

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DİKDÖRTGEN DELİK İÇEREN KOMPOZİT
ŞERİT-LEVHALARIN EĞİLMESİNDEKİ GERİLME
YIĞILMASI PROBLEMLERİ**

İnşaat Yük. Müh. Alkız MERMER YÜCEL

**FBE İnşaat Anabilim Dalı Yapı Programında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 09 Ocak 2003
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV (YTÜ)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Yalçın AKÖZ (İTÜ)
: Prof. Dr. Mehmet OMURTAG (İTÜ)
: Prof. Dr. R. Faruk YÜKSELER (YTÜ)
: Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK (YTÜ)

İSTANBUL, 2003

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÖNSÖZ	x
ÖZET	xi
ABSTRACT	xiii
1. GİRİŞ	1
1.1 Kompozit Malzemelere Ait Genel Bilgiler	1
1.2 Tez Konusuna Ait Bilgiler	3
1.3 Yapılan Araştırmanın Amacı.....	3
2. DİKDÖRTGEN DELİK İÇEREN ŞERİT-LEVHALAR.....	5
2.1 Giriş	5
2.2 Literatür Özeti	6
2.3 Kare Delik İçeren Anizotrop Şerit-Levhanın Karşılıklı Kenarlarından Çekilmesi Problemi	9
2.3.1 Ele Alınan Problemin Matematiksel Modeli.....	9
2.3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modelleme.....	11
2.3.3 Sonlu Elemanlar Kullanımının Ele Alınan Çalışmadaki Bazı Özellikleri.....	14
2.3.4 Sayısal Sonuçların İncelenmesi.....	15
2.4 Dikdörtgen Delik İçeren Anizotrop Şerit-Levhanın Eğilmesi Problemi	19
2.4.1 Ele Alınan Problemlerin Matematiksel Modeli.....	19
2.4.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modelleme.....	20
2.4.3 Sayısal Sonuçların İncelenmesi.....	20
2.4.3.1 Ankastre Mesnetli Olması Durumu	21
2.4.3.2 Basit Mesnetli Olması Durumu	28
3. DİKDÖRTGEN DOLGU İÇEREN ŞERİT-LEVHALAR	36
3.1 Giriş	36
3.2 Literatür Özeti	36
3.3 Dikdörtgen Dolgu İçeren Anizotrop Şerit-Levhanın Eğilmesi Problemi	39
3.3.1 Ele Alınan Problemlerin Matematiksel Modeli.....	39
3.3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modelleme.....	40
3.3.3 Sayısal Sonuçların İncelenmesi.....	41
4. DİKDÖRTGEN DELİK İÇEREN ÖNGERİLMELİ ŞERİT-LEVHA	50
4.1 Giriş	50
4.2 Literatür Özeti	51
4.3 Dikdörtgen Delik İçeren Anizotrop Şerit-Levhanın Eğilmesi Problemi	51
4.3.1 Ele Alınan Problemin Matematiksel Modeli.....	51
4.3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Modelleme.....	55
4.3.3 Sayısal Sonuçların İncelenmesi.....	60
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	73

KAYNAKLAR	76
ÖZGEÇMİŞ.....	79

SİMGE LİSTESİ

a	Düğüm noktalarında bilinmeyen yer değiştirmeleri gösteren vektör
A_{ij}	Çok katlı kompozit malzemenin normalize edilmiş mekanik özellikleri
D	Malzeme sabitlerini içeren matris

E_1, E_2	Elastisite (Young) modülleri
h	Levha yüksekliği
h_A	Dikdörtgen delik ile levhanın x_2 doğrultusundaki alt sınırları arasındaki kalınlık
h_B	Kare veya dikdörtgen deliğin x_2 doğrultusundaki yüksekliği
h_K	Kare delik ile levhanın x_2 doğrultusundaki alt veya üst sınırları arasındaki kalınlık
h_U	Dikdörtgen delik ile levhanın x_2 doğrultusundaki üst sınırları arasındaki kalınlık
$\mathbf{K}$	Rijidlik (Stiffness) matrisi
ℓ	x_1 doğrultusundaki levha uzunluğu
ℓ_E	Dikdörtgen deliğin mesnetden boyutsuz uzaklığı ($= x_L / \ell$)
M	Sonlu eleman adedi
$\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_\sigma$	Şekil fonksiyonları matrisi
p	Şerit-levhanın üst yüzeyine normal doğrultuda etki eden düzgün yayılı yük
q	Şerit-levhanın karşılıklı iki kenarından etki eden düzgün yayılı çekme yükü
$\mathbf{r}$	Düğüm noktalarına etki eden kuvveti gösteren vektör
R	Toplam düğüm noktası adedi
S	Ω bölgesinin dış sınırı
u_1, u_2	Sırasıyla x_1 ve x_2 yönündeki yer değiştirme
$u_i^{(0)}$	Karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı q çekme yükü ile çekildiğinde oluşan yer değiştirme
$u_i^{(1)}$	Şerit-levhanın üst yüzeyine normal doğrultuda etki eden düzgün yayılı p yüklemeinden oluşan yer değiştirme
U_1 / ℓ	x_1 yönündeki boyutsuz yer değiştirme
x_1, x_2	Boyutlu global Lagrange koordinatları
x_{10}, x_{20}	O' nün boyutlu global koordinatları
x_L	Kare ve dikdörtgen deliğin mesnetden uzaklığı
α, β	Sonlu elemanın sırasıyla x_1 ve x_2 doğrultusundaki geometrik yarı uzunlukları
δ_i^j, δ_{ij}	Kronecker sembolü
ε_{ij}	Şekil değiştirme tansörü bileşenleri
$\varepsilon_{ij}^{(0)}$	Karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı q çekme yükü ile çekildiğinde oluşan şekil değiştirme tansörü bileşenleri
$\varepsilon_{ij}^{(1)}$	Şerit-levhanın üst yüzeyine normal doğrultuda etki eden düzgün yayılı p yüklemeinden oluşan şekil değiştirme tansörü bileşenleri
$\varepsilon_{ij}^{(k)}$	$k=1$ dolguyu çevreleyen bölgenin, $k=2$ dolgunun şekil değiştirme tansörü bileşenleri
η_1, η_2	Sırasıyla matris ve güçlendirici malzemelerinin kompozit içerisindeki hacim oranları
λ_1, λ_2	Sırasıyla matris ve güçlendirici malzemelerin Lamé sabitleri
μ_1, μ_2	Sırasıyla matris ve güçlendirici malzemelerin Lamé sabitleri
ν_1, ν_2	Sırasıyla matris ve güçlendirici malzemelerin Poisson oranları
σ_{ij}	Gerilme tansörü bileşenleri

$\sigma_{ij}^{(0)}$	Karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı q çekme yükü ile çekildiğinde oluşan gerilme tansörü bileşenleri
$\sigma_{ij}^{(1)}$	Şerit-levhanın üst yüzeyine normal doğrultuda etki eden düzgün yayılı p yüklemesinden oluşan gerilme tansörü bileşenleri
$\sigma_{ij}^{(k)}$	$k=1$ dolguyu çevreleyen bölgenin, $k=2$ dolgunun gerilme tansörü bileşenleri
$\bar{\sigma}_i$	Süreklileştirme işleminde düğüm noktalarındaki aranan gerilme değerleri
Ω	Çözüm bölgesi
Ω_I	Dolguyu çevreleyen geometrik bölge
Ω_{II}	Dolgunun bulunduğu geometrik bölge
Ω_k	k 'nıncı sonlu elemanın geometrik bölgesi
ξ, η	Seçilen sonlu elemanda boyutsuz yerel koordinatlar
$(.)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (.)$	

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1	Ele alınan şerit-levhanın geometrisi 10
Şekil 2.2	a) Boyutlu durumda; b) Boyutsuz durumda sonlu eleman geometrisi 11
Şekil 2.3	Bu çalışmada elde edilen σ_{11} / q gerilmesinin Lei vd. (2001) ile karşılaştırılması 15
Şekil 2.4	Bu çalışmada elde edilen σ_{22} / q gerilmesinin Lei vd. (2001) ile karşılaştırılması.. 15
Şekil 2.5	Farklı kare delik ölçülerinde $\sigma_{11} / \bar{E}_1$ gerilmesinin x_2 / ℓ ye göre grafiği 17
Şekil 2.6	Farklı kare delik ölçülerinde $\sigma_{22} / \bar{E}_1$ gerilmesinin x_2 / ℓ ye göre grafiği 17
Şekil 2.7	Farklı E_2 / E_1 değerlerinde $\sigma_{11} / \bar{E}_1$ gerilmesinin x_2 / ℓ ye göre grafiği 17
Şekil 2.8	Farklı E_2 / E_1 değerlerinde $\sigma_{22} / \bar{E}_1$ gerilmesinin x_2 / ℓ ye göre grafiği 17
Şekil 2.9	Farklı kare delik ölçülerinde $\sigma_{11} / \bar{E}_1$ gerilmesinin x_1 / ℓ ye göre grafiği 17
Şekil 2.10	Farklı kare delik ölçülerinde $\sigma_{11} / \bar{E}_1$ gerilmesinin x_1 / ℓ ye göre grafiği 17
Şekil 2.11	Farklı kare delik ölçülerinde $\sigma_{22} / \bar{E}_1$ gerilmesinin x_1 / ℓ ye göre grafiği 18
Şekil 2.12	Farklı kare delik ölçülerinde $\sigma_{22} / \bar{E}_1$ gerilmesinin x_1 / ℓ ye göre grafiği 18
Şekil 2.13	Farklı E_2 / E_1 değerlerinde $\sigma_{11} / \bar{E}_1$ gerilmesinin x_1 / ℓ ye göre grafiği 18
Şekil 2.14	Farklı E_2 / E_1 değerlerinde $\sigma_{11} / \bar{E}_1$ gerilmesinin x_1 / ℓ ye göre grafiği 18
Şekil 2.15	Farklı E_2 / E_1 değerlerinde $\sigma_{22} / \bar{E}_1$ gerilmesinin x_1 / ℓ ye göre grafiği 18
Şekil 2.16	Farklı E_2 / E_1 değerlerinde $\sigma_{22} / \bar{E}_1$ gerilmesinin x_1 / ℓ ye göre grafiği 18
Şekil 2.17	Levhanın geometrisi 19
Şekil 2.18	Farklı E_2 / E_1 oranları için σ_{11} / p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1 / ℓ ye göre grafikleri 21
Şekil 2.19	Farklı E_2 / E_1 oranları için σ_{22} / p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1 / ℓ ye göre grafikleri 22
Şekil 2.20	Farklı E_2 / E_1 oranları için σ_{12} / p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1 / ℓ ye göre grafikleri 23
Şekil 2.21	Farklı E_2 / E_1 oranları için σ_{12} / p gerilmesinin $x_1 / \ell = 0.236$ kesitinde x_2 / ℓ ye göre grafiği 24
Şekil 2.22	Farklı $\ell_E (= x_L / \ell$:dikdörtgen deliğin mesnetden uzaklığı) değeri için σ_{11} / p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1 / ℓ ye göre grafikleri 24
Şekil 2.23	Farklı ℓ_E değeri için σ_{22} / p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1 / ℓ ye göre grafikleri 25
Şekil 2.24	Farklı ℓ_E değeri için σ_{12} / p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1 / ℓ ye göre grafikleri 26
Şekil 2.25	Farklı ℓ_E değeri için σ_{12} / p gerilmesinin x_2 / ℓ ye göre grafiği 27
Şekil 2.26	Farklı h_B (dikdörtgen deliğin x_2 doğrultusundaki uzunluğu) değeri için σ_{11} / p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1 / ℓ ye göre grafikleri 27
Şekil 2.27	Farklı h_B değeri için σ_{22} / p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1 / ℓ ye göre grafikleri 28
Şekil 2.28	Farklı E_2 / E_1 oranları için σ_{11} / p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1 / ℓ ye göre grafikleri 28

Şekil 2.29	Farklı E_2/E_1 oranları için σ_{22}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.....	29
Şekil 2.30	Farklı E_2/E_1 oranları için σ_{12}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.....	30
Şekil 2.31	Farklı E_2/E_1 oranları için σ_{12}/p gerilmesinin $x_1/\ell = 0.236$ kesitinde x_2/ℓ ye göre grafiği.....	31
Şekil 2.32	Farklı ℓ_E değeri için σ_{11}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri	32
Şekil 2.33	Farklı ℓ_E değeri için σ_{22}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri	33
Şekil 2.34	Farklı ℓ_E değeri için σ_{12}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri	33
Şekil 2.35	Farklı ℓ_E değeri için σ_{12}/p gerilmesinin x_2/ℓ ye göre grafiği.....	34
Şekil 2.36	Farklı h_B değeri için σ_{11}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.....	34
Şekil 2.37	Farklı h_B değeri için σ_{22}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.....	35
Şekil 3.1	a) Boşluk içermesi durumunda; b) Dolgu malzemesi içermesi durumunda ele alınan şerit-levhanın geometrisi	39
Şekil 3.2	σ_{22}/p gerilmesinin farklı elastisite modülü oranlarında a) $h_B = 0.025\ell$ durumunda; b) $h_B = 0.05\ell$ durumunda; c) $h_B = 0.075\ell$ durumunda x_1/ℓ ye göre grafikleri.....	42
Şekil 3.3	σ_{11}/p gerilmesinin farklı elastisite modülü oranlarında a) $h_B = 0.025\ell$ durumunda; b) $h_B = 0.05\ell$ durumunda; c) $h_B = 0.075\ell$ durumunda x_1/ℓ ye göre grafikleri.....	43
Şekil 3.4	σ_{12}/p gerilmesinin farklı elastisite modülü oranlarında a) $h_B = 0.025\ell$ durumunda; b) $h_B = 0.05\ell$ durumunda; c) $h_B = 0.075\ell$ durumunda x_1/ℓ ye göre grafikleri.....	44
Şekil 3.5	σ_{12}/p gerilmesinin farklı elastisite modülü oranlarında a) $h_B = 0.025\ell$ durumunda; b) $h_B = 0.05\ell$ durumunda; c) $h_B = 0.075\ell$ durumunda $x_1/\ell = 0.236$ kesitinde x_2/ℓ ye göre grafikleri.....	45
Şekil 3.6	σ_{22}/p gerilmesinin farklı elastisite modülü oranlarında a) $\ell_E = 0.139$ durumunda; b) $\ell_E = 0.250$ durumunda; c) $\ell_E = 0.361$ durumunda x_1/ℓ ye göre grafikleri.....	46
Şekil 3.7	σ_{11}/p gerilmesinin farklı elastisite modülü oranlarında a) $\ell_E = 0.139$ durumunda; b) $\ell_E = 0.250$ durumunda; c) $\ell_E = 0.361$ durumunda x_1/ℓ ye göre grafikleri.....	47
Şekil 3.8	σ_{12}/p gerilmesinin farklı elastisite modülü oranlarında a) $\ell_E = 0.139$ durumunda; b) $\ell_E = 0.250$ durumunda; c) $\ell_E = 0.361$ durumunda x_1/ℓ ye göre grafikleri.....	48
Şekil 3.9	σ_{12}/p gerilmesinin farklı elastisite modülü oranlarında a) $\ell_E = 0.139$ durumunda; b) $\ell_E = 0.250$ durumunda; c) $\ell_E = 0.361$ durumunda x_2/ℓ ye göre grafikleri.....	49
Şekil 4.1	Ele alınan yapı elemanının a) yüksüz durumu ($\sigma_{ij} = 0$, $\epsilon_{ij} = 0$),	

	b) öngerilmeli durumu ($\sigma_{ij}^{(0)} \neq 0$, $\varepsilon_{ij}^{(0)} \neq 0$), c) öngerilme ve üstten yüklenmesi durumu ($\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}(\sigma_{ij}^{(0)})$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \varepsilon_{ij}^{(1)}(\varepsilon_{ij}^{(0)})$)	52
Şekil 4.2	$\sigma_{11}^{(0)}/q$ öngerilmesinin a) $x_2/\ell = h/\ell$; b) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; c) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki x_1/ℓ ye göre grafikleri	60
Şekil 4.3	$\sigma_{22}^{(0)}/q$ öngerilmesinin a) $x_2/\ell = 5h/6\ell$; b) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; c) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki x_1/ℓ ye göre grafikleri	61
Şekil 4.4	$\sigma_{12}^{(0)}/q$ öngerilmesinin q/E_1 değerinde a) $x_2/\ell = 5h/6\ell$; b) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; c) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki x_1/ℓ ye göre grafikleri	62
Şekil 4.5	$\sigma_{12}^{(0)}/q$ öngerilmesinin $x_1/\ell = 0.236$ kesitinde x_2/ℓ ye göre grafiği	62
Şekil 4.6	$\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı q/E_1 değerlerinde a) $x_2/\ell = h/\ell$; b) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; c) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki x_1/ℓ ye göre grafikleri.....	63
Şekil 4.7	$\sigma_{22}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı q/E_1 değerlerinde a) $x_2/\ell = 5h/6\ell$; b) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; c) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki x_1/ℓ ye göre grafikleri.....	64
Şekil 4.8	$\sigma_{12}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı q/E_1 değerlerinde a) $x_2/\ell = 5h/6\ell$; b) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; c) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki x_1/ℓ ye göre grafikleri.....	64
Şekil 4.9	$\sigma_{12}^{(1)}/p$ gerilmesinin $x_1/\ell = 0.236$ kesitinde x_2/ℓ ye göre grafiği	65
Şekil 4.10	$\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı E_2/E_1 değerlerinde a) $x_2/\ell = 5h/6\ell$; b) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; c) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki öngerilmeli ve öngerilmesiz durumda x_1/ℓ ye göre grafikleri.....	65
Şekil 4.11	$\sigma_{22}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı E_2/E_1 değerlerinde a) $x_2/\ell = h/\ell$; b) $x_2/\ell = 5h/6\ell$; c) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; d) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki öngerilmeli ve öngerilmesiz durumda x_1/ℓ ye göre grafikleri	66
Şekil 4.12	$\sigma_{12}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı E_2/E_1 değerlerinde a) $x_2/\ell = h/\ell$; b) $x_2/\ell = 5h/6\ell$; c) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; d) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki öngerilmeli ve öngerilmesiz durumda x_1/ℓ ye göre grafikleri	67
Şekil 4.13	$\sigma_{12}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı E_2/E_1 değerlerinde $x_1/\ell = 0.236$ kesitinde x_2/ℓ ye göre grafiği.....	67
Şekil 4.14	$\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı ℓ_E değerlerinde a) $x_2/\ell = h/\ell$; b) $x_2/\ell = 11h/12\ell$; c) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; d) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki öngerilmeli ve öngerilmesiz durumda x_1/ℓ ye göre grafikleri	68
Şekil 4.15	$\sigma_{22}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı ℓ_E değerlerinde a) $x_2/\ell = h/\ell$; b) $x_2/\ell = 11h/12\ell$; c) $x_2/\ell = 5h/6\ell$; d) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; e) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki öngerilmeli ve öngerilmesiz durumda x_1/ℓ ye göre grafikleri.	69
Şekil 4.16	$\sigma_{12}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı ℓ_E değerlerinde a) $x_2/\ell = h/\ell$; b) $x_2/\ell = 11h/12\ell$; c) $x_2/\ell = 5h/6\ell$; d) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; e) $x_2/\ell = h/4\ell$	

	kesitlerindeki öngerilmeli ve öngerilmesiz durumda x_1/ℓ ye göre grafikleri.	70
Şekil 4.17	$\sigma_{12}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı ℓ_E değerlerinde x_2/ℓ ye göre grafikleri	71
Şekil 4.18	$\sigma_{22}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı h_B değerlerinde a) $x_2/\ell = 11h/12\ell$; b) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; c) $x_2/\ell = h/4\ell$; d) $x_2/\ell = h/6\ell$ kesitlerindeki öngerilmeli ve öngerilmesiz durumda x_1/ℓ ye göre grafiği.....	71

ÖNSÖZ

Bu doktora tez çalışmasının hazırlanmasında ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, değerli fikirlerinden ve engin tecrübelerinden yararlandığım danışman hocam Sayın Prof. Dr. Surkay AKBAROV'a ve ilgisiyle birlikte fedakarca yardımlarından dolayı Sayın Doç. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Aldığım eğitim ve öğretimin yanında hayatım boyunca daima ilgi, destek, yardım ve fedakarlıklarını esirgemeyen annem Döne MERMER ile babam Sevdayil MERMER'e ayrıca tezi tamamlamamı canı gönülden isteyen kardeşim Sebahattin MERMER'e ve hem görevim hem de doktora çalışmam nedeniyle geç saatlere bazen de sabahlara kadar çalışmama anlayışla yaklaşan eşim Mustafa YÜCEL'e teşekkür ederim.

ÖZET

Bu çalışmada, dikdörtgen formda delik veya dolgu malzemesi içeren ve kenarlarından basit ve ankastre mesnetle tutturulmuş şerit levhalarda düzlem şekil değiştirme durumundaki gerilme yığılmasına ait sınır değer problemlerinin, elastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde formülasyonu yapılmıştır. Daha sonra, dikdörtgen formda delik içeren ve kenarlarından basit mesnetle tutturulmuş öngerilmeli şerit-levhada ek yüklemekten dolayı oluşan gerilme yığılmasına, öngerilmenin etkisine ait ele alınan sınır değer probleminin lineerize edilmiş elastisite teorisinin düzlem şekil değiştirme durumundaki kesin denklemleri ile formülasyonu yapılmıştır.

Formülasyonu yapılan problemlerin sonlu elemanlar yöntemi ile modellenmesi ve sayısal sonuçların alınabilmesi için gerekli bilgisayar program ve algoritmaları oluşturulmuştur. Öngerilmemiş durumda, yapıda bulunan geometrik ve malzeme süreksizliklerinin, ele alınan sınır değer problemlerinde, şerit levhadaki gerilme yığılmalarına etkisinin geometrik ve malzeme parametreleri açısından belirlenmesi; öngerilmeli durumda, yapıda bulunan dikdörtgen deliğin, ele alınan sınır koşulu için şerit levhadaki gerilme yığılmalarına etkisinin geometrik, malzeme parametreleri ile öngerilmenin değerinden bağımlılığının belirlenmesine çalışılmıştır.

Sonuç olarak elde edilen sayısal veriler mühendislik açısından yorumlanarak grafikler halinde verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sonlu elemanlar, dikdörtgen delik ve dolgu, gerilme yığılması, kompozit malzeme, öngerilme.

ABSTRACT

The boundary-value problem of stress accumulation in the simply- and rigidly-supported strip-plate with a rectangular hole or a rectangular inclusion has been formulated for the plain strain state. The formulation is established in the framework of exact equations of the elasticity theory. Then, another boundary-value problem of stress accumulation in the simply-supported pre-stressed strip-plate with a rectangular hole has been elaborated to determine the effect of the pre-stress when additional load is introduced. This problem is formulated by utilizing the exact equations of the linearized elasticity theory in plain strain state.

The associated algorithms and computer programs have been developed for the above mentioned problem formulations, in order to model them with the finite element method and to perform numerical analyses. In the non-pre-stressed case, it was studied in the stated boundary-value problem to determine the effect of the geometric and material discontinuities on the stress accumulation in the strip-plate with respect to the parameters of geometry and material. In the pre-stressed case, it was determined for the given boundary-value how a rectangular hole affects the stress accumulation in the strip-plate, in relation with dependency on the parameters of geometry and material, and the amount of pre-stress.

The associated graphics and the numerical analyses have been presented in the conclusion.

Keywords: Finite element method, rectangular hole or rectangular inclusion, stress concentration, composite material, pre-stress.

1. GİRİŞ

1.1 Kompozit Malzemelere Ait Genel Bilgiler

Kompozit malzemeler; teorik arařtırmalar, laboratuvar ortamındaki deneysel çalıřmalar ve ekonomik olarak elde edilebilmesi yani üretim yollarının arařtırılması açısından teknolojiye paralel olarak sūratle geliřen ve çok yōnlū olarak geniřleyen bir alandır. Pek çok bilim ve mūhendislik dalının en gūncel problemlerini oluřturan kompozit malzemelerin ūzerinde bu kadar çalıřılmasının nedeni; bu malzemelerin klasik malzemelerden pek çok ūstūn ūzelliklerinin olmasıdır. Tabiatıta doėal olarak (ōrneėin; aėaç, hayvan boynuzları vb.) da bulunan kompozit malzemelerin yapay řekilde ūretilen fōrlarının pek çok alanda kullanımı gūn geçtikçe artmaktadır. Kompozit yapı elemanlarının kullanımı; otomobil, havacılık, deniz araçları ve mimari yapıların çeřitli bileřenleri ile bunlara ilave olarak çeřitli spor araç gereçleri (tenis raketleri gibi) vb. gibi tūketim ūrūnlerine kadar yaygınlařmıřtır (Gibson, 1994). Ūretim maliyetini dūřūrecek yeni üretim teknolojileri geliřtirildikçe de kullanımının daha da artacaėı açıktır.

Literatūrde kompozit malzemeler için “aralarında kesin geometrik sınır olan ve kimyasal açıdan en azından iki fārklı malzemedен oluřan malzemelerdir” tanımı yapılır. Bu tanımdan gōrūldūėı gibi; kompozit malzemeler, bileřenlerinin her birinin tek bařına sahip olmadığı ūzelliklere sahip olurlar. Kompozit malzemelerin bileřenleri, kompozit malzeme içinde ūstlendiėi fonksiyona baėlı olarak; takviye (gūlendirici) ve matris diye ikiye ayrılır. Gūlendiriciler genellikle kompozit malzemede yūk tařıma gōrevini ūstlenirler. Matris ise, gūlendiricilerin birliėini saėlamak, uygulanan dıř yūkū gūlendiricilere iletmek ve daėılımını saėlamak, bunlara ilaveten pek çok durumda sūneklik, sertlik veya elektiriksel yalıtkanlık gibi bazı gerekli niteliklere katkıda bulunur. Gūnūmūzde yapay řekilde oluřturulan kompozit malzemelerde gūlendirici olarak bor, cam, grafit veya karbon, armire edilmiř polimerler, silikon karbūr vb. malzemeler; matris için ise, çeřitli polimerler (epoksi, polyester gibi), metaller (alūminyum, titanyum, magnezyum ve bunların alařımları gibi) ve seramikler kullanılır.

Kompozit malzemelerin her bilim dalına gōre ve bir çok açıdan sınıflandırılması literatūrde bulunabilir. Fakat en genel řekilde sınıflandırılması Akbarov ve Guz (2000) ‘a gōre; a) yapısal dizayn: Gūlendirici elemanların geometrilerine gōre, b) malzeme: Gūlendirici ve matris malzemelerinin tipi ve ūzelliklerine gōre, c) teknoloji: Ūretim iřlemlerine gōre olmak ūzere ūe ayrılabilir. Bu sınıflandırmalardan yapısal dizayna gōre sınıflandırmada, kompozit malzemeler ūe ayrılır, bunlar; levhalı, lifli ve tanecik takviyeli kompozit malzemelerdir.

Levhali kompozit malzeme: Güçlendirici elemanların bir doğrultudaki geometrik boyutunun diğer iki yöndeki boyutundan çok çok küçük olması durumu; lifli kompozit malzeme: Güçlendirici elemanların birbirine dik iki doğrultudaki geometrik uzunluğunun diğer yöndeki uzunluğundan çok çok küçük olması durumu; parçacık takviyeli kompozit malzeme: Güçlendiricilerin birbirine dik üç doğrultudaki geometrik uzunluklarının aynı mertebeden olması şeklinde tanımlanabilir. Bu grup içinde yine, dokuma tipli kompozitler (woven type composites), hibrid kompozitler, çok katlı kompozitler (sandwich structures) verilebilir. Tez kapsamında sadece levhali çok katlı kompozit malzemeler, bileşenleri belirgin bir malzeme alınmadan, kullanılacaktır.

Literatürde tez kapsamında ele alınacak olan levhali çok katlı kompozit malzemelerden yapılmış yapı elemanlarının mekanik problemlerinin incelenmesi, sürekli ortamlar mekaniği açısından bu elemanların malzemesinin iki tür modellenmesi çerçevesinde yapılır. Bunlar: 1) parçalı homojen malzeme olarak, 2) eşdeğer homojen anizotrop malzeme olarak modellenmesidir. Birinci tip modellemede çok katlı kompozit malzemeyi oluşturan her bir katman için sürekli ortamlar mekaniğinin denklemleri ile levhalar arasında da ideal kontak koşulları yazılarak, ele alınan dış kuvvetler etkisinde problem çözülmeye çalışılır. Levha sayısı arttıkça incelemeler zorlaşır. Genelde elastisite teorisinin kesin denklemleri yerine yaklaşık plak/levha teorileri kullanılarak çözümler yapılır.

İkinci tip modellemede parçalı homojen çok katlı malzeme, homojenizasyon işlemi (homogenisation procedure) kullanılarak, *eşdeğer homojen anizotrop malzeme* ile yer değiştirilir. Eşdeğer homojen anizotrop malzemenin mekanik sabitleri bilinen tekniklerle bulunur (Christensen, 1979). Bu durumda lif-levhali kompozitlerden oluşan çok katlı kompozit malzemeler için önce her bir levha ayrı ayrı eşdeğer homojen anizotrop malzeme olarak modellenir ve mekanik sabitleri bulunur. Sonra bu eşdeğer homojen anizotrop levhalardan oluşan çok katlı kompozit malzemeye ait eşdeğer homojen anizotrop malzeme sabitleri tekrar homojenleştirme ile, yani ilk ele alınan çok katlı kompozit malzemeye ait eşdeğer homojen anizotrop malzeme özellikleri, belirlenir. Eşdeğer homojen anizotrop malzemenin mekanik özelliklerine *normalize edilmiş mekanik özellikler* denir ve bunların bulunması pek çok kaynakta verilir, örneğin Christensen (1979), Gibson (1994), Yahnioğlu (1996) gibi. Tez kapsamında ele alınan çok katlı malzemeye ait modellemede yukarıda verilen ikinci tip modelleme kullanılmış olup, adı geçen çok katlı kompozit malzemeye ait mekanik özellikler normalize edilmiş mekanik özelliklerdir.

1.2 Tez Konusuna Ait Bilgiler

Yapısında geometrik süreksizlik yani, delik veya boşluk ile malzeme süreksizliği yani, dolgu (inclusion) bulunan yapı elemanlarına ait mekanik problemleri, üzerinde çok durulan güncel problemlerdendir. Yapıdaki bu tür geometrik veya malzeme süreksizliklerinin geometrisi açısından literatürdeki araştırmalar incelendiğinde, genelde delik için daire, elips veya bunlardan dejenere olmuş geometrik formlar, yani köşeleri keskin köşe yerine yuvarlatılmış köşe olarak alınmış delik geometrileri; dolgu için sadece daire (veya küre) ve elips (veya elipsoid) geometrik formu alınarak yapıldığı görülmektedir (Timoshenko ve Goodier, 1970 ve diğerleri). Bu alana ait problemlerin çoğunlukla çözümü analitik çözüm olarak ele alınmış, çözüm tekniği ve malzeme açısından geliştirmeler yapılmıştır. Bundan başka, söz konusu olan araştırmaların hemen hemen hepsi sonsuz veya yarı-sonsuz ortamlar için yapılmıştır. Bu açıdan tezde sonlu alanı kapsayan anizotrop ortamlar için yapılan gerilme yığılması problemlerine ait incelemeler bu alandaki ilk teşebbüsleri oluşturur. Yine, tezin 4. Bölümünde ele alınacak olan dikdörtgen delik içeren *öngerilmeli* yapı elemanlarına ait problemlere literatürde herhangi bir çalışmaya rastlanılmamış, bu tez çerçevesinde ilk kez ele alınmaktadır. Bu alanda literatürde ancak homojen öngerilme olması durumunda çatlak içeren sonsuz levhalar için çok az sayıda yapılmış çalışma yer almaktadır. Tez çerçevesinde sonlu levha ve homojen olmayan öngerilmenin göz önüne alınabilmiş olması, literatürde bu alandaki mevcut çalışmaların çok çok üzerine çıkıldığının bir göstergesidir.

Yapılan literatür araştırmasına ait daha ayrıntılı bilgiler ileride her bölüm için ayrı ayrı ele alınacaktır.

Bu çalışmada, yapısında geometrik ya da malzeme süreksizliği bulunan yapı elemanlarının, düzlem şekil değiştirme durumunda elastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde modellenmesi ve bazı sınır koşulları için ele alınan sınır değer problemlerinin sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla çözülmesi öngörülmüştür. Ele alınan problemler iki temel gruba ayrılabilir: a) Öngerilmesiz durumda ele alınan sınır değer problemleri (Bölüm 2,3), b) Öngerilmeli durumda ele alınan sınır değer problemi (Bölüm 4).

1.3 Yapılan Araştırmanın Amacı

Tez kapsamında yapılan araştırmanın amaçları aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

1. Dikdörtgen formda delik veya dolgu malzemesi içeren ve kenarlarından basit veya ankastre mesnetle tutturulmuş şerit-levhalarda gerilme yığılmasına ait sınır-değer problemlerinin elastisite teorisinin düzlem şekil değiştirme durumuna ait kesin denklemleri çerçevesinde formülasyonu,

2. Dikdörtgen formda delik içeren ve kenarlarından basit mesnetle tutturulmuş öngerilmeli şerit-levhada ek yüklemekten dolayı oluşan gerilme yığılmasına öngerilmenin etkisine ait bazı sınır-değer problemlerinin lineerize edilmiş elastisite teorisinin düzlem şekil değiştirme durumunda kesin denklemleri çerçevesinde formülasyonu,
 3. Formülasyonu yapılmış problemlerin sonlu elemanlar yöntemi ile modellenmesi,
 4. Problemlerin sayısal incelenebilmesi için gerekli bilgisayar programlarının yapılması ve algoritmaların geliştirilmesi,
 5. Öngerilmesiz durumda, yapıda bulunan geometrik veya malzeme süreksizliklerinin, ele alınan sınır değer problemlerinde, şerit levhadaki gerilme yığılmalarına etkisinin geometrik ve malzeme parametreleri açısından belirlenmesi,
 6. Öngerilmeli durumda, yapıda bulunan dikdörtgen deliğin, ele alınan sınır koşulu için şerit-levhadaki gerilme yığılmalarına etkisinin, geometrik, malzeme parametreleri ile öngerilmenin değerinden bağımlılığının belirlenmesi,
 7. Elde edilen sayısal sonuçların yorumlanması
- olarak özetlenebilir.

2. DİKDÖRTGEN DELİK İÇEREN ŞERİT-LEVHALAR

2.1 Giriş

Mühendislik yapılarında delik veya boşluk bulunması, bu yapıların yapımı sırasındaki teknolojik uyumsuzluklar nedeniyle (küçük ölçekli-mikro delik veya boşluklar) olabileceği gibi pratik kullanım açısından, isteğe bağlı olarak da oluşturulmuş (büyük ölçekli-makro delik veya boşluklar) olabilir. Yapay olarak oluşturulan delik veya boşluklar Makine, İnşaat ve Geoteknik Mühendisliği 'nde çok yaygındır. Geometrik süreksizlikler olarak nitelendirilen delik veya boşlukların sebep olduğu gerilme yığılmaları mühendislikte göz ardı edilemeyecek problemlerdendir. Bu problemler, gevrek malzemeler gibi gerilme yığılmalarına hassas olan malzemeden yapılmış yapılar ile, anizotropik davranışından dolayı kompozit malzemelerden yapılmış yapılarda daha ciddi ele alınır ve bu nedenlerle araştırmacılar arasında geniş şekilde ilgi ve rağbet görür.

Hafiflik, yüksek mukavemet ve diğer pek çok üstün özellikleri nedeniyle kompozit malzemeler havacılık, denizaltı araçları, otomobiller ve diğer pek çok sektörlerde geniş şekilde uygulama alanı bulur. Farklı geometriye sahip (dairesel, eliptik, dikdörtgen, vb.) delik (boşluk) içeren kompozit malzemeden yapılmış çeşitli paneller, sisteme giriş kapısı veya bazı bileşenlerin ağırlığını azaltmak için havacılıkta; pratik uygulama açısından veya malzeme tasarrufu için makine parçası veya yapı elemanlarında (örneğin zemin döşemeleri), yer biliminde, örneğin diyafram panel duvarlar gibi, çok yaygın bir kullanıma sahiptir. Buna karşın, yapı elemanının maruz kaldığı yükleme durumunda, bu delikler etrafında oluşan gerilme yığılmaları, yapı elemanının görevini güvenle yerine getirebilmesini tehlikeye düşüren güçlü bir unsur olarak ortaya çıkmaktadır.

Bundan dolayı, tasarımcılar için, ele alınan yükleme durumunda delik veya boşluklar etrafında oluşan gerilme yığılmalarının hesaplanması hayati önem taşımaktadır. Çünkü makine parçası ya da yapı elemanının *kırılma mukavemetinin* doğru şekilde tahmin edilebilmesi için bu gerilme yığılmalarının hesaba katılması gerekir. Ayrıca, *yükleme limitlerinin* belirlenebilmesi yine delik veya boşluklar etrafında oluşması kaçınılmaz olan gerilme yığılmalarına, deliğin geometrisinin, yükleme şeklinin, yapı elemanının geometrisinin ve birden fazla delik olması durumunda bu deliklerin diziliminin etkisinin bilinmesi ile mümkün olur. Bütün bunlar göz önüne alınarak, ele alınan yapı elemanı ya da makine parçasında, kırılma gibi istenmeyen durumların oluşmaması ve önceden önlem alınabilmesi açısından, tez kapsamında ele alınan problemlerin incelenmesi, mühendislik için gerekli ve vazgeçilmez problemlerdir.

2.2 Literatür Özeti

Bu alanda ilk sistematik çalışmalar, farklı sınır koşulları ve ince levha teorisi çerçevesinde izotrop ve anizotrop levhalar için Savin (1961) tarafından yapılmıştır. Savin (1961), Kompleks fonksiyonlar teorisi ve konform dönüşüm tekniğini kullanan Muskhelishvili (1954) 'nin çalışmaları doğrultusunda, farklı geometrilere sahip bazı delikler için, bazı gerilme sınır koşulları etkisinde yapıda oluşan gerilme dağılımına ait çözümler elde etmiştir. Bunu, farklı geometriye (daire, elips, kare dikdörtgen vb.) sahip deliğin dışındaki bölgeyi, birim dairenin içine dönüştüren konform dönüşümü kullanarak yapmıştır. Konform dönüşüm bilindiğinde, gerilme fonksiyonu ($\varphi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$) elde edilebilmekte ve delik çevresinde gerilme ve yer değiştirme dağılımları bulunabilmektedir.

Elips ya da dairesel geometriden ufak sapmalar ile çeşitli yaklaşık sonuçlar Lekhnitskii (1968) de verilir. Bu çalışmada, elips formundan dejenere olan geometri küçük bir ε parametresiyle karakterize edilmekte ve kompleks gerilme fonksiyonu bu ε parametresinin kuvvet serisi olarak verilmektedir. Çözümün doğruluğu bu seriden kaç adet terim alındığına bağlıdır. Lekhnitskii (1968) ilk 3-4 terim için çözüm yapmıştır.

Dikdörtgen veya kare delik için şimdiye kadar matematiksel zorluklardan dolayı kesin analitik yolla sayısal sonuç elde edilememiştir. Dikdörtgen delik için, deliğin dışını birim dairenin içine dönüştüren konform dönüşüm fonksiyonu sonsuz bir seri ile temsil edilebilmektedir, örneğin Savin (1961) ve diğerleri. Bu serinin sonlu adet terimini alarak, dikdörtgen delik etrafında oluşan gerilme fonksiyonu analitik formda elde edilebilmektedir. Genellikle araştırmacılar dikdörtgen delik civarında oluşan gerilme yığılmaları veya köşe noktalarında oluşan tekillik üzerinde yoğunlaşmışlardır, örneğin Theocaris ve Petrou (1989), Theocaris (1991), Heller vd. (1958). Gerilme yığılmasının değeri, sonsuz seri ile ifade edilen konform dönüşüm fonksiyonundan alınacak terim adedi ile sıkı bir şekilde bağımlıdır. Gerilme yığılması için yeterince doğru sonuca ulaşmak, konform dönüşüm fonksiyonundan çok fazla sayıda terim alınmasına bağlıdır. Bu ise, matematiksel olarak çözümü elde etmede çok fazla işlem ve karmaşa yaratmaktadır. Fakat, delik oluşturmanın sebep olduğu (örneğin, Geoteknik Mühendisliği 'nde, fore kazıkların ve diyafram duvarların kazılması ile ortaya çıkan gerilme gibi) bazı mühendislik problemleri için gerilme yığılmasının değerinin yüksek hassaslıkla hesaplaması gerekli olmayabilir. Dolayısıyla, bu tür durumlarda pek çok kaynakta verilen yaklaşık çözümler kabul edilebilir doğrulukta bir çözüm olabilir. Bununla beraber yine de delik civarında oluşan gerilme yığılmalarının elde edilmesi zorunluluğu ortadan kalkmamaktadır.

Jong (1981) de, sonsuz ortotrop levhada köşeleri yuvarlatılmış dikdörtgen delik için kompleks gerilme fonksiyonu, yine geometriyi ideale yaklaştırmada kullanılan küçük ϵ parametresine göre seriye açılması durumu için ele alınmıştır. Sınır koşulları Cauhy tipi integral uygulanarak gerilme fonksiyonu için çözüm daha basit olarak belirlenebilmiş ve sayısal sonuçlar altı adet levhadan oluşan Karbon/Epoksi -lifli kompozitler- için elde edilmiştir. Tek yönlü lifli kompozitlerde çekme kuvveti etkisinde yüksek normal gerilme yoğunluğu olduğu, fakat kayma gerilmesi nedeniyle kırıldığı ve deliğin formunu temsil eden konform dönüşümden alınan terim adedine göre oluşan kontur çizgisinden, malzemenin kayma mukavemetinin bağımsız olduğu yani değişmediği ve aynı ortalama kayma gerilmesinin bulunduğu, ayrıca dikdörtgen deliğin köşelerinin yeterince yuvarlatılması durumunda, dairesel delik olması durumundaki gerilme yayılımının elde edildiği tespit edilmiştir.

Nemeth (1996), deliğin şeklinin, çok katlı malzemedeki levha düzeninin, dikdörtgen deliğin kenar oranları ve anizotropinin, ele alınan levhadaki çeşitli yüklemelerden dolayı gerilme yığılmasına nasıl etki gösterdiğini incelemiştir. Dikdörtgen deliğin kenar uzunlukları oranının malzemenin kırılmasına büyük etkisi olduğunu göstermiştir. Romeo ve Frulla (1997) ele alınan dikdörtgen veya daha farklı geometrik formda delik içeren Grafit/Epoksi den yapılmış levhanın tek yönlü çekme, basınç ve kayma gerilmesi sınır koşulları altında davranışını deneysel olarak incelemişler ve delik olması ile olmaması durumlarında levhanın eğilmesi probleminde delik kenar oranları ile burkulma kuvveti arasındaki ilişkiyi belirlemişlerdir.

Çok bağımlı bölgeler şeklinde modellenen birden fazla delik olması durumu, sonlu anizotrop levhalarda Xu, Yue ve Man (1999) tarafından incelenmiş ve bu delikler etrafında oluşan gerilme dağılımına ait analitik çözümler ele alınmıştır. İşlemler anizotrop cisim için yaklaşık plak/levha teorileri çerçevesinde kompleks potansiyel metodu kullanılarak, Faber serisi açılımı, konform dönüşüm ve en küçük kareler sınır kollakasyon tekniği yardımıyla elde edilmiştir. Deliklerin geometrisi, adedi, konumları, aralarındaki uzaklık ile levha ve deliğin boyutları gibi parametrelerin, tek yönlü çekme kuvveti etkisinde, levhada oluşan gerilme yığılmalarına etkisi incelenmiştir. Genel olarak, yapıda bulunan delik adedinin ve diziliminin, ele alınan yüklemelerde oluşan gerilme yığılması ile yakından ilgili olduğu ve aynı adet delik için farklı dizilimlerde farklı gerilme yığılmalarının elde edildiği ve delikler arasındaki mesafenin dairesel deliğin yarıçapına oranının düşmesi ile delikler etrafında oluşan gerilme yığılmasını artırdığını tespit etmişlerdir.

Ukadgaonker ve Rao (2000a) tarafından çeşitli delik formları (dairesel, üçgen, kare, dikdörtgen ve diğer farklı şekiller) için simetrik olmayan çok katlı levhalar için çeşitli farklı

sınır koşulları (karşılıklı kenarlardan çekilmesi, moment etkimesi, kayma gerilmesi etkisi ve karşılıklı kenarlardan zıt moment etkimesi durumu) etkisinde genel bir çözüm bulunmaya çalışılmıştır. Ele alınan delik geometrileri ve bu delikler etrafında oluşan gerilme dağılımları ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Ukadgaonker ve Rao (2000b) da, 16 adet levhadan oluşan Grafit/epoksi, Bor/epoksi ve Cam/epoksi 'den yapılmış ve karşılıklı kenarlarından aynı veya zıt işaretli moment etkisi altında dairesel, eliptik, üçgen, kare, dikdörtgen ve diğer düzgün olmayan delik formu için yapıda oluşan gerilme dağılımları incelenmiştir.

Ukadgaonker ve Rao (2000c) de simetrik düzenlenmiş çok katlı kompozit malzemeden yapılmış sonsuz levhada bazı düzlemsel yüklemelerde, farklı geometriye sahip delikler etrafında oluşan gerilme dağılımı incelenmiştir.

Lei vd. (2001) 'nde sonsuz elastik levhada keyfi dikdörtgen delik çevresinde oluşan gerilme ve yer değiştirme dağılımı için basit bir yaklaşık çözüm verilmektedir. Elastik levhanın homojen ve izotrop olduğu ve sonsuzda tek yönlü çekme gerilmesine maruz kaldığı kabul edilmektedir. Dikdörtgen deliğin formunun yeterince gerçeğe yakın temsil edilebilmesi için bir düzeltme çarpanı, konform dönüşümü geliştirmek için ele alınmıştır. Bu yaklaşımda, gerilme fonksiyonu ile gerilme ve yer değiştirme dağılımı sonsuz levhada bulunan dikdörtgen delik için analitik olarak ve kenar uzunlukları yeterince büyük sonlu bir levha için SAP2000 paket programı ile elde edilen sonuçlar kıyaslanmıştır. Sonuç olarak, makalede önerilen konform dönüşümü düzenleyen düzeltme çarpanı ile elde edilen sonuçların sonlu eleman yöntemine (SEY) ait paket program ile elde edilen sonuçlarla üst üste düştüğü gösterilmiştir.

Romeo (2001) 'de, grafit-epoksi levhada köşeleri yuvarlatılmış deliğin tekyönlü çekme, karşılıklı kenarlarından çekme ve basınç ile kayma gerilmesi sınır koşulları için levhada meydana gelen gerilme yığılmaları incelenmiş, analitik çözüm geliştirilmiş deneysel ve SEY çözümü karşılaştırılmıştır.

Yahnioğlu ve Mermer (2001) 'de, çok katlı kompozit malzemeden hazırlanmış sonlu şerit-levhanın iki kenarı ankastre mesnetle tutturulup, birbirine zıt yönde yer değiştirme verilerek çekilmesi durumunda, yapıda oluşan gerilme yayılımına içerisindeki kare deliğin etkisi incelenmiştir. Bu incelemeler düzlem şekil değiştirme durumunda, elastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde, kare deliğin köşeleri keskin köşe alınarak sayısal olarak yapılmış ve şerit-levhanın malzeme ve geometrik parametrelerinin ele alınan yükleme durumunda, şerit-levhada oluşan gerilme yığılmalarına etkisi incelenmiştir.

Yukarıda verilen literatür araştırmalarından görüldüğü gibi, şimdiye kadar bu alandaki çalışmaların hemen hemen hepsi farklı malzemelerin kullanımı ve analitik çözüm yönteminin geliştirilmesi ve bunların çeşitli deneyler ile test edilmesi açısından değerlendirilebilir. Fakat bu çalışmaların pek çoğu farklı sınır koşulları için levhada ele alınan dikdörtgen veya farklı geometriye sahip deliğin köşelerinin yuvarlatılmış olması kabulüne dayanmakta yani, sonsuz terimli konform dönüşüm serisinden sonlu adet terimin alınmasına karşı gelmektedir. Bununla beraber Lei vd. (2001) 'de delik formunu dikdörtgen delik formuna yaklaştıracak şekilde hesaplarında bir düzeltme çarpanı kullanmış olmasına karşın literatürdeki bütün bu sonuçlar keskin köşelere sahip dikdörtgen deliklerde, köşe noktaları civarında gerçek gerilme değerlerinden uzak sonuçlar içerir.

Bu tez kapsamında dikdörtgen delik içeren sonlu şerit-levhanın farklı yükleme ve sınır koşulları altında yapısında oluşan gerilme yığılmaları, elastisite teorisinin kesin denklemleri kullanılarak düzlem şekil değiştirme durumunda, sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal olarak incelenmiştir. Yapı elemanının içerdiği deliğin formu sadece, üzerinde hassasiyetle durulan ve gerilme yığılmaları belirlenmeye çalışılan, köşeleri keskin köşe olan dikdörtgen veya kare delik için ele alınmıştır. Bunların dışındaki delik formları ele alınmamıştır. Yapı elemanının hazırlandığı malzemenin levhalı çok katlı kompozit malzeme olduğu varsayılmıştır. Ele alınan tezin, bu bölümündeki araştırmaların köşeleri yuvarlatılmış dikdörtgen delik ve yaklaşık plak/levha teorileri kullanılarak sonsuz alanlar için yapılan literatürdeki çalışmalardan önemli farkı, yukarıda bahsedilen diğer bölümlerde verilen açılardan yenilikler kazandırmasıdır.

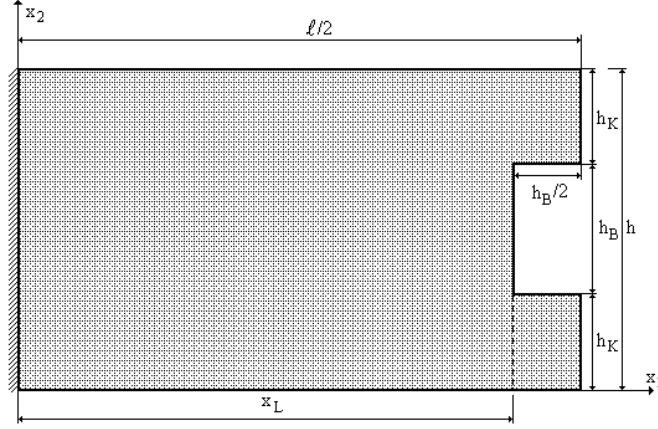
Şimdi incelenen problemleri ele alalım.

2.3 Kare Delik İçeren Anizotrop Şerit-Levhanın Kenarlarından Çekilmesi Problemi

2.3.1 Ele Alınan Problemin Matematiksel Modeli

Ele alınan problem düzlem şekil değiştirme durumunda matematiksel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Levhaya bağlı ve Şekil 2.1 de gösterilen Ox_1x_2 koordinat takımı ve levhanın geometrik boyutları Şekil 2.1 de gösterildiği gibi kabul edilsin. $x_1 = \ell/2$ ye göre problem simetrisi gözü önüne alınarak Şekil 2.1 de $\Omega = \{0 \leq x_2 \leq h = 2h_K + h_B; 0 \leq x_1 \leq \ell/2\}$ bölgesini kapsayan levha gösterilmiştir. Tüm bu bölgede geçerli olan denge denklemleri:



Şekil 2.1 Ele

levhanın geometrisi.

alınan şerit-

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.1)$$

bünye denklemleri:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= A_{11}\epsilon_{11} + A_{12}\epsilon_{22} \\ \sigma_{22} &= A_{12}\epsilon_{11} + A_{22}\epsilon_{22} \\ \sigma_{12} &= 2A_{66}\epsilon_{12} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

ve geometrik bağıntılar;

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (2.3)$$

şeklinde verilebilir. Yukarıdaki denklemlerde bilinen gösterimler kullanılmıştır. (2.2) 'de A_{ij} 'ler çok katlı kompozit malzemenin normalize edilmiş mekanik özellikleridir ve malzeme ise özel ortotrop malzemedir (Akbarov ve Guz, 2000). Sınır koşullarının matematiksel ifadesi:

$$\left. \begin{aligned} u_1|_{x_1=0} &= -U = \text{sb.}; \quad u_1|_{x_1=\ell} = U = \text{sb.}; \quad u_2|_{x_1=0; \ell} = 0; \\ \sigma_{12}|_{x_2=0; h} &= 0; \quad \sigma_{11}|_{x_1=x_L; x_L+h_B} = 0; \quad \sigma_{2i}|_{x_2=h_K; h_K+h_B} = 0 \end{aligned} \right\} \quad i=1, 2 \quad (2.4)$$

biçiminde olur. Böylece ele alınan sınır değer probleminin matematiksel formülasyonu (2.1)-(2.4) denklemleriyle ifade edilmektedir.

U yer değiştirmesi şerit-levhanın kenarları mutlak rijid cisimle tutturularak bu cisme yoğunluğu q olan düzgün yayılı normal yük etkisi sonucunda elde edilir. U ve q arasındaki

ilişki ise $q = \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_{11}|_{x_1=\text{sabit}} dx_2$ (burada $h = h_B + 2h_K$ dir) eşitliğinden elde edilir.

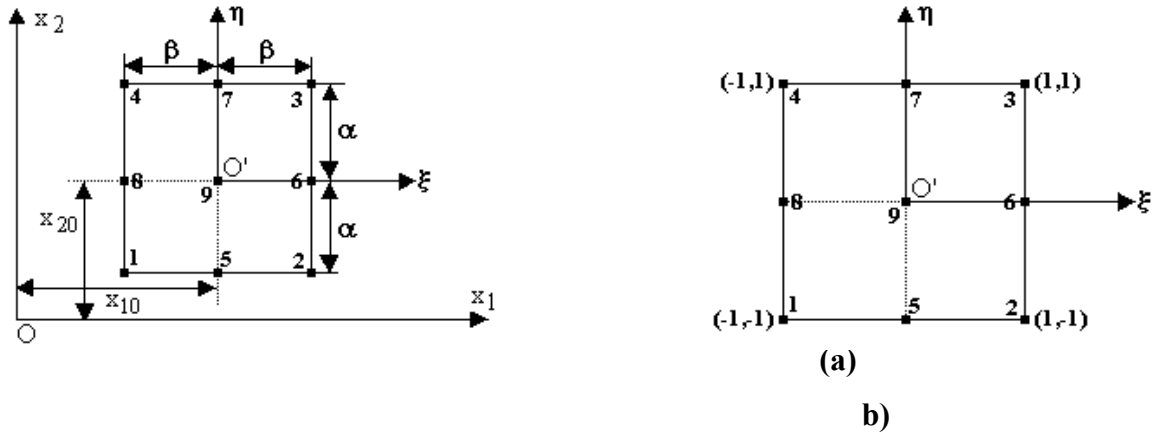
$x_1 = \text{sabit}$ değeri ise $0 \leq x_1 < \ell/2 - 2h_B$ den seçilir.

2.3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modelleme

Tez kapsamında yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemi (SEY) kullanılmıştır. Çözüm bölgesinde

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega - \int_S P_i u_i dS \quad (2.5)$$

fonksiyoneli ele alalım. Ω çözüm bölgesi (Şekil 2.1) sonlu M adet Ω_k sonlu elemanına ayrıştırılır (burada $\Omega = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k$ dir). Geometriye uygun olarak sonlu elemanlar dikdörtgen şeklinde seçilir. Normalize edilmiş koordinat takımında seçilen geometri ve düğüm noktalarının numaralandırılması Şekil 2.2 de verilmiştir.



Şekil 2.2 a) Boyutlu durumda, b) Boyutsuz durumda sonlu eleman geometrisi.

Seçilen düğüm noktasındaki ikinci dereceden standart Lagrange şekil fonksiyonları:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta); & N_2 &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta); & N_3 &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta); \\ N_4 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta); & N_5 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - 1)(\eta^2 - \eta); & N_6 &= -\frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - 1); \\ N_7 &= -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta^2 + \eta); & N_8 &= -\frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - 1); & N_9 &= (\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

olur. Burada Ox_1x_2 global koordinat takımı ile $O'\xi\eta$ yerel koordinat takımı arasındaki

dönüşüm $\xi = \frac{x_1 - x_{10}}{\beta}$ ve $\eta = \frac{x_2 - x_{20}}{\alpha}$ ilişkisi ile sağlanmaktadır. Her bir sonlu elemanda aranan yer değiştirme fonksiyonu polinom şeklinde kabul edilir. Yani,

$$\mathbf{u}^k \approx \mathbf{N}^k \mathbf{a}^k, \quad k=1,2,\dots,M \quad (2.7)$$

burada,

$$(\mathbf{a}^k)^T = \{u_{11}^k, u_{21}^k, u_{12}^k, u_{22}^k, \dots, u_{18}^k, u_{28}^k, u_{19}^k, u_{29}^k\}$$

$$\mathbf{N}^k = \begin{Bmatrix} N_1^k & 0 & \dots & N_9^k & 0 \\ 0 & N_1^k & \dots & 0 & N_9^k \end{Bmatrix}$$

matrisleridir (Akbarov ve Guz, 2000; Zienkiewicz ve Taylor, 1989). (2.7) ifadesi (2.5) fonksiyoneliinde yerine yazılarak ve Ritz tekniği yardımıyla

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{r} \quad (2.8)$$

lineer cebrik denklem sistemi elde edilir. (2.8) 'de $\mathbf{K}$ rijidlik (stiffness) matrisi, $\mathbf{a}$ düğüm noktalarında bilinmeyen yer değiştirmeleri ve $\mathbf{r}$ düğüm noktalarına etki eden kuvveti gösteren vektörlerdir. $\mathbf{K}$ matrisinin bileşenleri aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^M \mathbf{K}^k, \quad \mathbf{K}^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_{11}^k & \mathbf{K}_{12}^k & \dots & \mathbf{K}_{19}^k \\ \mathbf{K}_{21}^k & \mathbf{K}_{22}^k & \dots & \mathbf{K}_{29}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{91}^k & \mathbf{K}_{92}^k & \dots & \mathbf{K}_{99}^k \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{K}_{ij}^k = \iint_{\Omega_k} (\mathbf{B}_j^k)^T \mathbf{D}^k \mathbf{B}_j^k d\Omega_k, \quad \begin{matrix} i,j=1,2,\dots,9 \\ k=1,2,\dots,M \end{matrix} \quad (2.9)$$

(2.9)'da altı çizili indislere göre Einstein toplama uylasıını uygulanmayacaktır. Burada,

$$\mathbf{D}^k = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{66} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_i^k = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i^k}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^k}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_i^k}{\partial x_2} & \frac{\partial N_i^k}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

dır. $\mathbf{D}$ matrisinin bileşenleri olan A_{ij} değerleri çok katlı kompozit malzemeye ait normalize edilmiş elastik sabitlerdir.

(2.8) denkleminin çözülmesi sonucunda her bir düğüm noktasında aranan yer değiştirmeler bulunur. Bu değerler yardımıyla (2.2) ve (2.3) denklemleri kullanılarak her bir düğüm noktasında gerilme değerleri

$$\sigma = DBa \quad (2.10)$$

formülünden elde edilir. Burada,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

dir. Fakat, (2.10) formülü ile elde edilen gerilme fonksiyonlarının bütün bölge üzerindeki grafikleri sonlu eleman sınırlarında sıçrama yaparlar, yani süreksiz olurlar. Gerçek fiziksel duruma uygun gelmeyen bu durum, sonlu eleman formülasyonundan kaynaklanmaktadır. Bu durumu ortadan kaldırmak için çeşitli sonlu elemanlar formülasyonları geliştirilmiştir. Bunlar: a) Karışık sonlu eleman formülasyonu (Mixed finite element formulations (Zienkiewicz ve Taylor, 1989)), b) İki aşamalı karışık sonlu eleman formülasyonudur (Zienkiewicz ve Taylor, 1989; Hinton ve Campell, 1979 ve diğerleri). İlk modellemede, her bir düğüm noktasında yer değiştirmelerin yanısıra gerilmelerde bilinmeyen olarak kabul edilir. Uygun işlemler ile bütün bölgede sürekli gerilme dağılımları bulunur. İkinci tip modellemede ise; yer değiştirmeler birinci aşamada bulunduktan sonra, (2.10) yardımıyla elde edilen ve eleman sınırlarında süreksiz olan gerilme dağılımlarının bilinen işlemler dahilinde süreklileştirilmesi yoluna gidilir. Bu süreklileştirme işlemine *varyasyonel iyileştirme (variational recover)* adı verilir (Zienkiewicz ve Taylor, 1989; Hinton ve Campell, 1979 ve diğerleri). Tez kapsamında ikinci tip modelleme kullanılmıştır. Şimdi yapılan süreklileştirme işlemlerini ele alalım.

(2.10) ifadesi ile elde edilen gerilmeler $\hat{\sigma}$ ile gösterilir. Daha sonra bütün düğüm noktalarında gerilme değerlerini bilinmeyen olarak, gerilme fonksiyonu için aşağıdaki şekilde yaklaşım yapalım.

$$\sigma = N_{\sigma} \bar{\sigma} \quad (2.11)$$

burada,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_M), \bar{\sigma}_i = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11i} \\ \bar{\sigma}_{22i} \\ \bar{\sigma}_{12i} \end{pmatrix}, i=1,2,\dots,R \quad (2.12)$$

dir. (2.11) ifadesindeki N_{σ} şekil fonksiyonları matrisini, (2.12) deki $\bar{\sigma}_i$ vektörünün bileşenleri ise, düğüm noktalarındaki gerilmeleri ve R toplam düğüm noktası adedini göstermektedir. Çoğu durumda N_{σ} şekil fonksiyonları (2.6) formüllerinin aynısı alınır. Ele alınan sonlu elemanlar için N_{σ} matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{N}_\sigma = \{\mathbf{N}_\sigma^1, \mathbf{N}_\sigma^2, \dots, \mathbf{N}_\sigma^M\}, \mathbf{N}_\sigma^k = \begin{pmatrix} N_1^k & 0 & 0 & N_2^k & 0 & 0 & \dots & N_9^k & 0 & 0 \\ 0 & N_1^k & 0 & 0 & N_2^k & 0 & \dots & 0 & N_9^k & 0 \\ 0 & 0 & N_1^k & 0 & 0 & N_2^k & \dots & 0 & 0 & N_9^k \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$\bar{\sigma}_i$ vektörünün bileşenleri (yani, gerilme fonksiyonlarının düğüm noktalarındaki değerleri) *en küçük kareler yöntemi* kullanılarak elde edilir. Bu durumda,

$$Q = \iint_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^2 d\Omega \quad (2.14)$$

fonksiyoneli ele alınır. Bu fonksiyonelin 1. varyasyonu sıfıra eşitlenerek, $\bar{\sigma}_i$ vektörü bileşenleri için,

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = 0, \quad i,j=1,2 \quad (2.15)$$

denklemler sistemi elde edilir. (2.15) denklemlerinin çözülmesi ile düğüm noktalarındaki gerilme değerleri ve (2.11) yardımıyla da bütün bölgede sürekli gerilme fonksiyonları elde edilir.

2.3.3 Sonlu Elemanlar Kullanımının Ele Alınan Çalışmadaki Bazı Özellikleri

Tez çerçevesinde ele alınan problemlerin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözülmesinde kullanılan bilgisayar programları ve algoritmalar, Yahnioğlu (1996) kaynağında verilen programların, ele alınan problemler açısından bazı ilave programlar ile geliştirilmesi şeklinde FORTRAN programlama dilinde FTN77 'de, yapılmış ve test problemlerinde denenmiştir. Herhangi bir sonlu elemanlar paket programı (örneğin, ANSYS, LUSAS gibi) kullanılmamıştır.

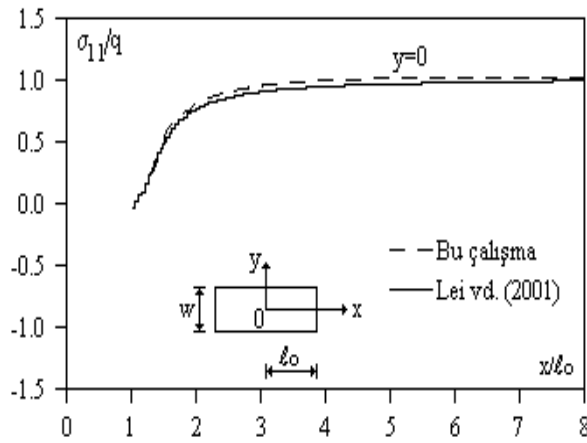
Çözüm için gerekli bütün işlemler sayısal olarak yapılmıştır. Rijidlik (Stiffness) matrisinin bileşenlerini bulmak için hesaplanması gereken iki katlı entegrallerin hesaplanmasında, her bir integral için 10 Gauss noktası kullanılarak, Gauss karelemesi (Gauss quadreture) ile sayısal olarak yapılmıştır.

Tez çerçevesinde yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemi kullanıldığından, (2.10) denklemi kullanılarak elde edilen gerilme fonksiyonları elemanların sınırında süreksiz olmaktadır. Dolayısıyla gerilme fonksiyonları için (2.11)-(2.15) ile verilen süreklileştirme işlemleri uygulanmıştır.

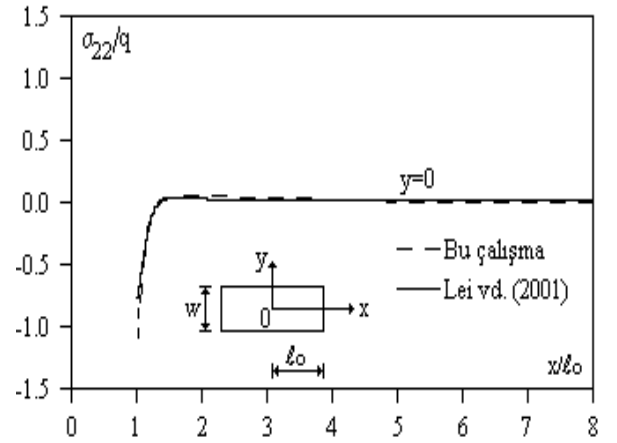
Aşağıdaki problemde yapılan algoritmalar ve bilgisayar programlarından elde edilen sayısal sonuçlar ile Lei vd. (2001) 'nde elde edilen sayısal sonuçların karşılaştırılmasını ele

alınmıştır. Lei vd. (2001) 'nde ele alınan problem analitik olarak ve SAP2000 sonlu eleman paket programı ile çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Aynı problem kendi programlarımızla çözülerek bulunan sayısal sonuçların karşılaştırılması aşağıda yapılmıştır.

Dikdörtgen delik içeren homojen izotrop sonsuz levhada, sonsuzda verilen, yoğunluğu q olan ve Ox_1 eksen yönünde etki gösteren çekme gerilmesi sınır koşulu için delik civarında oluşan gerilme yığılmalarının grafikleri aşağıda verilmiştir. Problem parametreleri elastisite modülüne göre boyutsuzlaştırılmıştır. Diğer parametre değerleri $\nu = 0.20$, $2\ell_0/w = 3$ (burada ℓ_0 deliğin yatay yarı uzunluğu, w deliğin dikey uzunluğu) olarak alınmıştır.



Şekil 2.3 Bu çalışmada elde edilen σ_{11} / q gerilmesinin Lei vd. (2001) ile karşılaştırılması.



Şekil 2.4 Bu çalışmada elde edilen σ_{22} / q gerilmesinin Lei vd. (2001) ile karşılaştırılması.

Şekil 2.3 de σ_{11} / q ve Şekil 2.4 de σ_{22} / q gerilmesinin x/ℓ_0 a göre grafikleri verilmiştir. Grafiklerden görüldüğü gibi yapılan sonlu elemanlar programından elde edilen sayısal sonuçlar ile Lei vd. (2001) de elde edilen sonuçların, kendi çalışmamızdaki dikdörtgen deliğin formunun daha gerçekçi duruma uygun geldiği göz önünde tutularak, tatmin edici derecede yakın olduğu görülmektedir. Dolayısıyla bu çalışma çerçevesinde yapılan programlar ve algoritmaların doğruluğu bu örnek ile kanıtlanmış olunur.

2.3.4 Sayısal Sonuçların İncelenmesi

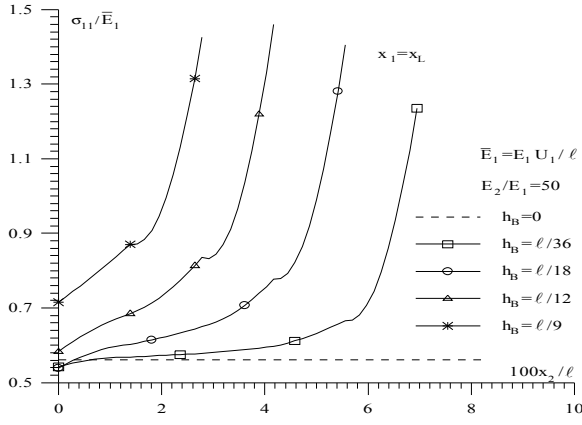
Ele alınan çok katlı kompozit malzemenin birbirini tekrar eden farklı iki tür izotrop levhadan oluştuğunu kabul edelim. Bu levhaların sırasıyla Lamé sabitlerini $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$; Young modüllerini E_1, E_2 ; Poisson oranlarını ν_1, ν_2 ve kompozit içerisindeki hacim oranlarını η_1, η_2 ile gösterelim. Tez kapsamında aksi belirtilmediği sürece matris malzemesine ait

büyüklikler alt indis 1 ve güçlendirici malzemeye ait büyüklikler alt indis 2 ile gösterilecektir. Ele alınan çok katlı kompozit için eşdeğer homojen malzemenin elastik sabitleri olan ve (2.2) de verilen A_{ij} normalize edilmiş mekanik özelliklerinin açık ifadeleri (Christensen, 1979)

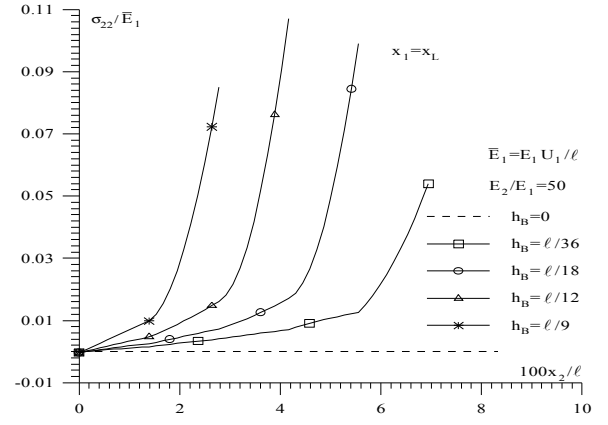
$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2 + (\mu_1 + \lambda_1) \eta_1 + (\mu_2 + \lambda_2) \eta_2 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(2\mu_1 + \lambda_1) \eta_2 + (2\mu_2 + \lambda_2) \eta_1}; \\ A_{12} &= \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 - (\lambda_1 - \lambda_2) \eta_1 \eta_2 \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2)}{(2\mu_1 + \lambda_1) \eta_2 + (2\mu_2 + \lambda_2) \eta_1}; \\ A_{22} &= (2\mu_1 + \lambda_1) \eta_1 + (2\mu_2 + \lambda_2) \eta_2 - \eta_1 \eta_2 \frac{[(\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2)]^2}{(2\mu_1 + \lambda_1) \eta_2 + (2\mu_2 + \lambda_2) \eta_1}; \\ A_{66} &= \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \eta_2 + \mu_2 \eta_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

şeklinde verilebilir. Sayısal sonuçların bulunmasında çözüm bölgesi x_1 yönünde 72, x_2 yönünde 12 dikdörtgen sonlu eleman olacak şekilde ayrıklaştırılmıştır. Yapısında delik olmadığı durumda ve $x_1 = \ell/2$ 'ye göre problemin simetrik olması özelliğinden yararlanarak sonlu eleman modellemesi: 432 sonlu eleman, 1825 düğüm noktası ve 3575 serbestlik derecesi içermektedir. Aksi verilmediği sürece, verilen şekillerde aynı sembol ile gösterilen grafikler aynı parametre değerlerinde elde edilen grafiklerdir fakat, kesikli çizgiler ile gösterilen grafikler yapıda dikdörtgen delik olmadığı durumda elde edilmiştir. Verilen grafiklerde $\bar{E}_1 = E_1 U_1 / \ell$ ifadesinde U_1 / ℓ , x_1 yönündeki boyutsuz yer değiştirmedir.

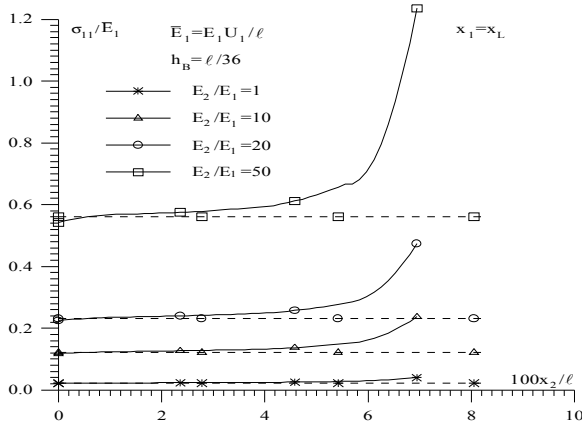
Parametrelerin; $h/\ell = 1/6$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$; $h_K = (h - h_B)/2$; matris ve güçlendirici malzemelerinin hacim oranlarının birbirine eşit değerleri için aşağıda verilen grafikler elde edilmiştir:



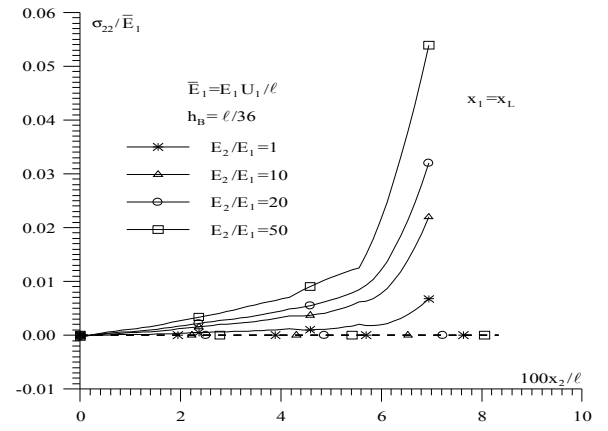
Şekil 2.5 Farklı kare delik ölçülerinde $\sigma_{11}/\bar{E}_1$ gerilmesinin x_2/ℓ ye göre grafiği.



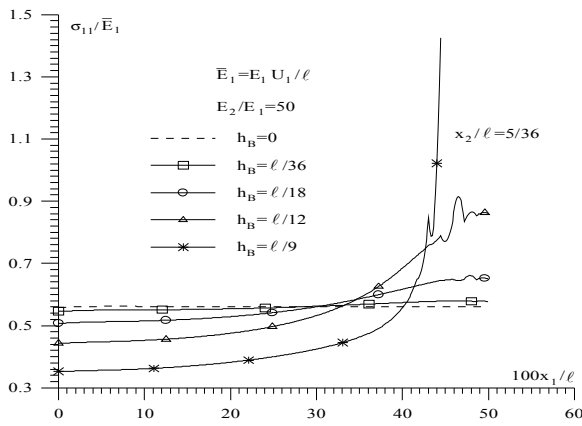
Şekil 2.6 Farklı kare delik ölçülerinde $\sigma_{22}/\bar{E}_1$ gerilmesinin x_2/ℓ ye göre grafiği.



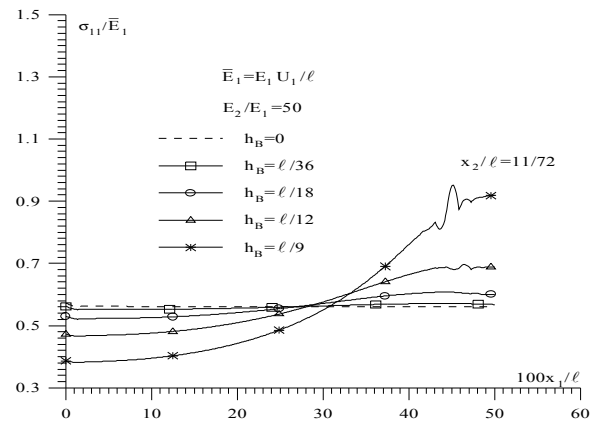
Şekil 2.7 Farklı E_2/E_1 değerlerinde $\sigma_{11}/\bar{E}_1$ gerilmesinin x_2/ℓ ye göre grafiği.



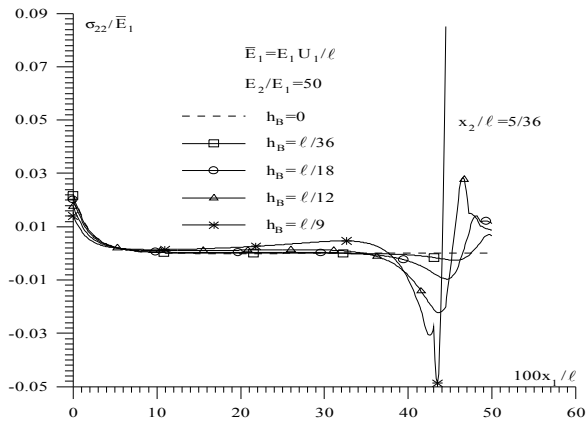
Şekil 2.8 Farklı E_2/E_1 değerlerinde $\sigma_{22}/\bar{E}_1$ gerilmesinin x_2/ℓ ye göre grafiği.



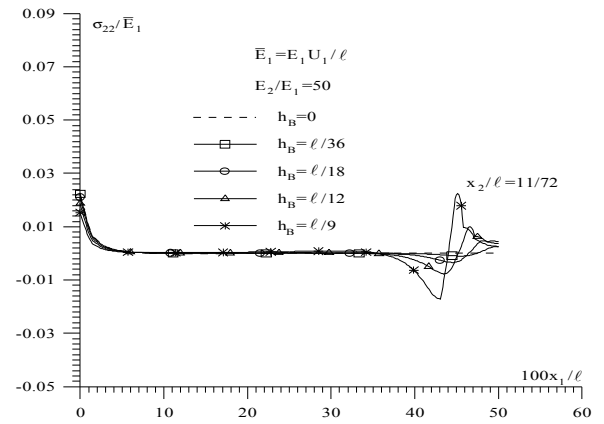
Şekil 2.9 Farklı kare delik ölçülerinde $\sigma_{11}/\bar{E}_1$ gerilmesinin x_1/ℓ ye göre grafiği.



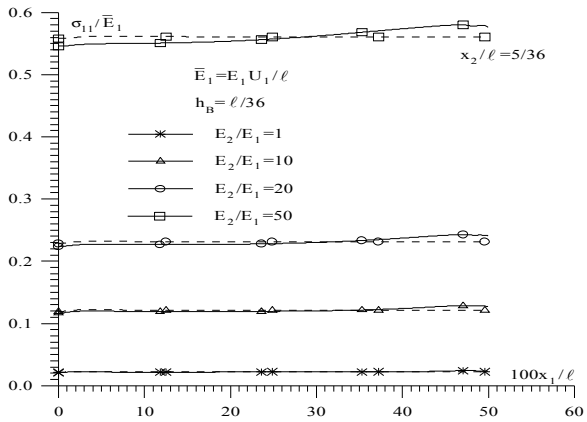
Şekil 2.10 Farklı kare delik ölçülerinde $\sigma_{11}/\bar{E}_1$ gerilmesinin x_1/ℓ ye göre grafiği.



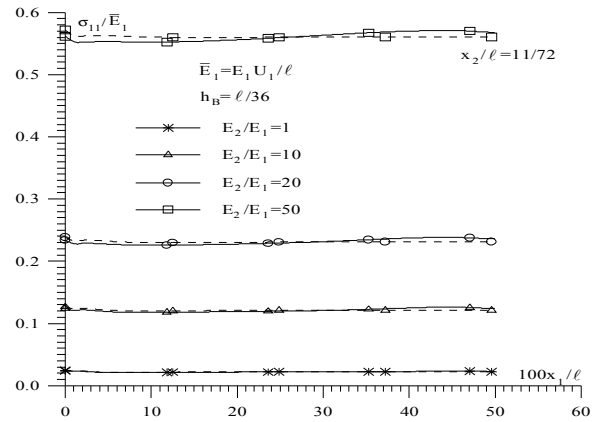
Şekil 2.11 Farklı kare delik ölçülerinde $\sigma_{22}/\bar{E}_1$ gerilmesinin x_1/ℓ ye göre grafiği.



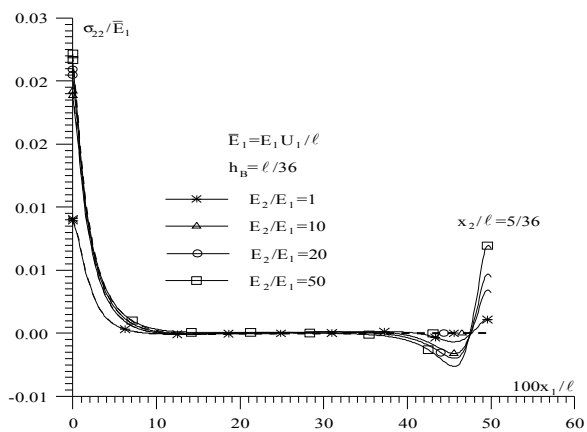
Şekil 2.12 Farklı kare delik ölçülerinde $\sigma_{22}/\bar{E}_1$ gerilmesinin x_1/ℓ ye göre grafiği.



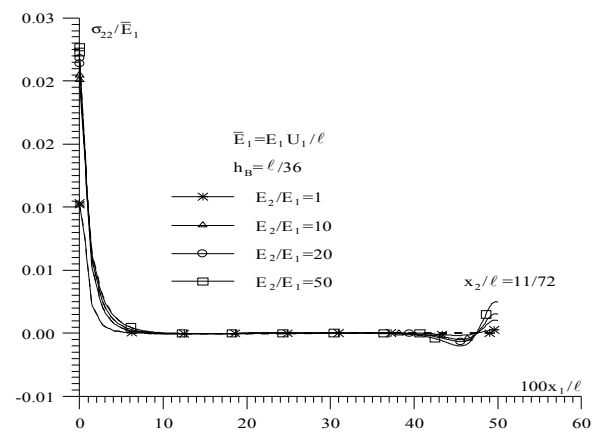
Şekil 2.13 Farklı E_2/E_1 değerlerinde $\sigma_{11}/\sqrt{E_1}$ gerilmesinin x_1/ℓ ye göre grafiği.



Şekil 2.14 Farklı E_2/E_1 değerlerinde $\sigma_{11}/\bar{E}_1$ gerilmesinin x_1/ℓ ye göre grafiği.



Şekil 2.15 Farklı E_2/E_1 değerlerinde $\sigma_{22}/\bar{E}_1$ gerilmesinin x_1/ℓ ye göre grafiği.

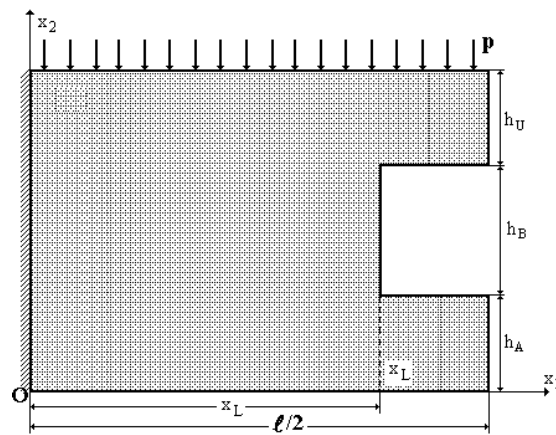


Şekil 2.16 Farklı E_2/E_1 değerlerinde $\sigma_{22}/\bar{E}_1$ gerilmesinin x_1/ℓ ye göre grafiği.

Bilindiği üzere sonsuz düzlemde kare deliğin boyutu bu delik etrafında oluşan gerilme yığılmasına etki göstermemektedir. Ele alınan problemde kare deliğin boyutu şerit-levhanın boyutlarından çok küçük olduğunda oluşan gerilme yığılması aynı deliğin sonsuz levhada oluşturduğu gerilme yığılması ile çakışır. Şekil 2.5 - Şekil 2.16 da elde edilen sonuçlara göre, deliğin boyutu büyüdükçe, gerilme yığılmasının değeri de büyümektedir. Şekil 2.5, Şekil 2.6 da verilen grafiklere göre şeritin alt ve üst gerilme yığılmasına etkisinden dolayı bu gerilme yığılmalarının şiddeti (delik boyutu büyüdükçe) monoton olarak büyümektedir. Bundan başka Şekil 2.7, Şekil 2.8 den görüldüğü gibi şeritin Ox_2 eksen yönündeki sınırlarının gerilme yığılmasına etkisi E_2/E_1 oranının büyümesi ile de artmaktadır. Şekil 2.9, Şekil 2.10 da verilen grafiklerden şeritin Ox_1 yönündeki sınırlarının delik civarında $\sigma_{11}/\bar{E}_1$ gerilme yığılmalarına etkisi görülmektedir. Aynı etkiler $\sigma_{22}/\bar{E}_1$ gerilmeleri için Şekil 2.11 ve Şekil 2.12 den belirlenebilir. Şekil 2.13 - Şekil 2.16 dan elde edilen sonuçlar ise, yukarıda adı geçen etkinin E_2/E_1 değerinin büyümesi ile arttığını gösteriyor. Bu sonuçlar sonlu alanlarda anizotrop ortamda oluşan kare delik etrafında oluşan gerilme yığılmasına etkisini gösteren ilk teşebbüsleri oluşturmaktadır. Elde edilen sayısal sonuçlar hangi durumlarda kare delik civarındaki gerilme yığılması incelenmesinin, sonsuz bir ortamda aynı delik etrafındaki gerilme yığılmasına indirgenebilmesi sorusunda cevaplandırmaktadır.

2.4 Dikdörtgen Delik İçeren Anizotrop Şerit-Levhanın Eğilmesi Problemi

2.4.1 Ele Alınan Problemlerin Matematiksel Modeli



Şekil 2.17 Levhanın

geometrisi.

Bu kısımda farklı iki sınır koşulu altında yapısında dikdörtgen delik bulunan anizotrop şerit-levhanın eğilmesi problemi incelenmiştir. Çözüm bölgesi ve boyutları Şekil 2.17 de gösterildiği gibi kabul edilecektir. Koordinat takımı Şekil 2.17 de gösterildiği gibi levhaya bağlanmış olup çözüm bölgesi, $x_1 = l/2$ 'ye göre problem simetrisinde göz önüne alınarak,

$\Omega = \{0 \leq x_2 \leq h = h_A + h_B + h_U; 0 \leq x_1 \leq \ell/2\}$ olarak verilebilir. Bu bölgede sağlanan denge denklemleri, bünye denklemleri ve geometrik ilgiler Kısım 2.3.1 'de sırasıyla verilen (2.1), (2.2) ve (2.3) denklemleriyle aynıdır. Bu kısımda ele alınan problemlerin sınır koşulları:

a) Ankastre mesnetli olması durumunda:

$$\left. \begin{aligned} u_1|_{x_1=0;\ell} &= 0; \quad u_2|_{x_1=0;\ell} = 0; \quad \sigma_{i2}|_{x_2=h} = p\delta_{i2}; \\ \sigma_{i2}|_{x_2=0} &= 0; \quad \sigma_{i1}|_{\substack{x_1=x_L;\ell-x_L \\ x_2 \in [h_A, h_A+h_B]}} = 0; \quad \sigma_{2i}|_{\substack{x_2=h_A;h_A+h_B \\ x_1 \in [x_L, \ell-x_L]}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad i=1,2 \quad (2.17)$$

b) Basit mesnetli olması durumunda:

$$\left. \begin{aligned} u_2|_{x_1=0;\ell} &= 0; \quad \sigma_{11}|_{x_1=0;\ell} = 0; \quad \sigma_{i2}|_{x_2=h} = p\delta_{i2}; \\ \sigma_{i2}|_{x_2=0} &= 0; \quad \sigma_{i1}|_{\substack{x_1=x_L;\ell-x_L \\ x_2 \in [h_A, h_A+h_B]}} = 0; \quad \sigma_{2i}|_{\substack{x_2=h_A;h_A+h_B \\ x_1 \in [x_L, \ell-x_L]}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad i=1,2 \quad (2.18)$$

şeklinde verilebilir. Dolayısıyla ele alınan şerit-levhanın ankastre mesnetli olması durumunda çözümü yapılacak olan problem (2.1)-(2.3) ve (2.17) ifadeleriyle; basit mesnetli olması durumunda (2.1)-(2.3) ve (2.18) ifadeleri ile matematiksel olarak temsil edilebilir.

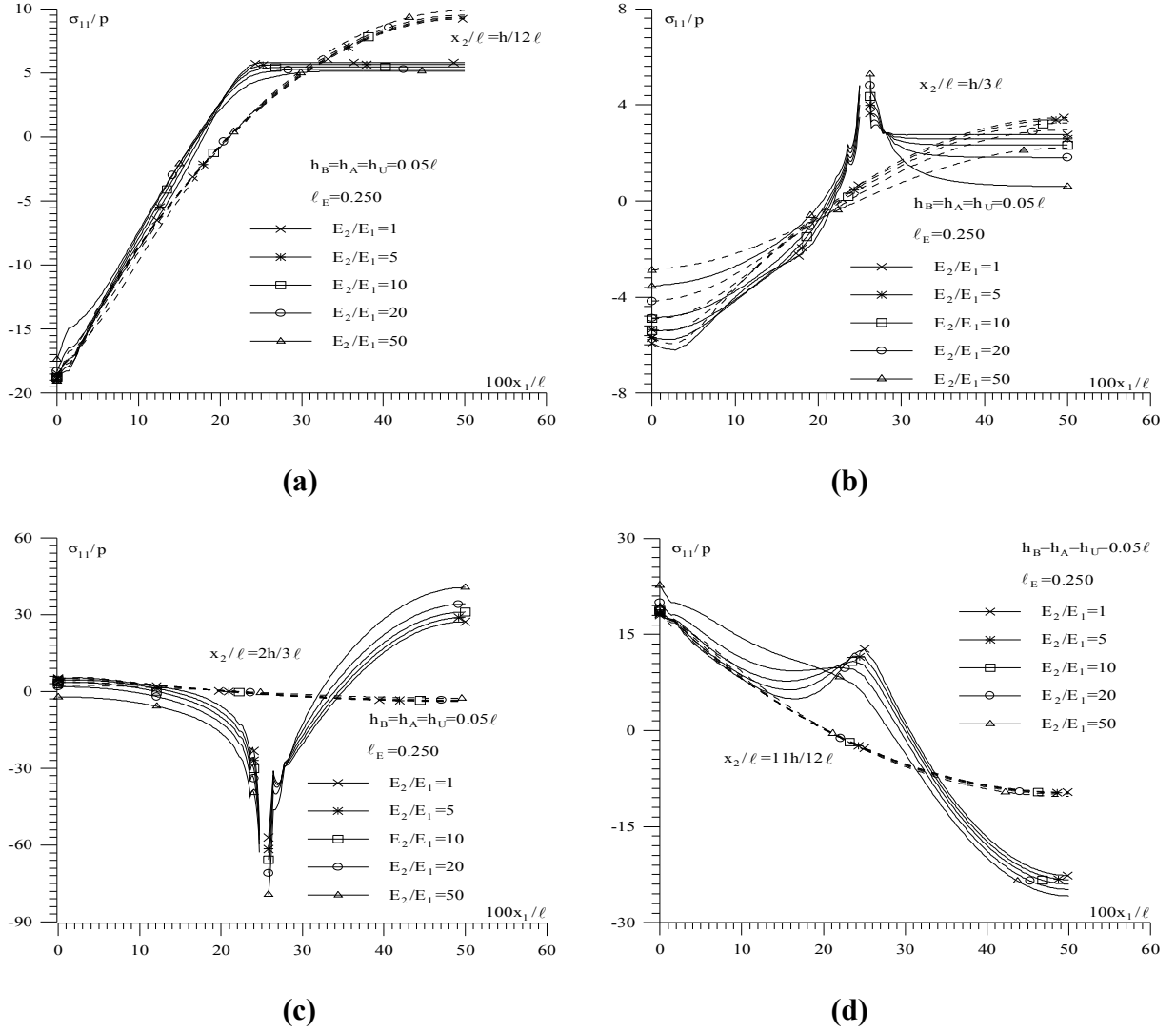
2.4.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modelleme

Bu kısımda ele alınan problemlerin sonlu eleman modellemesi Kısım 2.3.2 'de verilen işlemler dahilinde yapılmıştır.

2.4.3 Sayısal Sonuçların İncelenmesi

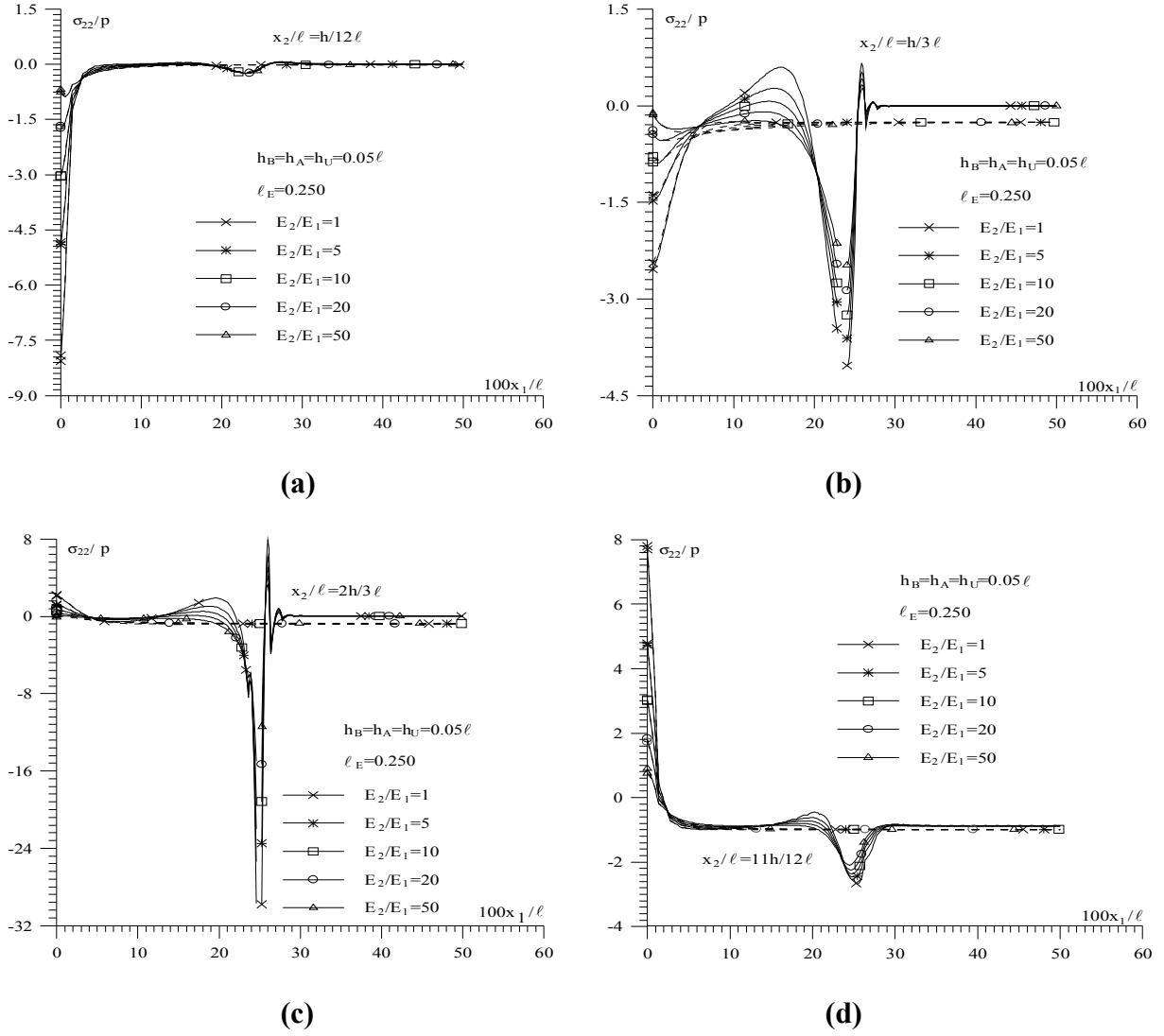
Ele alınan problemler de şerit-levha malzemesinin birbirini tekrar eden iki izotrop levhadan oluştuğu kabul edilecek ve bunlara ait elastik sabitler sırasıyla, $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ - Lamé sabitleri; E_1, E_2 - Young modülleri; ν_1, ν_2 - Poisson oranları ve kompozit içerisindeki hacim oranları η_1, η_2 ile gösterilecektir. Yine, matris malzemesine ait büyüklükler alt indis 1 ve güçlendirici malzemeye ait büyüklükler alt indis 2 ile gösterilecektir. A_{ij} normalize edilmiş mekanik özelliklerinin açık ifadeleri (2.16) da verildiği gibidir. Sonlu eleman modellemesi, yapıda dikdörtgen delik olmadığı durumda 432 sonlu eleman, 1825 düğüm noktası ve 3575 serbestlik derecesi olacak şekilde yapılmıştır. Şimdi elde edilen sayısal sonuçları ele alalım.

2.4.3.1 Ankastre Mesnetli Olması Durumu



Şekil 2.18 Farklı E_2/E_1 oranları için σ_{11}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.

Şekil 2.18 de x_2/ℓ ye göre farklı dört kesitte ele alınan sınır koşulları için E_2/E_1 oranının değişiminin σ_{11}/p gerilmesine etkisi, bu gerilmenin x_1/ℓ ye göre grafikleri şeklinde verilmektedir. Bu kısımda da aynı sembolü taşıyan grafikler aynı parametre değerinde elde edilmiş grafikler olup, noktalı çizgiler ile verilen grafikler yapıda dikdörtgen delik olmadığı durumda elde edilmiştir. Grafiklerde şerit-levhanın üst yüzeyinde düzgün yayılı kuvvet etkisinde, deliğin alt kısmı (Şekil 2.18 a ve b) yani, yüklemeye uzak olan bölge ile deliğin üst kısmı (Şekil 2.18 c ve d) yani, yüklemeye yakın olan bölgedeki σ_{11}/p gerilmesi dağılımının grafikleri birbirinden çok farklıdır. Deliğin alt kısmında, delik olmadığı durumda elde edilen gerilme değerleri, delik olduğu durumda elde edilen değerlerden daha büyük kalmaktadır. Oysa deliğin üst kısmı için durum bunun tersidir.

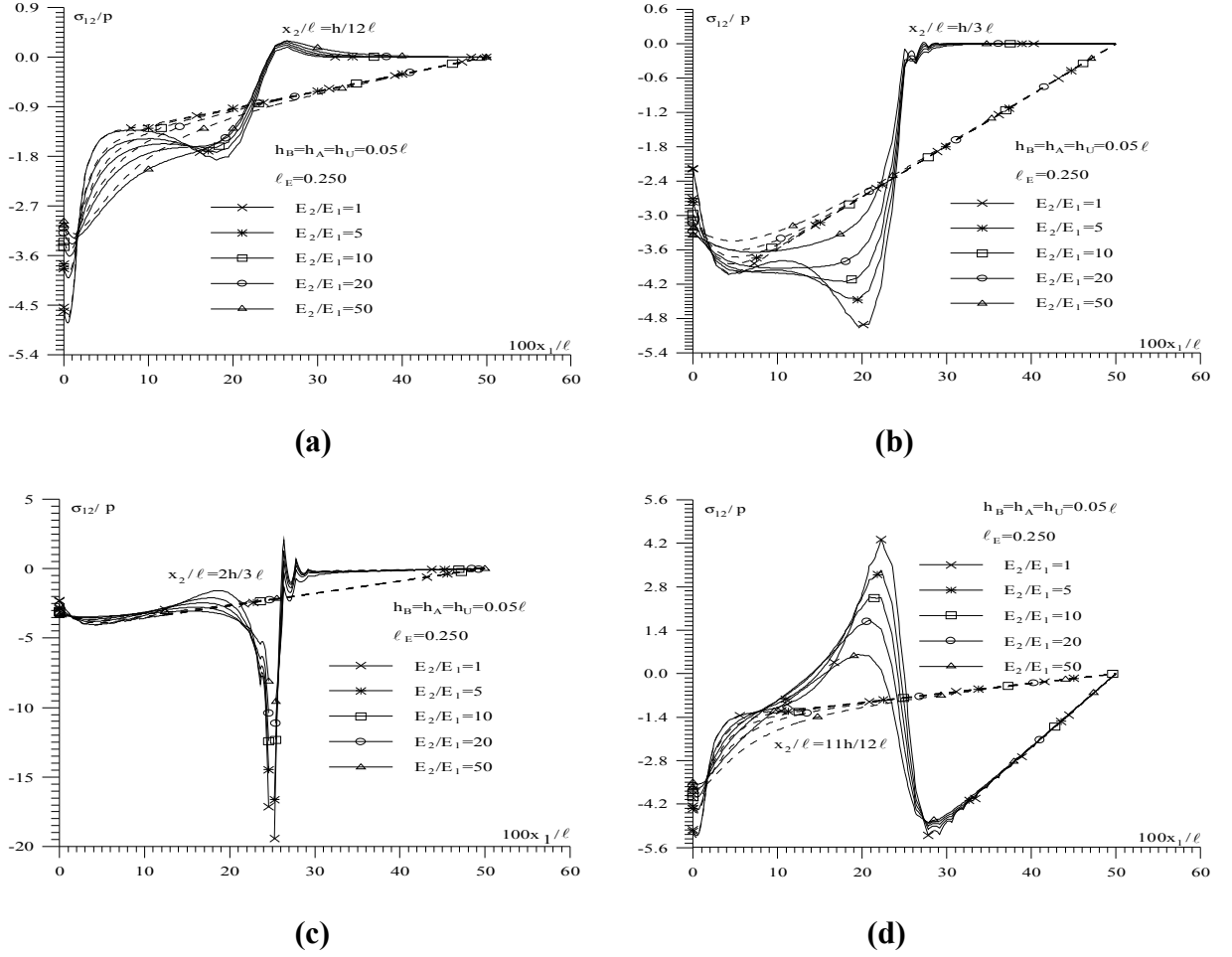


Şekil 2.19 Farklı E_2/E_1 oranları için σ_{22}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/l ye göre grafikleri.

Şekil 2.19 da E_2/E_1 oranının değişiminin ele alınan sınır koşulları altında σ_{22}/p gerilmesi dağılımına etkisi, bu gerilmenin x_1/l ye göre grafikleri olarak verilmektedir. Grafiklerden görüldüğü gibi delik köşeleri civarında gerilme değerleri çok artmaktadır. Oysa delikten uzaklaştıkça dikdörtgen deliğin gerilme dağılımına etkisi düşmektedir. İlave olarak dikdörtgen deliğin yüklemeye yakın olan köşesi civarında meydana gelen gerilme şiddetinin, yüklemeden uzak olan köşesi civarında meydana gelen gerilme şiddetinden çok büyük olduğu görülmektedir.

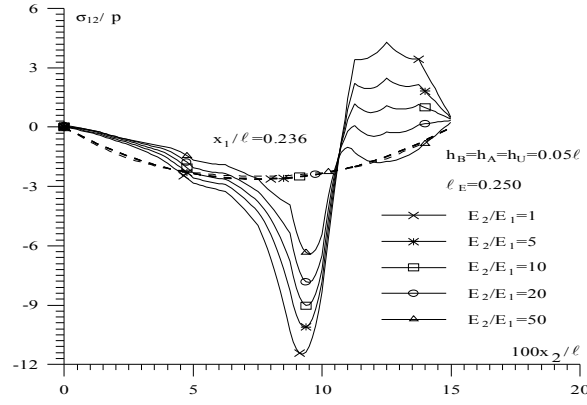
Şekil 2.20 de E_2/E_1 oranının değişiminin farklı dört kesitte, delik olması ve olmaması durumunda, σ_{12}/p gerilmesinin yayılımına etkisi verilmektedir. Diğer gerilme yayılımlarında da görüldüğü gibi, bu gerilme yayılımında da yüklemeye yakın olan uçtaki

gerilme yığılması şiddetinin, yüklemeye uzak olan uçtaki gerilme yığılması şiddetinden çok daha büyük olduğu görülmektedir. Ayrıca elastisite modülü oranının artırılması delik ucu bölgesi civarında σ_{12}/p gerilmesinin değerini düşürmektedir.

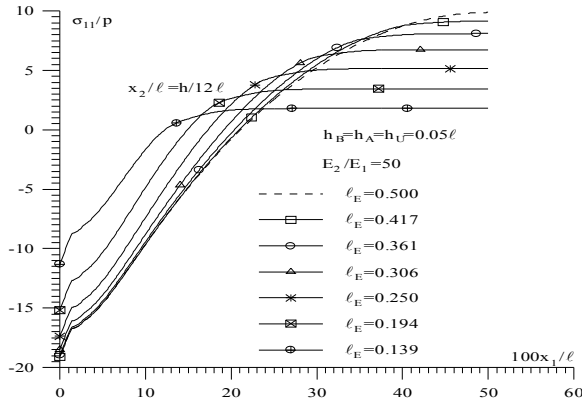


Şekil 2.20 Farklı E_2/E_1 oranları için σ_{12}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.

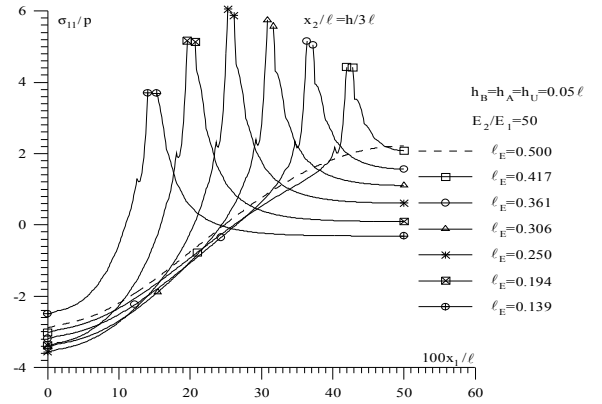
Şekil 2.21 de yine farklı elastisite modülü oranlarında bu kez x_2/ℓ 'ye göre σ_{12}/p gerilmesinin dağılımı ele alınan kesitte verilmektedir. Bu grafikten yüklemeye yakın olan uçtaki gerilme yığılması değerinin, yüklemeye uzak olan uçtaki gerilme yığılması değerinden çok daha büyük olduğu açık olarak görülmektedir ve gerilme şiddetleri E_2/E_1 değeri arttıkça düşmektedir. Ayrıca delik ile yükün etki ettiği yüzey arasında kalan kısımda, daha önce hep negatif değer olan σ_{12}/p gerilmesi işaret değiştirerek pozitif değer almaktadır.



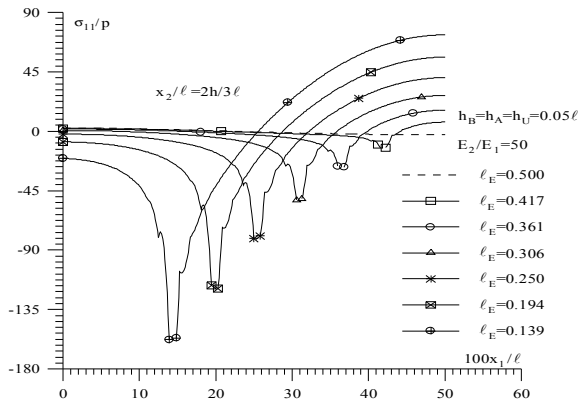
Şekil 2.21 Farklı E_2/E_1 oranları için σ_{12}/p gerilmesinin $x_1/\ell = 0.236$ kesitinde x_2/ℓ ye göre grafiği.



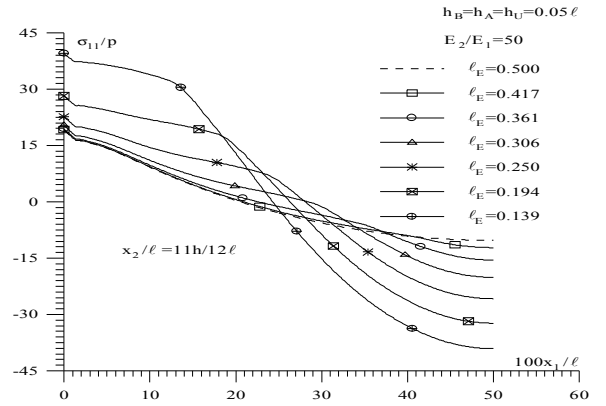
(a)



(b)



(c)



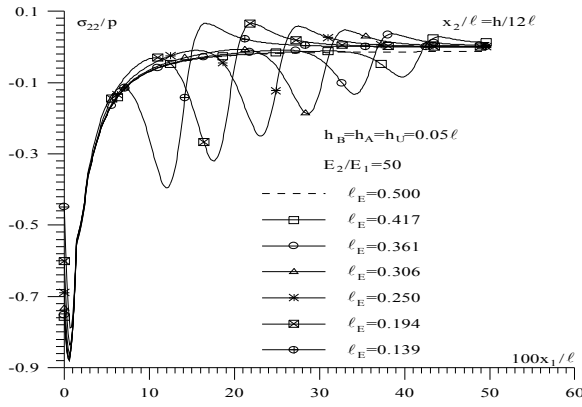
(d)

Şekil 2.22 Farklı ℓ_E ($=x_L/\ell$:dikdörtgen deliğin mesnetden uzaklığı) değeri için σ_{11}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.

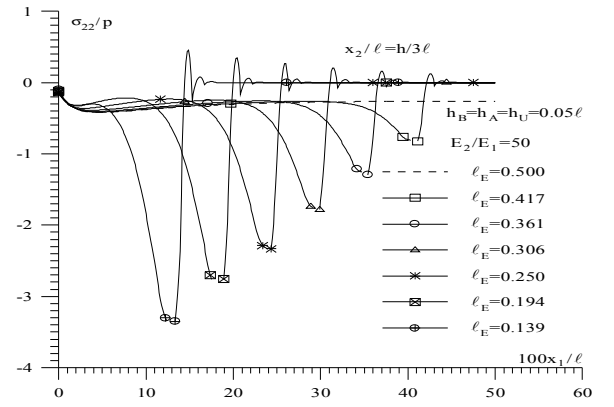
Şekil 2.22 de dikdörtgen deliğin x_1 doğrultusundaki uzunluğunun (yani dikdörtgen deliğin mesnetden uzaklığı ℓ_E nin) değişiminin σ_{11}/p gerilmesine etkisi, farklı dört kesitte, bu

gerilmenin x_1/ℓ ye göre grafikleri olarak verilmektedir. Şekil 2.22a ‘dan görüldüğü gibi, deliğin x_1 doğrultusundaki uzunluğu arttıkça, ankastre mesnet sınır koşulundan dolayı deliğin köşesi civarındaki gerilmenin şiddeti düşmektedir. Yine, $x_2/\ell = h/12\ell$ de bu grafikten elde edilen gerilme değerlerinin en büyük şiddeti en küçük delik boyutunda meydana gelmekte fakat bu değer delik olmadığı durumda elde edilen ve en büyük değerini şerit-levhanın orta kesitinde alan değerden küçük kalmaktadır.

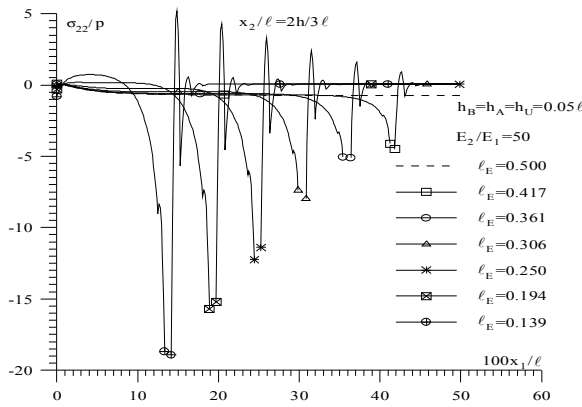
Şekil 2.22b ve Şekil 2.22c ‘deki grafiklerde delik köşeleri civarında gerilme şiddetinin arttığı ve yüklemeye yakın olan köşe civarında bu artışın, diğer köşe civarında elde edilen değerden daha fazla olduğu görülmektedir. Şekil 2.22d ‘de görülen grafiklerden en büyük gerilme değerlerinin en büyük delik boyutları için elde edildiği ve dikdörtgen deliğin x_1 eksenî yönündeki boyutu küçüldükçe elde edilen gerilme dağılımının delik olmadığı durumda elde edilen değerlere yaklaştığı görülmektedir.



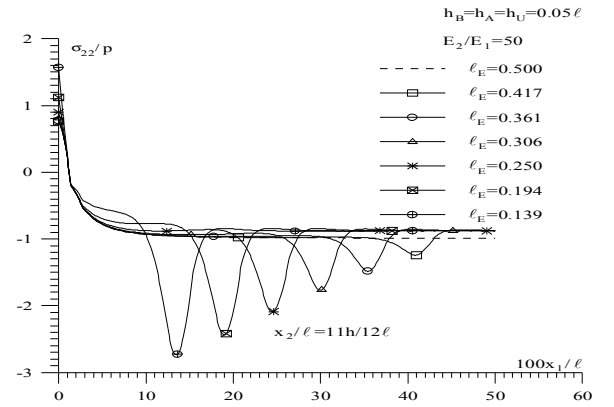
(a)



(b)



(c)

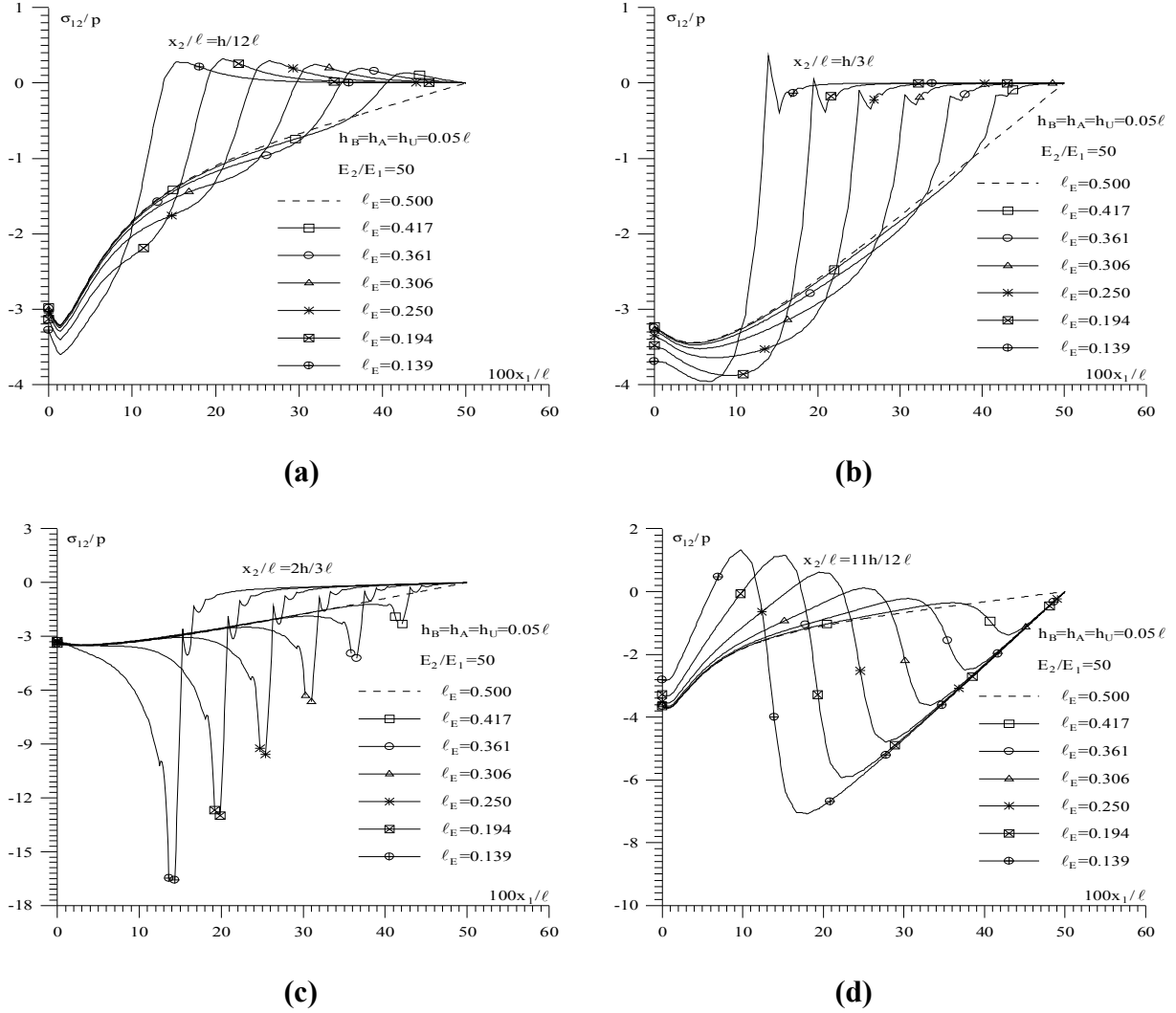


(d)

Şekil 2.23 Farklı ℓ_E değeri için σ_{22}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.

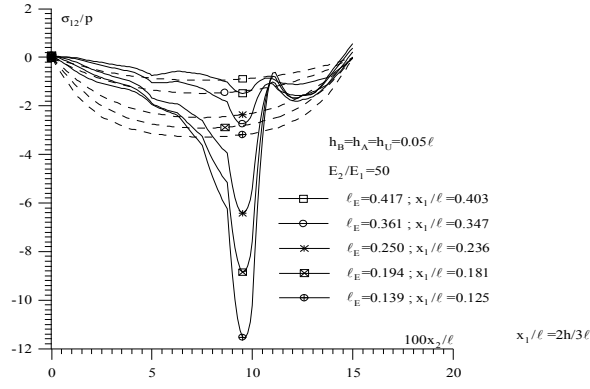
Şekil 2.23 de verilen grafiklerden görüldüğü gibi dikdörtgen deliğin x_1 eksenî yönündeki

uzunluğu arttıkça, verilen bütün kesitlerde σ_{22}/p gerilmesi dağılımı monoton olarak artmaktadır ve en büyük gerilme yığılması şiddeti en büyük delik için elde edilmektedir.



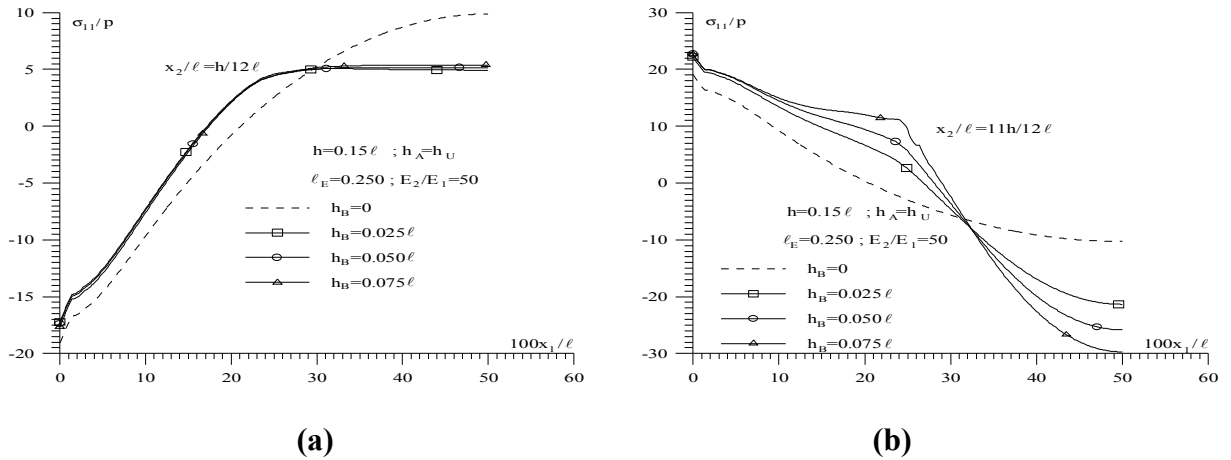
Şekil 2.24 Farklı ℓ_E değeri için σ_{12}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.

Şekil 2.24 de ℓ_E (dikdörtgen deliğin mesnetten uzaklığı) parametresinin farklı değerlerinde dört ayrı kesitte, delik olması ve olmaması durumunda σ_{12}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye göre grafikleri verilmektedir. Grafiklerden görüldüğü gibi yapı elemanında dikdörtgen deliğin olması ve büyüklüğü, diğer gerilme değerlerinde olduğu gibi, σ_{12}/p gerilmesi dağılımına da güçlü şekilde etki göstermektedir, yüklemeye yakın olan bölgede elde edilen gerilme değerleri, yüklemeye uzak olan bölgede elde edilen gerilme değerlerinden çok daha büyüktür. En küçük gerilme değerleri en küçük delik boyutunda ($\ell_E=0.417$) elde edilmektedir.



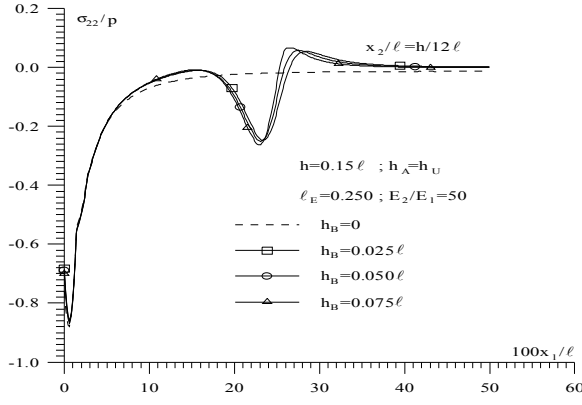
Şekil 2.25 Farklı ℓ_E değeri için σ_{12}/p gerilmesinin x_2/ℓ ye göre grafiği.

Şekil 2.25 de bu kez farklı ℓ_E parametresi değerlerinde ele alınan kesitte σ_{12}/p gerilmesinin x_2/ℓ 'ye göre grafikleri verilmektedir. Yine verilen grafiklerden, yüklemeye yakın olan delik ucu bölgesi civarında en büyük gerilme yığılması şiddetinin elde edildiği görülmektedir. Fakat elde edilen gerilme yığılması şiddeti, ℓ_E (dikdörtgen deliğin mesnetten uzaklığı) parametresinin değeri arttıkça düşmektedir.

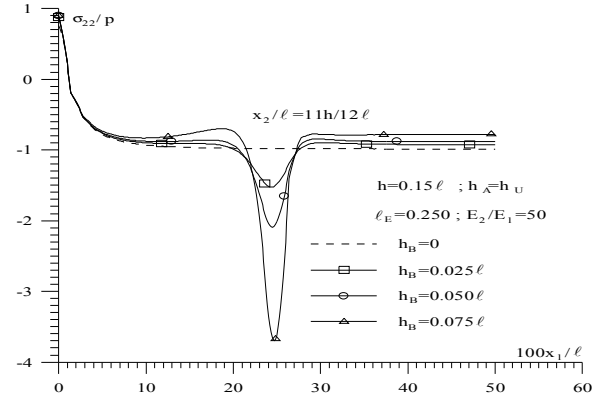


Şekil 2.26 Farklı h_B (dikdörtgen deliğin x_2 doğrultusundaki uzunluğu) değeri için σ_{11}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.

Şekil 2.26 da ve Şekil 2.27 de farklı iki kesitte dikdörtgen deliğin kalınlığının (h_B) artmasının sırasıyla σ_{11}/p ve σ_{22}/p gerilmelerine etkisi verilmektedir. Deliğin altındaki kesitlerde elde edilen grafiklerden (Şekil 2.26a ve Şekil 2.27a) bu parametre değişimi, ele alınan gerilme dağılımlarına çok az etki ederken, deliğin üstündeki bölgede ele alınan kesitteki grafiklerden (Şekil 2.26b ve Şekil 2.27b) görüldüğü gibi h_B parametresinin artışı, diğer bir değişle delik üstündeki katı bölgenin kalınlığının düşmesi, her iki gerilme dağılımına güçlü şekilde etki göstermektedir.



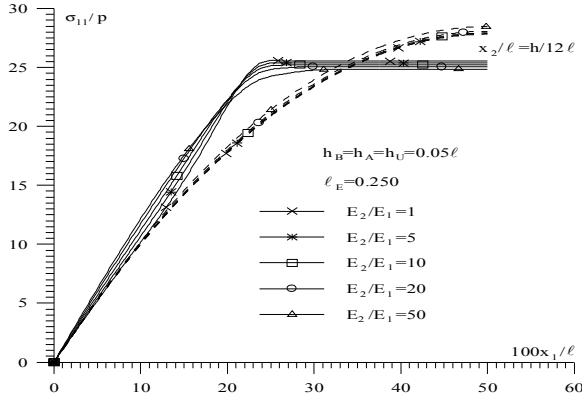
(a)



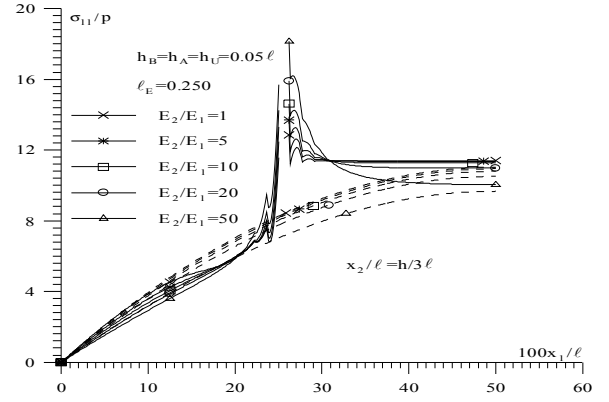
(b)

Şekil 2.27 Farklı h_B değeri için σ_{22}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.

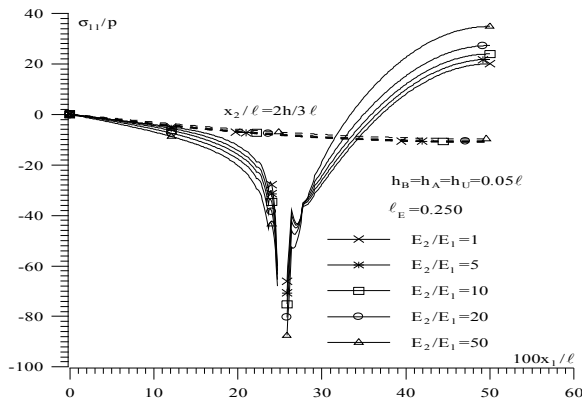
2.4.3.2 Basit Mesnetli Olması Durumu



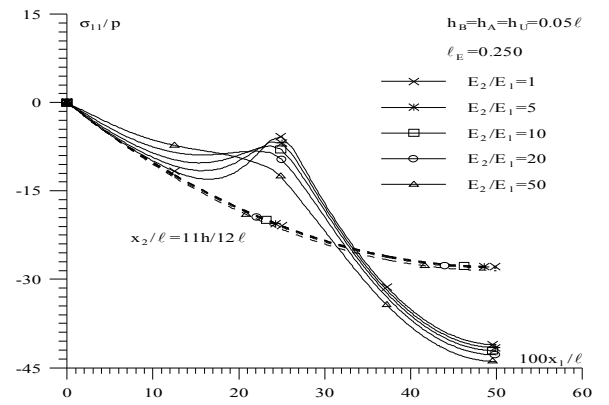
(a)



(b)



(c)



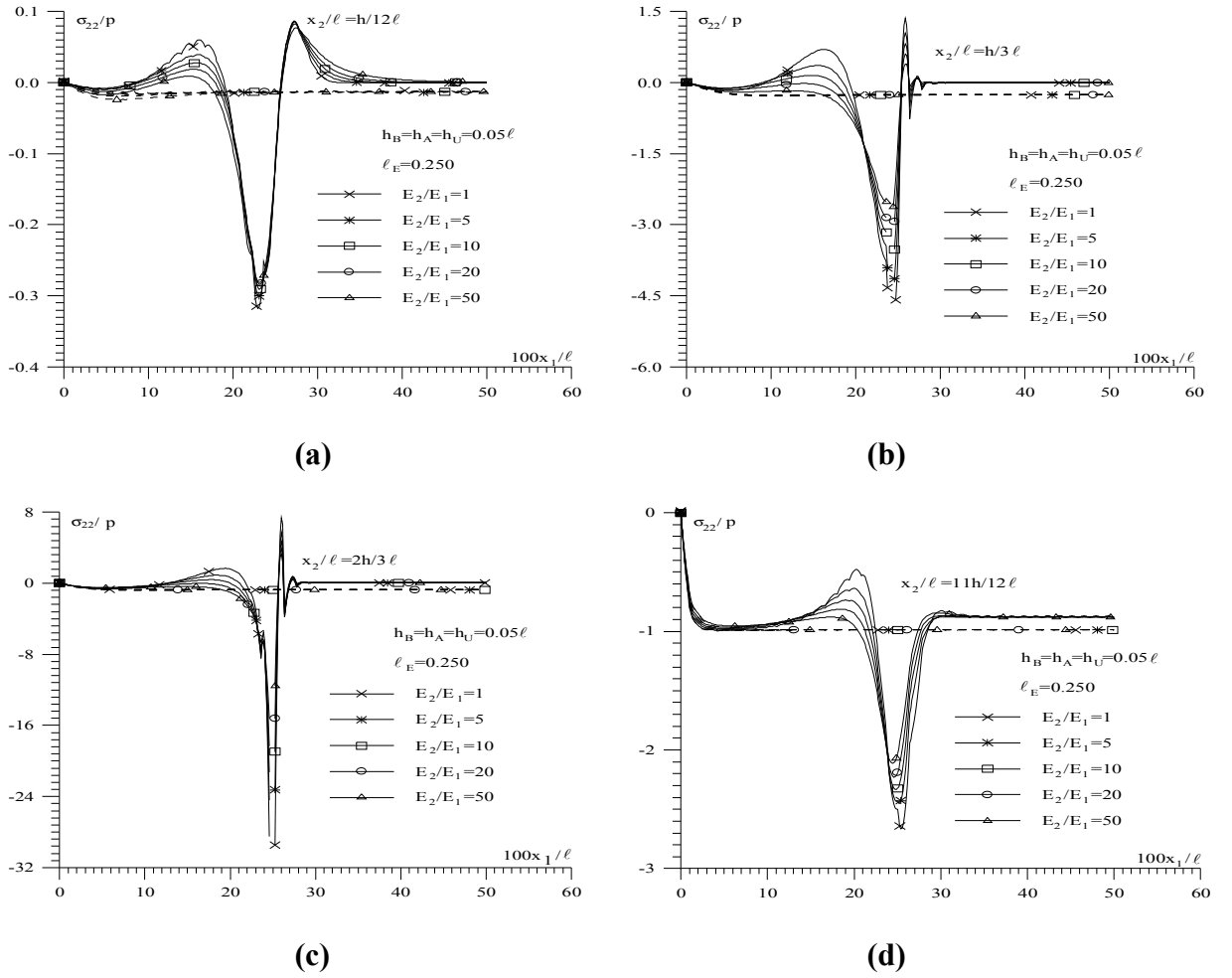
(d)

Şekil 2.28 Farklı E_2/E_1 oranları için σ_{11}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.

Şekil 2.28 de farklı dört kesitte ele alınan basit mesnet sınır koşulları için E_2/E_1 oranının

değişiminin σ_{11}/p gerilmesine etkisi, bu gerilmenin x_1/ℓ ye göre grafikleri şeklinde verilmektedir. Bu kısımda da aynı sembolü taşıyan grafikler aynı parametre değerinde elde edilmiş grafikler olup, noktalı çizgiler ile verilen grafikler yapıda dikdörtgen delik olmadığı durumda elde edilmiştir.

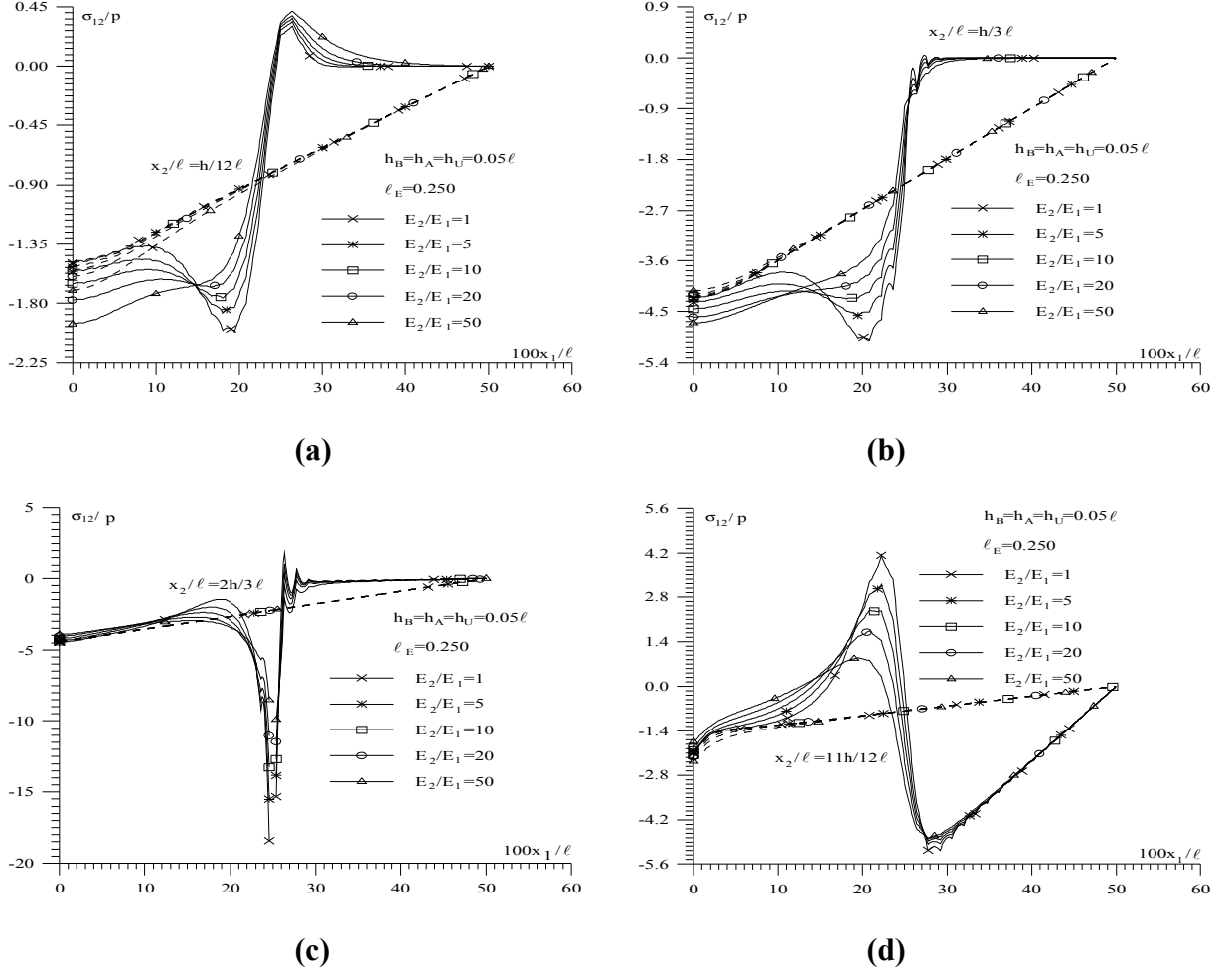
Grafiklerde şerit-levhanın üst yüzeyinde düzgün yayılmış kuvvet etkisinde, deliğin alt kısmı (Şekil 2.28a ve b) yani, yüklemeye uzak olan bölge ile deliğin üst kısmı (Şekil 2.28c ve d) yani, yüklemeye yakın olan bölgedeki σ_{11}/p gerilmesi dağılımının grafikleri birbirinden önemli bir biçimde farklıdır. Bununla birlikte deliğin köşe noktalarındaki tekillik bu bölge civarında gerilme dağılımlarında gerilmenin değerini artırıcı etki göstermektedir.



Şekil 2.29 Farklı E_2/E_1 oranları için σ_{22}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.

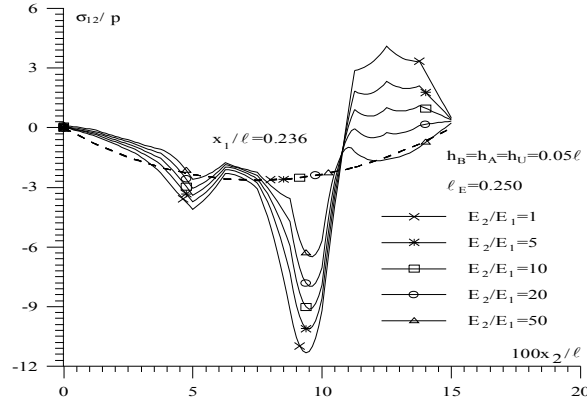
Şekil 2.29 da E_2/E_1 oranının değişiminin ele alınan basit mesnet sınır koşulları altında σ_{22}/p gerilmesi dağılımına etkisi, bu gerilmenin x_1/ℓ ye göre grafikleri olarak verilmektedir.

Grafiklerden görüldüğü gibi delik köşeleri civarında gerilme değerleri çok artmaktadır. Oysa delikten uzaklaştıkça dikdörtgen deliğin gerilme dağılımına etkisi düşmektedir. İlave olarak dikdörtgen deliğin yüklemeye yakın olan köşesi (Şekil 2.29c) civarında meydana gelen gerilme şiddetinin, yüklemeye uzak olan köşesi (Şekil 2.29b) civarında meydana gelen gerilme şiddetinden çok çok büyük olduğu görülmektedir.



Şekil 2.30 Farklı E_2/E_1 oranları için σ_{12}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.

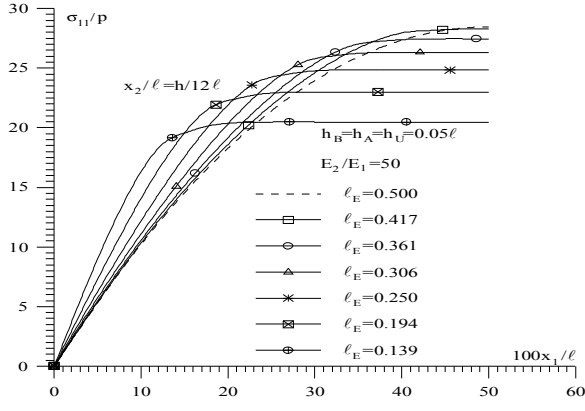
Şekil 2.30 da E_2/E_1 oranının değişiminin farklı dört kesitte, delik olması ve olmaması durumunda, σ_{12}/p gerilmesinin yayılımına etkisi verilmektedir. Diğer gerilme yayılımlarında da görüldüğü gibi, bu gerilme yayılımında da yüklemeye yakın olan uçtaki gerilme yığılması şiddetinin, yüklemeye uzak olan uçtaki gerilme yığılması şiddetinden çok daha büyük olduğu görülmektedir. Ayrıca elastisite modülü oranının artırılması delik ucu bölgesi civarında σ_{12}/p gerilmesinin değerini düşürmektedir.



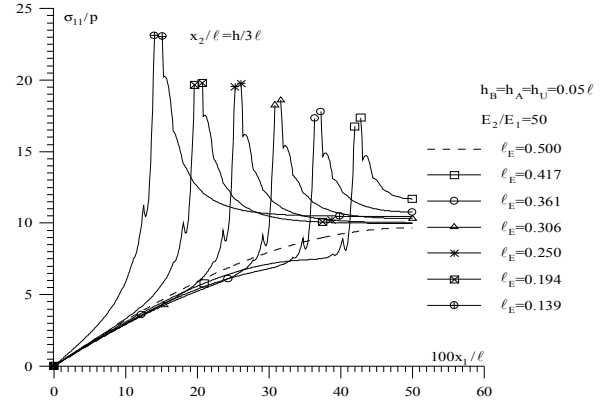
Şekil 2.31 Farklı E_2/E_1 oranları için σ_{12}/p gerilmesinin $x_1/\ell = 0.236$ kesitinde x_2/ℓ ye göre grafiği.

Şekil 2.31 de yine farklı elastisite modülü oranlarında bu kez x_2/ℓ 'ye göre σ_{12}/p gerilmesinin dağılımı ele alınan kesitte verilmektedir. Bu grafikten yüklemeye yakın olan uçtaki gerilme yığılması değerinin, yüklemeye uzak olan uçtaki gerilme yığılması değerinden çok daha büyük olduğu açık olarak görülmektedir ve gerilme şiddetleri E_2/E_1 değeri arttıkça düşmektedir. Ayrıca delik ile yükün etkidiği yüzey arasında kalan kısımda, σ_{12}/p gerilmesi işaret değiştirerek pozitif değer almaktadır.

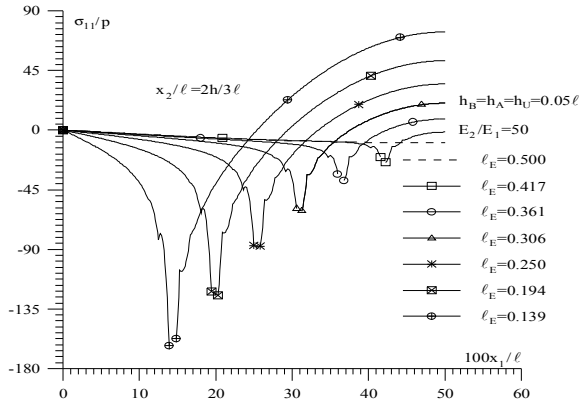
Şekil 2.32 de dikdörtgen deliğin x_1 doğrultusundaki uzunluğunun (yani dikdörtgen deliğin mesnetten uzaklığı ℓ_E nin) değişiminin σ_{11}/p gerilmesine etkisi, x_2/ℓ 'ye göre farklı dört kesitte, bu gerilmenin x_1/ℓ ye göre grafikleri olarak verilmektedir. Şekil 2.32a 'dan görüldüğü gibi, deliğin x_1 doğrultusundaki uzunluğu arttıkça, deliğin köşesi civarındaki gerilmenin şiddeti düşmektedir. Yine, bu grafikten elde edilen gerilme değerlerinin en büyük şiddeti en küçük delik boyutunda meydana gelmekte fakat bu değer delik olmadığı durumda elde edilen ve en büyük değerini şerit-levhanın orta kesitinde alan değerden küçük kalmaktadır. Şekil 2.32b ve Şekil 2.32c 'deki grafiklerde delik köşeleri civarında gerilme şiddetinin arttığı ve yüklemeye yakın olan köşe civarında bu artışın, diğer köşe civarında elde edilen değerden daha fazla olduğu görülmektedir. Şekil 2.32d 'de görülen grafiklerden en büyük gerilme değerlerinin en büyük delik boyutları için elde edildiği ve dikdörtgen deliğin x_1 eksenine yönündeki boyutu küçüldükçe elde edilen gerilme dağılımının delik olmadığı durumda elde edilen değerlere yaklaştığı görülmektedir.



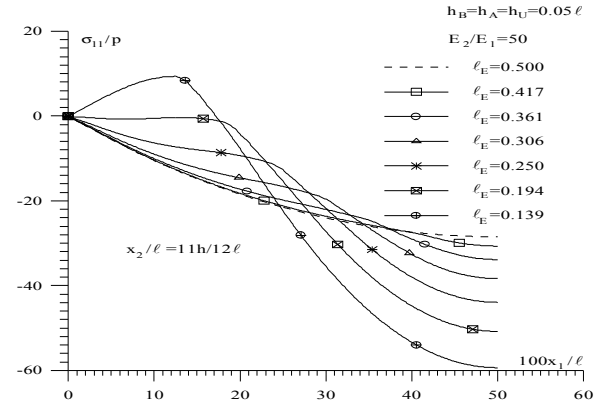
(a)



(b)



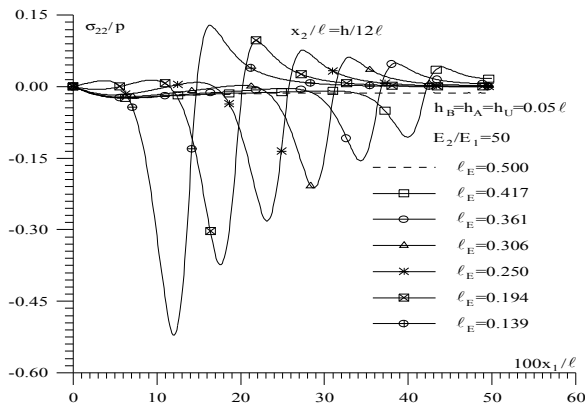
(c)



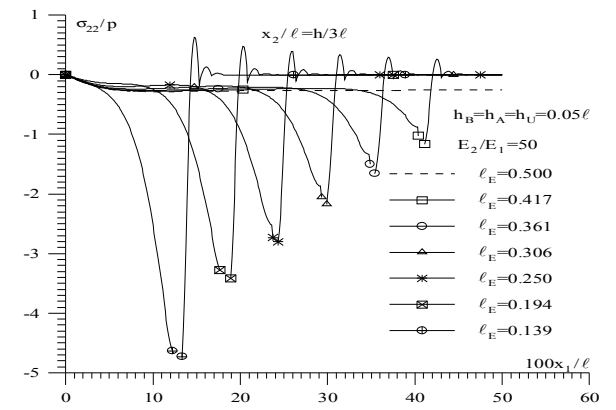
(d)

Şekil 2.32 Farklı ℓ_E değeri için σ_{11}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.

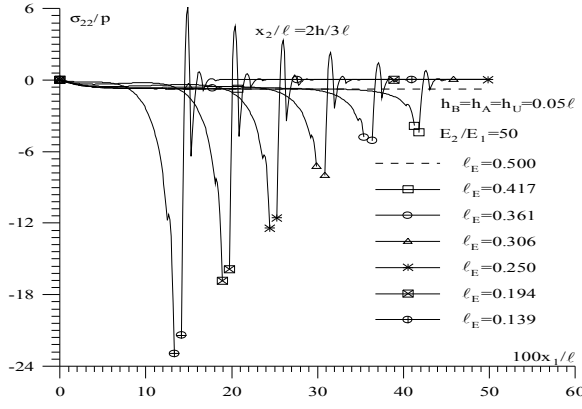
Şekil 2.33 de verilen grafiklerden görüldüğü gibi dikdörtgen deliğin x_1 eksenı yönündeki uzunluğu arttıkça, verilen bütün kesitlerde σ_{22}/p gerilmesi dağılımı monoton olarak artmaktadır ve en büyük gerilme yığılması şiddeti en büyük delik için elde edilmektedir.



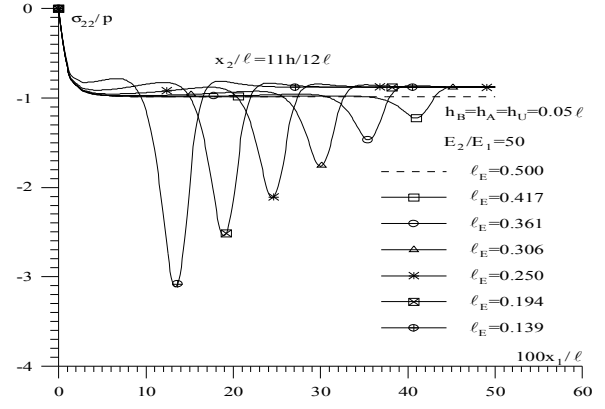
(a)



(b)

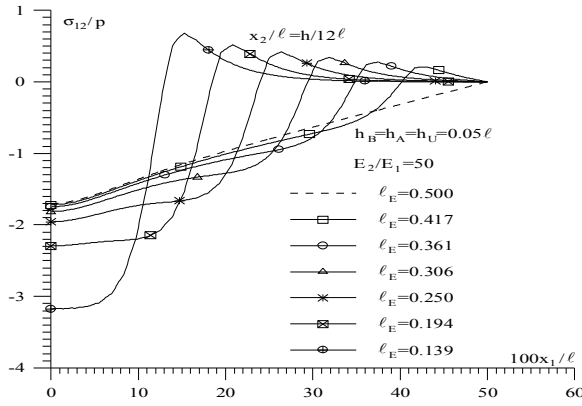


(c)

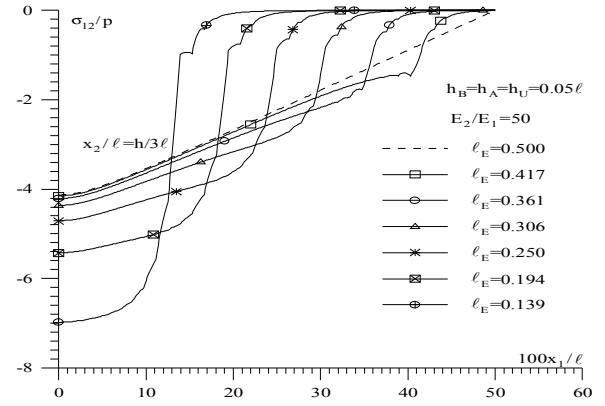


(d)

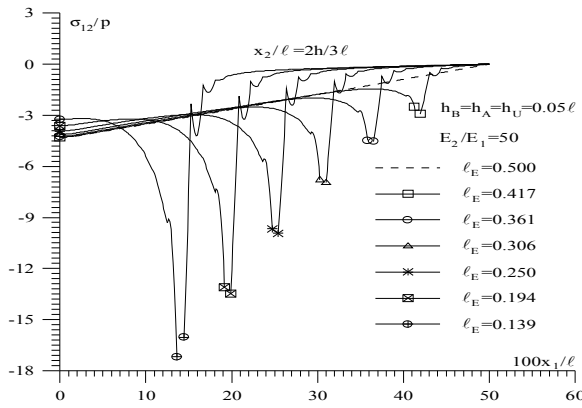
Şekil 2.33 Farklı ℓ_E değeri için σ_{22}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.



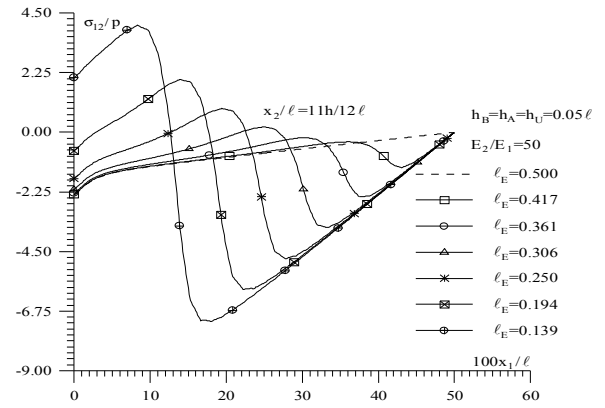
(a)



(b)



(c)

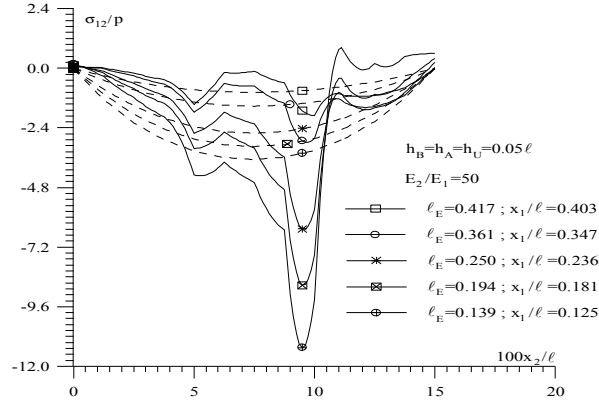


(d)

Şekil 2.34 Farklı ℓ_E değeri için σ_{12}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.

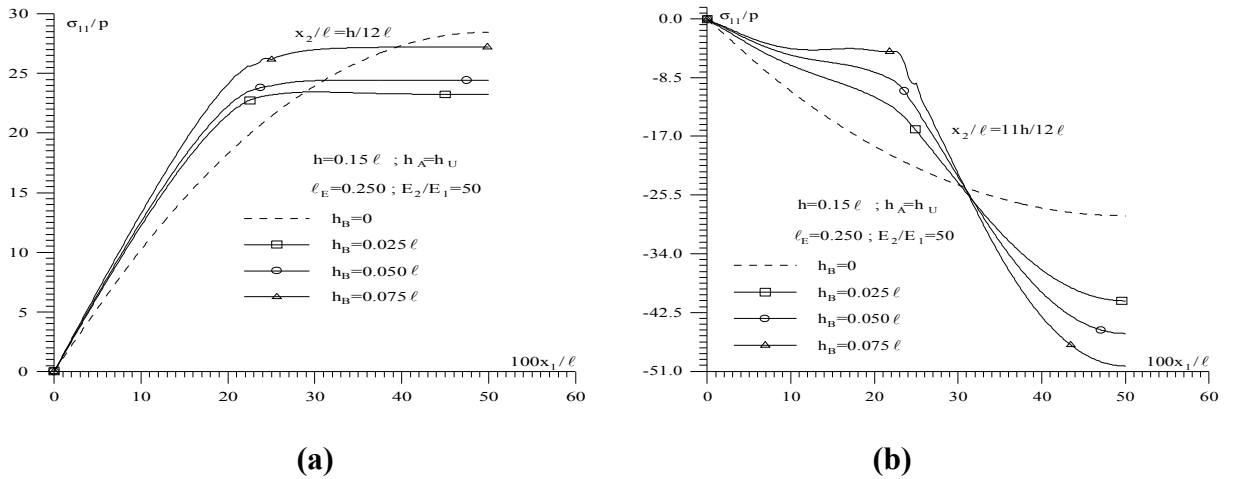
Şekil 2.34 de ℓ_E (dikdörtgen deliğin mesnetten uzaklığı) parametresinin farklı değerlerinde dört ayrı kesitte, delik olması ve olmaması durumunda σ_{12}/p gerilmesinin x_1/ℓ 'ye göre grafikleri verilmektedir. Grafiklerden görüldüğü gibi yapı elemanında dikdörtgen deliğin

olması ve büyüklüğü, diğer gerilme değerlerinde olduğu gibi σ_{12}/p gerilmesi dağılımına da güçlü şekilde etki göstermektedir. Bu etki yüklemeye yakın olan bölgede elde edilen gerilme değerleri, yüklemeye uzak olan bölgede elde edilen gerilme değerlerinden çok daha büyüktür. En küçük gerilme değerleri en küçük delik boyutunda ($\ell_E=0.417$ de) elde edilmektedir.



Şekil 2.35 Farklı ℓ_E değeri için σ_{12}/p gerilmesinin x_2/ℓ ye göre grafiği.

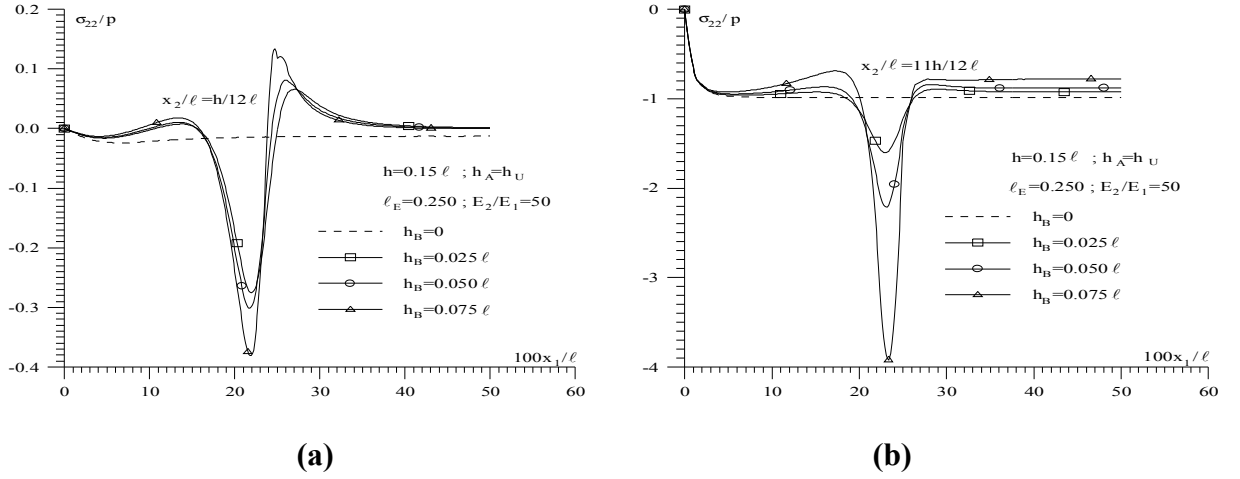
Şekil 2.35 de bu kez farklı ℓ_E parametresi değerlerinde ele alınan kesitte σ_{12}/p gerilmesinin x_2/ℓ 'ye göre grafikleri verilmektedir. Yine verilen grafiklerden, yüklemeye yakın olan delik ucu böldesi civarında en büyük gerilme yığılması şiddetinin elde edildiği görülmektedir. Fakat elde edilen gerilme yığılması şiddeti, ℓ_E (dikdörtgen deliğin mesnetden uzaklığı) parametresinin değeri arttıkça düşmektedir.



Şekil 2.36 Farklı h_B değeri için σ_{11}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/ℓ ye göre grafikleri.

Şekil 2.36 da ve Şekil 2.37 de farklı iki kesitte dikdörtgen deliğin kalınlığının (h_B) artmasının sırasıyla σ_{11}/p ve σ_{22}/p gerilmelerine etkisi verilmektedir. Deliğin altındaki kesitlerde elde edilen grafiklerden (Şekil 2.36a ve Şekil 2.37a) ve deliğin üstündeki bölgede

ele alınan kesitteki grafiklerden (Şekil 2.36b ve Şekil 2.37b) görüldüğü gibi h_B parametresinin artışı, diğer bir değişle delik altındaki ve üstündeki katı bölgenin kalınlığının düşmesi, her iki gerilme dağılımına etki göstermektedir, fakat bu etki yüklemeye yakın olan bölgede (deliğin üst kısmında) daha fazladır.



Şekil 2.37 Farklı h_B değeri için σ_{22}/p gerilmesinin farklı kesitlerde x_1/l ye göre grafikleri.

3. DİKDÖRTGEN DOLGU İÇEREN ŞERİT-LEVHALAR

3.1 Giriş

Yapı elemanlarının mekaniğinin incelenmesinde önemli bir sınıf problem de; bu yapı elemanının dolgu (inclusion) malzemesi içermesiyle meydana gelen problemlerdir. Dış yükleme etkisinde dolgu etrafında oluşan gerilme yığılmalarının incelenmesi, lineer elastisite teorisinin klasik problemlerinden olup, bu problemlerin araştırılması, kompozit malzemeler mekaniğinde kompozit malzemenin bileşenleri olan tanecik veya lif takviyelerin dolgu olarak ele alınması ve bu bileşenler etrafında oluşan gerilme yığılmalarının incelenmesi ile yüksek performanslı uygulamalar için kompozitlerin dizaynı açısından önemini daha da artırmıştır. Bu alanda yapılan deneysel ve teorik araştırmalar artarak devam etmektedir.

Literatürde bir başka açıdan dolgu problemleri, hasar onarımı şeklinde de ele alınmaktadır. Yapı elemanının içerdiği çatlak, boşluk vb. gibi hasarlar nedeniyle, bu elemanın işlevi sırasında tehlikeli durumların ortaya çıkmaması için, bu hasarların bir dolgu malzemesi ile doldurulması mümkün en iyi yol olarak teknolojiye sıkça kullanılmaktadır. Hatta malzeme tasarrufu gibi nedenlerle içi boşaltılan bazı yapı elemanlarının, bu boşlukların doğurabileceği olumsuz durumların ortadan kaldırılması için daha ekonomik bir malzeme ile doldurulması da yine sık rastlanılan bir durumdur.

Dolgu problemlerinin diğer bir temel uygulaması da yapıları veya bileşenlerini bir arada tutan, birleştiren perçinlerin dizaynlarıdır. Mura (1988)'e göre dolgu ile ilgili problemlerin inceleme alanlarının bir sınıflandırması; a) metalurji alanındaki uygulamalar (ortalama elastisite modülü, ortalama sıcaklık özellikleri gibi), b) elastik olmayan matris içerisinde dolguların davranışı, c) kompozitlerin kırılması (statik ve dinamik problemler) şeklinde verilmiştir. Bu alanlara ait 1982'den sonra yapılan çalışmaların özeti ve literatür listesi bu makaleden elde edilebilir.

3.2 Literatür Özeti

Tez konusu ile ilgili literatür araştırmasında, aşağıda verilmiş belirli çalışmalara rastlanılmıştır. Bu kısımda verilen yayınların hepsinde daire (küre) ya da elips (elipsoid) formunda dolgu geometrileri incelenmiştir. Oysa tez kapsamında dikdörtgen dolgu geometrik formu ele alınmıştır. Literatürde bu geometriye sahip dolgu ile ilgili hiçbir araştırmaya rastlanılmamıştır.

Wheeler (1985) de, gerilme yığılmasının minimizasyonu yardımıyla, sınırsız elastik matris içerisinde rijid bir dolgu için optimal formun belirlenmesine ait bir düzlem şekil değiştirme

problemi incelenmiştir.

Mura (1988), 1982'den sonra dolgular üzerine yayınlanan makalelerin incelemesini, mevcut problemlerin bir sınıflandırmasını yaparak vermiştir. Bu sınıflandırmaya göre, (1) ortalama elastik modül ve ortalama termik özellikleri; (2) elastik olmayan temel denklemler; (3) elastik olmayan ortamda dolguların davranışı; (4) dolguların gerilme yoğunluğu faktörüne etkisi; (5) kayıcı ve sabit dolgular; ve (6) dolguların dinamik etkileri'dir. Bu sınıflandırmaya dahil olan ve 1982'den sonra yapılmış bütün yayınlar ve kısa özetleri bu makalede bulunabilir.

Hwu ve Liao (1994) temel çözümleri birleştirerek düzlemsel veya düzlemsel olmayan yükleme kabulü ile izotrop veya anizotrop yapı elemanında birden fazla delik, çatlak ve dolguyu bir arada içeren levhanın çözümü için çok yönlü bir metod geliştirmişlerdir. Bu metodla problemleri, ele alınan sınır şartlarında çözmüşlerdir. Birden fazla delik, çatlak ve dolgunun gerilme yoğunluğuna etkilerini incelemişlerdir.

Song ve Kim (1995), dış yükleme altında gerilme üretici gibi davranarak yorulma çatlakları oluşturan dolgular civarındaki gerilme yığılmasını, sonlu eleman metodunu kullanarak analiz etmişlerdir. Yorulma mukavemetinin dolguların biçim ve ölçüsü ile dolgu aralarındaki mesafeden etkilendiği, özellikle dolgular arası mesafe küçükse gerilme etkileşimi nedeniyle tekilliğin oluştuğu ve yorulma çatlaklarının hızla çoğaldığını tespit etmişlerdir.

Hufenbach (1992) ile Hufenbach ve Kroll (1999) çentilmiş anizotrop levhaya birleştirilen dejenere olmuş elips şekiller için genişletilmiş analitik çözümler sunmuşlar ve sonuçların doğruluğunu hem sayısal hem de deneysel metodlarla kanıtlamışlardır.

Herrmann vd. (1999) de, dıştan yüklü iki boyutlu heterojen malzemelerde dolgu civarındaki yerel gerilme ve birim deformasyonları elde etmek için ayrık Fourier dönüşümlerinin (DFT) kullanılıp kullanılamayacağını incelemişlerdir.

Zheng ve Xu (1999), anizotrop cismin düzlem elastisite teorisinde, kompleks potansiyel metodu kullanılarak, Faber serisi açılımı ve en küçük kareler sınır kollakasyon tekniği yardımıyla yumuşak/sert elips dolgulu sonlu levhada, dolgular etrafında oluşan gerilme dağılımını verilen çekme ve kayma yüklemeleri için ayrı ayrı analiz etmişlerdir. Bu analizde çekme veya kayma yüklemelerine göre levhanın büyük kenar uzunluğunun elips dolgunun büyük eksen uzunluğuna oranının (w/a 'nın) ve dolgu ve levhanın eğilme rijidlikleri oranının (D_T 'nin) gerilme dağılımına etkilerini ayrıntılı olarak incelemişlerdir. Delikli veya sert dolgulu levhada w/a 'nın gerilme yoğunluğu faktörüne karakteristik etkiler yaptığını, gerilme yoğunluğu faktörünün w/a 'nın artışı ile azaldığını ve sonsuz levhanın sonuçlarına çok

yaklaştığını; yumuşak dolguda w/a 'nın gerilme yoğunluğu faktörüne etkisinin daha az olduğunu belirlemişlerdir.

Bert (2001), dolgudan uzak mesafelerde M_x ve M_y eğilme momentlerine maruz bırakılan dairesel elastik dolgu içeren ince izotrop levha için eğilme durumunu genelleştirerek kesin kapalı çözümü sunmuştur. Dairesel delik ve dolgu civarındaki levha (K_1) ve dolgunun (K_2) eğilme momenti gerilme yoğunluğu faktörlerini, dolgu ve levhanın eğilme rijidlikleri oranının ($D_2/D_1 = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ ve 3) bir fonksiyonu olarak, levhada ve dolguda dört farklı iki eksenli eğilme-momentleri oranı ($B = M_y/M_x = 0, 0.3, 1.0$ ve -1.0) için hesaplamıştır. Eğilme rijidlikleri oranı $D_2/D_1 = 0$ iken levha delik içerir ve $D_2/D_1 > 0$ olduğu zaman levha farklı rijidlikte dolgu içermektedir. $D_2/D_1 = 1$ iken malzeme homojendir yani malzeme süreksizliği yoktur. Dolgu rijidliği arttırıldığı zaman dolgudaki gerilme yoğunluğu faktörü K_2 artarken, levhadaki gerilme yoğunluğu faktörü K_1 'in düştüğünü belirlemiştir.

Chau ve Wei (2001)'de dairesel dolgu malzemesinin kuşatma çemberi adı verilen farklı bir malzeme ile sarmalandığı kabul edilmiştir. Kuşatma çemberi dairesel dolguya güçlendirme etkisi yapmıştır. Gerilme yığılması dolgu sınırında olduğundan sonsuz düzlemde kuşatılmış dairesel dolgunun sınırdaki gerilme yığılmasını azaltma etkisi analitik olarak incelenmiştir. Dolgudaki perçin kuvvetini üniform yayılı hacimsel kuvvet olarak kabul etmişlerdir. Böylece hacimsel kuvvet potansiyeli ile Airy gerilme fonksiyonu problemin analitik çözümünde kullanılmıştır. Sunulan çalışma sonuçları kuşatılmış perçin delik hesabı için yeni teorik bir temel oluşturmuştur.

Hufenbach ve Zhou (2001)'da anizotrop malzemeden yapılmış elips dolgu çentilmiş levhaya birleştirilmiştir. Bu durumda sınırlardaki normal gerilme ve yer değiştirmeler süreklilik şartlarıyla belirlenmiştir. Dış sınırdaki sınır şartlarından, iç sınırdaki geçiş şartlarından (transitional condition) belirlenecek gerilme ve yer değiştirme çözümlerini yapmak için levha ve dolgu arasında lineer elastisite, küçük deformasyonlar, düzlem gerilme durumu ve mükemmel adezyon kabul edilmiştir. Böylece iç sınırdan levha mesnedine kadar analitik olarak çözüm yapılmıştır. Mevcut bilinmeyenler ele alınan sınır şartlarında en küçük kareler metodu ve sınır kollakasyon metodunun birleştirilmesiyle yarı-analitik yolla yaklaşık olarak belirlenmiştir. İç basınç altında elips dolgulu sonlu elips levhanın ve eksantrik elips dolgulu kare levhanın iç ve dış sınırlarının gerilme yoğunluklarına etkisi incelenmiştir.

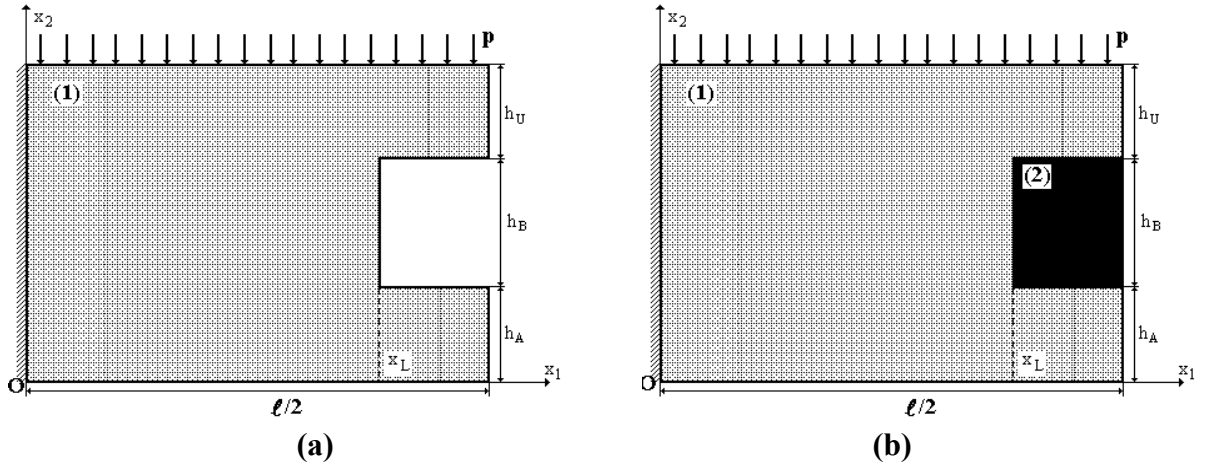
Yahnioğlu ve Mermer Yücel (2002)'de, dikdörtgen delik ve dolgu malzemesi içeren, karşılıklı

iki kenarından ankastre mesnetli şerit-levhanın üst yüzeyinde bulunan düzgün yayılı yük etkisinde yapısında oluşan gerilme yayılımı incelenmiştir. Ele alınan problem, elastisite teorisinin kesin denklemleri kullanılarak parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde sayısal olarak sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla çözülmüştür. Delik veya dolgu malzemesinin geometrik ve malzeme parametrelerinin şeritte oluşan gerilme yayılımına etkileri incelenmiştir.

3.3 Dikdörtgen Dolgu İçeren Anizotrop Şerit-Levhanın Eğilmesi Problemi

3.3.1 Ele Alınan Problemlerin Matematiksel Modeli

Levhaya bağlı ve Şekil 3.1 de gösterilen Ox_1x_2 koordinat takımı ele alalım ve levhanın geometrik boyutlarını Şekil 3.1 de gösterildiği gibi kabul edelim. $x_1 = \ell/2$ ye göre problem simetrisi göz önüne alınarak, Şekil 3.1'de levhanın $\{0 \leq x_2 \leq h; 0 \leq x_1 \leq \ell/2\}$ ($h = h_A + h_B + h_U$) bölgesini kapsayan kısmı gösterilmiştir.



Şekil 3.1 a) Boşluk içermesi durumunda, b) Dolgu malzemesi içermesi durumunda ele alınan şerit-levhanın geometrisi.

Levhanın kapsadığı tüm bölgede sağlanan denge denklemleri:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2; \quad k = 1, 2 \quad (3.1)$$

bünye denklemleri:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} &= (\lambda_k + 2\mu_k)\epsilon_{11}^{(k)} + \lambda_k\epsilon_{22}^{(k)} \\ \sigma_{22}^{(k)} &= \lambda_k\epsilon_{11}^{(k)} + (\lambda_k + 2\mu_k)\epsilon_{22}^{(k)} \\ \sigma_{12}^{(k)} &= 2\mu_k\epsilon_{12}^{(k)} \end{aligned} \right\}; \quad k=1,2 \quad (3.2)$$

ve geometrik bağıntılar;

$$\epsilon_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_i} \right); \quad k=1,2 \quad (3.3)$$

dır. Yukarıdaki denklemlerde bilinen gösterimler kullanılmıştır ve üst indis (1) dikdörtgen delik veya dolgu malzemesini saran malzemeye ait büyüklükleri, üst indis (2) dolgu malzemesine ait büyüklükleri göstermektedir. (3.2)'de λ_k ve μ_k Lamé sabitleridir (Akbarov ve Guz, 2000).

Sınır koşullarının matematiksel ifadesi:

$$u_1^{(1)} \Big|_{x_1=0; \ell}^{x_2 \in [0, h]} = u_2^{(1)} \Big|_{x_1=0; \ell}^{x_2 \in [0, h]} = 0; \quad \sigma_{i2}^{(1)} \Big|_{x_2=0} = 0; \quad \sigma_{i2}^{(1)} \Big|_{x_2=h} = p\delta_{i2}; \quad i=1,2 \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1^{(1)} \Big|_{x_1=x_L; \ell-x_L}^{x_2 \in [h_A, h_A+h_B]} &= u_1^{(2)} \Big|_{x_1=x_L; \ell-x_L}^{x_2 \in [h_A, h_A+h_B]}; \quad u_1^{(1)} \Big|_{x_1 \in [x_L, \ell-x_L]}^{x_2=h_A; h_A+h_B} = u_1^{(2)} \Big|_{x_1 \in [x_L, \ell-x_L]}^{x_2=h_A; h_A+h_B}; \\ \sigma_{1i}^{(1)} \Big|_{x_1=x_L; \ell-x_L}^{x_2 \in [h_A, h_A+h_B]} &= \sigma_{1i}^{(2)} \Big|_{x_1=x_L; \ell-x_L}^{x_2 \in [h_A, h_A+h_B]}; \quad \sigma_{2i}^{(1)} \Big|_{x_1 \in [x_L, \ell-x_L]}^{x_2=h_A; h_A+h_B} = \sigma_{2i}^{(2)} \Big|_{x_1 \in [x_L, \ell-x_L]}^{x_2=h_A; h_A+h_B} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

biçiminde olur. Yukarıdaki ifadelerde bilinen gösterimler kullanılmıştır. Ayrıca (3.4) 'de δ_{ij} Kronecker sembolüdür. Böylece ele alınan sınır değer probleminin matematiksel formülasyonu: Dikdörtgen dolgu olması durumunda (3.1)-(3.5) denklemleriyle ifade edilmektedir.

3.3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modelleme

Bu kısımda ele alınan problemin sonlu eleman modellemesi kısım 2.3.2 'de verildiği gibi yapılacaktır. Ancak (2.5) fonksiyoneli yerine

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_I} \sigma_{ij}^{(1)} \epsilon_{ij}^{(1)} dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \iint_{\Omega_{II}} \sigma_{ij}^{(2)} \epsilon_{ij}^{(2)} dx_1 dx_2 - \int_S p_i^{(1)} u_i^{(1)} dS_I \quad (3.6)$$

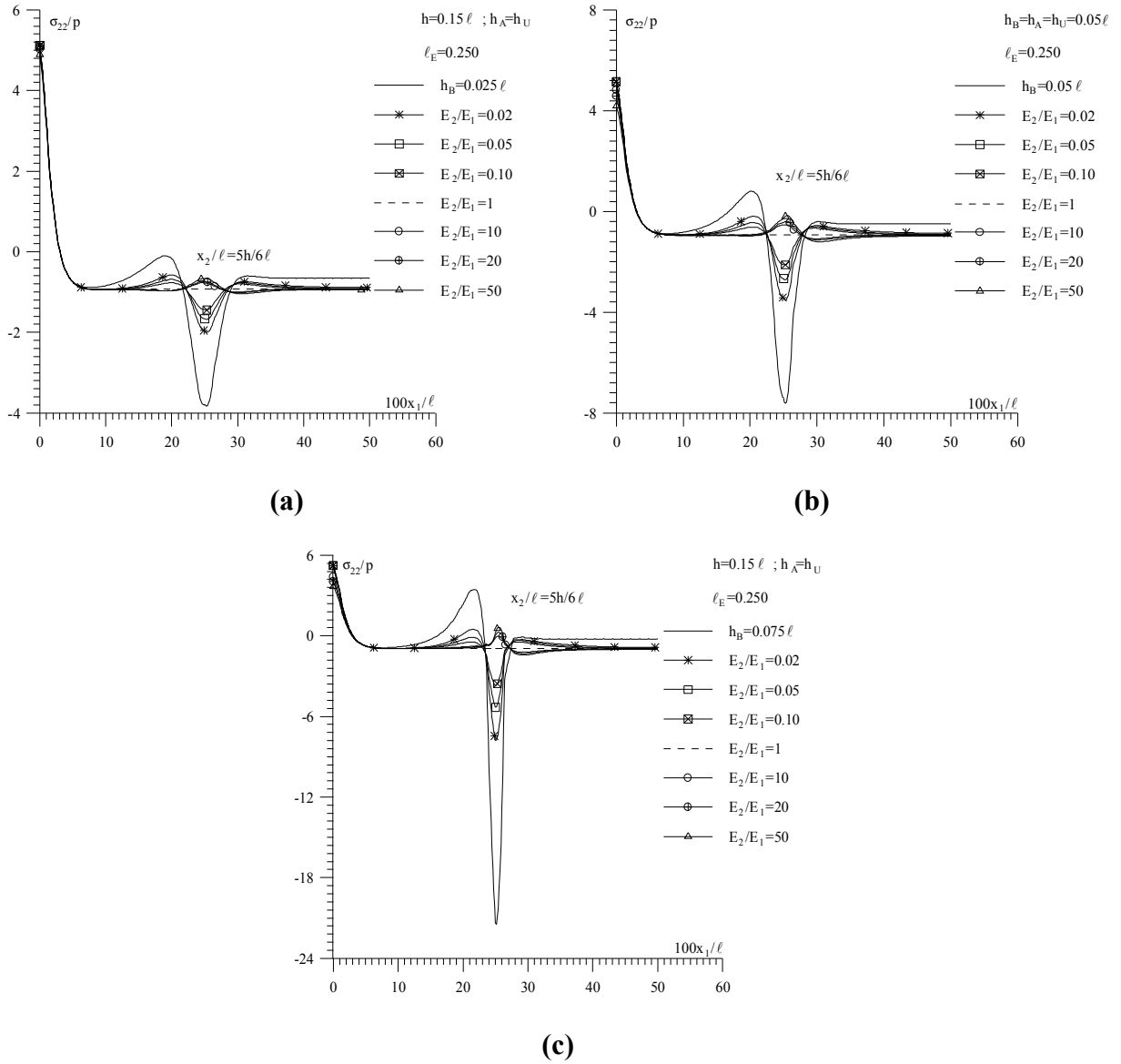
fonksiyoneli kullanılacaktır. Burada $\Omega_{II} = \{x_L \leq x_1 \leq \ell - x_L; h_A \leq x_2 \leq h_A + h_O\}$ dolgunun bulunduğu bölgeyi, $\Omega_I = \Omega - \Omega_{II}$ ($\Omega = \{0 \leq x_1 \leq \ell; 0 \leq x_2 \leq h\}$) dolgunun dışındaki bölgeyi, S, Ω bölgesinin dış sınırını göstermektedir. (3.6) ifadesinde üst indis 2 ile ilgili büyüklükler dolguya, üst indis 1 ile ilgili büyüklükler dolguyu çevreleyen bölgeye ait büyüklükleri göstermektedir. Bundan sonraki sonlu eleman formülasyonunda her iki bölgenin (Ω_I ve Ω_{II}) ayrıklaştırılması ile şekil fonksiyonu seçimi ve sonraki bütün işlemler kısım 2.3.2 'de verildiği gibi yapılmıştır.

3.3.3 Sayısal Sonuçların İncelenmesi

Ele alınan şerit-levhanın dikdörtgen deliği veya dolgu malzemesini saran malzeme ile dolgu malzemesinin izotrop olduğunu kabul edelim. Bu malzemelerin sırayla Lamé sabitlerini $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$; Young modüllerini E_1, E_2 ; Poisson oranlarını ν_1, ν_2 ile gösterelim.

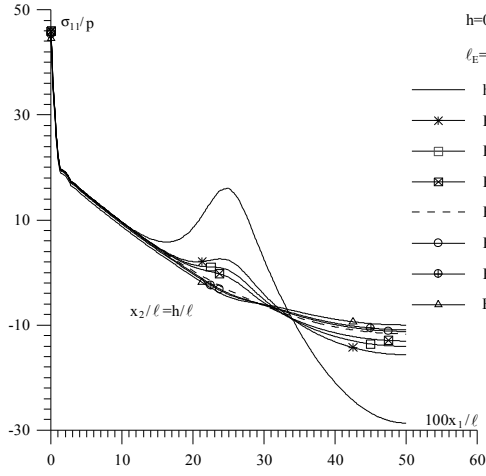
Çözüm bölgesi x_1 yönünde 72, x_2 yönünde 12 dikdörtgen sonlu eleman olacak şekilde ayrıklaştırılmıştır. Yapısında delik olmadığı durumda ve simetri özelliğinden yararlanarak sonlu eleman modellemesi; 432 sonlu eleman, 1825 düğüm noktası ve 3575 serbestlik derecesi içermektedir. Parametrelerin değerleri grafikler üzerinde verilmiştir.

Şekil 3.2 'de dolgu malzemesinin veya boşluğun üç farklı kalınlığı için elastisite modülü değişimi incelenmiştir. Grafiklerden görüldüğü gibi yapı elemanının içerdiği delik ya da dolgu malzemesinin sivri köşeleri olan kısımlarda gerilme yığılmaları nedeniyle, gerilme değerleri hızla artmaktadır. Şekil 3.2a 'da $h_B = 0,025\ell$, Şekil 3.2b 'de $h_B = 0,050\ell$ ve Şekil 3.2c 'de $h_B = 0,075\ell$ olarak dolgu malzemesi kalınlığı alınmıştır. Grafiklerden görüldüğü üzere her birinde E_2/E_1 oranı arttıkça σ_{22}/p gerilmesinin değerleri artmakta ve dolgu malzemesinin kalınlığının artmasına bağlı olarak bu artışlar köşe noktaları civarında daha da büyümektedir. Ayrıca dolgu malzemesi yerine aynı ölçülerde yapı elemanının boşluk içermesi durumunda delik ucu bölgesi civarında en büyük gerilme değerleri elde edilmektedir. Dolgu malzemesinin elastisite modülü (E_2) onu saran malzemenin elastisite modülünden (E_1 'den) daha küçük alındığı durumlarda gerilme yayılımı bu malzemenin boşluk içermesi durumuna karşı gelen gerilme yayılımına yaklaşmaktadır. Aksi durumda, yani E_2 değeri E_1 değerinden büyük olduğu durumlarda gerilme yayılımı önceki durumlara göre önemli ölçüde mutlak değerce düşmektedir.

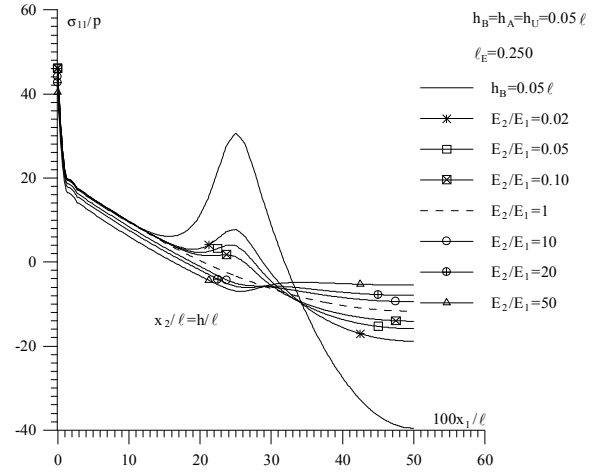


Şekil 3.2 σ_{22}/p gerilmesinin farklı elastisite modülü oranlarında a) $h_B = 0.025\ell$ durumunda; b) $h_B = 0.05\ell$ durumunda; c) $h_B = 0.075\ell$ durumunda x_1/ℓ ye göre grafikleri.

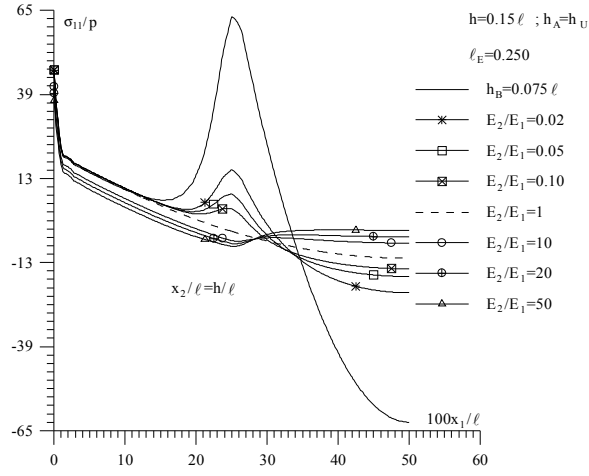
Şekil 3.2 'de σ_{22}/p için elde edilen etkiler benzer şekilde Şekil 3.3 de σ_{11}/p gerilmesi yayılımında görülmektedir. Yani grafiklerin her birinde E_2/E_1 oranı arttıkça σ_{11}/p gerilmesinin değerleri dolgu malzemesinin kalınlığının artmasıyla birlikte artmakta ve köşe noktaları civarında en büyük değerlerine ulaşmaktadır. Bundan başka en büyük gerilme değerleri yapı elemanının boşluk içermesi durumunda elde edilmektedir. Bu gerilme yayılımına dikdörtgen dolgulu yapı elemanı E_2/E_1 oranı küçüldükçe yaklaşmaktadır.



(a)

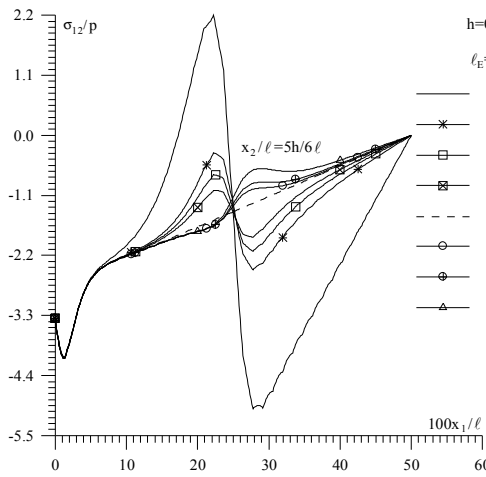


(b)

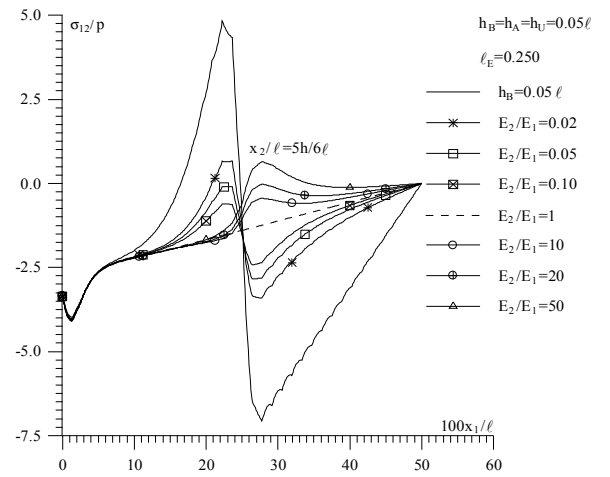


(c)

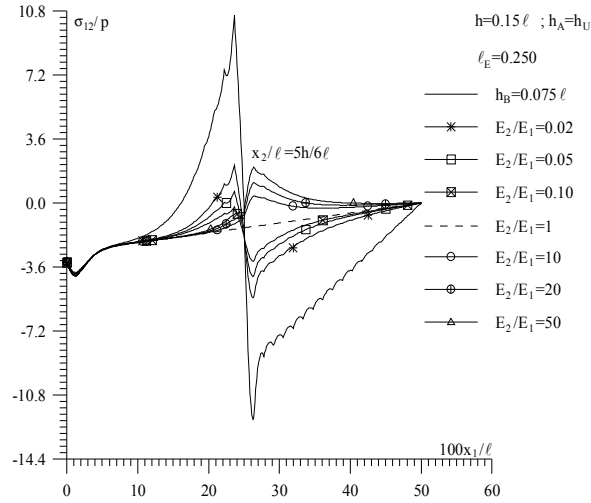
Şekil 3.3 σ_{11}/p gerilmesinin farklı elastisite modülü oranlarında a) $h_B = 0.025\ell$ durumunda; b) $h_B = 0.05\ell$ durumunda; c) $h_B = 0.075\ell$ durumunda x_1/ℓ ye göre grafikleri.



(a)



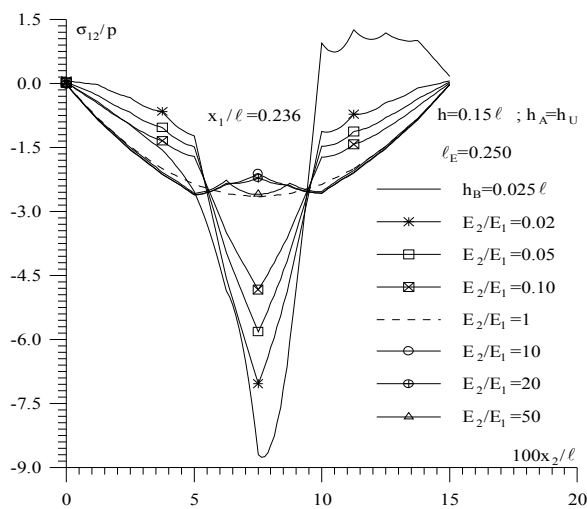
(b)



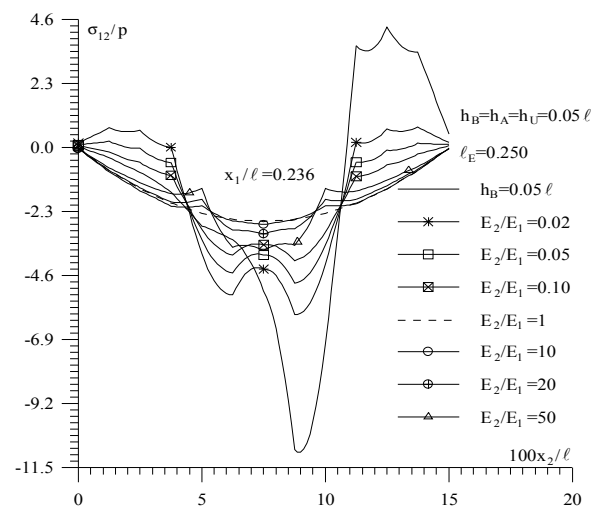
(c)

Şekil 3.4 σ_{12}/p gerilmesinin farklı elastisite modülü oranlarında a) $h_B = 0.025\ell$ durumunda; b) $h_B = 0.05\ell$ durumunda; c) $h_B = 0.075\ell$ durumunda x_1/ℓ ye göre grafikleri.

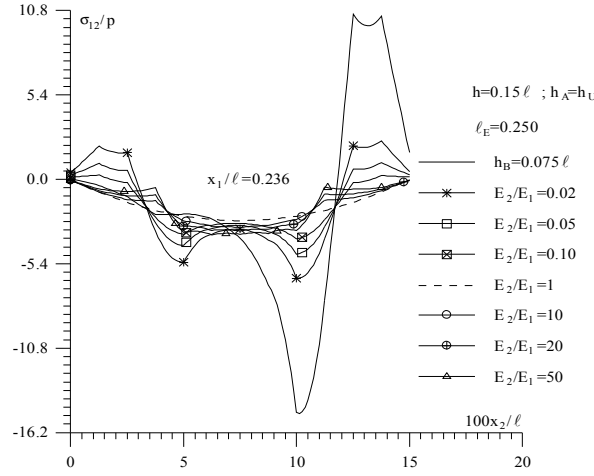
Şekil 3.4 de dolgu malzemesinin ve boşluğun üç farklı kalınlık değerinde E_2/E_1 oranı değişimi incelenmiştir. Daha önceki gerilme yayılımlarında da olduğu gibi dikdörtgen delik ya da dolgu kalınlığı arttıkça σ_{12}/p gerilmesi değerleri şiddetçe artmaktadır. Dolgu malzemesinin elastisite modülü (E_2), dolguyu saran malzemenin elastisite modülü (E_1) 'nden küçük alındığında gerilme değerleri boşluk için elde edilen gerilme değerlerine asimtotik olarak yaklaşmaktadır, aksi durumda gerilme değerleri mutlak değerce önemli ölçüde düşmektedir.



(a)



(b)

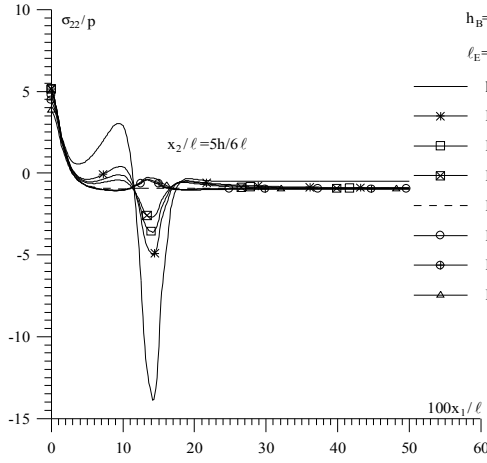


(c)

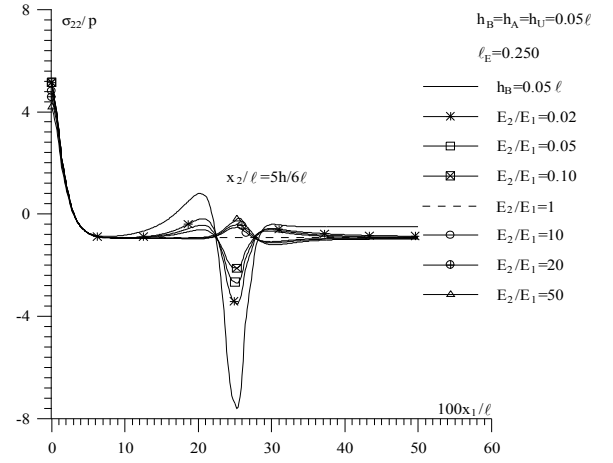
Şekil 3.5 σ_{12}/p gerilmesinin farklı elastisite modülü oranlarında a) $h_B = 0.025\ell$ durumunda; b) $h_B = 0.05\ell$ durumunda; c) $h_B = 0.075\ell$ durumunda $x_1/\ell = 0.236$ kesitinde x_2/ℓ ye göre grafikleri.

Şekil 3.5 de dolgu malzemesinin ve boşluğun üç farklı kalınlık değerinde E_2/E_1 oranı değişiminin σ_{12}/p gerilmesi dağılımına etkisinin x_2/ℓ 'ye göre grafikleri verilmiştir. Bu grafiklerden, en büyük gerilme değerinin yine yüklemeye yakın olan delik ucu bölgesi civarında olduğu ve delik ya da dolgu kalınlığının artması ile gerilme yığılması şiddetinin arttığı görülmektedir. Yine, dolgu malzemesinin elastisite modülü (E_2), dolguyu saran malzemenin elastisite modülü (E_1) 'nden küçük alındığında gerilme değerleri boşluk için elde edilen gerilme değerlerine asimtotik olarak yaklaşmaktadır.

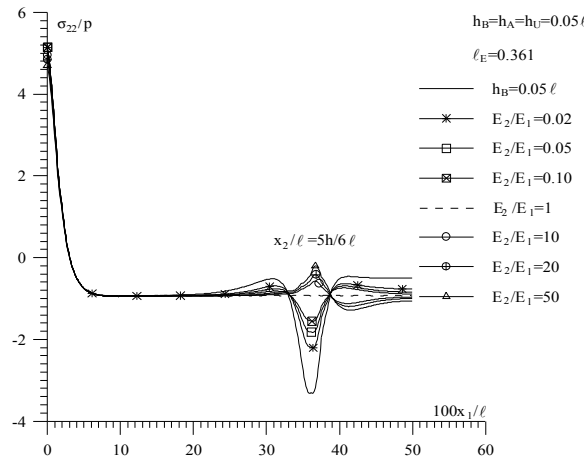
Şekil 3.6 'da dolgu malzemesinin sabit kalınlığı ve bu dolgu malzemesinin farklı x_1 yönündeki üç uzunluğu için elastisite modül oranının değişimi incelenmiştir. Dolgu malzemesinin elastisite modülü (E_2), onu saran malzemenin elastisite modülünden (E_1 'den) küçük olduğu durumlarda aynı malzemenin aynı ölçülerde delik içermesi durumundan elde edilen gerilme yayılımına yakın değerler elde edilmektedir. σ_{22}/p gerilmesi yayılımında delik ucu bölgesi civarında gerilme değerleri herhangi bir delik ya da dolgu malzemesi içermemesi durumundaki gerilme değerlerinden önemli ölçüde farklanmaktadır. Bu durum dolgu malzemesinin x_1 yönündeki uzunluğu arttıkça yani sınır bölgelerine yaklaştıkça (Şekil 3.6a), sınır koşullarının etkisiyle gerilme yığılmaları daha da büyümektedir. Dolgu malzemesinin x_1 yönündeki boyutu küçüldükçe (Şekil 3.6c) gerilme şiddetleri de azalmaktadır.



(a)

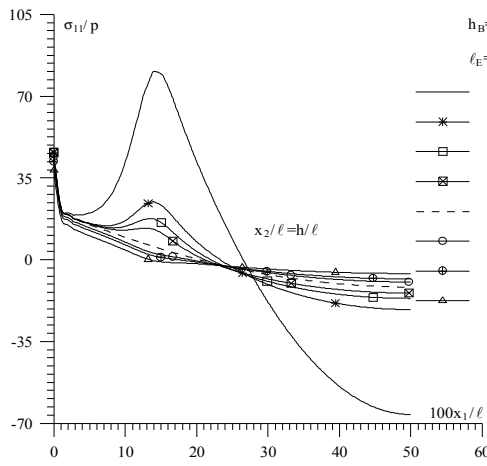


(b)

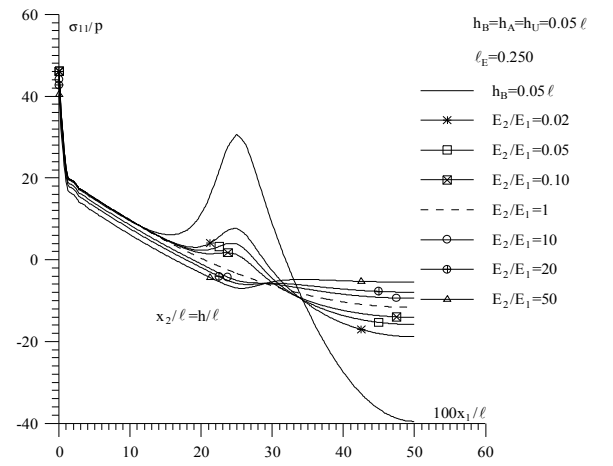


(c)

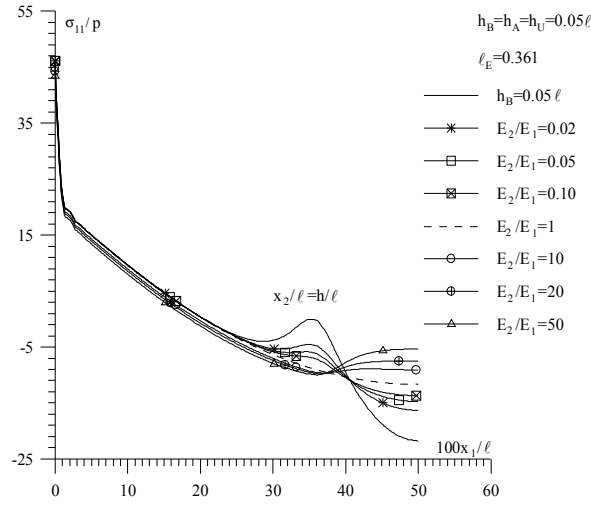
Şekil 3.6 σ_{22}/p gerilmesinin farklı elastisite modülü oranlarında a) $l_E = 0.139$ durumunda; b) $l_E = 0.250$ durumunda; c) $l_E = 0.361$ durumunda x_1/l ye göre grafikleri.



(a)



(b)

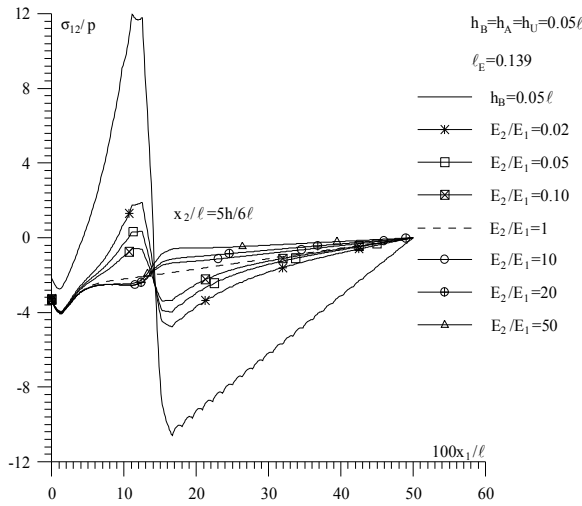


(c)

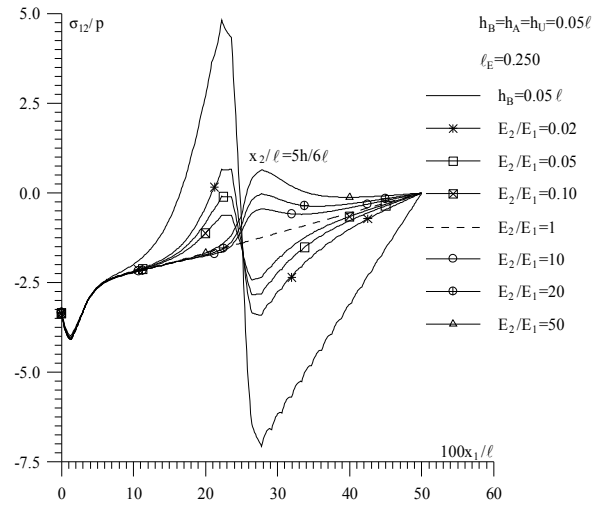
Şekil 3.7 σ_{11}/p gerilmesinin farklı elastisite modülü oranlarında a) $\ell_E = 0.139$ durumunda;

b) $\ell_E = 0.250$ durumunda; c) $\ell_E = 0.361$ durumunda x_1/ℓ ye göre grafikleri.

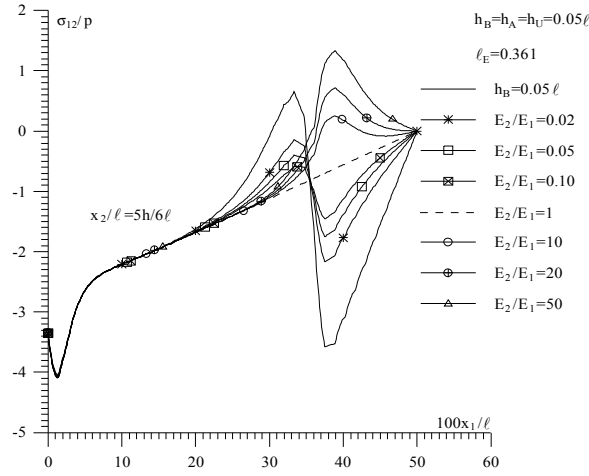
Şekil 3.6 'da σ_{22}/p için elde edilen etkiler benzer şekilde Şekil 3.7 'de σ_{11}/p gerilmesi yayılımında görülmektedir. Şekil 3.7 'de σ_{11}/p gerilmesi yayılımında dolgu malzemesinin x_1 yönündeki uzunluğu sınır bölgelerine yaklaştıkça (Şekil 3.7a), sınır koşullarının etkisiyle gerilme şiddetleri daha da büyümektedir. Dolgu malzemesinin x_1 yönündeki uzunluğu sınır bölgelerine uzaklaştıkça (Şekil 3.7c) gerilme yığılmaları da azalmaktadır.



(a)



(b)



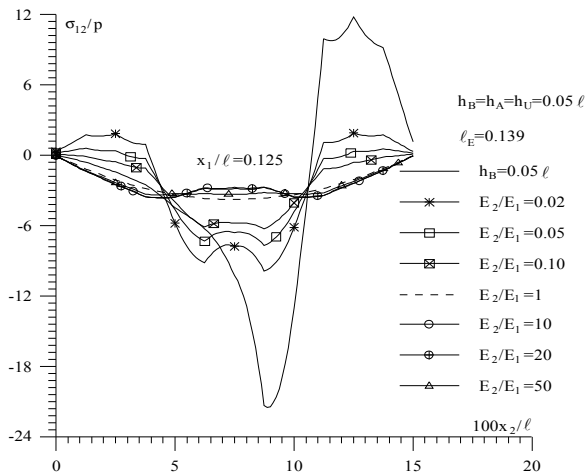
(c)

Şekil 3.8 σ_{12}/p gerilmesinin farklı elastisite modülü oranlarında a) $\ell_E = 0.139$ durumunda;

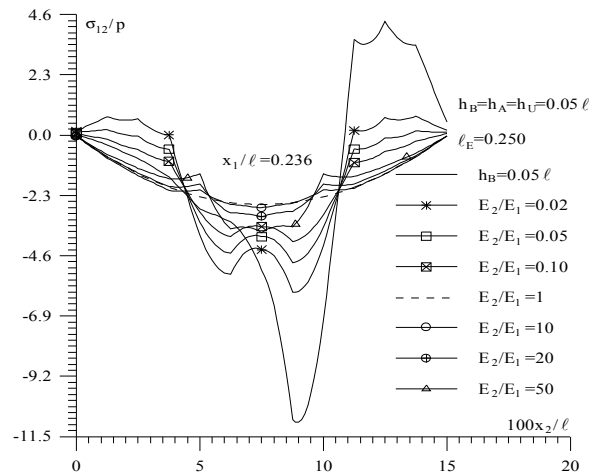
b) $\ell_E = 0.250$ durumunda; c) $\ell_E = 0.361$ durumunda x_1/ℓ ye göre grafikleri.

Şekil 3.8 de dolgu/deliğin sabit kalınlığı fakat üç farklı ℓ_E parametresi değerinde elastisite modül oranı değişimi için σ_{12}/p gerilmesinin yayılımı verilmektedir. Bu grafiklerden görüldüğü gibi, ℓ_E parametresinin en büyük değerinde en büyük gerilme değeri elde edilmektedir. Diğer grafiklerde verilen özellik (E_2 nin E_1 'den küçük alındığında gerilme değerleri boşluk için elde edilen gerilme değerlerine asimtotik olarak yaklaşmaktadır) bu grafikler içinde aynen geçerlidir.

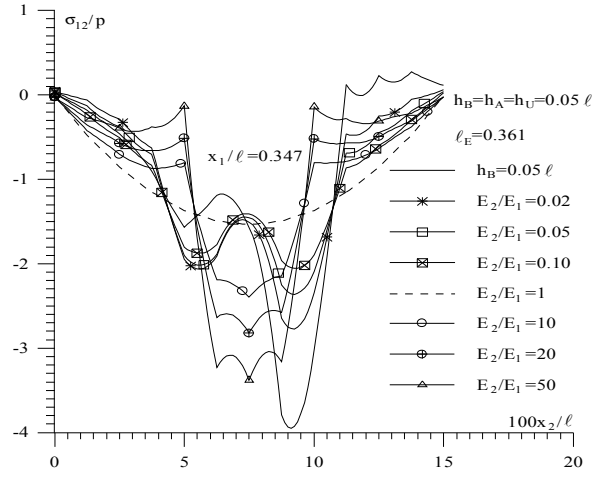
Şekil 3.9 da, Şekil 3.8 de verilen gerilmelerin bu kez x_2/ℓ ye göre grafikleri verilmektedir. Bu grafiklerden de en büyük delik boyutunda en büyük gerilme değerlerinin elde edildiği görülmektedir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 3.9 σ_{12}/p gerilmesinin farklı elastisite modülü oranlarında a) $\ell_E = 0.139$ durumunda; b) $\ell_E = 0.250$ durumunda; c) $\ell_E = 0.361$ durumunda farklı x_1/ℓ kesitlerinde x_2/ℓ ye göre grafikleri.

4. DİKDÖRTGEN DELİK İÇEREN ÖNGERİLMELİ ŞERİT-LEVHA

4.1 Giriş

Yapı elemanı bileşenlerinin gereken uzunluktan kısa ya da uzun olması durumunda, bu bileşenlerin zorla birbirine tutturulması nedeniyle, istemeyerek, yapı elemanında iç gerilmeler oluşturulmuş olunur. Henüz hiç bir yükleme yapılmadan sadece montaj esnasında oluşan bu iç gerilmelere *öngerilme* denir. Bu öngerilmeler belirli bir değeri aşmadığı müddetçe tehlikeli durumlar yaratmaz, aksi halde yapı elemanında ezilme, kopma gibi durumların ortaya çıkmasına neden olurlar.

Bunun dışında teknolojiye öngerilmeler, bazı durumlarda avantaj sağlamak amacıyla, yapı elemanında isteğe bağlı olarak oluşturulurlar. Örneğin eğilmeye karşı, çekme iç gerilmesi olan bir elemanın mukavemetinin daha fazla olması gibi. Bu tür uygulamalar uygun bileşenlerin mukavemetini artırıcı olarak askeri malzemelerde (çeşitli zırhlar) ve çeşitli makine parçalarının kaplamalarında kullanılmaktadır. Bu nedenlerle, öngerilmeli yapı elemanı ya da bileşenlerinin, bu öngerilmeye bağlı olarak mekanik özelliklerinin önceden belirlenmesinde mühendislik ve tasarım açısından büyük yarar vardır.

Literatürde bu konuda mevcut teorik araştırma çok kısıtlı olup ancak basit durumlarda ele alınabilmiştir. Örneğin, belirli formda delik içeren bir yapı elemanında, dış yükler etkisinde delik civarında oluşacak olan gerilme yığılmalarına, ön gerilmenin nasıl etki gösterdiğini ortaya çıkaran şu ana kadar hiç bir araştırmaya rastlanılmamıştır. Bu tür araştırmaların mühendislik açısından pratikte çok önemi vardır ve bu durumlarda, daha önce yapılan çalışmalarda, klasikte uygulanan süperpozisyon yönteminden, yani öngerilmelerin ve yükün ayrı ayrı etkimleri durumunda klasik teoriden elde edilen çözümlerin süperpozisyonundan yararlanılmaktadır. Oysa süperpozisyon yöntemi ancak lineer durumlarda yani, meydana gelen olaylar lineer denklemlerle yazılabildiği durumlarda geçerlidir.

Çoğunlukla öngerilmelerin olduğu durumlarda, bunların etkisinin göz önüne alınabilmesi ve incelenebilmesi çok zor, hatta bazen imkansız olan lineer olmayan sınır değer problemleriyle karşılaşılır. Ancak öngerilmelerin ortamdaki yükün etkisinden dolayı oluşan gerilmelerden değerce çok büyük olması durumunda, bu olaylar söz konusu lineer olmayan denklemlerin lineerleştirilmesi ile incelenebilir. Böyle durumlarda lineerleştirilen denklemlerde öngerilmeler sıfır alındığında klasik alan denklemleri elde edilmektedir. Verilenler açısından tezde bu kısımda yapılan araştırmalar, ele alınan yüklemede öngerilmenin, delik içeren şerit-levhadaki gerilme yığılmasına etkilerinin incelenmesi ilk teşebbüsleri oluşturmaktadır.

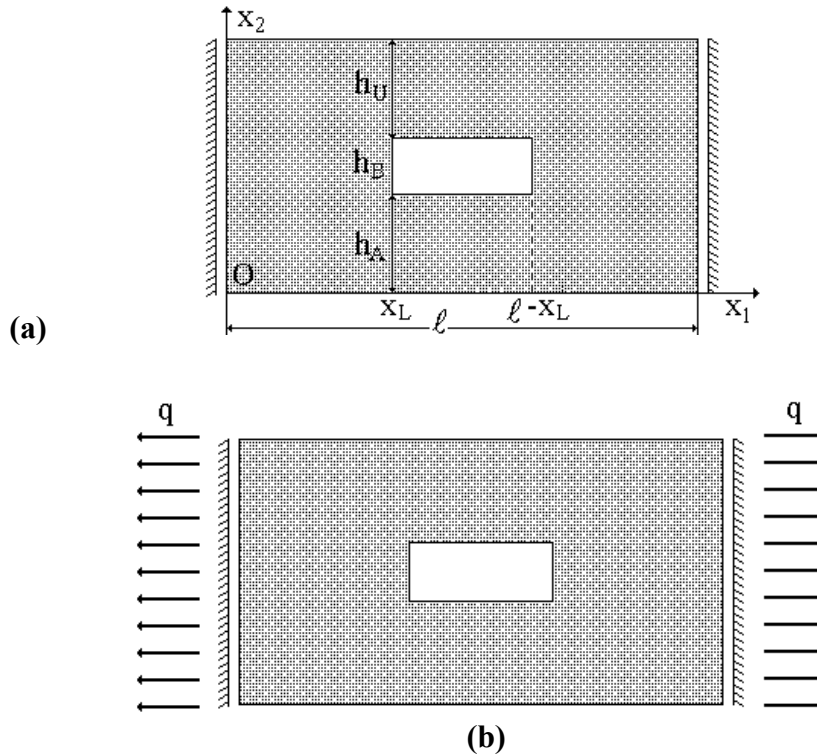
4.2 Literatür Özeti

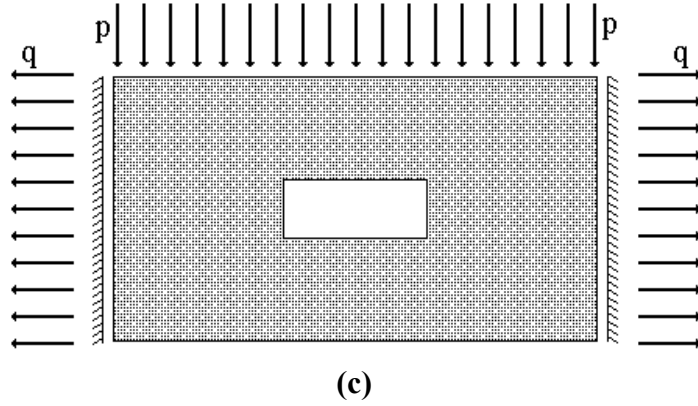
Literatürde önerilmeli yapı elemanlarına ait çok az sayıda yayına rastlanmıştır. Bu konudaki ilk teorik temeller Biot (1965) ve Guz (1983a) tarafından yapılmıştır. Yapılan çalışmalarda bulunan sonuçlar Guz (1983a) 'un kitabında yer almaktadır. Çatlak içeren ortamlarda (sonsuz düzlemde ve üçboyutlu uzayda), çatlak boyunca çekme veya basınç önerilmesi verildiğinde çatlak kenarlarına etki gösteren kuvvetlerden dolayı ortaya çıkan gerilme yığılmalarına ve Gerilme Yığılması Şiddeti (SIF) 'ne ait araştırmalar Guz (1983a) 'da verilmiştir. Adı geçen araştırmaların geniş özetleri Guz (1983b), (1990), (1992), (1996a), (1996b) makalelerinde ve Guz (1999) kitabında da verilmektedir.

4.3 Dikdörtgen Delik İçeren Anizotrop Şerit-Levhanın Eğilmesi Problemi

4.3.1 Ele Alınan Problemin Matematiksel Modeli

Ele alınan şerit-levhanın geometrisi Şekil 4.1a da görüldüğü gibidir, problemin çözüm bölgesi olan bu taralı geometrik bölgeyi Ω ile işaret edelim. Dikdörtgen delik içeren önerilmeli şerit levhaya ait ele alınan problemin matematiksel modeli iki aşamalı olarak verilecektir.





Şekil 4.1 Ele alınan yapı elemanının a) yüksüz durumu ($\sigma_{ij} = 0$, $\epsilon_{ij} = 0$), b) öngerilmeli

durumu ($\sigma_{ij}^{(0)} \neq 0$, $\epsilon_{ij}^{(0)} \neq 0$), c) öngerilme ve üstten yüklenmesi durumu

$$(\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}(\sigma_{ij}^{(0)}), \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(0)} + \epsilon_{ij}^{(1)}(\epsilon_{ij}^{(0)})).$$

Birinci aşamada; şerit-levhanın karşılıklı iki kenarından basit mesnetle tutturularak Şekil 4.1b 'de gösterildiği gibi, yoğunluğu q olan düzgün yayılı yüklerle çekilmesi ve bu çekmeden dolayı oluşan gerilmelerin yani, öngerilmelerin bulunması, ikinci aşamada ise (Şekil 4.1c), bu öngerilmeli şeritin üst yüzeyine yoğunluğu p olan düzgün yayılı yükün etkisinden dolayı oluşan gerilmelerin $p \ll q$ varsayımı altında belirlenmesidir. Amaç, ikinci aşamadaki yüklemekten dolayı oluşan gerilmelere adı geçen öngerilmelerin nasıl etki edeceğinin incelenmesidir.

Nonlinear alan denklemlerinin lineerleştirilmesi:

Lineer elastik bir cisimde geometrik lineer olmayan alan denklemleri, küçük şekil değiştirme halinde izotrop, homojen ortamlar için;

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} [\sigma_{jn} (\delta_i^n + u_{i,n})] &= 0 \\ \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{n,i} u_{n,j}) \\ \sigma_{ij} &= \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \\ \sigma_{jn} (\delta_i^n + u_{i,n}) n_j &= p_i \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

şeklinde yazılır (Green ve Adkinson (1960)). Burada $\delta_i^j = \delta_{ij}$ Kronecker sembolü,

$(\cdot)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot)$ ve x_i 'ler Lagrange koordinatlarıdır. (4.1) eşitliklerinde

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(0)}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(0)}, \quad u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(0)} \quad (4.2)$$

yazılarak, $p \ll q$ olduğuna göre,

$$\sigma_{ij}^{(1)} \ll \sigma_{ij}^{(0)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} \ll \varepsilon_{ij}^{(0)}, \quad u_i^{(1)} \ll u_i^{(0)} \quad (4.3)$$

eşitsizliklerinin sağlandığı kabul edilecektir. $\sigma_{ij}^{(0)}$, $\varepsilon_{ij}^{(0)}$, $u_i^{(0)}$ büyüklükleri için klasik lineer elastisite teorisinin alan denklemlerinin sağlandığı kabul edilecektir. Burada $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, $u_i^{(1)}$ 'ler yüzeydeki yoğunluğu p olan düzgün yayılı yüklemenden dolayı oluşan gerilme tansörü bileşenleridir. $\sigma_{ij}^{(0)}$, $\varepsilon_{ij}^{(0)}$, $u_i^{(0)}$ 'ler ise şerit-levha kenarlarından basit mesnetle tutturularak, düzgün yayılı q yükü ile çekildiğinde oluşan gerilme, şekil değiştirme ve yer değiştirme bileşenlerini göstermektedir. (4.2) eşitliği (4.1) de kullanılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\sigma_{jn}^{(1)} + \sigma_{jn}^{(0)}) (\delta_i^n + u_{i,n}^{(1)} + u_{i,n}^{(0)}) \right] = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn}^{(0)} (\delta_i^n + u_{i,n}^{(0)}) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{jn}^{(1)} \delta_i^n + \sigma_{jn}^{(1)} u_{i,n}^{(1)} + \sigma_{jn}^{(1)} u_{i,n}^{(0)} + \sigma_{jn}^{(0)} u_{i,n}^{(1)} \right) = 0 \quad (4.5)$$

bulunur. (4.3) ile verilen ve $u_{i,n}^{(0)} \ll 1$, $\delta_{in} + u_{i,n}^{(0)} \approx \delta_{in}$ eşitsizlikleri yukarıdaki kabuller

çerçevesinde düzenlenir ve $\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn}^{(0)} (\delta_i^n + u_{i,n}^{(0)}) \right] = \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} = 0$ olduğuna göre (4.5) den,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{jn}^{(1)} u_{i,n}^{(1)} + \sigma_{jn}^{(1)} u_{i,n}^{(0)} + \sigma_{jn}^{(0)} u_{i,n}^{(1)} \right) = 0 \quad (4.6)$$

eşitliği elde edilir. Burada, diğerlerine göre bir mertebe küçük $(\sigma_{jn}^{(1)} u_{i,n}^{(1)})$ terimler ihmal edilirse,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{jn}^{(1)} (\delta_i^n + u_{i,n}^{(0)}) + \sigma_{jn}^{(0)} u_{i,n}^{(1)} \right) = 0 \quad (4.7)$$

bulunur ve incelenen durumda $\delta_{in} + u_{i,n}^{(0)} \approx \delta_{in}$ olduğu için,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{jn}^{(1)} \delta_{in} + \sigma_{jn}^{(0)} u_{i,n}^{(1)}) = 0 \quad (4.8)$$

eşitliği elde edilir. (4.1) eşitliklerinde (4.2) kullanılarak,

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(1)} + u_{j,i}^{(1)}) \quad (4.9)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (4.10)$$

ile verilen lineerleştirilmiş geometrik ilgiler ve Hooke kanunları yazılabilir. Burada basitlik için izotrop ortamlara ait olan Hooke kanunu verilmiştir. Ancak ifade edilenler genelleştirilmiş Hooke kanunu (yani, anizotrop ortamlar) için de aynen geçerlidir. Şimdi ele alınan problemin birinci aşamadaki (bu aşamaya ait büyüklükler üst indis (0) ile işaret edilsin) ve ikinci aşamadaki (bu aşamaya ait büyüklükler üst (1) indisi ile işaret edilsin) alan denklemleri ve sınır koşullarını ayrı ayrı ele alalım.

1. aşama; Öngerilmelere ait alan denklemleri ve sınır koşulları (Şekil 4.1b) aşağıdaki gibidir.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j}^{(0)} &= 0, \\ \sigma_{11}^{(0)} &= A_{11} \varepsilon_{11}^{(0)} + A_{12} \varepsilon_{22}^{(0)}, \quad \sigma_{22}^{(0)} = A_{12} \varepsilon_{11}^{(0)} + A_{22} \varepsilon_{22}^{(0)}, \quad \sigma_{12}^{(0)} = 2A_{66} \varepsilon_{12}^{(0)}, \\ \varepsilon_{ij}^{(0)} &= \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)}), \\ u_2^{(0)} \Big|_{x_1=0;\ell} &= 0; \quad \sigma_{11}^{(0)} \Big|_{x_1=0} = \sigma_{11}^{(0)} \Big|_{x_1=\ell} = q; \quad \sigma_{12}^{(0)} \Big|_{x_2=0;h} = 0; \\ \sigma_{i1}^{(0)} \Big|_{\substack{x_1=x_L; \ell-x_L \\ x_2 \in [h_A, h_A+h_B]}} &= 0; \quad \sigma_{2i}^{(0)} \Big|_{\substack{x_2=h_A; h_A+h_B \\ x_1 \in [x_L, \ell-x_L]}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad i=1,2 \quad (4.11)$$

Burada $h = h_A + h_B + h_U$ dur.

2. aşama; Öngerilmeli şerit-levhanın üstten yüklenmesi durumuna ait alan denklemleri ve sınır koşulları (Şekil 4.1c) aşağıdaki gibidir.

$$\left. \begin{aligned}
& \left[\sigma_{ji}^{(1)} + \sigma_{in}^{(0)} u_{i,n}^{(1)} \right]_{,j} = 0, \\
& \sigma_{11}^{(1)} = A_{11} \epsilon_{11}^{(1)} + A_{12} \epsilon_{22}^{(1)}, \quad \sigma_{22}^{(1)} = A_{12} \epsilon_{11}^{(1)} + A_{22} \epsilon_{22}^{(1)}, \quad \sigma_{12}^{(1)} = 2A_{66} \epsilon_{12}^{(1)}, \\
& \epsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(1)} + u_{j,i}^{(1)}), \\
& u_2^{(1)} \Big|_{x_1=0;\ell} = 0; \quad \left[\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{1n}^{(0)} u_{1,n}^{(1)} \right] \Big|_{x_1=0;\ell} = 0.; \\
& \left[\sigma_{i2}^{(1)} + \sigma_{2n}^{(0)} u_{i,n}^{(1)} \right] \Big|_{x_2=h} = p \delta_{i2}; \quad \left[\sigma_{i2}^{(1)} + \sigma_{2n}^{(0)} u_{i,n}^{(1)} \right] \Big|_{x_2=0} = 0; \\
& \left[\sigma_{i1}^{(1)} + \sigma_{1n}^{(0)} u_{i,n}^{(1)} \right] \Big|_{\substack{x_1=x_L;\ell-x_L \\ x_2 \in [h_A, h_A+h_B]}} = 0; \quad \left[\sigma_{2i}^{(1)} + \sigma_{2n}^{(0)} u_{2,n}^{(1)} \right] \Big|_{\substack{x_2=h_A;h_A+h_B \\ x_1 \in [x_L, \ell-x_L]}} = 0
\end{aligned} \right\} \quad i=1,2 \quad (4.12)$$

Şimdi yukarıda matematiksel formülasyonu verilen problemlerin çözümünde kullanılan sonlu eleman formülasyonlarını ele alalım.

4.3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modelleme

1. aşama: (4.11) ile verilen problemin sonlu eleman formülasyonu,

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sigma_{ij}^{(0)} \epsilon_{ij}^{(0)} dx_1 dx_2 - \int_0^h q u_1^{(0)} \Big|_{x_1=0;\ell} dx_2 \quad (4.13)$$

fonksiyoneli yardımıyla ve Ritz tekniği kullanılarak Kısım 2.3.2 de verildiği şekilde yapılacaktır.

2. aşama: (4.12) de verilen denklemlerde bazı işaretlemeler kabul edelim. Bunlar,

$$\left. \begin{aligned}
T_{11}^{(1)} &= \sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \sigma_{12}^{(0)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} = \omega_{1111} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{1122} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{1112} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \\
T_{12}^{(1)} &= \sigma_{12}^{(1)} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \sigma_{12}^{(0)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} = \omega_{1212} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{1222} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{1221} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \\
T_{21}^{(1)} &= \sigma_{21}^{(1)} + \sigma_{21}^{(0)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \sigma_{22}^{(0)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} = \omega_{2112} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{2121} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{2111} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \\
T_{22}^{(1)} &= \sigma_{22}^{(1)} + \sigma_{21}^{(0)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \sigma_{22}^{(0)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} = \omega_{2211} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{2222} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{2221} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1}
\end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

burada,

$$\left. \begin{aligned} \omega_{1111} &= A_{11} + \sigma_{11}^{(0)}, & \omega_{1122} &= A_{12}, & \omega_{1112} &= \sigma_{12}^{(0)}, & \omega_{1212} &= A_{66}, \\ \omega_{1222} &= \sigma_{12}^{(0)}, & \omega_{1221} &= A_{66} + \sigma_{11}^{(0)}, & \omega_{2112} &= A_{66} + \sigma_{22}^{(0)}, & \omega_{2121} &= A_{66}, \\ \omega_{2111} &= \sigma_{12}^{(0)}, & \omega_{2211} &= A_{12}, & \omega_{2222} &= A_{22} + \sigma_{22}^{(0)}, & \omega_{2221} &= \sigma_{12}^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

dir. Yeni işaretlemelere göre denge denklemleri ve sınır koşulları,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_{11}^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}^{(1)}}{\partial x_2} &= 0, & \frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}^{(1)}}{\partial x_2} &= 0, \\ u_2^{(1)} \Big|_{x_1=0;\ell} &= 0; & T_{li}^{(1)} \Big|_{x_1=0;\ell} &= 0.; \\ T_{2i}^{(1)} \Big|_{x_2=h} &= p\delta_{i2}; & T_{2i}^{(1)} \Big|_{x_2=0} &= 0; \\ T_{li}^{(1)} \Big|_{\substack{x_1=x_L;\ell-x_L \\ x_2 \in [h_A, h_A+h_B]}} &= 0; & T_{2i}^{(1)} \Big|_{\substack{x_2=h_A;h_A+h_B \\ x_1 \in [x_L, \ell-x_L]}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad i=1,2 \quad (4.16)$$

olur. (4.16) sınır değer probleminin sonlu eleman formülasyonu için aşağıdaki fonksiyoneli ele alalım.

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(T_{11}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + T_{12}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + T_{21}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + T_{22}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 - \int_0^\ell p u_2^{(1)} \Big|_{x_2=h} dx_1 \quad (4.17)$$

Bu fonksiyonelin birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden

$$\delta \Pi_1 = \frac{1}{2} \delta \iint_{\Omega} \left(T_{11}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + T_{12}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + T_{21}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + T_{22}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 - \int_0^\ell p \delta u_2^{(1)} \Big|_{x_2=h} dx_1 = 0 \quad (4.18)$$

(4.16) da verilen denge denklemleri ve gerilmelere göre sınır koşullarının elde edildiğini gösterelim.

$$\frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(T_{11}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + T_{12}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + T_{21}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + T_{22}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[\omega_{1111} \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right)^2 + \omega_{1122} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{1112} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{1212} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \right. \\
& \omega_{1222} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{1221} \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \right)^2 + \omega_{2112} \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \right)^2 + \omega_{2121} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \\
& \left. \omega_{2111} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{2211} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{2222} \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right)^2 + \omega_{2221} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2 \quad (4.19)
\end{aligned}$$

(4.19) ‘un birinci varyasyonu,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \delta \iint_{\Omega} (\cdot) dx_1 dx_2 = \frac{1}{2} \delta \iint_{\Omega} \left(T_{11}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + T_{12}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + T_{21}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + T_{22}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \\
& \iint_{\Omega} \left\{ \left[\omega_{1111} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \omega_{2111} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \omega_{1122} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \omega_{1112} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \omega_{2211} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right] \delta \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right) + \right. \\
& \left[\omega_{2222} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \omega_{2221} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \omega_{2211} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \omega_{1222} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \omega_{1122} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right] \delta \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right) + \\
& \left[\frac{1}{2} \omega_{1112} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \omega_{1212} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{2112} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \omega_{2121} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \omega_{2111} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right] \delta \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \right) + \\
& \left. \left[\frac{1}{2} \omega_{1212} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{1221} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \omega_{1222} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \omega_{2121} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \omega_{2221} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right] \delta \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \right) \right\} dx_1 dx_2 \quad (4.20)
\end{aligned}$$

(4.20) de,

$$\omega_{ijnm} = \omega_{mnji} \quad (4.21)$$

olduğu göz önüne alınarak (4.20) ifadesi düzenlenirse,

$$\frac{1}{2} \delta \iint_{\Omega} (\cdot) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} \left\{ \left[\omega_{1111} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{1112} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{1122} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right] \delta \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left[\omega_{2222} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{2221} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{2211} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right] \delta \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right) + \\
& \left[\omega_{2111} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{2121} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{2112} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \right] \delta \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \right) + \\
& \left[\omega_{1212} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \omega_{1221} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \omega_{1222} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right] \delta \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \right) \Bigg\} dx_1 dx_2 = \\
& \iint_{\Omega} \left(T_{11}^{(1)} \delta \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right) + T_{12}^{(1)} \delta \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \right) + T_{21}^{(1)} \delta \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \right) + T_{22}^{(1)} \delta \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right) \right) dx_1 dx_2 = \\
& \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(T_{11}^{(1)} \delta u_1^{(1)} \right) - \frac{\partial T_{11}^{(1)}}{\partial x_1} \delta u_1^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(T_{22}^{(1)} \delta u_2^{(1)} \right) - \frac{\partial T_{22}^{(1)}}{\partial x_2} \delta u_2^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(T_{21}^{(1)} \delta u_1^{(1)} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial T_{21}^{(1)}}{\partial x_2} \delta u_1^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(T_{12}^{(1)} \delta u_2^{(1)} \right) - \frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial x_1} \delta u_2^{(1)} \right] dx_1 dx_2 = \\
& \iint_{\Omega} \left\{ - \left(\frac{\partial T_{11}^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}^{(1)}}{\partial x_2} \right) \delta u_1^{(1)} - \left(\frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}^{(1)}}{\partial x_2} \right) \delta u_2^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(T_{11}^{(1)} \delta u_1 + T_{12}^{(1)} \delta u_2^{(1)} \right) + \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \left(T_{22}^{(1)} \delta u_2^{(1)} + T_{21}^{(1)} \delta u_1^{(1)} \right) \right\} dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

olur. Buradan (4.18) ‘den,

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \left\{ - \left(\frac{\partial T_{11}^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}^{(1)}}{\partial x_2} \right) \delta u_1^{(1)} - \left(\frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}^{(1)}}{\partial x_2} \right) \delta u_2^{(1)} \right\} dx_1 dx_2 + \\
& \int_0^h \left(T_{11}^{(1)} \delta u_1^{(1)} + T_{12}^{(1)} \delta u_2^{(1)} \right) \Big|_{x_1=0}^{x_1=\ell} dx_2 + \int_{h_A}^{h_A+h_B} \left(T_{11}^{(1)} \delta u_1^{(1)} + T_{12}^{(1)} \delta u_2^{(1)} \right) \Big|_{x_1=x_L}^{x_1=\ell-x_L} dx_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\ell \left(T_{22}^{(1)} \delta u_2^{(1)} + T_{21}^{(1)} \delta u_1^{(1)} \right) \Big|_{x_2=0}^{x_2=h} dx_1 + \int_{x_L}^{\ell-x_L} \left(T_{22}^{(1)} \delta u_2^{(1)} + T_{21}^{(1)} \delta u_1^{(1)} \right) \Big|_{x_2=h_A}^{x_2=h_A+h_B} dx_1 \\
& - \int_0^\ell p \delta u_2^{(1)} \Big|_{x_2=h} dx_1 = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

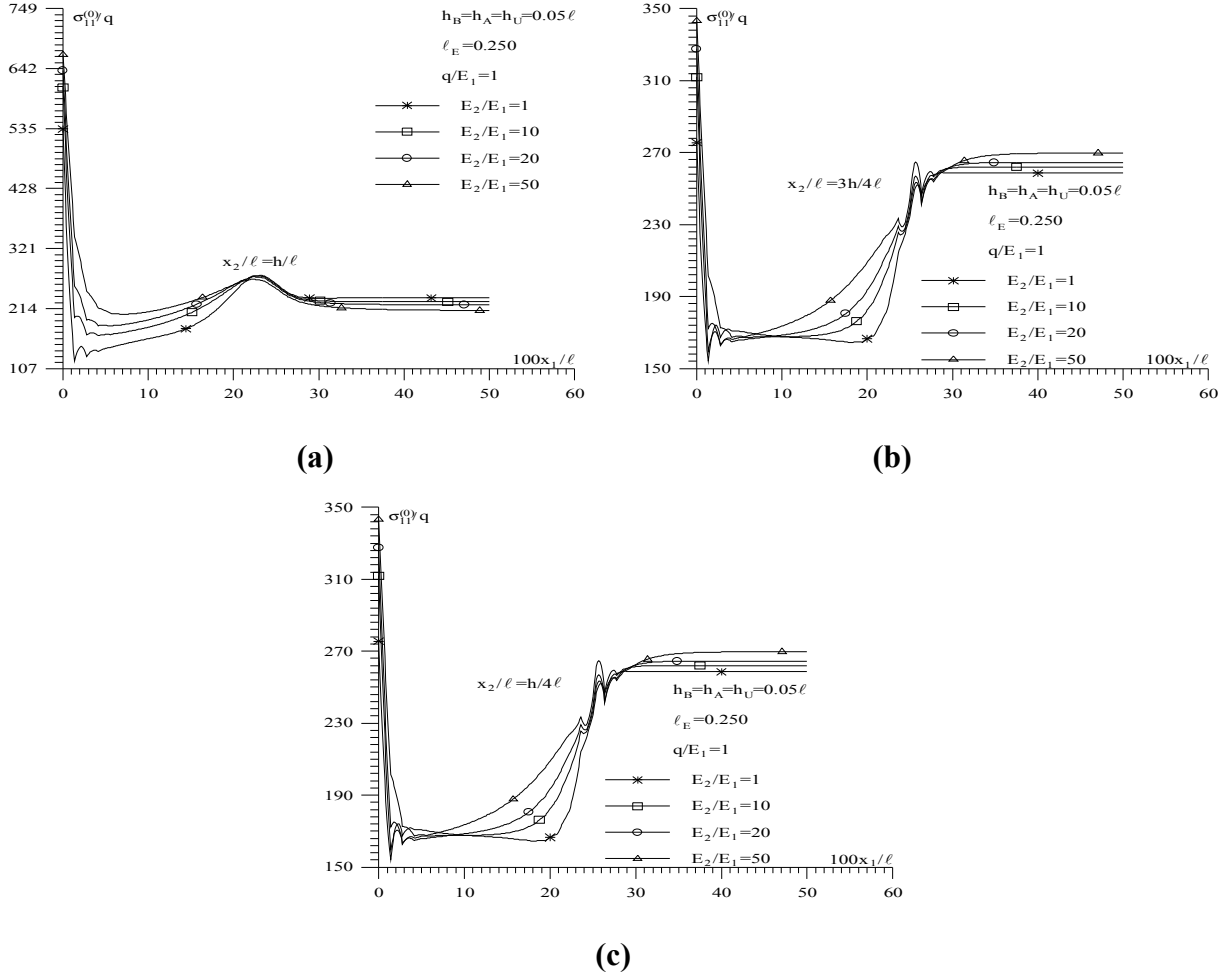
bulunur. (4.22) de basit mesnet sınır koşulundan $\delta u_2^{(1)} \Big|_{x_1=0;\ell} = 0$ olduğu hatırlanır ve $\delta u_i^{(1)}$, $\delta u_i^{(1)}(0, x_2)$, $\delta u_i^{(1)}(\ell, x_2)$, $\delta u_i^{(1)}(x_1, 0)$, $\delta u_i^{(1)}(x_1, h)$, $\delta u_i^{(1)}(x_L, x_2)$, $\delta u_i^{(1)}(\ell - x_L, x_2)$, $\delta u_i^{(1)}(x_1, h_A)$, $\delta u_i^{(1)}(x_1, h_A + h_B)$ 'lerin katsayıları sıfıra eşitlenirse (4.12) veya (4.16) 'de verilen sınır değer problemine ait alan denklemleri ve gerilmelere göre sınır koşulları elde edilir. Buradan sonlu eleman formülasyonunda kullanılan rijidlik matrisinin bileşenleri için (2.9) da verilen $K_{ij}^{(k)}$ 'ların ifadesi:

$$\left. \begin{aligned}
K_{ij}^{(k)}(1,1) &= \omega_{1111} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \omega_{1112} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \omega_{2112} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} + \omega_{2111} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_i}{\partial x_2}, \\
K_{ij}^{(k)}(1,2) &= \omega_{1122} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \omega_{2121} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_i}{\partial x_2}, \\
K_{ij}^{(k)}(2,1) &= \omega_{2211} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} + \omega_{1212} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \frac{\partial N_i}{\partial x_1}, \\
K_{ij}^{(k)}(2,2) &= \omega_{2222} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} + \omega_{2221} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} + \omega_{1221} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} + \omega_{1222} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \frac{\partial N_i}{\partial x_2}
\end{aligned} \right\} \tag{4.23}$$

olarak bulunur.

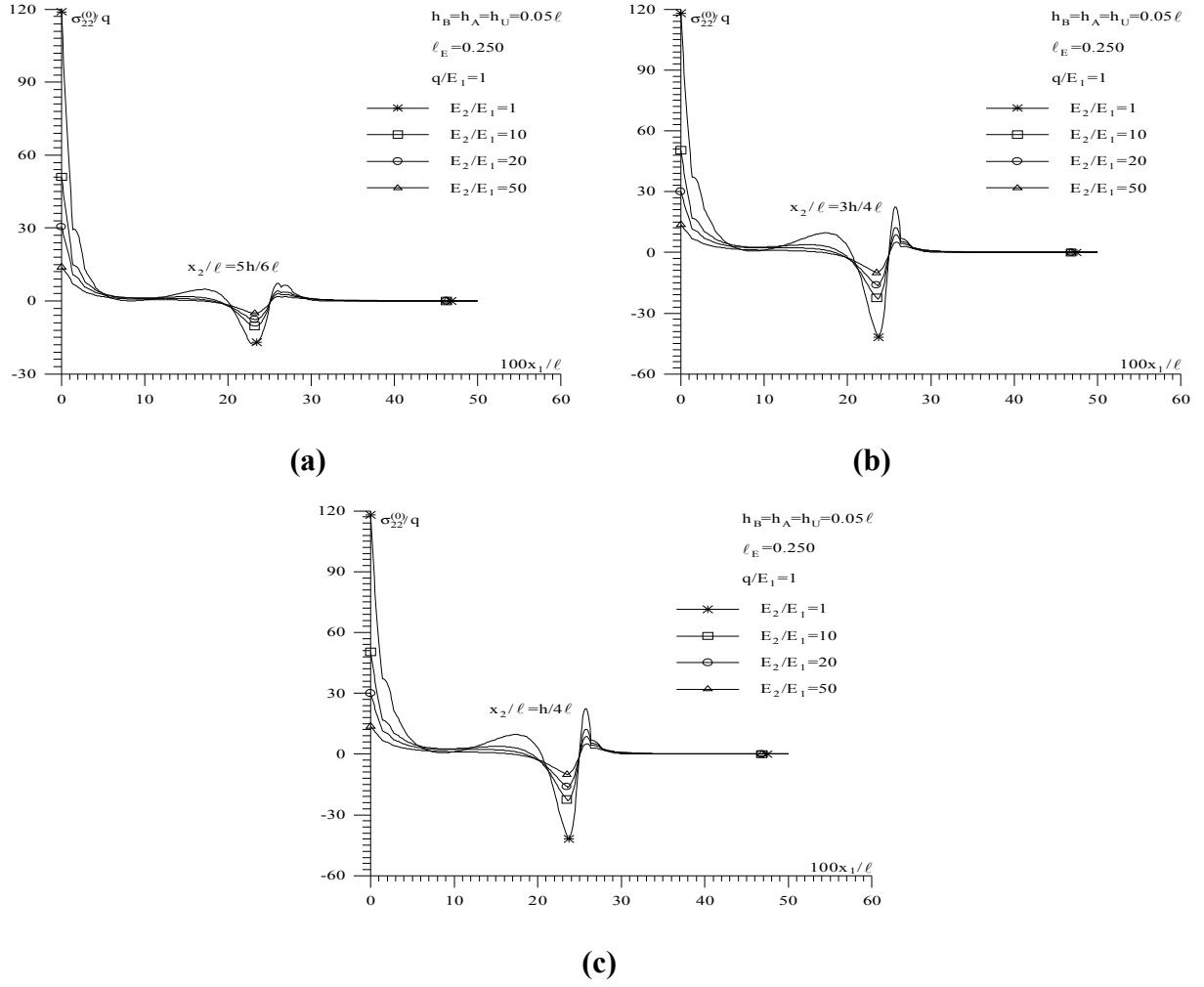
4.3.3 Sayısal Sonuçların İncelenmesi

Ele alınan yapı elemanın malzemesinin birbirini tekrar eden iki izotrop levhadan oluşan çok katlı kompozit malzeme olduğu ve bu levhalara ait malzeme sabitlerinin Kısım 2.4.3 deki gibi gösterildiğini kabul edelim. Şimdi ele alınan problemde elde edilen sayısal sonuçları ele alalım.



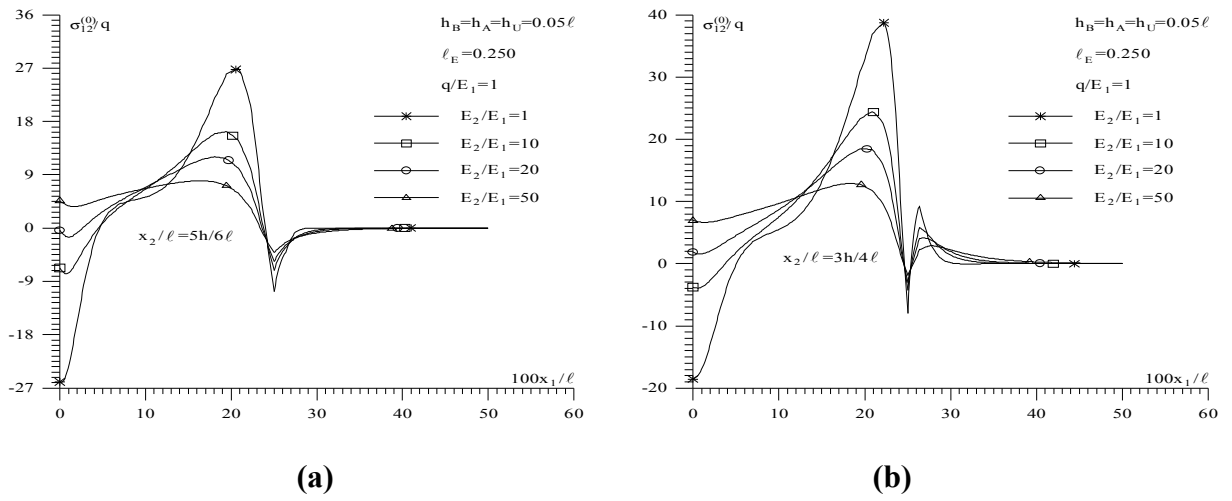
Şekil 4.2 $\sigma_{11}^{(0)}/q$ öngerilmesinin a) $x_2/\ell = h/\ell$; b) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; c) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki x_1/ℓ ye göre grafikleri.

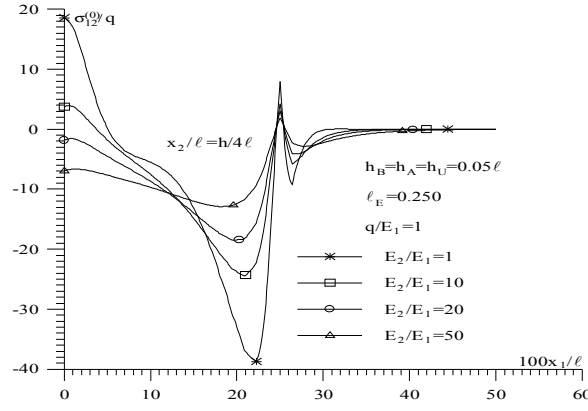
Şekil 4.2a, b, c de $\sigma_{11}^{(0)}/q$ öngerilmesinin sırasıyla $x_2/\ell = h/\ell$; $3h/4\ell$; $h/4\ell$ kesitlerinde x_1/ℓ ye göre grafikleri verilmektedir. Her üç şekilden de görüldüğü gibi E_2/E_1 değeri arttıkça öngerilmenin şiddeti de artmaktadır. Şekil 4.3a, b, c ve Şekil 4.4a, b, c de verilen sırasıyla $\sigma_{22}^{(0)}/q$ ve $\sigma_{12}^{(0)}/q$ öngerilmesi için sırasıyla $x_2/\ell = 5h/6\ell$; $3h/4\ell$; $h/4\ell$ kesitlerinde verilen grafikler için de benzeri bir durum söz konusudur. Ayrıca $\sigma_{22}^{(0)}/q$ öngerilme grafiklerinde E_2/E_1 oranının artması ile öngerilmenin delik ucu bölgesindeki şiddetini düşürdüğü görülmektedir. Şekil 4.5 de ise $\sigma_{12}^{(0)}/q$ öngerilmesinin x_2/ℓ ye göre grafiği $x_1/\ell = 0.236$ kesitinde verilmektedir.



Şekil 4.3 $\sigma_{22}^{(0)}/q$ öngerilmesinin a) $x_2/\ell = 5h/6\ell$; b) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; c) $x_2/\ell = h/4\ell$

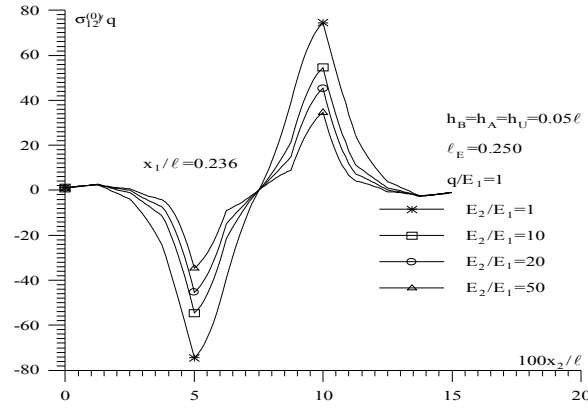
kesitlerindeki x_1/ℓ ye göre grafikleri.





(c)

Şekil 4.4 $\sigma_{12}^{(0)}/q$ öngerilmesinin q/E_1 değerinde a) $x_2/\ell = h/\ell$; b) $x_2/\ell = 3h/4\ell$;
c) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki x_1/ℓ ye göre grafikleri.



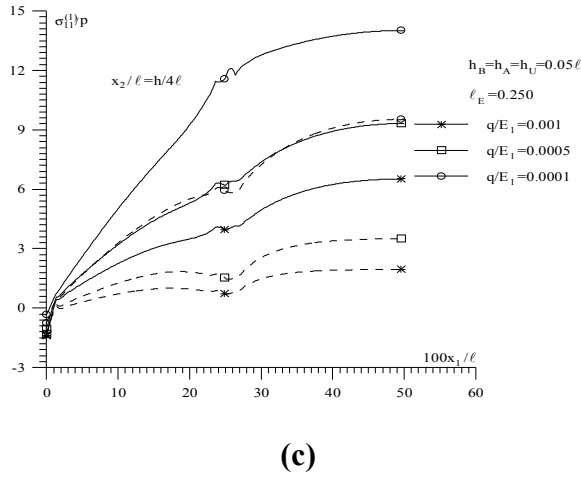
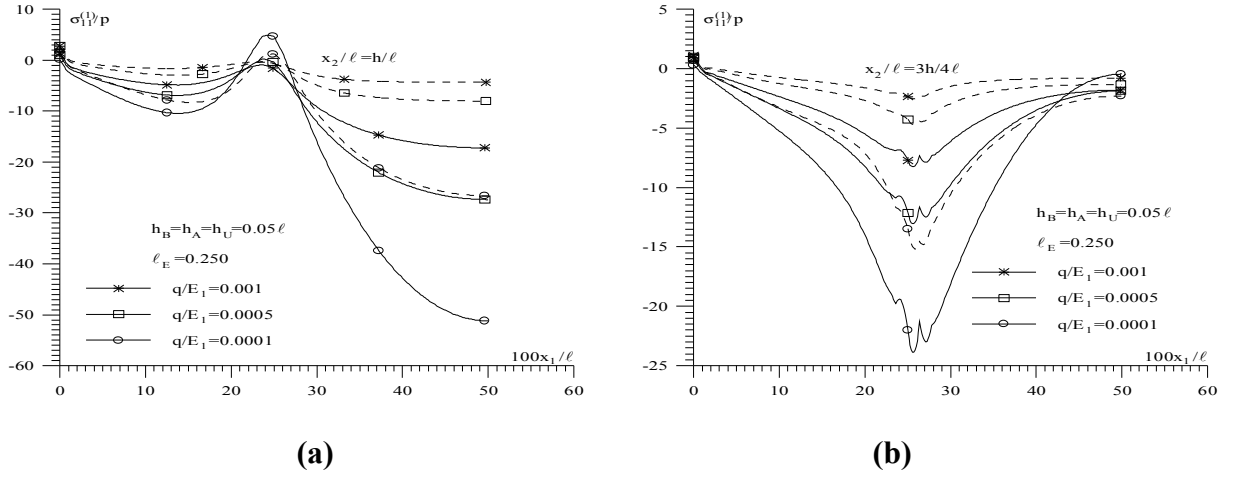
Şekil 4.5 $\sigma_{12}^{(0)}/q$ öngerilmesinin $x_1/\ell = 0.236$ kesitinde x_2/ℓ ye göre grafiği.

Şekil 4.6-4.9 grafiklerinde kesikli çizgilerle $E_2/E_1 = 1$ ve sürekli çizgilerle $E_2/E_1 = 10$ değerleri gösterilmiştir.

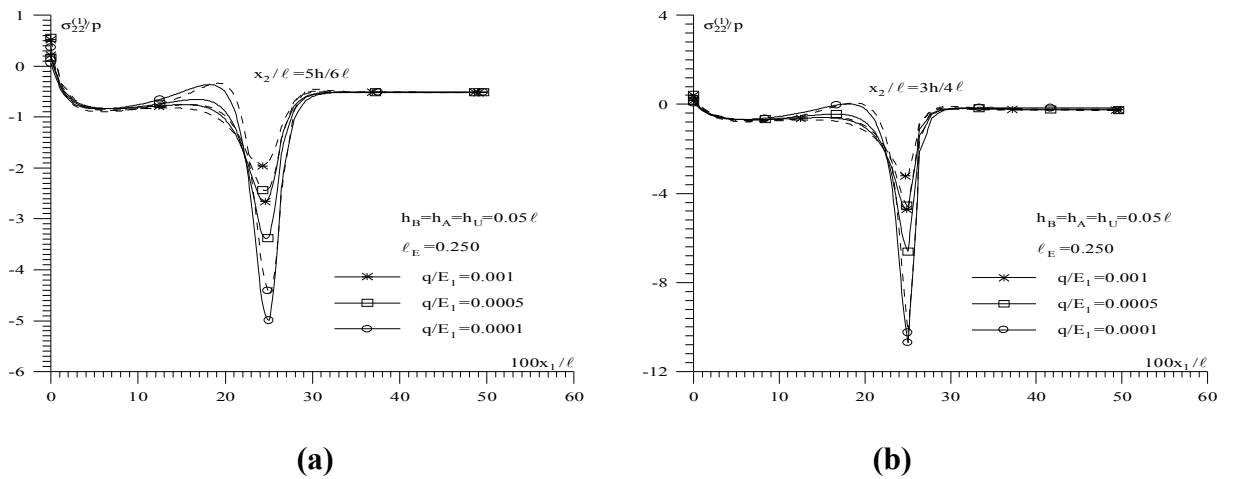
Şekil 4.6 da $\sigma_{11}^{(1)}/p$ grafiklerinin yine, farklı öngerilme durumlarında (yani farklı q/E_1 değerlerinde), farklı üç kesitte x_1/ℓ 'ye göre grafikleri verilmektedir. Kesitin, ele alınan yapıdaki deliğin altında ya da üstünde seçilmesi durumuna göre gerilme yayılımı farklılanmakta, fakat E_2/E_1 değeri arttıkça gerilme şiddeti artmaktadır.

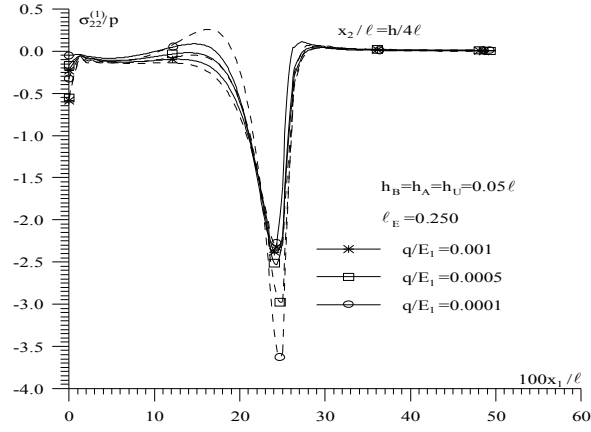
Aynı özellik Şekil 4.7 de verilen $\sigma_{22}^{(1)}/p$ ve Şekil 4.8 de verilen $\sigma_{12}^{(1)}/p$ grafiklerinin q/E_1 çekme kuvveti değerinde, farklı üç kesitte x_1/ℓ 'ye göre grafikleri içinde görülmektedir yani, E_2/E_1 değeri arttıkça delik ucu bölgesinde meydana gelen gerilme yığılması şiddeti mutlak değerce $\sigma_{22}^{(1)}/p$ gerilmesinde düşmekte; $\sigma_{12}^{(1)}/p$ gerilmesinde artmaktadır. Şekil 4.9 da

$\sigma_{12}^{(1)}/p$ gerilmesinin $x_1/\ell = 0.236$ kesitinde x_2/ℓ ye göre verilen grafiğinde E_2/E_1 değeri arttıkça gerilme değerinin mutlak değerce arttığı görülmektedir.



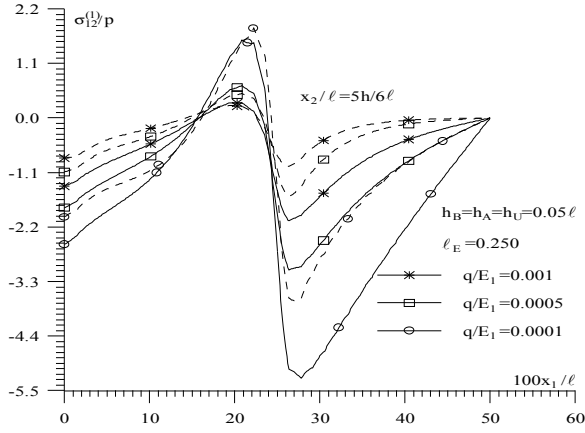
Şekil 4.6 $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı q/E_1 değerlerinde a) $x_2/\ell = h/\ell$; b) $x_2/\ell = 3h/4\ell$, c) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki x_1/ℓ ye göre grafikleri.



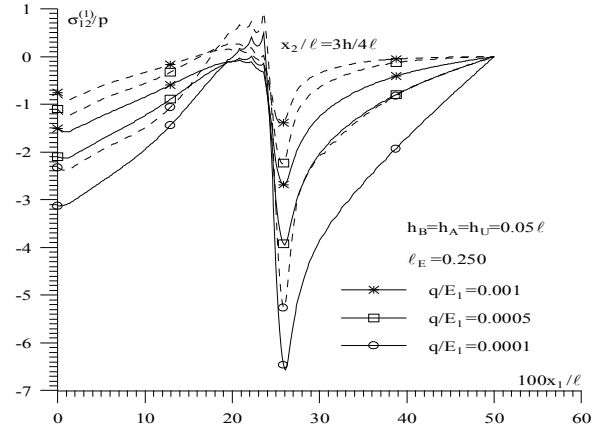


(c)

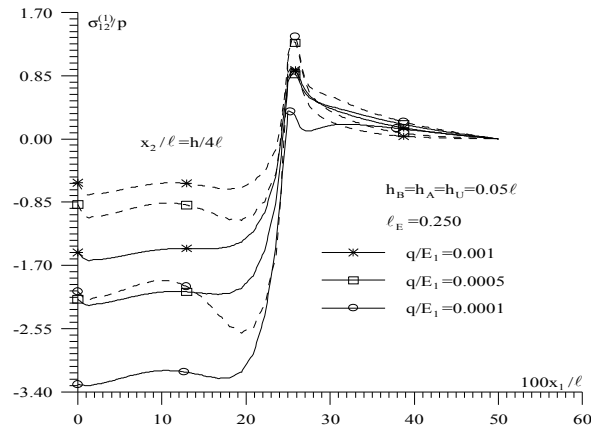
Şekil 4.7 $\sigma_{22}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı q/E_1 değerlerinde a) $x_2/\ell = 5h/6\ell$; b) $x_2/\ell = 3h/4\ell$,
c) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki x_1/ℓ ye göre grafikleri.



(a)

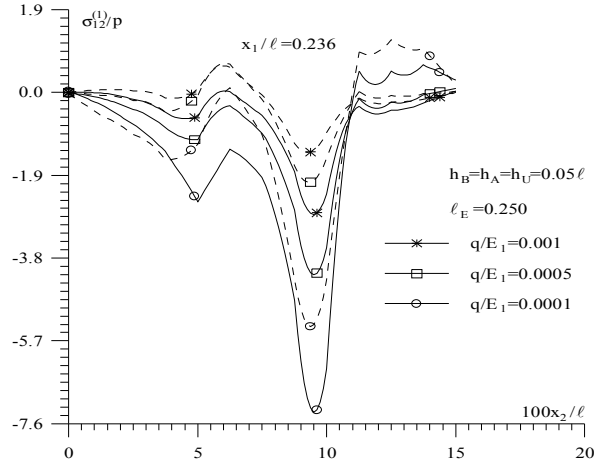


(b)

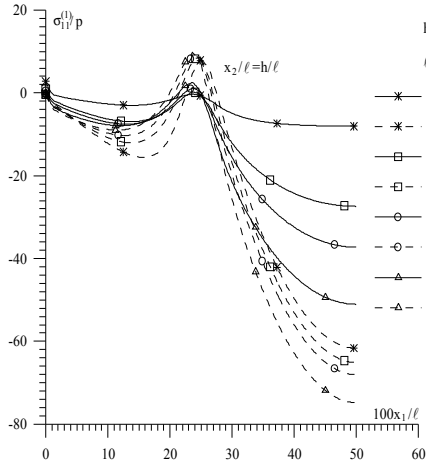


(c)

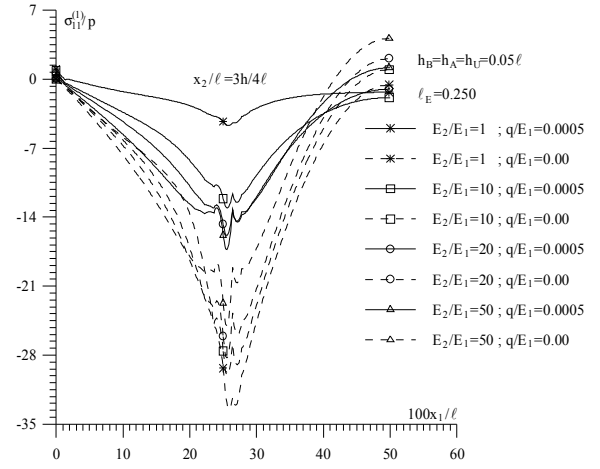
Şekil 4.8 $\sigma_{12}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı q/E_1 değerlerinde a) $x_2/\ell = 5h/6\ell$; b) $x_2/\ell = 3h/4\ell$;
c) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki x_1/ℓ ye göre grafikleri.



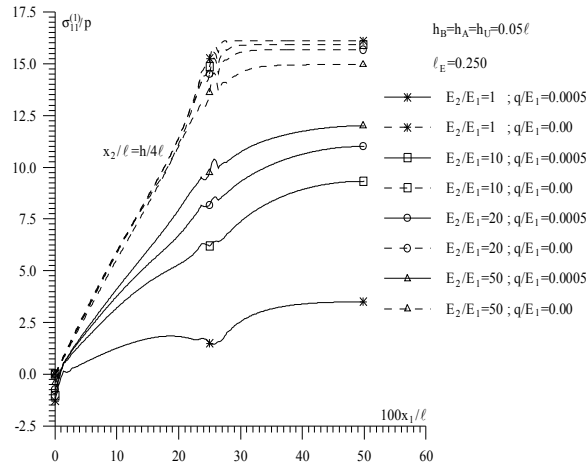
Şekil 4.9 $\sigma_{12}^{(1)}/p$ gerilmesinin $x_1/\ell = 0.236$ kesitinde x_2/ℓ ye göre grafiği.



(a)



(b)

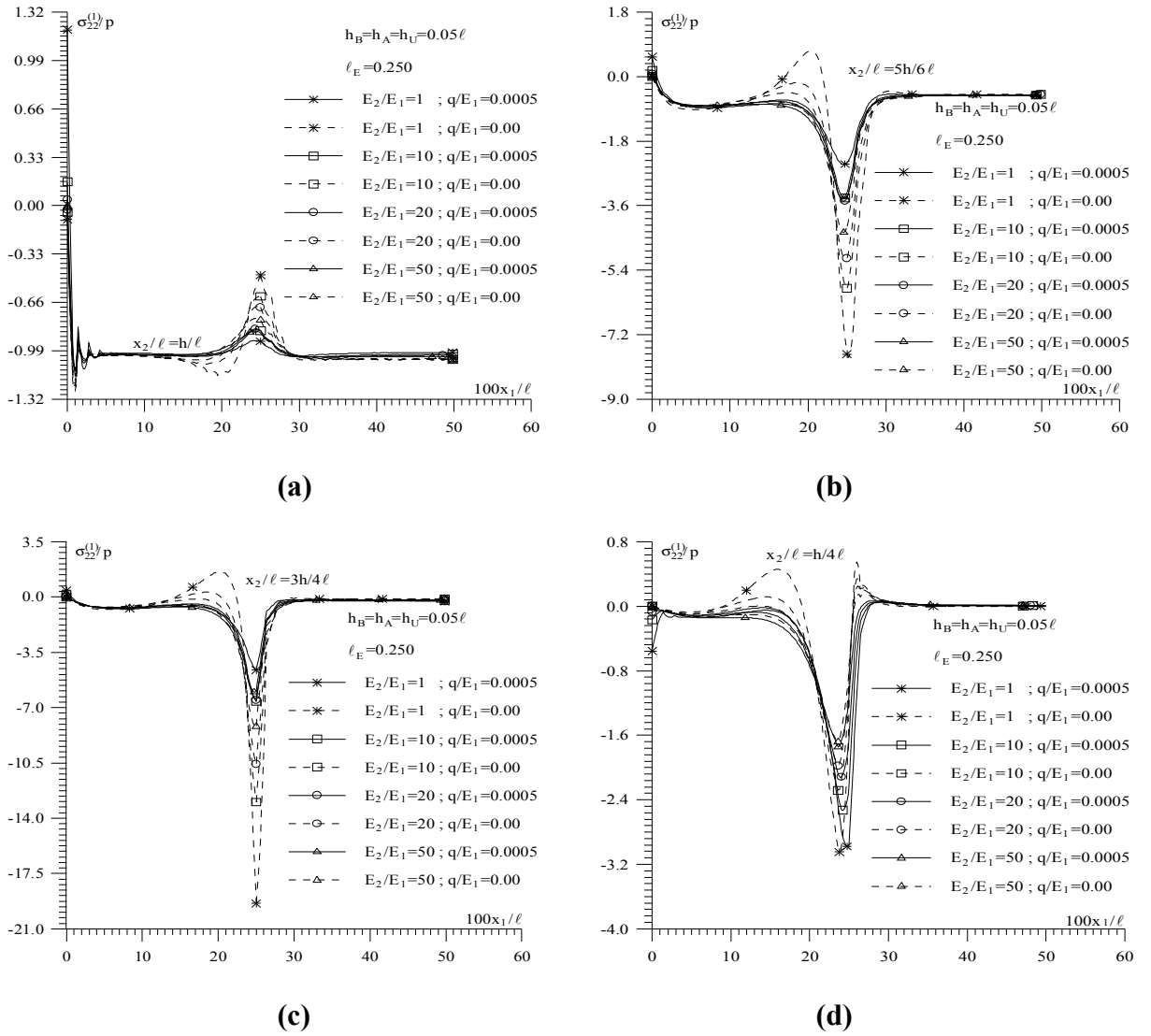


(c)

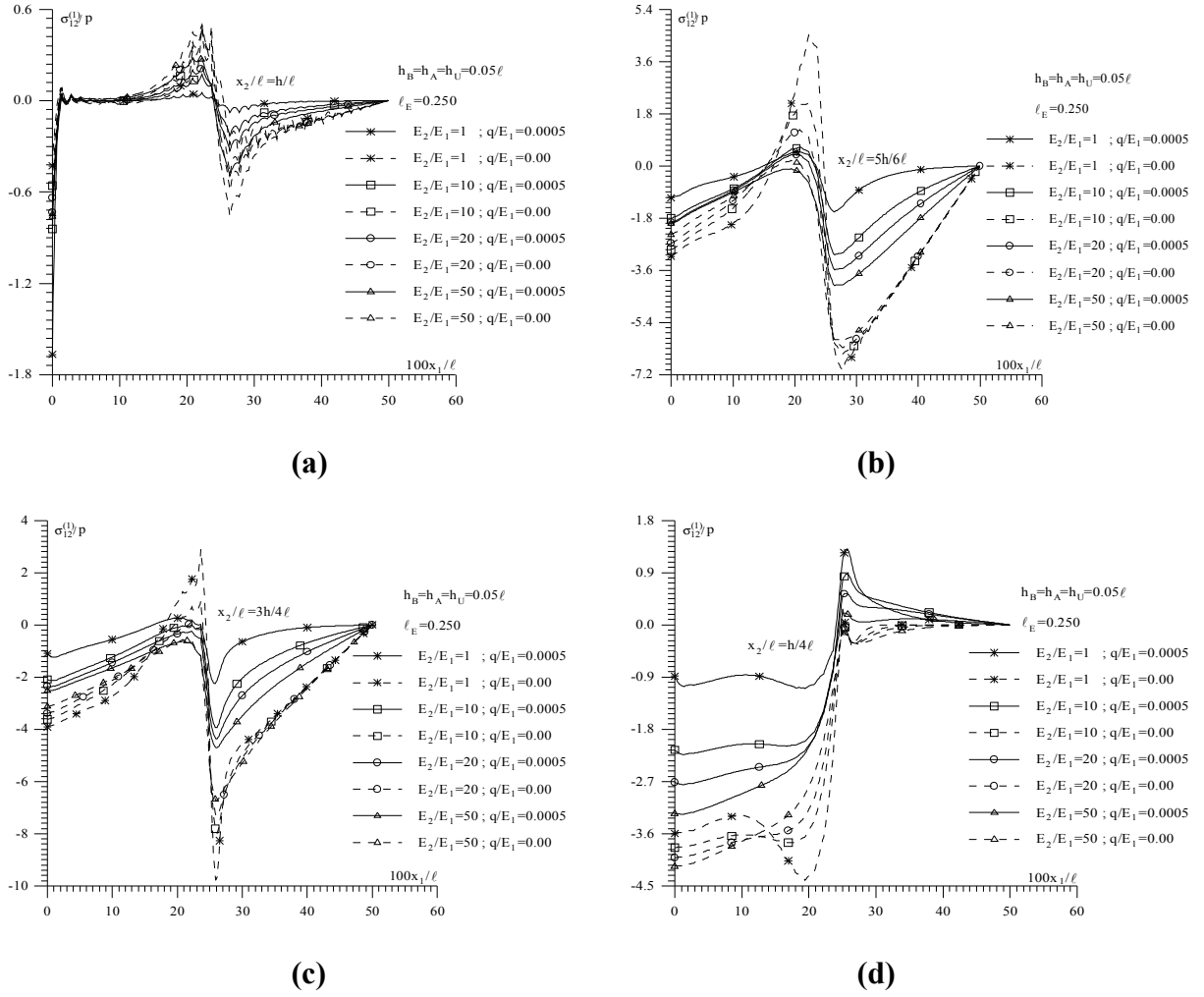
Şekil 4.10 $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı E_2/E_1 değerlerinde a) $x_2/\ell = 5h/6\ell$; b) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; c) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki öngerilmeli ve öngerilmemiş durumda x_1/ℓ ye göre grafikleri.

Bundan sonraki bütün şekillerde noktalı çizgiler ile gösterilen grafikler öngerilmemiş ($q/E_1 = 0$) durumu, sürekli çizgiler ile gösterilen grafikler öngerilmeli ($q/E_1 \neq 0$) durumu göstermektedir.

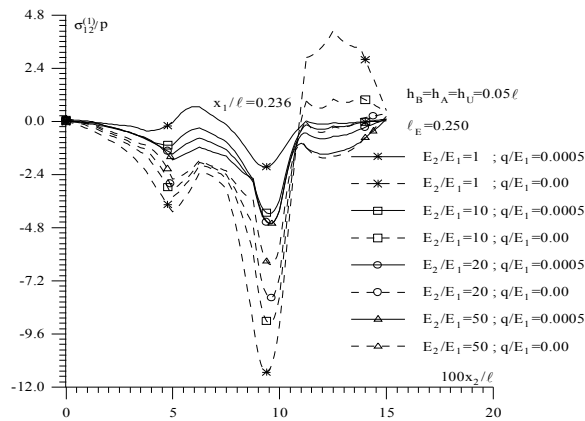
Şekil 4.10 'da verilen grafiklerde farklı E_2/E_1 oranı için öngerilmeli ve öngerilmemiş durumda üç farklı kesitte x_1/ℓ 'ye göre $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilmesinin grafikleri verilmektedir. Grafiklerden görüldüğü gibi, öngerilmenin olması gerilme şiddetini mutlak değerce önemli ölçüde düşürmektedir.



Şekil 4.11 $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı E_2/E_1 değerlerinde a) $x_2/\ell = h/\ell$, b) $x_2/\ell = 5h/6\ell$; c) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; d) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki öngerilmeli ve öngerilmemiş durumda x_1/ℓ ye göre grafikleri.

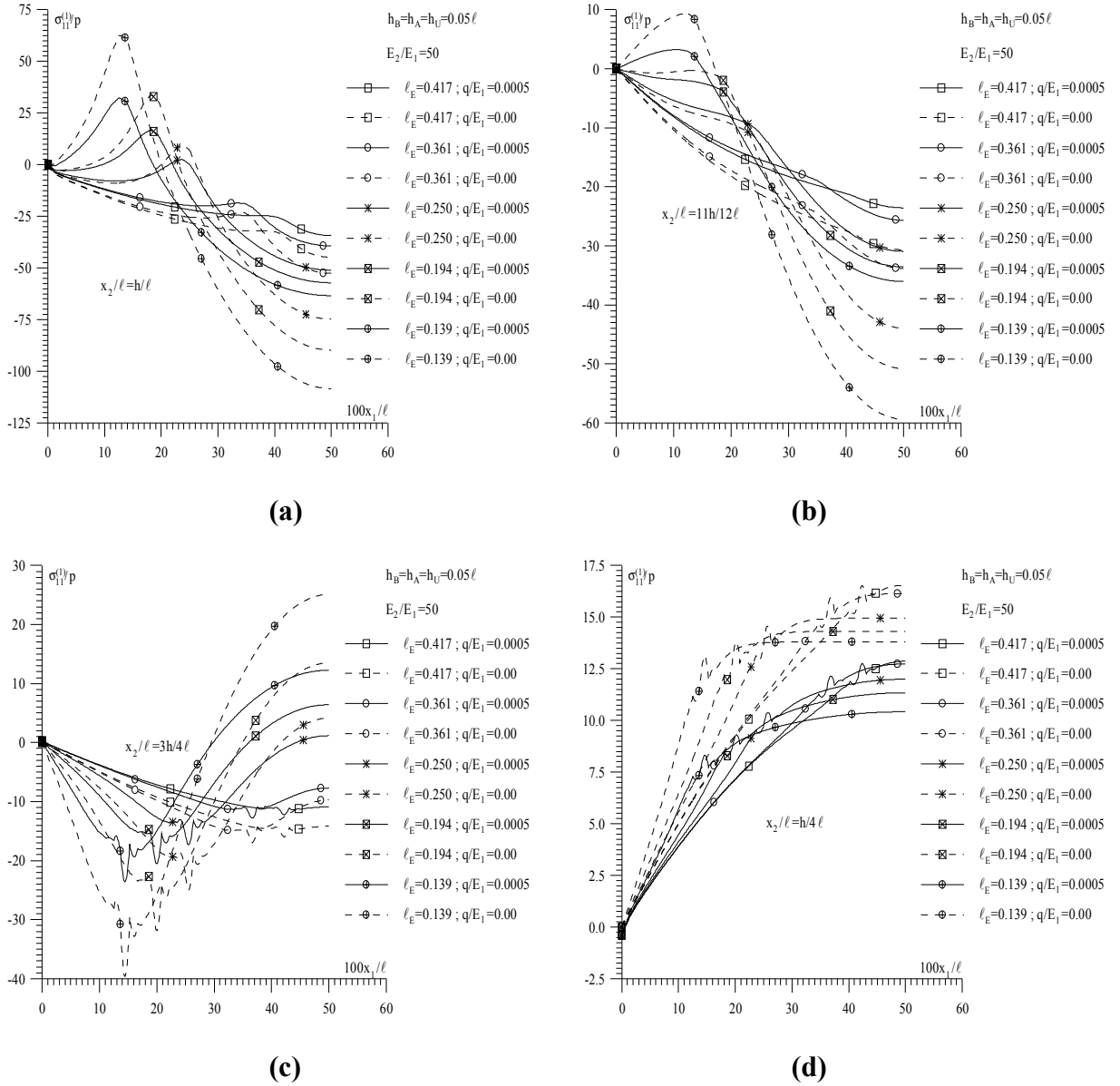


Şekil 4.12 $\sigma_{12}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı E_2/E_1 değerlerinde a) $x_2/\ell = h/\ell$; b) $x_2/\ell = 5h/6\ell$; c) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; d) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki öngerilmeli ve öngerilmesiz durumda x_1/ℓ ye göre grafikleri.

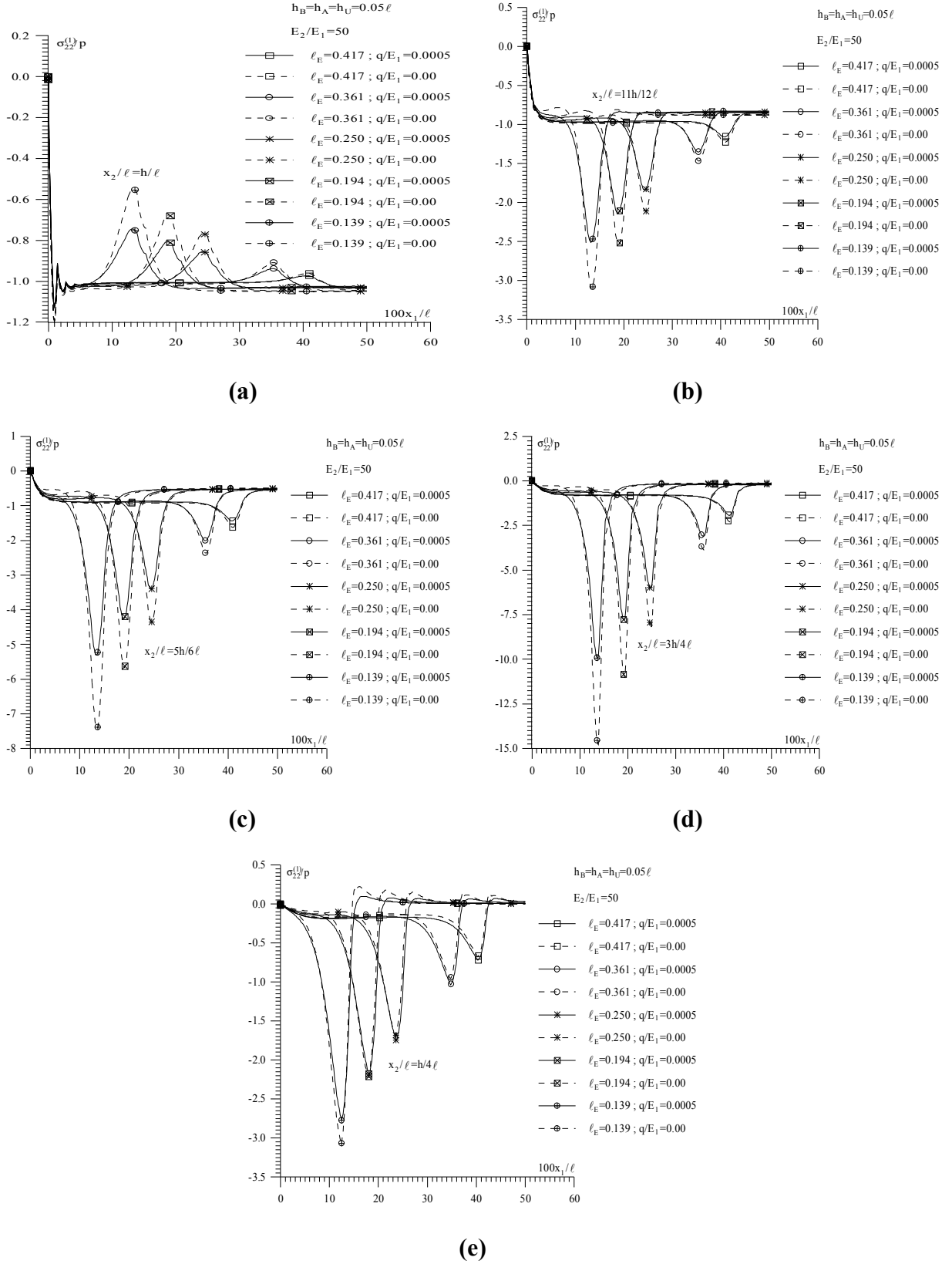


Şekil 4.13 $\sigma_{12}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı E_2/E_1 değerlerinde $x_1/\ell = 0.236$ kesitinde x_2/ℓ ye göre grafiği.

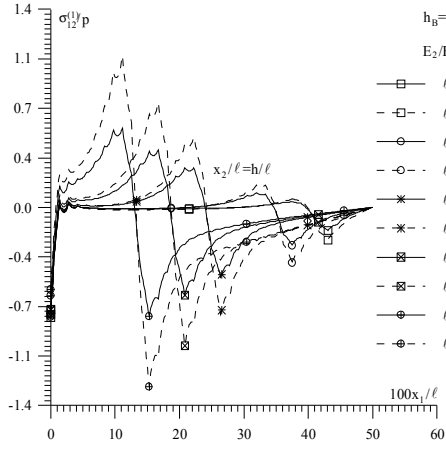
Aynı şekilde, Şekil 4.11 de $\sigma_{22}^{(1)}/p$ ve Şekil 4.12 de $\sigma_{12}^{(1)}/p$ 'nin farklı E_2/E_1 değerlerinde öngerilmeli ve öngerilmesiz durumda x_1/ℓ 'ye göre grafiklerinden de öngerilmenin olmasının gerilme şiddetini, mutlak değerce, düşürdüğü görülmektedir. Yine Şekil 4.13 de verilen $\sigma_{12}^{(1)}/p$ gerilmesinin x_2/ℓ ye göre grafiğinden öngerilmenin olması durumunda gerilme değerinin mutlak değerce düştüğü görülmektedir.



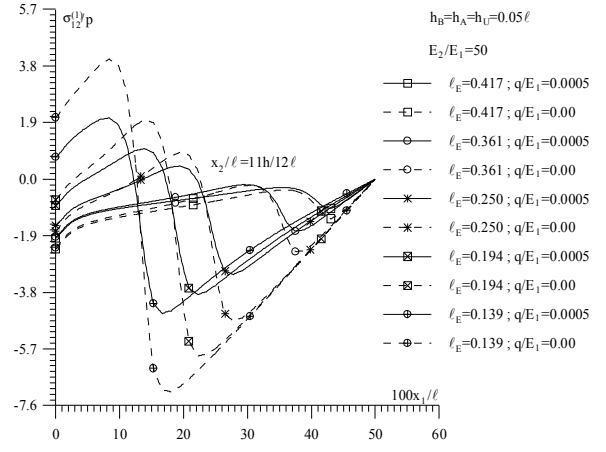
Şekil 4.14 $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı ℓ_E değerlerinde a) $x_2/\ell = h/\ell$; b) $x_2/\ell = 11h/12\ell$; c) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; d) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki öngerilmeli ve öngerilmesiz durumda x_1/ℓ ye göre grafikleri.



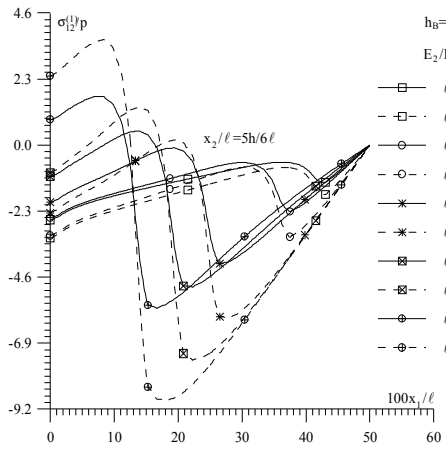
Şekil 4.15 $\sigma_{22}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı ℓ_E değerlerinde a) $x_2/\ell = h/\ell$; b) $x_2/\ell = 11h/12\ell$; c) $x_2/\ell = 5h/6\ell$; d) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; e) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki öngerilmeli ve öngerilmemiş durumda x_1/ℓ ye göre grafikleri.



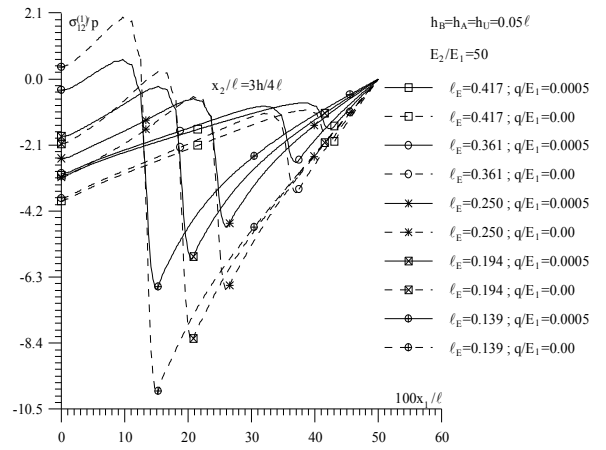
(a)



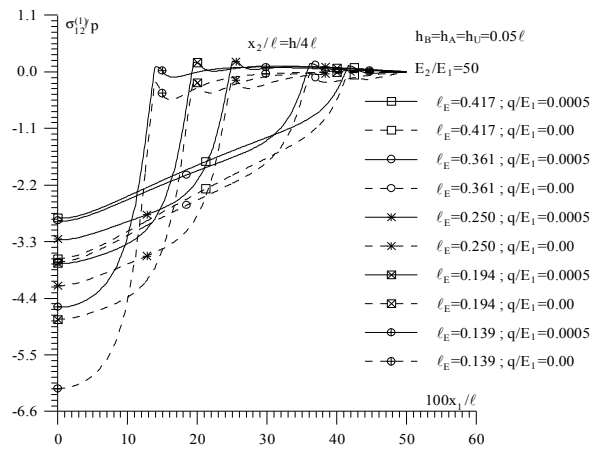
(b)



(c)

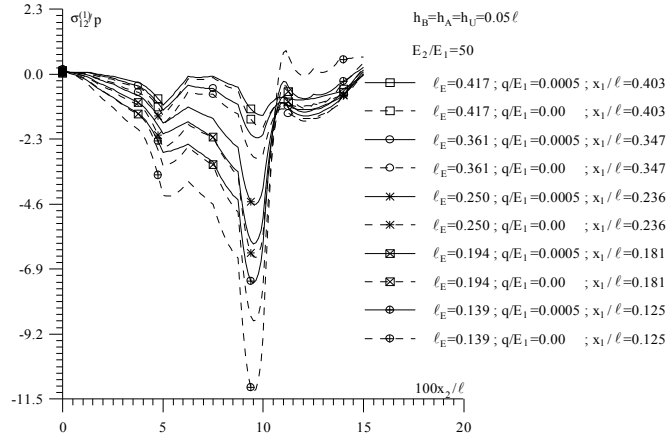


(d)

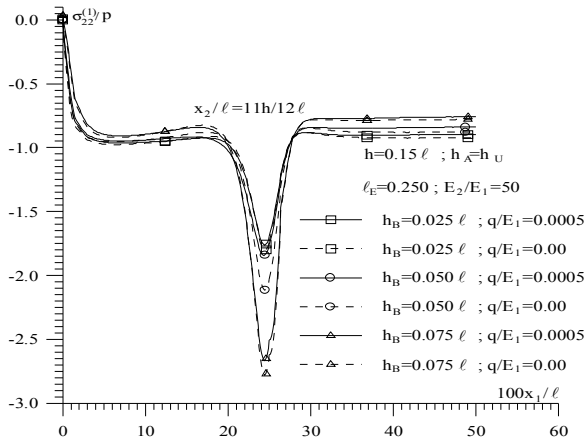


(e)

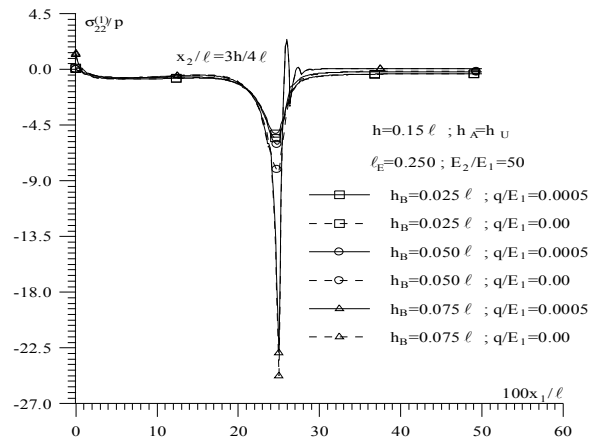
Şekil 4.16 $\sigma_{12}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı ℓ_E değerlerinde a) $x_2/\ell = h/\ell$; b) $x_2/\ell = 11h/12\ell$; c) $x_2/\ell = 5h/6\ell$; d) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; e) $x_2/\ell = h/4\ell$ kesitlerindeki öngerilmeli ve öngerilmemiş durumda x_1/ℓ ye göre grafikleri.



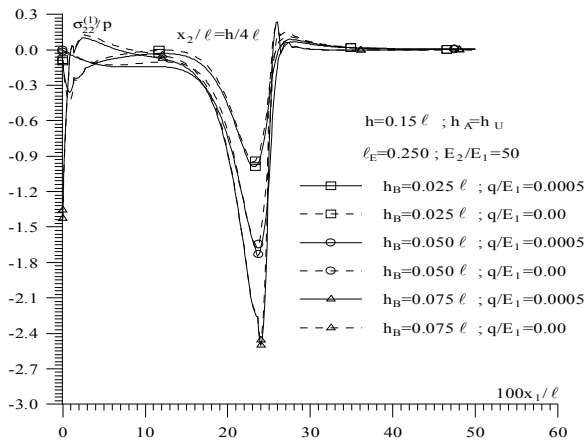
Şekil 4.17 $\sigma_{12}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı ℓ_E değerlerinde x_2/ℓ ye göre grafiği.



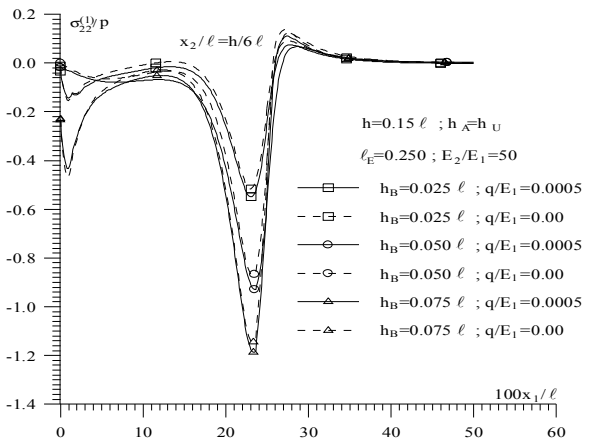
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 4.18 $\sigma_{22}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı h_B değerlerinde a) $x_2/\ell = 11h/12\ell$;

b) $x_2/\ell = 3h/4\ell$; c) $x_2/\ell = h/4\ell$; d) $x_2/\ell = h/6\ell$ kesitlerindeki öngerilmeli ve

öngerilmemiş durumda x_1/ℓ ye göre grafikleri.

Şekil 4.14 ‘de $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı dikdörtgen delik uzunluklarında öngerilmeli ve öngerilmesiz durum için x_1/ℓ ‘ye göre grafikleri verilmektedir. Burada ℓ_E dikdörtgen deliğin mesnet ile arasındaki mesafedir. Grafiklerden görüldüğü gibi ℓ_E mesafesi küçük olduğunda mesnet etkisi nedeniyle öngerilmeli ve öngerilmesiz durumda elde edilen gerilme şiddetleri arasındaki fark artmaktadır. Aynı yorumlar Şekil 4.15 de verilen $\sigma_{22}^{(1)}/p$ ve Şekil 4.16 da verilen $\sigma_{12}^{(1)}/p$ gerilmesinin farklı ℓ_E değerlerinde, beş farklı kesitte verilen öngerilmeli ve öngerilmesiz durumlardaki x_1/ℓ ye göre grafikleri içinde verilebilir. Yani öngerilmenin olması gerilme şiddetini mutlak değerce düşürmekte ve dikdörtgen deliğe ve mesnetlere yaklaştıkça gerilme yığılmasının şiddeti artmaktadır. Aynı durum Şekil 4.17 de verilen $\sigma_{12}^{(1)}/p$ gerilmesinin x_2/ℓ ye göre grafiğinde de gerçekleşmektedir.

Şekil 4.18 ‘de $\sigma_{22}^{(1)}/p$ gerilmesi grafikleri farklı h_B (dikdörtgen delik kalınlıkları) için öngerilmeli ve öngerilmesiz durumda farklı dört kesitteki grafikleri verilmektedir. Deliğin kalınlığının artması gerilme şiddetini artırmakta ama öngerilmenin olması verilen h_B değerindeki gerilme şiddetini yüklemeye yakın bölgede önemli ölçüde düşürmektedir.

5. SONUÇ ve DEĞERLENDİRME

Tez kapsamında yapılan araştırmalarda elde edilen sayısal sonuçlar ve değerlendirmesi aşağıdaki şekilde maddelenebilir:

1. Tez kapsamında, yapısında geometrik süreksizlik (dikdörtgen veya kare delik) veya malzeme süreksizliği (dikdörtgen dolgu) içeren şerit-levhalarda gerilme yığılmasına ait bazı sınır değer problemleri lineer ve lineerleştirilmiş elastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde ele alınmıştır.
2. Ele alınan sınır değer problemlerinin çözümü sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla elde edilmiştir. Bunun için gerekli algoritma ve programlar yapılmış olup, herhangi bir hazır sonlu eleman paket programı kullanılmamıştır.
3. Yapılan algoritma ve sonlu eleman programlarından elde edilen sayısal sonuçlar özel durumda, literatürdeki uygun sonuçlar ile karşılaştırılarak test edilmiştir.
4. Farklı (basit ve ankastre mesnet) mesnet koşulları için dikdörtgen veya kare delik içeren kompozit şerit-levhanın karşılıklı iki kenarından çekilmesi veya üst yüzeyinden düzgün yayılı normal yük ile eğilmesi problemleri ele alınmış ve başarıyla çözülmüştür.
5. Tez kapsamında, ilk kez, dikdörtgen şeklinde geometriye sahip dolgu içeren sonlu boyutlara sahip şerit-levhalarda gerilme yığılmasına ait problemler modellenmiş ve karşılıklı iki kenarından ankastre mesnetli olması durumunda şerit-levhanın üst yüzeyinden düzgün yayılı normal yük etkisinde eğilmesi problemi ele alınmış ve başarıyla çözülmüştür.
6. Tez kapsamında, ilk kez, dikdörtgen delik içeren öngerilmeli kompozit şerit-levhalarda gerilme durumuna ait problemlerin matematiksel modellemesi, öngerilmenin ek yüklemekten çok daha büyük olduğu kabulü ile nonlineer elastisite teorisine ait kesin alan denklemleri lineerize edilerek yapılmıştır.
7. Öngerilmeli yapı elemanlarına ait sınır değer problemlerinin çözümü için sonlu elemanlar yöntemi program ve algoritmaları bazı açılardan geliştirilmiştir.
8. Öngerilmeli yapı elemanları için elde edilen modelleme yardımıyla, karşılıklı iki kenarından basit mesnetli dikdörtgen delik içeren öngerilmeli kompozit şerit-levhanın eğilmesi probleminde, öngerilmenin, şerit-levhanın malzeme ve geometrik parametrelerinin, levhanın yapısında bulunan dikdörtgen delik çevresinde oluşan gerilme yığılmasına etkileri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Öngerilmenin olması gerilme şiddetini

düşürmektedir.

Elde edilen bu sonuçların değerlendirmesi aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

1. Tez kapsamında elde edilen sayısal sonuçlar, ele alınan şerit-levhanın içerdiği dikdörtgen deliğin keskin köşelere sahip olması nedeniyle, bazı nedenlerle ancak yuvarlatılmış köşelere sahip dikdörtgen delik ele alınabilmiş literatürdeki çoğu çalışmada elde edilen sonuçlardan daha güvenilir olmaktadır.
2. Yine tez kapsamında, ilk kez, literatürde mevcut olmayan dikdörtgen dolgu içeren yapı elemanlarına ait sınır değer problemleri ele alınmış dikdörtgen dolgu içeren ankastre tutturulmuş şerit-levhanın eğilmesi problemi incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, literatürde ancak daire veya elips şeklinde dolgu (inclusion) olarak modellenen ve pek çok alanda karşılaşılan dolgu problemleri için farklı bir bakış açısı ve yenilik sunmaktadır.
3. Lineer elastisite teorisi çerçevesinde modellenen delik ya da dolgu problemleri ele alınan örneklerde, şerit-levhanın malzeme ve geometrik parametrelerinin dikdörtgen delik veya dikdörtgen dolgudan dolayı yapıda oluşan gerilme yığılmalarına etkisi ayrıntılı olarak incelenmiş ve elde edilen sayısal sonuçlar kolay anlaşılır şekilde çok sayıda grafik ile verilmiştir.
4. Yapı elemanlarının montajı esnasında istemeden oluşan ya da bazı durumlarda yapı elemanı, makine parçası veya çeşitli kaplamaların, yükleme esnasında, mukavemetini artırıcı özelliği gibi nedenlerle oluşturulan öngerilmelerin yapı elemanının mekaniğine etkisinin önceden bilinmesi mühendislik sonuçları bakımından mutlaka incelenmesi gerekli olan bir konudur. Fakat öngerilmeli yapı elemanlarının incelenmesi ancak nonlinear elastisite teorisi çerçevesinde mümkün olur ve çoğu durumda elde edilen sınır değer problemleri çözümü çok zor veya imkansız olur. Bu tez kapsamında sonlu boyutlu dikdörtgen delik içeren öngerilmeli yapı elemanlarına ait problemlerin nonlinear elastisite teorisi çerçevesinde, öngerilmenin yüklemeden çok büyük olduğu kabulü ile modellenmesi mümkün olmuştur.
5. Öngerilmeli yapı elemanları için elde edilen modelleme yardımıyla, karşılıklı iki kenarından basit mesnetle tutturulmuş dikdörtgen delik içeren öngerilmeli kompozit şerit-levhanın eğilmesi problemi başarıyla incelenerek ayrıntılı sayısal sonuçlar verilmiştir.
6. Ele alınan sınır değer probleminin formülasyonu lineer olmayan yaklaşım kullanılarak elde edildiğinden burada elde edilen sonuçların, öngerilmenin ve yükün ayrı ayrı yapı elemanına etkimesi durumunda klasik teoriden elde edilen çözümlerin superpozisyonu

yardımıyla elde etmek mümkün değildir.

Yukarıda ifade edilenlerden başka, tezde teklif edilen ve geliştirilen algoritmaların ve programların önerilmeli ve önerilmesiz farklı delik ya da dolgu kombinasyonları ile farklı sınır koşulları içeren pek çok sınır değer problemine uygulanabilmesi, tezde yapılan araştırmaların önemini bir kez daha artırmaktadır.

KAYNAKLAR

Akbarov, S.D. ve Guz', A.N., (2000), *Mechanics of Curved Composites*, Kluwer Academic Publishers, London.

Bert, C.W., (2001), "Generalized Bending of a Plate with a Circular Inclusion of Arbitrary Rigidity", *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 36(3):341-345.

Biot, M.A., (1965), *Mechanics of Incremental Deformations*, John Wiley & Sons, Inc., New York London Sydney.

Chau, K.T. ve Wei, X.X., (2001), "Stress Concentration Reduction at a Reinforced Hole Loaded by a Bonded Circular Inclusion", *Journal of Applied Mechanics-Transaction of The ASME*, 68(3):405-411.

Christensen, R.M., (1979), *Mechanics of Composite Materials*, John Wiley & Sons, Inc.

Gibson, R.F., (1994), *Principles of Composite Material Mechanics*, McGraw-Hill International Editions, New York.

Green, A.E. ve Adkins J.E., (1960), *Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics*, Oxford at The Clarendon Press.

Guz', A.N., (1983), *Mechanics of Brittle Fracture of Materials with Initial Stresses*, Naukova Dumka, Kiev (in Russian).

Guz', A.N., (1983), "Mechanics of The Brittle Failure of Materials with Initial Stress", *Soviet Appl. Mech. (English Translation of Prikladnaya Mekhanika)*, 19(4):293-308.

Guz', A.N., (1990), "One The Development of Brittle-Fracture Mechanics of Materials with Initial Stresses", *Int. Apl. Mech. (English Translation of Prikladnaya Mekhanika)*, 32(4):316-323.

Guz', A.N., Dyshe, M.S. ve Nazarenko, V.M., (1992), *Fracture and Stability of Materials with Cracks*, Vol. 4 Book 1 in: Guz', A.N.(ed), *Non-Classical Problems of Fracture Mechanics*, Vols. 1-4, Naukova Dumka, Kiev (in Russian).

Guz', A.N., (1996a), "One Nonclassical Problems and Mechanisms of Fracture Mechanics and Its Description", *Int. Apl. Mech. (English Translation of Prikladnaya Mekhanika)*, 32(11):827-844.

Guz', A.N., (1996b), "One The Development of Brittle-Fracture Mechanics of Materials with Initial Stresses", *Int. Apl. Mech.*, Oct. 32(4):316-323, Publisher: Plenum Publ. Corp., New York, NY, USA ISSN: 1063-7095.

Guz', A.N., (1999), *Fundamentals of The Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Heller, S.R. Jr., Brock, J.S. ve Bart, R., (1958), "The Stresses Around a Rectangular Opening with Rounded Corners in a Uniformly Loaded Plate", *Trans., 3rd U.S. Congr. on Appl. Mech.*,

American Institute of Mining, Metallurgical and Petroleum Engineers, New York, 357-368.

Herrmann, K.P., Müller, W.H. ve Neumann, S., (1999), "Linear and Elastic-Plastic Fracture Mechanics Revisited by Use of Fourier Transforms-Theory and Application", *Computational Materials Science*, 16(1-4):186-196.

Hinton, E. ve Campbell, J., (1979), "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Function Using a Least Square Method", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 8:461-480.

Hufenbach, W., (1992), "Stress Concentration Analysis in Fibre-Reinforced Ceramic Components", *J. Euro Ceramic Soc.*, 10:195-203.

Hufenbach, W. ve Kroll, L., (1999), "Stress Analysis of Notched Anisotropic Finite Plates under Mechanical and Hygrothermal Loads", *Arch. Appl. Mech.*, 69:145-159.

Hufenbach, W. ve Zhou, B., (2001), "Solutions for an Anisotropic, Finite Plate with an Elastic Inclusion and a Loaded Boundary", *Composite Structures*, 52:161-166.

Hwu., C. ve Liao, C.Y., (1994), "A Special Boundary Element for The Problems of Multi-Holes, Cracks and Inclusions", *Computers and Structures*, 51(1):23-31.

Jong, T. De, (1981), "Stress Around Rectangular Holes in Orthotropic Plates", *J. Composite Materials*, 15:311-328.

Lei, G.H., Charles, W.W. Ng ve Rigby, D.B., (2001), "Stress and Displacement Around an Elastic Artificial Rectangular Hole", *Journal of Engineering Mechanics*, September, 880-890.

Lekhnitskii, S.G., (1968), *Anisotropic Plates*, Gordon & Breach, London.

Mura, T., (1988), "Inclusion Problems", *Appl. Mech. Rev.*, 41(1):15-20.

Muskhelishvili, N.I., (1954), *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*, 4th Edition, J.R.M. Radok Translator, Noordhoff International Publishing, Holland.

Nemeth, M.P., (1996), "Buckling and Postbuckling Behavior of Laminated Composite Plates with a Cutout", NASA TP 3586, NASA LaRC, Hampton.

Romeo, G. ve Frulla, G., (1997), "Experimental Behaviour of Graphite/Epoxy Panels with Holes under Biaxial Compression and Shear Loads", ICCM-11, 11th Int. Conf. On Composite Materials, Australian Composite Structures Society, Melbourne, V:635-644.

Romeo, G., (2001), "Analytical and Experimental Behavior of Laminated Panels with Rectangular Opening under Biaxial Tension, Compression and Shear Loads", *Journal of Composite Materials*, 35(08):639-663.

Savin, G.N., (1961), *Stress Concentration Around Holes*, E. Gros Translator, Pergamon, Oxford.

Song, S.H. ve Kim, J.B., (1995), "Analysis of Stress-Distribution Around Defects and Inclusions by FEM", *The Korean Society of Mechanical Engineers Journal*, 9(3):351-359.

Theocaris, P.S. ve Petrou, L., (1989), "From The Rectangular Hole to The Ideal Crack", *Int. J. Solids and Structures*, 25(3):213-233.

Theocaris, P.S., (1991), "Peculiarities of The Artificial Crack", *Engineering Fracture Mechanics*, 38(1):37-54.

Timoshenko S.P. ve Goodier J.N., (1970), *Theory of Elasticity*, Third Edition, McGraw-Hill International Editions, London.

Ukadgaonker, V.G. ve Rao, D.K.N., (2000a), "A General Solution for Stress Resultants and Moments Around Holes in Unsymmetric Laminates", *Composite Structures*, 49:27-39.

Ukadgaonker, V.G. ve Rao, D.K.N., (2000b), "A General Solution for Moments Around Holes in Symmetric Laminates", *Composite Structures*, 49:41-54.

Ukadgaonker, V.G. ve Rao, D.K.N., (2000c), "A General Solution for Stress Around Holes in Symmetric Laminates under Inplane Loading", *Composite Structures*, 49:339-354.

Xu, X.W., Yue, T.M., ve Man, H.C., (1999), "Stress Analysis of Finite Composite Laminate with Multiple Loaded Holes", *International Journal of Solids and Structures*, 36:919-931.

Wheeler, L., (1985), "The Problem of Minimizing Stress Concentration at a Rigid Inclusion", *Journal of Applied Mechanics-Transaction of The ASME*, 52(1):83-86.

Yahnioğlu, N., (1996), "Eğrisel Yapıya Sahip Kompozit Malzemedan Hazırlanmış Yapı Elemanlarının Statiğine Uygun Sınırdeğer Problemlerinin FEM ile İncelenmesi", *Doktora Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü*.

Yahnioğlu, N. ve Mermer, A., (2001), "Kare Delik İçeren Çokkatlı Kompozit Malzemedan Oluşan Şerit-Plaktaki Gerilme Dağılımı", *XII. Ulusal Mekanik Kongresi*, 10-14 Eylül 2001, S.Ü., Konya, 853-859.

Yahnioğlu, N. ve Mermer Yücel, A., (2002), "Dikdörtgen Delik Formunda Dolgu Malzemesi İçeren Şerit-Levhada Gerilme Birikimi", *Y.T.Ü. Dergisi*, İstanbul, 2002(4):67-77.

Zheng, X. ve Xu, X., (1999), "Stress Analysis of Finite Composite Laminates with Elliptical Inclusion", *Computers and Structures*, 70:357-361.

Zienkiewicz, O.C. ve Taylor, R.L., (1989), *The Finite Element Methods: Basic Formulation and Linear Problems*, Vol. 1, 4th Ed., Mc Graw-Hill Book Company, Oxford.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 05.05.1964

Doğum yeri İstanbul

Lise 1978-1981 Eyüp Lisesi

Lisans 1982-1987 Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fak.
İnşaat Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 1988-1990 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Yapı Programı

Doktora 1992-2003 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Yapı Programı

Çalıştığı kurum(lar)

1986-1987 Şerifoğlu Mühendislik Mimarlık Bürosu
1987-Devam ediyor YTÜ Araştırma Görevlisi