

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**DİK TOPLANAN ALT MODÜLLERİN ARAKESİTİ VE TOPLAMLARININ
DİK TOPLAM ÖZELLİĞİ İLE MODÜL VE HALKALARIN
KARAKTERİZASYONU**

Eren DOĞAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

MAYIS 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**DİK TOPLANAN ALT MODÜLLERİN ARAKESİTİ VE TOPLAMLARININ
DİK TOPLAM ÖZELLİĞİ İLE MODÜL VE HALKALARIN
KARAKTERİZASYONU**

Eren DOĞAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

MAYIS 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİK TOPLANAN ALT MODÜLLERİN ARAKESİTİ VE TOPLAMLARININ
DİK TOPLAM ÖZELLİĞİ İLE MODÜL VE HALKALARIN
KARAKTERİZASYONU

Eren DOĞAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez/...../20..... tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ

Prof. Dr. Seçil ÇEKEN GÜNEŞ

Prof. Dr. Fatih KARABACAK

Doç. Dr. Ortaç ÖNEŞ

ÖZET

DİK TOPLANAN ALT MODÜLLERİN ARAKESİTİ VE TOPLAMLARININ DİK TOPLAM ÖZELLİĞİ İLE MODÜL VE HALKALARIN KARAKTERİZASYONU

Eren DOĞAN

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Mayıs 2025, 70 sayfa

Kaplansky (1954) tarafından ilk olarak ele alınan; bir modülün iki dik toplananı arasındaki ilişki ve bağlantıların incelenmesi günümüzde de birçok çalışmanın konusu olmaya devam etmektedir. Bir R -modül M 'nin herhangi alınan iki dik toplananın kesişimi yine bir dik toplanan olur ise M modülüne toplanan kesişim özelliğine (summand intersection property) kısaca SIP özelliğine sahip modül denir. SIP özelliğine sahip modüller Wilson (1986) tarafından tanımlanarak literatüre kazandırılmıştır. İlerleyen zamanlarda yapılan çalışmalar neticesinde SIP modüllerin duali olarak kabul edilen toplanan toplam özelliği (summand sum property) kısaca SSP özelliğine sahip modüller, Garcia (1989) tarafından M R -modülünün alınan herhangi iki dik toplananın toplamı yine bir dik toplanan olur ise M modülüne SSP özelliğine sahip modüldür şeklinde tanımlanmıştır.

Literatüre kazandırılmış iki önemli kavram olan SSP ve SIP modülleri ile ilgili olarak birçok araştırmacı modüllerin karakterizasyonu konusunda önemli çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmalarda SSP ve SIP modül ailelerinin pek çok genellemesini ve karakterizasyonunu elde etmişlerdir (Abyzov ve Tuganbaev 2014 ; Alkan ve Harmancı 2002; Amin, İbrahim ve Yousif 2014 ; Anderson ve Fuller 1974; Arnold ve Hausen 1990; Clark, Lomp, Vanaja ve Wisbauer 2006; Dung, Huyn, Smith ve Wisbauer 1994; Fuchs 1970; Hausen 1989; Kasch 1982; Karabacak ve Tercan 2007; Nicholson ve Yousif 2003; Taşdemir ve Karabacak 2019; Valcan 2009; Wisbauer 1991).

Bu bağlamda ele alınan çalışmada, SIP ve SSP modüllerinin birer genellemeleri olan $ESIP$ ve $ESSP$ modüllerin tanımları verilmiş, $ESIP$ ve $ESSP$ modüllerin sahip oldukları özellikleri araştırılmış ve modüllerin karakterizasyonu elde edilmiştir. M bir R -modül olmak üzere; her $A, B \leq_d M$ için $A \cap B \leq_e D$ olacak şekilde $D \leq_d M$ var ise M modülüne büyük - kesişim özelliğine (essential summand intersection property) sahip bir modül; benzer olarak $A + B \leq_e D$ olacak şekilde $D \leq_d M$ var ise M modülüne büyük - toplam özelliğine (essential summand sum property) sahip bir modüldür denilmiştir. Çalışmanın devamında $ESIP$ ve $ESSP$ modüller ile SIP ve SSP modüllerin arasındaki farklara değinilerek bu farkların anlaşılabilmesi için örnekler verilmiştir. Halka ve modüllerin hangi koşullar altında $ESIP$ ve $ESSP$ özelliklerine sahip olacakları ayrı ayrı incelenmiş ve bu inceleme sonucunda elde edilen koşullar verilmiştir. Halka ve modüller üzerinde $ESIP$ ve $ESSP$ özelliklerinin karakterizasyonu araştırılmış, SIP ve SSP ile ilgili önermeler $ESIP$ ve $ESSP$ özelliklerine genelleştirilmiştir. Elde edilen kavram, koşul ve önermeler yardımı ile halka ve modüllerin farklı karakterizasyonu elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELELER: Dik toplam, Dik toplanan, ESIP, ESSP, Modül, SIP, SSP.

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ

Prof. Dr. Seçil ÇEKEN GÜNEŞ

Prof. Dr. Fatih KARABACAK

Doç. Dr. Ortaç ÖNEŞ

ABSTRACT

CHARACTERIZATION OF MODULES AND RINGS WITH THE INTERSECTION OF DIRECT SUMMANDS SUB-MODULES AND THE SUM OF THEIR SUMS

Eren DOGAN

PhD Thesis in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa ALKAN

May 2025, 70 pages

The study of the relations between two direct summands was initiated by Kaplansky (1954), continues today. If the intersection of any two direct summands of an R -module M is also a direct summand, the M module is called a SIP module. SIP modules was given by Wilson (1986). In this context, the SSP module, which is considered as dual of SIP modules, was defined and introduced into the literature by Garcia (1989) as the SSP module, if the sum of two direct summands is a direct summand of M . Afterwards, many author studies were conducted regarding SSP and SIP modules. They obtained many generalizations and characterizations of the SSP and SIP module families from these studies (Abyzov and Tuganbaev 2014 ; Alkan and Harmancı 2002; Amin, İbrahim and Yousif 2014 ; Anderson and Fuller 1974; Arnold and Hausen 1990; Clark,Lomp, Vanaja and Wisbauer 2006; Dung,Huyn,Smith and Wisbauer 1994;Fuchs 1970; Hausen 1989; Kasch 1982; Karabacak and Tercan 2007; Nicholson and Yousif 2003; Taşdemir and Karabacak 2019; Valcan 2009; Wisbauer 1991).

In this work, the definitions of $ESIP$ and $ESSP$ modules, which are generalizations of SIP and SSP modules, are given and the features of $ESIP$ and $ESSP$ modules are investigated. Let M be an R -module; for every $A, B \leq_d M$ if there is $D \leq_d M$ such that $A \cap B \leq_e D$, then M has an essential summand intersection property and for every $A, B \leq_d M$ if there is $D \leq_d M$ such that $A + B \leq_e D$, it is said that the M module has the essential summand sum property. Then, the differences between $ESIP$ and $ESSP$ modules and SIP and SSP modules are mentioned and examples are given to understand these differences. The conditions under which rings and modules would have

ESIP and *ESSP* properties are examined separately and the conditions obtained as a result of this examination were given. Characterization of *ESIP* and *ESSP* properties on rings and modules has been investigated, and theorems regarding *SIP* and *SSP* have been generalized to *ESIP* and *ESSP* properties.

KEYWORDS: Direct Sum, Direct Summnad, ESIP, ESSP, Modules, SIP, SSP.

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ

Prof. Dr. Seçil ÇEKEN GÜNEŞ

Prof. Dr. Fatih KARABACAK

Assoc. Prof. Dr. Ortaç ÖNEŞ

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması boyunca deneyimleri ve engin bilgi birikimleri ile daima yanımda olan, kendisine ihtiyacım olduğu zaman bütün desteği ve tüm samimiyeti ile yanımda olan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa ALKAN'a teşekkürü bir borç bilirim. Doktora süreci boyunca her zaman yanımda olan, desteğini ve yardımlarını hiç bir zaman esirgemeyen başta sevgili eşim Doç. Dr. Semra GÜRTAŞ DOĞAN'a ve aileme bu güzel yolculuk boyunca yanımda oldukları için minnettarım. Kendilerine binlerce kez teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ	v
AKADEMİK BEYAN	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	4
2.1. Modül Kavramı	4
2.2. Büyük (Essential) ve Küçük (Small) Alt Modüller	11
2.3. Tam Diziler, Projektif (Projective) ve İnjektif (Injective) Modüller	16
2.4. İnjektif Zarf (Injective Hull)	23
3. MATERYAL VE METOT	24
3.1. SIP ve SSP Modüller	24
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	44
4.1. ESIP ve ESSP Modüller	44
5. SONUÇLAR	66
6. KAYNAKLAR	68
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum “Dik Toplanan Alt Modüllerin Arakesiti ve Toplamlarının Dik Toplam Özelliği ile Modül ve Halkaların Karakterizasyonu ” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

...../...../20.....

Eren DOĞAN

İmza



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$=$	: Eşit
$\neq$	: Eşit değil
$\in$	: Eleman
$\notin$	: Eleman değil
$\subseteq$	: Alt küme
$\subset$	: Öz alt küme
$\exists$	: En az bir
$\forall$	: Her
$\cap$	: Kesişim
$\Rightarrow$	: İse
$\Leftrightarrow$	: Ancak ve ancak
$\cong$	: İzomorf
$\leq$	: Alt modül
$\leq_d$	: Dik toplanan alt modül
$\leq_e$	: Büyük (Essential) alt modül
$\leq_c$	: Kapalı alt modül
$\oplus$	: Dik toplam
$\ll$	: Küçük (Small) alt modül
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar halkası
R/N	: Bölüm modülü
$\oplus P_i$	: P_i modüllerin dik toplamı
$E(M)$	: M 'nin injektif zarfı (injective hull)
$\ker f$	: f 'nin çekirdeği
$Im f$	: f 'nin görüntüsü
$f _A$	: f 'nin A modülüne kısıtlanması
$Hom_R(M, N)$	: M 'den N 'ye R -homomorfizmaların kümesi
$End_R(M)$	: M 'nin R -homomorfizmalar halkası

Kısaltmalar:

$ESIP$	: Büyük Toplanan Kesişim Özelliği
$ESSP$	: Büyük Toplanan Toplam Özelliği
SIP	: Dik Toplanan Kesişim Özelliği
SSP	: Dik Toplanan Toplam Özelliği
PID	: Temel İdeal Bölgesi
$R - MOD$	: Birimli Modüllerin Kategorisi
UC	: Tek Kapanış



1. GİRİŞ

SIP ve SSP özellikli modüller üzerine yapılan ilk öncü çalışma, Kaplansky tarafından 1954 yılında gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmasında Kaplansky, temel ideal bölgelerinde (PID) serbest modüllerin iki toplananının kesişiminin yine bir toplanan olduğunu ortaya koyarak, bu alandaki sonraki araştırmalara yön vermiştir (Kaplansky 1954). Ardından Fuchs (1970), değişmeli gruplarda iki dik toplananın ara kesitinin de dik toplanan olabilmesi için hangi koşulların sağlanması gerektiği sorusunu gündeme getirerek, SIP ve SSP özelliklerine sahip modüller üzerine yapılan çalışmaların daha farklı yönlerde gelişmesine katkı sağlamıştır. Wilson 20. yy sonlarına doğru yaptığı çalışmada, bir modülün iki dik toplananının arakesiti yine bir dik toplanan olur ise ele alınan modül *SIP* özelliğine sahiptir diyerek *SIP* modüllerin tanımını yaparak literatüre kazandırmıştır. Aynı çalışmada *SIP* ile ilgili birçok özelliğin anlatıldığı Noetherian bölgelerinde injective modüle sahip *SIP* modüllerinin yanısıra Dedekind bölgelerinde *SIP* özelliğine sahip torsion modülleri incelenmiştir (Wilson 1986).

Bu çalışmanın ardından Garcia, *SIP* özelliğine sahip modüllerin bir duali olarak literatüre kazandırılmış olan *SSP* özelliğine sahip modüller; bir modülün iki dik toplananının toplamı yine bir dik toplanan olur ise modül *SSP* özelliğine sahiptir diyerek tanımlamış ve *SSP* ye sahip modüller ile ilgili temel özelliklere değinerek hangi şartlarda iki dik toplananın toplamının da dik toplam olabileceğini araştırmıştır (Garcia 1989).

Modüllerin sahip oldukları *SIP* ve *SSP* özellikleri Modül ve Halka Teorisinde önemli bir yere sahip hale gelmiştir. Wilson ve Garcia'dan sonra, *SIP* ve *SSP* özelliklerine sahip modül aileleri ve bu modül ailelerinin genellemesi ve karakterizasyonu ile ilgili bir çok yazar araştırmalarını ve çalışmalarını sürdürmüşlerdir (Hausen 1989; Wisbauer 1991; Abyzov 2014).

Bu tez çalışması boyunca, aksi belirtilmedikçe üzerinde çalışılan halkalar dağılmalı ve birimli halkalar, modüller ise birleşmeli sol modüller olarak alınacaktır.

Bu çalışmada *SIP* ve *SSP* özelliklerine sahip modüllerin genellemeleri olan *ESIP* ve *ESSP* modüller tanımlanmış ve bu modül ailelerine örnekler verilmiştir. M bir R -

modül olmak üzere; her $E, S \leq_d M$ için $E \cap S \leq_e D$ olacak şekilde $D \leq_d M$ var ise, M modülüne büyük - kesişim özelliğine (essential summand intersection property) sahiptir denir. Kısaca M modülü $ESIP'$ dir şeklinde ifade edilir. M bir R -modül olmak üzere; her $E, S \leq_d M$ için $E + S \leq_e D$ olacak şekilde $D \leq_d M$ var ise, M modülüne büyük toplam özelliğine (essential summand sum property) sahiptir denir. Kısaca M modülü $ESSP'$ dir şeklinde ifade edilir.

Kaynak taramasının ilk bölümünde yapılan çalışmaların daha iyi anlaşılabilmesi için halkalar ve modüller ile bilinmesinde fayda gördüğümüz önemli tanımlara, belirli özelliklere ve temel teoremlere yer verilmiştir.

Kaynak taramasının ikinci bölümünde sırasıyla büyük (essential) alt modüller ve küçük (small) alt modüller ele alınmıştır. Üzerinde çalışılan konunun kavranabilmesine yardımcı olacak olan ve aynı zamanda geniş bir çalışma alanına sahip olan büyük (essential) ve küçük (small) alt modüllerin tanımları yapılmış, bu özelliklere sahip modül aileleri üzerine örnekler verilmiştir.

Kaynak taramasının üçüncü bölümünde sırasıyla tam diziler üzerine temel bilgilere değinilmesinin ardından, çalışmada bize yardımcı olacak ve ismi pek çok yerde geçecek olan projektif (projective) modüller ile ilgili temel bilgiler, özellikler ile birlikte çeşitli teorem ve önteoremlere yer verilmiştir.

Kaynak taramasının dördüncü bölümünde injektif (injective) modüllerin tanımı verilmiş olup bu modül ailesinin bize çalışmada yardımcı olacak özellikleri ve koşulları, çeşitli teorem, önerme ve ispatlara yer verilmiştir.

Son kısımda injektif zarflar (injective hull) ele alınmıştır. Bu bağlamda ele alınan injektif zarfın tanımı verilerek sahip olduğu özelliklere değinmek için önerme ve teoremlerden faydalanılmıştır. Sonrasında, her iki modül ailesinin karakteristik özellikleri, ilgili teorem, önerme ve ispatlarla açıklanarak analizlerde temel referans noktaları olarak yeniden ortaya konmuştur.

Materyal ve metot kısmında birçok çalışmaya ilham olmuş ve bu tezde bize yardımcı olacağını düşündüğümüz SIP ve SSP özelliklerine sahip modüllerin tanımları verilmiştir. SIP ve SSP özelliklerine sahip modül ailelerinin özelliklerine değinilmiş ve hangi koşullar altında bu özelliklere sahip olduğu ifade edilmiştir. SIP ve SSP özelliklerine

sahip modüller ile ilgili çeşitli tanımlar, teoremler, önteoremler ve ispatlara değinilerek çalışmaya devam edilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde ise *SIP* ve *SSP* özelliklerine sahip modül ailelerinin yeni bir karakterizasyonu yapılmıştır. Bu bağlamda elde edilen yeni modül ailelerine *ESIP* ve *ESSP* modüller tanımlanmıştır ve sırasıyla M bir R -modül olmak üzere; her $E, S \leq_d M$ için $E \cap S \leq_e D$ olacak şekilde $D \leq_d M$ var ise, M modülüne büyük - kesişim özelliğine (essential summand intersection property) sahip ve $E + S \leq_e D$ olacak şekilde $D \leq_d M$ var ise, M modülüne büyük - toplam özelliğine (essential summand sum property) sahiptir denilmiştir. Elde edilen yeni modül aileleri ile *SIP* ve *SSP* modülleri arasındaki ilişki incelenmiş ve bu ilişkiler üzerine örnekler verilmiştir. Son olarak, *ESIP* ve *ESSP* özelliklerine sahip modüllere ilişkin önteoremler ve ispatlara yer verilerek, çalışmanın bu bölümüne dair genellemeler tamamlanmıştır. Elde edilen yeni kavramlar, sunulan yeni önermeler ve koşullar yardımı ile halka ve modüllerin karakterizasyonu sağlanmıştır.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Modül Kavramı

Bu bölümde, çalışmamızın temel çatısını oluşturan modüller ile ilgili olarak bilinmesinde fayda gördüğümüz temel kavramlar, tanımlar, önermeler ve teoremlere yer verilecektir. Bu bağlamda Kasch (1982) ve Anderson (1974) temel kaynaklardan faydalanarak temel modül teori bilgilerini hatırlayalım. Tez içinde verilmeyen diğer bilgiler için aynı kaynaklardan yararlanılabilir.

Tanım 2.1. *R bir halka ve M değişmeli (abel) bir grup olmak üzere, her $e, s \in M$ ve her $x, y \in R$ elemanları için ;*

$$R \times M \rightarrow M \text{ dönüşümü}$$

$$i) x(e + s) = xe + xs,$$

$$ii)(x + y)e = xe + ye,$$

$$iii)(xy)e = x(ye)$$

ifadelerini sağlıyor ise M modülüne (sol) R - modül denir. Ele alınan

$$R \times M \rightarrow M \text{ dönüşümü}$$

$$i) (e + s)x = ex + sx,$$

$$ii)e(x + y) = ex + ey,$$

$$iii)e(xy) = (ex)y$$

ifadelerini sağlıyor ise M modülüne bir (sağ) R - modül denir.

Ele alınan R halkasının değişmeli olması durumunda sağ modül ve sol modül aynı yapıya sahip olacaktır. Bu durumu görmek için $r, t \in R$ ve $a \in M$ olmak üzere

$$a(rt) = (rt)a = (tr)a = t(ra) = t(ar) = (ar)t$$

eşitliği yeterli olacaktır. Bu durumda M modülüne bir R -modül denir.

M bir R -modül olsun. Alınan her $a \in M$ elemanı için $a(1_R) = a$ oluyorsa M modülüne birimsel (unitary) modül denir.

Örnek 2.2. C bir cisim ve V cisim üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Bu durumda V bir C -modüldür.

Örnek 2.3. Her toplamsal değişmeli G grubu ; $\mathbb{Z} \times G \rightarrow G$ şeklinde tanımlanan dönüşümü ile bir $\mathbb{Z}$ -modül olur. Bunu görmek kolaydır. z_1 ve $z_2 \in \mathbb{Z}$ ve q_1 ve $q_2 \in G$ olmak üzere;

i)

$$\begin{aligned} z_1(q_1 + q_2) &= (q_1 + q_2) + \dots + (q_1 + q_2) \quad (z_1 \text{ defa}) \\ &= (q_1 + q_1 + \dots q_1) + (q_2 + q_2 + \dots q_2) \\ &= z_1(q_1) + z_1(q_2) \end{aligned}$$

olur.

ii)

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)q_1 &= q_1 + q_1 + \dots q_1, \quad (z_1 + z_2 \text{ defa}) \\ &= (q_1 + q_1 + \dots q_1) + (q_1 + q_1 + \dots q_1) \\ &= z_1(q_1) + z_2(q_1) \end{aligned}$$

elde edilir.

iii) Son olarak

$$(z_1 z_2)q_1 = z_1(z_2 q_1)$$

olduğu açıktır. Elde edilen sonuç ile G 'nin bir $\mathbb{Z}$ -modül olduğu görülmüş olur.

Örnek 2.4. R bir halka ve D ele alınan halkanın bir ideali olmak üzere; $R \times R/D \rightarrow R/D$ tanımlanan dönüşüm ile birlikte R/D bir R -modüldür.

Tanım 2.5. M bir R -modül ve K , M modülünün boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere eğer K , R -modül olma koşullarını kendi başına yerine getirebiliyorsa K modülü için M modülünün bir alt modülüdür denir ve $K \leq M$ şeklinde gösterilir. Tanımdan kolayca görüleceği üzere M ve $\{0_M\}$, M modülünün aşık alt modülleridir.

Teorem 2.6. M bir R -modül ve $M \supseteq N \neq \emptyset$ olmak üzere; N alt modüldür ancak ve ancak; her $e, s \in M$ ve her $x, y \in R$ için, $xe + ys \in N$ olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$) Tanım gereği açıktır.

$\Leftarrow$) Her $e, s \in M$ ve her $x, y \in R$ için, $xe + ys \in N$ olsun. Bir önceki önermeden $x = 1$ ve $y = -1$ alınırsa $e - s \in N$ olur. Dolayısıyla N, M modülünün alt grubudur. Devamında alınan her $x \in R$ ve her $e \in M$ için $xe \in N$ olur. Buradan M modülünün her elemanı için skaler çarpım özellikleri sağlandığı için sonuca ulaşılmış olunur. $\square$

Önerme 2.7. M , bir R -modül ve A_i ($i = 1, \dots, n$), M modülünün alt modülleri ailesi olmak üzere; oluşan $\bigcap_{i=1}^n A_i$ modülü de M modülünün bir alt modülü olur.

İspat Her i için $0_M \in A_i$ olduğundan dolayı $0_M \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ olur. Dolayısıyla $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$ dir. $a, b \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ ve $r \in R$ olmak üzere, her i indisi için $a - b \in A_i$ ve $ra \in A_i$ olduğundan $a - b \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ ve $ra \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ olur. Bu durumda $\bigcap_{i=1}^n A_i$ ifadesinin, M nin bir alt modülü olduğu görülmüş olur. $\square$

Son önermeden hareket ile alt modüller ile yeni bilgiler vermeye devam edelim;

Tanım 2.8. M , bir R -modül ve K , M modülünün bir alt kümesi olmak üzere

$$\chi = \{A \mid K \subseteq A \leq M\}$$

olacak şekilde χ kümesi tanımlanmış olsun. Bu durumda $T = \bigcap_{N \in \chi} A$ alt modülü, M modülünün K yı kapsayan en küçük alt modülüdür. T alt modülüne K kümesi tarafından üretilmiş alt modül denir ve (K) ile gösterilir. Eğer $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ kümesi sonlu ise T alt modülüne sonlu üretilmiş alt modüldür denir ve $(K) = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ ile gösterilir. Dahası M bir R -modül ve e M modülünün bir elemanı olmak üzere;

$$(e) = \{xe + le \mid x \in R, l \in \mathbb{Z}\}$$

olacak şekilde tanımlanan alt modüle, e tarafından üretilmiş olan devirli alt modül denir. Eğer R halkası birimli ve M bir birimsel (unitary) modül ise

$$(e) = Re = \{xe \mid x \in R\}$$

dir.

Tanım 2.9. M , bir R -modül ve $A \leq M$ olmak üzere $M/A = \{e + A \mid e \in M\}$ kümesi alınan $(e + A), (s + A) \in M/A$ ve $x \in R$ elemanları ile aşağıdaki işlemleri sağlıyor ise M/A , bir R -modül olur.

$$i)(e + A) + (s + A) = (e + s) + A$$

$$ii)(e + A)x = (ex) + A. \text{ Bu durumda } M/A \text{ modülüne bölüm modülü denir.}$$

Tanım 2.10. M ve N birer R -modül ve $\lambda : M \rightarrow N$ şeklinde ifade edilmiş M 'den N 'ye tanımlanan bir dönüşüm olmak üzere eğer λ dönüşümü $m, s \in M$ ve $x \in R$ için

$$i)\lambda(m + s) = \lambda(m) + \lambda(s),$$

$$ii)\lambda(x.m) = x.\lambda(m)$$

koşullarını sağlıyorsa λ dönüşümüne modül homomorfizması denir. $\lambda : M \rightarrow N$ 'ye tanımlanan tüm homomorfizmalar kümesinin gösterimi için $Hom_R(M, N)$ kullanılır. Eğer $M = N$ ise homomorfizma endomorfizma olarak adlandırılır ve $End_R(M)$ ile gösterilir. Ayrıca

$$i) \lambda \text{ homomorfizması birebir ise monomorfizma,}$$

$$ii) \lambda \text{ homomorfizması örten ise epimorfizma,}$$

iii) λ homomorfizması hem birebir hem de örten ise bu durumda λ dönüşümü izomorfizma olarak adlandırılır ve $M \cong N$ ile gösterilir.

Örnek 2.11. V ve W , K üzerinde vektör uzaylar olmak üzere $V \rightarrow W$ arasında oluşturulan lineer dönüşümler modül homomorfizmalardır.

Tanım 2.12. M ve N , R halkası üzerinde iki modül ve λ , M modülünden N modülüne tanımlanan bir modül homomorfizması olsun. Tanımlanan $\ker \lambda = \{e \in M : \lambda(e) = 0_N\}$ kümesine λ 'nın çekirdeği denir.

M ve N birer R -modül ve λ , M modülünden N modülüne tanımlanan bir modül homomorfizması olsun. Bu durumda tanımlanan $im \lambda = \{\lambda(e) : e \in M\}$ kümesine λ 'nın görüntüsü denir.

Önerme 2.13. M ve N , R -modülleri için, λ dönüşümü M 'den N 'ye olacak şekilde tanımlanan bir homomorfizma olmak üzere;

i) $\ker \lambda$, M modülünün bir alt modülüdür.

ii) $\operatorname{im} \lambda$, N modülünün bir alt modülüdür.

İspat i) $\lambda(0_M) = 0_N$ olduğundan dolayı $0_M \in \ker \lambda$ olacaktır. Dolayısıyla $\ker \lambda \neq \emptyset$ olur. Devamında $e, s \in \ker \lambda$ olmak üzere

$$\lambda(e - s) = \lambda(e) - \lambda(s) = 0_N - 0_N = 0_N$$

olduğundan $e - s \in \ker \lambda$ olur. Son olarak $e \in \ker \lambda$ ve $x \in R$ elemanlarını için;

$$\lambda(xe) = x\lambda(e) = x 0_N = 0_N$$

elde edilir.

ii) Benzer şekilde $0_N = \lambda(0_M)$ ve $0_M \in M$ olduğu açıktır. $n_1, n_2 \in \operatorname{im} \lambda$ olsun. Bu durumda $f(e) = n_1$ ve $\lambda(s) = n_2$ olacak şekilde $e, s \in M$ vardır. Buradan

$$n_1 - n_2 = \lambda(e) - \lambda(s) = \lambda(e - s)$$

olur. $(e - s) \in M$ olduğundan dolayı $n_1 - n_2 \in \operatorname{im} \lambda$ olur. Son olarak $n \in \operatorname{im} \lambda$ ve $x \in R$ olsun. Buradan

$$xn = x\lambda(e) = \lambda(xe)$$

elde edilir. Burada $xe \in M$ olduğundan dolayı $xn \in \operatorname{im} \lambda$ olur. Elde edilen son aitlikten $\operatorname{im} \lambda$ 'nin alt modül olduğu görülmüş olur. $\square$

Önerme 2.14. M ve N R -modül ve λ homomorfizması M 'den N 'ye olacak biçimde tanımlanmış olsun. Bu durumda

i) λ monomorfizmadır ancak ve ancak $\ker \lambda = \{0\}$ 'dir.

ii) λ epimorfizmadır ancak ve ancak $\operatorname{im} \lambda = N$ 'dir.

İspat i) $\Rightarrow$) λ bir monomorfizma olsun. Bu durumda $e \in \ker \lambda$ olmak üzere $\lambda(e) = 0 = \lambda(0_M)$ olduğundan $e = 0_M$ olur. Dolayısıyla $\ker \lambda = \{0\}$ 'dir.

$\Leftarrow$) $\ker \lambda = \{0\}$ olsun. Buradan $e, s \in M$ için $\lambda(e) = \lambda(s)$ ise $e = s$ olur. Dolayısıyla $e - s \in \ker \lambda = \{0\}$ olduğundan $e = s$ elde edilmiş olur.

ii) λ homomorfizması bir epimorfizma olsun. O halde $\lambda(M) = N$ olacağından dolayı $\operatorname{im} \lambda = N$ dir. Tersî açıktır. $\square$

Teorem 2.15. (Modülerite Kuralı) M bir R -modül ve E, S ve D , M modülünün alt modülleri ve $E \subseteq D$ olmak üzere;

$$E + (S \cap D) = (E + S) \cap D$$

dir.

İspat Eşitliğin doğruluğunu görmek için çift taraflı kapsamanın olduğunu gösterelim. Bu sebeple ilk olarak hipotezden

$$E + (S \cap D) \subseteq E + S \text{ ve } E \subseteq D$$

olduğundan

$$E + (S \cap D) \subseteq (E + D) \subseteq D$$

olacaktır. Buradan

$$E + (S \cap D) \subseteq (E + S) \cap D$$

olacaktır. Tersine $x \in (E + S) \cap D$ alınsın. Bu durumda $x \in D$ ve $x = y + z$ olacak şekilde $y \in E$ ve $z \in S$ vardır. $E \subseteq D$ ve $y \in E$ olduğundan dolayı $z = x - y \in S \cap D$ elde edilir. Dolayısıyla $x = y + z \in E + (S \cap D)$ olur. Buradan hareketle

$$(E + S) \cap D \subseteq E + (S \cap D)$$

elde edilir. Dolayısıyla her iki kapsamada görülmüş olur. Buradan istenilen eşitliğin varlığı elde edilir. $\square$

Tanım 2.16. M , R halkası üzerinde bir modül olmak üzere M modülünün aşikar modüllerinin dışında başka bir alt modülü yok ise M modülüne basit (simple) modül denir.

Örnek 2.17. Basit (Simple) modüller üzerine verilebilecek örneklere cisimler en güzel örneklerdir.

Modül teorisi konusu içerisinde önemli bir yere sahip olan tanımlar ile devam edelim. Özellikle aşağıda değineceğimiz iki tanım birçok çalışmaya ışık tutarak yeni çalışmaların yapılmasında önemli rol oynamış ve oynamaya devam edecektir.

Tanım 2.18. M bir R -modül ve $E \leq M$ olsun, M modülünün en az bir S alt modülü için $E \cap S = 0$ ve $M = E + S$ olur ise M modülüne dik toplam denir. $M = E \oplus S$ şeklinde gösterilir. E ve S alt modüllerine M modülünün dik toplananları denir. $E \leq_d M$ ve $S \leq_d M$ ile gösterilir. Burada E ve S birbirlerinin komplementleri olarak isimlendirilir.

Tanım 2.19. R bir halka ve M bir R -modül olmak üzere; M modülünün her alt modülü M modülünün bir dik toplananı ise, M modülüne yarı-basit (semi simple) modül denir.

Örnek 2.20. $R = \mathbb{Z}$ tam sayılar halkası ve $M = \mathbb{Z}_6$ olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}_6$ modülünün alt modülleri $M_1 = 0$, $M_2 = \langle \bar{2} \rangle$, $M_3 = \langle \bar{3} \rangle$ ve $M_4 = M$ olmak üzere; alt modüllerin hepsi $\mathbb{Z}_6$ modülünün dik toplananlarıdır. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_6$ yarı basit (semi simple) modül olur.

Tanım 2.21. M bir R -modül ve $\alpha, \alpha : M \rightarrow M$ şeklinde M modülü üzerinde tanımlanmış bir homomorfizma olmak üzere; $N \leq M$ olduğunda $\alpha(N) \subseteq N$ koşulu sağlanıyorsa N alt modülüne M modülünün tam değişmez alt modülü (fully invariant submodule) denir.

Teorem 2.22. M ve N , R -MOD kategorisinin iki elemanı ve $\alpha : M \rightarrow N$, $\gamma : N \rightarrow M$ olacak ve $\gamma\alpha = id_N$ koşulunu sağlayan R -MOD kategorisinin iki monomorfizması olsun. Bu durumda $M = \ker \alpha \oplus im \gamma$ dir (Wisbauer 1991).

İspat $m = \gamma(n) \in \ker \alpha \cap im \gamma$ ($e \in M$, $n \in N$) olsun. Buradan hareketle

$$0 = \alpha(e) = \alpha\gamma(n) = n \text{ ve } e = \gamma(n) = 0$$

dolayısıyla $\ker \alpha \cap im \gamma = 0$ olur. l , M modülünün herhangi bir elemanı olmak üzere

$$\alpha(\gamma\alpha(l) - l) = \alpha(l) - \alpha(l) = 0$$

olur ve buradan

$$l = (\gamma\alpha(l) - l) + \gamma\alpha(l) \in \ker \alpha \oplus im \gamma$$

elde edilir. Dolayısıyla $M = \ker \alpha \oplus im \gamma$ sonucuna ulaşılır. $\square$

2.2. Büyük (Essential) ve Küçük (Small) Alt Modüller

Çalışmanın bu kısmında büyük (essential) ve küçük (small) alt modüller ile ilgili tanım, önerme ve ispatlara yer verilecektir. Bu alt modüller ile ilgili daha fazla bilgi için (Kasch 1982) ve (Fuchs 1970) önerilir.

Tanım 2.23. M modülü R halkası üzerinde bir modül ve $A \leq M$ olmak üzere; M nin B gibi bir alt modülü için $B \cap A = 0$ eşitliği sağlanıyorken $B = 0$ ise A alt modülüne büyük (essential) alt modül denir ve $A \leq_e M$ ile gösterilir. Bu tanıma denk olarak $A \leq M$ ve her $0 \neq B \leq M$ olmak üzere $B \cap A \neq 0$ ise A alt modülüne büyük (essential) alt modül denir.

Tanım 2.24. M bir R -modül ve $A \leq M$ olsun. Her $0 \neq B \leq M$ için $B \cap A \neq 0$ ise M modülüne A modülünün büyük (essential) genişlemesidir denir.

Örnek 2.25. Her R -modül M için $M \leq_e M$ 'dir.

Örnek 2.26. Tam sayılar halkası üzerinde $M = \mathbb{Z}_{24}$ olmak üzere $\langle \bar{2} \rangle$ alt modülü ele alınırsa $\langle \bar{2} \rangle \leq_e M$ olduğu görülür.

Örnek 2.27. $M = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ tam sayılar halkasında bir modül ve $A = a\mathbb{Z}$ ($a \neq 0$) M modülünün bir alt modülü olsun. $A \cap B = 0$ eşitliğini sağlayacak şekilde $B = b\mathbb{Z} \leq M$ ($b \in \mathbb{Z}$) alt modülünü ele alındığı zaman görülecektir ki $ab \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = 0$ olur. Dolayısıyla $ab = 0$ olmalıdır. Başlangıçtaki kabulden $a \neq 0$ olduğundan dolayı $b = 0$ olmalıdır. Buradan $b\mathbb{Z} = 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak $A \leq_e M$ 'dir.

Tanım 2.28. M , R -modülünün boştan farklı her alt modülü büyük (essential) alt modül ise M ye düzgün (uniform) modül denir.

Çalışmamıza büyük (essential) alt modüllerin daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıdaki bazı teoremlerle devam edelim.

Teorem 2.29. M , R -modül olsun. Eğer $K \leq L \leq N \leq M$ ve $K \leq_e M$ ise bu durumda $L \leq_e N$ 'dir.

İspat $A \leq N$ ve $A \cap L = 0$ olacak şekilde A alt modülünü ele alalım. Kabülden dolayı $K \cap A = 0$ olacaktır. Dolayısıyla $A = 0$ olur.

$$K \leq_e M \text{ ve } A \leq N \leq M$$

olduğundan dolayı $L \leq_e N$ olur. $\square$

Teorem 2.30. $N_i \leq_e M$ ($i = 1, \dots, n$) ise $\bigcap_i^n N_i \leq_e M$ 'dir.

İspat Tümevarım yöntemi ile teoremin doğruluğunu görelim. $n = 1$ için ifadenin doğruluğu açıktır. Şimdi

$$N = \bigcap_i^{n-1} N_i \leq_e M$$

ve $K \leq M$ alalım bu durumda $N \cap N_n \cap K = 0$ eşitliği sağlanmış olur. Dolayısıyla son eşitlik yardımıyla $N_n \cap K = 0$ olur.

$$N = \bigcap_i^{n-1} N_i \leq_e M$$

olduğundan dolayı $K = 0$ olur. Sonuç olarak $\bigcap_i^n N_i \leq_e M$ olur. $\square$

Teorem 2.31. E ve S birer R -modül, $\lambda : E \rightarrow S$ tanımlanmış bir homomorfizma ve $W \leq_e S$ ise bu durumda $\lambda^{-1}(W) \leq_e E$ dir.

İspat $A \leq E$ ve $A \cap \lambda^{-1}(W) = 0$ olsun. Buradan hareketle $W \cap \lambda(A) = 0$ olur. Dolayısıyla bu durum $\lambda(A) = 0$ olmasını gerektirir. $W \leq_e S$ olduğundan dolayı $\lambda^{-1}(W) \leq_e E$ olur. $\square$

Teorem 2.32. M, R -modül ve $N \leq M$ olmak üzere. $N \leq_e M$ dir ancak ve ancak her $m \neq 0 \in M$ için $\exists r \in R$ öyle ki $0 \neq mr \in N$ dir.

İspat $\Rightarrow$) $m \neq 0 \in M$ alalım. Bu durumda $mR \neq 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla buradan $N \cap mR \neq 0$ olur. $N \leq_e M$ kabulden dolayı elde edilmek istenen sonuç açıktır.

$\Leftarrow$) $0 \neq K \leq M$ alt modülü olsun. Buradan $0 \neq k \in K$ vardır. $kr \neq 0$ ve $kr \in N$ olsun. Dolayısıyla $0 \neq kr \in K \cap N$ elde edilir. Son elde edilen bağıntıdan $N \leq_e M$ olduğu görülmüş olur. $\square$

Teorem 2.33. M, R -modül ve $A \leq E \leq M$ olmak üzere $\frac{E}{A} \leq_e \frac{M}{A}$ ise $E \leq_e M$ 'dir.

İspat $K \cap E = 0$ olacak şekilde M modülünün K alt modülü olsun. Bu durumda iki ihtimali değerlendirmek durumundayız.

- 1) $K \leq A$ olsun. Böylece $K \leq E$ olacaktır ve $K = K \cap E = 0$ elde edilir.
 2) $A < K$ olsun. O halde $\frac{K}{A} \neq 0$ dır.

$$E \cap K = 0 \text{ olduğundan dolayı } \frac{E}{K} \cap \frac{K}{A} = 0 \text{ olur.}$$

$\frac{E}{A} \leq_e \frac{M}{A}$ olmasından dolayı $\frac{K}{A} = 0$ elde edilir. Dolayısıyla bu durum $K \leq A$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak elde edilen veriler, A modülünün K 'nin bir öz alt modülü olması ile çelişir. Son elde edilen veriler ışığında $E \leq_e M$ elde edilir. $\square$

Büyük(essential) alt modüller ile küçük(small) alt modüller birbirlerinin dualleridir. Daha ayrıntılı bilgi edinmek için (Kasch 1982) tavsiye edilir.

Tanım 2.34. M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. $N + L = M$ eşitliğini sağlayan her $L \leq M$ için $M = L$ eşitliği sağlanıyorsa N 'ye M 'nin küçük (small) alt modülü denir. $N \ll M$ gösterimi kullanılır.

Tanım 2.35. M bir R -modül olsun. M modülünün M den farklı her alt modülü küçük (small) alt modül ise, M modülüne hollow modül denir.

Teorem 2.36. M bir R -modül olsun. $E \leq S \leq M$ ve $E \ll S$ ise $E \ll M$ dir.

İspat $E \leq S \leq M$ ve $E \ll S$ olduğunu kabul edelim. Buradan $M = E + N$ olacak şekilde $N \leq M$ vardır. Modüler kuralından faydalanarak

$$\begin{aligned} S &= S \cap M \\ &= S \cap (E + N) \\ &= E + (S \cap N) \text{ dir.} \end{aligned}$$

$E \ll S$ olduğundan dolayı $S = (S \cap N)$ dir. Buradan S modülü N modülünün alt modülü olduğu görülmüş olur.

$$E \leq S = (S \cap N) \leq N$$

olduğundan yola çıkarak $E \leq N$ olduğu bulunur. Dolayısıyla $M = E + N = N$ olur. Elde edilen son ifadeden $E \ll M$ olduğu görülür. $\square$

Teorem 2.37. M bir R -modül ve N de $N \ll M$ koşulunu sağlasın. O halde her $L \leq N$ alt modülü M de küçük (small) alt modüldür.

İspat $N \ll M$ olduğunu varsayalım. $M = E + S$ eşitliğini sağlayacak $E \leq N$ ve $S \leq M$ vardır. Burada E modülünün N modülünde küçük (small) alt modül olduğunu görmek için $M = S$ eşitliğinin gösterilmesi gerekir.

$$M = E + S \leq N + S$$

olduğundan $M = N + S$ eşitliği elde edilir. $N \ll M$ kabulünden dolayı $M = S$ olur. Dolayısıyla istenen elde edilmiş olur. $\square$

Teorem 2.38. M R modül olmak üzere $E \subset S \subset M$ sağlansın. Bu durumda $S \ll M$ olması için gerek ve yeter şart $E \ll M$ ve $S/E \ll M/E$ olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$) Bir önceki teoremden $S \ll M$ olduğundan dolayı $E \ll M$ elde edilir. $E \subset C$ alt kümesi için

$$M/E = S/E + C/E \text{ olsun.}$$

Dolayısıyla buradan $M = S + C$ eşitliği yazılabilir. Hipotezden $M = C$ elde edilir. Dolayısıyla son veriler yardımıyla $S/E \ll M/E$ olduğu görülür.

$\Leftarrow$) $C \leq M$ olmak üzere $M = C + S$ olsun. $A \leq S$ olduğundan dolayı $S = E + S$ ifadesi yazılabilir. Devamında

$$\begin{aligned} M &= S + E + C \\ &= S + (E + C) \end{aligned}$$

olacaktır. $E \leq E + C$ olduğu için

$$M/E = S/E + (E + C)/E$$

yazılır. $S/E \ll M/E$ olduğundan $M/E = (E + C)/E$ olur. Buradan $M = E + C$ eşitliği sağlanmış olur. $E \ll M$ olduğundan $M = C$ olur. $\square$

Teorem 2.39. M , R -modül ve $N_i \ll M$ ($i = 1, \dots, n$) ise $\sum_{i=1}^n N_i \ll M$ olur.

İspat Tümevarım yöntemi ile $n = 1$ için hipotezden açıktır. Devamında

$$N = \sum_{i=1}^{n-1} N_i \ll M$$

olsun.

$$N + N_n + K = M$$

sağlayacak şekilde $K \in M$ var olsun. Dolayısıyla $N \ll M$ olduğundan $N_n + K = M$ olur. Sonuç olarak $N_n \ll M$ olduğu için $K = M$ elde edilir. Buradan $\sum_{i=1}^n N_i \ll M$ elde edilmiş olur. $\square$

Teorem 2.40. $\delta : E \rightarrow S$ şeklinde tanımlı bir homomorfizma ve $K \ll E$ ise $\delta(K) \ll E'$ dir.

İspat $A, \delta(E)$ modülünün alt modülü olmak üzere $\delta(K) + A = S$ olarak alınsın. Diğer taraftan her $e \in E$ için $\delta(e) = \delta(k) + a$ olacak şekilde $k \in K$ ve $a \in A$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} a &= \delta(e) - \delta(k) \\ &= \delta(e - k) \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu sonuçla

$$\delta(e - k) \in A \text{ ve } (e - k) \in \delta^{-1}(A) \text{ olur.}$$

Buradan $e \in K + \delta^{-1}(A)$ olduğu görülür. $E \leq K + \delta^{-1}(A) \leq E$ olduğundan

$$E = K + \delta^{-1}(A)$$

olacaktır. $K \ll E$ olduğu için $E = \delta^{-1}(A)$ dir. Sonuç olarak

$$A = f(E) = S$$

elde edilir. $\square$

2.3. Tam Diziler, Projektif (Projective) ve İnjektif (Injective) Modüller

Bu kısımda modülleri konu alan çalışmalar için önemli bir yere sahip olan modül çeşitlerinin bazı önemli tanım, önerme ve teoremlerine değinilecektir. Bu kısımda ele alınacak olan konular ile ilgili daha fazla bilgi edinmek için (Kasch 1982) incelenebilir.

Tanım 2.41. M, R -modül olsun. M 'nin alt modüllerinin

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_t \subseteq \dots$$

şeklinde olduğu gibi artan her zinciri sonlu adımda duruyorsa M modülüne Noetherian modül denir.

Tanım 2.42. M, R -modül. M 'nin alt modüllerinin

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \supseteq B_t \supseteq \dots$$

şeklinde olduğu gibi azalan her zinciri sonlu adımda duruyorsa M modülüne Artinian modül denir.

Önerme 2.43. M bir R -modül olmak üzere eğer M Noetherian ise, M modülünün bütün alt modülleri sonlu üretilmiştir.

İspat N, M 'nin sonlu üretilmiş olmayan bir alt modülü olsun. Olmayana ergi yöntemi ile bu durumun olmayacağını görelim. $a_1 \in N$ olsun. N sonlu üretilmediğinden dolayı $N \neq \langle a_1 \rangle$. O halde $N \neq \langle a_1, a_2 \rangle$ olacak şekilde $a_2 \in N / \langle a_1 \rangle$ vardır. Devam edilecek olunursa

$$a_{t+1} \in N / \langle a_1, a_2, \dots, a_t \rangle$$

olacak şekilde a_{t+1} vardır. Bu durumda

$$\langle a_1 \rangle \subset \langle a_1, a_2 \rangle \subset \dots \subset \langle a_1, a_2, \dots, a_t \rangle \subset \dots$$

olacak şekilde artan bir zincir elde edilmiş olunur. Bu durum M 'nin Noetherian olması ile çelişmiş olur. Dolayısıyla N sonlu üretilmiştir. $\square$

Tanım 2.44. R halkası birimli ve değişmeli bir halka ve M_i 'ler R halkası üzerinde tanımlanmış modüller olmak üzere bu modüllerin dizisi arasında

$$\rightarrow M_{t-1} \xrightarrow{\delta_{t-1}} M_t \xrightarrow{\delta_t} M_{t+1} \xrightarrow{\delta_{t+1}}$$

R -homomorfizmaları verilsin. Her $n \geq 0$ için $\text{im}\delta_{t-1} = \ker \delta_t$ oluyorsa oluşan bu diziye tam dizi denir. Dizilerde modüller belli bir yerden sonra hep sıfır oluyorsa

$$\rightarrow M_{t-1} \xrightarrow{\delta_{t-1}} M_t \rightarrow 0$$

şeklinde gösterilir. Eğer modüller belli bir yerden önce hep sıfır ise

$$0 \rightarrow M_{t-1} \xrightarrow{\delta_{t-1}} M_t \xrightarrow{\delta_t}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.45.

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\delta} N \xrightarrow{\gamma} K \rightarrow 0$$

şeklinde tanımlanan diziye kısa tam dizi denir.

Önerme 2.46. R bir halka, A ve B , R üzerinde tanımlanmış olan modüller olmak üzere $\alpha : A \rightarrow B$ ve $\beta : B \rightarrow A$ şeklinde tanımlanan homomorfizmaları için $\alpha\beta = 1_B$ ise α epimorfizma, β monomorfizma ve $A = \ker \alpha \oplus \text{im}\beta$ ' dir.

İspat $\alpha\beta = 1_B$ kabulünden dolayı $s \in B$ olmak üzere $\alpha(\beta(s)) = s$ olacağından, α 'nın epimorfizma ve β nin ise monomorfizma olduğu görülmüş olur. Devamında her $e \in A$ için

$$e = (e - \beta(\alpha(e))) + \beta(\alpha(e))$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\alpha(e - \beta(\alpha(e))) = \alpha(e) - \beta(\alpha(e)) = \alpha(e) - \alpha(e) = 0$$

olur. Dolayısıyla tanımlardan $e - \beta(\alpha(e)) \in \ker \alpha$ ve $\beta(\alpha(e)) \in \text{im}\beta$ olmasından dolayı, $M = \ker \alpha + \text{im}\beta$ elde edilir. Dik toplam olduğunu görmek için ara kesitlerinin sıfır

olduğunun görülmesi gerekir. Bu sebeple $e \in \ker \alpha \cap \operatorname{im} \beta$ elemanı için $\beta(s) = e$ ve $\alpha(e) = 0$ sağlayacak şekilde bir $s \in B$ vardır.

$$0 = \alpha(e) = \alpha(\beta(s)) = s$$

elde edilir. Sonuç olarak $A = \ker \alpha \oplus \operatorname{im} \beta$ elde edilir. $\square$

Önerme 2.47. $0 \rightarrow B \xrightarrow{\beta} A$ şeklinde tanımlanan β monomorfizma olsun. Bu durumda $\alpha\beta = 1_B$ olacak şekilde bir α homomorfizması vardır ancak ve ancak $\operatorname{im} \beta \leq_d A$ 'dir.

İspat ($\Rightarrow$) $0 \rightarrow B \xrightarrow{\beta} A$ şeklinde tanımlanan β monomorfizma olmak üzere, $\alpha\beta = 1_B$ olacak şekilde bir α homomorfizması var olsun. Bu durumda bir önceki önermeden ve 2.22 den faydalanarak $A = \ker \alpha \oplus \operatorname{im} \beta$ olduğu görülür.

($\Leftarrow$) $A = K \oplus \operatorname{im} \beta$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir K alt modülü var olsun. Buradan A dik toplam şeklinde ifade edildiğinden dolayı, $m \in A$ olmak üzere $m = k + n$ eşitliğini sağlayacak şekilde $k \in K$ ve $n \in \operatorname{im} \beta$ tek türlü elemanları vardır. Dolayısıyla $n \in \operatorname{im} \beta$ olduğundan $n = \beta(a)$ eşitliğini sağlayacak şekilde $a \in B$ vardır. İspatın devamı için $a \in B$ 'nin tek türlü belirli olduğu görülmelidir. Bu nedenle $k, k' \in K$ ve $s, s' \in B$ olmak üzere

$$\begin{aligned} m &= k + n = k' + n' \\ &= k + \beta(s) = k' + \beta(s') \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda

$$\beta(s) - \beta(s') = k' - k \in B \cap \operatorname{im} \beta = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\beta(s) = \beta(s')$ elde edilmiş olunur. β monomorfizma olduğundan $s = s'$ olur. Elde edilen sonuçlar yardımı ile $m = k + n$ yazılışı tek türlü ifade edildiği gösterilmiş olur. Buradan $\alpha(m) = s$ sağlayacak şekilde $\alpha : A \rightarrow B$ sağlayacak şekilde bir homomorfizma tanımlanmış olur. $\square$

Önerme 2.48. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ şeklinde tanımlanan α epimorfizma olsun. Bu durumda $\alpha\beta = 1_B$ olacak şekilde bir β homomorfizması vardır ancak ve ancak $\ker \alpha \leq_d A$ 'dir.

İspat $\Rightarrow) 0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ şeklinde tanımlanan α bir epimorfizma ve $\alpha\beta = 1_N$ ifadesini sağlayacak şekilde bir β homomorfizması var olsun. 2.47' dan $M = \ker \alpha \oplus \text{im} \beta$ olduğu görülür.

$\Leftarrow)$ $A = \ker \alpha \oplus L$ olacak şekilde A modülünün bir L alt modülü var olsun. Bu kabulden hareketle $\gamma(b) = \alpha(b)$ eşitliğini sağlayacak şekilde L den N ye olan bir γ homomorfizması var olsun. α epimorfizma olduğundan dolayı, alınan her $s \in B$ için $\alpha(e) = s$ sağlayacak şekilde $e \in A$ vardır. Buradan $e = k + l$ eşitliğini sağlayacak şekilde $k \in \ker \alpha$ ve $l \in L$ elemanları vardır.

$$s = \alpha(a) = \alpha(k) + \alpha(l) = \alpha(l) = \gamma(l)$$

olur. Elde edilen son eşitlikten γ homomorfizmasının epimorfizma olduğu görülür. Diğer taraftan

$$\ker \gamma = \ker \alpha \cap L = 0$$

olduğundan γ bire birdir. Sonuçta $\beta = \gamma^{-1}$ alınırsa $\alpha\beta = 1_B$ sağlanmış olur. Buradan istenen elde edilmiş olunur. Elde edilen veriler ışığında $A = \ker \alpha \oplus L$ ise, $L \cong A / \ker \alpha \cong B$ olduğundan dolayı $B \leq_d A$ olur. $\square$

Tanım 2.49. M, R halkası üzerinde bir modül olmak üzere; M R -modülünün doğrusal bağımsız bir üreteç kümesi var ise M modülüne serbest (free) modül denir.

Tanım 2.50. C, A ve B, R - modül olmak üzere

$$\begin{array}{c} C \\ \beta \swarrow \downarrow \gamma \\ A \xrightarrow[\alpha]{} B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Her $\alpha : A \rightarrow B$ epimorfizması ve her $\gamma : C \rightarrow B$ homomorfizma için $\alpha\beta = \gamma$ eşitliğini sağlayacak şekilde $\beta : C \rightarrow A$ bir homomorfizma var ise C ye projektif modül denir.

Örnek 2.51. m, n asal sayılar olmak üzere $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ izomorfizmi aynı zamanda $\mathbb{Z}_{mn}$ modüllerinin de izomorfizmleridir. Bu nedenle $\mathbb{Z}_m$ serbest (free) $\mathbb{Z}_{mn}$ modülünün direkt toplananıdır. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_{mn}$ modülü projektiftir. Ancak $\mathbb{Z}_m$ modülü mn elemandan

daha az sayıda modüle sahip olduğundan serbest bir $\mathbb{Z}_{mn}$ modülü değildir. Bu örnekte de görüldüğü gibi her projektif modül serbest (free) modül olmak zorunda değildir (William, 1992).

Teorem 2.52. P bir R -modül ve P_i 'lerde alt modül olmak üzere $P = \bigoplus P_i$ şeklinde tanımlansın. P projektif modüldür ancak ve ancak P_i lerde projektif modüllerdir.

İspat $(\Rightarrow)$ P projektif modül olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{c} P \\ \downarrow f \\ P_i \\ \downarrow g \\ M \rightarrow N \rightarrow 0 \end{array}$$

diyagramında $h : M \rightarrow N$ vardır. Buradan aynı zamanda $\alpha : P \rightarrow M$ vardır. Dolayısıyla $gf = h\alpha$ eşitliği sağlanacaktır. P , projektif olduğundan $\lambda : P_i \rightarrow M$ olacak şekilde $\lambda = \alpha\beta$ homomorfizması vardır. Aynı zamanda $f\beta = 1_{P_i}$ olacak şekilde $\beta : P_i \rightarrow P$ vardır. Son durumda

$$g = g1_{P_i} = gf\beta = (gf)\beta = (h\alpha)\beta = h(\alpha\beta) = h\lambda$$

olur. Bu eşitliklerden P_i 'lerin projektif olduğu görülmüş olur.

($\Leftarrow$: Tersini kabul edelim yani P_i 'lerin projektif olduğunu varsayalım.

$$\begin{array}{c} P_i \\ \downarrow f \\ P \\ \downarrow g \\ M \rightarrow N \rightarrow 0 \end{array}$$

Kabulden dolayı $\alpha_i : P_i \rightarrow M$ ve $h : M \rightarrow N$ olacak şekilde α_i ve h homomorfizmaları vardır. Dolayısıyla buradan $gf = h\alpha_i$ olacaktır. Devamında kabulden $\alpha : P \rightarrow M$

homorfizması için $\alpha_i = \alpha f$ olacaktır. Son olarak

$$gf = h\alpha_i \text{ ve } \alpha_i = \alpha f$$

eşitliklerinden $gf = h\alpha f$ olacaktır. Dolayısıyla kabul edilen koşullar altında homomorfizmaların tekliğinden $g = h\alpha$ olur. $\square$

Teorem 2.53. P bir projektif modüldür ancak ve ancak P serbest (free) modülün dik toplananına izomorftur.

Teorem 2.54. F bir serbest (free) modül olmak üzere F aynı zamanda projektif modüldür.

Tanım 2.55. P, M ve N, R -modül olsun,

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ g \nearrow \uparrow h & & \\ M \xleftarrow{f} N \leftarrow 0 \end{array}$$

Her $f : N \rightarrow M$ monomorfizması ve her $h : N \rightarrow E$ homomorfizması için $gf = h$ sağlayacak şekilde $g : M \rightarrow E$ bir homomorfizma var ise E 'ye injektif modül denir.

Teorem 2.56. E bir R -modül olmak üzere $E = \prod E_i$ şeklinde tanımlansın. E injektif modüldür ancak ve ancak E_i 'ler de injektif modüllerdir.

İspat $(\Rightarrow)$ E injektif modül, $f : N \rightarrow M$ monomorfizması ve $h : N \rightarrow E_i$ homomorfizması olsun.

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \uparrow t & & \\ & E_i & \\ g \nearrow \uparrow h & & \\ M \xleftarrow{f} N \leftarrow 0 \end{array}$$

$t : E \rightarrow E_i$ homomorfizması için kabüllerden dolayı $th = \alpha f$ sağlayacak şekilde $\alpha : M \rightarrow E$ homomorfizması vardır. $h = gf$ olacak şekilde $g : M \rightarrow E_i$ homomorfizması ile birlikte $g = \beta\alpha$ eşitliğini ve $\beta t = 1_{E_i}$ eşitliğini sağlayan β homomorfizması ile birlikte

$$h = 1_{E_i}h = (\beta t)h = \beta(th) = \beta(\alpha f) = (\beta\alpha)f = gf$$

olur. Bu eşitliklerden E_i modüllerinin de injektif olduğu görülmüş olur.

$\Leftarrow$:) E_i injektif olsun. $f : N \rightarrow M$ olacak şekilde monomorfizması ve $h : N \rightarrow E$ olacak şekilde homomorfizması verilmiş olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} & E_i & \\ & \uparrow t & \\ & E & \\ g \nearrow & \uparrow h & \\ M \xleftarrow[f]{} & N \xleftarrow{} 0 & \end{array}$$

her th homomorfizması için kabulden $th = g_i f$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir

$g_i : M \rightarrow E_i$ homomorfizması vardır (Kasch,1982). $fg : M \rightarrow E$ homomorfizması $g_i = tg$ eşitliği tek türlü olduğunu göstermiştir. Buradan $th = g_i f$ ve $g_i = tg$ eşitliklerinden yola çıkarak $th = tgf$ olacaktır ve bu eşitlik ışığında (Kasch,1982) çalışmasında $h = gf$ olduğu görülür. Dolayısıyla E 'nin injektif modül olduğu görülmüş olur. $\square$

Çalışmanın bu kısmına bize yardımcı olacak teoremlere ispatları verilmeden devam edilecektir.

Teorem 2.57. R , bir halka olmak üzere aşağıda belirtilen durumlar birbirine denktir;

- (i) R , yarı basittir (semisimple).
- (ii) Her R -modül M yarı basit (semisimple) modüldür.
- (iii) Her R -modül M injektif modüldür.
- (iv) R halkasının her sol ideali injektiftir.

Teorem 2.58. N bir R -modül olsun. Bu durumda N modülü injektiftir ancak ve ancak N modülünün N 'yi içeren her R -modülü bir dik toplanandır (direct summand).

Teorem 2.59. N bir injektif modül olmak üzere M modülü de N tarafından kapsanan bir modül olsun. Bu durumda N 'nin L gibi bir alt modülü vardır öyle ki ; L , M modülünün maksimal essential genişlemesidir.

Tanım 2.60. M ve N , R halkası üzerinde iki modül ve K , M nin bir alt modülü olmak üzere, K 'dan N 'ye tanımlanan her homorfizma M 'den N 'ye tanımlanan bir homorfizmaya genişlerse N 'ye M -injektif modül denir.

Teorem 2.61. $M \neq 0$ olacak şekilde R halkası üzerinde bir modül olsun. M injektiftir ancak ve ancak M bir büyük (essential) genişlemeye sahip değildir.

2.4. İnjektif Zarf (Injective Hull)

İnjektif zarflar modüller ailesi içerisinde yapılan bir çok çalışmada yol gösterici olmuştur. Bu bağlamda ele almış olduğumuz bu kısımda injektif zarflar ile ilgili önem arz eden tanım ve önermelere değinilerek injektif zarf ile ilgili birtakım bilgiler verilmiştir. İnjektif zarf ile ilgili ayrıntılı bilgi edinimi için (Kasch 1982) tavsiye edilir.

Tanım 2.62. H bir R -modül, Q da inlektif bir modül olmak üzere; $f : H \rightarrow Q$ olarak tanımlanan bir homomorfizma için $\text{im } f \leq_e Q$ ise f homomorfizmasına H modülünün injektif zarfı (injective hull) denir. $Q = E(H)$ ile gösterilir. Her modülün bir injektif zarfının (injective hull) var olduğunu biliyoruz.

Örnek 2.63. $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $E(n\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ dur. Kolayca görüleceği gibi her $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q}$ bölünebilir (divisible) olduğundan dolayı $E(n\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ olur.

Teorem 2.64. M R -modül, A ve B M nin iki alt modülü olmak üzere A ve B M 'de büyük (essential) alt modüller ise $E(A) = E(B) = E(M)$ dir.

İspat Kabüllerden dolayı $A \leq_e E(A)$ ve $M \leq_e E(M)$ dir. $0 \neq x \in E(M)$ elemanı için $0 \neq rx \in M$ olacak şekilde $r \in R$ elemanı vardır. $A \leq_e M$ olduğundan dolayı benzer şekilde bir $t \in R$ elemanı için $0 \neq t(rx) \in A$ elde edilir. $A \leq_e E(M)$ ve $E(A)$ injektif olduğundan dolayı $E(A) \leq_d E(M)$ olur. Son durumda $E(A) = E(M)$ olduğu görülür.

□

Teorem 2.65. Eğer $f_i : M_i \rightarrow Q_i$ ve f_i lerde injektif zarf (injective hull) ise bu durumda $\bigoplus_{i=1}^n f_i : \bigoplus_{i=1}^n M_i \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n Q_i$ için $\bigoplus_{i=1}^n f_i$ injektif zarf (injective hull) ($\text{im } \bigoplus_{i=1}^n f_i \leq_e \bigoplus_{i=1}^n Q_i$) olur.

İspat İnjektif zarf (injective hull) tanımı gereği $f_i : M_i \rightarrow Q_i$ için $\text{im } f_i \leq_e Q_i$ 'dir. Bu durum $(\text{im } \bigoplus_{i=1}^n f_i) = \bigoplus_{i=1}^n (\text{im } f_i) \leq_e \bigoplus_{i=1}^n M_i$ olmasını gerektirir. $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ injektif olduğundan istenilen elde edilir. □

Dikkat edilirse yukarıda ele alınan teoremde sonlu dik toplam kullanılmıştır, çünkü injektiflik yalnızca sonlu toplamlarda korunuyor.

3. MATERYAL VE METOT

Bu kısımda tez çalışmasında kullanılacak olan yöntem ile ilgili metot ve yöntemler derlenerek verilecektir.

3.1. SIP ve SSP Modüller

Çalışmanın bu kısımda *SIP* ve *SSP* modüllerin tanımları verilip, bu tanımlar doğrultusunda *SIP* ve *SSP* modüllerin sahip oldukları özellikler ele alınacaktır. *SIP* ve *SSP* modüller üzerine yapılan çalışmalarda elde edilen teoremler ve ispatlara değinilecektir. *SIP* ve *SSP* modüller ile daha ayrıntılı bilgi elde etmek için (Kaplansky 1954; Wilson 1986; Garcia 1989; Alkan 2002) kaynakları önerilir. Bu bölümdeki sonuçlar Alkan (2002) çalışmasından derlenmiştir.

Tavsiye edilen kaynakların yanında çalışmanın daha iyi anlaşılabilmesi için Karabacak ve Tercan (2007) yayınlamış oldukları ve *SIP* modüllerin bir genellemesini elde ettikleri, *SIP* modüllerin essential modüller ve matrix halkaları ile olan bağlantılarına değindikleri çalışmanın incelenmesi faydalı olacaktır.

Tanım 3.66. *R* birimli halka ve *M*, *R* üzerinde tanımlanmış olan bir modül olmak üzere; *M*, *R*-modülünün herhangi iki dik toplananın (direct summand) arakesiti de dik toplanan ise bu modüle *SIP* (summand intersection property) özelliğine sahip modül denir (Wilson 1986).

Tanım 3.67. *R* birimli bir halka ve *M*, *R* üzerinde tanımlanmış bir modül olmak üzere; *M*, *R*-modülünün herhangi iki dik toplananının (direct summand) toplamı da dik toplanan ise bu modüle *SSP* (summand sum property) özelliğine sahip modül denir (Garcia 1989).

Yapılan tanımların anlaşılabilmesi için çalışmaya örnekler ile devam edelim.

Örnek 3.68. *C* bir cisim, $R = \begin{bmatrix} C & C \\ 0 & C \end{bmatrix}$ üst üçgensel matrisi de *C* cismi üzerinde bir halka olsun ve

$$A = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & C \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} C & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R halkasının sol idealleri olsunlar. $M = R/B$ olacak şekilde M modülünü ele alalım. $D = A \oplus M$, $S_1 = \text{End}_R(A)$ ve $S_2 = \text{End}_R(M)$ seçimleri için

$$S = \text{End}_R(D) = \begin{bmatrix} S_1 & H \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir (burada H , $S_1 - S_2$ -bimodül ve $\text{Hom}_R(A, M)$). $D = A \oplus M$, SSP özelliğine sahiptir (Garcia 1989).

Örnek 3.69. C bir cisim, $R = \begin{bmatrix} C & C \\ 0 & C \end{bmatrix}$ üst üçgensel matrisi de C cismi üzerinde bir halka olsun.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & C \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} C & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R halkasının sol idealleri olsunlar. $M = R/B$ olacak şekilde M modülünü ele alalım. $D = A \oplus M$, $S_1 = \text{End}_R(A)$ ve $S_2 = \text{End}_R(M)$ seçimleri için

$$S = \text{End}_R(D) = \begin{bmatrix} S_1 & H \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir S , SIP özelliğine sahiptir (Garcia 1989).

Örnek 3.70. M , $\mathbb{Z}$ -modülünü $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ şeklinde ifade edelim. N modülü, M 'nin bir alt modülü olmak üzere. N 'nin M 'nin bir dik toplananı olması, ancak ve ancak, $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $\gcd(a, b) = 1$ olmak üzere $N = \mathbb{Z}(a, b)$ şeklinde yazılabilmesi ile mümkündür.

Şimdi M 'nin $\mathbb{Z}(2, 3)$ ve $\mathbb{Z}(3, 2)$ alt modüllerini ele alalım. Bu alt modüller M 'nin dik toplananlarıdır ve $\mathbb{Z}(2, 3) \cap \mathbb{Z}(3, 2) = 0$ olduğu açıktır. Bununla birlikte, $\mathbb{Z}(2, 3) + \mathbb{Z}(3, 2)$ alt modülü M 'nin dik toplananı değildir. Bu nedenle, M modülü SSP özelliğine sahip değildir (Alkan 2002).

Önerme 3.71. M bir R -modül olmak üzere aşağıdaki koşullar ifade edilmiştir:

(C1) M 'nin her alt modülü M nin bir dik toplananı içinde büyüktür (essentialdir).

(C2) M 'nin her N alt modülü için N , M 'nin bir dik toplananına (direct summand) izomorf olduğu durumda N de M 'nin bir dik toplananıdır.

(C3) $E, S \leq_d M$ olmak üzere eğer $E \cap S = 0$ ise $E \oplus S$ de M de bir dik toplanandır.

M bir R -modül olmak üzere M modülü

(C1) koşulunu sağlıyor ise *extending* (CS) modül,
 (C1) koşulunu ve (C2) koşulunu sağlıyor ise *sürekli* (continuous) modül,
 (C1) koşulunu ve (C3) koşulunu sağlıyor ise *yarı sürekli* (quasi-continuous) modül
 denir (Anderson 1954).

Tanımlardan anlaşılacağı üzere eğer bir modül, (C2) koşulunu sağlıyor ise (C3) koşulunu da sağlar. Eğer M , SSP'ye sahip ise (C3) koşulunu da sağlar ve eğer M sürekli (continuous) ise aynı zamanda yarı sürekli (quasi-continuous) olur. Bu bağlamda $(C2) \Rightarrow (C3)$,
 $SSP \Rightarrow (C3)$ ve
sürekli (continuous) $\Rightarrow$ *yarı sürekli* (quasi – continuous) şeklinde ifade edilebilir.

Önerme 3.72. M bir R -modül olmak üzere aşağıdaki koşullar ifade edilmiştir:

(D1) Her $E \leq M$ için $C \leq E$ ve $E \cap S \ll S$ olmak üzere $M = C \oplus S$ olacak şekilde bir parçalanışı vardır.

(D2) $E \leq M$ olsun. Eğer M/E M 'nin bir dik toplananına izomorf ise E de M 'nin bir dik toplananıdır.

(D3) Eğer E ve S , $M = E + S$ şartını sağlayan M nin dik toplananları ise, $E \cap S$ de M 'nin dik toplananı olur (Anderson 1954).

M bir R -modül olmak üzere;

(D1) koşulunu sağlıyor ise *lifting* modül,

(D1) koşulunu ve (D2) koşulunu sağlıyor ise *ayrık* (discrete) modül,

(D1) koşulunu ve (D3) koşulunu sağlıyor ise *yarı ayrık* (quasi discrete) modül olarak adlandırılır.

(Di) koşullarının tanımlarında yola çıkarak, eğer bir modül (D2) koşulunu sağlıyor ise (D3) koşulunu da sağlar. M , SIP'ye sahip ise (D3) koşulunu da sağlar ve son olarak M modülü ayrık (discrete) ise aynı zamanda yarı ayrık (quasi-discrete) olur.

$$(D2) \Rightarrow (D3),$$

$$SIP \Rightarrow (D3)$$

$$\text{ayrık (discrete)} \Rightarrow \text{yarı ayrık (quasi – discrete)}$$

Önerme 3.73. M bir R -modül olsun. M , SIP 'ye sahiptir ancak ve ancak E ve S , M 'nin herhangi dik toplananları olmak üzere $\alpha = M \rightarrow E$ tanımlı iken $\alpha|_S$ kısıtlanması $\ker(\alpha|_S)$ de M nin dik toplananıdır (Wilson 1986).

İspat $\Rightarrow$) M , SIP özelliğine sahip olsun. Eğer $E' = \ker(\alpha)$ alınırsa $M = E \oplus A'$ şeklinde ifade edilebilir. Devamında

$$\ker(\alpha|_S) = S \cap E'$$

olduğundan dolayı $\ker(\alpha|_S)$ ifadesi M 'nin bir dik toplananı olur.

$\Leftarrow$) Tersini ele alalım E ve S , M 'nin herhangi dik toplananları olmak üzere $\alpha = M \rightarrow E$ tanımlı iken $\alpha|_S$ kısıtlanması için $\ker(\alpha|_S)$ de M modülünün bir dik toplananı olsun. Bu durumda E' , E modülünün tümleyeni olmak üzere $\beta = E \rightarrow E'$ homomorfizması için

$$E \cap S = \ker(\beta|_S)$$

olur. Kabülünden dolayı $E \cap S$, M modülün bir dik toplananı olur. Dolayısıyla M modülü SIP özelliğine sahiptir. $\square$

Önerme 3.74. M R -modül olsun. M modülü SIP özelliğine sahip ise her dik toplananı da SIP özelliğine sahiptir (Wilson 1986).

İspat M modülü SIP özelliğine sahip ve N alt modülü de M 'nin bir dik toplananı olsun. Buradan E ve S alt modülleri N 'nin dik toplananları olarak alınsın. Bu durumda E ve S alt modülleri aynı zamanda M modülünün de dik toplananları oldukları kolayca görülür. Dolayısıyla

$$(E \cap S) \oplus K = M$$

eşitliğini sağlayacak şekilde M modülünün bir K dik toplananı vardır. Buradan hareketle

$$N = N \cap M = N \cap [(E \cap S) \oplus K] = (E \cap S) \oplus (N \cap K)$$

olur. Sonuç olarak $(E \cap S)$ alt modülü de N 'nin bir dik toplananı olur. Dolayısıyla N alt modülü SIP özelliğine sahip olduğu görülmüş olur. $\square$

Önerme 3.75. M bir R -modül olsun. A ve B , M modülünün dik toplananları olmak üzere eğer M , SIP ye sahip ve $A \oplus B = M$ eşitliği var olsun. Bu durumda $\alpha : A \rightarrow B$ şeklinde tanımlanan herhangi bir dönüşüm için $\ker(\alpha)$ da M 'nin bir dik toplananı olur (Wilson 1986).

İspat Eğer bir modül SIP 'ye sahip ise her dik toplananı da SIP 'ye sahiptir (Wilson, 1986). Buradan hareket ile $A \oplus B$ modülü de SIP özelliğine sahiptir. $\alpha : A \rightarrow B$ olacak şekilde bir morfizma olsun. Alınan dönüşüm yardımı ile

$$A_1 = \{(x, \alpha(x))\}, A_2 = \{(x, 0)\} \text{ alt modülleri}$$

$A \oplus B$ 'nin dik toplananları olur. $C = \{(0, y) \mid y \in B\}$ modülü de $A \oplus B$ modülünün tümleyeni olsun. Buradan

$$A_1 \cap A_2 = \{(x, 0) \mid x \in \ker(\alpha)\}$$

olur. Dolayısıyla $\ker(\alpha)$, A 'nın dik toplananı olur. □

Önerme 3.76. Her projektif R -modül SIP özelliğine sahiptir ancak ve ancak R 'nin her alt ideali projektiftir, yani kalıtsaldır (hereditarydir) (Alkan 2002).

İspat $(\Rightarrow)$ R halkası kalıtsal (hereditary) bir halka ve M modülü, A ve B dik toplananları ile birlikte projektif modül olsun. Bu durumda aldığımız herhangi bir $\alpha : A \rightarrow B$ için $im(\alpha)$ projektif olacaktır. Önceki önermelerden faydalanarak $\ker(\alpha)$ A modülünün dik toplananı olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla M SIP özelliğine sahiptir.

$(\Leftarrow)$ Tersine her projektif modülün SIP özelliğine sahip olduğunu kabul edelim. Devamında A , projektif bir M modülün alt modülü olmak üzere $\alpha : C \rightarrow A$ olacak şekilde C serbest (free) modülünü ve α epimorfizmasını ele alalım. Kabülden dolayı $(C \oplus M)$ modülü SIP özelliğine sahip olur. Dolayısıyla önceki önermelerden $\ker(\alpha)$, C modülünün bir dik toplananıdır. $A = im(\alpha)$, $\ker(\alpha)$ 'nın tümleyeni izomorftur dolayısıyla projektiftir. Buradan R kalıtsaldır (hereditarydir). □

Önerme 3.77. R bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir;

- i) R yarı basittir (semisimple).
- ii) Bütün R -modüller $SSIP$ özelliğine sahiptirler .
- iii) Bütün R -modüller SIP özelliğine sahiptirler .
- iv) Bütün injektif R -modüller SIP özelliğine sahiptirler (Alkan 2002).

İspat $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv)$ açıktır .

$iv) \Rightarrow i)$ Bütün injektif R -modüllerin SIP 'ye sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda R halkasının yarı basit (semi simple) olduğu görülmelidir. Kabûlden dolayı M R -modülü olmak üzere A_1 injektif alt modülü $\alpha_1 : M \rightarrow A_1$ monomorfizması vardır. Benzer şekilde A_2 injektif alt modülü ve $\alpha_2 : M \rightarrow A_2$ monomorfizması vardır. Bu veriler ışığı altında $A_1 \oplus A_2$ modülü SIP özelliğine sahip olduğundan $\ker(\alpha_2)$, M 'ye izomorftur ve $\ker(\alpha_2)$, A_1 alt modülünün dik toplananı olur. Dolayısıyla M injektiftir ve buradan R 'nin yarı basit (semi simple) olduğu görülür. $\square$

Önerme 3.78. M bir R -modül olsun. E ve S , M modülünün herhangi iki dik toplananı olmak üzere $(E + S)$, $(D3)$ koşuluna sahip ise M modülü SIP özelliğine sahiptir (Alkan 2002).

İspat M modülünden rastgele alınmış E ve S gibi iki dik toplanan için elde edilen $(E + S)$ ifadesi $(D3)$ koşuluna sahip olsun. Devamında $N = A + B$ modülünü alalım. Bu durumda E ve S aynı zamanda N modülünün de dik toplananları olurlar. Kabûlden dolayı N modülü $(D3)$ koşulunu sağlar. Bu durumda $E \cap S$, N modülünün dik toplananı olur. $N = (E \cap S) \oplus L$ eşitliğini sağlayacak şekilde N modülünün L gibi bir alt modülü vardır. Dolayısıyla

$$E = (E \cap S) \oplus (E \cap L)$$

dir. Sonuç olarak E , M modülünün bir dik toplananı olduğu için $E \cap S$, M modülünün bir dik toplananı olacaktır. O halde M modülü SIP özelliğine sahiptir. $\square$

Önerme 3.79. M extending modül olmak üzere M modülü UC modüldür ancak ve ancak M modülü SIP özelliğine sahiptir (Alkan 2002).

İspat $\Rightarrow$) M bir UC modül, E ve S de M modülünün dik toplananları olsun. Dolayısıyla $E \cap S$, M modülünün kapalı bir alt modülüdür. Hipotezden, $E \cap S \leq_d M$ olur.

$\Leftarrow$;) M modülü SIP özelliğine sahip bir modül ve E , M modülünün alt modülü olsun. Devamında $E \leq_e S \leq_d M$ ve $E \leq_e L \leq_d M$ olacak şekilde M modülünün S ve Z dik toplananları vardır. Bu durumda ispatın tamamlanması için $S = Z$ olduğunu görmek yeterli olacaktır. Kabulden dolayı $S \leq_d M$ ve $Z \leq_d M$ dir. M modülü SIP özelliğine sahip olduğundan $(S \cap Z) \oplus T = M$ olacak şekilde $T \leq M$ vardır. Buradan hareketle, $S = (S \cap Z) \oplus (S \cap T)$ 'dir. $E \leq_e S$ ve $E \cap (S \cap T) = 0$ olduğundan $S \cap T = 0$ olur. Buradan, $S = S \cap Z$ elde edilir. Aynı sıralama izlenirse, $Z = S \cap Z$ olduğu da görülür. Dolayısıyla $S = S \cap Z = Z$ elde edilir. $\square$

Aşağıda değineceğimiz üç önermenin ispatları Garcia (1989) çalışmasında açıkça verilmiştir. Bu sebeple bu üç önermenin ispatlarına değinmeyeceğiz.

Önerme 3.80. M bir R - modül ve E , M nin bir dik toplananı olsun. Eğer M , SSP özelliğine sahip ise bu durumda E alt modülü de SSP özelliğine sahiptir.

Önerme 3.81. M bir R - modül olsun. M , SSP özelliğine sahiptir ancak ve ancak E ve S , M 'nin herhangi dik toplananları ve $\alpha : M \rightarrow E$ projektif dönüşümü olmak üzere $im(\alpha|_S)$ dik toplanandır.

Önerme 3.82. M bir R - modül olmak üzere; M SSP özelliğine sahip bir modül ve $E \oplus S$ de M 'nin bir dik toplananı olsun. O halde $\alpha : E \rightarrow S$ 'ye tanımlanan herhangi bir homomorfizma için $im(\alpha)$ dik toplanandır.

Önerme 3.83. M bir R - modül olmak üzere M , SSP özelliğine sahiptir ancak ve ancak $M = E \oplus S$ şeklindeki M modülünün her ayrışımı ve her $\alpha : E \rightarrow S$ homomorfizması için $im(\alpha)$ M 'nin dik toplananıdır (Garcia 1989).

İspat Gerekliliği SIP ile benzerdir. Şimdi M 'nin $M = E \oplus S$ şeklindeki her ayrışımı ve $\alpha : E \rightarrow S$ şeklinde tanımlanmış her homomorfizması için $im(\alpha)$ ifadesini M 'nin bir dik toplananı olsun.

O halde E ve S , M 'nin dik toplananları olmak üzere $M = E \oplus E'$ ve $M = S \oplus S'$ eşitliklerini sağlayacak şekilde E' ve $S' \leq M$ vardır. Şimdi

$$\alpha_E : M \rightarrow E \text{ ve } \alpha_{S'} : M \rightarrow S'$$

homomorfizmaları var olsun. Buradan $C, \alpha_{S'}(\alpha_E(S))$ 'yi göstermek üzere

$$C = (S + E') \cap (S + E) \cap S'$$

olur. Kabulden dolayı C, M' nin bir dik toplananı olacaktır. O halde $M = C \oplus C'$ eşitliğini sağlayacak şekilde $C' \leq M$ vardır. Buradan

$$S' = C \oplus (S' \cap C')$$

elde edilir.

Devamında

$$\begin{aligned} & (S + E) \cap [(S + E') \cap (S' \cap C')] \\ &= [(S + E) \cap (S + E') \cap S'] \cap (S' \cap C') \\ &= C \cap (S' \cap C') = 0 \end{aligned}$$

elde edilir .

$$(S + E) \cap [(S + E') \cap (S' \cap C')] = M \text{ eşitliği sağlanır.}$$

$C \leq (S + E)$ ve $C \leq (S + E')$ olduğundan ve modülerite kuralından

$$M = S \oplus S' = (S \oplus C) \oplus (S' \cap C')$$

olur, buradan

$$E + S = (S \oplus C) \oplus [(E + S) \cap (S' \cap C)] \text{ ve}$$

$$E' + S = (S \oplus C) \oplus [(E' + S) \cap (S' \cap C)]$$

elde edilir. Son eşitliklerden faydalanarak,

$$\begin{aligned} M &= S + E' + E \\ &= (S \oplus C) + [(E + S) \cap (S' \cap C)] + [(E' + S) \cap (S' \cap C)] \\ M &\subseteq (E + S) + [(E' + S) \cap (S' \cap C)] \end{aligned}$$

elde edilmiş olunur. Sonuç olarak $(E + S)$ modülünün M modülünde bir dik toplanan olduğu, dolayısıyla M modülünün de SSP özelliğine sahip olduğu sonucuna ulaşılır. $\square$

Önerme 3.84. R bir halka olmak üzere, aşağıdakiler biribirine denktir:

- i) R halkası yarı basittir (semisimple).
- ii) Her R modül SSP 'ye sahiptir.
- iii) Her projektif R modül SSP 'ye sahiptir (Alkan 2002).

İspat $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$ açıktır.

$iii) \Rightarrow i)$ Her projektif modülün SSP özelliğine sahip olduğunu kabul edelim . A bir alt modül ve F de bir serbest modül olmak üzere $\alpha : F \rightarrow A$ olacak şekilde tanımlanan bir epimorfizma olsun. Bu durumda kabülden dolayı $(F \oplus R)$ modülü SSP özelliğine sahiptir. $\beta : K \rightarrow R$ olacak şekilde içirme dönüşümü ve $f = \beta\alpha$ olacak şekilde alınacak bir $f : F \rightarrow R$ homomorfizması alınması durumunda $im(f) = K$ olacaktır. Dolayısıyla bir önceki önermeden $im(f) = K$ alt modülünün R 'nin dik toplananı olduğu görülmüş olur. Bu sonuçlar ışığında R 'nin yarı basit (semi simple) olduğu görülür. $\square$

Teorem 3.85. R sol kalıtsal (left hereditary) halkadır ancak ve ancak her injektif R -modül SSP ye sahiptir (Alkan 2002).

İspat $:\Rightarrow$) R sol kalıtsal (left hereditary) halka olsun. Bu durumda her injektif R -modülünün her faktör modülü de injektiftir. $M = E \oplus S$ olacak şekilde bir injektif modül ve $f : E \rightarrow S$ olacak şekilde tanımlanan bir homomorfizma olsun. Bu durumda hipotez yardımı ile E injektif olduğu görülmüş olur. Kabülden dolayı

$$im f = E = \ker f \text{ injektif olacaktır.}$$

Dolayısıyla $im f, S$ modülünün bir dik toplananı olur. Buradan hareketle M modülünün SSP ye sahip olduğu görülmüş olur.

$\Leftarrow$;) Her injektif R -modül SSP ye sahip olsun. M bir injektif R -modül ve $W \leq M$ olmak üzere; kabülden dolayı $E(M/W)$ ve $M \oplus E(M/W)$ injektif modülü SSP özelliğine sahiptir. Şimdi $g : M \rightarrow M/W$ olacak şekilde tanımlanan kanonik dönüşümü ve $h : M/W \rightarrow E(M/W)$ homomorfizması olmak üzere $f = hg$ dönüşümünü tanımlansın. Bu durumda $im f = M/W$ olur. M/W alt modülü $E(M/N)$ modülünün bir dik toplananı (direct summand) olduğu görülür. Dolayısıyla M/W injektiftir. Buradan da R sol kalıtsal (left hereditary) halka olduğu görülmüş olur. $\square$

Bölümün geri kalan kısmında çalışmada bize yardımcı olacak tanım ve önermelere değinmeye devam edelim.

Tanım 3.86. M bir R -modül olmak üzere eğer her $W \leq M$ alt modülü için alınan $f \in \text{Hom}(W, M)$ ve $\ker f \leq_c W$ ise M modülüne *polyform modül* denir (Dung, Huyn ve Smith 1994).

Tanım 3.87. M R -modül olmak üzere eğer $S \leq E \leq M$ ve $E/S \ll M/S$ ve $S \leq Y \leq E$ sağlanacak şekilde en az bir Y alt modülü için $\text{Hom}(M/S, E/Y) = 0$ ise M modülüne *copolyform modül* denir (Güngöroğlu ve Harmancı 2000).

Lemma 3.88. M , R -modülü *extending polyform modül* olmak üzere M R -modülü *SIP özelliğine sahiptir* (Alkan 2002).

İspat M R -modülü *extending polyform modül* olsun. $M = E \oplus S$ şeklinde bir parçalanış ve $f : E \rightarrow S$ sağlayacak şekilde bir homomorfizma olmak üzere M modülü *extending polyform modül* olduğundan $\ker f$ kapalı bir alt modül olur. Dolayısıyla $\ker f$, M modülünün bir kapalı *extending toplananı* olur. Buradan M modülünün, *SIP özelliğine sahip olduğu* görülür. $\square$

Lemma 3.89. M , R -modülü *lifting copolyform modül* olmak üzere M R -modülü *SSP özelliğine sahiptir* (Alkan 2002).

İspat M R -modülü *lifting copolyform modül* olsun. $M = E \oplus S$ şeklinde bir parçalanış ve $f : M \rightarrow E$ olacak şekilde bir projektif dönüşüm olsun. Bu veriler ışığında $N = \text{im } f|_S(S)$ ile f in S alt modülünün kısıtlanışının görüntüsünü gösterebiliriz. E *lifting modülü*, M modülünün *dik toplananı* olduğundan $E = N_1 \oplus N_2$ olacak şekilde $N_1 \leq N$ ve $N \cap N_2 \ll N_2$ alt modülleri vardır. Buradan $N_1 \cap N_2 \ll N$ ve dolayısıyla $N_1 \cap N_2 \ll M$ dir. Devamında

$$N = N_1 \oplus (N \cap N_2)$$

şeklinde ifade edilir. Bu bağlamda M modülünden $N_1 \cap N_2$ alt modülüne tanımlı dönüşümün varlığı görülür. M *copolyform modül* olduğundan dolayı $N_1 \cap N_2 = 0$ ve buradan $N = N_1$ olur. Sonuç olarak $N = N_1$, M modülünün *dik toplananı* olduğundan M modülü *SSP özelliğine sahiptir*. $\square$

Önerme 3.90. M, R -modülü *extending* olmak üzere E ve S , M modülünün herhangi iki dik toplananı ve $\text{im } f \leq_e S$ olacak şekilde her $f : E \rightarrow S$ homomorfizma için $\text{im } f = S$ ise M modülü *SSP* özelliğine sahiptir (Alkan 2002).

İspat $M = E \oplus S$ olacak şekilde bir parçalanış ve $f : E \rightarrow S$ olacak şekilde bir homomorfizma olsun. $f(E)$ alt modülünün S alt modülünde dik toplanan olduğunun görülmesi ispatın tamamlanmasını sağlayacaktır. Kabulden $f(E)$, S 'nin alt modülüdür ya da C gibi bir alt modülde büyük kapalıdır (essentially closed). Eğer $f(E)$, S 'nin dik toplananı ise istenen sağlanmış olur. $f(E)$, $C \leq S$ gibi bir alt modülde büyük kapalı(essentially closed) olsun. Bu durumda hipotezden $C \leq_d M$ ve dolayısıyla $C \leq_d S$ olacaktır. Buradan $S = C \oplus C'$ olacak şekilde $C' \leq S$ vardır. Şimdi $f \oplus 1 : E \oplus C' \rightarrow S$ homomorfizması

$$(f \oplus 1)(a + c') = f(a) + c' \quad (a \in E, c' \in C')$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$\text{im}(f \oplus 1) = f(E) \oplus C'$$

olur ve aynı zamanda $\text{im}(f \oplus 1)$, $C \oplus C'$ modülünde büyük (essential) alt modül olur. Hipotezden $(f \oplus 1)$ homomorfizması epimorfizma olur. Dolayısıyla $f(E) = C$ olur. Sonuç olarak $f(E)$, S 'de dik toplanan olur. $\square$

Tanım 3.91. M, R -modül ve $W \leq M$ olmak üzere W alt modülünün herhangi bir öz essential genişlemesi yoksa W 'ya M de kapalı (closed) alt modül denir. Denk olarak $W \leq_e L \leq M$ iken $W = L$ oluyorsa W 'ya kapalı (closed) alt modüldür denir. $W \leq_c M$ şeklinde gösterilir (Keskin 1998).

Tanım 3.92. M, R -modül ve $W \leq M$ olmak üzere bu durumda $W \leq_e C \leq_c M$ olacak şekilde bir $C \leq_c M$ vardır ve C' 'ye W 'nin M deki kapanışı (closure) denir (Keskin 1998).

Tanım 3.93. M R -modül olmak üzere; M nin her alt modülünün yalnızca bir tek kapanışı (closure) var ise M ye *UC* (unique closure) modül denir (Keskin 1998).

Lemma 3.94. M , *extending* bir R -modül olmak üzere M , *UC* modüldür ancak ve ancak M , *SIP*'ye sahiptir (Alkan 2002).

İspat $\Rightarrow$) M , UC modül, E ve S alt modülleri de M 'nin dik toplananları olsunlar. $E \cap S \leq_c M$ olduğu açıktır (Abyzov ve Tuganbaev 2014). Kabulümüzden dolayı $E \cap S \leq_d M$ elde edilir. Dolayısıyla elde edilen veriler ışığında M SIP 'ye sahip olduğu görülür.

$\Leftarrow$.) M 'nin SIP 'ye sahip olduğunu kabul edelim. $W \leq M$ alt modülü için

$$W \leq_e C \leq_c M \text{ ve } W \leq_e D \leq_c M$$

ifadelerini sağlayacak şekilde M modülünün C ve D alt modüllerinin var olduğunu farz edelim. Kabülden dolayı C ve D alt modülleri M modülünün dik toplananları olur. Dolayısıyla bu durumda

$$(C \cap D) \oplus E = M$$

eşitliğini sağlayan en az bir $E \leq M$ vardır. Buradan

$$C = (C \cap D) \oplus (C \cap E)$$

olur.

$$W \leq_e C \text{ ve } W \cap (C \cap E) \text{ olduğundan } (C \cap E) = 0 \text{ olur.}$$

Dolayısıyla $C = C \cap D$ olur. Benzer işlemler sırasıyla tekrarlanırsa $D = D \cap C$ elde edilir. Sonuç olarak $C = D$ elde edilmiş ve $W \leq M$ alt modülü için tek bir kapanış belirlenmiş olur. $\square$

Teorem 3.95. M , R -modülü yarı sürekli (quasi-continuous) olmak üzere; M SIP özelliğine sahiptir ancak ve ancak $E(M)$, SIP 'ye sahiptir (Alkan 2002).

İspat $\Rightarrow$) M , SIP 'ye sahip olsun. W ve S , $E(M)$ modülünün dik toplananları olsun. Bu durumda $E(M) = W \oplus W'$ ve $E(M) = S \oplus S'$ eşitliklerini sağlayacak şekilde $W' \leq E(M)$ ve $S' \leq E(M)$ alt modülleri vardır. $W = E(W)$ ve $S = E(S)$ olsun. $(W \cap M)$ ve $(S \cap M)$, M 'nin dik toplananları olduğu geçmiş çalışmalarda gösterilmiştir (Mohammed ve Muller, 1990). Kabülden dolayı $W \cap S \cap M$ alt modülü de M modülünün dik toplananı olur. Böylece bazı $L \leq M$ için

$$(W \cap S \cap M) \oplus L = M$$

olur.

$$(W \cap M) \leq_e W \text{ ve } (S \cap M) \leq_e S$$

olduğundan

$$(W \cap S \cap M) \leq_e W \cap S \text{ olur.}$$

Dolayısıyla

$$E(M) = E(W \cap S \cap M) \oplus E(L) = E(W \cap S) \oplus E(L)$$

olur. Buradan

$$W = E(W \cap S) \oplus (E(L) \cap W)$$

ve

$$S = E(W \cap S) \oplus (E(L) \cap S)$$

olur. Devamında

$$E(W \cap S) \leq W \cap S \leq E(W \cap S)$$

olur. Bu durum ise

$$E(W \cap S) = W \cap S \leq_d M$$

olduğunu göstermiş olur. $E(M)$ SIP sahiptir.

$\Leftarrow$.) $E(M)$, SIP özelliğine sahip olsun. $W, S \leq_d M$ olmak üzere $M = W \oplus W'$ ve $M = S \oplus S'$ olacak şekilde $W', S' \leq M$ vardır. Devamında

$$E(M) = E(W) \oplus L \text{ ve } E(M) = E(S) \oplus L'$$

olacak şekilde $L, L' \leq E(M)$ alt modülleri vardır. $E(M)$, SIP özelliğine sahip olduğundan dolayı

$$E(M) = (E(W) \cap E(S)) \oplus K$$

olacak şekilde $K \leq M$ vardır. Buradan hareketle

$$M = [(E(W) \cap E(S) \cap M) \oplus (K \cap M)]$$

olur (Mohammed ve Muller, 1990) . $W \leq_e E(W)$ ve $S \leq_e E(S)$ olması

$$W \leq_e E(W) \cap M \text{ ve } S \leq_e E(S) \cap M$$

olmasını sağlar. Devamında

$$E(W) \cap M = W \oplus (E(W) \cap M) \cap W'$$

ve

$$E(S) \cap M = S \oplus (E(S) \cap M) \cap S'$$

olduğundan $W = E(W) \cap M$ ve $S = E(S) \cap M$ olur. Buradan

$$W \cap S = E(W) \cap E(S) \cap M$$

M 'nin dik toplananı olur. Son durumda M 'nin SIP 'ye sahip olduğu görülmüş olur. $\square$

Lemma 3.96. *M bir R -modül olsun. M , R -modülü (C3) koşuluna sahip olmak üzere eğer M , SIP özelliğine sahip ise M , SSP özelliğine de sahiptir (Alkan 2002).*

İspat M modülü SIP özelliğine sahip olsun. Buradan hareketle $E, S \leq_d M$ olmak üzere $E + S \leq_d M$ olduğunu görmemiz gerekir. M , SIP özelliğine sahip olduğundan dolayı

$$(E \cap S) \oplus W = M$$

sağlayacak şekilde $W \leq M$ vardır. Modüler kuralından

$$E = (E \cap S) \cap (E \cap W)$$

ve

$$S = (E \cap S) \cap (S \cap W)$$

olur. Buradan

$$E + S = (E \cap S) + [(E \cap W) \oplus (S \cap W)]$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$(E \cap S) \cap [(E \cap W) \oplus (S \cap W)] = 0$$

olduğunun görülmesi yeterli olacaktır.

$$k \in (E \cap S) \cap [(E \cap W) \oplus (S \cap W)]$$

alınırsa, bu durumda $k = x + y$ sağlayacak şekilde $x \in (E \cap W)$ ve $y \in (S \cap W)$ vardır. Devamında

$$y = k - x \in [(E \cap S) + (E \cap W)] \cap (S \cap W) \leq E \cap (S \cap W) = 0$$

olur. Dolayısıyla $y = 0$ ve $k = x$ olur.

$$k = x \in (E \cap S) \cap (E \cap W) = E \cap S \cap W = 0$$

elde edilir. Buradan

$$E + S = (E \cap S) \oplus (E \cap W) \oplus (S \cap W) = S \oplus (E \cap W)$$

olur. M SIP özelliğine sahip olduğundan dolayı E ve W dolayısıyla $E \cap W$, M modülünün dik toplananları olurlar. M R -modülü $(C3)$ modül olduğundan

$$E + S = S \oplus (E \cap W),$$

M modülünün dik toplananı olur. Neticede M modülünün SSP 'ye sahip olduğu görülür. $\square$

Lemma 3.97. M bir R -modül olsun. M , R -modülü $(D3)$ koşuluna sahip olmak üzere eğer M , SSP özelliğine sahip ise M , SIP özelliğine de sahiptir (Alkan 2002).

İspat M , $(D3)$ koşulunu sağlayan modül ve M , SSP özelliğine sahip olsun. Dolayısıyla burada $E, S \leq_d M$ olmak üzere $E \cap S \leq_d M$ olduğunu görmek yeterli olacaktır. M modülü SSP özelliğine sahip olduğundan dolayı $E + S \leq_d M$ 'dir. Devam edilecek olunursa $M = (E + S) \oplus W$ sağlayacak şekilde $W \leq M$ vardır. $E, S, W \leq_d M$ ve M , SSP 'ye sahip olduğundan $(E + W)$ ve $(S + W)$ alt modülleri de M modülünün dik toplananlarıdır. M , $(D3)$ modül olduğundan

$$M = (E + W) + (S + W)$$

olur. Buradan $(E + W) \cap (S + W)$ alt modülü M modülünün bir dik toplananı olur. Buradan hareketle

$$M = [(E + W) \cap (S + W)] \oplus Q$$

olacak şekilde $Q \leq M$ vardır. Sonuç olarak

$$(E + W) \cap (S + W) = [E \cap (S + W)] + W$$

olur . Dolayısıyla

$$E \cap (S + W) \leq E \cap S$$

dır.

$$M = [(E + W) \cap (S + W)] \oplus Q$$

$$M = (E \cap S) \oplus W \oplus Q$$

olur. Son eşitlikten $E \cap S \leq_d M$ elde edilir. □

Tanım 3.98. M ve W R - halkasında tanımlanmış iki modül olmak üzere $f : M \rightarrow W$ tanımlanan $f \in \text{Hom}_R(M, W)$ homomorfizması için eğer $f = f g f$ eşitliğini sağlayacak şekilde tanımlanan bir $g \in \text{Hom}_R(W, M)$ homomorfizması var ise f homomorfizmasına düzenlidir (regular) denir. Açıktır ki $f \in \text{Hom}_R(M, W)$ düzenlidir (regular) ancak ve ancak $\ker f \leq_d M$ ve $\text{im} f \leq_d W$ 'dir (Wisbauer 1991).

Lemma 3.99. M bir sağ R -modül , $\alpha, \beta \in \text{End}_R(M)$ olacak şekilde α, β düzenli (regular) homomorfizmalar ve $M = \ker \alpha \oplus E = \text{im} \alpha \oplus S = \ker \beta \oplus E' = \text{im} \beta \oplus S'$ eşitlikleri var olsun . Bu durumda aşağıdaki ifadeler vardır (Abyzov ve Tuganbaev, 2014);

$$i) \text{im}(\alpha\beta) = \alpha(E \cap (\text{im}(\beta) + \ker(\alpha)))$$

$$ii) \ker(\alpha\beta) = \beta|_{A'}^{-1}(\text{im}(\beta) \cap \ker(\alpha)) + \ker(\beta).$$

Lemma 3.100. M bir sağ R -modül olsun. $\alpha, \beta \in \text{End}_R(M)$ olacak şekilde ilk dik toplananı olacak projektif dönüşümü ve $\beta, M = A_1 \oplus A_2$ olacak şekilde ilk dik toplananı olacak projektif dönüşümü olsun . O zaman aşağıdaki ifadeler vardır (Abyzov ve Tuganbaev, 2014):

$$i) \text{im}(\beta\alpha) = (A_1 + B_2) \cap B_1;$$

$$ii) \ker(\beta\alpha) = (A_1 \cap B_2) + A_2.$$

Teorem 3.101. M bir sağ R -modül olmak üzere; aşağıdaki ifadeler denktir:

i) M SSP'ye sahiptir .

ii) Herhangi $\alpha, \beta \in \text{End}_R(M)$ düzenli(regular) homomorfizmalar için $\text{im}(\alpha\beta) \leq_d M$ dir (Abyzov ve Tuganbaev, 2014).

İspat $i \Rightarrow ii)$

$$M = \ker \alpha \oplus A = \text{im} \alpha \oplus B = \ker \beta \oplus A' = \text{im} \beta \oplus B' \text{ olsun.}$$

$$\text{Im} \beta + \ker \alpha = \ker \alpha \oplus A \cap (\text{Im} \beta + \ker \alpha)$$

olduğundan ve kabulümüzden dolayı $A \cap (\text{Im} \beta + \ker \alpha)$ alt modülü M modülünün bir dik toplananı olur. Devamında

$$\alpha|_A : A \rightarrow \text{im} \alpha$$

olacak şekilde alınan kısıtlanmış izomorf olduğundan $\alpha(A \cap (\text{Im} \beta + \ker \alpha))$ ifadesi de M nin bir dik toplananı olur. Lemma 3.99'dan $\text{im}(\alpha\beta)$, M modülünün bir dik toplananı olur.

$ii \Rightarrow i)$ α ve $\beta \in \text{End}_R(M)$ halkasının iki birimi olmak üzere, Lemma 3.100'den görüleceği üzere $[(\alpha M + \beta M) \cap (1 - \beta)M]$ alt modülü $(1 - \beta)M$ modülünün dik toplananı olur.

$$(\alpha M + \beta M) = \beta M \oplus (\alpha M + \beta M) \cap (1 - \beta)M$$

olduğundan dolayı $(\alpha M + \beta M)$, M modülünün bir dik toplananı olur. Bu durumda M modülünün SSP özelliğine sahip olduğunu görmüş oluruz. $\square$

Teorem 3.102. M bir sağ R -modül olmak üzere; aşağıdaki ifadeler denktir:

i) M , SIP'ye sahiptir.

ii) Herhangi $\alpha, \beta \in \text{End}_R(M)$ düzenli(regular) homomorfizmalar için $\ker(\alpha\beta) \leq_d M$ dir (Abyzov ve Tuganbaev, 2014).

İspat $i \Rightarrow ii)$

$$M = \ker \alpha \oplus A = \text{im} \alpha \oplus B = \ker \beta \oplus A' = \text{im} \beta \oplus B' \text{ olsun.}$$

M modülü, SIP özelliğine sahip olduğundan $(\ker \alpha \cap \text{im} \beta)$, M modülünün dik toplananı olur. Bu durumda

$$\beta|_{A'}^{-1}(\ker \alpha \cap \text{im} \beta)$$

de A' 'nün bir dik toplananı olur. Lemma 3.99'dan

$$\ker(\alpha\beta) = \beta_{|A'}^{-1}(im(\beta) \cap \ker(\alpha)) \oplus \ker(\beta) \quad \text{olduğunu biliyoruz.}$$

Buradan hareketle $\ker(\alpha\beta) \leq_d M$ olduğunu ifade etmiş oluruz.

$ii \Rightarrow i)$ α ve $\beta \in \text{End}_R(M)$ halkasının iki birimi olsun. Lemma 3.100'den

$$\alpha M \cap \beta M \oplus (1 - \beta)M$$

alt modülü M modülünün dik toplananı olur. Dolayısıyla $\alpha M \cap \beta M$ alt modülü, M modülünün dik toplananı olur. Bu durumda M modülünün SIP özelliğine sahip olduğu gösterilmiş olur. $\square$

Çalışmanın bu kısmında SIP özelliğinin halkalar ve özellikle matris halkaları ile ilgili olan bağlantılarına yer verilecektir. Bahsedilecek olan özellikler ve bağlantılar Karabacak ve Tercan 2007 çalışmalarından derlenmiştir.

Tanım 3.103. R bir halka olmak üzere eğer sağ R -modülü R_R bir SIP -extending modül ise R' ye sağ SIP -extending halka denir. Başka bir ifade ile her idempotent $h, k \in R$ elemanları ile oluşan $hR \cap kR$ alt modülü $w \in R$ olmak üzere wR içinde (essential) oluyorsa R' ye sağ SIP -extending halka denir (Karabacak ve Tercan 2007).

Teorem 3.104. M , R -modülü bir C_{11} -modül ve E de M 'nin alt modülü olmak üzere eğer M modülünün D gibi her dik toplananı için $E \cap D$ ifadesi, E alt modülünün bir dik toplananında essential ise E modülü de C_{11} -modül olur (Karabacak ve Tercan 2007).

İspat S , E modülünün alt modülü olsun. C_{11} koşulundan, $M = Q_1 \oplus Q_2$ sağlayacak şekilde S 'nin $Q_2 \in M$ gibi bir komplementi vardır ($Q_1 \in M$). Buradan $Q_2 \cap S = 0$ ve $Q_2 \oplus S$, M 'de essential olacaktır. Devamında,

$$(Q_2 \cap E) \cap S = E \cap (Q_2 \cap S) = 0.$$

Dolayısıyla

$$(Q_2 \cap E) \oplus S = E \cap (Q_2 \oplus S)$$

E 'de essential olur. Kabulden dolayı, $Q_2 \cap E \leq_e T$ ifadesini sağlayacak şekilde E modülünün T gibi bir dik toplananı vardır. $A \cap T = 0$ ve $(Q_2 \cap E) \oplus S$ modülleri E modülünde

essential olduğundan $T \oplus S$ ifadesi de E modülünde essential olur. Sonuç olarak T, S modülünün komplementi olur ve buradan E modülünün C_{11} -modül olduğu görülür. $\square$

Sonuç 3.105. M, R -modülü her dik toplananının M 'deki essential alt modüllerinin tekil kapalı alt modülü (unique closure) olduğu bir C_{11} -modül olsun. Eğer M, SIP özelliğine sahip bir modülse, M modülünün her dik toplananı bir C_{11} -modül olur (Karabacak ve Tercan 2007).

Teorem 3.106. $M R$ -modülü, $M = \oplus M_i$ şeklinde fully invariant dik toplananların toplamı şeklinde ifade edilmiş olsun. Eğer her bir M_i, SIP -extending modül ise M modülü de SIP -extending modül olur (Karabacak ve Tercan 2007).

İspat E, M modülünün herhangi bir dik toplananı olsun. $M = \oplus M_i$ olduğundan $E = \oplus (E \cap M_i)$ şeklinde ifade edilebilir. Şimdi E ve S M modülünün iki dik toplananını ele alalım. Buradan,

$$E \cap S = (\oplus (E \cap M_i)) \cap (\oplus (S \cap M_i)) = \oplus ((E \cap M_i) \cap (S \cap M_i)).$$

elde edilir. Her bir M_i modülü SIP -extending modül olduğundan her i indeksi için

$$(E \cap M_i) \cap (S \cap M_i) \leq_e T_i \leq_d M_i.$$

sağlayacak şekilde M_i modülünün bir T_i dik toplananı vardır. Buradan

$$E \cap S = \oplus ((E \cap M_i) \cap (S \cap M_i)) \leq_e \oplus T_i \leq_d \oplus M_i = M.$$

elde edilir. Son elde edilen ifadeler ışığı altında M modülünün SIP -extending modül olduğu görülür. $\square$

R birimli bir halka olsun ve $h \in R$ öyle bir idempotent eleman ($h^2 = h$) olsun ki $R = RhR$ ifadesini sağlasın. Devamında $W = hRh$ alt halkasını tanımlayalım. M , sağ R -modül olmak üzere Mh bir sağ W -modülüdür.

Lemma 3.107. S, M_R 'nin bir alt modülü olsun. O halde S, M_R 'nin bir dik toplananıdır ancak ve ancak $Sh, (Mh)_W$ 'nin bir dik toplananıdır (Karabacak ve Tercan 2007).

Teorem 3.108. *Yukarıdaki notasyonu kullanarak, M bir sağ R -modül olsun. O halde, M , sağ R -modül olarak SIP-extending modüldür ancak ve ancak Mh sağ W -modül olarak SIP-extending modüldür (Karabacak ve Tercan 2007).*

İspat Bir önceki lemmadan (Lemma 3.107) doğrudan elde edilir. □

Teorem 3.109. *M modülü bir R -modül olmak üzere M modülü SIP-extending modüldür ancak ve ancak $(Mh)_W$ modülü de SIP-extending modüldür (Karabacak ve Tercan 2007).*

Sonuç 3.110. *R bir halka olmak üzere, R , SIP-extending bir halkadır ancak ve ancak hRh -modülü olan Rh , SIP-extending bir modüldür (Karabacak ve Tercan 2007).*

Sonuç 3.111. *Şimdi, W bir birimli halka ve m pozitif bir tam sayı olmak üzere R halkası, girdileri W 'dan alınmış tüm $m \times m$ matrislerin halkası olarak $\text{Mat}_m(W)$ şeklinde tanımlansın. R halkasında, yalnızca $(1, 1)$ konumundaki girdisi 1 olan ve diğer tüm girdileri sıfır olan matrise h_{11} diyelim. Bilindiği üzere, h_{11} bir idempotenttir ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır:*

$$W \cong h_{11}Rh_{11} \quad \text{ve} \quad R = Rh_{11}R.$$

Yukarıdaki notasyon altında $R = \text{Mat}_m(W)$ olsun. O halde R , SIP bir halkadır ancak ve ancak serbest (free) W -modülü olan W^m , SIP-extending modüldür (Karabacak ve Tercan 2007).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. ESIP ve ESSP Modüller

Çalışmanın bu kısmında halkalar ve modüllerin tanımlanan yeni özellikler yardımı ile karakterizasyonu elde edilerek, tanımlanan bu yeni özelliklerin birbirleri ile olan ilişkileri üzerine durulacaktır.

Tanım 4.112. M bir R -modül olmak üzere; her $E, S \leq_d M$ için $E \cap S \leq_e D$ olacak şekilde $D \leq_d M$ var ise, M modülüne büyük - kesişim özelliğine (essential summand intersection property) sahiptir denir. Kısaca M modülü ESIP'dir şeklinde ifade edilir.

ESIP modüller üzerine (Karabacak ve Tercan 2007) yaptıkları çalışma ile SIP-extending modülleri tanımlamışlardır. Ele aldığımız bu çalışmada ESIP modüllerin ele alınmamış farklı yönlerine değinilecektir.

Tanım 4.113. M bir R -modül olmak üzere; her $E, S \leq_d M$ için $E + S \leq_e D$ olacak şekilde $D \leq_d M$ var ise, M modülüne büyük - toplam özelliğine (essential summand sum property) sahiptir denir. Kısaca M modülü ESSP'dir şeklinde ifade edilir.

Örnek 4.114. p asal ve M modülü ise $M = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$ ile ifade edilen bir $\mathbb{Z}$ -modül olsun. Tanımlanan M nin dik toplananları (direct summand) sırasıyla $0, M, A = (\bar{0}, 1 + p^2\mathbb{Z})\mathbb{Z}$, $B = (\bar{1}, 0 + p^2\mathbb{Z})\mathbb{Z}$, $C = (\bar{1}, 1 + p^2\mathbb{Z})\mathbb{Z}$ ve $D = (\bar{1}, p + p^2\mathbb{Z})\mathbb{Z}$ olacaktır. Dolayısıyla M 'nin A ve C dik toplananlarının arakesiti aşağıdaki gibi;

$$A \cap C = (\bar{0}, p + p^2\mathbb{Z})\mathbb{Z} = E$$

olacak şekilde yeni bir alt modül elde edilir. Elde edilen $A \cap C = E$ alt modülü, M modülü için bir dik toplanan değildir. Dolayısıyla M 'nin SIP ye sahip olmadığı görülmüş olunur.

Şimdi çalışma boyunca üzerinde durulan genel tanımlar, bilgiler ve ifade edilen veriler yardımıyla M modülünün ESIP'ye sahip olduğunu görelim. Bunun için E alt modülünün C dik toplananında büyük (essential) alt modül olduğunu görmek yeterli olacaktır.

$(a + p\mathbb{Z}, a + p^2\mathbb{Z}) \in C$ olacak şekilde alınan bir eleman için iki durum ile karşılaşılır. Karşılaşılan bu farklı durumları ayrı ayrı değerlendirmemiz gerekecektir.

i) İlk olarak $a = p$ olsun. Bu durumda $(p + p\mathbb{Z}, p + p^2\mathbb{Z}) \in E$ olacaktır. Dolayısıyla istenilen durum sağlanmış olur.

ii) İkinci olarak p 'nin a 'yı bölmediğini farz edelim. Dolayısıyla

$$p(a + p\mathbb{Z}, a + p^2\mathbb{Z}) = (0, pa + p^2\mathbb{Z}) = (0, a(p + p^2\mathbb{Z})) = a(0, p + p^2\mathbb{Z}).$$

elde edilir ve devamında da $a(0, p + p^2\mathbb{Z})$ elemanının sıfırdan farklı olduğu görülmüş olur. O halde E alt modülünün C dik toplananında büyük (essential) alt modül olur. Dolayısıyla M modülünün $ESIP$ 'ye sahip olduğu görülmüş olur.

Örnek 4.115. C bir cisim ve R halkası

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ y & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & x & a \end{bmatrix} : a, b, x, y \in C \right\}$$

şeklinde tanımlanmış bir halka olsun. $M = R$ modülü sol (left) R -modül ve

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{bmatrix} : b, x \in C \right\}$$

ve

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{bmatrix} : b, x \in C \right\}$$

şeklinde ifade edilen A ve B R halkasının sol idealleri olsunlar. Buradan A ve B idealleri $M = R$ modülünün dik toplananları olduğu kolayca görülür. Devamında $A + B$ toplamı

$$A + B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \end{bmatrix} : u, v, z \in C \right\}$$

$M = R$ 'nin bir öz büyük (proper essential) alt modülü olduğu fakat $M = R$ modülünün bir dik toplananı olmadığı görülür. Dolayısıyla $M = R$ modülü, $ESSP$ 'ye sahiptir fakat SSP 'ye sahip değildir.

Önerme 4.116. M R -modül olmak üzere M , $ESIP$ özelliğine sahiptir ancak ve ancak E ve S , M modülünün herhangi iki dik toplananları ve $\pi : M \rightarrow E$ projektif dönüşümü için, $\pi|_S$ kısıtlanışının çekirdeği, M 'nin bir dik toplananında büyük (essential) alt modüldür.

İspat $(\Rightarrow)$ M , R -modülü $ESIP$ özelliğine sahip ve E ve S , M modülünün dik toplananları olsunlar. Dolayısıyla $M = E \oplus E'$ eşitliğini sağlayan E dik toplananın komplementi olan E' vardır.

$$\pi : M = E \oplus E' \rightarrow E$$

projektif dönüşümünü ele alındığı zaman çekirdeğinin $\ker \pi = E'$ olduğu net şekilde görülür. Devamında π projektif dönüşümünün S ye kısıtlanışı

$$\pi|_S : S \rightarrow E$$

için $\ker \pi|_S = S \cap E'$ olacaktır. Dolayısıyla $ESIP$ tanımından hareketle tanımlanan kısıtlanış homomorfizmasının çekirdeği $\ker \theta|_S = S \cap E'$ bir dik toplananında büyük (essential) alt modül olduğu görülmüş olunur.

$(\Leftarrow)$ E ve S , M modülünün iki dik toplananı olsun. Dolayısıyla ispatın sonuçlanması için $E \cap S \leq_e D$ ifadesini sağlayacak şekilde $D \leq_d M$ bulmak yeterli olacaktır.

$M = E \oplus E'$ eşitliğini sağlayacak şekilde E dik toplananın komplementi olan E' için

$$\beta : M \rightarrow E'$$

bir projektif dönüşümünü ele alalım. Bu durumda kısıtlanış homomorfizmasının çekirdeği $\ker \beta|_S \leq_e D$ sağlayacak şekilde, M modülünün bir D alt modülü vardır. Aynı zamanda,

$$\ker \beta|_S = E \cap S \leq_e D \leq_d M$$

olduğunu biliyoruz. Elde edilen tüm veri ve sonuçlardan hareketle M modülü $ESIP$ ye sahip olduğu görülmüş olur. $\square$

Önerme 4.117. M bir R -modül olmak üzere eğer M , $ESIP$ özelliğine sahip ve $M = E \oplus S$ olacak şekilde bir parçalanışa sahip ise; E dan S ye tanımlanan homomorfizmaların çekirdekleri, M nin bir dik toplananında büyük (essential) alt modüldür.

İspat M modülü, $ESIP$ 'ye sahip ve $M = E \oplus S$ eşitliği olacak şekilde bir parçalanışı olsun. $\alpha : E \rightarrow S$ olacak şekilde E 'den S 'ye tanımlanmış olan bir homomorfizmayı ele alalım. $E \oplus S$ modülü için alınan ve aşağıdaki gibi tanımlanan

$$E_1 = \{(x, \alpha x) : x \in E\}, E_2 = \{(x, 0) : x \in E\}$$

E_1 ve E_2 alt modüllerinin her ikisi de $E \oplus S$ modülünün dik toplananları olur. Dolayısıyla E_1 ve E_2 aynı zamanda M nin dik toplananları olur. Diğer taraftan

$$E_1 \cap E_2 = \{(x, 0) | x \in \ker \alpha\}$$

ve

$$E_1 \cap E_2 = \ker \alpha \oplus 0$$

ifadeleri elde edilir. M modülü $ESIP$ 'ye sahip olduğundan

$$E_1 \cap E_2 \leq_e D \leq_d M$$

olacak şekilde M modülünün D dik toplananı vardır. Devamında

$$\ker \alpha \oplus 0 \leq_e D \leq_d E \oplus S$$

yerine yazıldığı zaman

$$\ker \alpha \cap E \leq_e D \cap E \leq (E \oplus S) \cap E.$$

elde edilmiş olur. D ve E , M modülünün dik toplananları olduğundan

$$D \cap E \leq_e W \leq_d E$$

olacak şekilde E 'nin W gibi bir dik toplananı vardır. Dolayısıyla

$$\ker \alpha \leq_e W \leq_d E$$

olur. Buradan $\ker \alpha$ 'nın E 'nin bir dik toplananında büyük (essential) alt modül olduğu görülmüş olur. $\square$

Yukarıdaki önermenin gereklilik koşulunu incelemiş olduk. Şimdi aynı önermenin yeterlilik kısmının varlığı için aşağıdaki koşulu tanımlayalım.

Koşul 4.118. M bir R -modül olsun. $M = A \oplus B$ olacak şekilde bir parçalanışı ve D , M nin bir dik toplananı olmak üzere;

$$A \cap D + B \cap D \leq_e D \text{ iken } D = A \cap D \oplus B \cap D.$$

eşitliğine $(*)$ koşulu denir. Eğer M modülü bu eşitliği sağlıyor ise M modülüne $(*)$ koşulunu sağlıyor denir.

Önerme 4.119. M $(*)$ özelliğine sahip bir R -modül olsun. Eğer $M = E \oplus S$ olacak şekilde bir parçalanışı ve $f : E \rightarrow S$ ile tanımlanan her homomorfizma için f 'nin çekirdeği bir dik toplananda büyük(essential) alt modül ise M , ESIP özelliğine sahiptir.

İspat E ve S , M modülünün dik toplananları olsun. Dolayısıyla $M = E \oplus E' = S \oplus S'$ olacak şekilde M modülünün alt modülleri olan E' ve S' vardır. Devamında sırasıyla M 'den E' 'ye ve M 'den S' 'ye olacak şekilde

$$\alpha : M \rightarrow E \text{ ve } \beta : M \rightarrow S$$

dönüşümleri E' ve S' 'nin kanonik projeksiyonları olsunlar. Şimdi E' 'den E'

$$\lambda = ((\alpha - 1) \circ \beta)|_{E'}$$

olacak şekilde bir homomorfizma tanımlayalım. Dolayısıyla

$$\ker \lambda = (E \cap S) \oplus (E \cap S') \leq_e D \leq_d M.$$

eşitliğini elde ederiz. Hipotezden $\ker \lambda$, E de büyük (essential) alt modüldür. İspatın devamı için $E \cap S'$ 'nin bir dik toplananda büyük(essential) alt modül olduğunu görmeliyiz. Bunun için

$$(E \cap S) \oplus (E \cap S') \leq (D \cap S) \oplus (D \cap S') \leq D$$

ve devamında

$$(E \cap S) \oplus (E \cap S') \leq_e D$$

olur. Dolayısıyla

$$(D \cap S) \oplus (D \cap S') \leq_e D.$$

olur. $M, (*)$ özelliğine sahip olduğundan

$$(D \cap S) \oplus (D \cap S') = D$$

elde edilir . Buradan

$$(E \cap S) \leq_e D \cap S \leq_d D \leq_d M$$

yazılır. Son veriler ışığında $E \cap S, M$ modülünün bir dik toplananda büyük (essential) alt modül olduğu ve M modülünün de $ESIP$ 'ye sahip olduğu gösterilmiş olur. $\square$

Alkan (2002) çalışmasında yarı injektif (quasi-injective) bir M modülünün SSP özelliğine sahip olması ile M modülünün injektif zarfının (injective hull) SSP özelliğine sahip olması arasında bir denkleğin varlığını göstermiştir. Ancak bir injektif modül (injective modul) aynı zamanda $C1$ özelliğine sahip olduğundan, $ESIP$ özelliği de mevcuttur. Çalışmamızın bu kısmında bir modülün alt modülünde bu özelliklerin nasıl korunacağını araştırıp bu durum çerçevesinde ilerlemeye gayret göstereceğiz. Bu amaçla, yeni bazı özellikler tanımlama vasıtasıyla çalışmamıza devam edeceğiz.

Tanım 4.120. M ve Q, R -modül olmak üzere

$S1)$ D, Q modülünün bir dik toplananı olmak üzere eğer $D \cap M, M$ de bir dik toplanan ise M modülüne $S1$ özelliğine sahiptir denir.

$S2)$ A, M de bir dik toplanan olmak üzere eğer $A = A' \cap M$ sağlayacak şekilde Q 'nun bir A' gibi bir dik toplananı var ise M modülüne $S2$ özelliğine sahiptir denir.

$S3)$ B, Q da bir alt modül olsun. Eğer $B \leq D$ sağlayacak Q nin bir dik toplananı iken $B \cap M \leq_e D \cap M$ sağlanıyorsa M modülüne $S3$ özelliğine sahiptir denir.

Sonuç 4.121. Tanımlarından da kolayca görüleceğinden yarı injektif (quasi injective) modüller $S2$ ve $S3$ özelliklerine sahiptirler.

İspat Tanımlardan açıktır. $\square$

Önerme 4.122. $M, Q R$ -modülünün alt modülü olmak üzere eğer M modülü; $ESIP, S1, S2$ ve $S3$ özelliklerine sahip ve M, Q modülünde büyük (essential) alt modül ise $Q, ESIP$ özelliğine sahiptir.

İspat M modülü, $ESIP$, $S1$, $S2$ ve $S3$ özelliklerine sahip olsun. $A, S \leq_d Q$ dik toplananları olmak üzere $A_0 = A \cap M$ ve $S_0 = S \cap M$ ara kesitler yardımı ile elde edilen alt modüller M modülünün dik toplananları olur. M modülü $ESIP$ özelliğine sahip olduğundan

$$A_0 \cap S_0 \leq_e D \leq_d M$$

ifadesini sağlayacak şekilde $D \leq_d M$ vardır. Dolayısıyla $D = E \cap M$ olacak şekilde Q modülünün E gibi bir dik toplananı vardır. Buradan

$$A_0 \cap S_0 = (A \cap M) \cap (S \cap M) \leq A \cap S \leq Q.$$

ve

$$A \cap S \cap M \leq_e E \cap M$$

elde edilir. Son durumda $A \cap S \leq E$ olur.

M, Q modülünde büyük (essential) alt modül olduğundan $d \in E$ olmak üzere $rd \in D$ sağlayacak şekilde $r \in R$ vardır. Devamında $A_0 \cap S_0 \leq_e D$ olduğundan aşağıdaki ifadeyi sağlayacak şekilde $0 \neq trd \in A_0 \cap S_0$ $t \in R$ vardır. Buradan hareket ile

$$0 \neq trd \in A_0 \cap S_0 \leq A \cap S \leq E.$$

Sonuç olarak Q modülünün $ESIP$ özelliğine sahip olduğu görülmüş olur. $\square$

Önerme 4.123. M, Q R -modülünün alt modülü olmak üzere eğer Q modülü, $ESIP$, $S1$ ve $S2$ özelliklerine sahip ise $M, ESIP$ özelliğine sahiptir.

İspat Q modülü $ESIP$ özelliğine sahip bir modül olsun. $E, S \leq_d M$ olsunlar. Bu durumda $E = E' \cap M$ ve $S = S' \cap M$ eşitliğini sağlayacak şekilde Q modülünün E' ve S' dik toplananları vardır.

$$E' \cap S' \leq_e D \leq_d Q.$$

olacak şekilde Q modülünün bir D dik toplananı vardır. Buradan devam edilirse

$$E \cap S = E' \cap M \cap S' \cap M \leq D \cap M \leq_d M$$

olur. İspatın neticelenmesi için $E \cap S \leq_e D \cap M$ gösterilmesi yeterli olacaktır. $d \in D \cap M$ olmak üzere $rd \in E' \cap S'$ sağlayacak şekilde $0 \neq r \in R$ vardır. Dolayısıyla buradan

$$rd \in (E' \cap S') \cap M$$

aitlik durumu elde edilir. Sonuç olarak M 'nin $ESIP$ özelliğine sahip olduğunu göstermiş olur. $\square$

Önerme 4.124. M, R - modül olmak üzere M modülü, $ESSP$ özelliğine sahiptir ancak ve ancak $M = E \oplus S$ şeklindeki her parçalanışı ve $f : E \rightarrow S$ şekilde tanımlanan her homomorfizması için f homomorfizmasının görüntüsü S dik toplananında büyük (essential) alt modüldür.

İspat $(\Rightarrow)$ M modülü $ESSP$ özelliğine sahip bir modül olsun. Devamında $M = E \oplus S$ şeklinde bir parçalanışı ve bu parçalanışın E ve S dik toplananları üzerinde $f : E \rightarrow S$ şekilde bir homomorfizma olsun. Buradan

$$A_1 = \{(x, fx) : x \in E\}, A_2 = \{(y, 0) : y \in E\}, A_3 = \{(0, z) : z \in S\}$$

şeklinde tanımlanan A_1, A_2 ve A_3 alt modülleri, M modülünün dik toplananları olur. Buradan

$$A_1 + A_2 = E \oplus \text{im} f \leq_e D \leq_d M$$

ifadesini sağlayacak şekilde M 'de bir D dik toplanan vardır. Diğer taraftan modüler kuralından

$$D = E \oplus (D \cap S)$$

eşitliği görülmüş olur. Buradan hareketle son eşitlikler yardımıyla ve uygun seçilen bazı L alt modülleri ile birlikte $\text{im} f, (D \cap S)$ dik toplananında büyük (essential) alt modül olur.

$(\Leftarrow)$ $M = E \oplus S$ şeklindeki her parçalanışı ve $f : E \rightarrow S$ şeklinde tanımlanan her homomorfizması için, f homomorfizmasının görüntüsü S dik toplananında büyük (essential) alt modül olduğunu varsayalım. W ve K, M modülünün dik toplananları ve W' ve K' alt modülleri de $M = W \oplus W' = K \oplus K'$ eşitliklerini sağlayan M modülünün alt modülleri olsun. $W + K \leq_e D$ sağlayacak şekilde D dik toplananın varlığını göstermek istiyoruz.

$$\alpha_K : M \rightarrow K \text{ ve } \alpha_{W'} : M \rightarrow W'$$

olacak şekilde projektif dönüşümlerini ele alalım ve devamında E_0 ile $\alpha_{W'}(\alpha_K(W))$ ifadesini tanımlayalım. Buradan

$$E_0 = (W + K') \cap (W + K) \cap W'$$

eşitliği sağlanmış olur. Hipotezin yardımı ile $M = E \oplus E'$ eşitliği ile birlikte E_0 , E' 'de büyük (essential) alt modül olur. Modüler kuralından, $L = E' \cap W'$ ile tanımlanan L ile

$$W' = E \oplus L$$

olacaktır ve

$W + E$, M modülünde dik toplanan olur. Böylece

$$W + K = W + E_0 \leq W + E$$

olacaktır. $(w + e) \in W + E$ ($w \in W$, $e \in E$) elemanını ele alalım. Bu durumda $0 \neq re \in E_0$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Dolayısıyla

$$0 \neq r(w + e) \in E_0 \leq W + K$$

olacaktır. Sonuç olarak $(W + E_0)$ 'nin $(W + E)$ dik toplananında büyük (essential) alt modül olduğunu göstermiş olur. $\square$

Önerme 4.125. M , R -modülü $ESSP$ özelliğine sahiptir ancak ve ancak A , M modülünün bir dik toplananı ve $f : A \rightarrow M$ şeklinde tanımlanan bir split monomorfizma olmak üzere $A + Im(f)$ M nin bir dik toplananında büyük (essential) alt modüldür.

İspat Gereklik $ESSP$ tanımından kolayca görülür. Yeterlilik kısmının görülmesi için M modülü için $M = A \oplus B$ şeklinde bir parçalanışını ve $f : A \rightarrow B$ şeklinde tanımlanmış bir homomorfizmayı ele alalım. Devamında $T = \{a + f(a) | a \in A\}$ alt modülünü tanımlayalım. T alt modülünün tanımından $M = T \oplus B$ olacak şekilde ifade edilebilir. $\alpha : A \rightarrow M$ homomorfizması $\alpha(x) = x + f(x)$ dönüşümü ile ele alalım. $\alpha(x) = x + f(x)$ şeklinde ifade edilmesi α homomorfizmasının split monomorfizma olduğunu açıkça ortaya koyar. Üstelik

$$A + T = A \oplus Im(f),$$

olur. Bu durumda $Im(f)$, B 'de büyük (essential) alt modül olur. Hipotezden faydalanarak $A \oplus Im(f) \leq_e D$ sağlayacak şekilde M 'nin D toplananı vardır. Buradan

$$A \oplus Im(f) \leq_e D = A \oplus (D \cap B)$$

eşitliği sağlanır. Buradan hareketle $b \in (D \cap B)$ ve $a \in A$ için

$$0 \neq rb = a + f(a) \in A \oplus Im(f)$$

eşitliğini sağlayan $r \in R$ vardır. Devam edilirse

$$rb - f(a) = a \in A \cap B$$

olur. Buradan

$$rb = f(a) \in im(f)$$

olur ve $im(f)$, M 'nin bir dik toplananında büyük (essential) alt modül olur. Sonuç olarak M modülünün *ESSP* özelliğine sahip olduğu görülmüş olur. $\square$

Önerme 4.126. M , R -modül ve A , M 'nin bir dik toplananı olmak üzere M , *ESSP* özelliğine sahiptir ancak ve ancak $\alpha : M \rightarrow M/A$ şeklinde tanımlanan herhangi bir split epimorfizması için $A + Ker(\alpha)$, M modülünün bir dik toplananında büyük (essential) alt modüldür.

İspat $:\Rightarrow$) Gereklik *ESSP* tanımından kolayca görülür.

$\Leftarrow$.) M R -modülü için $M = A_1 \oplus A_2$ şeklinde bir parçalanış ve bu parçalanışın dik toplanları arasında $\alpha : A_1 \rightarrow A_2$ homomorfizmasını ele alalım. Buradan

$$T = \{a + \alpha(a) | a \in A_1\}$$

şeklinde ifade edilen alt modül, M modülünün alt modülü olur. T 'nin tanımından faydalanarak $M = T \oplus A_2$ eşitliği elde edilir. Şimdi $\beta : M \rightarrow M/T$ homomorfizmasını her $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ için

$$\beta(x_1 + x_2) = x_2 + T$$

dönüşümünü sağlayacak şekilde ele alındığı zaman, β homomorfizmasının bir split epimorfizma ve dahası

$$ker(\beta) = A_1$$

olduğu görülür. Önerme 4.125'den

$$A_1 + T = A_1 \oplus \text{Im}(\alpha) \text{ ve } \text{Im}(\alpha) \leq_d A_2$$

oldukları gösterilmiştir. Sonuç olarak,

$$T + \ker(\beta) \leq_e D \leq_d M$$

$$T + A_1 \leq_e D \leq_d M$$

$$A_1 \oplus \text{Im}(\alpha) \leq_e D \leq_d M$$

olduğu elde edilir. Önerme 4.125'den, M modülünün $ESSP$ özelliğine sahip olduğu görülmüş olur. $\square$

$ESSP$ özelliğine sahip modüllerin özelliklerinin ve bu modüllerin hangi koşullara sahip olması gerektiğinin daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıdaki iki lemmayı hatırlatarak çalışmaya devam edelim.

Lemma 3.99: M bir sağ R -modül, $\beta, \gamma \in \text{End}_R(M)$ olacak şekilde f, g düzenli(regular) homorfizmalar ve $M = \ker \beta \oplus E = \text{im} \beta \oplus S = \ker \gamma \oplus E' = \text{im} \gamma \oplus S'$ eşitlikleri var olsun. Bu bağlamda aşağıdaki ifadeler sağlanır (Abyzov ve Tuganbaev 2014);

- i) $\text{im}(\beta\gamma) = \beta(E \cap (\text{im}(\gamma) + \ker(\beta)))$
- ii) $\ker(\beta\gamma) = \gamma_{|E'}^{-1}(\text{im}(\beta) \cap \ker(\beta)) + \ker(\gamma)$.

Lemma 3.100: M bir sağ R -modül olsun. $\beta, \gamma \in \text{End}_R(M)$ olacak şekilde ilk dik toplananı olacak projektif dönüşümü ve $\gamma, M = E_1 \oplus E_2$ olacak şekilde ilk dik toplananı olacak projektif dönüşümü olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır (Abyzov ve Tuganbaev 2014);

- i) $\text{im}(\gamma\beta) = (E_1 + S_2) \cap S_1$;
- ii) $\ker(\gamma\beta) = (E_1 \cap S_2) + E_2' \text{ dir.}$

Önerme 4.127. $M = E \oplus S = E' \oplus S'$ bir sağ modül ve $E, S, S', S' \leq_d M$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

- i) $M, ESSP$ özelliğine sahiptir.

ii) Herhangi $\beta, \gamma \in \text{End}_R(M)$ projektif dönüşümler olmak üzere $\text{Im}(\beta\gamma)$, M modülünün bir dik toplananında büyük (essential) alt modüldür.

İspat $E, S, E', S' \leq_d M$ dik toplananları ve

$$\beta : E \rightarrow S, \gamma : E' \rightarrow S'$$

ve homomorfizmaları var olsun. Buradan M modülünü

$$M = \ker(\beta) \oplus E = \text{im}(\beta) \oplus S = \ker(\gamma) \oplus E' = \text{im}(\gamma) \oplus S'$$

olacak şekillerde ifade edelim.

$i \Rightarrow ii)$ M modülü, $ESSP$ özelliğine sahip bir modül olsun. Dolayısıyla M modülünün $M = D \oplus W$ olacak şekilde aşağıdaki eşitliği sağlayacak bir parçalanışı vardır.

Buradan

$$\text{im}(\gamma) + \ker(\beta) = \ker(\beta) \oplus [E \cap (\text{im}(\gamma) + \ker(\beta))] \leq_e D \leq_d M$$

elde edilir. Bu ifade yardımı ile $D = \text{Ker}\beta \oplus (D \cap E)$ elde edilir.

Devamında $x \in D \cap E$ olmak üzere

$$0 \neq rx \in \ker(\beta) \oplus [E \cap (\text{im}(\gamma) + \ker(\beta))].$$

sağlayacak şekilde $r \in R$ vardır.

$$rx = e + s \quad (s \in \ker \beta, e \in [E \cap (\text{im}(\gamma) + \ker(\beta))])$$

olsun. Bu durumda

$$rx - e = s \in A \cap \ker \beta \text{ ve buradan da } rx = e \in [E \cap (\text{im}(\gamma) + \ker(\beta))]$$

elde edilmiş olunur. Sonuç olarak $E \cap (\text{im}(\gamma) + \ker(\beta))$, $D \cap E$ dik toplananında büyük (essential) alt modül olur. Dolayısıyla $\text{Im}(\beta\gamma)$ M modülünün bir dik toplananında büyük (essential) alt modül olduğu gösterilmiş olur.

$ii \Rightarrow i)$ $\beta, \gamma \in \text{End}_R(M)$ olmak üzere $\text{End}_R(M)$ 'nin birim elemanları olsun. Lemma 3.99' dan ve hipotezden

$$\text{im}(\beta\gamma) = (\beta M + \gamma M) \cap (1 - \gamma)M \leq_e H \leq_d (1 - \gamma)M.$$

ifadesini sağlayacak şekilde M modülünün bir H dik toplananı vardır. Dolayısıyla

$$(\gamma M + \beta M) = \gamma M \oplus [(\beta M + \gamma M) \cap (1 - \gamma)M] \leq_e \gamma M \oplus H \leq_d M$$

ifadesine ulaşılır. Bu neticeler ve veriler M modülünün $ESSP$ özelliğine sahip olduğunu gösterir. $\square$

Önerme 4.128. M ve M' , R -modül ve $M \leq M'$ olsun. Bu durumda

i) Eğer M modülü, $ESSP$, $S1$, $S2$ ve $S3$ özelliklerine sahip ve $M \leq_e M'$ ise, M' modülü de $ESSP$ özelliğine sahiptir.

ii) Eğer M' modülü $ESSP$, $S1$ ve $S2$ özelliklerine sahip ise M modülü de $ESSP$ ye sahiptir.

İspat i) M modülü $ESSP$, $S1$, $S2$ ve $S3$ özelliklerine sahip olsun. $E, S \leq_d M'$ olmak üzere alınan dik toplananları için $A_0 = E \cap M$ ve $B_0 = S \cap M$ elde edilecek alt modüller de M modülünün dik toplananları olur. Dolayısıyla M , $ESSP$ ye sahip olduğundan dolayı

$$A_0 + B_0 \leq_e D \leq_d M$$

sağlayacak şekilde $D \leq_d M$ ve $S2$ özelliğinden dolayı $D = W \cap M$ eşitliğini gerçekleyen $W \leq_d M'$ vardır. Dolayısıyla son elde edilen veriler yardımı ile

$$A_0 + B_0 = (E \cap M) + (S \cap M) \leq (E + S) \cap M \leq W \cap M \leq M'$$

ifadesine ulaşılır. Buradan hareketle $(E + S) \cap M$ alt modülünün $E \cap M$ de büyük (essential) alt modül olduğu elde edilir. M modülünün $S3$ özelliğine sahip olmasından dolayı $E + S \leq W$ olacaktır. $d \in W$ olsun. Bu durumda M' modülü, M modülünün büyük genişlemesi (essential extension) olduğundan $rd \in D$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Bununla birlikte $A_0 + B_0 \leq_e D$ olduğundan

$$0 \neq trd \in A_0 + B_0$$

olacak şekilde $t \in R$ vardır. Sonuç olarak

$$0 \neq trd \in A_0 + B_0 \leq E + S \leq_e W$$

olur. Dolayısıyla

$$E + S \leq_e W \leq_d M'$$

olduğundan M' modülünün $ESSP$ özelliğine sahip olduğu görülmüş olur.

ii) M' modülü $ESSP$ özelliğine sahip olsun. $E, S \leq_d M$ dik toplananları olsun. Bu durumda

$$E = E' \cap M \text{ ve } S = S' \cap M$$

eşitliklerini sağlayacak M' modülünün E' ve S' gibi iki dik toplananı vardır. M' modülü $ESSP$ özelliğine sahip olduğundan

$$E' + S' \leq_e D \leq_d M'.$$

sağlayacak şekilde M' modülünün D dik toplananı vardır. M' modülü $S2$ özelliğine sahip olduğundan

$$E + S = E' \cap M + S' \cap M \leq (E' + S') \cap M \leq D \cap M \leq_d M.$$

elde edilmiş olur. İspatın devamında

$$E + S \leq_e D \cap M$$

olduğunu görmek bizi sonuca götürecektir. $d \in D \cap M$ olsun. O halde $0 \neq rd \in E' + S'$ sağlayacak şekilde $0 \neq r \in R$ vardır. Buradan hareketle

$$rd \in (E' + S') \cap M$$

olur. Dolayısıyla son elde edilen veri bize M modülünün $ESSP$ ye sahip olduğunu gösterir. $\square$

Çalışmanın geri kalan kısmında $ESIP$ ve $ESSP$ özelliklerine sahip modüllerin arasındaki ilişkiler incelenerek hangi koşullar altında aralarında ne gibi bağlantıların olduğu araştırılacaktır.

Tanım 4.129. M_1 ve M_2 , M modülünün dik toplananları olsun. Eğer $M_1 + M_2 \leq_e M$ iken $M_1 \cap M_2$, M modülün dik toplananı ise M modülü $(*D3)$ özelliğini sağlıyor denir.

$(*D3)$ özelliğine sahip bir modülün $(D3)$ özelliğini sağladığı açıktır.

Önerme 4.130. M modülü $(*D3)$ özelliğine sahip olsun. Eğer M modülü, $ESSP$ özelliğine sahip ise M , $ESIP$ özelliğine sahiptir.

İspat M modülü $ESSP$ 'ye sahip olsun. Bu durumda M modülünün A ve B dik toplananları için $A + B \leq_e D$ sağlayacak şekilde M modülünün D dik toplananı vardır. Ayrıca $D \oplus W = M$ dik toplamını sağlayacak D 'nin komplementi olan W dik toplananı vardır. Hipotezden,

$$W + A \leq_e C_1 \text{ ve } W + B \leq_e C_2$$

olacak şekilde M modülünün C_1 ve C_2 dik toplananları vardır. Buradan

$$A + W + B + W = (A + B) \oplus W \leq_e D \oplus W$$

olur. Son durumda elde edilen yukarıdaki eşitlikten $C_1 + C_2$, M modülünde büyük (essential) alt modül olur. M modülü $(*D3)$ özelliğine sahip olduğundan dolayı $C_1 \cap C_2$, M modülünün bir dik toplananı olur. Dolayısıyla

$$D + C_1 \cap C_2 = M \text{ olur.}$$

Buradan

$$E = D \cap C_1 \cap C_2 \leq_d M$$

olacaktır. İspatın devamı için şimdi $A \cap B \leq_e E$ olduğunu görelim.

$e \in E$ olmak üzere

$$0 \neq re = a + w \in A + W \text{ (} a \in A \text{ ve } w \in W \text{) olacak şekilde}$$

$r \in R$ vardır. Buradan

$$re - a \in D \cap W = 0$$

olur. Dolayısıyla $re = a$ elde edilir. Diğer taraftan $re \in C_2$ olduğundan dolayı

$$0 \neq lre \in B + K$$

olacak şekilde ve dolayısıyla

$$lre = b + w_1 \text{ (} b \in B \text{ ve } w_1 \in W \text{)}$$

eşitliğini sağlayacak bir $l \in R$ vardır. Devamında

$$lre - b \in D \cap W = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak $lre = b$ olur. Bu elde edilen sonuç; $0 \neq lre \in A \cap B$ olduğunu ve devamında da $A \cap B$ alt modülünün E de büyük(essential) alt modül olduğunu göstermiş olur. Dolayısıyla bu veriler ışığında M modülünün $ESIP$ özelliğine sahip olduğu görülmüş olur. $\square$

Önerme 4.131. *M bir R -modül olsun ve $(C3)$ koşulunu sağlasın. Eğer M modülü $ESIP$ özelliğine sahip ise M modülü $ESSP$ özelliğini de sahiptir.*

İspat M modülü $ESIP$ özelliğine sahip ve A ve B de M modülünün dik toplananları olsunlar. Bu durumda $A \cap B \leq_e D$ sağlayacak şekilde M modülünün bir dik toplananı vardır. Ayrıca $D \oplus L = M$ olacak şekilde D alt modülünün komplementi olan L dik toplananı vardır. Hipotezden

$$L \cap A \leq_e D_1 \text{ ve } L \cap B \leq_e D_2$$

olacak şekilde D_1, D_2 dik toplananları vardır.

$x \in D_1 \cap D_2$ elemanı olsun. Bu durumda $0 \neq r_1x \in L \cap A$ olacak şekilde $r_1 \in R$ vardır. Dolayısıyla aynı zamanda $r_1x \in D_2$ olur. Buradan hareketle $0 \neq r_2r_1x \in L \cap B$ sağlayacak şekilde $r_2 \in R$ vardır. Böylece

$$0 \neq r_2r_1x \in L \cap (A \cap B) \subseteq L \cap D = 0.$$

elde edilir. Dolayısıyla $D_1 \cap D_2 = 0$ olur. M modülü $(C3)$ özelliğine sahip olduğundan dolayı, $D_1 \oplus D_2$, M modülünde dik toplanan olur. Devamında

$$d = d_1 + d_2 \in D_1 \oplus D_2 (d_1 \in D_1, d_2 \in D_2)$$

elemanı için $rd_1 \in L \cap A$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Eğer

$$rd = rd_1 + rd_2 = 0$$

ise

$$rd_1 = -rd_2 \in D_1 \cap D_2 = 0 \text{ olacaktır.}$$

Buradan rd , $A + D_2$ alt modülünün sıfırdan farklı bir elemanı olur. Benzer şekilde $0 \neq lrd_2 \in L \cap B$ sağlayacak şekilde $l \in R$ vardır. Son durumda benzer şekilde $l(rd_1 + rd_2)$ yine sıfırdan farklı bir eleman olacaktır. Dolayısıyla

$$0 \neq l(rd_1 + rd_2) \in A + B \text{ olur.}$$

Buradan

$$A + B \leq_e D_1 \oplus D_2 \leq_d M.$$

elde edilir. Sonuç olarak M modülünün $ESSP$ özelliğine sahip olduğunu göstermiş olur.

□

Teorem 4.132. *R bir halka olsun. Eğer her serbest (free) modül $ESSP$ özelliğine sahip ise R halkası $C1$ özelliğine sahiptir.*

İspat A , R 'nin sol kapalı (left closed) alt modülü olsun. Bu durumda F serbest (free) modülün ve $p : F \rightarrow A$ olmak üzere p epimorfizmasını seçebiliriz. Dolayısıyla $F \oplus R$ serbest (free) modülü de $ESSP$ özelliğine sahip olur. $i : A \rightarrow R$ şeklinde bir injektif dönüşümünü ve $f = ip$ eşitliğini sağlayacak $f : F \rightarrow R$ homomorfizmasını ele alalım. Bu durumda $im f = A$ olacaktır ve $im f = A$, R nin bir dik toplananında büyük (essential) olacaktır. A kapalı (closed) olduğundan A , R nin dik toplananı olur. Sonuç olarak bu durum bize R halkasının $C1$ özelliğine sahip olduğunu göstermiş olur. □

Sonuç 4.133. *R bir halka olsun. Eğer her serbest (free) modül $ESIP$ özelliğine sahip ise R halkası $C1$ özelliğine sahiptir.*

İspat Tanımlardan açıktır. □

Teorem 4.134. *R bir halka olsun. Eğer her serbest (free) modülün büyük (essential)-alt modülünün görüntüsü yine büyük (essential)-alt modül oluyorsa ve her serbest (free) modül $C1$ modülü ise, o zaman her modül $SSEP$ ve $STEP$ özelliklerine sahiptir.*

İspat M R -modül olsun. Buradan $M = \frac{F}{L}$ olacak şekilde F serbest (free) modülü ve $L \leq M$ alt modülü vardır. A ve B , M modülünün dik toplananları olmak üzere

$$A = \frac{A_0 + L}{L} \text{ ve } B = \frac{B_0 + L}{L}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde F serbest (free) modülünün A_0 ve B_0 dik toplananları vardır. Dolayısıyla

$$A_0 + B_0 \leq_e D \leq_d F$$

ifadesini sağlayan F serbest (free) modülünün D dik toplananı vardır. Buradan

$$\frac{D + L}{L} \leq_d \frac{F}{L}$$

ve

$$A + B = \frac{A_0 + B_0 + L}{L} \leq \frac{D + L}{L}$$

elde edilmiş olur. Hipotezden

$$\frac{A_0 + B_0 + L}{L} \leq_e \frac{D + L}{L}$$

elde edilir. Buradan son olarak

$$A + B \leq_e D \leq_d M$$

elde edilmiş olur. Buradan M modülünün $ESSP$ ye sahip olduğu görülür. Benzer şekilde M modülünün $ESIP$ özelliğine sahip olduğu da görülür. $\square$

Çalışmanın bu kısmında tanımlamış olduğumuz $ESIP$ ve $ESSP$ modüllerin matris halkalarındaki davranışları ile ilgili sonuçlara değineceğiz.

R birimli bir halka olsun ve $h \in R$ öyle bir idempotent eleman ($h^2 = h$) olsun ki $R = RhR$ ifadesini sağlasın. Bu durumda, $W = hRh$ alt halkasını tanımlayalım. M , bir sağ R -modülü olmak üzere, Mh bir sağ W -modülüdür.

Lemma 4.135. S , M_R 'nin bir alt modülü olsun. O halde S , M_R 'nin bir dik toplananıdır ancak ve ancak Sh , $(Mh)_W$ 'nin bir dik toplananıdır.

İspat S alt modülü M modülünün bir dik toplananı olsun. Dolayısıyla M modülünü $M = S \oplus S'$ ifadesi elde edilecek şekilde M modülünün bir S' gibi dik toplananı vardır. Bu ifadeden faydalanarak $Mh = Sh + S'h$. eşitliği de elde edilir. Son eşitlikten,

$$Sh \cap S'h \leq S \cap S' = 0,$$

elde edilir. Dolayısıyla $Mh = Sh \oplus S'h$. elde edilmiş olur. Tersine bakalım. Mh modülünü $Mh = Sh \oplus D$ ifadesini sağlayacak şekilde $D \leq (Mh)_K$ alt modülü var olsun.

Buradan $S \cap DR = 0$ ifadesi ve

$$M = MhR = (Sh + D)R = ShR + DR = S + DR.$$

ifadesi kolayca elde edilir. Dolayısıyla bu bağlamda $M = S \oplus DR$ sonucu elde edilmiş olur. $\square$

Teorem 4.136. *Yukarıdaki notasyonu kullanarak, M bir sağ R -modül olsun. O halde, M , sağ R -modül olarak ESIP modüldür ancak ve ancak Mh sağ W -modülü olarak ESIP modüldür.*

İspat Lemma 4.135'dan doğrudan elde edilir. □

Teorem 4.137. *M modülü bir R -modül olmak üzere. M modülü ESIP özelliğine sahiptir ancak ve ancak $(Mh)_W$ modülü de ESIP özelliğine sahiptir.*

İspat A, B alt modülleri Mh modülünün dik toplananları olsun. Bu durumda A, B aynı zamanda M modülünün de dik toplananları olacaktır. Dolayısıyla

$$A \cap B \leq_e L \leq_d M.$$

eşitliğini sağlayacak şekilde M 'nin bir L dik toplananı vardır. Bu bağlamda $A \cap B \leq Mh$ ve $A \cap B \leq_h Lh$ eşitliğini yazabiliriz. Lemma 4.135 dan $Lh \leq_d M$. elde edilmiş oluruz. Elde edilen son durum ise Mh W -modülünün ESIP özelliğine sahip olduğunu göstermiş olur. Tersini görelim; A, B alt modülleri M modülünün birer dik toplananları olsun. Bu durumda Ah, Bh alt modülleri de Mh, W -modülünün birer dik toplananları olur. Lemma 4.135 dan Mh W -modülü ESIP özelliğine sahip olduğu için

$$Ah \cap Bh \leq_e L \leq_d Mh.$$

ifadesini sağlayacak şekilde Mh modülünün L gibi bir dik toplananı vardır. Aynı zamanda $Mh = L \oplus S$. eşitliğini sağlayan S dik toplananı vardır.

Buradan hareketle

$$M = MhR = LR + SR.$$

ifadesi kolayca görülür. $x \in LR \cap SR$ olsun. Bu durumda

$$xh \in LRh \cap SRh \subseteq Lh \cap Sh \subseteq L \cap S = 0.$$

olacaktır. Son elde edilen sonuç $LR \cap SR = 0$ ifadesinin var olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$M = MhR = LR \oplus SR$$

elde edilir. $a \in LR$ olsun. Buradan $ah \in Ah \cap Bh \in A \cap B$ ifadesini sağlayacak şekilde $t \in W$ vardır. Bu durumda $ht = t$ ve $ah \neq 0$ yazılır. Devamında $Ah \cap Bh \leq_e Lh$ görülmüş olur. Elde edilen son ifadelerden

$$0 \neq at \in Ah \cap Bh \subseteq A \cap B$$

ve

$$A \cap B \leq_e LR \leq_d M.$$

olur. Sonuç olarak, M modülünün *ESIP* özelliğine sahip olduğu görülmüş olur. $\square$

Sonuç 4.138. R bir halka olmak üzere R , *ESIP* halkadır ancak ve ancak hRh -modülü olan Rh , *ESIP* modüldür.

İspat Tanımlardan açıktır. $\square$

Sonuç 4.139. Şimdi, W bir birimli halka ve m pozitif bir tam sayı olmak üzere, R halkası, girdileri W 'den alınmış tüm $m \times m$ matrislerin halkası olarak $\text{Mat}_m(W)$ şeklinde tanımlansın. R halkasında, yalnızca $(1, 1)$ konumundaki girdisi 1 olan ve diğer tüm girdileri sıfır olan matrise h_{11} diyelim. Bilindiği üzere, h_{11} bir idempotenttir ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$W \cong h_{11}Rh_{11} \quad \text{ve} \quad R = Rh_{11}R.$$

Yukarıdaki notasyon altında, $R = \text{Mat}_m(W)$ olsun. O hâlde, R , *ESIP* bir halkadır ancak ve ancak serbest (free) W -modülü olan W^m , *ESIP* modüldür.

İspat Tanımlardan açıktır. $\square$

Önerme 4.140. M bir R -modül olsun. M modülü *ESSP* özelliğine sahiptir ancak ve ancak M_h modülü *ESSP* özelliğine sahiptir.

İspat P ve Q , M_h modülünün birer dik toplananları olsunlar. Bu durumda P ve Q , aynı zamanda M 'nin de dik toplananları olur. Bu durumda $P + Q \leq_e L \leq_d M$ olacak şekilde M modülünün bir L dik toplananı vardır. Dolayısıyla buradan

$$P + Q \leq M_h \quad \text{ve} \quad P + Q \leq_e L_h$$

elde edilir Lemma 4.135 dan $L_h \leq_d M$ elde edilir. Böylece M_h modülü W -modülü olarak *ESSP* özelliğine sahip olduğu görülmüş olur.

Tersine, P ve Q , M modülünün dik toplananları olsun. Bu durumda P_h, Q_h M_h modülünün dik toplananları olurlar. Lemma 4.135 dan $P_h + Q_h \leq_e L \leq_d M_h$ olacak şekilde M_h modülünün bir L dik toplananı vardır. Ayrıca $M_h = L \oplus S$ olacak şekilde bir S dik toplananı daha vardır. Buradan

$$M = M_h R \quad \text{ve} \quad M_h R = LR \oplus SR$$

yazabiliriz. Her $x \in LR + SR$ için

$$xh \in LRh + SRh \subseteq L_h + S_h \subseteq L + S \subseteq M$$

olacaktır. Sonuç olarak $LR + SR = M$, $M = M_h R = LR \oplus SR$ elde edilir.

Şimdi $a \in KR$ için, öyle bir $t \in K$ vardır ki $aht \in P_h + Q_h \subseteq P + Q$ ve $ht = t$, ayrıca $aht \neq 0$. Böylece $P_h + Q_h \leq_e L_h$ ve

$$0 \neq at \in P_h + Q_h \subseteq P + Q$$

olur. O halde $P + Q \leq_e KR \leq_d M$ yazılır. Böylece M modülünün *ESSP* özelliğine sahip olduğu ispatlanır. $\square$

Teorem 4.141. *Yukarıda tanımlanan ve ifade edilen gösterimler ile $R = \text{Mat}_m(W)$ olsun. Bu durumda, R halkası sağ *ESSP* halkasıdır ancak ve ancak serbest (free) sağ W -modülü olan W^m bir *ESSP* modülüdür.*

İspat R bir sağ *ESSP* halkası olsun. Bu durumda W^m W -modülü *SSP* özelliğine sahiptir ancak ve ancak W halkası *SSP* özelliğine sahiptir. Çünkü $K \cong Rh_{11}$ eşitliği ve Lemma 4.135 dan,

$$W^m = Y \oplus Y'$$

şeklinde bir dik toplam elde edilecektir. Burada Y ve Y' alt modülleri W^m 'nin dik toplananlarıdır. Bu altmodüller aynı zamanda M_R modülünün de dik toplananları olur. Bu durumda,

$$Y + Y' \leq_e D \leq_d M_R$$

olacak şekilde M_R 'nin D gibi bir dik toplananı vardır. O halde

$$Y + Y' \leq W^m \quad \text{ve} \quad Y + Y' \leq_e D^h$$

yazılabilir. Lemma 4.135 dan $D^h \leq_d W^m$ olduğu görülür. Böylece W^m , bir W -modülü olarak *ESSP* özelliğine sahip olduğu görülmüş olur.

Tersini görelim, Q ve T olacak şekilde R 'nin iki dik toplananı ele alalım. Bu durumda Qh_{11} ve Th_{11} , W^m 'nin iki dik toplananı olur. Lemma 4.135 dan, W^m 'nin bir dik toplananı olan D alt modülünün varlığı görülmüş olur ve aynı zamanda W^m bir *ESSP* modülü olduğundan,

$$Qh_{11} + Th_{11} \leq_e D \leq_d K^m$$

yazabiliriz. Buradan

$$Qh_{11} + Th_{11} \leq_e D_R \leq_d W^m$$

elde edilir. Böylece M 'nin *ESSP* özelliğine sahip olduğu görülür. □

5. SONUÇLAR

Çalışmada, SIP ve SSP modüllerin yeni bir genellemesi yapılmaya çalışılmıştır. Bu bağlamda tanımladığımız ESSP (iki dik toplananın toplamı bir dik toplananda büyük (essential) ise ve ESIP (iki dik toplananın arakesiti bir dik toplananda büyük (essential) ise modül ailelerinin karakteristik özellikleri üzerinde durulmuştur.

Tanımlanan ESSP ve ESIP modül aileleri ile SSP ve SIP modüller arasındaki farklılıklar örnekler ile göz önüne serilmiştir.

Bu bağlamda tez çalışması boyunca; Eğer her serbest (free) modül ESIP özelliğine sahip ise R halkası (C1) özelliğine sahip olduğu görülmüştür. Bunun dışında eğer modül (C3) koşulunu sağlıyor ve ESIP özelliğine sahip ise, M modülü ESSP özelliğine de sahiptir sonucuna varılmıştır. Devamında tanımladığımız belirli koşullar altında ESIP özelliğine sahip modüllerin ESSP özelliğine de sahip oldukları ispatlanarak sunulmuştur. Bunlara ek olarak A , M 'nin bir dik toplananı olmak üzere M , ESSP özelliğine sahiptir ancak ve ancak $\alpha : M \rightarrow M/A$ şeklinde tanımlanan herhangi bir split epimorfizması için $A + \text{Ker}(\alpha)$, M modülünün bir dik toplananında büyük (essential) alt modül olduğu da gösterilmiştir.

Çalışmanın sonunda ESIP ve ESSP özelliğine sahip modüllerin matris halkaları ile olan bağlantıları irdelenerek matris halkalarının hangi koşullar altında ESIP ve ESSP özelliğine sahip oldukları incelenmiştir. Bu bağlamda R birimli bir halka ve $h \in R$ öyle bir idempotent eleman ($h^2 = h$) olsun ki $R = RhR$ ifadesini sağlasın. Bu durumda, $W = hRh$ alt halkasını tanımlayalım. M , bir sağ R -modülü olmak üzere, Mh bir sağ W -modülüdür ifadesi ele alındığında M modülü bir R -modül olmak üzere. M modülü ESIP özelliğine sahiptir ancak ve ancak $(Mh)_W$ modülü de ESIP özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir. Devamında R bir halka olmak üzere R , ESIP bir halka olması, ancak ve ancak hRh -modülü olan Rh , ESIP bir modül olduğu ve M bir R -modülü olduğu zaman M modülü SSEP özelliğine sahiptir ancak ve ancak M_h modülü SSEP özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir. SSP ve SIP modüller üzerine elde edilen kullanışlı pek çok önerme ESSP ve ESIP modüller üzerine genelleştirilmiştir. Bu genelleştirme içerisinde ESSP ve ESIP modüllerin injektif modüller, (C1),(C2),(C3) koşulları ve (D1),(D2),(D3) koşullarını sağlayan modüller ile arasındaki ilişkilere değinilmiştir. Düzenli (regular) mo-

düllerin ESSP ve ESIP modül olma durumları ele alınarak bu iki modül ailesi arasındaki ilişkiler değerlendirilmiştir. Tanımlanan özellikler üzerine elde edilen bütün sonuçlar ışığında modül ve halkalar üzerinde yeni genellemeler elde edilmiştir.

SSP ve SIP modüller üzerine bir çok çalışma yapılmıştır ve yapılmaya devam ediliyor. Bu bağlamda Modül ve Halka Teorisinde değerli bir yere sahip olan SSP ve SIP modüller ile ilgili çalışmalarda elde edilen sonuçlar benzer şekilde ESIP ve ESSP modüller üzerine de yapılabilir.

Çalışmada birçok modül türünün özellikler de sol(sağ) kalıtsal (hereditary) modüllerin ESSP ve ESIP modüller ile ilgili kısmına değinilmemiştir. Dolayısıyla yeni çalışmalarda farklı modül türlerinin ve özellikle sol(sağ) kalıtsal (hereditary) modüllerin ESSP ve ESIP modüller arasındaki ilişkilerin incelenmesinin faydalı olacağı düşünülmektedir.

6. KAYNAKLAR

- Abyzov, A. N. and Tuganbaev, A. A. 2014. Modules in which sums or intersections of two direct summands are direct summands. *Fundam. Prikl. Mat.*, 19: 3–11 .
- Abyzov, A. N. , Nhan, T. H. N. and Quynh, T.C. 2017. Modules Close to SSP and SIP modules. *Lobacheskii Journal of Math.*, 38: 16-23.
- Adkins, W. A. and Weintraub, S. H. 1992. Algebra an Approach via Module Theory. Springer, Verlag, 526.
- Alkan, M. and Harmanci, A. 2002. On summand sum and summand intersection property of modules. *Turk. J.Math.*, 26: 131–147.
- Amin, I. , Ibrahim,Y. and Yousif, M. F. 2014. D3-modules. *Commun. Algebra*, 42 (2): 578–592.
- Amin, I. , Ibrahim,Y. and Yousif, M. F. 2015. C3-modules. *Algebra Colloq.*, 22: 655-670.
- Anderson, F.W. and Fuller, K. R. 1974. Rings and Categories of Modules. Springer, New York, 385.
- Arnold, D.M. and Hausen, J. 1990. A characterization of modules with the summand intersection property. *Comm. Algebra* ,18: 519–528.
- Clark, J. , Lomp, C. , Vanaja, N. and Wisbauer, R. 2006. Lifting Modules. Supplements and Projectivity in Module Theory. Frontiers in Mathematics Birkha" user, Basel, Boston, Berlin, 402.
- Dung, N.V., Huynh, D. V. , Smith, P. F. and Wisbauer, R. 1994. Extending Modules, Vol. 313 of Pitman Research Notes in Mathematics Longman Sci. and Tech., Harlow, New York, 246.
- Fuchs, L. 1970. Infinite Abelian Groups I, Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York-London, 304.
- Garcia, J. L. 1989. Properties of direct summands of modules. *Commun. Algebra*, 17: 73–92.

- Goodearl, K.R. 1976. Ring Theory. Non Singular Rings and Modules. Marcel Dekker, New York and Basel, 127.
- Güngöroğlu, G., Harmancı A., 2000. On some classes of Modules. *Czech. Math. Journ.*, 50 (126):839-846. Dekker, New York and Basel, 127.
- Hausen, J. 1989. Modules with the summand intersection property. *Commun. Algebra*, 17: 135–148.
- Hamdouni, A., Özcan, A. Ç. and Harmancı, A., 2005. Characterization of Modules and Rings by the Summand Intersection Property and the Summand Sum Property. *JP Jour. Algebra, Number Theory and Appl.*, 5(3): 469-490.
- Huynh, Dinh and Jain, S. and Lopez-Permouth, Sergio and Rizvi, Syed and Cosmin, Seliste. 2014. Ring theory and its applications. Ring theory session in honor of T. Y. Lam on his 70th birthday, 31st Ohio State-Denison mathematics conference. Columbus, OH, USA. 17.
- Kaplansky, I. 1954. Infinite Abelian Groups. University of Michigan Press, Ann Arbor, 93.
- Karabacak, F. and Tercan, A. 2007. On modules and matrix rings with SIP-extending. *Taiwanese J. Math.*, 11 (4): 1037–1044.
- Kasch, F. 1982. Modules and Rings. Academic Press, London, 382.
- Lam, T.Y. 2012. Graduate Texts in Mathematics 189. Lectures on Modules and Rings. Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 585.
- Mohammed, S. H. and Muller, B. J. 1990. Continuous and Discrete Modules. Vol. 147 of London Math. Soc. Lecture Notes Series. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 137.
- Nicholson, W. K. and Yousif, M. F. 2003. Quasi-Frobenius Rings. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 327.
- Taşdemir, Ö. , Karabacak, F. 2019. Generalized SIP-modules. *Hacet. J. Math. Stat.*, 48 (4):1137–1145

- Valcan, D. 1999. Injective modules with the direct summand intersection property. *Sci. Bull. of Moldavian Academy of Sciences, Seria Mathematica*, 31: 39–50.
- Wilson, G. V. 1986. Modules with the summand intersection property. *Commun. Algebra*, 14: 21–38.
- Wisbauer, R. 1991. Foundations of Module and Ring Theory. Gordon and Breach, London, 616.



ÖZGEÇMİŞ

Eren DOĞAN

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Doktora 2020–2025	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Yüksek Lisans 2015–2018	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretim Görevlisi 2024–Devam Ediyor	Hakkari Üniversitesi Yüksekova Meslek Yüksekokulu, Hakkari
Öğretmen 2021–2023	Değişim Eğitim Kurumları Matematik Öğretmeni, Hakkari
Öğretmen 2019–2021	Açı Eğitim Kurumları Matematik Öğretmeni, Antalya
Öğretmen - Müdür 2017–2019	Eğitim Bilimleri Okulları, Matematik Öğretmeni, Antalya
Öğretmen 2015–2017	Özel Adalya Koleji Matematik Öğretmeni, Antalya
Öğretmen 2011–2015	Açı Eğitim Kurumları Matematik Öğretmeni, Antalya

ESERLER:

1- Dogan, E. and Alkan, M. (2025). Modules and Matrix Rings with SIEP and SSEP Properties. *MTJPAM*, Accepted Paper.

