

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DİKDÖRTGENSEL BÖLGEDE LİNEER KOMPLEKS DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN LAGUERRE KOLLOKASYON
YÖNTEMİ**

Havva Nur VURAL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

2017

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DİKDÖRTGENSEL BÖLGEDE LİNEER KOMPLEKS DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN LAGUERRE KOLLOKASYON
YÖNTEMİ**

Havva Nur VURAL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**(Bu tez Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birim
tarafından FYL-2016-1599 nolu proje ile desteklenmiştir.)**

2017

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DİKDÖRTGENSEL BÖLGEDE LİNEER KOMPLEKS DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN LAGUERRE KOLLOKASYON YÖNTEMİ**

Havva Nur VURAL

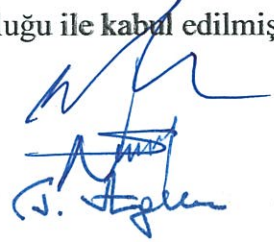
**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Bu tez 18.6.7/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Şuayip YÜZBAŞI (Danışman)

Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

Prof. Dr. Gabil ADİLOV



ÖZET

DİKDÖRTGENSEL BÖLGEDE LİNEER KOMPLEKS DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN LAGUERRE KOLLOKASYON YÖNTEMİ

Havva Nur VURAL

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Haziran 2017, 60 sayfa

Bu çalışmada, lineer kompleks diferansiyel denklemlerin çözümleri için dikdörtgensel bölgede tanımlı kollokasyon noktalarını kullanarak Laguerre polinomlarını temel alan bir kollokasyon yöntemi verilmiştir. Yöntemde ilk olarak Laguerre polinomları, türevleri ve çözüm formu matris formunda yazılır. Daha sonra kollokasyon noktaları ve matris işlemleri kullanılarak kompleks diferansiyel denklem problemi cebirsel denklem problemine indirgenir. Tam çözümler bilinmediğinde çözümlerin güvenilirliğini test etmek için rezidüel hata tahmini yöntemi sunulur. Yöntemin ve hata tahmini tekniğinin etkililiğini doğruluğunu göstermek için birkaç sayısal örnek verilmiştir. Ayrıca, bilinen başka yöntemler ile karşılaştırmalar yapılarak yöntemin etkinliği gösterilir.

ANAHTAR KELİMELE: Laguerre polinomları, Kollokasyon noktaları, Yaklaşık çözümler, Rezidüel hata tahmini.

JÜRİ: Doç. Dr. Şuayip YÜZBAŞI (Danışman)

Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

Prof. Dr. Gabil ADİLOV

ABSTRACT

LAGUERRE COLLOCATION METHOD FOR THE SOLUTION OF LINEAR COMPLEX DIFFERENTIAL EQUATIONS IN RECTANGULAR DOMAINS

Havva Nur VURAL

MSc Thesis in Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

June 2017, 60 pages

In this thesis, a collocation method based on Laguerre polynomials is presented to solve complex differential equations by using collocation points defined on a rectangular region. From the methods; firstly Laguerre polynomials, derivatives and solution forms are written in matrix form. Then, by using collocation points and matrix operations, complex differential equation problem is reduced to algebraic equation problem. When the exact solutions are not known, to test the reliability of solutions, residual error estimation method is offered. In order to demonstrate the efficiency and accuracy of the method and error estimation technique, several numerical examples are considered. Also, by making comparisons with known other methods, the efficiency of method is demonstrated.

KEYWORDS: Laguerre polynomials, Collocation points, Approximate solutions,
Residual error estimation.

COMMITTEE: Assoc.Prof.Dr. Şuayip YÜZBAŞI (Supervisor)
Prof.Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL
Prof.Dr. Gabil ADILOV

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, lineer kompleks diferansiyel denklemlerin çözümleri için dikdörtgensel bölgede tanımlı kollokasyon noktalarını kullanarak Laguerre polinomlarını temel alan bir kollokasyon yöntemi verilmiştir.

Bu çalışma esas olarak Giriş, Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taramaları, Materyal ve Metot, Bulgular ve Sonuç olmak üzere beş ana bölümden oluşur.

Birinci bölümde, çalışmanın amaç ve kapsamı, lineer kompleks diferansiyel denklemler, birinci ve ikinci mertebeden lineer kompleks diferansiyel denklemler ve Laguerre polinomlarının tarihi gelişimi sunulmuştur.

İkinci bölümde, Laguerre diferansiyel denklemler ve Laguerre polinomları, Laguerre polinomlarının önemli özellikleri ve türevleri arasındaki bağıntılar sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, problemin tanıtılması, kollokasyon noktalarının tanımlanması, Laguerre polinomlarının matris formu, çözüm yöntemi için gerekli temel matris bağıntıları, başlangıç koşullarının matris formu, çözümün elde edilmesi ve rezidüel hata tahmini sunulmuştur.

Dördüncü bölümde, metodun etkililiğini ve doğruluğunu açıklamak için birkaç sayısal örnek sunulmuştur.

Bu çalışma Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Şuayip YÜZBAŞI yönetiminde hazırlanarak, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur. Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Şuayip YÜZBAŞI 'ya teşekkür ederim ve saygılarımı sunarım. Eğitim hayatım boyunca bana her zaman destek olan canım aileme yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
1.1.Amaç ve Kapsam	1
1.2. Lineer Kompleks Diferansiyel Denklemler	2
1.2.1. Birinci mertebeden lineer kompleks diferansiyel denklemler	3
1.2.2. İkinci mertebeden lineer kompleks diferansiyel denklemler	4
1.3. Laguerre Polinomlarının Tarihi Gelişimi.....	4
2. KURAMSAL BİLGİLER ve KAYNAK TARAMALARI	9
2.1. Laguerre Diferansiyel Denklemleri ve Laguerre Polinomları	9
2.2. Laguerre Polinomlarının Önemli Özellikleri	12
2.3. Laguerre Polinomları ve Türevleri Arasındaki Bağlıntılar	13
3. MATERYAL ve METOT	16
3.1. Diktörtgensel Bölgede Lineer Kompleks Diferansiyel Denklemlerin Çözümü İçin Laguerre Kollokasyon Yöntemi.....	16
3.1.1. Problemin tanıtılması	16
3.1.2. Çözüm formu	16
3.1.3. Kollokasyon noktalarının tanımlanması	18
3.1.4. Laguerre polinomlarının matris formu.....	19
3.1.5. Çözüm yöntemi için gerekli temel matris bağıntıları.....	21
3.1.6. Başlangıç koşullarının matris formu	24
3.1.7. Çözümün elde edilmesi.....	25
3.1.8. Rezidüel hata tahmini.....	27
4. BULGULAR.....	31
5. SONUÇ	56
6. KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

R	: Reel sayılar kümesi
C	: Kompleks sayılar kümesi
$L_n(z)$	: Laguerre polinomları
$P_k(z)$	: Diferansiyel denklemin katsayıları
a_n	: Laguerre polinomlarının katsayıları
N	: Kesme Sınırı
z_{pq}	: Kollokasyon noktaları
A	: Katsayılar matrisi
W	: Arttırılmış matris
U	: Koşullar için arttırılmış matris
$\tilde{W}$	: Koşullar kullanılmış arttırılmış matris
$\tilde{G}$	: Sağ taraftaki koşulları kullanılmış arttırılmış matris

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Edmond Nicolas Laguerre (1834 Bar-le-Duc- 1886 Bar-le- Duc)	6
Şekil 4.1. Örnek 4.1 için $N=5$ ve $N=9$ ile elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	37
Şekil 4.2. Örnek 4.1 için $N=5$, $M=6$ ve $N=9$, $M=10$ için elde edilen gerçek ve tahmini mutlak hataların karşılaştırılması.....	37
Şekil 4.3. $N=4$ ve $a=-1$, $b=1$, $c=-1$, $d=1$ için kollokasyon noktaları.....	38
Şekil 4.4. Örnek 4.2 için $N=5$, $N=6$, $N=7$, $N=8$ ve $N=9$ ile elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	41
Şekil 4.5. Örnek 4.3 için $N=5$, $N=7$ ve $N=9$ ile elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	46
Şekil 4.6. Örnek 4.4 için $N=5$, $N=6$, $N=7$ ve $N=8$ ile elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	50
Şekil 4.7. Örnek 4.5 için $N=4$ ve $N=7$ ile elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	54
Şekil 4.8. Örnek 4.5 için $N=4$, $M=5$ ve $N=7$, $M=8$ için elde edilen gerçek ve tahmini mutlak hataların karşılaştırılması.....	55

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Örnek 1'in $N=5$ ve $N=9$ kesme sınırları için gerçek mutlak hataları.....	34
Çizelge 4.2. Örnek 1'in $N=5$, $M=6$ ve $N=9$, $M=10$ kesme sınırları için gerçek ve tahmini mutlak hataların reel kısımlarının karşılaştırılması.....	35
Çizelge 4.3. Örnek 1'in $N=5$, $M=6$ ve $N=9$, $M=10$ kesme sınırları için gerçek ve tahmini mutlak hataların imajiner kısımlarının karşılaştırılması.....	36
Çizelge 4.4. Örnek 2'nin $N=5$ ve $N=9$ kesme sınırları için gerçek mutlak hataların reel kısımlarının Laguerre, Taylor ve Bessel metodu ile karşılaştırılması.....	39
Çizelge 4.5. Örnek 2'nin $N=5$ ve $N=9$ kesme sınırları için gerçek mutlak hataların imajiner kısımlarının Laguerre, Taylor ve Bessel metodu ile karşılaştırılması.....	40
Çizelge 4.6. Örnek 3'ün $N=5$ ve $N=9$ için gerçek mutlak hataların reel kısmının Laguerre metodu ve Bessel metodu ile karşılaştırılması.....	42
Çizelge 4.7. Örnek 3'ün $N=5$ ve $N=9$ kesme sınırları için gerçek mutlak hataların imajiner kısmının Laguerre metodu ve Bessel metodu ile karşılaştırılması.....	43
Çizelge 4.8. Örnek 3'ün $N=5$, $M=6$ ve $N=9$, $M=10$ için gerçek ve tahmini mutlak hataların reel kısımlarının karşılaştırılması.....	44
Çizelge 4.9. Örnek 3'ün $N=5$, $M=6$ ve $N=9$, $M=10$ için gerçek ve tahmini mutlak hataların imajiner kısımlarının karşılaştırılması.....	45
Çizelge 4.10. Örnek 4'ün $N=5$ ve $N=10$ için gerçek mutlak hataların karşılaştırılması.....	47

Çizelge 4.11. Örnek 4'ün $N=5$, $M=6$ ve $N=10$, $M=11$ için gerçek ve tahmini mutlak hataların reel kısımlarının karşılaştırılması	48
Çizelge 4.12. Örnek 4'ün $N=5$ ve $N=10$ için mutlak hataların imajiner kısımlarının karşılaştırılması.....	49
Çizelge 4.13. Örnek 5'in $N=4$ ve $N=7$ için gerçek mutlak hataların karşılaştırılması.....	51
Çizelge 4.14. Örnek 5'in $N=4$, $M=5$ ve $N=7$, $M=8$ için gerçek ve tahmini mutlak hataların reel kısımlarının karşılaştırılması.....	52
Çizelge 4.15. Örnek 5'in $N=4$, $M=5$ ve $N=7$, $M=8$ için mutlak hataların imajiner kısımlarının karşılaştırılması.....	53

1. GİRİŞ

1.1.Amaç ve Kapsam

Diferansiyel denklemler bilim ve mühendisliğin birçok alanında önemli rol oynamaktadır. Örneğin; matematik, fizik ve hidrolik, dinamik, mekanik, elektrik gibi mühendisliğin çeşitli alanlarında problemler diferansiyel denklemler ve onların sistemleri ile modellenir. Bu denklemlerin tam çözümlerinin hesaplanması ise bazı durumlarda mümkün olmadığından bu durumlarda denklemlerin yaklaşık çözümlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Yaklaşık çözümlerin hesaplanması için birçok farklı yöntemler kullanılmıştır. Bu yöntemler genel olarak sonlu farklara dayanan yöntemler ile sonlu elemanlar analizi ile elde edilen yöntemler olarak ikiye ayrılabilir. Sonlu farklar yöntemleri arasında Euler yöntemi (Atkinson 1989), Newmark-Beta yöntemi (Newmark 1959), Runge-Kutta yöntemi (Runge 1895, Kutta 1901) ve Lax-Wendroff yöntemi (Lax 1960) sayılabilir. Sonlu elemanlar analizine dayanan yöntemler arasında ise Taylor sıralama yöntemi (Wang 2014), Lucas sıralama yöntemi (Çetin 2015), Bernstein sıralama yöntemi (Daşcıoğlu 2014) gibi kollokasyon yöntemleri ile Çebişev Galerkin yöntemi (Biazar & Salehi 2016) ve Kübik B-spline Galerkin yöntemi (Karakoç & Zeybek 2016) gibi Galerkin yöntemleridir. Bunlardan başka, Adomian ayrıştırma yöntemi (Adomian 1988), homotopi pertürbasyon yöntemi (He 1999), varyasyonel iterasyon yöntemi (He 1999) gibi nispeten yeni yöntemler de literatürde yaygınlık kazanmaktadır. Bu metotların uygulanmasında ise denklemlerin çözüm sürelerinin azaltılması, elde edilen sonuçların güvenilirliğinin artırılması amacıyla bilgisayar programları kullanılmaktadır. Bunlardan bazıları ise, Matlab, Maple ve Mathematica olarak bilinmektedir.

Ayrıca, kompleks diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri ise; dikdörtgensel bölgede, Taylor kollokasyon yöntemi (Sezer, M., Gülsu, M. ve Yalçınbaş, S.,2006), Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı, Ş., Şahin, N. ve Sezer,M., 2012) ve Hermite işlemsel matris yöntemi (Batoöl, F., Zubair, T. ve Mohyud-Din, S.T., 2015) ile dairesel bölgede, Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı, Ş. ve Sezer, M., 2013), Taylor polinom yaklaşımı (Gülsu, M. ve Sezer, M.,2007) ve Legendre polinom yaklaşımı (Düşünceli, F. ve Çelik, E., 2015) ile eliptik bölgede ise Taylor kollokasyon yöntemi (Sezer, M., Gülsu, M. ve Tanay, B., 2006), Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı, Ş.,

Şahin, N. ve Gülsu, M., 2011) ve Hermite matris kollokasyon yöntemi (Bagherpoorfard, M. ve Ghassabzade, F.A., 2013) ile bazı araştırmacılar tarafından elde edildi. Y.Wang (Wang, Y.,2017) kompleks diferansiyel-fark denklemlerin çözümleri üzerine çalışmıştır. Ayrıca, kompleks diferansiyel denklemler ile ilgili olarak meromorphic fonksiyonlar (Barsegian, G., 2002), çözümlerin topolojik yapıları (Barsegian, G., 2005), salınımlılığı (Ishisaki, K. ve Tohge, K., 1997), çözümlerin büyüme tahminleri (Heittokangas, J., Korhonen, R., Rattya, J., 2004) en iyi rasyonel yaklaşım (Prokhorov, V.A., 2005), kompleks bölgede polinom yaklaşımı (Andrievskii, V., 2005) üzerine çalışmalar yapılmıştır. Diğer taraftan, Laguerre kollokasyon yöntemi, Laguerre polinomlarını temel alan bir kollakasyon yöntemi, Lane-Emden tipi denklemler (Gürbüz, B. ve Sezer, M., 2014) ve gecikmeli diferansiyel denklemler (Gülsu, M., Gürbüz, B., Öztürk, Y. ve Sezer, M., 2011), pantograph-type Volterra integro-diferansiyel denklemler (Yüzbaşı, Ş., 2014) için kullanılmıştır.

Diferansiyel denklemler veya integral denklemler bazıları elemanter metotlarla çözülebilmekte; fakat çoğunun tam çözümünün bulunması ya çok zordur ya da mümkün olmamaktadır. O zaman seri çözümlerine başvurulmaktadır. Bunlardan birisi Laguerre diferansiyel denklemlerinin çözümleri olan Laguerre polinomlarına dayalı serilerdir.

1.2.Lineer Kompleks Diferansiyel Denklemler

n .mertebeden lineer homojen kompleks diferansiyel denklem $P_k(z)w^{(n-k)}(z)$ formundaki terimlerin toplamının sıfıra eşitlenmesiyle elde edilmektedir. Yani;

$$\sum_{k=0}^n P_k(z)w^{(n-k)}(z) = P_0(z)w^n(z) + P_1(z)w^{n-1}(z) + \dots + P_n(z)w(z) = 0 \quad (1.1)$$

şeklinde ifade edilir. (1.1) denkleminin genel çözümü n tane keyfi sabit içermektedir.

$$w(z_0) = w_0, w'(z_0) = w_1, \dots, w^{(n-1)}(z_0) = w_{n-1} \quad (1.2)$$

(1.1), (1.2) başlangıç değer problemi $z = z_0$ noktası problemin tekil noktası olmaması koşuluyla tek çözümü vardır.

Diferansiyel denklem,

$$P_0(z)w^n(z) + P_1(z)w^{n-1}(z) + \dots + P_n(z)w(z) = Q(z) \quad (1.3)$$

formunda ise n . mertebeden lineer kompleks homojen olmayan diferansiyel denklem denir. (1.3)'ün homojen halinin genel çözümü $m(z)$ ve (1.3) denkleminin bir özel çözümü $n(z)$ olmak üzere (1.3) diferansiyel denkleminin genel çözümü $m(z) + n(z)$ şeklinde ifade edilir. (Düşünceli, F., 2015)

1.2.1. Birinci mertebeden lineer kompleks diferansiyel denklemler

Birinci mertebeden lineer kompleks diferansiyel denklemler

$$w'(z) = P_0(z) + P_1(z)w(z)$$

şeklinde gösterilmektedir. Bu denklemin çözümü için $w = uv$ ifadesi denklemde w yerine yazılırsa;

$$(uv)' = P_0(z) + P_1(z)(uv)$$

$$u'v + uv' = P_0(z) + P_1(z)(uv)$$

denklemini elde edilir. Buradan $uv' = P_1(z)uv$ yerine yazılırsa;

$$uv' = P_1(z)uv$$

$$v' = P_1(z)v$$

$$\frac{v'}{v} = P_1(z)$$

$$v = e^{\int P_1(s)ds}$$

ve $u'v = P_0(z)$ eşitliğinden;

$$u'v = P_0(z)$$

$$u' = P_0(z)e^{-\int P_1(s)ds}$$

$$u(z) = c + \int P_0(t)e^{-\int P_1(s)ds} dt$$

Elde ettiğimiz sonuçları $w = uv$ denkleminde yerine yazarsak;

$$w(z) = c(e^{\int P_1(s)ds}) + (e^{\int P_1(s)ds}) \left(\int P_0(t) e^{-\int P_1(s)ds} dt \right)$$

çözüm formu elde edilir. (Düşünceli, F., 2015)

1.2.2. İkinci mertebeden lineer kompleks diferansiyel denklemler

İkinci mertebeden lineer diferansiyel denklem;

$$w''(z) + P(z)w'(z) + Q(z)w(z) = 0 \quad (1.4)$$

formundadır. Bu denklem ile Riccati denklemi olan;

$$y'(z) = f_0(z) + f_1(z)y(z) + f_2(z)(y(z))^2 \quad (1.5)$$

denklemini arasındaki bir bağ vardır. (1.5) Riccati denkleminde $y(z)$ yerine,

$$y(z) = -\frac{1}{f_2(z)} \frac{w'(z)}{w(z)}$$

ifadesi yazıldığında;

$$w''(z) - \left\{ f_2'(z) [f_2(z)]^{-1} + f_1(z) \right\} w'(z) + f_1(z) f_2(z) w(z) = 0$$

denklemini elde edilir. Burada;

$$P(z) = f_2'(z) [f_2(z)]^{-1} + f_1(z)$$

$$Q(z) = f_1(z) f_2(z)$$

yazıldığında ikinci mertebeden lineer kompleks diferansiyel denklem (1.4) elde edilir. (Düşünceli, F., 2015)

1.3. Laguerre Polinomlarının Tarihi Gelişimi

Laguerre, Edmond Nicolas (9 Nisan 1834- Bar-le-Duc – 14 Ağustos 1886 Bar-le-Duc) 1834 Nisan ayında Bar-le-Duc'ta dünyaya gelmiştir. Edmond Laguerre çocukluğunda sağlık sorunları yaşamış ve bu onun tüm çalışmalarını engellemiştir. Ailesi bu sağlık sorunları nedeniyle onu bir devlet okulundan diğerine taşımaya zorlandı. Bununla birlikte tüm bu zor şartlar altında olmasına rağmen, 1852'de Paris'te Ecole Polytechnique'ye girmeyi başardı ancak her geçen gün yorgunluk çekmiştir.

Eğitimi Paris'teki École Polytechnique'de tamamlamıştır ve burada modern diller ve matematik alanlarında başarılı olmuştur. Ancak genel gösterimi göreceli olarak zayıftı: sınıfın başarı sıralamasında 46. sırada yer almıştır. Bununla birlikte, sadece 19 yaşındayken ünlü "On The Theory of Foci" i yayınlamıştır. Bu hiçbir şekilde yeteneğini yansıtmamaktadır, aksine sağlık sorunlarından çok etkilenmiştir. Onun ilk çalışması yetenekli bir matematikçi olmasının bir göstergesi olmuştur. Odaklarının teorisi üzerine 1853 yılında ortaya çıktı ve karmaşık projektif düzlemde çizgi arasındaki açıyı araştıran, onun en önemli temsilcilerinden biridir. Çalışmasında izdüşüm geometrisinden metrik geometriye nasıl geçileceğini göstermiştir. Bunun için kesişen iki doğrunun kesişme noktasından geçen izotop iki doğrunun iki kat oranına dayanarak, ilk iki doğru arasındaki açıyı hesaplamıştır. Bir doğru ya da bir çemberi, bir hareketinin karşıt iki yönde çizebileceği bir yörünge gibi düşünerek doğrulttu geometrisini kurmuştur. Aynı zamanda cebirsel denklemler, sürekli kesirler, özellikle ıraksak seriler yerine yakınsal sürekli kesirler ve ikinci dereceden şekiller üzerine önemli incelemeler yapmıştır.

Laguerre 1854'te École Polytechnique'den mezun olduktan sonra askeri bir kariyer kararı almıştır. Strazburg yakınlarındaki Mutzig'de 1854-1864 yılları arasında silah üretimi için çalışan bir topçu subayı olarak görevlendirilmiştir. On yıldır, ordudayken hiçbir şey yayınlamamıştır. Ancak bu süreç boyunca matematik çalışmalarına devam etti ve 1864'te komisyondan istifa etmiş ve École Polytechnique'de öğretmen olarak görev almak üzere Paris'e geri dönmüş olduğu için çalışmalarına devam etmiştir. Hayatının geri kalanı için orada kalmış fakat 1874'ten sonra Ecole'de araştırmacılık görevine atanmıştır. Çalışmalarının hayranı olan Bertrand, Bilimler Akademisi seçimlerinde onu desteklemiş ve College de France'daki matematiksel fizik profesörlüğü görevine getirilmesi konusunda Laguerre'e desteklemiştir. Bu göreve 1883'te atanmış ama zaten pek de iyi olmayan sağlığı daha da kötü bir hal almıştır. Bunun üstüne doğduğu yer olan Barde-Duc'a geri dönmüştür ve altı ay sonra 1886'nın Ağustos ayında hayatını kaybetmiştir. Matematik dışında, Edmond Nicolas Laguerre'nin hayatında büyük rol oynayan tek şey aileydi. Evli ve iki kızı vardı. Laguerre, araştırmacılara, öğretilerine ve iki kızının eğitimine tutkuyla bağlı olan sakin, nazik bir bilim insanı olarak bilinirdi (SARI, 2009).



Şekil 1.1. Edmond Nicolas Laguerre (1834 Bar-le-Duc- 1886 Bar-le- Duc)

Fransız matematikçi Edmond Nicolas Laguerre, döneminde parlak bir geometrici olarak bilinse de çalışmaları daha çok analiz ile ilgilidir. Geometri çabaları çarpıcı olmakla birlikte, Laguerre'nin geometrik üretimi (ancak bir istisna hariç) birkaç spesiyalist dışında bilinmiyordu. Maalesef, Laguerre'nin tarihteki yeri için, çıkış görevlisinin bu kısmı daha sonraki teoriler tarafından absorbe edilmiş ya da onay olmadan geometri genel gövdesine geçmiştir. Örneğin, diferansiyel devrelere ilişkin çalışmaları daha kapsamlı Lie grup teorisine dahil edilmiştir. 140 civarında makalesi yayınlanan Edmond Laguerre Paris Bilimler Akademisi Geometri Bölümü'nün üyesi olduğu bilinmektedir. Edmond Nicolas Laguerre, yaklaşım teorisi üzerine çalışmıştır ve en iyi bilineni özel polinomlar üzerine yaptığı araştırmalardır. Araştırmaları arasında Laguerre diferansiyel denklemlerinin çözümleri en önemlisidir. Bu çalışma integralin x 'ten ∞ 'a kadar olduğu yerleri araştıran 1879'da yayınlanan çalışmasıyla ortaya çıkmıştır.

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \quad (1.6)$$

olacak şekilde (1.6), 0 'dan ∞ 'a gitmektedir. Burada, ilk birkaç terimi iyi bir yaklaşıma sahip integral ile bir ıraksak seri olarak göstermiştir. Ayrıca bileşimleri Laguerre polinomlarını gerektiren integral için gerekli olan, sürekli kesir genişliğini bulmuştur. Dikeylik ilişkilerini ispatlayarak ve aynı zamanda rastgele bir fonksiyonun Laguerre polinomlarında bir “Fourier type” dizisinde genişletilebileceğini kanıtlayarak polinomların özelliklerini araştırmaya devam etmiştir (BERNKOPF, 1970). Eliptik fonksiyonlarla Kartezyen ovaleri arasındaki derin ilişkiler Darboux ve Laguerre tarafından ortaya konan eliptik fonksiyonların ek teoremi olan geometrik ispatlarla kanıtlanmıştır. Darboux, denklem sistemlerinin dikeyliğini ispatlamış, aynı zamanda ovalerin ek teoremin geometrik bir yorumunu sağladığını ve integral çözümünün cebirsel şeklini oluşturduğunu göstermiştir. Laguerre diğer yandan iki koninin içine ve dışına çokgen yerleştirilmesi hakkındaki Poncelet'in teoremini kullanarak eğriler yardımıyla ek teoremi ispatlamıştır.

Laguerre' in bütün eserleri iki cilt halinde basılmıştır. İlk cilt 1898'de ve ikinci cilt 1905'te olmak üzere Hermite, Poincare ve Rouche tarafından her iki bölüm yayımlanmıştır. Bunlar ancak yaklaşık yüzyıl sonra 1972'de yeniden basılmaya değer görülmüştür. İlk olarak 1885'te Laguerre' in yayınladığı “Recherches sur la Geometrie de Direction” un yeni baskısı 1986'da tamamlanmıştır. Bu kitabın yeniden basılması kitaba hala büyük bir ilginin olduğunu kanıtlamıştır. Laguerre' in altı makalesini kapsayan eser orijinal olarak “Nouvelles Annales de Mathematiques” de basılmıştır. Laguerre' in yayınlanan diğer eserleri ise “Sur le regle des signes en Geometrie” (1870); “Transformations par semi-droites reciproques” (1882); “Sur les anticaustiques par reflexion de la parabole, les rayons incidents etant paralleles (1883); “Sur quelques properites des cycles” (1883); “Sur les courbures de direction de la troisieme classe” (1883) ve “Sur les anticaustiques par refraction dela parabole, les rayons incidents etant perpendicularies al'axe”(1885) olarak bilinmektedir (Hermite, C., Poincaré vd., 1898; Hermite, C., Poincaré vd., 1905).

Laguerre' in çalışmaları için Bernkof şu sözleri söylemiştir:

“Laguerre’ in çalışmaları için neler söylenebilir? O çağımızın en keskin zekalı, parlak fikirli ve yenilikçi geometricilerinden biridir. Yirmi iki yıldan daha az süren çalışma hayatı içerisinde O’nu, Charles ve Poncelet’i takip edenler arasında ilk sıraya getirmiştir. Tüm bunlara rağmen, neden Laguerre matematik dünyasında çok iyi tanınmamış ve çalışmalarının nadiren ortaya çıkmış olduğu sorusu akıllara gelmektedir. Bu sorunun cevabı, Laguerre’ in üstün bir matematik dehası olmasının yanı sıra sadece detaylara yönelik araştırmalar yapmasında gizlidir. Ayrıca farklı alanlarda oluşturduğu teoremleri bir araya getirerek konulara farklı bakış açıları kazandırmıştır. Sonuç olarak, bu durum ileriki yıllarda çeşitli ve özel alanlarda Laguerre’ in çalışmalarının incelenmesini sağlamıştır. Laguerre’ in eserleri diğer matematikçiler tarafından araştırılarak genel teoremlerin oluşturulmasından kullanılmıştır.” (Gülbüz, B. Muğla,2012)

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

2.1. Laguerre Diferansiyel Denklemleri ve Laguerre Polinomları:

Fen ve mühendislik problemlerinde bir matematik model olarak sıklıkla karşılaşılan

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

biçimindeki denkleme Laguerre diferansiyel denklemi denir. $x=0$ noktası, denklemin bir düzgün tekil noktasıdır. Dolayısıyla Frobenius tekniği ile Frobenius serisi olarak

$$y = x^s \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+s} \quad (2.2)$$

şeklinde bir çözümü bulunabilir. Bu amaçla y' ve y'' türevleri

$$y' = \sum_{r=0}^{\infty} (r+s) a_r x^{r+s-1}$$

ve

$$y'' = \sum_{r=0}^{\infty} (r+s)(r+s-1) a_r x^{r+s-2}$$

olur.

y ve türevleri Laguerre denkleminde yerine konulursa

$$\sum_{r=0}^{\infty} (r+s)(r+s-1) a_r x^{r+s-1} + \sum_{r=0}^{\infty} (r+s) a_r x^{r+s-1} + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)(r+s) a_r x^{r+s} + \sum_{r=0}^{\infty} n a_r x^{r+s} = 0$$

veya

$$\sum_{r=0}^{\infty} [(r+s)(r+s-1) + (r+s)] a_r x^{r+s-1} + \sum_{r=0}^{\infty} (n-r-s) a_r x^{r+s} = 0$$

elde edilir. Tekrar düzenlenirse

$$\sum_{r=0}^{\infty} (r+s)^2 a_r x^{r+s-1} + \sum_{r=0}^{\infty} (n-r-s) a_r x^{r+s} = 0$$

olur. ikinci terimde r yerine $r-1$ konulursa

$$\sum_{r=0}^{\infty} (r+s)^2 a_r x^{r+s-1} + \sum_{r=1}^{\infty} (n-r-s+1) a_{r-1} x^{r+s-1} = 0$$

ve düzenlenirse

$$s^2 a_0 x^{s-1} + \sum_{r=1}^{\infty} \left[(r+s)^2 a_r + (n-r-s+1) a_{r-1} \right] x^{r+s-1} = 0$$

bulunur. Burada $a \neq 0$ olduğundan

$$s^2 = 0 \text{ ve } (r+s)^2 a_r + (n-r-s+1) a_{r-1} = 0, \quad r \geq 1$$

elde edilir. Buradan, $s = 0$ olduğundan katsayılar arasında

$$a_r = -\frac{n-r+1}{r^2} a_{r-1}, \quad r \geq 1$$

rekürans (tekrarlama) bağıntısı elde edilir. Tekrarlama bağıntısından $r = 1, 2, 3, \dots$ için

$$a_1 = -\frac{n}{1^2} a_0, \quad (a_0 \text{ keyfi sabit})$$

$$a_2 = -\frac{n-1}{2^2} a_1 = \frac{n(n-1)}{1^2 2^2} a_0$$

$$a_3 = -\frac{n-2}{3^2} a_2 = -\frac{n(n-1)(n-2)}{1^2 2^2 3^2} a_0$$

⋮

$$a_r = (-1)^r \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{(r!)^2} a_0$$

katsayıları $n \in N$ ve a_0 keyfi sabitine bağlı olarak bulunur. Buna göre Laguerre denkleminin çözümü ($s = 0$ için)

$$y(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r + \dots$$

$$= a_0 \left(1 - \frac{n}{(1!)^2} x + \frac{n(n-1)}{(2!)^2} x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{(3!)^2} x^3 + \dots + (-1)^r \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{(r!)^2} x^r + \dots \right)$$

olur. Verilen bir $n \in N$ değeri için, $y(x)$ seri çözümü n . dereceden bir polinom olur. Bu polinoma n . dereceden Laguerre polinomu denir. Laguerre polinomları $L_n(x)$ ile gösterilir.

Böylece Laguerre polinomları;

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = 1 - x$$

$$\begin{aligned} L_2(x) &= 1 - \frac{2}{(1!)^2}x + \frac{2}{(2!)^2}x^2 \\ &= 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3(x) &= 1 - \frac{3}{(1!)^2}x + \frac{6}{(2!)^2}x^2 - \frac{6}{(3!)^2}x^3 \\ &= 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_4(x) &= 1 - \frac{4}{(1!)^2}x + \frac{12}{(2!)^2}x^2 - \frac{24}{(3!)^2}x^3 + \frac{24}{(4!)^2}x^4 \\ &= 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_5(x) &= 1 - \frac{5}{(1!)^2}x + \frac{20}{(2!)^2}x^2 - \frac{60}{(3!)^2}x^3 + \frac{120}{(4!)^2}x^4 - \frac{120}{(5!)^2}x^5 \\ &= 1 - 5x + 5x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_6(x) &= 1 - \frac{6}{(1!)^2}x + \frac{30}{(2!)^2}x^2 - \frac{120}{(3!)^2}x^3 + \frac{360}{(4!)^2}x^4 - \frac{720}{(5!)^2}x^5 + \frac{720}{(6!)^2}x^6 \\ &= 1 - 6x + \frac{15}{2}x^2 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{5}{8}x^4 - \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{720}x^6 \end{aligned}$$

⋮

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{n!}{(r!)^2 (n-r)!} x^r$$

olarak tespit edilmiş olur. Buradan sonuç olarak, $L_n(x)$ polinomları;

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Laguerre diferansiyel denkleminin çözümleridirler. (Bell, W.W. Aberdeen, 1967)

2.2. Laguerre Polinomlarının Önemli Özellikleri

Laguerre polinomlarının bazı önemli özelliklerini şu şekilde sıralayabiliriz. (Bell, W.W. Aberdeen, 1967)

a. Üreten fonksiyon özelliği

Aşağıda Laguerre polinomlarının üreten fonksiyon özelliği ifade edilmiştir.

$$\frac{e^{-xt}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n \text{ 'dir.}$$

b. Ortogonalite

Laguerre polinomlarının birbirine dik fonksiyonlar seti oluşturduğunu göstermek için aşağıda verilen

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx$$

integralinin değerini hesaplayalım. Üreten fonksiyonun tanımını kullanarak;

$$\frac{e^{-xt}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$$

ve

$$\frac{e^{-xs}}{1-s} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x) s^m$$

yazarız. Yukarıdaki serileri önce birbirleri ile ve sonra da e^{-x} ile çarparsak,

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) t^n s^m = e^{-x} \frac{e^{-xt}}{1-t} \frac{e^{-xs}}{1-s}$$

elde ederiz. Her iki tarafın x ' e göre integralini alırsak,

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx \right] t^n s^m = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{e^{-xt}}{1-t} \frac{e^{-xs}}{1-s} dx$$

olacaktır. Bu integrali de

$$I = \frac{1}{(1-t)(1-s)} \int_0^{\infty} e^{-x \left(1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s} \right)} dx$$

olarak yazarsak kolayca alınır ve

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \left[\frac{-e^{-x\left(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}\right)}}{1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}} \right]_0^\infty \\
 &= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \left[\frac{1}{1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}} \right] \\
 &= \frac{1}{1-st} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n t^n
 \end{aligned}$$

bulunur. Bu da bize Laguerre polinomlarının diklik ilişkisini,

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \delta_{nm} \quad , \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$$

olarak verir. Laguerre polinomları, ağırlık fonksiyonu e^{-x} 'e göre diktir deriz.

2.3.Laguerre Polinomları Ve Türevleri Arasındaki Bağlıntılar

Bu kısımda Laguerre polinomları ve türevleri arasındaki ilişkiler ve kanıtları verilmektedir. (Bell, W.W. Aberdeen, 1967)

$$(i) (n+1) L_{n+1}(x) = (2n+1-x) L_n(x) - n L_{n-1}(x)$$

$$(ii) x L_n'(x) = n L_n(x) - n L_{n-1}(x)$$

Kanıt:

(i) Üreteç fonksiyonunun t 'ye göre türevini alırsak

$$\frac{d}{dt} \frac{t}{1-t} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

ifadesi kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2} e^{\frac{-xt}{1-t}} - \frac{x}{(1-t)^2} \frac{e^{\frac{-xt}{1-t}}}{(1-t)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n - \frac{x}{(1-t)^2} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $(1-t)^2$ ile çarpılırsa

$$(1-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^{n-1} = (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n - x \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$$

ve böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^{n+1} - x \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$$

düzenlersek

$$\sum_{n=-1}^{\infty} L_{n+1}(x) (n+1) t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(x) (n-1) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n - \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(x) t^n - x \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$$

bu denklemin her iki tarafında t^n 'nin katsayılarının eşitlenmesi ile

$$(n+1)L_{n+1}(x) - 2nL_n(x) + (n-1)L_{n-1}(x) = L_n(x) - L_{n-1}(x) - xL_n(x) \quad (n \geq 1)$$

buradan,

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

eşitliği elde edilir.

(ii) Üreteç fonksiyonunun x 'e göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x) t^n &= -\frac{t}{(1-t)} e^{\frac{-xt}{1-t}} \\ &= -\frac{t}{(1-t)} e^{\frac{-xt}{1-t}} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n \end{aligned}$$

böylece

$$(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x) t^n = -t \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$$

ve bu yüzden

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x) t^{n+1} &= -\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^{n+1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x) t^n - \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}'(x) t^n &= -\sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(x) t^n \end{aligned}$$

bu eşitliğin her iki tarafında t^n katsayıları düzenlenirse

$$L_n'(x) - L_{n-1}'(x) = -L_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)$$

şimdi x 'e göre bu sonucu (i) eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$(n+1)L_{n+1}'(x) = (2n+1-x)L_n'(x) - L_n(x) - nL_{n-1}'(x)$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$L_n'(x) - L_{n-1}'(x) = -L_{n-1}(x)$$

denklemini aşağıdaki formlarda yazılarak,

$$L_{n+1}'(x) = L_n'(x) - L_n(x)$$

$$L_{n-1}'(x) = L_n'(x) + L_{n-1}(x)$$

$$(n+1)\{L_n'(x) - L_n(x)\} = (2n+1-x)L_n'(x) - L_n(x) - n\{L_n'(x) + L_{n-1}(x)\}$$

$$-nL_n'(x) = -xL_n'(x) - nL_{n-1}(x)$$

$$xL_n'(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

eşitliği elde edilir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Dikdörtgensel Bölgede Lineer Kompleks Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

İçin Laguerre Kollokasyon Yöntemi

Bu bölümde, lineer kompleks diferansiyel denklemlerin çözümleri için dikdörtgensel bölgede tanımlı kollokasyon noktalarını kullanarak Laguerre polinomlarını temel alan bir kollokasyon yöntemi sunacağız.

3.1.1. Problemin tanıtılması

Bu çalışmada, ele alacağımız problem, m . mertebeden lineer kompleks değişken katsayılı homojen olmayan

$$\sum_{k=0}^m P_k(z) f^{(k)}(z) = g(z) \quad (3.1)$$

diferansiyel denklemini

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^J [a_{rk} f^{(k)}(\xi_j)] = \lambda_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.2)$$

koşulları altında ele alacağız. Burada $f^{(0)}(z) = f(z)$ bilinmeyen fonksiyon, $P_k(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları,

$$D = \{z = x + iy \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

bölgesinde tanımlı fonksiyonlardır. a_{rk} ve λ_r reel sabitler, $\xi_j \in D$ 'dir.

3.1.2. Çözüm formu

Çalışmada, bizim amacımız

$$\sum_{k=0}^m P_k(z) f^{(k)}(z) = g(z)$$

denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^J [a_{rk} f^{(k)}(\xi_j)] = \lambda_r \quad ; \quad r = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

koşullar altında

$$f(z) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(z), z \in D, N \geq m \quad (3.3)$$

kesilmiş Laguerre seri formunda yaklaşık çözümlerini bulmaktır. Burada,

$$L_n(z) = \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r}{r!} \binom{n}{r} z^r, z \in D \quad (3.4)$$

ile tanımlı Laguerre polinomlarıdır. Açık bir şekilde Laguerre polinomları

$$\begin{aligned} L_0(z) &= \sum_{r=0}^0 \frac{(-1)^r}{r!} \binom{0}{r} z^r \\ &= \frac{(-1)^0}{0!} \binom{0}{0} z^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(z) &= \sum_{r=0}^1 \frac{(-1)^r}{r!} \binom{1}{r} z^r \\ &= \frac{(-1)^0}{0!} \binom{1}{0} z^0 + \frac{(-1)^1}{1!} \binom{1}{1} z^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(z) &= \sum_{r=0}^2 \frac{(-1)^r}{r!} \binom{2}{r} z^r \\ &= \frac{(-1)^0}{0!} \binom{2}{0} z^0 + \frac{(-1)^1}{1!} \binom{2}{1} z^1 + \frac{(-1)^2}{2!} \binom{2}{2} z^2 \end{aligned}$$

$$L_3(z) = \sum_{r=0}^3 \frac{(-1)^r}{r!} \binom{3}{r} z^r$$

$$= \frac{(-1)^0}{0!} \binom{3}{0} z^0 + \frac{(-1)^1}{1!} \binom{3}{1} z^1 + \frac{(-1)^2}{2!} \binom{3}{2} z^2 + \frac{(-1)^3}{3!} \binom{3}{3} z^3$$

$$L_4(z) = \sum_{r=0}^4 \frac{(-1)^r}{r!} \binom{4}{r} z^r$$

$$= \frac{(-1)^0}{0!} \binom{4}{0} z^0 + \frac{(-1)^1}{1!} \binom{4}{1} z^1 + \frac{(-1)^2}{2!} \binom{4}{2} z^2 + \frac{(-1)^3}{3!} \binom{4}{3} z^3 + \frac{(-1)^4}{4!} \binom{4}{4} z^4$$

$$L_5(z) = \sum_{r=0}^5 \frac{(-1)^r}{r!} \binom{5}{r} z^r$$

$$= \frac{(-1)^0}{0!} \binom{4}{0} z^0 + \frac{(-1)^1}{1!} \binom{5}{1} z^1 + \frac{(-1)^2}{2!} \binom{5}{2} z^2 + \frac{(-1)^3}{3!} \binom{5}{3} z^3 + \frac{(-1)^4}{4!} \binom{5}{4} z^4 + \frac{(-1)^5}{5!} \binom{5}{5} z^5$$

(3.3) formundaki çözümü bulmak için amacımız a_n katsayılarını problemin çözümü olacak şekilde belirlemektir.

3.1.3. Kollokasyon noktalarının tanımlanması

Bu çalışmada, dikdörtgensel

$$D = \{z = x + iy \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

bölgesinde tanımlı kollokasyon noktaları,

$$z_{pq} = x_p + iy_q \text{ olmak üzere,}$$

$$x_p = a + \frac{b-a}{N} p \quad \text{ve} \quad y_q = c + \frac{d-c}{N} q ; \quad p, q = 0, 1, \dots, N \quad (3.5)$$

olarak ele alınacak olup diferansiyel denklem probleminin bir cebirsel denkleme indirgenmesinde kullanılacaktır.

Örnek: $N=2$, $a=0$, $b=2$, $c=0$, $d=4$ için D dikdörtgensel bölgesinde

$z_{pq} = x_p + iy_q$ ile tanımlı kollokasyon noktalarını bulalım.

$$x_p = a + \frac{b-a}{N} p \quad \text{ve} \quad y_q = c + \frac{d-c}{N} q \quad p, q = 0, 1, \dots, N$$

ifadeleri kullanılarak

$$x_p = 0 + \frac{2-0}{2} p ; \quad y_q = 0 + \frac{4-0}{2} q , \quad p, q = 0, 1, 2$$

buradan $x_p = p$ ve $y_q = 2q$, $p, q = 0, 1, 2$

bulunur. Böylece, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y_0 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = 4$ olarak hesaplanır.

Bu değerler $z_{pq} = x_p + iy_q$ 'de yerine yazılırsa kollokasyon noktaları

$$z_{00} = 0, \quad z_{01} = 2i, \quad z_{02} = 4i, \quad z_{10} = 1, \quad z_{11} = 1+2i, \quad z_{12} = 1+4i, \quad z_{20} = 2, \quad z_{21} = 2+2i, \quad z_{22} = 2+4i$$

olarak bulunur.

3.1.4. Laguerre polinomlarının matris formu

(3.4) denklemi ile verilen $L_n(z)$ Laguerre polinomları

$$\mathbf{L}^T(z) = \mathbf{DZ}^T(z) \Leftrightarrow \mathbf{L}(z) = \mathbf{Z}(z)\mathbf{D}^T \quad (3.6)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir.

Burada,

$$\mathbf{L}(z) = \begin{bmatrix} L_0(z) & L_1(z) & L_2(z) & \dots & L_N(z) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z}(z) = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^N \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{0!} \binom{0}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{(-1)^0}{0!} \binom{1}{0} & \frac{(-1)^1}{1!} \binom{1}{1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{(-1)^0}{0!} \binom{2}{0} & \frac{(-1)^1}{1!} \binom{2}{1} & \frac{(-1)^2}{2!} \binom{2}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{(-1)^0}{0!} \binom{N}{0} & \frac{(-1)^1}{1!} \binom{N}{1} & \frac{(-1)^2}{2!} \binom{N}{2} & \dots & \frac{(-1)^N}{N!} \binom{N}{N} \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{D}$ matrisi;

$$\mathbf{D} = [\mathbf{d}_{p,q}], \quad \mathbf{d}_{p,q} = \begin{cases} 0 & , p < q \\ \frac{(-1)^q}{q!} \binom{p}{q} & , p \geq q \end{cases} \quad p, q = 0, 1, 2, \dots, N$$

ile de ifade edilebilir.

Örneğin; $N=1$ için,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{0!} \binom{0}{0} & 0 \\ \frac{(-1)^0}{0!} \binom{1}{0} & \frac{(-1)^1}{1!} \binom{1}{1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{0!} \binom{0}{0} & \frac{(-1)^0}{0!} \binom{1}{0} \\ 0 & \frac{(-1)^1}{1!} \binom{1}{1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}(z) = [1 \quad z]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(z) &= [L_0(z) \quad L_1(z)] = \mathbf{Z}(z) \mathbf{D}^T = [1 \quad z] \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{0!} \binom{0}{0} & \frac{(-1)^0}{0!} \binom{1}{0} \\ 0 & \frac{(-1)^1}{1!} \binom{1}{1} \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{(-1)^0}{0!} \binom{0}{0}, \quad \frac{(-1)^0}{0!} \binom{1}{0} + \frac{(-1)^1}{0!} \binom{1}{1} z \right]. \end{aligned}$$

3.1.5. Çözüm yöntemi için gerekli temel matris bağıntıları

Bu kısımda, çözüm yöntemi için kullanılacak temel matris formlarını elde edeceğiz.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

olmak üzere (3.3) ile verilen çözüm formu

$$f(z) = \mathbf{L}(z)\mathbf{A} \quad (3.7)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. Burada, $\mathbf{A}$, bilinmeyen katsayılar matrisidir. (3.6.) denklemindeki ifade (3.7)'de yerine yazılırsa

$$f(z) = \mathbf{Z}(z)\mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (3.8)$$

elde edilir.

$\mathbf{Z}(z) = [1 \quad z \quad z^2 \quad \dots \quad z^N]$, nin birinci türevi bulunacak olursa

$$\mathbf{Z}^{(1)}(z) = [0 \quad 1 \quad 2z \quad \dots \quad Nz^{N-1}] \text{ olur.}$$

Böylece, $\mathbf{Z}(z)$ ve $\mathbf{Z}^{(1)}(z)$ arasındaki bağıntı

$$\mathbf{Z}^{(1)}(z) = \mathbf{Z}(z)\mathbf{B} \quad (3.9)$$

ile verilir. Burada,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. $\mathbf{Z}(z)$ ve $\mathbf{Z}^{(2)}(z)$ arasındaki bağıntı

$$\mathbf{Z}^{(2)}(z) = (\mathbf{Z}^{(1)}(z))^{(1)} = (\mathbf{Z}(z)\mathbf{B})^{(1)} = \mathbf{Z}^{(1)}(z)\mathbf{B} = \mathbf{Z}(z)\mathbf{B}\mathbf{B} = \mathbf{Z}(z)\mathbf{B}^2$$

şeklinde olur. Böyle devam edilirse

$$\mathbf{Z}^{(k)}(z) = \mathbf{Z}(z)\mathbf{B}^k \quad (3.10)$$

matris formu elde edilir.

$f(z)$ 'nin k . türevinin matris formunda (3.10) bağıntısını yazarsak,

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \mathbf{Z}^{(k)}(z)\mathbf{D}^T \mathbf{A} \\ &= \mathbf{Z}(z)\mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.11)$$

matris formunu elde ederiz.

(3.5)'deki kollokasyon noktaları (3.11) de kullanılırsa

$$f^{(k)}(z_{pq}) = \mathbf{Z}(z_{pq})\mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad p, q = 0, 1, \dots, N \quad (3.12)$$

olur. $p, q = 0, 1, \dots, N$ için (3.12) bağıntısı açık olarak

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z_{0q}) &= \mathbf{Z}(z_{0q})\mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} \\ f^{(k)}(z_{1q}) &= \mathbf{Z}(z_{1q})\mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} \\ f^{(k)}(z_{2q}) &= \mathbf{Z}(z_{2q})\mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(z_{Nq}) &= \mathbf{Z}(z_{Nq})\mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} \end{aligned}$$

yazılabilir ve bunlar matris formunda;

$$\mathbf{F}_q^{(k)} = \begin{bmatrix} f^{(k)}(z_{0q}) \\ f^{(k)}(z_{1q}) \\ f^{(k)}(z_{2q}) \\ \vdots \\ f^{(k)}(z_{Nq}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(z_{0q}) \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \\ \mathbf{Z}(z_{1q}) \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \\ \mathbf{Z}(z_{2q}) \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \\ \vdots \\ \mathbf{Z}(z_{Nq}) \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(z_{0q}) \\ \mathbf{Z}(z_{1q}) \\ \mathbf{Z}(z_{2q}) \\ \vdots \\ \mathbf{Z}(z_{Nq}) \end{bmatrix} \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (3.13)$$

olarak yazılabilir.

$$\mathbf{Z}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(z_{0q}) \\ \mathbf{Z}(z_{1q}) \\ \mathbf{Z}(z_{2q}) \\ \vdots \\ \mathbf{Z}(z_{Nq}) \end{bmatrix} \text{ dersek, (3.13) denklemi}$$

$$\mathbf{F}_q^{(k)} = \mathbf{Z}_q \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (3.14)$$

haline gelir. Buradaki $\mathbf{Z}_q$ matrisinin yapısı aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{Z}_q = \begin{bmatrix} 1 & z_{0q} & z_{0q}^2 & \dots & z_{0q}^N \\ 1 & z_{1q} & z_{1q}^2 & \dots & z_{1q}^N \\ 1 & z_{2q} & z_{2q}^2 & \dots & z_{2q}^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{Nq} & z_{Nq}^2 & \dots & z_{Nq}^N \end{bmatrix}.$$

(3.1) denkleminde (3.5) kollokasyon noktaları kullanılırsa,

$$\sum_{k=0}^m P_k(z_{pq}) f^{(k)}(z_{pq}) = g(z_{pq}) \quad p, q = 0, 1, \dots, N \quad (3.15)$$

olur. q 'ları sabit tutup $p = 0, 1, \dots, N$ için değerleri verelim.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^m P_k(z_{0q}) f^{(k)}(z_{0q}) &= g(z_{0q}) \\
\sum_{k=0}^m P_k(z_{1q}) f^{(k)}(z_{1q}) &= g(z_{1q}) \\
&\vdots \\
\sum_{k=0}^m P_k(z_{Nq}) f^{(k)}(z_{Nq}) &= g(z_{Nq})
\end{aligned}$$

$q = 0, 1, \dots, N$ sistemi elde edilir. Bu sistemi matris formunda

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{kq} \mathbf{F}_q^{(k)} = \sum_{q=0}^N \mathbf{G}_q \quad (3.16)$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$\mathbf{P}_{kq} = \begin{bmatrix} P_k(z_{0q}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_k(z_{1q}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & P_k(z_{Nq}) \end{bmatrix}, \mathbf{F}_q^{(k)} = \begin{bmatrix} f^{(k)}(z_{0q}) \\ f^{(k)}(z_{1q}) \\ \vdots \\ f^{(k)}(z_{Nq}) \end{bmatrix}, \mathbf{G}_q = \begin{bmatrix} g(z_{0q}) \\ g(z_{1q}) \\ \vdots \\ g(z_{Nq}) \end{bmatrix}$$

olarak yazabiliriz. (3.14) ifadesi (3.16)'da yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{kq} \mathbf{Z}_q \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} = \sum_{q=0}^N \mathbf{G}_q$$

elde edilir. $q = 0, 1, \dots, N$ kullanılarak,

$$\sum_{k=0}^m \sum_{q=0}^N \mathbf{P}_{kq} \mathbf{Z}_q \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} = \sum_{q=0}^N \mathbf{G}_q, \quad q = 0, 1, \dots, N \quad (3.17)$$

ana matris denklemi elde edilir.

3.1.6. Başlangıç koşullarının matris formu

Bu kısımda (3.2) koşullarının $L_n(z)$ Laguerre polinomları cinsinden matris formunu yazacağız. (3.11) bağıntısını (3.2) denkleminde yerine yazarsak

$$\sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^J a_{rk} \mathbf{Z}(\xi_j) \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} = \lambda_r \quad (3.18)$$

olup,

$$\mathbf{Z}(\xi_j) = \begin{bmatrix} 1 & \xi_j & \xi_j^2 & \dots & \xi_j^N \end{bmatrix} \text{dir.}$$

(3.18) denkleminde,

$$\sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^J a_{rk} \mathbf{Z}(\xi_j) \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T = \mathbf{U}_r$$

dersek (3.18) denklemi kısaca

$$\mathbf{U}_r \mathbf{A} = [\lambda_r] \quad (3.19)$$

olarak yazılabilir. (3.19) ifadesinin genişletilmiş yani arttırılmış matrisi

$$[\mathbf{U}_r; \lambda_r] \quad (3.20)$$

dir. Burada

$$\mathbf{U}_r = \begin{bmatrix} U_{r0} & U_{r1} & \dots & U_{rN} \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matristir.

Böylece (3.2) koşullarının matris formu (3.19) ya da (3.20)' deki gibi elde edilmiş olur.

3.1.7. Çözümün elde edilmesi

Bu kısımda, önceki bölümlerde bulduğumuz temel matris bağıntıları ve koşulların matris formu kullanılarak çözümün elde edilişi açıklanacaktır. (3.17) denkleminin sol tarafını

$$\mathbf{W} = [w_{st}] = \sum_{k=0}^m \sum_{q=0}^N \mathbf{P}_{kq} \mathbf{Z}_q \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \quad s, t = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde ve sağ tarafını

$$\mathbf{G} = \sum_{q=0}^N \mathbf{G}_q = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterirsek (3.17) matris denklemi kısaca

$$\mathbf{WA} = \mathbf{G} \quad (3.21)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.21) matris denkleminin genişletilmiş matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = [w_{st}; g_s] \quad , \quad s, t = 0, 1, \dots, N \quad (3.22)$$

olur.

(3.22) ifadesinin herhangi m satırı ile koşulları genişletilmiş matrisi olan (3.19) ifadesindeki satırlar yer değiştirilirse,

$$\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \quad \text{ya da} \quad [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}]$$

elde edilir.

$\mathbf{W}$ 'nin herhangi m satırını değiştirmek yerine son m satırını değiştirmek uygulayacağımız programda kolaylık sağlayabilir.

Bu yapılırsa;

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & \dots & w_{0N} & ; & g_0 \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1N} & ; & g_1 \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2N} & ; & g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N-m0} & w_{N-m1} & w_{N-m2} & \dots & w_{N-mN} & ; & g_{N-m} \\ u_{00} & u_{01} & u_{02} & \dots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2N} & ; & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{m-10} & u_{m-11} & u_{m-12} & \dots & u_{m-1N} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Bu $(N+1)$ bilinmeyenli $(N+1)$ denklemden oluşan lineer cebirsel sistem çözülerek

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$$

katsayılar matrisi bulunur.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad \text{katsayılar matrisinde bulunan } a_0, a_1, \dots, a_N \text{ katsayıları (3.3) çözüm}$$

formunda yerine yazılarak

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(z) \quad (3.24)$$

çözümünü elde ederiz.

3.1.8. Rezidüel hata tahmini

Bu bölümde, rezidüel fonksiyonu kullanarak bir hata problemi oluşturup hata tahmini yöntemi verilecek. (3.24) yaklaşık çözüm için hata fonksiyonu

$$e_N(z) = f(z) - f_N(z) \quad (3.25)$$

ile gösterelim.

Burada $f(z)$ fonksiyonu tam çözüm ve $f_N(z)$ fonksiyonu

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(z)$$

yaklaşık çözümdür.

(3.24) yaklaşık çözümü (3.1) denklemi olan

$$\sum_{k=0}^m P_k(z) f^{(k)}(z) = g(z)$$

diferansiyel denkleminde konulursa

$$\sum_{k=0}^m P_k(z) f_N^{(k)}(z) - g(z) \cong 0$$

denklemi elde edilir. Burada çözüm tam çözüm ise eşitlik olur.

(3.24) denklemi için rezidü fonksiyonu $R_N(z)$,

$$R_N(z) = \sum_{k=0}^m P_k(z) f_N^{(k)}(z) - g(z)$$

olsun. O zaman

$$\sum_{k=0}^m P_k(z) f_N^{(k)}(z) = g(z) + R_N(z) \quad (3.26)$$

denklemi elde edilir.

(3.1) denkleminden (3.26) denklemini taraf tarafa çıkarırsak

$$\sum_{k=0}^m P_k(z) [f^{(k)}(z) - f_N^{(k)}(z)] = -R_N(z) \quad (3.27)$$

olur.

$$e_N(z) = f(z) - f_N(z)$$

hata fonksiyonunun k . türevi

$$e_N^{(k)}(z) = f^{(k)}(z) - f_N^{(k)}(z) \text{ 'dir.}$$

Böylece (3.27) ifadesi;

$$\sum_{k=0}^m P_k(z) e_N^{(k)}(z) = -R_N(z) \quad (3.28)$$

olur. Diğer taraftan (3.2) koşulları;

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^J [a_{rk} f^{(k)}(\xi_j)] = \lambda_r, r = 0, 1, 2, \dots, m-1 \text{ idi.}$$

(3.24) yaklaşık çözümü bulunurken, (3.2) koşullarını kullanmış olduğumuz için (3.24) yaklaşık çözümü (3.2) koşullarını sağlar. Yani;

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^J [a_{rk} f_N^{(k)}(\xi_j)] = \lambda_r \quad (3.29)$$

olur. (3.2) koşullarından (3.29) denkleminin koşulları taraf tarafa çıkartılırsa;

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^J a_{rk} [f^{(k)}(z) - f_N^{(k)}(z)] = 0 \text{ olur.}$$

Bu denklemde,

$$[f^{(k)}(z) - f_N^{(k)}(z)] = e_N^{(k)}(z)$$

ifadesini kullanırsak;

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^J a_{rk} e_N^{(k)}(z) = 0$$

homojen koşulu elde edilir.

Böylece;

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m P_k(z) e_N^{(k)}(z) &= -R_N(z) \\ \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^J a_{rk} e_N^{(k)}(z) &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

kompleks hata diferansiyel problemi elde edilir. (3.30) problemi (3.1)- (3.2) problemi ile çok benzerdir. (3.1) denkleminde farkı burada $g(z)$ yerine $-R_N(z)$ olması (3.2) denkleminde farkı λ_r 'ler yerine sıfırlar olmasıdır. (3.24) yaklaşık çözümünü bulduğumuz yöntem ile

$$e_{N,M}(z) = \sum_{k=0}^M \tilde{a}_k L_k(z)$$

formunda (3.30) probleminin çözümü aranır. Bu yaklaşık çözüm, hata fonksiyonu $e_N(z)$ 'nin yaklaşık değeridir. Yani hata fonksiyonu için bir tahmindir.

4. BULGULAR

Bu bölümde, metodun etkililiğini ve doğruluğunu açıklamak için birkaç sayısal örnek verilmiştir. Burada, $f_N(z)$ yaklaşık çözüm, $|e_N(z)|$ gerçek mutlak hata fonksiyonu, $|e_{N,M}(z)|$ tahmini mutlak hata fonksiyonunu gösterir.

Örnek 4.1. (Yüzbaşı Ş., Şahin N., Sezer M., 2012)

$$f''(z) + zf'(z) = e^z + ze^z \quad (4.1)$$

ikinci mertebeden değişken katsayılı, homojen olmayan lineer diferansiyel denklemini

$$f(0) = 1 \quad \text{ve} \quad f'(0) = 1$$

başlangıç koşulları altında çözelim:

$N = 2$ için,

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^2 a_n L_n(z) \quad (4.2)$$

formunda Laguerre kollokasyon yöntemi ile yaklaşık çözümü bulacağız. Burada (4.1)

denkleminin tam çözümü $f(z) = e^z$ dir.

İlk olarak, $N = 2$, $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 1$ olarak kollokasyon noktalarını bulalım.

$$x_p = a + \frac{b-a}{N} p \quad \text{ve} \quad y_q = c + \frac{d-c}{N} q \quad p, q = 0, 1, \dots, N,$$

$$x_p = -1 + p \quad \text{ve} \quad y_q = -1 + q \quad \text{olup} \quad x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, y_0 = -1, y_1 = 0, y_2 = 1$$

değerleri $z_{pq} = x_p + iy_q$ da yerine yazılırsa

$$z_{00} = -1 - i, z_{10} = -i, z_{20} = 1 - i, z_{01} = -1, z_{11} = 0, z_{21} = 1, z_{02} = -1 + i, z_{12} = i, z_{22} = 1 + i$$

kollokasyon noktaları elde edilir.

İkinci mertebeden değişken katsayılı, homojen olmayan lineer diferansiyel denkleminde $P_0(z) = z$, $P_1(z) = 0$, $P_2(z) = 1$ ve $g(z) = e^z + ze^z$ olmak üzere (4.1) diferansiyel denkleminin temel matris denklemini

$$\sum_{k=0}^2 \sum_{q=0}^2 \mathbf{P}_{kq} \mathbf{Z}_q \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} = \sum_{q=0}^2 \mathbf{G}_q$$

şeklindedir. Burada

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} -1-i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{01} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{02} = \begin{bmatrix} -1+i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olup,

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -1/2 & ; & -408/659 \\ 0 & 2 & 7 & ; & 1259/3166 \\ 3 & 2 & 5/2 & ; & 1637/243 \end{bmatrix} \text{ 'dir.}$$

Koşulların matris formu,

$$\mathbf{U}_0 = [1 \ 1 \ 1] \text{ ve } \mathbf{U}_1 = [0 \ 1 \ 2] \text{ 'dir.}$$

$[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ 'nin son iki satırı ile $\mathbf{U}_0$ ve $\mathbf{U}_1$ yer değişirse,

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -1/2 & ; & -408/659 \\ 1 & 1 & 1 & ; & 1 \\ 0 & -1 & -2 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu sistem çözülerek

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 2992/1297 \\ -823/510 \\ 398/1297 \end{bmatrix}$$

katsayıları bulunur. Bu katsayılar (4.2) denkleminde yerine yazılarak $f_2(z)$ yaklaşık çözümü bulunur.

$$f_2(z) = (1381984838546793 z^2)/9007199254740992 + z \\ + 4503599627370497/4503599627370496 \text{ 'dır.}$$

N=2 için rezidü fonksiyonu

$$R_2(x) = f_2''(z) + z f_2'(z) - e^z - z e^z = z((1381984838546793 z^2)/9007199254740992 + z \\ + 4503599627370497/4503599627370496) - e^z \\ - z e^z + 1381984838546793/4503599627370496$$

olur. Böylece hata problemi,

$$\begin{cases} e_2''(z) + z e_2'(z) = -R_2(z) \\ f(0) = 0, f'(0) = 0 \end{cases}$$

olur. Bu problem de M=3 kesme sınırı için Laguerre kollokasyon yöntemi ile

$$e_{2,3}(z) = \sum_{n=0}^3 \tilde{a}_n L_n(z)$$

formunda yaklaşık çözüm aranırsa hata fonksiyonunun yaklaşımını

$$e_{2,3}(z) = 1/18014398509481984 + z^2 (7869341209947915/36028797018963968 \\ - (1255230909087295i)/40564819207303340847894502572032) \\ + z^3 (8435781428493703/108086391056891904 \\ - (8422121477801039i)/121694457621910022543683507716096) \\ + z((11i)/20282409603651670423947251286016 - 3/18014398509481984) \\ + (3i)/20282409603651670423947251286016$$

olarak bulunur.

Ayrıca, bu problem, kesme sınırı için $N=5$ ve $N=9$ değerleri alınarak çözülmüştür. Elde edilen gerçek mutlak hatalar Çizelge 4.1’de verilmiştir:

Çizelge 4.1. Örnek 1’in $N=5$ ve $N=9$ için gerçek mutlak hataları

Laguerre kollokasyon metodu				
z	$ e_5(z) (\text{Reel})$	$ e_9(z) (\text{Reel})$	$ e_5(z) (\text{Im})$	$ e_9(z) (\text{Im})$
-1-i	5.2102e-3	4.4390e-6	1.7617e-2	1.7436e-4
-0.6-0.6i	3.3432e-3	2.6550e-5	1.0126e-2	1.1483e-4
-0.2-0.1i	6.9732e-4	7.9390e-6	8.0199e-4	9.1962e-6
-0.2-0.2i	2.4371e-4	2.6435e-6	1.6710e-3	1.9037e-5
-0.1-0.2i	5.3543e-4	6.0967e-6	1.0040e-3	1.1400e-5
-0.1+0.2i	5.3543e-4	6.0967e-6	1.0040e-3	1.1400e-5
-0.1-0.1i	3.5043e-5	3.9628e-7	4.5667e-4	5.2102e-6
-0.1+0.1i	3.5043e-5	3.9628e-7	4.5667e-4	5.2102e-6
0+0	7.1054e-15	5.8875e-13	4.0390e-28	3.5407e-20
0.1+0.1i	4.5249e-5	5.4645e-7	5.3626e-4	6.1404e-6
0.1-0.1i	4.5249e-5	5.4645e-7	5.3626e-4	6.1404e-6
0.1-0.2i	9.7153e-4	1.1183e-5	9.2077e-4	1.0405e-5
0.1+0.2i	9.7153e-4	1.1183e-5	9.2077e-4	1.0405e-5
0.2+0.2i	4.0699e-4	5.0459e-6	2.2993e-3	2.6326e-5
0.1+0.1i	7.7392e-4	8.8154e-6	1.2453e-3	1.4411e-5
0.6+0.6i	1.6556e-2	2.1852e-4	2.4584e-2	2.6338e-4
1+1i	1.6556e-2	1.3396e-3	5.9474e-2	3.2386e-4

N=5, M=6 ve N=9, M=10 kesme sınırları için gerçek ve tahmini mutlak hataların reel ve imajiner kısımları Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3'te verilmiştir.

Çizelge 4.2. Örnek 1'in N=5 M=6 ve N=9 M=10 için gerçek ve tahmini mutlak hataların reel kısımlarının karşılaştırılması

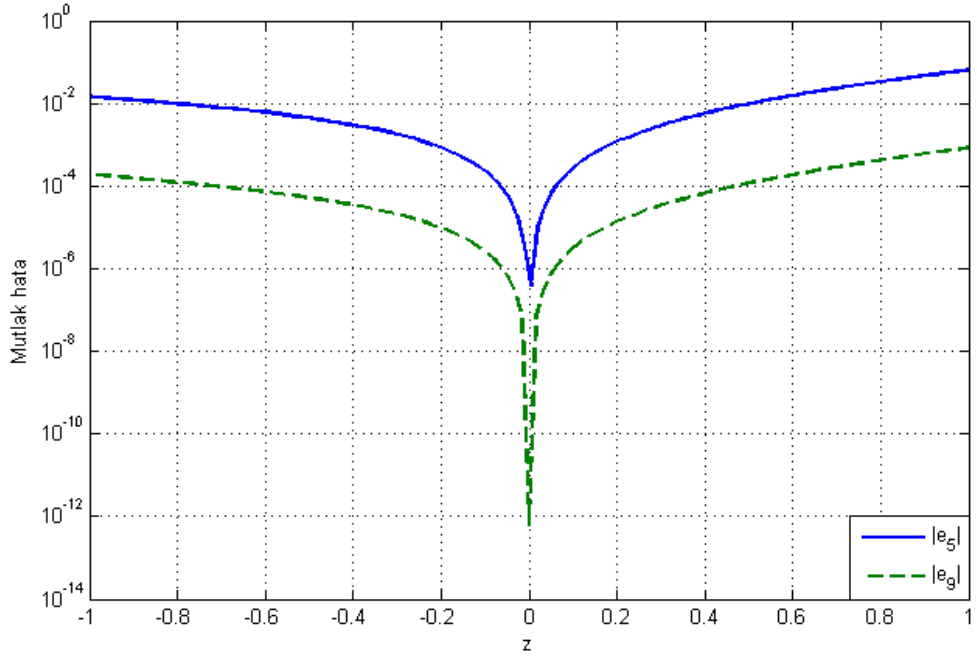
Laguerre kollokasyon metodu				
z	$ e_5(z) (\text{Reel})$	$ e_{5,6}(z) (\text{Reel})$	$ e_9(z) (\text{Reel})$	$ e_{9,10}(z) (\text{Reel})$
-1-i	5.2102e-3	7.4544e-4	4.4390e-6	6.1621e-5
-0.6-0.6i	3.3432e-3	1.7416e-3	2.6550e-5	7.6406e-6
-0.2-0.1i	6.9732e-4	4.7329e-4	7.9390e-6	5.7055e-6
-0.2-0.2i	2.4371e-4	1.4601e-4	2.6435e-6	1.5321e-6
-0.1-0.2i	5.3543e-4	3.7488e-4	6.0967e-6	4.5860e-6
-0.1+0.2i	5.3543e-4	3.7488e-4	6.0967e-6	4.5861e-6
-0.1-0.1i	3.5043e-5	2.1247e-5	3.9628e-7	2.3910e-7
-0.1+0.1i	3.5043e-5	2.1247e-5	3.9628e-7	2.3909e-7
0+0	7.1054e-15	8.1046e-15	5.8875e-13	2.0928e-12
0.1+0.1i	4.5249e-5	2.7777e-5	5.4645e-7	3.4521e-7
0.1-0.1i	4.5249e-5	2.7777e-5	5.4645e-7	3.4522e-7
0.1-0.2i	9.7153e-4	6.4169e-4	1.1183e-5	7.7417e-6
0.1+0.2i	9.7153e-4	6.4169e-4	1.1183e-5	7.7417e-6
0.2+0.2i	4.0699e-4	2.5049e-4	5.0459e-6	3.2297e-6
0.1+0.1i	7.7392e-4	5.2043e-4	8.8154e-6	6.2507e-6
0.6+0.6i	1.6556e-2	1.0205e-2	2.1852e-4	1.4331e-4
1+1i	1.6556e-2	6.6046e-2	1.3396e-3	8.8901e-4

Çizelge 4.3. Örnek 1'in N=5, M=6 ve N=9, M=10 için gerçek ve tahmini mutlak hataların imajiner kısımlarının karşılaştırılması

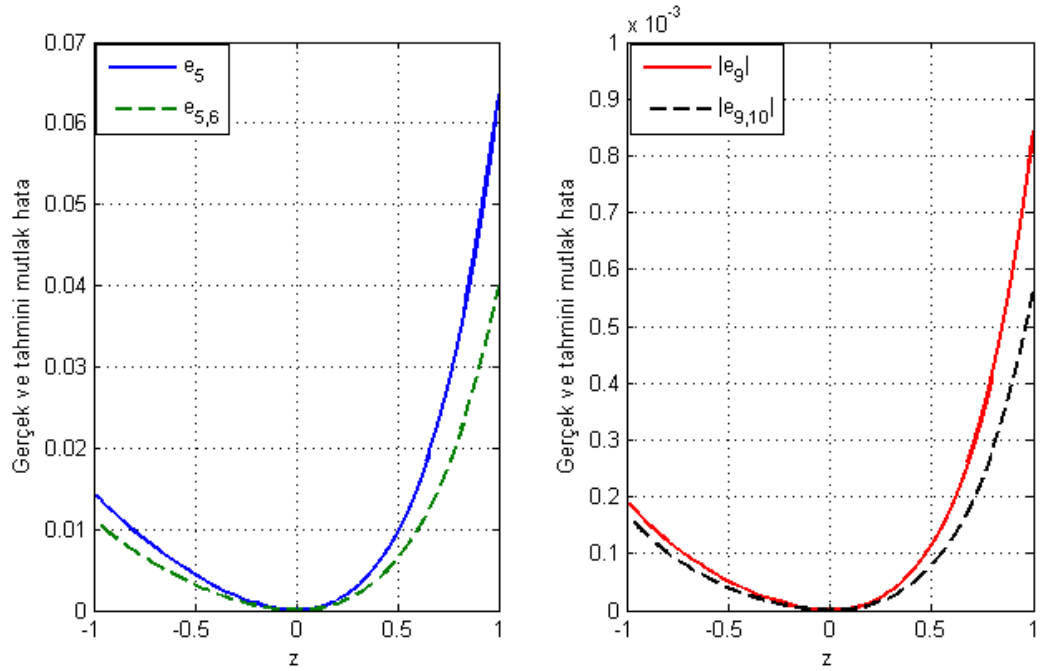
Laguerre kollokasyon metodu				
z	$ e_5(z) (Im)$	$ e_{5,6}(z) (Im)$	$ e_9(z) (Im)$	$ e_{9,10}(z) (Im)$
-1-i	1.7617e-2	1.2125e-2	1.7436e-4	1.1856e-4
-0.6-0.6i	1.0126e-2	7.2094e-3	1.1483e-4	8.8031e-5
-0.2-0.1i	8.0199e-4	5.5459e-4	9.1962e-6	6.8032e-6
-0.2-0.2i	1.6710e-3	1.1475e-3	1.9037e-5	1.3921e-5
-0.1-0.2i	1.0040e-3	6.7593e-4	1.1400e-5	8.0898e-6
-0.1+0.2i	1.0040e-3	6.7593e-4	1.1400e-5	8.0898e-6
-0.1-0.1i	4.5667e-4	3.1077e-4	5.2102e-6	3.7609e-6
-0.1+0.1i	4.5667e-4	3.1077e-4	5.2102e-6	3.7609e-6
0+0	4.0390e-28	5.4122e-26	3.5407e-20	3.5570e-19
0.1+0.1i	5.3626e-4	3.5943e-4	6.1404e-6	4.3378e-6
0.1-0.1i	5.3626e-4	3.5943e-4	6.1404e-6	4.3378e-6
0.1-0.2i	9.2077e-4	6.2538e-4	1.0405e-5	7.4745e-6
0.1+0.2i	9.2077e-4	6.2538e-4	1.0405e-5	7.4745e-6
0.2+0.2i	2.2993e-3	1.5326e-3	2.6326e-5	1.8446e-5
0.1+0.1i	1.2453e-3	8.2508e-4	1.4411e-5	1.0034e-5
0.6+0.6i	2.4584e-2	1.6364e-2	2.6338e-4	1.8189e-4
1+1i	5.9474e-2	4.3024e-2	3.2386e-4	2.3718e-4

N=5 ve N=9 için elde edilen çözümlerin mutlak ve tahmini hatalarının görsel olarak karşılaştırılması Şekil 4.1 ve 4.2'de sunulmuştur. Şekil 4.1'de N=9 için elde edilen mutlak hatanın N=5 için elde edilen mutlak hatadan daha küçük olduğu görülmektedir. Böylece, artan N değerleriyle birlikte yaklaşık çözümün gerçek çözüme daha yakın olduğu anlaşılmaktadır. Benzer şekilde, Şekil 4.2'de hata tahminlerinin mutlak hata

fonksiyonlarına oldukça yakın olduğu görülmektedir. Bu durum, rezidüel hata tahmin yönteminin etkili olduğunu göstermektedir.



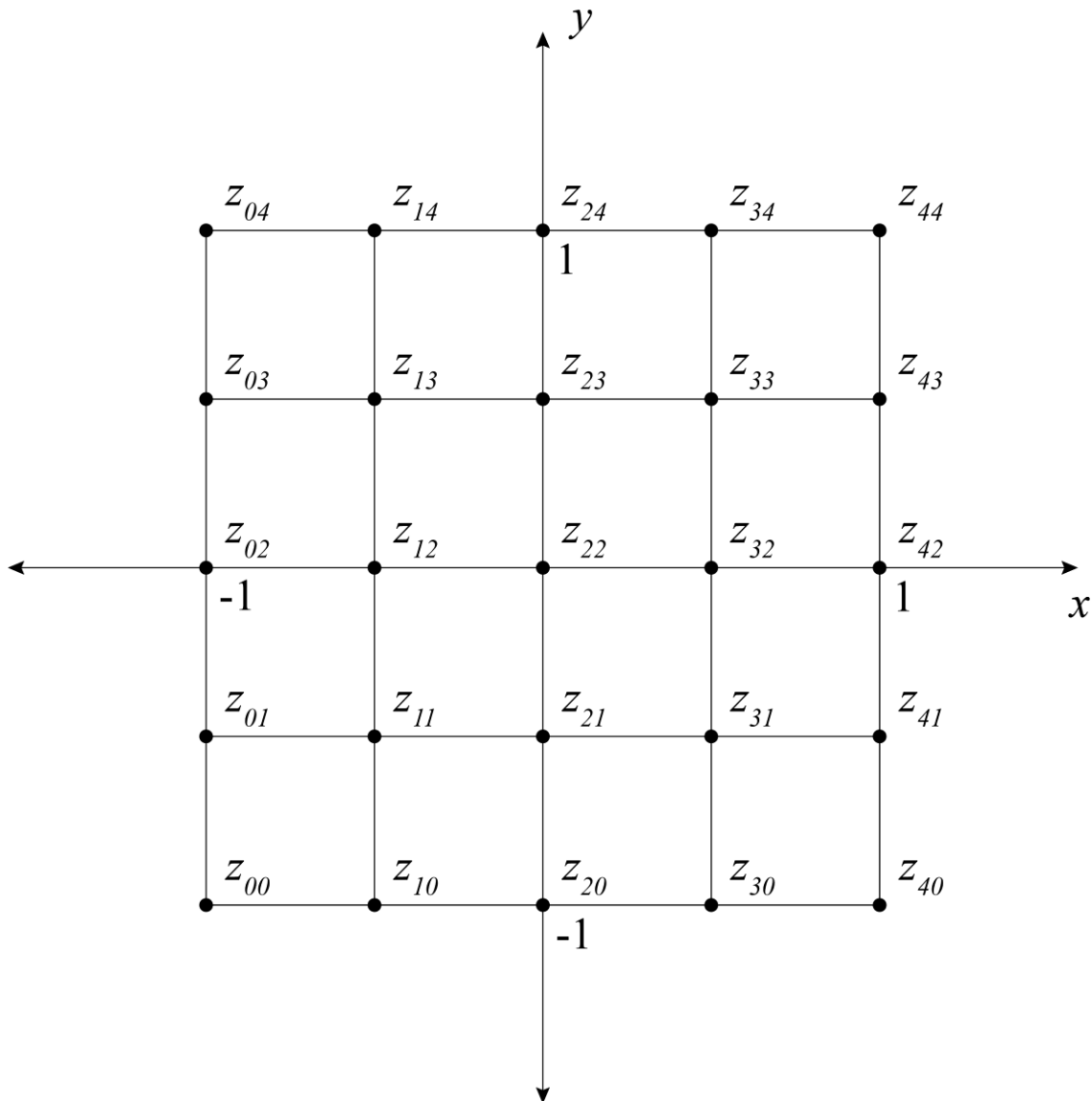
Şekil 4.1. Örnek 4.1 için N=5 ve N=9 ile elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması



Şekil 4.2. Örnek 4.1 için N=5 M=6 ve N=9, M=10 için elde edilen gerçek ve tahmini mutlak hataların karşılaştırılması

Örnek 4.2. (Yüzbaşı Ş., Şahin N., Sezer M., 2012)

$f''(z) + zf'(z) + zf(z) = e^z + 2ze^z$ ikinci mertebeden değişken katsayılı, homojen olmayan lineer diferansiyel denklemini $f(0)=1$ ve $f'(0)=1$ başlangıç koşulları altında $N=5$ ve $N=9$ kesme sınırları için mutlak hatalarının reel kısmının Laguerre metodu, Taylor metodu ve Bessel metodu ile karşılaştırılması Çizelge 4.4’de verilmiştir. Ayrıca $N=4$ ve $a=-1, b=1, c=-1, d=1$ için kollokasyon noktalarının D dikdörtgensel bölgesinde gösterimi Şekil 4.3.’de verilmiştir.



Şekil 4.3. $N=4$ ve $a=-1, b=1, c=-1, d=1$ için kollokasyon noktaları

Çizelge 4.4. Örnek 2'nin $N=5$ ve $N=9$ kesme sınırları için gerçek mutlak hataların reel kısımlarının Laguerre, Taylor ve Bessel metodu ile karşılaştırılması

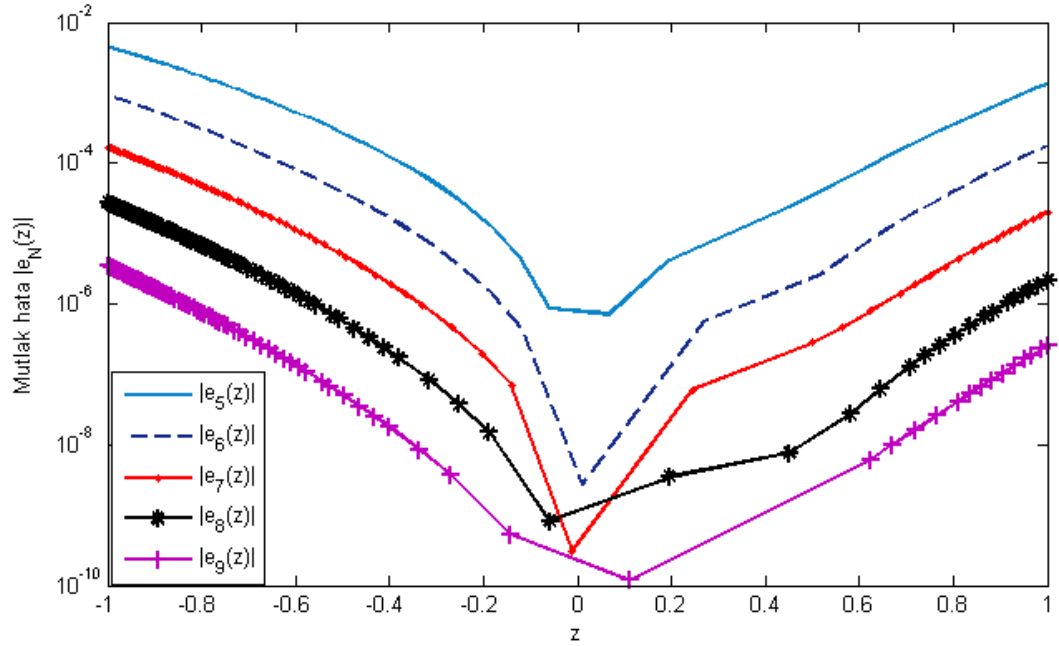
z	Laguerre metodu		Taylor metodu		Bessel	
	$ e_5(z) (\text{Reel})$	$ e_9(z) (\text{Reel})$	$ e_5(z) (\text{Reel})$	$ e_9(z) (\text{Reel})$	$ e_5(z) (\text{Reel})$	$ e_9(z) (\text{Reel})$
-1-i	7.0317e-3	7.6911e-6	1.5456e-1	1.1087e-1	5.2102e-3	4.4382e-6
-0.6-0.6i	7.0298e-4	1.6038e-7	4.3069e-2	1.4555e-2	3.3432e-3	2.6551e-5
-0.2-0.1i	1.9448e-5	2.7754e-10	7.5625e-3	3.2941e-4	6.9732e-4	7.9390e-6
-0.2-0.2i	2.6618e-7	2.3766e-9	2.0216e-3	1.0615e-4	2.4371e-4	2.6436e-6
-0.1-0.2i	1.4437e-5	8.6670e-10	6.3395e-3	3.0633e-4	5.3543e-4	6.0967e-6
-0.1+0.2i	9.5036e-6	8.4740e-10	6.3395e-3	3.0633e-4	5.3543e-4	6.0967e-6
-0.1-0.1i	1.1583e-6	1.6958e-10	2.6859e-4	1.9201e-6	3.5043e-5	3.9628e-7
-0.1+0.1i	3.6543e-6	1.8378e-10	2.6859e-4	1.9201e-6	3.5043e-5	3.9628e-7
0	4.8850e-15	3.5083e-14	0	0	0	0
0.1+0.1i	1.3571e-6	5.5822e-11	3.0095e-4	3.4200e-5	4.5249e-5	5.464e-7
0.1-0.1i	9.2943e-8	5.2298e-11	3.0095e-4	3.4200e-5	4.5249e-5	5.4645e-7
0.1-0.2i	1.2488e-6	4.2677e-11	9.4615e-3	4.9502e-4	9.7153e-4	1.1183e-5
0.1+0.2i	1.3334e-6	1.4172e-11	9.4615e-3	4.9502e-4	9.7153e-4	1.1183e-5
0.2+0.2i	4.0514e-6	2.2341e-10	2.5451e-3	4.1176e-4	4.0699e-4	5.0459e-6
0.2+0.1i	3.9791e-6	2.6554e-10	8.1251e-3	3.5865e-4	7.7392e-4	8.8155e-6
0.6+0.6i	1.2136e-4	3.8464e-9	8.4945e-2	2.7396e-2	1.6556e-2	2.1852e-4
1+1i	1.3132e-3	9.6713e-7	4.7746e-1	2.1282e-1	1.0647e-1	1.3396e-3

$N=5$ ve $N=9$ kesme sınırları için mutlak hatalarının imajiner kısmının Laguerre metodu, Taylor metodu ve Bessel metodu ile karşılaştırılması Çizelge 4.5'de verilmiştir.

Çizelge 4.5. Örnek 2'nin $N=5$ ve $N=9$ kesme sınırları için gerçek mutlak hataların imajiner kısımlarının Laguerre, Taylor ve Bessel metodu ile karşılaştırılması

z	Laguerre metodu		Taylor metodu		Bessel metodu	
	$ e_5(z) (Im)$	$ e_9(z) (Im)$	$ e_5(z) (Im)$	$ e_9(z) (Im)$	$ e_5(z) (Im)$	$ e_9(z) (Im)$
-1-i	3.10e-2	6.4399e-5	2.6406e-1	4.0260e-2	1.7617e-2	1.7436e-4
-0.6-0.6i	2.8398e-3	1.1969e-6	1.2960e-1	7.6794e-3	1.0126e-2	1.1483e-4
-0.2-0.1i	1.2579e-5	1.7254e-9	9.0258e-3	4.9245e-4	8.0199e-4	9.1962e-6
-0.2-0.2i	4.4852e-5	1.1154e-9	1.8727e-2	8.6139e-4	1.6710e-3	1.9037e-5
-0.1-0.2i	1.2594e-5	5.6703e-12	1.0687e-2	4.2029e-4	1.0040e-3	1.1400e-5
-0.1+0.2i	2.9394e-6	1.6940e-12	1.0687e-2	4.2029e-4	1.0040e-3	1.1400e-7
-0.1-0.1i	6.3143e-6	3.6913e-10	4.9641e-3	2.3080e-4	4.5667e-4	5.2102e-6
-0.1+0.1i	2.9536e-6	3.4350e-10	4.9641e-3	2.3080e-4	4.5667e-4	5.2102e-6
0+0	8.6042e-16	3.6454e-13	0	0	1.0477e-31	4.0597e-28
0.1+0.1i	2.0420e-6	1.7801e-10	5.5323e-3	2.6568e-4	5.3626e-4	6.1404e-6
0.1-0.1i	2.9853e-6	1.8528e-10	5.5323e-3	2.6568e-4	5.3626e-4	6.1404e-6
0.1-0.2i	7.2575e-6	4.3550e-10	1.0117e-2	3.7844e-4	9.2077e-4	1.0405e-5
0.1+0.2i	5.0695e-6	4.1382e-10	1.0117e-2	3.7844e-4	9.2077e-4	1.0405e-5
0.2+0.2i	4.4104e-6	4.4144e-10	2.3257e-2	1.1245e-3	2.2993e-3	2.6326e-5
0.2+0.1i	2.2451e-6	2.3542e-10	1.2161e-2	6.9474e-4	1.2453e-3	1.4411e-5
0.6+0.6i	1.9888e-5	4.7189e-9	2.4723e-1	1.0194e-2	2.4584e-2	2.6338e-4
1+1i	3.9112e-3	5.9234e-7	7.6342e-1	9.4049e-3	5.9474e-2	3.2387e-4

$N=5$, $N=6$, $N=7$, $N=8$ ve $N=9$ için elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının görsel olarak karşılaştırılması Şekil 4.4’de verilmiştir. Şekil 4.4’de $N=9$ için elde edilen mutlak hatanın $N=5$, $N=6$, $N=7$, $N=8$ için elde edilen mutlak hatalardan daha küçük olduğu görülmektedir. Böylece, artan N değerleriyle birlikte yaklaşık çözümün gerçek çözüme daha yakın olduğu anlaşılmaktadır.



Şekil 4.4. Örnek 4.2 için $N=5$, $N=6$, $N=7$, $N=8$ ve $N=9$ ile elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

Örnek 4.3. (Yüzbaşı Ş., Şahin N., Sezer M., 2012)

$$f''(z) + zf'(z) + 2zf(z) = 2z \sin(z) + z \cos(z) - \sin(z)$$

ikinci mertebeden değişken katsayılı, homojen olmayan lineer diferansiyel denklemin tam çözümü $f(z) = \sin z$ dir. $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ başlangıç koşulları altında $N=5$ ve $N=9$ kesme sınırları için gerçek mutlak hataları reel kısmının Laguerre metodu ve Bessel metodu ile karşılaştırılması Çizelge 4.6’da verilmiştir.

Çizelge 4.6. Örnek 3'ün N=5 ve N=9 için gerçek mutlak hatalarının reel kısımlarının Laguerre metodu ve Bessel metodu ile karşılaştırılması

Laguerre kollokasyon metodu			Bessel metodu	
z	$ e_5(z) (\text{Reel})$	$ e_9(z) (\text{Reel})$	$ e_5(z) (\text{Reel})$	$ e_9(z) (\text{Reel})$
-1-i	1.0925e-2	1.1730e-4	1.0925e-2	1.1730e-4
-0.6-0.6i	1.6093e-3	1.3873e-5	1.6093e-3	1.3873e-5
-0.2-0.1i	1.2805e-4	2.3401e-6	1.2805e-4	2.3401e-6
-0.2-0.2i	3.5258e-5	1.9304e-8	3.5258e-5	1.9300e-8
-0.1-0.2i	1.4468e-4	2.2393e-6	1.4468e-4	2.2393e-6
-0.1+0.2i	1.4468e-4	2.2393e-6	1.4468e-4	2.2393e-6
-0.1-0.1i	3.8437e-6	1.8708e-8	3.8437e-6	1.8707e-8
-0.1+0.1i	3.8437e-6	1.8706e-8	3.8437e-6	1.8707e-8
0+0	4.8850e-15	3.6637e-14	1.0209e-16	6.3440e-17
0.1+0.1i	3.0060e-6	5.0314e-8	3.0060e-5	5.0316e-8
0.1-0.1i	3.0060e-6	5.0317e-8	3.0060e-6	5.0316e-8
0.1-0.2i	1.0855e-4	2.6242e-6	1.0855e-4	2.6242e-6
0.1+0.2i	1.0855e-4	2.6242e-6	1.0855e-4	2.6242e-6
0.2+0.2i	2.1855e-5	5.2495e-7	2.1855e-5	5.2495e-7
0.2+0.1i	1.2225e-4	2.4127e-6	1.2225e-4	2.4127e-6
0.6+0.6i	5.2367e-4	2.6521e-5	5.2367e-4	2.6521e-5
1+1i	2.5483e-3	1.6477e-4	2.5483e-3	1.6477e-4

N=5 ve N=9 kesme sınırları için gerçek mutlak hataların imajiner kısmının Laguerre metodu ve Bessel metodu ile karşılaştırılması Çizelge 4.7’de verilmiştir.

Çizelge 4.7. Örnek 3’ün N=5 ve N=9 kesme sınırları için gerçek mutlak hatalarının imajiner kısımlarının Laguerre metodu ve Bessel metodu ile karşılaştırılması

Laguerre kollokasyon metodu			Bessel metodu	
z	$ e_5(z) (Im)$	$ e_9(z) (Im)$	$ e_5(z) (Im)$	$ e_9(z) (Im)$
-1-i	5.2343e-3	5.1349e-5	5.2343e-3	5.1350e-5
-0.6-0.6i	3.3243e-3	4.6182e-5	3.3243e-3	4.6183e-5
-0.2-0.1i	1.8943e-4	3.1127e-6	1.8943e-4	3.1127e-6
-0.2-0.2i	3.6111e-4	6.1266e-6	3.6111e-4	6.1266e-6
-0.1-0.2i	1.6149e-4	3.1451e-6	1.6149e-4	3.1451e-6
-0.1+0.2i	1.6149e-4	3.1451e-6	1.6149e-4	3.1451e-6
-0.1-0.1i	8.7249e-5	1.5684e-6	8.7249e-5	1.5684e-6
-0.1+0.1i	8.7249e-5	1.5684e-6	8.7249e-5	1.5684e-6
0+0	4.1652e-28	2.1017e-20	1.2064e-31	1.2072e-28
0.1+0.1i	8.0595e-5	1.6381e-6	8.0595e-5	1.6381e-6
0.1-0.1i	8.0595e-5	1.6381e-6	8.0595e-5	1.6381e-6
0.1-0.2i	1.6917e-4	3.0789e-6	1.6917e-4	3.0789e-6
0.1+0.2i	1.6917e-4	3.0789e-6	1.6917e-4	3.0789e-6
0.2+0.2i	3.1027e-4	6.6922e-6	3.1027e-4	6.6922e-6
0.2+0.1i	1.5129e-4	3.4907e-6	1.5129e-4	3.4907e-6
0.6+0.6i	2.7181e-3	6.3925e-5	2.7181e-3	6.3925e-5
1+1i	1.1550e-2	1.5511e-4	1.1550e-2	1.5511e-4

Çizelge 4.8. Örnek 3'ün N=5 M=6 ve N=9 M=10 için gerçek ve tahmini mutlak hataların reel kısımlarının karşılaştırılması

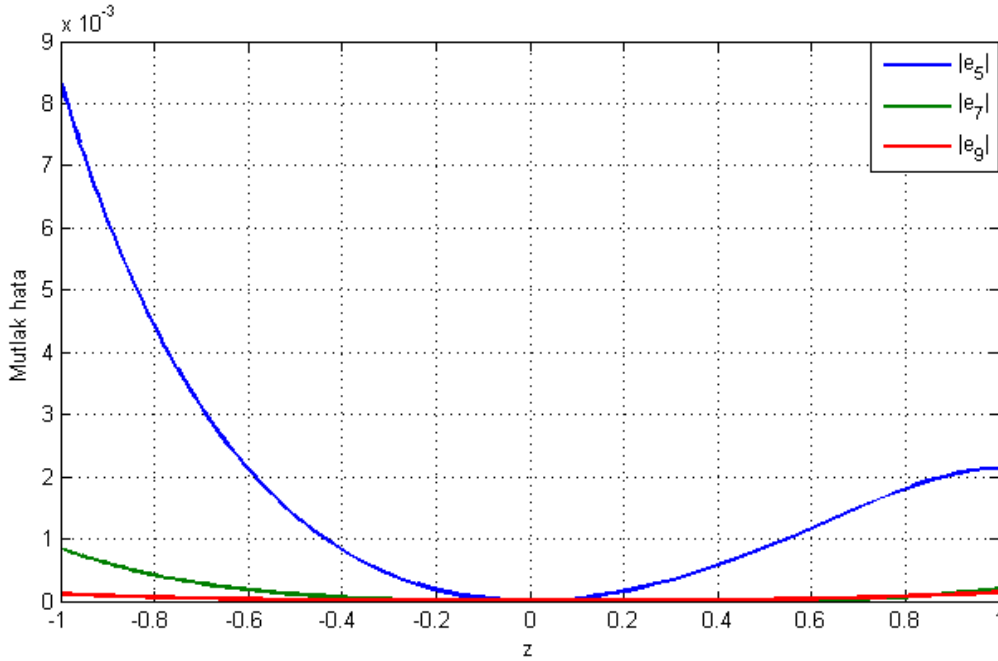
Laguerre kollokasyon metodu				
z	$ e_5(z) (\text{Reel})$	$ e_{5,6}(z) (\text{Reel})$	$ e_9(z) (\text{Reel})$	$ e_{9,10}(z) (\text{Reel})$
-1-i	1.0925e-2	9.5983e-2	1.1730e-4	5.1493e-5
-0.6-0.6i	1.6093e-3	2.7338e-2	1.3873e-5	1.0811e-5
-0.2-0.1i	1.2805e-4	2.1436e-3	2.3401e-6	1.2167e-7
-0.2-0.2i	3.5258e-5	1.3171e-3	1.9304e-8	3.9803e-7
-0.1-0.2i	1.4468e-4	1.3444e-3	2.2393e-6	1.0675e-7
-0.1+0.2i	1.4468e-4	1.3444e-3	2.2393e-6	1.0675e-7
-0.1-0.1i	3.8437e-6	1.7533e-4	1.8708e-8	5.0676e-8
-0.1+0.1i	3.8437e-6	1.7533e-4	1.8706e-8	5.0678e-8
0+0	4.8850e-15	2.0983e-14	3.6637e-14	2.3419e-16
0.1+0.1i	3.0060e-6	1.9812e-4	5.0314e-8	5.4017e-8
0.1-0.1i	3.0060e-6	1.9812e-4	5.0317e-8	5.4015e-8
0.1-0.2i	1.0855e-4	3.3910e-3	2.6242e-6	4.6109e-7
0.1+0.2i	1.0855e-4	3.3910e-3	2.6242e-6	4.6109e-7
0.2+0.2i	2.1855e-5	1.6818e-3	5.2495e-7	4.5144e-7
0.1+0.1i	1.2225e-4	2.5121e-3	2.4127e-6	2.2098e-7
0.6+0.6i	5.2367e-4	5.6872e-2	2.6521e-5	1.5050e-5
1+1i	2.5483e-3	3.2387e-1	1.6477e-4	7.9653e-5

Çizelge 4.9. Örnek 3'ün $N=5$, $M=6$ ve $N=9$, $M=10$ için gerçek ve tahmini mutlak hataların imajiner kısımlarının karşılaştırılması

Laguerre kollokasyon metodu				
z	$ e_5(z) (\text{Im})$	$ e_{5,6}(z) (\text{Im})$	$ e_9(z) (\text{Im})$	$ e_{9,10}(z) (\text{Im})$
-1-i	5.2343e-3	2.6565e-2	5.1349e-5	3.8483e-6
-0.6-0.6i	3.3243e-3	1.9421e-2	4.6182e-5	4.6663e-6
-0.2-0.1i	1.8943e-4	2.1698e-3	3.1127e-6	4.6868e-8
-0.2-0.2i	3.6111e-4	4.7772e-3	6.1266e-6	5.6232e-8
-0.1-0.2i	1.6149e-4	3.2499e-3	3.1451e-6	2.7668e-7
-0.1+0.2i	1.6149e-4	3.2499e-3	3.1451e-6	2.7668e-7
-0.1-0.1i	8.7249e-5	1.3786e-3	1.5684e-6	6.4288e-8
-0.1+0.1i	8.7249e-5	1.3786e-3	1.5684e-6	6.4288e-8
0+0	4.1652e-28	3.3992e-24	2.1017e-20	1.2537e-19
0.1+0.1i	8.0595e-5	1.7512e-3	1.6381e-6	1.6797e-7
0.1-0.1i	8.0595e-5	1.7512e-3	1.6381e-6	1.6797e-7
0.1-0.2i	1.6917e-4	2.8725e-3	3.0789e-6	1.6775e-7
0.1+0.2i	1.6917e-4	2.8725e-3	3.0789e-6	1.6774e-7
0.2+0.2i	3.1027e-4	7.7460e-3	6.6922e-6	8.7329e-7
0.1+0.1i	1.5129e-4	4.2260e-3	3.4907e-6	5.3135e-7
0.6+0.6i	2.7181e-3	9.6342e-2	6.3925e-5	1.3410e-5
1+1i	1.1550e-2	3.5268e-1	1.5511e-4	3.5102e-5

$N=5$, $N=7$ ve $N=9$ için elde edilen çözümlerin mutlak hataların görsel olarak karşılaştırılması Şekil 4.5'de sunulmuştur. Şekil 4.5'de $N=9$ için elde edilen mutlak hatanın $N=5$ ve $N=7$ için elde edilen mutlak hatadan daha küçük olduğu görülmektedir.

Böylece, artan N değerleriyle birlikte yaklaşık çözümün gerçek çözüme daha yakın olduğu anlaşılmaktadır.



Şekil 4.5. Örnek 4.3 için $N=5$, $N=7$ ve $N=9$ ile elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

Örnek 4.4. (Yüzbaşı Ş., Şahin N., Sezer M., 2012)

$$(1-z^2)f''(z) - 2zf'(z) + 6f(z) = (z^2 + 5)\cos(z) + 2z\sin(z)$$

ikinci mertebeden değişken katsayılı, homojen olmayan lineer diferansiyel denkleminin gerçek çözümü $f(z) = (3/2)z^2 - (1/2) + \cos(z)$ 'dir. Bu problemi $f(0) = 1/2$ ve $f'(0) = 0$ başlangıç koşulları altında $N=5$ ve $N=10$ kesme sınırları için problem çözülerek ve mutlak hata fonksiyonlarının bazı değerleri için Çizelge 4.10. elde edilmiştir.

N=5 ve N=10 kesme sınırları için elde edilen gerçek mutlak hataların reel ve imajiner kısımları Çizelge 4.10’da verilmiştir.

Çizelge 4.10. Örnek 4’ün N=5 ve N=10 için gerçek mutlak hataların karşılaştırılması

	Reel		Im	
z	$ e_5(z) (\text{Reel})$	$ e_{10}(z) (\text{Reel})$	$ e_5(z) (\text{Im})$	$ e_{10}(z) (\text{Im})$
0.0+0.0i	7.7716e-16	8.0158e-14	1.7764e-15	1.0356e-13
0.1+0.1i	3.6903e-5	8.6143e-9	8.5635e-5	4.9027e-10
0.2+0.2i	1.4964e-4	2.8225e-8	2.7532e-4	5.5917e-9
0.3+0.3i	3.3208e-4	5.2205e-8	5.0707e-4	1.7105e-8
0.4+0.4i	5.7173e-4	7.7166e-8	7.4927e-4	3.5097e-8
0.5+.5i	8.5752e-4	1.0193e-7	9.8059e-4	5.9809e-8
0.6+0.6i	1.1882e-3	1.2677e-7	1.1779e-3	9.2140e-8
0.7+0.7i	1.5823e-3	1.5311e-7	1.3119e-3	1.3336e-7
0.8+0.8i	2.0896e-3	1.8352e-7	1.3513e-3	1.8426e-7
0.9+0.9i	2.8066e-3	2.2129e-7	1.2740e-3	2.4381e-7
1.0+1.0i	3.8943e-3	2.6848e-7	1.0863e-3	3.0784e-7

N=5, M=6 ve N=9, M=10 için gerçek ve tahmini mutlak hataların reel kısımlarının karşılaştırılması Çizelge 4.11.' de verilmiştir.

Çizelge 4.11. Örnek 4'ün N=5, M=6 ve N=10, M=11 için gerçek ve tahmini mutlak hataların reel kısımlarının karşılaştırılması

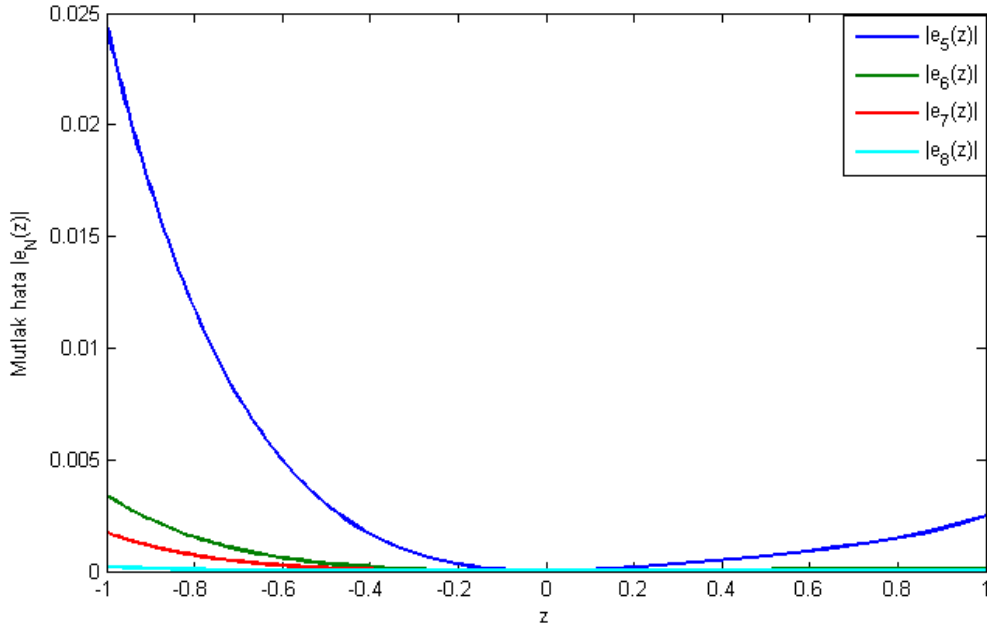
Laguerre kollokasyon metodu				
z	$ e_5(z) (\text{Reel})$	$ e_{5,6}(z) (\text{Reel})$	$ e_{10}(z) (\text{Reel})$	$ e_{10,11}(z) (\text{Reel})$
0.0+0.0i	7.7716e-16	1.1102e-16	8.0158e-14	1.4388e-13
0.1+0.1i	3.6903e-5	4.5512e-5	8.6143e-9	8.1416e-9
0.2+0.2i	1.4964e-4	1.7641e-4	2.8225e-8	2.5496e-8
0.3+0.3i	3.3208e-4	3.7906e-4	5.2205e-8	4.5153e-8
0.4+0.4i	5.7173e-4	6.3697e-4	7.7166e-8	-6.3840e-8
0.5+.5i	8.5752e-4	9.3734e-4	1.0193e-7	8.0389e-8
0.6+0.6i	1.1882e-3	1.2796e-3	1.2677e-7	9.4869e-8
0.7+0.7i	1.5823e-3	1.6856e-3	1.5311e-7	1.0840e-7
0.8+0.8i	2.0896e-3	2.2120e-3	1.8352e-7	1.2325e-7
0.9+0.9i	2.8066e-3	2.9645e-3	2.2129e-7	1.4261e-7
1.0+1.0i	3.8943e-3	4.1135e-3	2.6848e-7	1.6906e-7

N=5, M=6 ve N=9, M=10 için elde edilen gerçek mutlak hataların imajiner kısımlarının karşılaştırılması Çizelge 4.12’de verilmiştir.

Çizelge 4.12. Örnek 4’ün N=5, M=6 ve N=9, M=10 için mutlak hataların imajiner kısımlarının karşılaştırılması

Laguerre kollokasyon metodu				
z	$ e_5(z) (Im)$	$ e_{5,6}(z) (Im)$	$ e_{10}(z) (Im)$	$ e_{10,11}(z) (Im)$
0.0+0.0i	1.7764e-15	7.7438e-15	1.0356e-13	2.3362e-13
0.1+0.1i	8.5635e-5	8.1542e-5	4.9027e-10	2.9787e-9
0.2+0.2i	2.7532e-4	2.5878e-4	5.5917e-9	1.3587e-8
0.3+0.3i	5.0707e-4	4.7049e-4	1.7105e-8	3.1623e-8
0.4+0.4i	7.4927e-4	6.8546e-4	3.5097e-8	5.6188e-8
0.5+.5i	9.8059e-4	8.8129e-4	5.9809e-8	8.7215e-8
0.6+0.6i	1.1779e-3	1.0323e-3	9.2140e-8	1.2567e-7
0.7+0.7i	1.3119e-3	1.1065e-3	1.3336e-7	1.7312e-7
0.8+0.8i	1.3513e-3	1.0717e-3	1.8426e-7	2.3084e-7
0.9+0.9i	1.2740e-3	9.1104e-4	2.4381e-7	2.9853e-7
1.0+1.0i	1.0863e-3	6.4719e-4	3.0784e-7	3.7297e-7

N=5, N=6, N=7 ve N=8 için elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının görsel olarak karşılaştırılması Şekil 4.6’da verilmiştir. Şekil 4.6’da N=8 için elde edilen mutlak hatanın N=5, N=6, N=7 için elde edilen mutlak hatalardan daha küçük olduğu görülmektedir. Böylece, artan N değerleriyle birlikte yaklaşık çözümün gerçek çözüme daha yakın olduğu anlaşılmaktadır.



Şekil 4.6. Örnek 4.4 için $N=5$, $N=6$, $N=7$ ve $N=8$ ile elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması

Örnek 4.5.

$$f''(z) + e^z f'(z) + 2f(z) = 3e^{-z} - 1$$

ikinci mertebeden değişken katsayılı, homojen olmayan lineer diferansiyel denkleminin gerçek çözümü $f(z) = e^{-z}$ 'dir. Bu problemi $f(0) = 1$ ve $f'(0) = -1$ başlangıç koşulları altında $N=4$ ve $N=7$ kesme sınırları için problem çözülerek ve mutlak hata fonksiyonlarının bazı değerleri için Çizelge 4.13. elde edilmiştir.

Çizelge 4.13. Örnek 5'in N=4 ve N=7 için gerçek mutlak hataların karşılaştırılması

z	Reel		Im	
	$ e_4(z) (\text{Reel})$	$ e_7(z) (\text{Reel})$	$ e_4(z) (\text{Im})$	$ e_7(z) (\text{Im})$
-1-i	5.9292e-1	6.0729e-3	4.9970e-1	9.1895e-3
-0.6-0.6i	1.1903e-1	1.4467e-3	2.6107e-1	4.8569e-3
-0.2-0.1i	1.4799e-2	2.7253e-4	1.7650e-2	3.2919e-4
-0.2-0.2i	4.0007e-3	6.5375e-5	3.6879e-2	6.8014e-4
-0.1-0.2i	1.2627e-2	2.3283e-4	2.0888e-2	3.8273e-4
-0.1+0.2i	1.2627e-2	2.3283e-4	2.0888e-2	3.8273e-4
-0.1-0.1i	4.8573e-4	8.7202e-6	9.6929e-3	1.7918e-4
-0.1+0.1i	4.8573e-4	8.7202e-6	9.6929e-3	1.7918e-4
0+0	3.5527e-15	6.0174e-14	9.4663e-30	3.9679e-24
0.1+0.1i	4.5503e-4	1.0061e-5	1.0635e-2	1.9779e-4
0.1-0.1i	4.5503e-4	1.0061e-5	1.0635e-2	1.9779e-4
0.1-0.2i	1.7811e-2	3.3483e-4	1.9953e-2	3.6325e-4
0.1+0.2i	1.7811e-2	3.3483e-4	1.9953e-2	3.6325e-4
0.2+0.2i	3.5095e-3	8.6831e-5	4.4432e-2	8.2707e-4
0.2+0.1i	1.5747e-2	2.9043e-4	2.2821e-2	4.3288e-4
0.6+0.6i	7.9227e-2	3.1715e-3	4.6970e-1	8.1891e-3
1+1i	2.8511e-1	1.8691e-2	1.5109e	1.7262e-2

N=4, M=5 ve N=7, M=8 için gerçek ve tahmini mutlak hataların reel kısımlarının karşılaştırılması Çizelge 4.14.' de verilmiştir.

Çizelge 4.14. Örnek 5'in N=4, M=5 ve N=7, M=8 için gerçek ve tahmini mutlak hataların reel kısımlarının karşılaştırılması

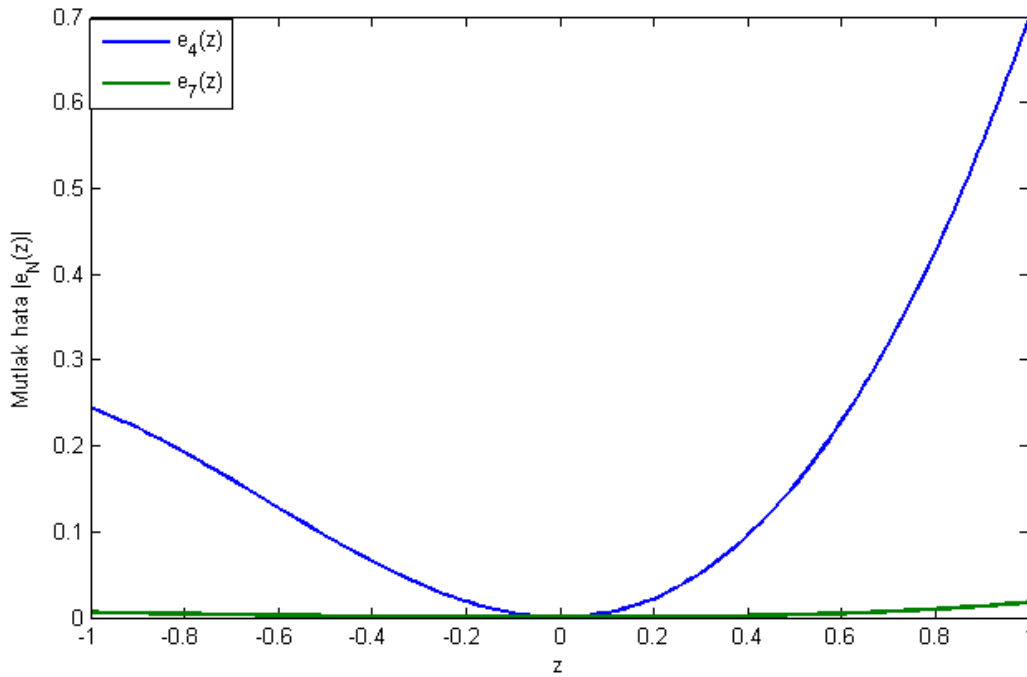
Laguerre kollokasyon metodu				
z	$ e_4(z) (\text{Reel})$	$ e_{4,5}(z) (\text{Reel})$	$ e_7(z) (\text{Reel})$	$ e_{7,8}(z) (\text{Reel})$
-1-i	5.9292e-1	6.0659e-1	6.0729e-3	5.4965e-3
-0.6-0.6i	1.1903e-1	1.2075e-1	1.4467e-3	1.2218e-3
-0.2-0.1i	1.4799e-2	1.3989e-2	2.7253e-4	1.7341e-4
-0.2-0.2i	4.0007e-3	4.0033e-3	6.5375e-5	5.0122e-5
-0.1-0.2i	1.2627e-2	1.1826e-2	2.3283e-4	1.4376e-4
-0.1+0.2i	1.2627e-2	1.1826e-2	2.3283e-4	1.4376e-4
-0.1-0.1i	4.8573e-4	4.8404e-4	8.7202e-6	6.5411e-6
-0.1+0.1i	4.8573e-4	4.8404e-4	8.7202e-6	6.5411e-6
0+0	3.5527e-15	3.8303e-15	6.0174e-14	1.8208e-14
0.1+0.1i	4.5503e-4	4.4922e-4	1.0061e-5	7.2667e-6
0.1-0.1i	4.5503e-4	4.4922e-4	1.0061e-5	7.2667e-6
0.1-0.2i	1.7811e-2	1.6970e-2	3.3483e-4	2.1878e-4
0.1+0.2i	1.7811e-2	1.6970e-2	3.3483e-4	2.1878e-4
0.2+0.2i	3.5095e-3	3.4462e-3	8.6831e-5	6.1731e-5
0.1+0.1i	1.5747e-2	1.4930e-2	2.9043e-4	1.8659e-4
0.6+0.6i	7.9227e-2	7.5624e-2	3.1715e-3	2.1548e-3
1+1i	2.8511e-1	2.5841e-1	1.8691e-2	1.2317e-2

N=4, M=5 ve N=7, M=8 için elde edilen gerçek mutlak hataların imajiner kısımlarının karşılaştırılması Çizelge 4.15’de verilmiştir.

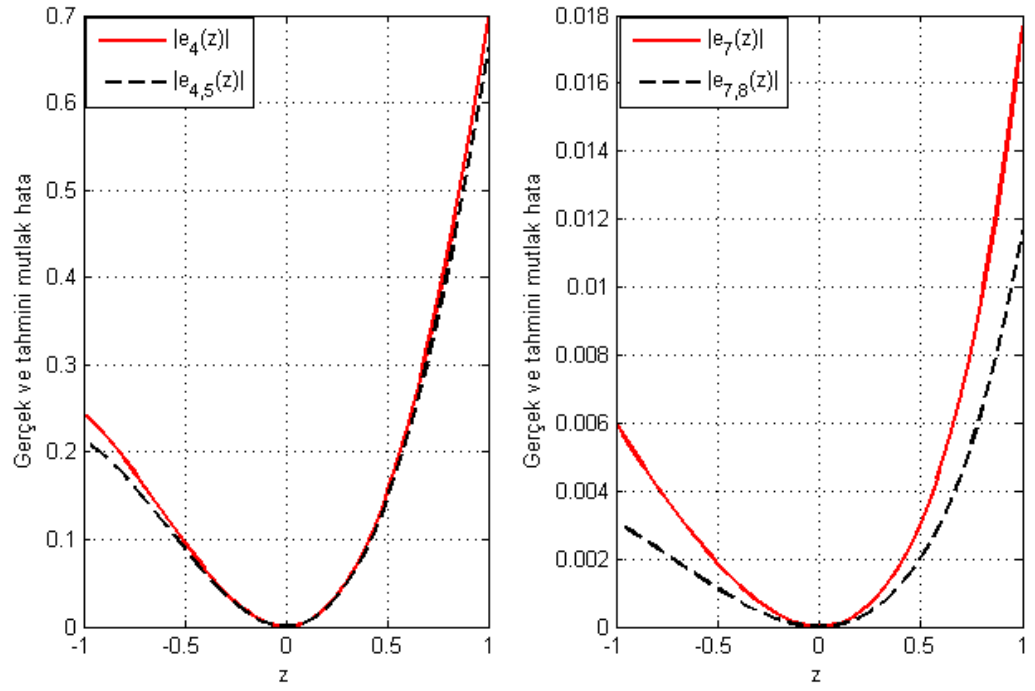
Çizelge 4.15. Örnek 5’in N=4, M=5 ve N=7, M=8 için mutlak hataların imajiner kısımlarının karşılaştırılması

Laguerre kollokasyon metodu				
z	$ e_4(z) (Im)$	$ e_{4,5}(z) (Im)$	$ e_7(z) (Im)$	$ e_{7,8}(z) (Im)$
-1-i	4.9970e-1	4.6047e-1	9.1895e-3	5.5826e-3
-0.6-0.6i	2.6107e-1	2.4274e-1	4.8569e-3	2.9453e-3
-0.2-0.1i	1.7650e-2	1.6569e-2	3.2919e-4	2.0500e-4
-0.2-0.2i	3.6879e-2	3.4730e-2	6.8014e-4	4.2756e-4
-0.1-0.2i	2.0888e-2	1.9807e-2	3.8273e-4	2.4590e-4
-0.1+0.2i	2.0888e-2	1.9807e-2	3.8273e-4	2.4590e-4
-0.1-0.1i	9.6929e-3	9.1519e-3	1.7918e-4	1.1361e-4
-0.1+0.1i	9.6929e-3	9.1519e-3	1.7918e-4	1.1361e-4
0+0	9.4663e-30	1.7670e-28	3.9679e-24	2.7855e-22
0.1+0.1i	1.0635e-2	1.0087e-2	1.9779e-4	1.2730e-4
0.1-0.1i	1.0635e-2	1.0087e-2	1.9779e-4	1.2730e-4
0.1-0.2i	1.9953e-2	1.8879e-2	3.6325e-4	2.3160e-4
0.1+0.2i	1.9953e-2	1.8879e-2	3.6325e-4	2.3160e-4
0.2+0.2i	4.4432e-2	4.2224e-2	8.2707e-4	5.3564e-4
0.1+0.1i	2.2821e-2	2.1699e-2	4.3288e-4	2.8122e-4
0.6+0.6i	4.6970e-1	4.4984e-1	8.1891e-3	5.4061e-3
1+1i	1.5109e	1.4634e	1.7262e-2	1.1619e-2

$N=4$ ve $N=7$ için elde edilen çözümlerin mutlak ve tahmini hatalarının görsel olarak karşılaştırılması Şekil 4.7. ve Şekil 4.8.'de sunulmuştur. Şekil 4.7.'de $N=7$ için elde edilen mutlak hatanın $N=4$ için elde edilen mutlak hatadan daha küçük olduğu görülmektedir. Böylece, artan N değerleriyle birlikte yaklaşık çözümün gerçek çözüme daha yakın olduğu anlaşılmaktadır. Benzer şekilde, Şekil 4.8.'de hata tahminlerinin mutlak hata fonksiyonlarına oldukça yakın olduğu görülmektedir. Bu durum, rezidüel hata tahmin yönteminin etkili olduğunu göstermektedir.



Şekil 4.7. Örnek 4.5 için $N=4$ ve $N=7$ ile elde edilen yaklaşık çözümlerin mutlak hatalarının karşılaştırılması



Şekil 4.8. Örnek 4.5 için $N=4$, $M=5$ ve $N=7$, $M=8$ için elde edilen gerçek ve tahmini mutlak hataların karşılaştırılması

5. SONUÇ

Bu çalışmada, kompleks diferansiyel denklemlerin çözümleri için bir kollokasyon yöntemi sunuldu. Yöntem, Laguerre polinomlarını temel alır. Dikdörtgensel bölgede tanımlı kollokasyon noktaları kullanılarak ve çözüm yöntemi için gerekli matris bağıntıları oluşturularak kompleks diferansiyel denklem problemi cebirsel bir denkleme indirgenerek yaklaşık çözüm bulunmuştur. Rezidüel hata tahmini tekniği gerçek çözümler bilinmediğinde çözümlerin güvenilirliğini test etmek için iyi bir yöntem olduğu nümerik uygulamalardan da görülmüştür ki gerçek hatalara oldukça yakın değerler elde edilmiştir. Ayrıca, nümerik örneklerde başka yöntemler ile karşılaştırmalar da yapılmış olup bizim yöntem ile oldukça iyi sonuçlar elde edilmiştir. Bu tez çalışması bilim ve mühendislikteki çeşitli model problemlerin nümerik çözümlerine katkı sağlamaktadır.

6. KAYNAKLAR

- ATKINSON, K. 1989. Sayısal Analize Giriş (2. baskı), New York: John Wiley & Sons , ISBN 978-0-471-50023-0.
- NEWMARK, N.M. 1959. A method of computation for structural dynamics. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 85 (EM3) 67-94.
- RUNGE, C. 1895. Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen, *Math. Ann.* 46: 167-178.
- KUTTA, W. 1901. Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen, *Z. Math. Phys.* 46: 435-453.
- LAX, P.D. ve WENDROFF, B. 1960. "Systems of conservation laws". *Commun. Pure Appl Math.* 13 (2): 217-237.
- WANG, K. ve WANG, Q. 2014. Taylor collocation method and convergence analysis for the Volterra-Fredholm integral equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 260: 294-300.
- ÇETİN, M., SEZER, M. ve KOCAYİĞİT, H. 2015. An Efficient Method Based on Lucas Polynomials for Solving High-Order Linear Boundary Value Problems. *Gazi University Journal of Science*, 28(3): 483-496.
- AKYÜZ-DAŞCIOĞLU, A., İŞLER ACAR, N. ve GÜLER, C. 2014. Bernstein collocation method for solving nonlinear Fredholm-Volterra integrodifferential equations in the most general form. *Journal of Applied Mathematics*.
- BİAZAR, J. ve SALEHİ, F. 2016. Chebyshev Galerkin method for integro-differential equations of the second kind. *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 6(1): 31-43.
- KARAKOÇ, S. B. G. ve ZEYBEK, H. 2016. A cubic B-spline Galerkin approach for the numerical simulation of the GEW equation. *Statistics, Optimization & Information Computing*, 4(1): 30-41.
- ADOMİAN, G. 1988. A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journal of mathematical analysis and applications*, 135(2): 501-544.

- HE, J. H. 1999. Homotopy perturbation technique. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 178(3): 257-262.
- HE, J. H. 1999. Variational iteration method—a kind of non-linear analytical technique: some examples. *International journal of non-linear mechanics*, 34(4): 699-708.
- SEZER, M. ve GÜLSU, M. 2006. Approximate solution of complex differential equations for a rectangular domain with Taylor collocation method. *Applied Mathematics and Computation* 177: 844–851.
- SEZER, M. ve YALÇINBAŞ, S. 2008. A Collocation Method to Solve Higher Order Linear Complex Differential Equations in Rectangular Domains. *Numerical Meth. Part. Diff. Equa.* DOI 10.1002/num.20448.
- YÜZBAŞI, Ş., ŞAHİN, N. ve SEZER, M. 2012. A collocation approach for solving linear complex differential equations in rectangular domains. *Math. Meth. Appl. Sci.* 35: 1126–11392.
- BATOOL, F., ZUBAİR, T. ve MOHYUD-DİN, S.T. 2015. A Collocation Method Based on the Hermite Operational Matrix for High-order Linear Complex Differential Equations. *International Journal of Modern Mathematical Sciences*, 13(1): 68-85.
- YÜZBAŞI, Ş. ve SEZER, M. 2013. A collocation method to find solutions of linear complex differential equations in circular domains. *Applied Mathematics and Computation* 219: 10610–10626.
- GÜLSU, M. ve SEZER, M. 2007. Approximate solution to linear complex differential equation by a new approximate approach. *Applied Mathematics and Computation* 185: 636–645.
- DÜŞÜNCELİ, F. ve ÇELİK, E. 2015. An Effective Tool: Numerical Solutions by Legendre Polynomials for High-order Linear Complex Differential Equations. *British Journal of Applied Science & Technology* 8(4): 348-355.

- SEZER, M., GÜLSU, M. ve TANAY, B. 2006. A Taylor collocation method for the numerical solution of complex differential equations with mixed conditions in elliptic domains. *Applied Mathematics and Computation* 182: 498–508.
- YÜZBAŞI, Ş., ŞAHİN, N. ve GÜLSU, M. 2011. A collocation approach for solving a class of complex differential equations in elliptic domains. *J. Numer. Math., Vol. 19*, No. (3), pp. 225–246.
- BAGHERPOORFARD, M. ve GHASSABZADE, F.A. 2013. Hermite Matrix Polynomial Collocation Method for Linear Complex Differential Equations and Some Comparisons. *Journal of Applied Mathematics and Physics*.1: 58-64.
- WANG, Y. 2017. Meromorphic solutions of some types of complex differential-difference equation. *Acta Mathematica Scientia*. 37B (3): 732–751.
- BARSEGAN, G. 2002. *Gamma-Lines: On the geometry of real and complex functions*. Taylor and Francis: London-New York.
- BARSEGAN, G. ve LE, D.T. 2005. On a topological description of solutions of complex differential equations. *Complex Variables*.50(5): 307–318.
- ISHISAKI, K. ve TOHGE, K. 1997. On the complex oscillation of some linear differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 206: 503–517.
- HEITTOKANGAS, J., KORHONEN, R. ve RATTYA, J. 2004. Growth estimates for solutions of linear complex differential equations. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*.. 29: 233–246.
- PROKHOROV, V.A. 2005. On best rational approximation of analytic functions. *Journal of Approximation Theory*. 133: 284–296.
- ANDRIĖVSKIĬ, V. 2005. Polynomial approximation of analytic functions on a finite number of continua in the complex plane. *Journal of Approximation Theory*.133: 238–244.
- GÜRBÜZ, B. ve SEZER, M. 2014. “Laguerre polynomial approach for solving Lane–Emden type functional differential equations” *Applied Mathematics and Computation* 242: 255–264.

- GÜLSU, M., GÜRBÜZ, B., ÖZTÜRK, Y. ve SEZER, M. 2011. Laguerre polynomial approach for solving linear delay difference equations. *Applied Mathematics and Computation* 217: 6765–6776.
- YÜZBAŞI, Ş. 2014. Laguerre approach for solving pantograph-type Volterra integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation* 232: 1183–1199.
- GÜRBÜZ, B. 2012. Lineer İntegro-diferansiyel fark denklemlerin Laguerre polinom çözümleri üzerine bir araştırma. Yüksek lisans tezi, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla, 115 s.
- AKÇAY, M. 2010. Diferansiyel-cebirsal denklemlerin Laguerre polinomları yaklaşımı ile nümerik çözümü üzerine bir araştırma. Yüksek lisans tezi, Atatürk üniversitesi, Erzurum, 44 s.
- DÜŞÜNCELİ, F. 2015. Lineer Kompleks Diferansiyel Denklemlerin Legendre Polinomları İle Nümerik Çözümleri üzerine bir araştırma. Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, 66 s.
- BELL, W.W. 1967. SPECIAL FUNCTIONS FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS. Lecturer in Theoretical Physics, Department of Natural Philosophy, University of Aberdeen, pp.168-185, Aberdeen, London.
- BERNKOPF, M. 1970. *Dictionary of Scientific Biography*, New York.
- SARI, H.E. 2009. Diferansiyel Denklemlerin Laguerre Polinom Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi, 42s.
- HERMİTE, C., POİNCARE, H. ve ROUCHE, E.1898. *Oeuvres de Laguerre (1), Algèbre, Calcul intégral*, Bronx, N.Y., USA. 350s.
- HERMİTE, C., POİNCARE, H. ve ROUCHE, E.1905. *Oeuvres de Laguerre (2), Géométrie*, Bronx, N. Y., USA. 285s.

ÖZGEÇMİŞ



Havva Nur VURAL 1992 yılında Antalya ili Serik ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Serik'te tamamladı. 2010 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2014 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Ağustos 2014'te Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı.

