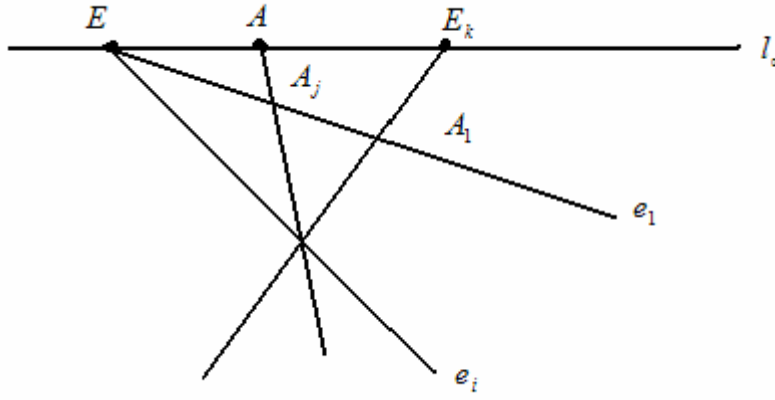
$$d_{13} = \{N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}\}$$

n. mertebeden bir projektif düzlem $PG(2,n)$ göz önüne alınsın. Bu geometri üzerinde elemanların özel seçimleri ile n. mertebeden MOLS tam seti oluşturulabilir. Bu seçimler şöyle yapılır.

1. $PG(2,n)$ üzerinde bir özel doğru l_∞ seçilir.
2. l_∞ üzerinde iki özel nokta A ve e seçilir.

3. l_∞ 'dan başka E 'den geçen $e_i (1 \leq i \leq n)$ doğruları seçilir.
4. l_∞ 'dan başka A 'dan geçen $a_j (1 \leq j \leq n)$ doğruları belirlenir.

Burada A_j noktaları $e_1 \cap a_j$ gibi düşünülebilir. $E_k (0 \leq k \leq n), l_\infty$ üzerindeki noktalar olsun. $E_0 = E, E_1 = A$ olsun. Her bir $E_k (2 \leq k \leq n)$ için bir L_k seti oluşturulabilir. öyle ki E_k 'yı $e_i \cap a_j$ 'ye birleştiren doğru E_1 i A_1 'de keser. [27]



Örnek olarak $PG(2,4)$ 'ü alalım. $PG(2,4)$ 'de 21 nokta ve 21 doğru vardır ($n^2 + n + 1 = 21$).

$P_i (i = 1, 2, \dots, 21)$ nokta, $l_i (i = 1, 2, \dots, 21)$ doğru.

$$\begin{aligned}
 l_1 &= P_2 \ P_3 \ P_7 \ P_{10} \ P_{11} \ l_8 = P_3 \ P_9 \ P_{17} \ P_{18} \ P_{21} \ l_{15} = P_7 \ P_9 \ P_{13} \ P_{14} \ P_{16} \\
 l_2 &= P_1 \ P_3 \ P_6 \ P_{12} \ P_{13} \ l_3 = P_9 \ P_8 \ P_{14} \ P_{15} \ P_{20} \ l_{16} = P_5 \ P_{10} \ P_{13} \ P_{15} \ P_{17} \\
 l_3 &= P_1 \ P_2 \ P_5 \ P_8 \ P_9 \ l_{10} = P_1 \ P_{11} \ P_{16} \ P_{17} \ P_{20} \ l_{17} = P_6 \ P_8 \ P_{10} \ P_{16} \ P_{18} \\
 l_4 &= P_5 \ P_6 \ P_7 \ P_{20} \ P_{21} \ l_{11} = P_1 \ P_{10} \ P_{14} \ P_{19} \ P_{21} \ l_{18} = P_7 \ P_8 \ P_{12} \ P_{17} \ P_{19} \\
 l_5 &= P_3 \ P_4 \ P_5 \ P_{16} \ P_{19} \ l_{12} = P_2 \ P_{13} \ P_{18} \ P_{19} \ P_{20} \ l_{19} = P_5 \ P_{11} \ P_{12} \ P_{14} \ P_{18} \\
 l_6 &= P_2 \ P_4 \ P_6 \ P_{14} \ P_{17} \ l_{13} = P_2 \ P_{12} \ P_{15} \ P_{16} \ P_{21} \ l_{20} = P_4 \ P_9 \ P_{10} \ P_{12} \ P_{20} \\
 l_7 &= P_1 \ P_4 \ P_7 \ P_{15} \ P_{18} \ l_{14} = P_6 \ P_9 \ P_{11} \ P_{15} \ P_{19} \ l_{21} = P_4 \ P_8 \ P_{11} \ P_{13} \ P_{21}
 \end{aligned}$$

Böyle bir geometri parametreleri $v = b = 21, r = k = 5$ olan bir BIBD oluşturuyor.

21 doğrudan bir tanesi seçilecek. 21. doğru olsun.

1. $PG(2,4)$ 'deki özel seçimli doğru l_{21} olsun.
2. l_{21} üzerinde iki özel nokta P_4 ve P_8 olsun.
3. l_{21} 'den başka $E = P_4$ 'den geçen doğrular, $e_1 = l_5, e_2 = l_6, e_3 = l_7, e_4 = l_{20}$ olur.
4. $A = P_8$ olsun. Bu noktadan geçen l_{21} haricindeki doğrular $a_1 = l_3, a_2 = l_9, a_3 = l_{17}, a_4 = l_{18}$ olur.

L_2 karesini elde etmek için E_2 noktasını $E_2 = P_{11}$ olarak alalım.

$e_1 \cap a_1 = P_5, E_2 = P_{11}$. P_5 ve P_{11} 'i üzerinde bulunduran doğru l_{19} 'dur. (Tasarım bir BIBD olduğu için λ tektir ve böyle bir tane doğru belirir.) $e_1 \cap l_{19} = P_5 = A_1$ olsun. Latin karenin (1,1) hücresi $P_5 = A_1$ olur.

$e_1 \cap a_2 = l_5 \cap l_9 = P_3$. P_3 ve P_{11} 'i üzerinde bulunduran doğru l_1 'dir. $e_1 \cap l_1 = P_5 = A_2$ olsun. Latin karenin (1,2) hücresi $P_3 = A_2$ olur.

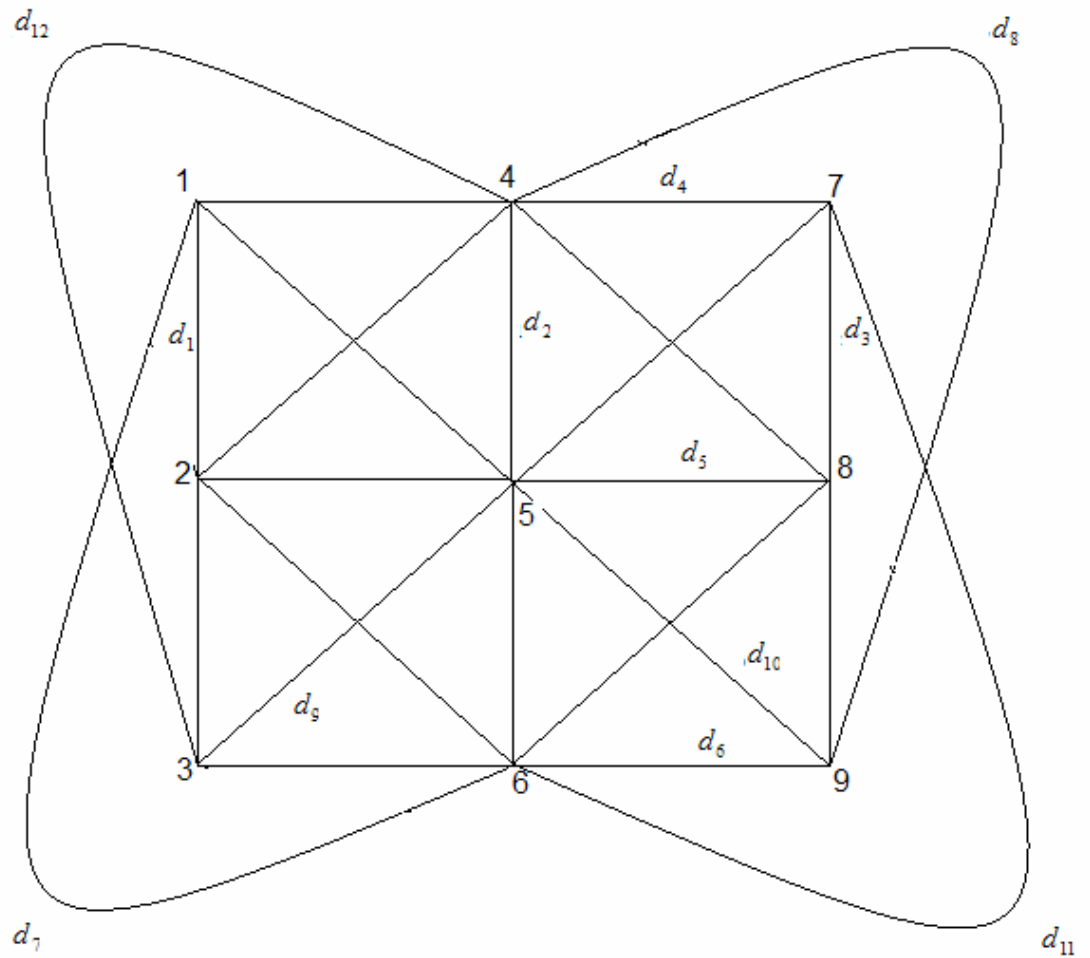
$e_1 \cap a_3 = l_5 \cap l_{17} = P_{16}$. P_{16} ve P_{11} 'i üzerinde bulunduran doğru l_{10} 'dur. $e_1 \cap l_{10} = P_{16} = A_3$ olsun. Latin karenin (1,3) hücresi $P_{16} = A_3$ olur.

$e_1 \cap a_4 = l_5 \cap l_{18} = P_{19}$. P_{19} ve P_{11} 'i üzerinde bulunduran doğru l_{14} 'dur. $e_1 \cap l_{14} = P_{19} = A_4$ olsun. Latin karenin (1,4) hücresi $P_{19} = A_4$ olur.

$$L_2 = \begin{bmatrix} P_5 & P_3 & P_{16} & P_{19} \\ P_3 & P_5 & P_{19} & P_{16} \\ P_{16} & P_{19} & P_5 & P_3 \\ P_{19} & P_{16} & P_3 & P_5 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} P_5 & P_3 & P_{16} & P_{19} \\ P_{16} & P_{19} & P_5 & P_3 \\ P_{19} & P_{16} & P_3 & P_5 \\ P_3 & P_5 & P_{19} & P_{13} \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} P_5 & P_3 & P_{16} & P_{19} \\ P_{19} & P_{16} & P_3 & P_5 \\ P_3 & P_5 & P_{19} & P_{16} \\ P_{16} & P_{19} & P_5 & P_3 \end{bmatrix}$$

4. mertebeden bir projektif geometriden 4. mertebeden bir tam Latin Kare seti elde edildi. n-1 'den daha az olursa bir Net 'e dönüşecektir.

Çizelge 7.1 de verilen birliktelik yapısında d=0 olduğundan homojen tekrarlar için bir afin düzlem oluştururlar. Tekrarların Afin düzlemde bir gösterimi aşağıda verilmiştir.



Şekil 7.4. Tekrarların afin düzlemde bir gösterimi

7.3. Tanım

$v, b, r, k, \lambda_1, \dots, \lambda_m, n_1, n_2, \dots, n_m$ sayılarına 1. çeşit parametreler $P_{jl}^i(i, j, l = 0, 1, 2, \dots, m)$ sayılarına 2. çeşit parametreler denir.

7.4. Tanım

Bir G grafiğinde birleştirilmiş olan iki köşenin her ikisi P_{11}^1 tane diğer köşelerle birleştirilmiş ise. G grafiği $n_1, n_2, P_{11}^1, P_{11}^2$ parametreleriyle güçlü düzgün grafik (strongly regular graph – SRG) adını alır [10].

7.5. Tanım

SRG aşağıdaki parametrelere sahipse yapay SRG (pseude singly linked blok graph – PSLG) adını alır.

$$\begin{aligned} n_1 &= r(k-1), & n_2 &= (k-r)(r-1)(k-1)/r \\ p_{11}^1 &= (r-1)^2 + k - 2, & p_{11}^2 &= r^2 \end{aligned}$$

[10].

Bu tekrarların birliktelik yapısı, PSLG ‘ye izomorfdur. Bunlar kare latis ‘i meydana getirirler.

7.3. Latisler

7.3.1. Kare Latisler

Kare latis düzenin de P^n tane işlem vardır. Bunlar, önce p genişlikli bloklara yerleştirilir. Bu her biri p düzeyli n tane etkenin oluşturduğu faktöriyel deney düzeni gibi düşünülür. Diğer taraftan çok sayıda işlem, p yerine k genişlikli ($k < p$) bloklara dağıtılarak bir çözüm yolu denenebilir. Bu deneme düzeni Dengeli Tamamlanmamış

Blok Düzeni olarak bilinir. Kare latis düzeni ile Dengeli Tamamlanmamış Blok Düzeni aşağıdaki bağıntılara uyar. b blok sayısı, v işlem sayısı, k blok genişliği, r tekrar sayısı ve λ iki işlemin birlikte göründükleri blok sayısı olmak üzere,

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{v-1}$$

$$r = k+1 = p+1$$

$$bk = rv$$

dır.

P^n elemanlı kare latis düzenini, p^n elemanlı sonlu cisim (Galois Field) $GF(p^n)$ ile ilişkilendirmek mümkündür [11,12]

Örneğin $PG(2,3)$ dikkate alındığında elde edilen homojen tekrarlar için birliktelik yapısı aşağıdaki gibidir.

	BLOKLAR											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	X			X			X			X		
2	X				X			X			X	
3	X					X			X			X
4		X		X				X				X
5		X			X				X	X		
6		X				X	X				X	
7			X	X					X		X	
8			X		X		X					X
9			X			X		X		X		

7.3.2. Dikdörtgensel Latisler

Latis deneme düzeninin bu tipi Harsbarger tarafından tanıtılmıştır [13].

Kare latislerden daha az simetrik olmalarına rağmen daha avantajlıdır. Bu düzenlerde $k > w$ olmak üzere $k(k-w)$ işlem test edilmek istenir.

Eğer k , asal sayı ise $k(k-w)$ nın k ve $k-w$ çarpanları vardır. O halde bu düzeni oluşturma bir yolu “ $k \times k$ ” boyutlu bir karede, her satır ve her sütundan w tane harfin silinmesi ile, işlemlerin $(k-w)$ bloğa yerleştirilmesi olabilir.

$w=1$ için, k , asal sayı ve asalın kuvveti ise; köşegen elemanları aynı harften oluşan Latin kare göz önüne alındığında, buna dik olan diğer kareler istenilen özelliği sağlar.

k , tek sayı olduğunda, 1. satırı $0, 1, 2, \dots, k-1$ gibi numaralandırılıp, i . satıra 1 ekleyerek (modül k ya göre indirgenmiş olarak) $i+1$ satırı, ve dolayısıyla da kareyi elde etmek mümkündür. Bu kare istenilen özelliği sağlar [13].

Dikdörtgensel latislerde, yalnız iki dik tekrar varsa, Basit Dikdörtgensel Latis Düzeni elde edilir. Üç tekrar kullanıldığında, deneme düzeni denge durumuna daha çok yaklaşır. Çünkü bir blokta daha çok işlem birlikte gözükmüş olur.

7.3.3. Latinleştirilmiş dikdörtgensel latis düzenleri

İşlem sayısının, iki ardışık tam sayının çarpımı olduğu durumdur. Bu düzenlerde, birbirine dik olan k satır ve k set mevcuttur. Her set, $(k-1)$ işleme sahip tamamlanmamış bloklardan oluşur [16].

Bu düzenleri oluşturmada dik Latin kare tam seti göz önüne alınacaktır. Çünkü tam setler istenen özelliğe sahiptir.

4. mertebeden dik Latin kare tam seti aşağıdaki gibidir.

$$L_1 = \left\{ \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & C & D & B \\ B & D & C & A \\ C & A & B & D \\ D & B & A & C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & C & D & C \\ B & D & C & D \\ C & A & B & A \\ D & B & A & B \end{bmatrix} \right\} \quad (7.10)$$

Eşitlik 7.10 da verilen L_1 seti 4. mertebeden projektif düzlem tanımlar. L_1 sisteminden, Latinleştirilmiş Dikdörtgen Latis düzeni elde edilir. Latinleştirilmiş dikdörtgensel latis düzenlerinin homojen tekrarını elde etmek için şu işlemler sırasıyla yapılır.

Eşitlik 7.10 ‘un 1. Latin karesinin ilk sütunu atılır. Geriye kalan üç sütun yazılır. Birinci sütunda kalan üç harfe (B, C, D) alfabedeki sıralarına göre 1,2,3 numaraları verilir.

İkinci satırda kalan üç harfe (A, D, C) alfabedeki sıralarına göre 4,6,5 numaraları verilir. Bu numaralandırma 4. satır için de tekrarlanır. Böylece 1i tekrar elde edilir.

Birinci Latin kareden sırasıyla A,B,C,D ‘nin bulundukları konumları yazılır. Böylece 2. tekrar elde edilir.

Eşitlik 7.10 ‘un 2. Latin karesinin yine 1. sütunu atılır, geri kalan üç sütunun harfleri 1. Latin karenin üç sütununun altına aynı konumlarda yazılır. Böylece 3. tekrar elde edilir.

Aynı düşünce tarzıyla eşitlik 7.10 ‘un üçüncü Latin karesinden 4. tekrar elde edilir.

L_1 tam setinden elde edilen Latinleştirilmiş dikdörtgensel Latis (LRL_1) seti aşağıdadır.

$$LRL_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 9 & 7 & 8 \\ 12 & 11 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 1 & 8 & 11 \\ 2 & 5 & 12 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 & 11 \\ 3 & 7 & 12 \\ 1 & 6 & 10 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 2 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 11 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \right\} \quad (7.11)$$

L_1 ve LRL_1 setleri isabet yapılarıdır. Daha önce belirtildiği gibi L_1 , 4. mertebeden projektif düzlem tanımlamakla birlikte LRL_1 , projektif düzlem aksiyomlarını sağlamaz. Çünkü 1. sütunun atılışı geometrik olarak, bir doğru ve üzerindeki noktaların atılışı anlamındadır.

Bloklar doğrular gibi, işlemler doğru üzerindeki noktalar gibi düşünüldüğünde, 16 doğrusu, 12 noktası olan bir isabet yapı ortaya çıkar.

$$\begin{aligned} d_1 &= 1, 2, 3 & d_5 &= 4, 7, 10 & d_9 &= 5, 9, 11 & d_{13} &= 6, 8, 12 \\ d_2 &= 4, 6, 5 & d_6 &= 1, 8, 11 & d_{10} &= 3, 7, 12 & d_{14} &= 2, 9, 10 \\ d_3 &= 9, 7, 8 & d_7 &= 2, 5, 12 & d_{11} &= 1, 6, 10 & d_{15} &= 3, 4, 11 \\ d_4 &= 12, 11, 10 & d_8 &= 3, 6, 9 & d_{12} &= 2, 4, 8 & d_{16} &= 1, 5, 7 \end{aligned}$$

λ : Her bir işlem çiftinin birlikte görünme sayısı olmak üzere $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$ durumu gözlenir. Eşitlik 7.11 'de verilen sistemin birliktelik yapısı Çizelge 7.1 'deki gibidir.

Çizelge 7.1 (7.10) 'de verilen sisteme ilişkin birliktelik yapısı

BLOKLAR

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	X					X					X					X
2	X						X					X		X		
3	X							X		X					X	
4		X			X							X			X	
5		X					X		X							X
6		X						X			X		X			
7			X		X					X						X
8			X									X	X			
9			X					X	X					X		
10				X	X						X			X		
11				X					X						X	
12				X			X			X			X			

 $\lambda_1 = 1$ Grubu $\lambda_2 = 0$ Grubu

(1,2) (1,3) (1,4) (1,6) (1,7) (1,8) (1,10) (1,11)	(1,4) (1,9) (1,12)
(2,1) (2,3) (2,4) (2,5) (2,8) (2,9) (2,10) (2,12)	(2,6) (2,7) (2,11)
(3,1) (3,2) (3,4) (3,6) (3,7) (3,9) (3,11) (3,12)	(3,5) (3,8) (3,10)
(4,2) (4,3) (4,5) (4,6) (4,7) (4,8) (4,10) (4,11)	(4,9) (4,12) (4,1)
(5,1) (5,2) (5,4) (5,6) (5,7) (5,9) (5,11) (5,12)	(5,3) (5,8) (5,10)
(6,1) (6,3) (6,4) (6,5) (6,8) (6,9) (6,10) (6,12)	(6,2) (6,11) (6,7)
(7,1) (7,3) (7,4) (7,5) (7,8) (7,9) (7,10) (7,12)	(7,2) (7,6) (7,11)
(8,1) (8,2) (8,4) (8,6) (8,7) (8,9) (8,11) (8,12)	(8,3) (8,5) (8,6)
(9,2) (9,3) (9,5) (9,6) (9,7) (9,8) (9,10) (9,11)	(9,1) (9,4) (9,12)
(10,1) (10,2) (10,4) (10,6) (10,7) (10,9) (10,11) (10,12)	(10,3) (10,5) (10,8)
(11,1) (11,3) (11,4) (11,5) (11,8) (11,9) (11,10) (11,12)	(11,2) (11,6) (11,7)

7.6 Tanım

(r,k,t) karakteristikli kısmi geometri, noktalar ve doğruların bir isabet bağıntısının sistemi olup aşağıdaki aksiyomları sağlar.

Herhangi iki nokta en fazla bir doğru üzerindedir.

Her nokta r doğru üzerindedir.

Her doğru üzerinde k nokta vardır.

Eğer P noktası, q doğrusu üzerinde değilse, P 'den geçen q ile kesişen tam t doğru ($t \geq 1$) vardır.

(r,k,t) kısmi geometrisinde ν noktaların sayısı, b doğruların sayısı olmak üzere

$$\nu = k[(r-1)(k-1) + t] / t$$

$$b = r[(r-1)(k-1) + t] / t$$

ile verilir.

Sonuç olarak eşitlik 7.11 de verilen LRL_1 sisteminin (r,k,t) kısmi geometrisi olduğu görüldü. Eşitlik 7.10 da verilen L_1 setinde, her bir kareden bir blok yerine ardışık iki blok atıldığında k $(k-w)$ dikdörtgensel latis düzeni elde edilir. Bunun için birliktelik yapısı ve parametreleri aşağıdaki gibidir.

Çizelge 7.2 k(k-w) dikdörtgensel latis için birliktelik yapısı

BLOKLAR

	tekrar 1				tekrar 2				tekrar 3				tekrar 4			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	X						X					X		X		
2	X							X		X					X	
3		X					X				X		X			
4		X					X		X							X
5			X		X					X						X
6			X			X						X	X			
7				X		X			X						X	
8				X	X						X			X		

Çizelge 7.2 'deki tasarıma ilişkin parametreler aşağıda verilmiştir.

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ $n_1 = 4, n_2 = 3$	$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $P_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\nu = 8, b = 16$ $r = 4, k = 2, t = 1$
--	--	--

Çizelge 7.2 deki yapının (4,2,1) kısmi geometrisi olduğu görülür. Homojen tekrarlar aşağıdaki gibidir.

tekrar I	tekrar II	tekrar III	tekrar IV
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 7 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 5 \\ 3 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

7.1. Örnek

3. mertebeden dik Latin kare tem seti alınmış olsun.

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} A & C & B \\ B & A & C \\ C & B & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{pmatrix} \right\}$$

L_2 setinden elde edilen Latinleştirilmiş dikdörtgensel latis düzeni için homojen tekrarlar şöyledir.

tekrar I tekrar II tekrar III

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

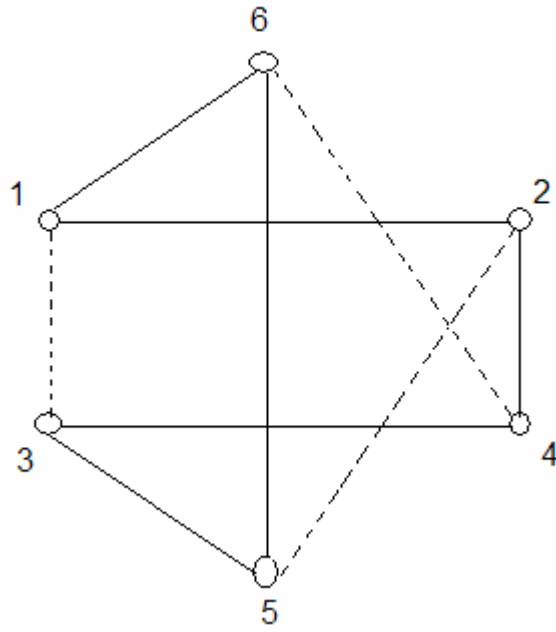
Homojen tekrarlara ilişkin birliktelik yapısı Çizelge 7.3 de verilmiştir.

Çizelge 7.3 homojen tekrarlara ilişkin birliktelik yapısı

BLOKLAR

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		X		X				X	
2			X	X					X
3	X				X			X	
4			X		X		X		
5	X					X			X
6		X				X	X		

Homojen tekrarlar (3,2,1) kısmi geometrisidir. (3,2,1) kısmi geometrisinin bir gösterimi aşağıda verilmiştir.



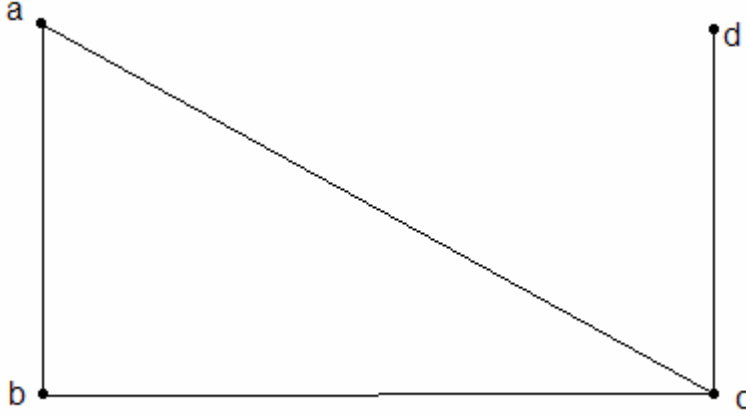
Şekil 7.5. $(3,2,1)$ kısmi geometrisinin bir gösterimi

Bu düzenlerden elde edilen dikdörtgensel latislerin homojen tekrarlarının geometrik yapısı (r,k,t) kısmi geometrisine uyar.

8. GRAFİKLER VE LATİN KARE

8.1. Grafik Teori

Bir G grafiği, köşeleri gösteren elemanların sonlu bir seti olan V ve kenarları gösteren ilgili köşelerin ikililerinin bir seti olan E 'den oluşur. Köşeler noktalar tarafından, kenarlarda ilgili köşelerle bağlantılı çizgiler tarafından açıklanabilir. Örneğin; eğer $G=(V,E)$, $V=\{a, b, c, d\}$ ve $E=\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{a,c\}\}$ ise, o zaman, G şu şekilde gösterilebilir,



Şekil 8.1. G grafiği

8.2. Latin Kare ve İki Kısımlı (Bipartite) Grafikler

Bir grafiğin basit yapısı ile Latin karenin daha karmaşık yapısı arasındaki ilişki başlangıçta aşikar değildir.

İlk olarak grafiklerin bir ailesi olan “ İki Kısımlı Grafikler (Bipartite graphs)” bilinmelidir. Bu grafiklerde köşe iki kısma ayrılmış, alt setler $U=\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ve $W=\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ gibi V set olmalıdır. U 'da veya W 'de birleştirilmiş iki köşe kenar değildir. Böyle grafikler problemleri modellemede kullanılır. Örneğin; U ile adayların, W ile de işlerin bir seti gösterilsin ve kenarlar ile adaylar için atanmış işleri tanımlasın. Alternatif olarak kadın ve erkeklerin setleri U ve W ile gösterilsin

ve kenarlar tahmin edilmiş bir servisten olası eşler olarak gösterilsin. Latin kare düşünüldüğünde, Farz edelim $|U|=|W|$ ve U ve W sırasıyla, n. mertebeden bir Latin karenin satır ve sütunlarını gösterebilir. Eğer L 'nin (i,j) girişindeki sembol k ise, o zaman bir kenar i ve j köşelerinin birleşimidir. Böyle bir grafik iki kısımlı 'dır. Ayrıca bir iki kısımlı grafik $|U|=|W|=n$ 'de bulunan ve W 'nin her köşesinden U 'nun her köşesine birleştirilmiş köşelerdir ve $K_{n,m}$ ile gösterilir. Bir 1-faktör köşeleri V ve kenarları bir alt set olan E 'nin bir grafiğidir, öyle ki bu her köşe doğal olarak tam bir kenara sahiptir. eğer E alt setlere ayrılabilirse o zaman G, 1-faktöre ayrıştırılabilir ve G 'nin 1-faktörleşme olduğu söylenebilir. Şekil 8.1 'deki grafikte, doğal olarak tam iki kenara sahip her köşe ve $|U|=|W|=5$ ile bir iki kısımlı grafikte 1-faktörleşme tanımlanabilir.

8.1. Teorem

$K_{n,m}$ 'in bir 1-faktörleşmesi n mertebeden bir Latin kareye denktir [3].

Yardımcı teorem 8.1 $r < n$ ile bir $r \times n$ dikdörtgensel Latin R 'de, $k \leq n$ sütunların hiçbir setinde gözükmeyen en az k sembol vardır [3].

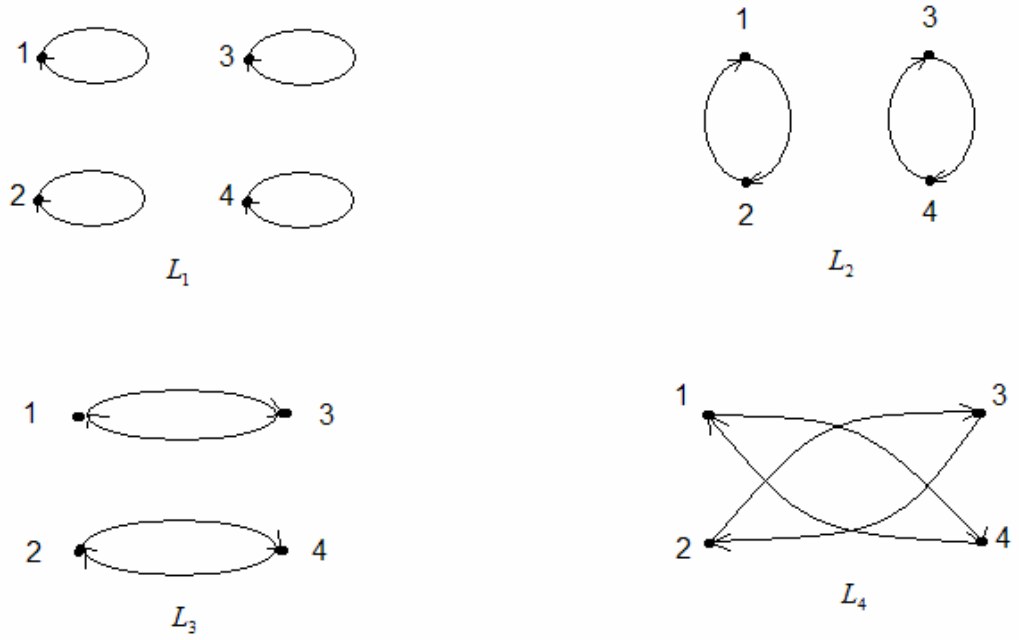
8.3. Latin Kare ve Grafik Faktörleşmesi

İlk olarak matris toplamının $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ olacak şekilde aşağıdakiler dikkate alınsın.

$$L = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \text{ ve}$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}
 L_1 =
 \begin{array}{cccc}
 0 & 2 & 0 & 0 \\
 2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 \\
 0 & 0 & 2 & 0
 \end{array}
 L_2 =
 \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 3 \\
 3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 3 & 0 & 0
 \end{array}
 L_3 =
 \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 4 \\
 0 & 0 & 4 & 0 \\
 0 & 4 & 0 & 0 \\
 4 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 L_4 =$$

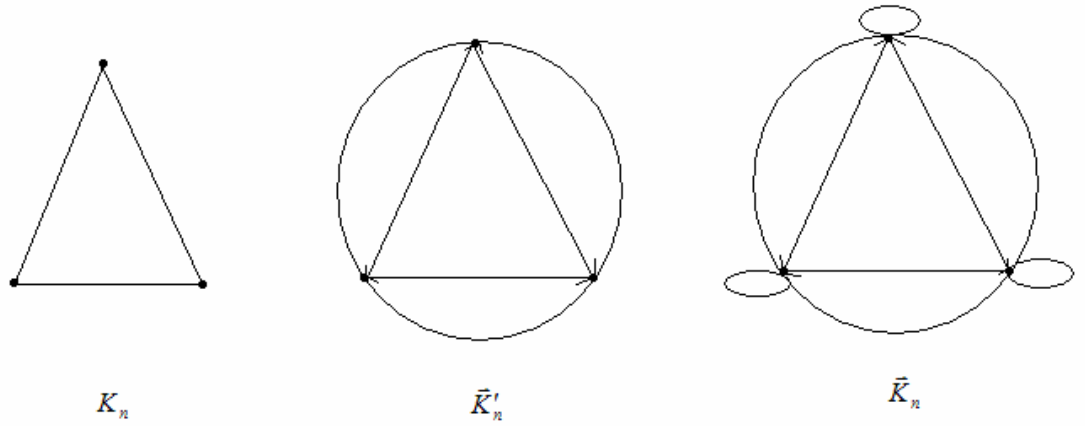
Her matris L_1, L_2, L_3, L_4 Şekil 8.2 'de noktalarla gösterilen doğal bir grafiğe sahiptir.



Şekil 8.2. L_1, L_2, L_3, L_4 Latin karelerinin noktalarla gösterimi

8.2. Teorem

$\vec{F}_n = L_n / n! = (n-1)! l_n$, $\vec{K}_n$ in faktörleşmelerinin sayısını verir. L_n ve l_n ayrı ayrı n . mertebeden Latin karelerin ve indirgenmiş Latin karelerin sayısıdır [3].



Şekil 8.3. üç köşe üzerinde tamamlanmış grafikler

Bir matrisin girişleri, köşeleri arasındaki komşular ile gösteriliyorsa matris (komşuluk matrisi) olarak bilinir ve Latin karenin esas köşegen elemanları tek bir sembolden oluşuyorsa unipotent Latin kare olarak bilinir. Komşuluk matrisin üstünde bulunan satırların permütasyonu dikkate alındığında, bu durumda ilk satır doğal dizisindedir. Matris sonuçta bir indirgenmiş Latin kare olacaktır. Böylece, ilk satırı doğal dizisinde olan her unipotent Latin kareden tam bir indirgenmiş Latin kare elde edilebilir.

İndirgenmiş bir Latin kare verilmiş olsun, satırların tam permütasyonu, ilk satır sabit bırakılacak ve esas köşegen üzerindeki elemanlara sıfırlanacak şekilde olsun.

Örneğin,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

satırları dönüştürülmüş Latin kareye uygulanan permütasyon ile aşağıdakiler elde edilecektir.

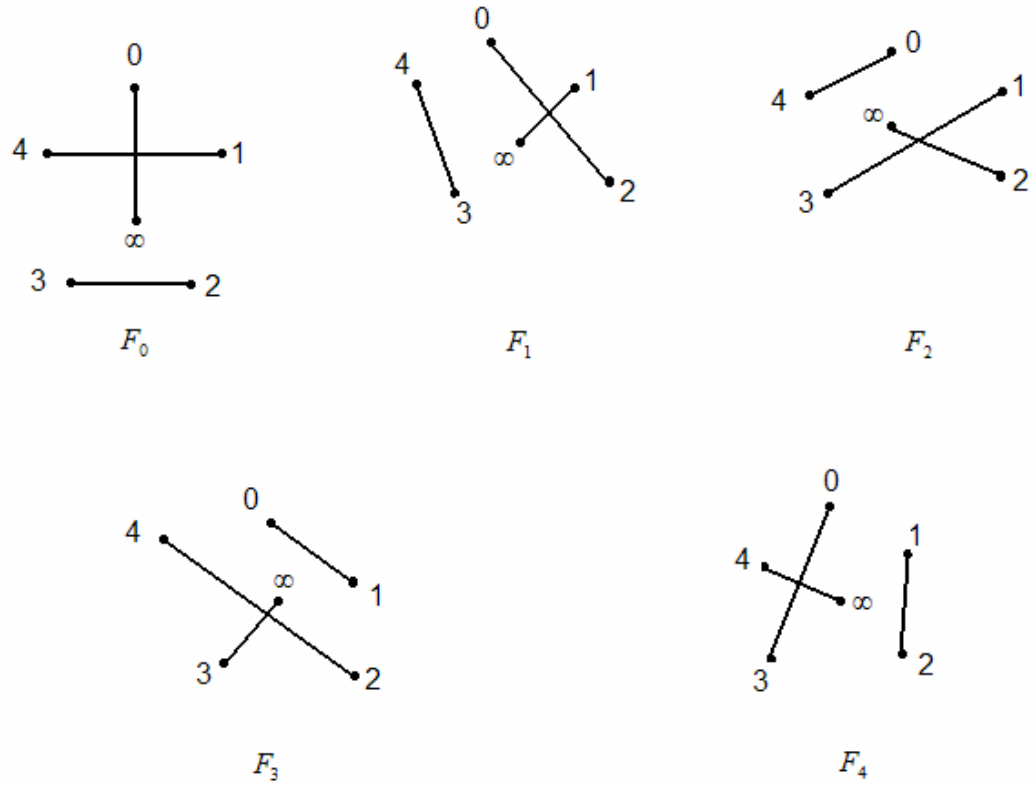
0	1	2	3	0	1	2	3
1	3	0	2	2	0	3	1
2	0	3	1	1	3	0	2
3	2	1	0	3	2	1	0

Bunlardan ilki, bir indirgenmiş Latin kare ve ikincisi, $\vec{K}_4$ 'ün bir 1-faktörleşmesinin komşuluk matrisidir.

Şekil 8.4 'de gösterilen 1-faktörleşmede bu düşünce tarzıyla, indirgenmiş, simetrik, unipotent Latin kare bulunur. Bu aşağıda verilmiştir.

$$\begin{array}{c}
 \infty \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\
 \infty \quad \left(\begin{array}{cccccc}
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 1 & 0 & 4 & 2 & 5 & 3 \\
 2 & 4 & 0 & 5 & 3 & 1 \\
 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\
 4 & 5 & 3 & 1 & 0 & 2 \\
 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$\vec{K}_6$ 'nın 1-faktörleşmesine ilişkin grafikler ile gösterim Şekil 8.4 'de verildiği gibidir.



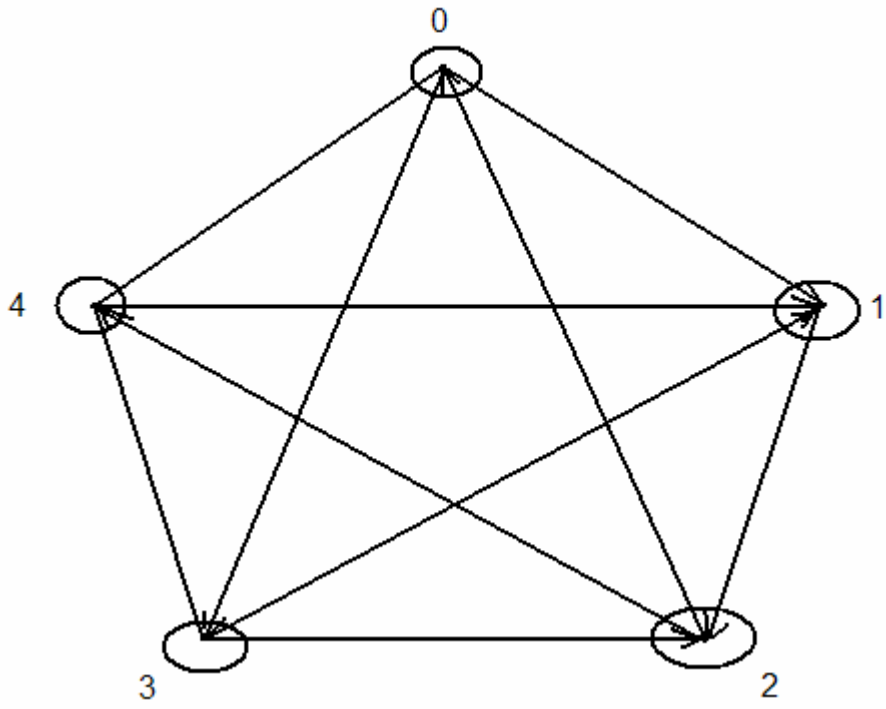
Şekil 8.4. K_6 nın bir 1-faktörleşmesi

8.1. Örnek

$2m=4$ için L_n in ilk iki satırı $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ dır. İlk iki satırın doğal dizisi köşelerin serisini verir.

0, 1, 3, 2, 4, 1, 2, 0, 3, 4

K_5 in bir 1-faktörleşmesi Şekil 8.5 'de gösterilmiştir. İlk köşe 0 'dan başlanır ve bir geri olan 4. köşede durulur.



Şekil 8.5. K_5

9. SONUÇ

Bu tezin amacı, Latin kareleri tanıtmak, Latin kareler ve Latin kare çeşitlerinin kuruluşlarını çeşitli geometriler yardımıyla ortaya koymak ve Latin kareler ile diğer tasarımları incelemek amacıyla yapılmıştır. Bu amaç doğrultusunda öncelikle Latin kareler, dengeli tamamlanmamış blok tasarımları (BIBD), üçlü sistemler ve Stenier üçlü sistemler (STS), ikili dengeli tasarım (PBD), transversal tasarım (TD), dik dizim (OA) tanımları yapılmıştır. Latin karelerin bu tasarımlarla ilişkisi incelenmiştir. Daha sonra dik Latin kare tam setlerinin (MOLS) kuruluşunda projektif geometri incelenmiş ayrıntıya girmeden Latin kare çeşitleri ve grafikleri tanıtılmaya çalışılmıştır. Tezin içerisinde;

Latin karelerin ilişkili olduğu Tasarımlar, geometrik yapılarını irededelemde ele alınan örnekler ve gösterimler orjinaldir.

Latin kareleri, grafik Teoride de önemli uygulama alanı bulmuştur. Bunun için iyi bir grafik Teori bilgisine ihtiyaç vardır. Tezin içeriği gereği bu konuya fazlaca girilmemiştir. Ancak bu alanda çalışan araştırmacılara bir yol göstermesi bakımından bazı temel bilgiler üzerinde durulmuş, konunun anlaşılabilmesi için örnekler verilmiştir.

Sonuç olarak bu tezin amacı, Latin Karenin özellikleri kullanılarak, Tasarım Teorisi, ve buna bağlı olarak Kodlama Teorisinde önemli uygulama alanı bulmanın mümkün olduğunu ve hala bir çok açık problemin bulunduğunu araştırmacılara iletmektir.

KAYNAKLAR

- [1] Street, A. P., and Street, D. J., “Combinatorics of Experimental Design” *Clarendon Pres*, Oxford, 10-12, 38-39, 109-121, 126-143 (1987)

- [2] Colbourn. C. J., and Dinitz J. H., “The CRC Handbook of Combinatorial Designs”, *CRC Pres*, Boca Raton, New York, London, Tokyo, 47-51, 66-67, 70-71, 231-232, 430-432 (1996)

- [3] Laywine, C. F., and Mullen, G. L., “Discrete Mathematics Using Latin Squares” *A Wiley Interscience Publication*, New York, Chicbester, Weinbeim, Brisbane, Singapore, Toronto 18-20, 106-115 (1959)

- [4] Hughes, D. R., and Piper, F. C., “Design Theory”, *Cambridge University Pres*, Cambridge, 1-35 (1985)

- [5] Aigner, M., “On The Dual of The Tactical Configuraions and Orthogonal Arrays of Index Unity” *Sankya, Series A*, 221-228 (1972)

- [6] Bose, R. C., and Bush, K. A., “Orthogonal Arrays of Strength Two and Three” *Ann. Math. Stat.*, 508-524, (1952)

- [7] Brucrth, R. H., “Finite Nets II. Uniqueness and Imbedding” *Pasific J. Math.*, 13, 421-457 (1963)

- [8] Cherowitzo, W., “Comb. Structures Notes on Block Designs”
<http://www-math.cudenver.edu/~wcherowi/courses/m6406/cslnm.html>
 (20.02.2002)

- [9] Stinson, D. R., “Combinatorial Designs Constructions and Analysis” *Springin - Verlag New York Inc.* (2004)
- [10] Bose, R. C., “ Strongly Redgular Graphs, Partial Geometries and Partially Balanced Designs” *Pasific. J. of Maths, 13*, 389-419 (1963)
- [11] Gönen, S., Bayrak, H., Sanal Deney Düzenine Geometrik Yaklaşım. “İstatistik Günleri” Sempozyumu. *Çukurova Üniversitesi*, Matematik Bölümü. (1998)
- [12] Gönen, S., Bayrak, H., “Sanal Deney Düzeninde Dualite”, İstatistik Konferansı, *Gazi Üniversitesi*, İstatistik Bölümü, (1998)
- [13] Harsberger, B., “Rectengular Lattices, *Virginia Agr. Exp. Mem.,I*, (1947)
- [14] Bayrak, H., “Lineer Modellerde Tamamlanmamış Bloklar Üzerine Bir İnceleme” Doktora Tezi” *K. T. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü*, Trabzon 44-50 (1991)
- [15] Colbourn, C. J., and Dinitz J. H., Mutually Orthogonal Latin Squares: A Brief Survey of Constructions” *Planning and Inference 95*, 9-14, 93-95 (2001)
- [16] Harsberg, B., Davis, L. L., “Latinized Rectengular Lattices”, *Biometrics, 8*, 73-84 (1952)
- [17] Hedayat, A. S. and Stufken, J., “Compound Orthogonal Arrays” , *Techonometrics*, (1999)
- [18] Hedayat, A. S., Sloane, N. J. A., Stufken, J., “Orthogonal Arrays”, *Springer-Verlag*, preface x-xiii, 1, (1999)

- [19] Jungnickel, D., Sane, S. S., “On Extensions Of Nets”, *Pacific Journal Of Mathematics*, Vol. 103, No.2 (1982)
- [20] MacNeish, H. F., “Euler’s Squares”, *Annals Of Mathematics*, **23**, 221-227 (1922)
- [21] Bayrak, H., Alhan, A., “On The Construction of Orthogonal Arrays” Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics Volume 31; 45-51 (2002)
- [22] Mann, H. B., “Analysis and Design of Experiments”, *Dover Publications*, Inc. New York, 1950
- [23] Hanani, H., “On Transversal Design” *In: Proceedings of The Advanced Study Institute on Combinatorics*, 42-55, Mathematical Centre Tracts, 55, Mathematics Centrum, (1974)
- [24] Cameron, P. J., “Pairwise Balanced Design” *The Encyclopaedia of Design Theory*, 30 May 2003
- [25] Shirikhande, S. S. and Bhagwandas, “Duals of Incomplete Block Design”, *J. Indian Stat. Assn.*, **3**, 30-37 (1965)
- [26] Bulut, H., “Otogonal Dengeli Tamamlanmamış Blok Düzenleri” *Yüksek Lisans Tezi G. Ü.* (2005)
- [27] Owens, P. J., “Complete Sets of Pairwise Latin Squares and Corresponding Projective Planes” *Journal of Combinatorial Theory, Series A*59, 240-252 (1993)

- [28] Chakvarti, I. M., “Orthogonal and Partially Balanced Arrays and Their Applications In Design of Expeiment” *Metrika* 7; 231-243 (1963)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı Adı: ÖZBEN Fatma

Uyruğu: TC

Doğum Tarihi ve Yeri: 28.10.1979 Ankara

Medeni Hali: Bekar

Telefon: 0 (312) 362 50 10

E-mail: fatmaozben@hotmail.com

Eğitim DerecesiEğitim BirimiMezuniyet Tarihi

LisansSelçuk Ün.-İstatistik Bölümü 2002

İş Deneyimi

YılYerGörev

2002-2003Axa-OyakFinansal Danışman

2003-2004Türk Haberler AjansıHalkla İlişkiler

2004-2006Etkili DersanesiÖğretmen

2006-200.VakıfbankMemur

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Matematik, Müzik