



RECEP TAYYİP
ERDOĞAN
ÜNİVERSİTESİ

**T. C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK EĞİTİMİ**

**DİNAMİK GEOMETRİ ORTAMINDA PROBLEM KURMA:
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ
PROBLEM KURMA SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ**

(Yüksek Lisans Tezi)

Melek ŞAHİN

**Danışman
Prof. Dr. Tuğrul KAR**

**RİZE
2025**

KABUL VE ONAY

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalında, Prof. Dr. Tuğrul KAR danışmanlığında, Melek ŞAHİN tarafından hazırlanan *Dinamik Geometri Ortamında Problem Kurma: İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Problem Kurma Süreçlerinin İncelenmesi* adlı bu tez çalışması, 12/06/2025 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliği / ~~oy çokluğuyla~~ başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı, Adı SOYADI	İmza
Başkan	: Doç. Dr. Mustafa GÜLER	
Üye	: Prof. Dr. Tuğrul KAR	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Neslihan UZUN	

ETİK BEYAN

İlköğretim Matematik Eğitimi Tezli Yüksek Lisans Programından mezun olmak üzere teslim ettiğim “Dinamik Geometri Ortamında Problem Kurma: İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Problem Kurma Süreçlerinin İncelenmesi” adlı tezim, bilim ve araştırma etiği prensiplerine riayet edilerek tarafımdan yazılmıştır.

Tez çalışmamda, başka kaynaklardan aktarılan bütün bilgi ve alıntılar, Enstitünüz Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak açıkça gösterilmiştir. Kaynağı gösterilenler dışında kalan bütün bilgiler uygun araştırma yöntemi kullanılarak tarafımdan edinilmiş ve esere bu şekilde yansıtılmıştır. Şahsıma ait olmayan hiçbir bilgi, kasıt veya kusurlar, şahsıma aitmiş gibi gösterilmemiştir. İnternet kaynakları dâhil, sahibine/kaynağına atıf yapılmaksızın hiçbir bilgi kullanılmamıştır. Aksinin ortaya çıkması halinde doğacak bütün hukuki, idari, akademik ve etik sorumluluk tarafıma ait olacaktır. Eserin tesliminden sonra herhangi bir zamanda, bilim etiğine aykırılık tespit edilmesi ve / veya eserimle ilgili intihal veya intihal şeklinde anlaşılacak bir durumun ortaya çıkması halinde; Üniversiteniz ve eğitim kadronuzun hiçbir şekilde sorumlu tutulmayacağını hür irademle kabul, beyan ve taahhüt ederim.

12/06/2025

Melek ŞAHİN

ÖN SÖZ

Bu araştırmanın ortaya çıkma sürecinde anlayış ve sabır göstererek, akademik desteğini esirgemeyen değerli danışman Hocam Prof. Dr. Tuğrul KAR'a,

Tezin hazırlık sürecinde araştırmamız için dersini bizimle paylaşan ve tez jürisinde de bulunarak, bu tez araştırmasının gelişmesine katkı sağlayan sevgili Hocam Dr. Öğr. Üyesi Neslihan UZUN'a ve tez jüri üyesi olarak sunduğu kıymetli görüş ve önerileri ile bu tez araştırmasının gelişmesine katkı sağlayan değerli Hocam Doç. Dr. Mustafa GÜLER'e,

Lisans ve lisansüstü öğrenimimde katkılarını esirgemeyen Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı'ndaki değerli hocalarıma teşekkür ederim.

Son olarak akademik anlamda muvaffak olacağıma inanarak çıktığım bu yolda; gösterdiğim çaba ve gayretin esas sahibi olan, başımın tacı annem ve kıymetli babam başta olmak üzere desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili kardeşlerime varlıkları için en içten teşekkürlerimi sunarım.

Melek ŞAHİN

RİZE/2025

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	I
ETİK BEYAN.....	II
ÖN SÖZ	III
İÇİNDEKİLER	IV
ÖZET	VII
ABSTRACT.....	VIII
KISALTMALAR.....	IX
TABLolar LİSTESİ.....	X
ŞEKİLLER LİSTESİ	XI
GİRİŞ	1
1. GENEL BİLGİLER	3
1.1. Araştırmanın Önemi.....	3
1.2. Araştırmanın Amacı	8
1.3. Sınırlılıklar	9
1.4. Varsayımlar	9
1.5. Tanımlar	9
1.6. Kuramsal Çerçeve ile İlgili Araştırmalar	10
1.6.1. Problem Kurma ve Önemi.....	10
1.6.2. Problem Kurma Sürecini Tasvir Eden Modeller	12
1.6.3. Dinamik Geometri Ortamı, Önemi ve Bileşenleri.....	20
1.6.4. Dinamik Geometri Ortamında Problem Kurmaya Yönelik Literatür İncelemesi.....	47
2. YÖNTEM	66
2.1. Araştırmanın Yöntemi.....	66
2.2. Katılımcılar	68

2.3. Veri Toplama Araçları	70
2.3.1. Problem Kurma Etkinlikleri	70
2.3.2. Problem Kurma Sürecinin Video Kaydı.....	77
2.4. Veri Analizi	77
2.4.1. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Dinamik Geometri Ortamında Problem Kurma Süreçlerine Ait Veri Analizi	78
2.4.2. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Problem Kurma Süreçlerinde Dinamik Geometri Ortamının İşlevlerinden Nasıl Yararlandığına Ait Veri Analizi	90
3. BULGULAR.....	96
3.1. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Dinamik Geometri Ortamında Problem Kurma Süreçlerine Ait Bulgular	96
3.1.1. Problem Kurma Süreçleri İçin Yönelim Aşamasına Ait Bulgular	96
3.1.2. Problem Kurma Süreçleri İçin Bağlantı Kurma Aşamasına Ait Bulgular.....	101
3.1.3. Problem Kurma Süreçleri İçin Oluşturma Aşamasına Ait Bulgular	117
3.1.4. Problem Kurma Süreçleri İçin Yansıtma Aşamasına Ait Bulgular	128
3.2. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Problem Kurma Süreçlerinde Dinamik Geometri Ortamının İşlevlerinden Nasıl Yararlandığına Ait Bulgular .	138
4. TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER	183
4.1. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Dinamik Geometri Ortamında Problem Kurma Süreçlerine Ait Bulgulara İlişkin Tartışma.....	184
4.2. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Problem Kurma Süreçlerinde Dinamik Geometri Ortamının İşlevlerinden Nasıl Yararlandığına Ait Bulgulara İlişkin Tartışma	196
4.3. Sonuç ve Öneriler.....	198
KAYNAKÇA.....	201
EKLER.....	219

ETİK KURUL KARARI	247
-------------------------	-----



Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ana Bilim Dalı : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi

Tez Türü : Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Prof. Dr. Tuğrul KAR

Hazırlayan : Melek ŞAHİN

Yıl : 2025

Sayfa Sayısı : 247

ÖZET

DİNAMİK GEOMETRİ ORTAMINDA PROBLEM KURMA: İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ PROBLEM KURMA SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Bu araştırmada ilköğretim matematik öğretmenleri adaylarının dinamik geometri ortamında problem kurma süreçleri ile dinamik geometri ortamının bileşenlerinin problem kurma sürecinde nasıl ele alındığı incelenmiştir. Çalışmaya 12 öğretmen adayı ikiye bölünmüş gruplar halinde katılmıştır. Gruplara iki problem kurma etkinliği sunulmuş ve her biri için GeoGebra yazılımı yardımıyla problemler kurması istenmiştir. Grupların problem kurma süreçlerinin video ve ekran kaydı alınmış ve içerik analizine tabi tutulmuştur. Problem kurma süreçleri genel problem kurma süreç modelinin yönelim, bağlantı kurma, oluşturma ve yansıtma aşamalarına göre incelenmiş ve her bir aşamadaki faaliyetleri betimleyen kategoriler oluşturulmuştur. Birinci aşamada etkinlikteki problem durumunun incelenmesi temel kategori olmuştur. İkinci aşamada problem fikri oluşturmak için yapısal (veri- odaklı), sezgisel (hipotez- odaklı) ve eğitsel (pedagoji- odaklı) bağlantılar ön plana çıkmıştır. Üçüncü aşamanın odağında problem fikrinin yazıya dökülmesi söz konusu olup, anlamsal ve dilsel şeklinde iki kategoride ele alınmıştır. Son aşamada ise öğretmen adayları problemin yapısı üzerinde genel değerlendirme yapmış ve faaliyetleri problem kurma sürecinde yansıtma ile problemi kurduktan sonra yansıtma şeklinde iki kategori altında ele alınmıştır. Grupların problem kurma süreçlerinde dinamik geometri ortamının işlevlerinden nasıl yararlandıklarının analizi ise literatürdeki ölçme, sürüklenme ve yardımcı unsur ekleme türlerine yönelik çerçeveler ışığında detaylandırılmıştır. Araştırmanın bulguları genel problem kurma süreç modelinin adımlarına ilişkin öğretmen adaylarının karakteristik davranışlarını ortaya koymanın yanında dinamik geometri ortamının işlevlerinin genel problem kurma süreç modelinin çeşitli adımlarında nasıl kullanıldığını da ortaya koymuştur. Ulaşılan sonuçlara göre çalışmada teknoloji destekli problem kurma sürecinin matematik öğretimine entegrasyonu kapsamında önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matematik Öğretmeni Adayları, Problem Kurma, Problem Kurma Süreci, Dinamik Geometri Ortamı, Ölçme, Sürüklenme.

Recep Tayyip Erdogan University Institute of Graduate Studies

Department : Mathematics and Science Education
Thesis Type : Master's Thesis
Supervisor : Prof. Dr. Tuğrul KAR
Author : Melek ŞAHİN
Year : 2025
Pages : 247

ABSTRACT

**PROBLEM POSING IN A DYNAMIC GEOMETRY ENVIRONMENT:
INVESTIGATION OF PRESERVICE MATHEMATICS TEACHERS'
PROBLEM POSING PROCESSES**

This study explores the problem-posing processes of pre-service mathematics teachers within a dynamic geometry environment, with a particular focus on how this environment were utilized during the problem-posing process. A total of twelve participants participated in the study, working collaboratively in pairs. Each pair engaged in two problem-posing tasks and was asked to pose problems utilizing GeoGebra, a dynamic geometry software tool. The problem-posing processes were examined based on the stages of a general problem-posing process model: orientation, connection, generation, and reflection. In the first stage, the central focus was on examining the problem situation in the task. In the second stage, three types of connections emerged in the development of problem ideas: structural (data-oriented), intuitive (hypothesis-oriented), and pedagogical (pedagogy-oriented). The third stage centered on the articulation of the problem idea in written form, which was analyzed within two categories: semantic and linguistic. In the final stage, participants conducted a comprehensive evaluation of the problem's structure, with their activities categorized into reflection during the problem-posing process and reflection following the posing of the problem. Moreover, the analysis of how each pair utilized components of the dynamic geometry environment was detailed in accordance with existing frameworks in the literature regarding measurement, dragging, and insertion actions. The results not only characterize the behaviors of pre-service teachers at each stage of the general problem-posing process model but also elucidate how components of the dynamic geometry environment are employed throughout these stages. This study offers recommendations for the effective integration of technology-supported problem-posing processes into mathematics instruction.

Keywords: Prospective Mathematics Teachers, Problem Posing, Problem-Posing Process, Dynamic Geometry Environment, Measuring, Dragging.

KISALTMALAR

CAS	:	Computer Algebra Systems
DGO	:	Dinamik Geometri Ortamı
DGY	:	Dinamik Geometri Yazılımı
MEB	:	Millî Eğitim Bakanlığı
NCTM	:	National Council of Teachers of Mathematics
PKE	:	Problem Kurma Etkinlikleri



TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1. Sürüklemenin bilişsel analizleri ve matematiksel önemine odaklı türlerinin tasnifi	26
Tablo 2. Algısal ve kuramsal düşünme üzerindeki rollerine göre sürükleme türleri	31
Tablo 3. Ölçüm türlerinin sınıflaması	36
Tablo 4. Yardımcı unsur ekleme nedenlerinin belirlenmesine kaynaklık eden etkinlikler	43
Tablo 5. Yardımcı unsur ekleme nedenlerine ilişkin sınıflama	44
Tablo 6. Katılımcıların akademik başarı durumlarına ait bilgiler	69
Tablo 7. Yönelim aşamasına ilişkin oluşturulan kategori ve kodlar	80
Tablo 8. Bağlantı kurma aşamasına ilişkin oluşturulan kategori ve kodlar	84
Tablo 9. Oluşturma aşamasına ilişkin oluşturulan kategori ve kodlar	86
Tablo 10. Yansıtma aşamasına ilişkin oluşturulan kategoriler ve kodlar	89
Tablo 11. Araştırmanın veri analiz birimlerine ilişkin sınıflamalar	95
Tablo 12. Yönelim aşamasına ait kodların gruplarda görülme durumları	100
Tablo 13. Bağlantı kurma aşamasına ait kodların gruplarda görülme durumları ...	116
Tablo 14. Oluşturma aşamasına ait kodların gruplarda görülme durumları	127
Tablo 15. Yansıtma aşamasına ait kodların gruplarda görülme durumları	137

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Pedagojik perspektiften problem kurma sezgisel stratejilerinin bilişsel çerçevesi	14
Şekil 2. Genel problem kurma süreç modeli	16
Şekil 3. İz bırakarak sürüklemeye için örnek durum.....	30
Şekil 4. Amaçlı ölçüm örneğine kaynaklık eden problem durumu	37
Şekil 5. Amaçlı ölçüm örneği	37
Şekil 6. Algısal ölçüm örneğine kaynaklık eden problem durumu	38
Şekil 7. Algısal ölçüm örnek durumları.....	39
Şekil 8. Doğrulama ölçümü örneği.....	39
Şekil 9. İspat ölçümü örneğine kaynaklık eden problem durumu	40
Şekil 10. İspat ölçümü örnek durumları	40
Şekil 11. Eklemeye ilişkin sınıflamayı örneklendiren şekiller	42
Şekil 12. Tahmin etme örnek durumları	46
Şekil 13. Martínez-Cruz vd. (2001) kullanılan geometrik içerik	50
Şekil 14. Christou vd. (2004) çalışmasında yer alan geometrik içerik.....	53
Şekil 15. Bilişsel ve üst-bilişsel açıdan problem çözme çerçevesi.....	56
Şekil 16. Santos-Trigo ve arkadaşları (2016) çalışmasında yer alan dinamik yapı... 58	
Şekil 17. “Arazi Sınırı Problemi” için problem durumu	61
Şekil 18. Segal (2024) çalışmasında yer alan geometrik içerik örnekleri	63
Şekil 19. Segal (2024) çalışmasında yer alan dinamik temsil örneği 1	64
Şekil 20. Segal (2024) çalışmasında yer alan dinamik temsil örneği 2	65
Şekil 21. Araştırma sürecine ait akış şeması	67
Şekil 22. Araştırmada kullanılan etkinlikler.....	76
Şekil 23. Yönelim aşamasına ait mevcut verileri betimleme davranışı.....	96
Şekil 24. Yönelim aşamasına ait mevcut verilerden çıkarsanabilecek ilişkileri belirleme davranışı örnek durumu 1	98
Şekil 25. Yönelim aşamasına ait mevcut verilerden çıkarsanabilecek ilişkileri belirleme davranışı örnek durumu 2	98
Şekil 26. Bağlantı kurma aşamasına ait yapısal bağlantılar kapsamındaki mevcut şeklin bileşenleri arasında bağlantılar kurma davranışı örnek durumu 1	102

Şekil 27. Bağlantı kurma aşamasına ait mevcut şeklin bileşenleri arasında bağlantılar kurma davranışı örnek durumu 2	103
Şekil 28. Bağlantı kurma aşamasına ait yapısal bağlantılar kapsamındaki mevcut şekle yardımcı elemanlar ekleyerek bağlantı kurma davranışı örnek durumu 1.....	105
Şekil 29. Bağlantı kurma aşamasına ait yapısal bağlantılar kapsamındaki mevcut şekle yardımcı elmanlar ekleyerek bağlantı kurma davranışı örnek durumu 2	107
Şekil 30. Bağlantı kurma aşamasına ait yapısal bağlantılar kapsamındaki mevcut şekle yardımcı elemanlar ekleyerek bağlantı kurma davranışı örnek durumu 3.....	108
Şekil 31. Bağlantı kurma aşamasına ait sezgisel bağlantılar kapsamındaki varsayımlar üreterek bağlantılar kurma örnek durumu	109
Şekil 32. Bağlantı kurma aşamasına ait sezgisel bağlantılar kapsamındaki rastlantısal bağlantılar kurma örnek durumu.....	111
Şekil 33. Bağlantı kurma aşamasına ait eğitsel bağlantılar kapsamındaki günlük yaşam bağlantıları örnek durumu.....	113
Şekil 34. Bağlantı kurma aşaması eğitsel bağlantılar kapsamındaki öğretimsel bağlantılar örnek durumu 1	114
Şekil 35. Bağlantı kurma aşaması eğitsel bağlantılar kapsamındaki öğretimsel bağlantılar örnek durumu 2.....	115
Şekil 36. Oluşturma aşamasına ait anlamsal kategorisi A1 koduna ilişkin örnek durum	117
Şekil 37. Oluşturma aşamasına ait anlamsal kategorisi A2 koduna ilişkin örnek durum	119
Şekil 38. Oluşturma aşamasına ait anlamsal kategorisi A3 koduna ilişkin örnek durum 1	121
Şekil 39. Oluşturma aşamasına ait anlamsal kategorisi A3 koduna ilişkin örnek durum 2	122
Şekil 40. Oluşturma aşamasına ait anlamsal kategorisi A4 koduna ilişkin örnek durum 1	123
Şekil 41. Oluşturma aşamasına ait anlamsal kategorisi A4 koduna ilişkin örnek durum 2	124
Şekil 42. Oluşturma aşamasına ait dilsel kategorisi D1 koduna ilişkin örnek durum	125

Şekil 43. Oluşturma aşamasına ait dilsel kategorisi D2 koduna ilişkin örnek durum	126
Şekil 44. Yansıtma aşaması kapsamındaki R1 koduna ilişkin örnek durum 1	129
Şekil 45. Yansıtma aşaması kapsamındaki R1 koduna ilişkin örnek durum 2	130
Şekil 46. Yansıtma aşaması kapsamındaki R1 koduna ilişkin örnek durum 3	131
Şekil 48. Yansıtma aşaması kapsamındaki R2 koduna ilişkin örnek durum 2	132
Şekil 49. Yansıtma aşaması kapsamındaki R3 koduna ilişkin örnek durum	133
Şekil 50. Yansıtma aşaması kapsamındaki G1 koduna ilişkin örnek durum 1	134
Şekil 51. Yansıtma aşaması kapsamındaki G1 koduna ilişkin örnek durum 2	135
Şekil 52. Yansıtma aşaması kapsamındaki G2 koduna ilişkin örnek durum	136
Şekil 53. DGO'da problem kurma sürecinin genel problem kurma süreç modelinin adımlarına göre akış şeması	138
Şekil 54. Yönelim aşaması amaçlı ölçüm örneği	139
Şekil 55. Yönelim aşaması doğrulama ölçümü örneği	140
Şekil 56. Yönelim aşaması algısal ölçüm örneği	142
Şekil 57. Yönelim aşaması ispat ölçümü örneği	143
Şekil 58. Yönelim aşamasında rastgele ölçüm örneği	144
Şekil 59. Yönelim aşaması rastgele sürüklenme örneği	144
Şekil 60. Yönelim aşaması amaçlı sürüklenme örneği	145
Şekil 61. Yönelim aşamasında yardımcı unsur ekleme işlevi kapsamında tahmin etme örneği	146
Şekil 62. Yönelim aşaması diğer bileşen örneği	147
Şekil 63. Gruplarda yönelim aşamasına ait dinamik ortam işlevlerinin görülme durumları	148
Şekil 64. Bağlantı kurma aşaması amaçlı ölçüm örneği 1	149
Şekil 65. Bağlantı kurma aşaması amaçlı ölçüm örneği 2	150
Şekil 66. Bağlantı kurma aşaması doğrulama ölçümü örneği 1	151
Şekil 67. Bağlantı kurma aşaması doğrulama ölçümü örneği 2	153
Şekil 68. Bağlantı kurma aşaması algısal ölçüm örneği	155
Şekil 69. Bağlantı kurma aşaması ispat ölçümü örneği	156
Şekil 70. Bağlantı kurma aşaması rastgele ölçüm örneği	157
Şekil 71. Bağlantı kurma aşaması rastgele sürüklenme örneği	158

Şekil 72. Bağlantı kurma aşaması amaçlı sürükleme örneği	159
Şekil 73. Bağlantı kurma aşaması sürükleme testi örneği	160
Şekil 74. Bağlantı kurma aşaması algısal sürükleme* örneği	161
Şekil 75. Bağlantı kurma aşaması yardımcı unsur ekleme örneği 1	163
Şekil 76. Bağlantı kurma aşaması yardımcı unsur ekleme örneği 2	164
Şekil 77. Bağlantı kurma aşaması yardımcı unsur ekleme örneği 3	166
Şekil 78. Bağlantı kurma aşaması diğer bileşen örneği 1	167
Şekil 79. Bağlantı kurma aşaması diğer bileşen örneği 2	169
Şekil 80. Bağlantı kurma aşaması diğer işlev örneği 3	170
Şekil 81. Gruplarda bağlantı kurma aşamasına ait dinamik ortam işlevlerinin görülme durumları	172
Şekil 82. Oluşturma aşaması doğrulama ölçümü örneği	173
Şekil 83. Oluşturma aşaması rastgele sürükleme örneği	174
Şekil 84. Oluşturma aşaması sürükleme testi örneği	175
Şekil 85. Oluşturma aşamasına ait yardımcı unsur ekleme örneği 1	177
Şekil 86. Oluşturma aşaması yardımcı unsur ekleme örneği 2	179
Şekil 87. Gruplarda oluşturma aşamasına ait dinamik ortam işlevlerinin görülme durumları	181
Şekil 88. Dinamik geometri ortamı işlevlerinin problem kurma sürecinin aşamalarında görülme durumları	182

GİRİŞ

Problem, matematiksel insanın hammaddesi olarak metoforlaştırılmıştır (Schoenfeld, 2023). Problem kurma ise matematiğin kalbinde yer almaktadır ve matematik eğitimi alanında giderek artan bir ilgi görmektedir (Halmos, 1980; Silver, 2023). Literatürde problem bulma, problem üretme, problem oluşturma gibi çeşitli kimliklere bürünen (Christou vd., 2005; Gonzalez, 1998; Kilpatrick, 1987; Manuel & Frieman, 2017) problem kurma, entelektüel bir etkinlik olmanın yanında matematiği öğrenmenin etkili bir yoludur (Cai, 2022; Silver & Cai, 2005; Sosa-Martín vd., 2024). Problem kurma hem öğretmen hem de öğrencilerin esnek veya stratejik düşünmesini desteklemektedir (Klein & Leikin, 2020). Literatürde ise problem kurmanın matematiksel yaratıcılığı (Leikin & Elgrably, 2020; Van Harpen & Sriraman, 2013), kavramsal anlayışı (Manuel & Frieman, 2017) ve matematiksel düşünmeyi (Silver, 1994) desteklemenin yanında problem çözme (Xie & Masingila, 2017) ile yakın ilişkisi sıklıkla vurgulanmaktadır.

Öğretmen ve öğrencilerin problem kurmada yetenekli olduğuna ilişkin literatürde genel bir eğilim olmasına karşın problemlerin nasıl oluşturulduğu hakkında hâlâ yeterli çalışma bulunmamaktadır (Cai vd., 2015; Cai & Leikin, 2020). Buna karşılık problem kurmayı problem çözme ile iç içe ve ilişkili sayan araştırmacıların perspektifinden (Cai & Hwang, 2021; Silver, 1994) problem çözme süreç modelleri problem kurma sürecini açıklamak için yol göstericidir. Cai vd. (2022) problem çözme ve problem kurmanın bilişsel süreçlerinin birbirini tamamlayan ancak doğaları gereği birbirinden farklı olduğunu dolayısıyla da problem kurma sürecini açıklayan modellerin ayrıca geliştirilmesi gerektiğini savunmaktadır. Benzer şekilde Baumanns ve Rott (2022a) da problem çözme ve problem kurma süreçleri arasındaki bilişsel ve üst-bilişsel düşünmedeki karakteristik farklılığı vurgulamıştır. Bu doğrultuda hareket eden Cai ve Rott (2024) ise problem kurma süreçlerine yakın dönemde odaklanan çalışmalar ışığında problem kurma sürecinin genel resmini sunmayı amaçlamış ve Polya'nın (1957) problem çözme modelinin aşamaları ile paralel olan dört aşamalı —yönelim, bağlantı kurma, oluşturma ve yansıtma— genel bir problem kurma süreç modeli geliştirmiştir.

Problem kurma çalışmalarında genel eğilim süreçlerden ziyade süreçte kurulan problemleri inceleyerek, problem kurucular hakkında bir değerlendirmede bulunmak olmuştur. Hâlbuki üründen ziyade o ürünün nasıl ortaya çıktığını incelemek daha problem kurucuların bilişsel süreçlerine dair kapsamlı bilgiler sunacaktır (Baumanns & Rott, 2022b; Christou vd., 2005; Koichu & Kontorovich, 2013). Diğer yandan öğrenme ortamları keşfedici, açıklayıcı ve iletişime açık etkinlikler ile zenginleştirilmelidir (Mogetta vd., 1999a). Problem kurma da açık-uçlu doğası ile öğrenme ortamlarını zenginleştiren üretken bir etkinliktir (Silver, 1994). Özellikle açık-uçlu etkinliklerin matematik eğitime nüfuz etmesi, öğrenenlerin kavramsal ve işlemsel anlamasına katkı sağlamanın yanında stratejik düşünme başta olmak üzere düşünme biçimlerini geliştirme potansiyeline sahiptir (Baranović & Milinković, 2023; Silver, 1995). Çünkü matematiksel anlayışın gelişmesi ve derinleşmesi açık-uçlu etkinlikler ile sağlanmaktadır (Schoenfeld, 2020) ve problem kurma etkinlikleri de açık-uçlu yapısı bu vizyonu sunmaktadır.

Matematik sınıflarındaki üretken sosyal etkileşime aracılık edebilecek önemli araçlardan birisi de teknolojidir (Geiger, 2006). Dinamik geometri ortamları da ekran etkileşimi ve gerekçelendirme yeteneğinin geliştirilmesine katkıda bulunabilir (Brunheria & Ponte, 2019). Nitekim, teknolojinin öğretme ve öğrenme ortamındaki pedagojik gücü öğretmenler için çeşitli fırsatlar sunmaktadır (Geiger, 2006). Buna karşın, teknoloji destekli problem kurma sürecinin nasıl şekillendiği henüz yeterince aydınlatılmamış alanlardan biridir (Cai vd., 2015; Lee, 2021). Bu kapsamda durum çalışması deseninde yürütülen bu tez araştırmasında Cai ve Rott'un (2024) geliştirdiği genel problem kurma süreç modeline göre ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının dinamik geometri ortamında problem kurma süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu araştırmanın sonuçlarının teknoloji destekli problem kurma süreçlerinin öğretmen eğitimi programlarına dâhil edilmesine katkı sunması yanında problem kurma alanının teorik temellerine katkı sağlaması da amaçlanmıştır. Çünkü matematik eğitimi topluluğu genelinde kabul görecektir, problem kurma anlayışının geliştirilmesine ihtiyaç bulunduğundan (Ruthven, 2019) DGO'da problem kurma sürecinin incelenmesi problem kurma alanının teorik temellerine de katkı sağlama potansiyeli taşımaktadır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Araştırmanın Önemi

Problem kurma matematiksel deneyime ve belirli bir bağlama dayalı olarak yeni problem üretme veya verilen problemi yeniden biçimlendirmenin istendiği faaliyetleri tanımlamaktadır (Silver, 1994). Silver ve Cai'nin (2005) de entelektüel bir aktivite olarak tanımladığı problem kurma, matematiğin kalbinde yer almaktadır (Halmos, 1980) ve matematik eğitimi alanındaki anahtar rolü uzun zamandır kabul edilmektedir (Liljedahl & Cai, 2021; Weiss & Moore-Russo, 2012). Problem kurma, öğretim dokümanlarında da vurgulanan bir tema olmuştur. Örneğin, Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) problem kurmayı, gerçek bir matematiksel etkinlik olarak tanımlamış ve öğretmenlerin düzenli olarak öğrencilerden çeşitli matematiksel durumlara yönelik ilginç problemler oluşturmalarını istemesini tavsiye etmiştir. Türkiye'de de Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı'nda (5,6,7 ve 8. Sınıflar) (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2024) problem kurma çalışmalarının yapılması önerilmektedir. Öğretim programlarında ve standartlarında (örn., NCTM, 2000) vurgulanan ifadelerle rağmen problem kurma, matematik eğitime henüz güçlü bir şekilde dâhil edilememiştir (Cai, 2025; Cai & Hwang, 2020).

Varsayım oluşturma, sorgulama, anlamlandırma ve keşfetme matematiksel düşünmenin temel unsurlarıdır ve matematiksel ve bilimsel alandaki entelektüel gelişim bu beceriler ile yakın ilişkilidir (Einstein & Infeld, 1938; Leikin, 2015; Schoenfeld, 2016, 2023; Schwartz, 1992). Schwartz'a (1992) göre varsayım oluşturma ve keşif, çözümsüz kalan bir problemin çözüm adımı olarak yeni problem(ler)in ortaya konulmasıdır. Zira orijinal problemi farklı şekilde biçimlendirmek, diğer bir ifadeyle problemler kurmak, problem için daha iyi bir çözüm sağlama potansiyeline sahiptir (Kilpatrick, 1987). Örneğin Polya (1957) "Nasıl çözmeli?" adlı kitabında, problem çözme ile ilişkisine atfen problem kurmayı şu ifadeler ile tasvir etmiştir:

"Bir böcek pencere camından kaçmaya çalışır. Aynı şeyi tekrar tekrar dener ve odaya bir sonraki girişinde açık olan diğer pencereyi denemez. Bir insan daha akıllıca hareket edebilir veya en azından edebilmelidir. İnsan üstünlüğü, doğrudan üstesinden gelinemeyecek bir engelin etrafından dolaşmak yerine ve bazen asıl problem çözümsüz kaldığında uygun bir ek problem tasarlamaktan ibarettir" (s. 51).

Bu ifadeler, her ne kadar problem çözmeden bağımsız bir problem kurma tanımını içermese de problem kurmanın anlam zenginliğini açıklamakta ve önemini ortaya koymaktadır. Özetle Polya (1957), problem kurmayı insana özgü bir faaliyet ve zekâ parıltısı olarak görmüştür. Buna karşılık problem kurmanın, problem çözmeden bağımsız yapılan tanımlarında matematiksel ve bilimsel ilerleyişte önem arz eden; sorgulama, anlamlandırma ve keşfetmeye yönelik doğası vurgulanmaktadır (Einstein & Infeld, 1938; Leikin, 2015). Nitekim bilimdeki değişim ve ilerlemenin, bireyin en köklü kabulleri sorgulaması ve bu kabulleri sarsacak yeni fikirler ortaya atması ile sağlandığı bilinmektedir (Kuhn, 2021).

Schoenfeld (2023, s. 573) ise “İnançlar, deneyimin bir fonksiyonu olarak zamanla gelişir; aynı şekilde değiştirilmelidirler.” düşüncesi ile matematiğin kesinlik ile ilişkili olduğu inancına karşı çıkan bir pedagojiyi savunmuştur. Bu pedagojide amaç, öğrencinin matematiği alışlagelmişin dışında ve üretken bir etkinlik olarak deneyimlemesidir. Araştırmacı üretken etkinlikleri matematiksel düşünmeye hizmet eden ve problem çözmenin ötesindeki etkinlikler olarak tanımlamış ve varsayımlar oluşturma aracılığıyla problem kurmaya işaret etmiştir. Bu öğrenme pedagojisinin hâkim olduğu bir sınıf ortamında ise ne öğretmen yalnızca problem kuran ne de öğrenci yalnızca problem çözen konumundadır. Bu sınıf ortamı, “asla bitirmedik!” anlayışı ile sorgulamayı genişleten bir matematik topluluğu haline dönüşmektedir.

Bu açıklamalar problem kurmanın, matematik eğitiminin öznesi konumunda olduğuna işaret etmektedir. Bu anlamda matematik eğitimi ile öğrenenler etraflarındaki dünyayı, kanıtları ve otoriteleri sorgulayabilecek şekilde yetiştirilmelidir (Schoenfeld, 2023; Schwartz, 1992). Çünkü sorgulama eylemi olarak problem kurma, entelektüel gelişimin özü ve düşünmek için bilginin gerekli ama yeterli olmadığının kanıtı olup, tutarlı usa vurma duyarlılığına ulaşmayı sağlar (Crespo & Sinclair, 2008; Duckworth, 2006; Silver, 1994; Yıldırım, 2021).

Problem kurma bilişsel ve duyuşsal süreçlerin birleşimi iken kurulan problemler bu karmaşık sürecin ürünleridir (Cai & Leikin, 2020; Koichu & Kontorovich, 2013; Zhang vd., 2025). Problem kurma sürecinin nihayetinde ortaya çıkan ürünler; matematiksel geçerlik, karmaşıklık ve yaratıcılık gibi çeşitli boyutlar üzerinden analiz edilebilmektedir (Kar vd., 2023; Leung & Silver, 1997; Silver & Cai, 1996; Ulusoy, 2025). Bu analiz birimleri kurulan problemleri değerlendirmeye fırsat

sunarken, onların ortaya çıkma süreci ve problem kurucuların zihinsel faaliyetleri hakkında yeterli fikir sunmamaktadır (Christou vd., 2005b; Marco & Palatnik, 2024; Zhang vd., 2025). Problem kurma sürecini incelemek ise problem kurucuların bilişsel süreçleri hakkında kapsamlı ve yararlı içgörüler sunabilir (Baumanns & Rott, 2022b; Cai vd., 2025; Christou vd., 2005b; Koichu & Kontorovich, 2013). Bu içgörüler sayesinde problem kurmanın gerek öğretmen eğitime gerekse öğrencilerin öğrenme sürecine nasıl dâhil edilebileceğinin rotası çizilebilecektir (Cai vd., 2025; Cai & Leikin, 2020; Koichu & Kontorovich, 2013). Problem kurmayı matematik öğrenimine dâhil etme çabaları süregelse de öğrenenlerin problem kurma süreçlerine dair içgörüler nispeten sınırlıdır (Cai vd., 2022; Cai & Leikin, 2020; Cai & Rott, 2024). Dolayısıyla öğrenenlerin problemleri kurarken nasıl düşündükleri detaylandırılmaya muhtaçtır (Cai vd., 2022; Cai vd., 2025). Bu sebeple problem kurma sürecini incelemek önemli ve dikkate değer bir çalışma alanıdır (Baumanns & Rott, 2022a; Cai & Rott, 2024; Zhang vd., 2022).

Cai vd. (2015) de problem kurma alanında yanıtlanması amacıyla on araştırma sorusu önermiştir ve bunlardan ikisi problem kurma sürecinin ve problem kurma etkinliklerinde teknoloji kullanımının incelenmesidir. Problem kurma sürecinin incelenmesinin yanında problem kurma ve teknoloji bağlantısına yönelik çalışmaların sınırlılığı ise dikkate değerdir. Lee (2021), 13 matematik eğitimi dergisindeki (örn., Educational Studies in Mathematics (ESM) 1986–2018, Journal of Mathematical Behavior (JMB) 1994–2019) makaleleri incelemiş ve problem kurmanın yalnızca makalelerin küçük bir kısmını (62/17456 yaklaşık %0,4) oluşturduğunu belirlemiştir. Ayrıca problem kurma ve eğitim teknolojisi bağlantısına yönelik çalışmaların (2/62 yaklaşık %3,2) ise dergi makalelerinin toplam sayısına en az düzeyde katkı sunduğunu belirtmiştir.

Kilpatrick (1987) ise döneminin perspektifinden bilgisayarların matematik sınıflarında bulunması gerektiğini ifade etmiş ve onları çok çeşitli keşfe, varsayım oluşturma ve kanıtlamaya imkân tanıyan değerli bir araç olarak görmüştür. Teknolojik araçların kullanımı, öğrenenlerin matematiksel ilişki ve kavramları keşfetmesine, kavramsal ve işlemsel yapıları anlamasına katkı sağlamanın yanında problem çözme, akıl yürütme ve doğrulama gibi matematiksel yeterliklerin gelişimini de desteklemektedir (NCTM, 2015). Teknoloji destekli matematik öğretimi öğrenci

merkezli olup, öğrenme sürecini kolaylaştırma, öğrenme kalitesini artırma ve öğrencilerin matematiksel dili geliştirmelerini sağlamaktadır (Greefrath & Siller, 2018; Kusharvadi vd., 2023). Dinamik ve etkileşimli teknoloji ortamı, kullanıcısının farklı temsiller (grafik, denklem ve görsel) arasındaki ilişkileri görmesini sağlamakla birlikte matematiksel düşünmenin de kapılarını aralamaktadır (Pea, 1987).

Son yıllarda öğrencilerin anlamlı öğrenenler olmasını, esnek düşünmesini ve matematiksel veya geometrik kavramlarla etkileşim kurmasını desteklemek amaçlanmaktadır (Klein & Leikin, 2020; NCTM, 2000). Bu amaçla matematik öğrenimine ve özellikle de geometri çalışmalarına sorgulama-temelli etkinliklerle bir arada dinamik geometri yazılımlarının (DGY) kullanımı teşvik edilmektedir (NCTM, 2015; Ng vd., 2020; Segal vd., 2021). Problem kurma da sorgulama-temelli bir etkinliktir (Silver, 1994). Dolayısıyla bilgisayar tabanlı teknolojilerin keşif ve deney yapmayı kolaylaştırma esnekliği, problem kurma ile ilgili görülmektedir (Cai vd., 2015; Lavy, 2015)

Geometri öğretimi ve öğreniminde destekleyici bir sıçrama tahtası niteliğinde olan dinamik geometri ortamında (DGO) ise bir şekli inşa etmekten daha ziyade şekli değiştirmeye odaklanılmalıdır (Hölz, 1996). Çünkü bir şekle ait parametrelerin değiştirilmesi, niteliksel olarak farklı sonuçları doğurma ve geometrik yapıların ders kitaplarında göz ardı edilebilen çok çeşitli konfigürasyonlarını gözlemlemeye ve yeni problemlerin kurulmasına aracı olabilmektedir (Christou vd., 2005a). Abramovich ve Cho (2012) bir problemin, teknoloji desteği ile çözülebileceğine ve yeniden formüle edilebileceğine değinmiş ve bir problemin çözümüne kavuştuğunda görevini tamamlamış sayılamayacağını belirterek, probleme dair sorgulamayı genişletmenin önemini vurgulamıştır. Benzer şekilde, Jacinto ve Carreira (2017) da DGO'nun problem durumunu simüle etmeye ve özellikle sürüklemeye işlevi ile durum üzerinde deneyler yaparak, çeşitli varsayımların oluşturulması ve doğrulanmasına fırsatlar sunduğunu belirtmiştir. Bu yönüyle DGO'nun esnek yapısı mevcut problem durumunu farklı yaklaşımlarla ele almaya, durumu değiştirmeye ve etkileri gözlemlemeye olanak tanımakta (Fukuda & Kakihana, 2009; Santos-Trigo vd., 2016) ve sürüklemeye, ölçme ve yardımcı unsur ekleme (inşa etme/çizim yapma) işlevleri ile karmaşık geometrik yapıların oluşturulmasını ve varsayımların genişletilmesini mümkün kılmaktadır (Hölz, 1996). Bunun yanı sıra DGO, kullanıcısının bilgisini düzenlenmesine ve

hatalarını gözden geçirmesine rehber olacak nitelikte geri bildirimler de sunmaktadır (Healy & Hoyles, 2002). Bu geri bildirimler aracılığıyla problem kurma sürecinde, kurulacak problemlerin matematiksel yapısında düzenlemeler yapma ve geçerliğini sağlamak mümkündür.

DGO'nun problem kurma sürecindeki rolünü yansıtan sonuçlar söz konusudur. Örneğin, Christou vd. (2005a) DGO'nun modelleme, varsayım da bulunma, deney yapma ve genelleme stratejileri aracılığıyla problem kurmaya ve problem çözmeye katkıda bulunduğunu belirtmiştir. Ramírez vd. (2022) ise dinamik yazılım olarak GeoGebra'nın problem kurma sürecinde, geniş olanakları ve zamandan sağladığı tasarruf gerekçesiyle katalizör görevi üstlendiğini ifade etmiştir. GeoGebra ayrıca içerdiği olanakların gücü ile öğretmen adaylarının, matematiksel geçerliği olan ve iyi yapılandırılmış problemler ortaya koyabilmesine de katkı sağlamaktadır (Öçal vd., 2020). DGO'nun olanakları aracılığıyla mevcut problemin değişkenleri üzerinde müdahalelerde bulunmak olağandır (Christou vd., 2005a). Böylece mevcut problemin parametreleri üzerinde yapılan değişiklikler yeni problemlerin habercisi sayılmaktadır. Benzer olarak DGO'da doğrulanan her varsayım da yeni bir problemin doğuşuna işaret etmekte (Leikin & Elgrably, 2022) ve zengin problem koleksiyonu oluşturulmasına destek sağlamaktadır. Matematikçilerin yeni problemler oluşturmak için kullandıkları bu faaliyetler, öğretmen ve öğrenciler tarafından içeriği birbirine bağlamayı ve keşfetmeyi teşvik etmek için kullanılabilecektir (Weiss & Moore-Russo, 2012).

Öğrencilerin matematiksel anlayışlarını geliştirme amacıyla teknolojinin benimsenmesi, onun problem kurma sürecinde nasıl bir rol oynadığı hakkında daha ayrıntılı bilgiye sahip olmamız gerektiğini göstermektedir (Cai vd., 2015). Buna karşın, DGO'da problem kurmaya yönelik çalışmaların sınırlı bir kısmı öğrenenlerin düşünme süreçlerine odaklanmaktadır (Kovacs, 2017; Leikin, 2014). Çalışmaların büyük bir kısmı bir durumdan hareketle kurulan problemlerin türlerine ve ne tür dönüşümler ile üretildiğine (Leikin, 2004; Leikin, 2015; Leikin & Grossmann, 2013; Segal vd., 2024) ya da problemleri üretmek için kullanılan stratejilere (Leikin & Elgrabli, 2015; Leikin & Elgrably, 2022; Segal vd., 2018) odaklanmaktadır. Hem problem kurma süreci hem de DGO araştırma alanı, ele alınan sürecin ve süreç sonunda ortaya konulan ürünlerin —kurulan problemler, oluşturulan geometrik yapılar vb.— çeşitli yönlerden değerlendirilmelerine imkân tanınması noktasında benzer

niteliklere sahiptir. Mevcut literatürde ise DGO, problem kurma süreç veya ürünlerinin incelenmesinde bir bağlam olarak yer almıştır. Buna karşın katılımcıların DGO’da problem kurma süreçlerini doğrudan mercek altına alan ve özellikle DGO’nun sürüklenme, ölçme ve yardımcı unsur ekleme gibi işlevlerinin problem kurma süreçlerinde nasıl yer aldığına doğrudan odaklanan bir araştırma ile karşılaşılmamıştır. Dolayısıyla DGO’da problem kurma süreçlerinin incelenmesi ve bu süreçte DGO’nun işlevlerinin veya olanaklarının ne şekilde rol oynadığını belirlemek problem kurma süreçlerine odaklı yürütülen araştırmalara ayrı bir yön ve değer katma potansiyeline sahiptir. Bunun yanında önemli ve gelişmeye açık bir araştırma boşluğuna denk düşmektedir. Nitekim problem kurma alanında öncü çalışmaları ile yer tutan Silver (2023) teknoloji destekli problem kurma süreçlerinin incelenmesi yönünde önerilerde bulunmuştur. Dolayısıyla bu araştırma, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının DGO’da problem kurma süreçlerini mercek altına alarak ve bu süreçte DGO’nun işlevlerinden nasıl yararlandığını açığa çıkararak problem kurmanın matematik eğitime entegrasyonuna önemli katkılar sunma potansiyeli barındırmaktadır.

1.2. Araştırmanın Amacı

DGO’da veya geometri alanında problem kurmayı ele alan araştırmalar (Contreras, 2015; Hoehn, 1991; Kovacs, 2017; Lavy & Shriki, 2010; Leikin & Grossman, 2013) öğretmen adaylarının yaratıcılığını (Leikin & Elgrably, 2022; Singer vd., 2017), matematiksel alan bilgisini (Van Harpen & Presmeg, 2013) veya DGO’da problem çözme ve kurma süreçlerini (Christou vd., 2005a) incelemek gibi çeşitli amaçlarla yürütülmüştür. DGO’nun sürüklenme ve ölçme işlevleri üzerine yapılan çalışmalar ise katılımcıların bilişsel süreçlerini açığa çıkarmakta ve problem kurma süreçlerini aydınlatmak için iç görüşler sağlamaktadır (örn., Arzarello vd., 2002; Baccaglini-Frank, 2009, 2019; Lopez-Real & Leung, 2006; Olivero & Robutti, 2007; Sinclair & Robutti, 2013). Bu içgörüler, DGO’nun işlevlerinin problem kurma sürecini destekleyebileceği düşüncesine kaynaklık etmiştir. Buna karşılık her iki araştırma alanını da birleştiren çalışmalar oldukça sınırlı sayıdadır.

Bu araştırmanın odak noktasında da katılımcıların DGO’da problem kurma süreçlerini incelemek ve DGO’nun süreçteki katkısını açığa çıkarmak yer almaktadır. Yapılan literatür incelemesinde özellikle problem kurma süreçlerine odaklı yürütülen

ve süreci tasvir eden modellerde DGO'nun işlevleri ile nasıl bir katkı sunacağı veya DGO'nun işlevlerinden nasıl yararlanılacağı yönünde araştırma boşluğu tespit edilmiştir. Bu tez araştırmasında da DGO'da problem kurma sürecini tasvir etmek ve sürecin aşamalarında DGO'nun işlevleri ile nasıl yer aldığını belirlemek hedeflenmiştir. Bu hedefe yön veren araştırma problemleri ise şu şekildedir:

- 1) İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının DGO'da problem kurma süreçleri nasıldır?
- 2) İlköğretim matematik öğretmeni adayları problem kurma süreçlerinde DGO'nun işlevlerinden nasıl yararlanmaktadır?

1.3. Sınırlılıklar

- Araştırmanın bulguları, Doğu Karadeniz Bölgesi'ndeki bir üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören öğrenciler ile sınırlıdır.
- İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının DGO'da problem kurma süreçlerinin incelenmesi 2 problem kurma etkinliği ile sınırlıdır.

1.4. Varsayımlar

- İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının DGO'da problem kurma süreçlerinde samimi şekilde bilgilerini işe koşarak yanıtlar sunduğu varsayılmıştır.

1.5. Tanımlar

Problem kurma: Somut durumlara ve matematiksel deneyime bağlı olarak gelişen bireysel yorumların, matematiksel açıdan anlamlı problemlere dönüştürüldüğü ve dikkatin odağında doğrudan problemi kurmanın yer aldığı münferit bir çabanın, genellikle bir veya birden çok problemin kurulması ile neticelendirildiği süreçtir (Elgrably & Leikin, 2021; Stoyanova & Ellerton,1996).

Problem kurma etkinlikleri: Matematiksel veya geometrik bir içeriğin problem kurma durumu ve problemi kurucuya yüklenen görevin de problem kurma yönergesi olarak kabul edildiği matematiksel etkinliklerdir (Cai & Hwang, 2023).

1.6. Kuramsal Çerçeve ile İlgili Araştırmalar

Bu tez araştırmasının kuramsal çerçevesi; problem kurma ve problem kurma süreçlerine dair ileri sürülen modeller, DGO ve DGO’da yürütülen çeşitli araştırmalar dikkate alınarak, oluşturulmuştur. Bu bölümde öncelikle problem kurma ve problem kurma süreçlerine yönelik araştırmalar sonrasında da DGO ve önemi açıklanıp, işlevleri tanıtılmış ve ardından DGO’nun geometri öğretim ve öğrenim sürecinde kullanıldığı amaçlar ışığında problem kurma süreçlerinde potansiyel katkısına dair incelemeler sunulmuştur.

1.6.1. Problem Kurma ve Önemi

Problem kurmayı eğitimin temel vizyonu bakımından geniş bir perspektifle ele alan Schwartz (1992) problem kurmanın *matematik yapmak* ile eşdeğer olduğunu ve matematik yapmanın da bilinen teorem veya prosedürleri takip etmekten daha ziyade varsayım oluşturma ve keşfetmek ile ilişkili olduğunu altını çizmiştir. Benzer olarak Schoenfeld (2016), öğrenenlere varsayım oluşturmaya dayalı bir zihin alışkanlığı kazandırmanın; matematiğin, öğrenilmesi zor katı bir disiplin olarak görülmesi yerine keşfetmeye açık doğasını öne çıkaracağını belirtmiştir. NCTM (2000) belgesinde de öğrencilerin matematiksel varsayımlarda bulunması ve araştırmalar yapmasının teşvik edilmesi ve “matematiğin hem içinden hem de dışından çok çeşitli durumlara dayalı ilginç problemler formüle etme” (s. 258) imkânının tanınması yönünde önerilere yer verilmiştir. Dolayısıyla matematiksel problem kurma matematik eğitimi araştırmalarında çalışmaların amaç ve kapsamına bağlı olarak çeşitli şekillerde tanımlanabilmektedir (Elgrably & Leikin, 2021; Silver, 1994; Stoyanova & Ellerton, 1996).

Bu araştırmada öğretmen adaylarının DGO’da problem kurma süreçlerinin incelenmesi amaçlandığından, problem kurmanın süreç yönüne vurgu yapan ve geniş perspektiften ele alınmasına imkân tanıyan Stoyanova ve Ellerton’ın (1996) problem kurma tanımı benimsenmiştir. Stoyanova ve Ellerton (1996) problem kurmayı; somut durumlara ve matematiksel deneyime bağlı olarak gelişen bireysel yorumların, matematiksel açıdan anlamlı problemlere dönüştürüldüğü bir süreç olarak tanımlamıştır. DGO’nun geometrik şekilleri incelemeye fırsat tanıyan esnek doğası; öğretmen adaylarının, matematiksel deneyimlerine bağlı ve bazen sezgisel bilgi

aracılığıyla veya varsayım oluşturarak, elde ettikleri sonuçları problem kurmak için kullanabilecekleri yönünde beklenti oluşturmıştır. Bu beklentiye karşılık araştırmanın genel bağlamı ile DGO'daki yaratıcı süreçlere işaret eden, Stoyanova ve Ellerton'ın (1996) problem kurma tanımı birbiriyle uyumlu bulunmuştur.

Bilimsel ve matematiksel araştırmanın temeli sayılan problem kurma; sorgulayan, yeni fikirler ortaya atan ve yaratıcı eylemlerde bulunan bireylerin yetişmesine zemin hazırlayan bir öğrenim ve öğretim faaliyeti olarak kabul edilebilir (Cai & Hwang, 2021; Kar, 2025b; Sosa-Martín vd., 2024). Çünkü problem kurma matematiksel anlamayı (Manuel & Frieman, 2017), yaratıcı düşünmeyi (Bicer vd., 2020; Leikin, 2018; Van Harpen & Sriraman, 2013) ve problem çözmeyi (Xie & Masingila, 2017) desteklemektedir. Bu yönleriyle matematiksel problem kurma öğretmen veya öğrencilerin stratejik düşünmesini —probleme farklı perspektiflerden yaklaşmayı— geliştirerek, problem çözme becerisine katkı sağlama potansiyeli taşımaktadır (Klein & Leikin, 2020; English, 1997). Özellikle problem kurma ve problem çözme birbirini destekleyen ve el ele yürüyen iki kardeşi anımsatmaktadır (Contreras, 2007; Liljedahl & Cai, 2021). Dolayısıyla problem kurma matematik eğitimi alanında merkezi bir rol üstlenebilmelidir.

Matematiksel problem kurma, dikkatin odağında doğrudan problem kurmanın yer aldığı münferit bir çabayı temsil etmekte ve genellikle bir veya birden çok problem kurulmasının istendiği etkinlikleri tanımlamaktadır (Elgrably & Leikin, 2021; Lavy & Bershadsky, 2003). Problem kurma etkinliklerinin kabul edilen yaygın bir tanımında, etkinliklerin matematiksel veya geometrik bir içeriği kapsayan problem kurma durumu ve problem kurucuya yüklenen misyonu ifade eden problem kurma yönergesinden oluştuğu vurgulanmaktadır (Cai & Hwang, 2023). Benzer olarak Leikin ve Elgrably'nin (2022) birçok çalışmasında kullandığı *araştırmalar yoluyla problem kurma* etkinlikleri “katılımcılara geometrik bir şeklin verildiği ve şekille ilişkili geometri problemleri kurmayı ve onları çözmeyi gerektiren matematiksel bir etkinlik” (s. 36) olarak tanımlanmıştır. Araştırmalar yoluyla problem kurma etkinlikleri DGO'da ve yardımcı yapı ekleyerek, ölçerek, varsayımlarda bulunarak ve varsayımları kanıtlayarak veya çürüterek gerçekleştirilmektedir. Ayrıca süreçte çoklu stratejilerin belirmesine olanak sunduğu için hem ürün —problem kurma sürecinin nihayetinde ortaya çıkan problem(ler)— hem de süreç değerlendirmek için uygun bulunan

etkinliklerdir (Leikin & Elgrably, 2022). DGO; düşüncede esneklik sağlaması, matematiksel bilginin alışılmadık durumlara dâhil edilmesine aracı olması, farklı temsiller arası bağlantı ağını zenginleştirmesi ve bilgi ve kavramların geliştirilmesini desteklemesi bakımından kavramsal ağı genişleten bir sistemdir (Healy & Hoyles, 2002; Kuzle, 2013; Zengin, 2019). Dolayısıyla DGO’da problem kurma etkinlikleri keşfetmeyi gerektiren, çoklu başlangıç ve sonuç içeriği ile düşünme esnekliği isteyen ve üst-bilişsel çalışmayı teşvik eden bir içeriğe sahiptir. Bu kapsamda bu araştırmada öğretmen adaylarından DGO’da geometrik bir şekilden oluşan problem kurma durumunun özellik ve ilişkilerini araştırarak, kurabildikleri kadar birbirinden farklı ve ilginç problemler kurması istenmiştir.

1.6.2. Problem Kurma Sürecini Tasvir Eden Modeller

Problem kurma matematik eğitimi alanında anahtar bir rol üstlenerek, zaman içinde ilgi gören bir başlık haline gelmiştir (Silver, 2023; Weiss & Moore-Russo, 2012). Çünkü öğrencilerin problem kurma ile meşgul olması onlara matematik öğrenim süreçlerinde önemli faydalar sağlayabilecektir (Kar vd., 2025b). Buna karşılık problem kurma bilişsel ve duyuşsal faktörlerin etkileşimi ile şekillenen karmaşık bir süreç iken kurulan problemler bu karmaşık sürecin ürünleridir (Cai & Leikin, 2020; Koichu & Kontorovich, 2013; Leavy & Hourigan, 2024). Bu yönüyle tüm önemine karşın müfredat materyallerine ve öğretime yeterince nüfuz edememiş olan problem kurma, öğretimin uygulayıcısı olarak öğretmenlerin elinde yeşerecek bir alan olarak görülmektedir (Cai & Hwang, 2021; Lee vd., 2018). Ancak öğrenci ve öğretmenlerin problem kurma yeterliğine sahip olduğu bilinmesine rağmen problem kurma süreçlerine dair içgörüler nispeten sınırlıdır (Cai & Leikin, 2020; Cai vd., 2022; Cai & Rott, 2024). Dolayısıyla matematiksel problem kurmanın temel süreçleri hakkında matematik eğitimi alanında uygulanabilir bir anlayış geliştirilmesi için daha fazla araştırma yapılmasına ihtiyaç bulunmaktadır (Cai vd., 2022). Bu kapsamda problem kurma süreci de araştırmacıların son yıllarda mercek altına aldığı önemli ve dikkate değer bir araştırma alanıdır (Baumanns & Rott, 2022b; Cai & Rott, 2024).

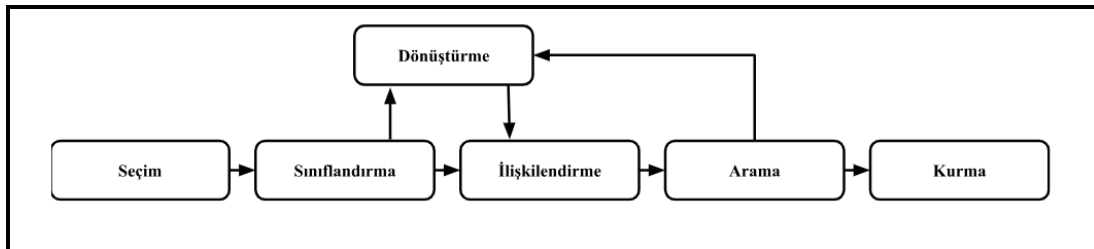
Bir araştırma alanı olarak problem kurma süreci ya süreç sonunda ortaya çıkan ürünlerin (Ergene, 2021; Zhang vd., 2022) ya da tüm sürecin incelenmesi (Erkan & Kar, 2022; Baumanns & Rott, 2022b) aracılığıyla çalışılmıştır. Bu çalışmalardan

bazıları problem kurma sürecini yansıtan aşamaları tanımlamış (Koichu & Kontorovich, 2013; Pelczer & Gamboa, 2009; Zhang vd., 2022) diğerleri ise problem kurma sürecini aşamalar halinde bütünüyle betimlemiştir (Baumanns & Rott, 2022b; Ramírez, 2006). Örneğin Ramírez (2006) problem kurma sürecini pedagojik perspektiften ele almış ve normatif olarak öne sürdüğü modeli öğretmen eğitimi programlarının kullanımına sunmuştur. Buna karşılık Baumanns ve Rott (2022b) ise 64 ilk ve ortaöğretim matematik öğretmeni adayının problem kurma süreçlerini mercek altına almış ve çiftler halinde çalışan katılımcıların problem kurma süreçlerini, periyodik olmayan davranış değişimlerine göre deneysel olarak gözlemleyerek, beş aşamada betimlemiştir. Dolayısıyla problem kurma süreçlerine odaklı yürütülen çalışmalar normatif (Cai & Rott, 2024; Ramírez, 2006) veya deneysel (Baumanns & Rott, 2022b; Koichu & Kontorovich, 2013; Pelczer & Gamboa, 2009) olarak yürütülmekte ve çalışmaların sonuçları ile problem kurma süreçlerinin hem öğretmen eğitimi hem de öğrencilerin öğrenme süreçlerinde nasıl şekillendiği ortaya konulmaktadır.

Problem kurma süreçlerini bildiren modeller dikkate alındığında problem kurma sürecinin araştırmanın bağlam ve kapsamına göre şekillenebildiği anlaşılabilmektedir. Bununla birlikte modeller problem kurma süreçlerine dair önemli ayrıntılar sunma noktasında benzerlik taşımasına karşın çok sayıda karakteristik farklılıklar da taşımaktadır (Baumanns & Rott, 2022b). Bu çalışmaların yanında problem kurmanın stratejilerine ve süreci etkileyen faktörlere odaklanan araştırmalar da yürütülmüştür (Baumanns & Rott, 2022a; Cai & Cifarelli, 2005; Erkan & Kar, 2022; Koichu, 2020; Kontorovich vd., 2012; Ramírez vd., 2022). Mevcut bir probleme bağlı olarak yeni problemlerin kurulması problem kurma stratejileri olarak kabul edilebilecektir (Kar vd., 2025a). Örneğin Erkan ve Kar (2022), matematik öğretmeni adaylarının problem kurmanın başka bir versiyonu olarak, verilen bir problemi biçimlendirme süreçlerine ve süreçteki düşünme biçimlerine odaklanmıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre öğretmen adaylarının problem kurma sürecinde; bilişsel, üst-bilişsel ve öğretimsel faktörler etkili olabilmektedir. Öğretmen adayları süreçte kurdukları problemlerin güçlü ve zayıf yönlerini değerlendirebilmiş ancak karmaşık problemler kuramamıştır. Araştırmacılar, öğretmen adaylarının düşük problem kurma performansına sahip olmasını, problem kurma deneyimi ve

matematiksel içerik bilgisi eksikliğine bağlamıştır. Bunun yanında problem kurma performansının yazma becerisi gibi diğer birçok faktörden etkilendiğini belirtmişlerdir. Bu sonuçlar ışığında Erkan ve Kar (2022) da öğretmen adaylarının çok çeşitli problem kurma deneyimi kazanarak, daha nitelikli problemler kurabilmeleri için onlara fırsat sağlanması gerektiğini önermiştir. Bu yönüyle öğretmen adaylarının problem kurma süreçlerinin detaylı tahlili problem kurma alanındaki boşlukları doldurabilecek ve daha nitelikli problemlerin kurulmasına destek sunabilecektir (Erkan & Kar, 2022).

Cai ve Cifarelli (2005) ise iki üniversite öğrencisinin açık-uçlu problem durumuna yönelik matematiksel keşiflerini incelemiş ve problem çözme sürecinde beliren yeni problemleri nasıl kurup, çözdüğüne odaklanmıştır. Araştırmacılar problem çözme sırasında ortaya çıkan problem kurma keşif stratejilerini hipotez-odaklı ve veri-odaklı şeklinde keşif stratejilerinin bir ön modeli ve geliştirilmeye açık bir tasnifi olarak sunmuştur. Problem kurma sürecinde işe koşulan stratejilere odaklanan ve problem kurma sürecine pedagojik perspektiften yaklaşan Ramírez ve meslektaşları (2022) ise problem kurma sürecinin belirli aşamalar içerdiğini ve bu aşamalara birtakım sezgisel stratejilerin eşlik ettiğini belirtmiştir. Araştırmacılar; problem kurma sürecinde işe koşulabilecek sezgisel stratejileri, problem kurma sürecini aydınlatan bilişsel çerçeve olarak modellemiştir (Şekil 1).



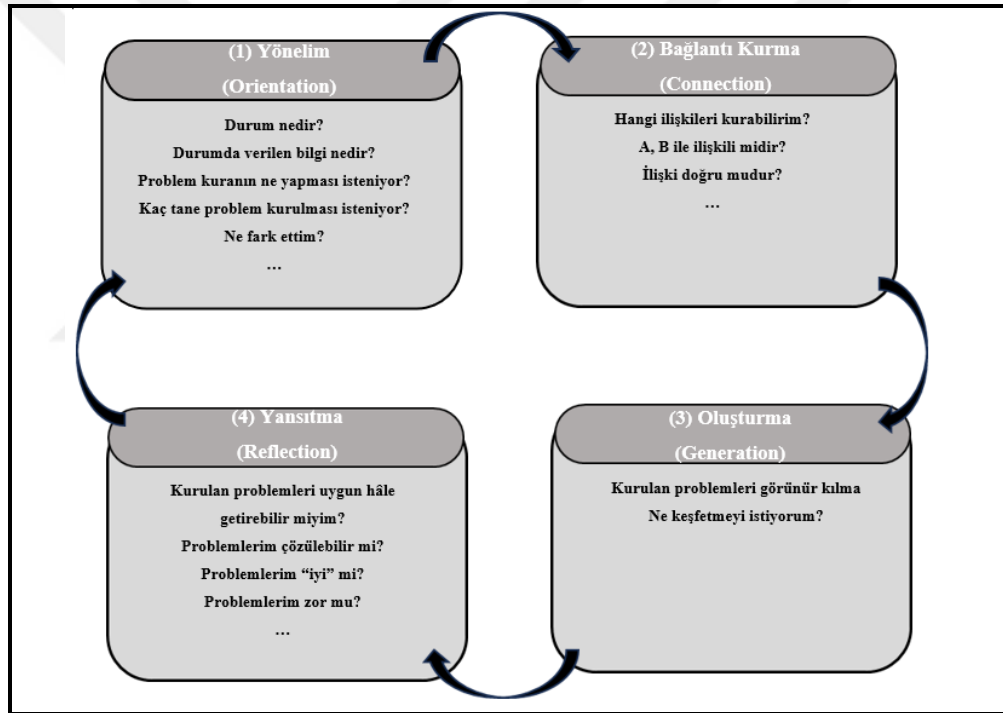
Şekil 1. Pedagojik perspektiften problem kurma sezgisel stratejilerinin bilişsel çerçevesi (Ramírez vd., 2022, s. 57)

Seçim aşaması, problem kurmaya kaynaklık edebilecek bir durumun veya olgunun seçilmesi işlemidir. Sınıflandırma aşamasında; seçilen durum veya olgudaki niteliklerin listelenmesi, karşılaştırılması ve düzenlenmesi söz konusudur. Özellikle pedagojik açıdan bakıldığında öğrencilerin matematiksel düşünmelerine katkı sağlama yönüyle, sınıflandırma basamağı zorluk ve önem arz etmektedir. Çünkü, problem

durumunda sınırsız değişken mevcut olabilmekte ve bu değişkenler arasında karşılaştırma yapma ve değişkenleri düzenleme bilişsel açıdan zorlayıcı kabul edilebilecektir. Bu haliyle sınıflandırma aşaması akıcı bir muhakeme istemektedir. İlişkilendirme aşaması, matematiksel kavramların arasında köprü kurulmasını tanımlamaktadır. Bu durum, matematiksel beceri ve deneyim ile açıklanmıştır. Arama aşamasında ise; problem durumundaki ilişki ve özellikler aranmakta ve varsayımlar ortaya atılmaktadır. Bu yönüyle arama aşaması bilişsel karmaşıklığı daha yüksek bir adım olup, yaratıcı matematiksel düşünme ile ilişkili bulunmuştur. Araştırmacılar, arama aşamasında keşif yapma ve varsayımda bulunma için dinamik yazılımlardan yararlanmayı önermiştir. Kurma, problemi ifade etme aşamasıdır. Bu aşamada problem üzerinde iyileştirme yapma, problemin karmaşıklığını düzenleme gibi müdahalelerde bulunmak mümkündür. Dönüştürme aşamasına “Eğer daha fazlası ise nedir? (What if more?)” anlayışı eşlik etmektedir. Bu aşamada problem kurucu, problemi daha ilginç, daha karmaşık vs. yapma eğilimi gösterebilmektedir. Bu nedenle dönüştürme aşaması sınıflandırma, ilişkilendirme ve arama aşamaları ile etkileşim içinde tasvir edilmiştir. Ramírez vd. (2022) tarafından öne sürülen bu model, problem kurma sürecindeki bilişsel stratejilere ışık tutması adına değerli bulunmuştur. Özellikle problem kurma sürecinde muhakemeyi organize edebilmek için teorik bir çerçeve sunması, problem kurma sürecinin ileri analizleri için kıymetli görülmüştür. Ancak pedagojik anlamda problem kurma odaklı bir model olduğu için problem kurma sürecinin genel tasviri olarak ele alınamamaktadır. Nitekim Baumanns ve Rott (2022b) modelin öğrenme hedefleri bağlamında ele alınmayan problem kurma süreçleri için genel bir çerçeve sunmayacağını belirtmiştir. Dolayısıyla problem kurma süreçlerinin en genel tasvirini oluşturmak, gerekli bir araştırmanın varlığına işaret etmektedir.

Wells’e (1990) göre matematiksel güzelliğin kriteri, sadelik ve kısalık ile ilişkilidir. Özellikle Polya’nın (1957) geniş çapta ve yaygın kabul gören rehber niteliğindeki dört adımlı problem çözme modelinin yalınlığı ve anlaşılabilirliği tam da Wells’in (1990) güzellik anlayışı ile örtüşmektedir. Bu nitelikteki problem kurma süreç modelinin geliştirilerek, problem kurmanın yaygın şekilde matematik eğitime entegre edilmesi de ancak problem kurmanın bilişsel süreçlerinin ayrıntılı tahlili ile mümkün görülmektedir (Cai vd., 2015). Dolayısıyla problem kurmanın üretken doğasına ve münferit yapısına has, süreç modelinin gerekliliği önem arz etmektedir

(Baumanns & Rott, 2022b; Cai & Rott, 2024; Kontorovich vd., 2012; Pelczer & Gamboa, 2009; Zhang vd., 2022). Bu kapsamda Cai ve Rott (2024) problem kurma sürecinden bildiren çalışmaları sentezleyerek, yaygın kabul gören problem kurma süreç modelinin gerekliliği bakımından dört aşamalı genel problem kurma süreç modeli geliştirmiştir (Şekil 2). Genel problem kurma süreç modelinin aşamaları Polya'nın (1957) problem çözme modelinin aşamalarına paralel olarak geliştirilmiştir (Cai & Rott, 2024). Bu yönleriyle DGO'da problem kurma süreçlerini incelemeyi hedefleyen bu tez çalışmasında, Cai ve Rott'un (2024) problem kurma süreçlerine odaklanan araştırmacılara rehber olarak sunduğu, genel problem kurma süreç modeli referans alınmıştır.



Şekil 2. Genel problem kurma süreç modeli (Cai & Rott, 2024, s.68)

Cai ve Rott'un (2024) genel problem kurma süreç modelinin ilk aşaması yönelimdir. Bu aşamayı karakterize eden sorular (Şekil 2) problem kurma etkinliğinin bütünüyle anlaşılmasına yönelik olup, etkinliğin problem kurma durumu ve yönergesine odaklanma ile açıklanabilecektir. Bu anlamda yönelim aşaması henüz problem fikrinin belirmediği ve esas odağın problem kurma etkinliğinin anlaşılması olduğu aşamadır. Yönelim aşamasını karakterize eden sorular problem kurma

süreçlerinden bildiren çeşitli modellerin aşamalarını da yansıtmaktadır. Örneğin, yönelim aşaması Baumanns ve Rott'un (2022b) modelinde durum analizi aşaması ile paralellik taşımaktadır (Cai & Rott, 2024). Durum analizi aşamasında, problem durumunun özellikleri analiz edilmekte ve kurulacak yeni problemler için mevcut problemdeki olası değişikliklere yoğunlaşmaktadır. Durum analizi aşaması, problem kurma sürecini bütünüyle tasvir etmekten daha ziyade sürecin aşamalarını tanımlayan Pelczer ve Gamboa'nın (2009) modelinde dönüşüm aşamasının alt süreçleri ile de benzerlik taşımaktadır (Baumanns & Rott, 2022b). Dolayısıyla Pelczer ve Gamboa'nın (2009) modelinde dönüşüm aşamasının alt süreçleri yönelim aşaması ile de örtüşmektedir. Problem kurma süreçlerinden bildiren çerçeveler dikkate alındığında problem kurma sürecinin yaygın şekilde etkinliğin yapısını analiz etme ve bağlamını anlama ile başladığı fark edilmektedir. Bununla birlikte prototip problemlerin ortaya konulması, problem fikrini besleyen tahminlerin veya varsayımların belirmesi de söz konusu olmaktadır. Erkan ve Kar (2022) da çalışmasında problem kurmada yapıyı anlama, bağlam bulma ve başlangıç durumunu analiz etmenin önemi üzerinde durmuştur.

Cai ve Rott'un (2024) genel problem kurma süreç modelinin ikinci aşaması bağlantı kurmadır (Şekil 2). Bu aşamanın odağında problem kurma etkinliğinin barındırdığı olası ilişkilerin keşfedilmesi ve varsayımların oluşturulması yer almaktadır. Böylece problem kurma durumu ile ilişkili yeni problemlerin üretilmesi için fikirler oluşturulmaktadır. Bu aşama literatürdeki çeşitli çerçevelerde de karşılık bulmaktadır. Örneğin, Baumanns ve Rott (2022b) problemden hareketle problem kurma aktivitelerinde öğretmen adaylarının problemdeki parametreleri değiştirme veya probleme yeni veriler ekleme yoluna giderek, problemler üretmeye çalıştıklarını belirtmiştir. Araştırmacılar öğretmen adaylarının problem kurma süreçlerinde sergilediği bu eylemleri, modelde çeşitlendirme (varyasyon) ve üretme aşamaları olarak nitelemiştir. Çeşitlendirme aşamasında belirli bir problemin değiştirilmesi söz konusu olup, yeni problem halihazırda üretilmiş veya çözümü yapılmış bir problemin referans alınması ile ortaya konulabilmektedir. Ortaya konulan problem, etkinlik koşulları üzerinde yapılan koşul çıkarma ve değiştirme müdahalelerini kapsamaktadır. Diğer taraftan üretme aşaması ise etkinlik şartlarına yeni koşul veya veri eklemeyi içeren müdahaleleri tanımlamaktadır. Benzer olarak bağlantı kurma aşaması, Koichu

ve Kontorovich'in (2013) modelinde ısınma ve ilginç matematiksel fenomen arama aşamalarının birleşim kümesi olarak da ifade edilebilecektir. Çünkü modelin ilginç matematiksel fenomen arama aşamasında etkinlik kapsamında kurulan prototip problemler için belirlenen hedef (örn., daha ilginç/zor problem) doğrultusunda matematiksel fenomen aranmaktadır. Bu aşamaya problem kurucunun keşif ve merak duygusu yön verebilmektedir. Bu anlamda da ilginç matematiksel fenomen arama aşaması bağlantı kurma aşaması ile örtüşmektedir. Özetle bağlantı kurma aşaması en genel anlamda zengin bir problem koleksiyonu oluşturmak için mevcut problem kurma durumunun ya da orijinal problemin niteliklerinin değiştirilmesi ile karakterize edilebilecektir. Örneğin Brown ve Walter (2005) yazdığı kitapta şu ifadelerle yer vermiştir:

“Her zaman önümüzde olanı "görür" müyüz? En belirgin şeyler sıklıkla bizden en gizli olanlardır. Bazen tam önümüzde olanı takdir etmemiz için biraz kaba bir uyanış gerekir ve genellikle bir tür yeniden düzenleme veya bakış açısı değişikliği, bariz olanı görmemize yol açar.” (s. 33)

Bu ifadelerde yer alan bakış açısı değişikliği orijinal problemde verilen kabul etmenin ötesine nasıl geçilebileceğine işaret etmekte ve yeni problemler kurabilmek için var olana başka bir perspektiften bakılmasını önermektedir. Buna göre Brown ve Walter (2005) tarafından öne sürülen “What if Not? (Eğer değilse nedir?)” stratejisi orijinal problemde verilen niteliklerin değiştirilmesine dayanmakta ve yeni içgörüler aracılığıyla problem kurma alanını genişletmektedir (Lavy, 2015; Leikin & Grossmann, 2013). Böylece bağlantı kurma sıklıkla problem kurma stratejilerinin belirlediği aşama olup, matematiksel problemlerin bilindik “tek veya doğru yolu” bulunduğu anlayışından uzaklaşılmasını ve öğrenenlerin proaktif olmasını destekleyebilecektir (Lavy & Shriki, 2010; Shriki & Lavy, 2012).

Cai ve Rott'un (2024) genel problem kurma süreç modelinin üçüncü aşaması oluşturmadır (Şekil 2). Bu aşama daha önceki aşamalarda üretilen fikirlerin, varsayımların veya keşfedilen ilişkilerin somutlaştırılmasına yani problemlerin kurulmasına denk düşmektedir. Bu aşamaya değerlendirme (yansıtma) örtük şekilde eşlik etmektedir. Çünkü kurulan problemlerin; çözülebilirliği, zorluk seviyesi veya problem kurucu tarafından belirlenen birtakım kriterler (örn., pedagojik) bağlamında kısmi değerlendirmeye tabi tutulması ve çözümlerinin yapılması söz konusu olabilmektedir. Bu yönüyle oluşturma aşaması da genel problem kurma süreç

modelinin diğer aşamalarında olduğu gibi literatürdeki problem kurma sürecinden bildiren çeşitli çerçevelerde karşılık bulmaktadır. Örneğin, Pelczer ve Gamboa'nın (2009) modelinde de ifade etme/biçim kazandırma (formulation) aşamasında olası problemler kurulmaktadır. Değerlendirme aşamasında ise kurulan problemler başlangıçta belirlenen etkinlik koşullarına göre kritik edilmekte ve üzerinde değişiklik yapılması gereken yönlerine karar verilmektedir. Benzer faaliyetler, Koichu ve Kontorovich'in (2013) modelinde gözden geçirme aşamasında da yürütülmektedir. Buna göre kurulan problem, problemin muhtemel çözücüsüne ve problem kurucuya uygunluğu gibi belirlenen kriterler bağlamında değerlendirilmektedir (Kontorovich vd., 2012). Koichu ve Kontorovich'in (2013) modelinde problem kurma sürecinin problem biçimlendirme içerisinde gizleme aşamasında kurulan problemler matematiksel olarak ifade edilmekte ve problemi çözecek kişi için problem üzerinde müdahalelerde bulunmaktadır. Örneğin ikinci aşamada keşfedilen ilginç matematiksel fenomen, kurulan problemde gizlenebilecektir. Böylece kurulan problemin karmaşıklığı biçimlendirilebilmektedir (Koichu & Kontorovich, 2013). Baumanns ve Rott'un (2022b) modelinde de değerlendirme aşamasında problemin; çözülebilirliği, iyi yapılandırılmış olup olmaması, hedef gruba uygunluğu gibi değişkenlere göre kontrol edilmesi ve böylece kabul veya reddedilmesi söz konusudur. Zhang ve arkadaşlarının (2022) genel problem kurma süreç modelinde oluşturma aşamasına denk düşen problemi ifade etmek aşamasında ise kurulan problem(ler) dil yönünden değerlendirilmektedir. Dolayısıyla oluşturma aşamasında problem cümlesinin, problemin kurucusuna veya muhtemel çözücüsüne uygunluğu gibi niyetler ile çeşitli yönlerden kritik edilmesi söz konusu olup, bu ve benzeri niyetlerin problem kurma sürecinde katılımcıların genel eğilimi olarak açığa çıktığı fark edilmektedir.

Cai ve Rott'un (2024) genel problem kurma süreç modelindeki son aşama yansıtma aşamasıdır. Bu aşamada problem kurma sürecinin tümüyle gözden geçirilmesi ve kurulan problem(ler)in nihai değerlendirmesinin yapılması söz konusudur. Bu aşama Cai ve Rott (2024) tarafından meta-düzey olarak ifade edilmiş ve yansıtma aşaması problem kurma sürecinden bildiren diğer modeller ile de benzerlik taşımaktadır. Örneğin, Pelczer ve Gamboa'nın (2009) geliştirdiği beş aşamalı tanımlayıcı model incelendiğinde "değerlendirme" nin her aşamada var olduğu belirlenmiştir. Bu

anlamda model, problem kurma süreçlerinin bilişsel ve üst-bilişsel yönünü vurgulamaktadır. Dolayısıyla modelin son değerlendirme aşaması, Cai ve Rott'un (2024) problem kurma sürecindeki üst-bilişi ifade eden yansıtma aşaması ile benzerlik taşıyabilme olasılığına sahiptir. Dolayısıyla tıpkı Pelczer ve Gamboa'nın (2009) değerlendirmesi gibi yansıtma kapsamındaki faaliyetler de problem kurma sürecinin geneline yayılabilecektir. Böylece yansıtma aşaması yalnızca tüm sürecin veya problemi kurduktan sonra sadece kurulan problemi değerlendirmek yerine problem kurma sürecinin bütününe eşlik edebilecektir.

Problem kurma sürecinin en genel fotoğrafını sunmayı amaçlayan Cai ve Rott (2024) dört aşamadan oluşan genel problem kurma süreç modelini, Polya'nın (1957) yerleşik problem çerçevesi temelinde ve onun paralelinde oluşturmuştur. Normatif olarak sunulan modelin unsurlarının problem kurma süreçlerinden bildiren diğer modeller ile örtüşen birtakım yönlerine yukarıdaki paragraflarda yer verilmiştir. Buna göre problem kurma sürecinden bildiren modellerin hiçbirinde DGO'nun yer almadığı ve özellikle DGO ile bütünleşen bir problem kurma sürecinin ne şekilde betimleneceği hakkında bilginin bulunmadığı fark edilmektedir. Bu anlamda hızla gelişen teknolojik dalga ışığında DGO'nun problem kurma sürecindeki rolü dikkate değerdir. Buna göre entelektüel açıdan yeni zihinsel alışkanlıkların edinilmesine fırsat tanıyan teknolojinin bir unsuru olarak DGO'nun, problem kurma sürecinde nasıl yer aldığı araştırılmayı bekleyen bir başlık olarak değerlendirilmiştir. Özellikle DGO'nun bileşenlerinin problem kurma sürecinde nasıl açığa çıktığı ve katkı sunduğu ise merak konusudur.

1.6.3. Dinamik Geometri Ortamı, Önemi ve Bileşenleri

Yaklaşık 2000 yıl önce (M.Ö. 300) Euclides'in (Öklid) yetkin bir düşüncenin ürünü olarak, Yunan matematiği başta olmak üzere önceki dönem birikimleri mantıksal düzenleme (aksiyomatik sistem) içinde sunduğu ve genel kanının aksine yalnızca geometri değil sayı teorisi ve cebirsel geometriyi de içine alan "Elementler" adlı baş yapıtındaki temel ilkeler (aksiyom ve postulatlar), cetvel ve pergeli ile inşa edilmektedir (Sertöz, 2023). Öklid geometrisinin öğretilmesi ve öğrenilmesi için tasarlanan ve Elementler'deki cetvel ve pergeli kullanımını simüle ederek, bilgisayar ekranında geometrik yapıları (şekil veya cisim) oluşturmaya ve manipüle etmeye yarayan araçlarla donatılmış olan Dinamik Geometri Ortamı (DGO) ile 1980'li yılların

ortasından itibaren tanışılmıştır (Hölz, 1996). “Dinamik geometri” terimi ise ilk olarak Geometer's Sketchpad yazılımını tanımlamak için kullanılmıştır (Sinclair & Robutti, 2013, s. 571).

Geometrik nesnelerin ve özelliklerin direkt manipülasyonuna izin veren bilgisayar tabanlı dinamik geometri öğrenme ortamları; Cabri-géomètre, Sketchpad, Inventor, Thales, Cinderella, Dr Geo vb. dinamik geometri yazılımı olarak bilinen yazılımlar içermektedir (Jones, 2001). Dinamik yazılım paketlerinin kullanılmaya başlamasıyla birlikte Öklid geometrisi yeniden ilgi görmeye başlamıştır (De Villiers, 2006). Çünkü dinamik yazılımlar, dinamik matematik yazılımı ve dinamik geometri yazılımı (DGY) gibi çeşitli formlarda isimlendirilmesine ve farklı görünüm, menü, seçenek ve simgeleri bulunmasına karşın tümünün ortak özelliği Öklid geometrisini simüle etmektir (Hölz, 1996). Buna karşılık Geometer's Sketchpad ve Cabri sürüklemeye işlevinin kullanıldığı ilk dinamik yazılımın paketleridir (Sinclair & Robutti, 2013). Hiçbir işlem yapılmadığında ekranda statik görünümde kalan ancak dinamik yazılım ile etkileşim neticesinde sürüklenabilen ve böylece farklı görünümlere sahip olabilen diyagramlar, dinamik bir yapıya sahiptir. González ve Herbst (2009), dinamik yapı'yı DGY'de oluşturulmuş ve “bir veya daha fazla parçasını sürükleyerek bir şekilde değiştirilme potansiyeli olan bir diyagram” (s. 154) şeklinde tanımlamıştır.

DGY'ler geometrik fikirlerin kavramsallaştırılmasını kısıtlayan birtakım özellikler içermesine (De Villiers, 2006; González, & Herbst, 2009; Olivero & Robutti, 2007; Sinclair & Robutti, 2013) rağmen geometri öğretiminde uygun öğrenme ortamı bulunmamasından kaynaklı zorlukların aşılması için umut verici kolaylıklar sağlamaktadır (Christou vd., 2005a; Dockendorff & Solar, 2017; Lavy, 2015; Sarıyasa, 2017). Çünkü DGY'ler özellikle Öklid geometrisinin öğrenilmesi ve keşfedilmesini kolaylaştırmak için tasarlanmış ve kâğıt-kalem ortamı ile nitelenen statik çalışma ortamına, zaman ve eylem yönünden ekonomik bir alternatif olmuştur (Laborde, 1993; Lopez-Real & Leung, 2006). Örneğin Demir ve Zengin (2023) DGY ile desteklenen öğrenme ortamının, geometrik muhakeme üzerinde olumlu etki yarattığını tespit etmiştir. Benzer şekilde DGO'da yürütülen etkinlikler; aktif öğrenme ortamı sunmanın (Ubuz vd., 2009) yanında geometrik kavramları ilgi çekici kılmakta, şeklin prototipinin ötesinde düşünmeye teşvik etmekte ve geometrik şekillerin analizi için gerekli olan, özelliğe dayalı kavrayış zenginliği sağlamaktadır (Segal vd., 2021;

Ubuz vd., 2009). Böylece DGY’de uzamsal muhakemeye (Mulligan, 2015) işaret eden ve keskin algı gerektiren deneyimler (Ng vd., 2020), hesaplamaya zaman ayırmaktan daha ziyade matematiksel kavramlar arası ilişkilere odaklanmayı ve güçlü muhakemeyi teşvik etmektedir (Abramovich & Cho, 2012; Mogetta vd., 1999b; Shriki & Lavy, 2012). Bu yönleriyle DGO’nun katkıları öğretimin kalitesini iyileştirmek için yeni yöntemler arayan matematik eğitimi araştırmalarının teknoloji entegrasyonuna odaklanması ile sonuçlanmıştır (Oxman vd., 2017).

Amerika Birleşik Devletleri’nde (ABD) ve Avrupa’da yaygın kullanılan dinamik yazılımlar Cabri II Plus ve Geometer's Sketchpad iken; 4. 4. ve 5. 0 dahil olmak üzere pek çok sürümü bulunan GeoGebra, son on yıldır gözde bir yazılım olarak ve diğer yazılımlara nazaran ayırıcı özellikleri ile dikkat çekmektedir (Dockendorff & Solar, 2017; Sarıyasa, 2017; Septian vd., 2020). GeoGebra 2B ve 3B dinamik geometri yazılımının, bilgisayar cebir sistemleri (Computer Algebra Systems [CAS]) ve elektronik tablo (e-tablo) özelliklerinin kombinasyonunu ve cebirsel ve geometrik yapıları eş zamanlı gözlemlene fırsatı sunmasının (Septian vd., 2020) yanında ücretsiz, açık kaynaklı olması ve çoklu dil çevirilerine imkân tanınması diğer özellikleri arasında yer almaktadır. Bunun yanında CAS ve e-tabloda yer almayan; sürüklemeye, nesnelerin izi veya konumu ile özelleştirilebilir araç gibi ayırıcı üç özelliği bulunan GeoGebra (Sarıyasa, 2017) sezgisel olarak çalıştırılabilen ve başlamak için gelişmiş beceriler gerektirmeyen arayüzü ile matematiksel görselleştirmeyi sağlayan hem öğrenme hem de öğretme için tasarlanmış ve öğrenme süreçlerini kolaylaştıran bilişsel bir araçtır (Dockendorff & Solar, 2017; Hohenwarter vd., 2009; Kuzle, 2017; Ziatdinov & Valles, 2022). Dolayısıyla GeoGebra, matematik öğrenme ve öğretmek için teknolojik entegrasyon şeklidir (Juandi vd., 2021).

Bu tez çalışmasında katılımcıların DGO’da problem kurma süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda GeoGebra’nın yukarıda açıklanan önemi ve ayırıcı özelliklerinin yanında elde edilen verilerin niteliğini mümkün olduğu kadar yüksek tutmak amaçlanmış ve araştırma sürecinde katılımcıların deneyimlemiş olduğu yazılımın kullanılması dikkate alınmıştır. Örneğin Jones (2000), on iki ortaokul öğrencisinin DGO’da geometrik şekil ve ilişkileri hakkında nasıl akıl yürüttüğü ve öğrencilerin gerek geometri gerekse DGO deneyimlerinin artmasının matematiksel açıklamalarına nasıl katkıda bulunacağını boylamsal olarak incelemiştir. Araştırmacı,

DGO’da çalışan ortaokul öğrencilerinin etkinlik kâğıdındaki şekle benzeyen ancak sürüklendiğinde karışmayan bir şekil oluşturmakta zorlandığını gözlemlemiştir. Jones (2000) bu zorluğu iki nedene bağlamıştır. Bunlar; uzamsal düzenlemeleri analiz etmede ve DGO deneyimindeki acemiliktir. Dolayısıyla DGO deneyimindeki acemilik süreçte çeşitli aksamalara neden olabilecektir. Buna göre bu araştırmada, katılımcıların öğrenim süreçlerinde deneyimlemiş olduğu GeoGebra 5. 0 yazılımının DGO’da problem kurma süreçlerini incelemek için kullanılması uygun bulunmuştur.

Dinamik yazılım ve kullanıcısı arasındaki etkileşime işaret eden, Leung ve arkadaşları (2006) DGY’yi bir enstrüman (araç) olarak tanımlayıp; DGY’nin bilişsel, psikolojik ve fiziksel etkileşimin kesişim noktası olduğunu şu şekilde ifade etmiştir: “DGY, deneyimlerin ve hayal gücünün bulunduğu ve geometrik kavramları şekillendirmek için birleştiği yerdir.” (s. 347). Buna karşılık araştırmacılar, dinamik yazılımları (örn., Cabri, Geometer's Sketchpad) yalnızca bir yazılım olmak yerine tasarlanmış etkinlikler ile (örn., açık problem keşfi, kanıt arama, problem çözme) donatılan, epistemik ve pedagojik önem taşıyan ve Öklid düzlemini somutlaştıran mikro dünya (Lee & Hollebrands, 2006; Lopez-Real & Leung, 2006; Mariotti, 1999) olarak kabul etmiş ve DGO adıyla betimlemiştir. Bugünün penceresinden önümüzdeki yılların yapay zekâ ile şekilleneceği ve (dinamik) yazılım inovasyonunun durağan seyrinde ilerlemeyeceğini öngörmek şaşırtıcı olmayacaktır. Bu sebeple Sinclair ve Robutti’nin (2013) altını çizdiği gibi hem alandaki atfın entelektüel önemi hem de yazılım inovasyonunun devam edeceği öngörüsünden ötürü dinamik yazılımların kaynağını benzer kabul ederek, dinamik geometri yazılımları yerine DGO ifadesini kullanmak daha uygun düşmektedir. Bu sebeple bu tez çalışmasında bundan sonraki kısımda dinamik yazılım ve dinamik geometri yazılımları DGO olarak ele alınmıştır.

Öte yandan matematik eğitimi araştırma alanında DGO’nun etkisi üzerine çalışmalar, dikkate değer ve uzun bir geçmişe sahiptir (Sua vd., 2023). Bu çalışmaların içeriğini; problem çözme (ör., Kuzle, 2017; Rott vd., 2021) veya kanıtlama (örn., Christou vd., 2004; Jones, 2000; Mogetta vd., 1999b; Sinclair & Robutti, 2013) sürecinin incelenmesi, etkinlik tasarımı (örn., Komatsu, & Jones, 2019), matematiksel modelleme (ör., Greefrath & Siller, 2018; Siller vd., 2022) vb. şeklinde sıralamak mümkündür. DGO’nun geometri öğrenim ve öğretimine dahil edilmesinin ardından sürükleme ve ölçme işlevlerine vurgu yapılmışsa da sürükleme türleri 1990’lı yılların

ortasından itibaren (örn., Arzarello vd., 2002; Hölz, 1996, 2001; Olivero, 1999) ve ölçme türleri ise 2000’li yılların başında (Olivero & Robutti, 2007; Sinclair & Robutti, 2013) tartışılmaya başlanmıştır. Bunların dışında literatürde DGO’nun yardımcı unsur ekleme ve diğer bileşenlerinin bilişsel perspektiften sınıflamasına denk gelinmemiştir. Bu kapsamda yürütülen araştırmalar ışığında aşağıda DGO’nun sırasıyla; sürüklenme, ölçme, yardımcı unsur ekleme işlev ve diğer bileşenleri ve türleri tanımlanmıştır.

Sürüklenme ve Türleri. Sürüklenme DGO’nun dinamik niteliğini canlandıran, geometrik bir yapının biçimsel değişimini (görsel temsilindeki değişim) ve kavramsal değişmezliğini (tüm özelliklerinin korunması) ortaya koyan dolayısıyla kavramsal yapısını anlamaya hizmet eden ve pedagojik değeri olan bilişsel bir eylemdir (Laborde, 1993; Lopez-Real & Leung, 2006; Oxman vd., 2017; Sinclair & Robutti, 2013). Bunun yanı sıra sürüklenme, kullanıcının geometri anlayışını değiştirme potansiyeli bulunan (Baccaglioni-Frank, 2010a) ve kimi zaman problem çözme aracı (Leikin & Grossmann, 2013) kimi zaman ise keşif ve doğrulama fonksiyonlarından ötürü kavramsal bir araç (Lopez-Real & Leung, 2006) olarak kabul edilmiştir. Dolayısıyla sürüklenme eylemi “sezgisel olarak nötr” değildir (Hölz, 1996, s. 171). Bu sebeple bütünüyle öğretici avantajlar içermemekte ve bilinçli kullanımı gerekli kılmaktadır (Baccaglioni-Frank, 2010a). Çünkü sürüklenme sırasında şeklin değişmez özellikleri hakkında akıl yürütmenin şeklin statik durumuna kıyasla akıl yürütmekten daha zorlayıcı olduğu bilinmektedir (Hollebrands, 2007).

Diğer yandan sürüklenme hem uzamsal hem de zamansal eşzamanlılığın merkezinde yer almaktadır (Sinclair & Robutti, 2013). Eşzamanlılık bir olgunun farklı zamansal ve uzamsal örneklerini aynı anda deneyimlemek olup, değişen bileşenler arasındaki değişmez ilişkileri keşfetme ile karakterize edilebilecektir (Leung, 2008; Sinclair & Robutti, 2013). Bu yönüyle dinamik yapı sürüklenme altında, Öklid düzleminin aksiyomatik yapısına uygun oluşturulan özelliklerini korumakta ve korunan özellikler değişmez olarak nitelendirilmektedir (Baccaglioni-Frank vd., 2017). Zihnin geometrik alışkanlığı olarak değişmezliği araştırmak (Leung, 2008; Ünlü & Ertekin, 2023) ise DGO’da fare kontrolünde sürüklenme ile sağlanabilecektir (Baccaglioni-Frank, 2009). Örneğin, bir eşkenar dörtgen sürüklendiğinde biçimsel değişiminin yanında değişmez özellikleri (kenar uzunluklarının eşit olduğu ve karşı köşelerdeki açılarının eş olduğu) fark edilebilmektedir.

Sonuç olarak sürüklenme, DGO'nun “epistemik ve pedagojik değerlerini açıklamak için çokça çalışılmış bir temadır” (Leung, 2008, s. 136). Dolayısıyla sürüklemenin geometrik durumların keşfinde, varsayım oluşturma ve kanıtlama sürecinde rol oynadığı sıklıkla vurgulanmakta (Leung, 2008; Sinclair & Robutti, 2013) ve bu vurgulardan biri de bilişsel süreçleri açığa çıkaran türlerine (örn, Arzarello vd., 2002; Hölz, 1996; Baccaglini-Frank, 2009, 2010a) yönelik yapılmaktadır. Çünkü sürüklenme türleri; keşfetme, varsayım oluşturma, varsayımı test etme veya doğrulama gibi farklı düşünme süreçlerinin göstergesi niteliğinde hiyerarşik bir şema sunmaktadır (Sinclair & Robutti, 2013). Nitekim Baccaglini-Frank (2010a) doktora tezi araştırmasında, özellikle açık geometri probleminin keşif sürecinde kendiliğinden ortaya çıkan farklı sürüklenme biçimlerinin tanımları (örn., Arzarello vd., 2002; Lopez-Real ve Leung, 2006; Olivero, 2002) ile ilgilenmiş ve açık geometri problemi araştırmalarının varsayım oluşturma veya keşif aşamasında sürüklemenin kullanımını mümkün olduğu kadar ayrıntılı analiz ederek, ortaya çıkan bilişsel süreçlerin doğasını tanımlamıştır (Baccaglini-Frank, 2009; Baccaglini-Frank, 2010a). Buna göre önceki araştırmacıların tasniflerini de göz önünde bulundurarak, sürüklenme şemaları adı altında dört sürüklenme türü ortaya koymuştur (Tablo 1).

Aşağıda sürüklenme türleri; sürüklemenin bilişsel analizlerine (Arzarello vd., 2002; Baccaglini-Frank, 2009, Hölz, 1996; Olivero, 1999, 2002) ve matematiksel önemine odaklı (Leung, 2008) araştırmalar, Baccaglini-Frank'ın (2009) tür tasnifi ışığında derlenmiş ve türlerin birbiriyle örtüşen sınıflamasına yer verilmiştir (Tablo 1).

Tablo 1. Sürüklemenin bilişsel analizleri ve matematiksel önemine odaklı türlerinin tasnifi

Baccaglini-Frank (2009)	Leung (2008)	Arzarello vd., (2002), Olivero (1999, 2002)	Hölz (2001)	Sürükleme amacı	Sürükleme eylemi
Rastgele sürükleme	Zıtlık için sürükleme	Gezici/Rastgele sürükleme	Arama modu olarak sürükleme modu	Keşif ve mevcut şekle ait farklılıkları vb. görme amaçlı yürütülmektedir (Arzarello vd., 2002; Baccaglini-Frank, 2009; Hölz, 2001; Leung, 2008; Olivero, 2002)	Şekildeki ilginç yapılanmayı ya da düzenlilikleri keşfetmek için rastgele ve plansızca yapılan sürüklemelerdir.
Özellikleri koruyarak/amaçlı sürükleme	Ayırma için sürükleme	Kısıtlı sürükleme Rehberli sürükleme Gizli geometrik yer sürüklemesi		Varsayım oluşturma amaçlı yürütülmektedir (Arzarello vd., 2002; Baccaglini-Frank, 2009; Leung, 2008; Olivero, 2002).	Özel bir şekil oluşturma amacıyla şeklin temel noktalarının sürüklenmesini veya keşfedilen özelliği içeren farklı şekiller oluşturmaya içermektedir.
İz bırakarak sürükleme		Çizgi sürükleme			Şeklin değişmez özelliğinin keşfedildiği hat üzerinde yeni noktalar koyarak ya da iz bırakarak keşfedilen özelliği görünür kılma amacıyla yapılan sürüklemelerdir.
Sürükleme testi	Genelleme için sürükleme	Bağlı sürükleme Sürükleme testi	Test modu olarak sürükleme modu	Varsayımı veya mevcut şeklin özelliklerini doğrulama, test etme veya genellemeye ulaşma amaçlı yürütülmektedir (Arzarello vd., 2002; Baccaglini-Frank, 2009; Leung, 2008; Olivero, 2002).	Mevcut geometrik yapının değişen görünüşleri altında kalan değişmez özelliklerinin ayırt edilmesi veya doğrulanması amacıyla sürdürülmektedir.

Tablo 1’de görüldüğü üzere sürüklemenin bilişsel analizlerine odaklı türlerini Baccaglini-Frank (2009) dört, Arzarello vd., (2002) ve Olivero (1999, 2002) yedi ve Hölz (2001) iki temel başlıkta ele almıştır. Leung (2008) ise kendinden önceki araştırmacılardan daha farklı bir perspektifle sürüklemeyi incelemiştir. Araştırmacı sürüklemenin matematiksel keşifteki değişiminin değerini açığa çıkarmayı amaçlayarak, hareket halindeki analizlerine odaklanmıştır. Leung’un (2008) yaratıcı zihnin ürünü olarak ortaya koyduğu ve sürükleme biçimlerinin analizlerine yönelik meta dil olarak tanımladığı renk spektrumlu ayırt edici çerçevesi, geometrik keşfin ardındaki görseli ortaya çıkarmaktadır. Leung’a (2008) göre ortaya koyduğu sürükleme biçimleri, DGO’da sürükleme stratejilerini yorumlamak için analiz merceği olarak kullanılma potansiyeli taşımaktadır. Ancak, Leung’un (2008) da vurgulamış olduğu gibi diğer sürükleme türleri ile ayrışan ve farklı deneyimleri yansıtan iki sürükleme türü —*füzyon için sürükleme* ve *spektral sürükleme stratejisi*— içermektedir. Bu sebeple diğer sürüklemeler ile karakterize edilemeyen sürükleme türleri, Tablo 1’e ilave edilmemiştir. Bu kapsamda Leung (2008) sürüklemenin matematiksel önemine vurgu yaparak, beş sürükleme biçimi önermiş ve bunlardan üçü Tablo 1’e eklenmiştir.

Sonuç olarak, sürükleme türleri amaçlarına göre farklılık taşımakta ve birbirinden farklı araştırmacıların, sürüklemenin benzer özelliklerine dikkat çektiği görülmektedir (Tablo 1). Örneğin, Olivero (1999) ve peşi sıra devam eden çalışmalar (Arzarello vd., 2002; Olivero, 2002) neticesinde literatüre kazandırılan sürükleme türleri ve açıklamalarına Tablo 2’de yer verilmiştir. Bu tez çalışması kapsamındaki verilerin analizlerinde; önceki araştırmacıların, sürüklemenin bilişsel türlerine yönelik tasniflerini dikkate alarak sürükleme türlerini daha bütüncül perspektiften ele alan Baccaglini-Frank’ın (2009) sürükleme şeması temel alınmıştır. Bunun dışında Leung’un (2008) renk spektrumlu çerçevesi, sürüklemenin bilişsel rolünden daha ziyade matematiksel önemine ve geometrik keşfin görselleştirilmesine odaklıdır. Bu sebeple bu tez çalışması kapsamında katılımcıların DGO’da problem kurma süreçlerinin incelenmesi amacıyla kullanılmamıştır. Aşağıda sürükleme türlerinin Baccaglini-Frank’ın (2009) ışığında derlemesine yönelik sınıflama, Tablo 1 gözetilerek açıklanmıştır.

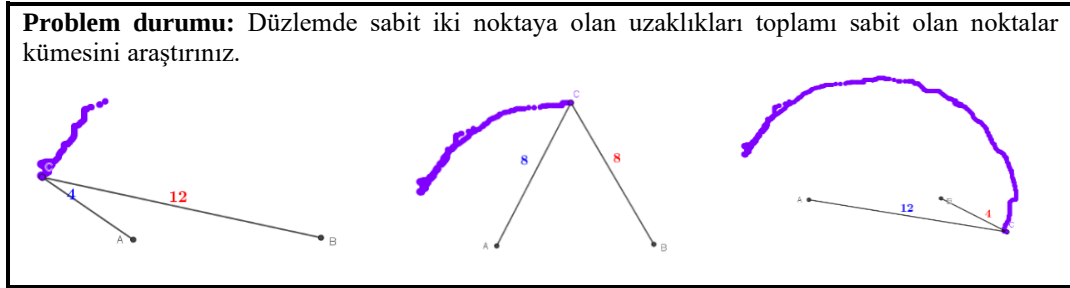
Tablo 1'e göre ele alınan ilk sürüklenme türü rastgele sürüklenme olup, şekildeki ilginç yapılanmayı ya da düzenlilikleri keşfetmek için rastgele ve plansız yapılan sürüklenme eylemi ile karakterize edilmektedir (Arzarello vd., 2002; Baccaglini- Frank, 2009; Hölz, 2001; Leung, 2008; Olivero, 2002). Rastgele sürüklenme sırasında oluşum üzerindeki temel bir noktayı değişik ve ilginç görünümelerde şekiller ortaya çıkarmak amaçlanmaktadır. Örneğin Hölz (1996) geometri öğreniminde sürüklemenin etkisini incelediği çalışmasında, DGO'da (*Cabri -Géomètre*) sürüklemenin Öklid geometrisini değiştiren bir inşa aracı olmadığına ve geometrik yapıların davranışları hakkında karar vermeyi gerektiren bilişsel bir araç olduğuna değinmiş ve sürüklemeye ilişkin devam ettiği çalışmasında sürüklemenin, aynı şeklin farklı temsillerini gösteren bir araç ve temelde iki işlevi olduğuna vurgu yapmıştır (Hölz, 2001). Sürüklemenin ilkel bir sınıflaması olarak Hölz'ün (2001) yaklaşımına göre arama modu olarak sürüklenme modunda (drag mode as a search mode) (s. 83) yeni özelliklerin aranması veya keşfedilmesi söz konusu iken, bu sürüklenme rastgele sürüklenme ile benzer işlevi görmektedir. Buna karşılık, Arzarello ve meslektaşları (2002) da sürüklemeyi algısal ve kuramsal düşünme üzerindeki rolüne göre yedi kategoriye ayırmış (Tablo 2) ve sürüklenme türlerinin keşfetme, varsayımda bulunma, varsayımı doğrulama ve savunma gibi farklı amaçlarla kullanıldığını vurgulamıştır. Örneğin rastgele ve rehberli sürüklenme daha çok keşif aşamasında kullanılmaktadır (Tablo 2). Tablo 1'e göre rastgele sürüklemeye denk düşen bir diğer tür ise Leung'un (2008) bir şeklin sürüklenme altındaki varyasyonunu (çeşitliliğini) incelediği ve sürüklemenin matematiksel önemine odaklanarak, ortaya koyduğu sınıflamada yer alan zıtlık için sürüklemedir. Zıtlık için sürüklenme; mevcut şekle ait farklılıkları görme amacıyla yapılan ve olabilecek veya olamayacak ilişkileri tahmin etme (varsayımda bulunma) ile ilgili olup, rastgele sürüklenme ile karakterize edilmektedir (Leung, 2008). Bu kapsamda rastgele sürüklenme keşif ve mevcut şekle ait düzenlilikleri veya farklılıkları görme amaçlı yürütülmekte ve varsayımların üretilmesine zemin hazırlamaktadır (Arzarello vd., 2002; Baccaglini-Frank, 2009; Hölz, 2001; Leung, 2008; Olivero, 2002).

Sürüklemenin bilişsel analizlerine odaklı türlerinden ikincisi ise *özellikli koruyarak* veya diğer adıyla *amaçlı sürüklemedir* (Tablo 1). Amaçlı sürüklenme, özel bir şekil oluşturma amacıyla şeklin temel noktalarının sürüklenmesi ile karakterize

edilebilecek ve aynı zamanda şekil üzerindeki bir noktayı, üzerindeki şeklin keşfedilen özelliğini bozmayacak biçimde sürükleme işlemi olarak da ele alınabilmektedir (Arzarello vd., 2002; Baccaglini-Frank, 2009; Leung, 2008; Olivero, 2002). Örneğin Leung (2008) çalışmasında rastgele sürüklemenin her zaman şekle ait belirli bir desen bulmak için işlevsel olmadığına ve belli bir amacı açığa çıkarmak için rastgele sürüklemekten daha farklı sürüklemeye ihtiyaç olduğuna değinmiştir. Leung'un (2008) anlamlı sürükleme olarak işaret ettiği ve mevcut şekle ait odaklanılması ve arka planda tutulması gereken kısma karar vermenin kritik önem taşıdığı bu sürükleme biçimi, amaçlı sürüklemeye denk düşmektedir (Tablo 1). Bu bakımdan benzer amaçlara hizmet eden farklı sürükleme türlerinin birbiriyle örtüşebildiği anlaşılmaktadır. Dolayısıyla Leung (2008) rastgele sürüklemenin mevcut şekli inceleme esnasında yetersiz kaldığını dile getirerek, mevcut şekle dair gizli geometrik desenleri ve değişmez ilişkileri açığa çıkaran sürükleme biçimi olarak *ayırma için sürüklemeyi* öne sürmüştür. Bu sürükleme biçiminde problem durumundaki geometrik yer henüz tam olarak fark edilememiş ve yapının özelliklerine yönelik tahmin ve varsayım oluşturma söz konusu olabilmektedir. Dolayısıyla şekil bir sonuç elde etme amacıyla sürüklenmemekte ve böylece amaçlı sürükleme şekle ait varsayımların oluşturulmasına aracılık edebilmektedir. Bu noktada değişmez geometrik özelliklerin ortaya çıkışı DGO'nun işlevsel aracı olan *izi aç* ile de desteklenebilmektedir (Baccaglini-Frank, 2019).

Tablo 1'e göre diğer bir sürükleme türü ise iz bırakarak sürükleme olup, şeklin değişmez özelliğinin keşfedildiği hat üzerinde yeni noktalar koyarak ya da iz bırakarak keşfedilen özelliği görünür kılma amacıyla kullanılmaktadır. İz bırakma (tracing), çoğu zaman şekillerin düzgün biçimde ortaya konulmasına olanak vermemesine karşın iz bırakma yardımıyla yapılan sürükleme, araştırılan geometrik yapının zihinde görselleştirilmesini ve bu yapıya ilişkin varsayımların oluşturulmasını desteklemektedir (Köse vd., 2012). Örneğin, DGO'da elipsin keşfedilmesine yönelik bir problem durumu üzerinden iz bırakarak sürükleme tanıtılabilecektir (Şekil 3). Buna göre Şekil 3'te C noktasının, A ve B noktalarına uzaklıkları toplamı her seferinde 16 olacak biçimde iz bırakarak sürüklendiği örneklendirilmiştir. Bu aşamada problem durumunda ele alınan geometrik yerin elips belirtebileceği güçlü bir tahmin olarak sunulabilmekte ve bu güçlü tahmin henüz doğrulanmadığı için bir varsayım niteliği

taşımaktadır. Dolayısıyla iz bırakarak sürüklenme amaçlı sürüklemenin iz/nokta oluşturma aracılığıyla görünür kılınmasını destekleyen bir rol üstlenmektedir (Baccaglini-Frank, 2019).



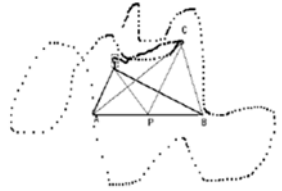
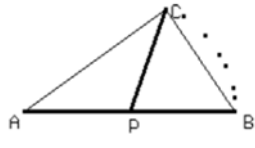
Şekil 3. İz bırakarak sürüklenme için örnek durum (Köse vd., 2012 çalışmasından uyarlanmıştır.)

Baccaglini-Frank'ın (2009) sürüklenme şeması dikkate alınarak, oluşturulan tasniflemede son sürüklenme türü, sürüklenme testidir (Tablo 1). Bu sürüklenme türünde keşfedilen özellik ve geometrik yerden yola çıkarak ulaşılan matematiksel sonuçlar; yeni oluşumların yapılmasını ve bu oluşumların sürüklenerek, sonuçların test edilmesini içermektedir (Arzarello vd., 2002; Baccaglini-Frank, 2009; Leung, 2008; Olivero, 2002). Buna göre aynı şekle ait farklı örnek durumlar üzerinde sürüklemeleri tekrar etme söz konusu olmaktadır. Sürüklenme testi yardımıyla, farklı oluşumlar üzerinde matematiksel genellemelere ulaşılabilmekte ya da ulaşılan sonuçların farklı durumlar için geçerli olup olmadığı belirlenebilmektedir. Örneğin, Olivero (1999) ile yaklaşık zamanlarda Mariotti (1999) de çalışmasında farklı sürüklenme türlerinin varlığına işaret etmiş ve ortak özelliklerinin, orijinal şeklin karakteristik yapısını korumak olduğunu belirtmiştir. Hölz (1996) ise DGO'nun bilişsel rolünü vurgulamış ve kavramsal düşüncüyü açığa çıkardığına, geometri öğreniminde araştırma ve problem çözme fırsatları sunduğuna buna karşın sürüklenme işlevinin belirli öğrenme durumunun karmaşıklığını da arttıran bir unsur olduğuna değinmiştir.

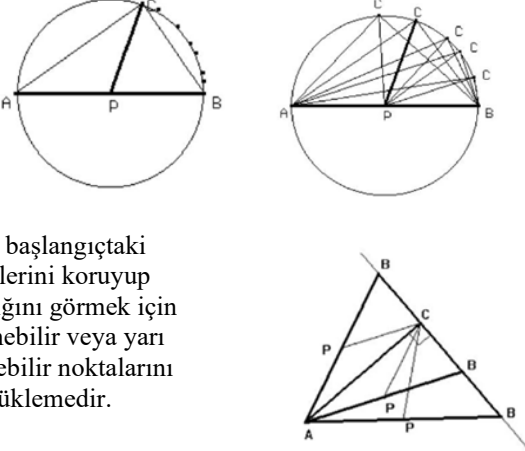
Hölz (2001) sürüklemeye ilişkin devam ettiği çalışmasında geometrik yapının var olan özelliklerini sağlayıp, sağlamadığını kontrol etme ile karakterize ettiği ve sürüklenme testi ile benzer işlevi gören test modu olarak sürüklenme modunu (drag mode as a test mode) (s. 83) tanımlamıştır. Leung (2008) ise öne sürdüğü çerçevesinde sürüklenme testinin, DGO'daki keşif nesnesinin (mevcut geometrik yapı) değişen

görünümleri altında kalan değişmez özelliklerinin ayırt edilmesine veya doğrulanmasına olanak tanıdığını dile getirerek, *genelleme için sürüklenme* türünü tanımlamıştır. Leung (2008) bu sürüklenme biçimi ile sağlam olarak inşa edilen DGO yapısının, statik olmaktan ziyade kavramsal fikirleri açığa çıkaran dinamik olan doğasına işaret etmiştir. Araştırmacı örneğin, DGO'da sağlam bir karenin değişen görünümünün *genelleme için sürüklenme* altında deneyimlenebileceğini ve böylece karenin kavramsal anlamının görsel-dinamik şekilde açığa çıkacağını vurgulamıştır. Leung (2008) genelleme için sürüklemeyi, *sürüklenme testi yanında bağımlı sürüklenme* ile karakterize etmiş ve bağımlı sürüklemenin de genelleştirilmiş bir şekil üretmeye elverişli bir tür olduğuna değinmiştir. DGO'da sürüklenme işlevinin tetiklediği bilişsel süreçlere odaklanan Baccaglini-Frank (2009, 2010a) ise sürüklenme şemalarının bilinçli kullanımının; keşif, varsayımda bulunma ve kanıtlama sürecini hızlandırma ve matematik eğitiminin önemli hedeflerine (örn., muhakemenin kuvvetlenmesi, rutin olmayan problemi çözme becerisi) ulaşmak için katkı sağlama potansiyeli taşıdığını belirtmiştir.

Tablo 2. Algısal ve kuramsal düşünme üzerindeki rollerine göre sürüklenme türleri (Arzarello vd., 2002, s. 67-68; Olivero, 1999, 2002)

Sürüklenme türü	Açıklama	
Gezici/rastgele sürüklenme (<i>Wandering dragging</i>)	Şekildeki ilginç yapıları ya da düzenlilikleri keşfetmek için rastgele ve plansız yapılan sürüklemelerdir.	
Kısıtlı sürüklenme (<i>Bound dragging</i>)	Yarı sürüklenbilir (semi-dragable) bir noktayı hareket ettirme (nesneye bağlı yani nesnenin üzerindeki noktayı hareket ettirmek) suretiyle sürüklemelerdir.	
Kılavuzlu/rehberli sürüklenme (<i>Guided dragging</i>)	Özel bir şekil vermek için şeklin temel noktalarını sürüklemelerdir.	
Geometrik yeri işaretleyerek sürüklenme <i>Line dragging</i>	Şeklin değişmez özelliğinin keşfedildiği hat üzerinde yeni noktalar oluşturarak, izi açarak sürüklemelerdir.	
Bağımlı sürüklenme <i>Linked dragging</i>	Bir noktayı bir nesneye bağlama ve o nesnenin üzerine taşımak suretiyle sürüklemelerdir.	

Tablo 2 (devam). Algısal ve kuramsal düşünme üzerindeki rollerine göre sürüklenme türleri (Arzarello vd., 2002, s. 67-68; Olivero, 1999, 2002)

Sürüklenme testi (<i>Dragging test</i>)	Şeklin başlangıçtaki özelliklerini koruyup korumadığını görmek için sürüklenabilir veya yarı sürüklenabilir noktalarını sürükler.	
--	---	--

Araştırmalar (örn., Arzarello vd., 2002; Baccaglini-Frank, 2010b; Lopez-Real & Leung, 2006) DGO'nun, açık geometri problemlerini araştırmaya ve keşfetmeye elverişli yaklaşımlar sunduğuna işaret etmektedir. Örneğin Baccaglini-Frank (2010b) çalışmasında DGO'da sürüklemenin, sürüklenme olmadan ulaşılması zor olan güçlü varsayımların üretilmesine destek sağlayabileceğine değinmiştir. Oxman vd. (2017) öğretmen adayları ile yürüttüğü çalışmasında; öğretmen adaylarının sürüklemeyi bir yapıyı test etme ve sürüklenme altındaki davranış değişimlerini gözlemlemek veya varsayımlarını doğrulama amacıyla kullandığına işaret etmiştir. Buna karşılık geometrik durumları keşfetme ile bir teoremi kanıtlamak arasındaki sınırın bulanık olduğu (Baccaglini-Frank vd., 2017) ve sürüklemenin kanıtlamaya engel teşkil edebileceği de öne sürülmektedir (Baccaglini-Frank, 2010b). Bu sebeple DGO'dan tutarlı ve sistematik şekilde yararlanılması önerilmektedir (Santos-Trigo, 2023).

Ölçme ve Türleri. Matematiksel veya geometrik kavramların öğretiminde kilit öneme sahip olan ölçme, nesnenin bir niteliğinin ölçülen nitelikte uyumlu standart veya standart olmayan bir birimle karşılaştırılmasıdır (Abramovich & Connell, 2021; Kar & Öçal, 2022). DGO'daki ölçme aracı ise; oluşturulan şekillerin mesafelerini, çevrelerini, uzunluk, alan ve açıları ölçebilmekte ve şekil hareket ettikçe ölçme sonucu değişkenlik gösterebilmektedir (Olivero & Robutti, 2007). Sürüklenme ve ölçme özellikle birlikte kullanıldığında şeklin ölçülen bileşenlerindeki değişim de eş zamanlı olarak gözlemlenebilmektedir (Pittalis & Drijvers, 2023). Bu durum geometrik bir şeklin özellikleri arasındaki bağımlılıkları ve ilişkileri keşfetmeye

yardımcı olmaktadır (Christou vd., 2004). Buna göre ölçme hem kullanımının uygun yönetim istemesi hem de ölçümün doğru yorumlanması bakımından DGO'nun güçlü ve karmaşık bir aracıdır (Sinclair & Robutti, 2013).

Ölçme aracına yüklenen karmaşıklık niteliği önemli ve DGO'da yürütülen etkinlikler için bir sınırlılık olarak görülebilecektir. Nitekim, Olivero ve Robutti (2007) ölçmenin matematik ve deneysel bilimlerde birbirinden farklı ele alındığını ve ikili doğası bulunduğunu ifade etmiştir. Matematik ve deneysel bilimlerde ölçmeye yüklenen epistemolojik farklılık, DGO'da örneğin ispatlama ve problem çözme sürecinde ölçmenin rolünü etkilemektedir (Olivero & Robutti, 2007). Çünkü DGO'daki ölçme hem matematik hem de deneysel bilimdeki ölçmenin özelliklerini taşımakta ve DGO Öklidyen geometri ortamını simüle etmektedir. DGO'nun Öklid düzlemini simüle etmesi inşa ve keşif sürecine katkı sağlarken, çelişkili durumların yaşanmasına da kapı aralamaktadır. Çünkü Öklid düzlemi $R \times R$ ile birebir örtüşen sonsuz sayıda noktaya sahipken buna karşılık DGO (örn., Cabri, GeoGebra), bilgisayardaki piksellerle sınırlıdır (Olivero & Robutti, 2007). Benzer şekilde DGO'daki bir doğrunun bileşenleri boyutsuz ve sonsuz sayıdaki noktalar yerine bilgisayardaki piksellerdir. Dolayısıyla DGO'da doğru (parçası) sonlu bir uzunluğa sahiptir. Bunun yanı sıra DGO'da ekranda görüntülenecek ondalık basamak sayısı kullanıcı tarafından belirlenebilmekte ve bu durum ölçme aracının kesinliğini arttırmak yerine sonucun farklı matematiksel temsillere sahip olabileceği anlamı taşımaktadır.

Özetlemek gerekirse, DGO'da ölçmenin hassasiyeti bilgisayar pikseli ile sınırlı ilişkidir. Bu nedenle DGO'da sonsuz kesinliğe bağlı hesaplamalar yerine yaklaşık değerler bulunmaktadır. Bu durum da bir çatışmaya sebebiyet vermektedir (Olivero & Robutti, 2007; Sinclair & Robutti, 2013). Benzer şekilde bazı geometrik özelliklerin sağlanmadığı çelişkili durumlar, ölçmenin ikili doğasının bir sonucudur. Buna göre DGO'da ölçme, duyuşsal özellikler ile ilişkilendirilmiş ve ölçmenin değişen düzeylerde öz güvene ve farkındalığa sahip öğrenciler tarafından kullanıldığı belirtilmiştir (Sinclair & Robutti, 2013). Söz gelimi DGO'da ölçmenin çelişkili doğası ile karşılaşan kullanıcı; çelişkide takılıp kalma, hatayı veya çelişkiyi yazılıma atfetme veya kendi akıl yürütmesini sorgulayarak, etkinliğe yeniden başlayabilme eylemlerinde bulanabilmekte (Sinclair & Robutti, 2013) ve bazı durumlarda ise

yazılımın gösterdiği ölçümlere kendi kanıtlarından daha fazla güvenme eğilimi sergileyebilmektedir (Olivero & Robutti, 2007). Bu sonuçlar, DGO’da yürütülen etkinliklerin olağan sınırlılık veya zorlukları kabul edilebilecektir. Çünkü dinamik yazılımın ölçme ve doğrulama aracı olarak kullanılması, kullanıcısının düşünme süreçlerini etkilemektedir (Kuzle, 2015).

Açık geometri problemi bağlamında; ölçme aracı, verilen şekle dinamizm katan sürüklenme aracı ile özellikle birlikte kullanıldığında, şeklin içeriği hakkında güçlü fikirlerin oluşmasına ve varsayımların üretilmesine katkı sağlama potansiyeline sahiptir (Sinclair & Robutti, 2013). Örneğin sürüklemeyi sürdürmek veya diğer adıyla özellikleri koruyarak sürüklenme (maintaining dragging) varsayımların oluşturulması için bir araç niteliğinde olup, bu durum “sürükleyerek keşfetmek” olarak adlandırılmıştır (Baccaglini-Frank, 2019). DGO’da ölçme aracı, şeklin özellikleri arasındaki bağımlılıkları ve ilişkileri keşfetmeye yardımcı olmakta ve daha ileri varsayımların oluşturulabilmesi veya genellemelerin yapılabilmesi için temel oluşturmakta (Christou vd., 2004) ve varsayımları doğrulamaya destek olmaktadır (Jones, 2001). Çünkü DGO; geometrik şeklin açı, çevre ve alan ölçümleri için eşzamanlı ölçme deneyimi sunmaktadır (Özçakır & Çakıroğlu, 2019).

Araştırmacılar (Olivero & Robutti, 2002; Olivero & Robutti, 2007; Sinclair & Robutti, 2013) tıpkı sürüklenme türlerinde olduğu gibi ölçmenin de keşfetme veya varsayımda bulunma ve varsayımı doğrulamak için kullanılabileceğini belirtmiştir. Örneğin, Olivero ve Robutti (2002) ortaokul öğrencilerinin açık geometri problemine varsayım oluşturma ve kanıtlama süreçlerinde ölçmenin bilişsel rolünü analiz ettikleri çalışmada, ölçmenin temelde iki amaç taşıdığını öne sürmüştür. Birincisi sezgisel bir araç olarak ve algısal kullanımla, mevcut geometrik durumu keşfetme ve ikincisi mevcut şekle ait ileri sürülen varsayımları doğrulama veya kanıtlamaya katkı sağlayan mantıksal ilişkileri belirlemek için ölçümün yapılmasıdır. Araştırmacıların öne sürdüğü bu amaçlar, Hölz’ün (2001) sürüklemenin ilkel sınıflaması ile paralel niteliktedir. Benzer şekilde yine Olivero ve Robutti (2007) çalışmasında İtalya ve İngiltere’deki birçok ortaokuldan öğrencinin (15-16 yaş) DGO’da (Cabri) açık geometri problemine karşılık, çiftler halinde çalışarak varsayım oluşturma ve kanıtlamadaki bilişsel süreçlerini analiz etmiştir. Bu analizlerde öğrencilerin deneysel yaklaşımdan; değişmezleri gözlemleme, değiştirme, belirleme ve kanıtlamayı içeren

daha teorik yaklaşıma geçişlerini gözlemlemiş ve bu süreçteki ölçme yaklaşımlarının yanı sıra ölçümün bilişsel rolüne odaklanmıştır. Araştırmacılar, bu çalışmanın neticesinde varsayım oluşturma ve kanıtlama sürecinde farklı ölçümlerin sınıflamasını geliştirmiştir (Tablo 3).

Olivero ve Robutti (2007) sürüklemeye analizlerinde (Olivero, 1999, 2002) ortaya konulan iki geniş kategoriyi varsayım oluşturma ve kanıtlama süreci içindeki ölçmenin analizine aktarmıştır. Bu iki temel kategoriden birincisi uzay-grafik alanından teorik alana ve ikincisi teorik alandan uzay-grafik alanına geçiş şeklindedir. Mevcut etkinliğe dair herhangi net bir fikre sahip olunmadan problem durumunun araştırılması, spesifik bir özelliğe yönelik değildir. Buna karşın mevcut etkinliğin geometrik içeriğinde belirli bir düzenlilik veya değişmezlik tespit edilir ve ölçümler bu tespitleri spesifik teorilerle ilişkilendirmeye yönelik ilerlediğinde, uzay-grafik alanından teorik alanına geçiş olduğuna işaret etmektedir. Bunun aksine bir varsayım veya keşfedilen özelliğin kanıtından şekle geri dönmek için ölçümler yapılması ise teorik alandan uzay-grafik alanına geçiş yapıldığını desteklemektedir. Bu tez çalışması kapsamında katılımcıların ölçme eylemlerinin analizlerinde literatürde ölçme türlerine ilişkin tek çerçeve olan Olivero ve Robutti'nin (2007) çerçevesi temel alınmıştır. Aşağıda Tablo 3'te temelde iki kategori altında sunulan ölçme türlerinin sınıflamasına ve ardından örnek problem durumları üzerinden tanıtımına yer verilmiştir.

Tablo 3. Ölçüm türlerinin sınıflaması (Olivero & Robutti, 2007)

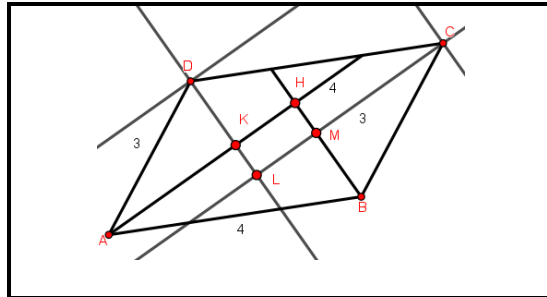
Ölçme türü	Açıklama
<i>Uzay- grafik alanından teorik alanına geçiş</i>	
Rastgele ölçüm (<i>Wandering measuring</i>)	Geometrik yapı hakkında spesifik fikir henüz bulunmamaktadır. Sayısal ilişkileri, değişmezlik ve benzerlikleri tanımlamak için rastgele bir keşif söz konusudur. Bu esnada ölçme sonuçlarına ve ölçümün kesinliğine duyulan güven, uzay-grafik alanda bulunmaya işaret etmekte ancak “eğer ... sonra ...” benzeri sorgulama söz konusu olduğunda uzay- grafik alan ile teorik alan arası geçiş sağlanmaktadır.
(Amaçlı/rehberli ölçüm) (<i>Guided measuring</i>)	Geometrik yapı üzerinde genel bir durumdan özel bir durumu elde etmek için ölçüm yapılmaktadır.
Algısal ölçüm (<i>Perceptual measuring</i>)	Geometrik yapı ile ilgili bazı özellik ve ilişkilerin sezgisine (kesin olmayan fikir) sahip olunmaktadır. Bu noktada algısal ölçüm, algının geçerliğini kontrol etme aracı olarak kullanılmaktadır. Niteliksel bir ilişkinin niceliksel ilişkiye dönüştürülmesi ve algının doğrulanması için ölçme aracı kullanılmaktadır. Algının doğrulanması uzay-grafik alanından teorik alanına geçişe işaret etmektedir.
<i>Teorik alandan uzay- grafik alanına geçiş</i> Doğrulama ölçümü (<i>Validation measuring</i>)	Geometrik yapı ile ilişkili varsayım formüle edildikten sonra onu doğrulamak veya çürütmek amacıyla yapılan ölçmedir. Sürükleme testi ile benzerlik taşımaktadır. Ölçme, uzay-grafik ve teorik alan arasında köprü görevi üstlenmektedir.
İspat ölçümü (<i>Proof measuring</i>)	Geometrik yapıya ait ispat kurulduktan sonra ispatı daha iyi anlama ve açıklayabilmek amacıyla DGO’ya dönerek, şekil üzerinde ölçümlerin yapılmasıdır.

Tablo 3'e göre araştırmacıların (Olivero & Robutti, 2007) öne sürdüğü ilk ölçme türü rastgele ölçümdür. Rastgele ölçümde etkinlikte verilen geometrik yapı hakkında spesifik bir fikir söz konusu olmamaktadır. Bunun yerine geometrik yapıdaki sayısal ilişki, değişmezlik ve benzerlikleri tanımlamak için rastgele ve plansızca yapılan bir keşif söz konusu olmaktadır. Bu ölçme türü, yapının herhangi bileşenleri üzerindeki rastgele ölçümleri tanımlamakta ve tatmin edici bulunan ölçümler bir varsayım oluşturulmasına aracı olabilmektedir. Tablo 3'e göre uzay-grafik alanından teorik alanına geçişte ölçmeyi karakterize eden diğer tür ise amaçlı ölçümdür. Olivero ve Robutti (2007) kullandığı etkinlikte (Şekil 4) problem durumuna yönelik amaçlı ölçümü şu şekilde örneklendirmiştir:

Problem durumu: Size bir ABCD dörtgeni veriliyor. Kenarlarının açıortaylarını oluşturunuz: a AB'nin, b BC'nin, c CD'nin, d DA'nın. H, a ve b'nin, M, b ve c'nin, L, c ve d'nin, K, a ve d'nin kesişme noktasıdır. HKLM'nin ABCD'ye göre nasıl değiştiğini araştırınız. Varsayımlarınızı kanıtlayınız. (Olivero & Robutti, 2007, s. 142)

Şekil 4. Amaçlı ölçüm örneğine kaynaklık eden problem durumu

Çift halinde çalışan katılımcılar, problem durumunu öncelikle inşa etmiş ve ardından şeklin belirli öğelerinin bir sonuç elde etme amacıyla tekrarlı ölçümünü yapmıştır. Örneğin Şekil 5'te görüldüğü üzere, ABCD dörtgenine ait bazı kısımların uzunlukları ölçülmüş ve ardından AB, DC'ye paralel ve AD, BC'ye paralel olduğu belirtilmiştir. Benzer şekilde KL, HM'ye paralel ve KH, LM'ye paralel olduğu öne sürülen varsayımın sırasıyla hipotez ve tezi olarak belirtilmiş ve ardından ABCD paralelkenar ise KLMH'da bir paralelkenardır varsayımı oluşturulmuştur.



Şekil 5. Amaçlı ölçüm örneği

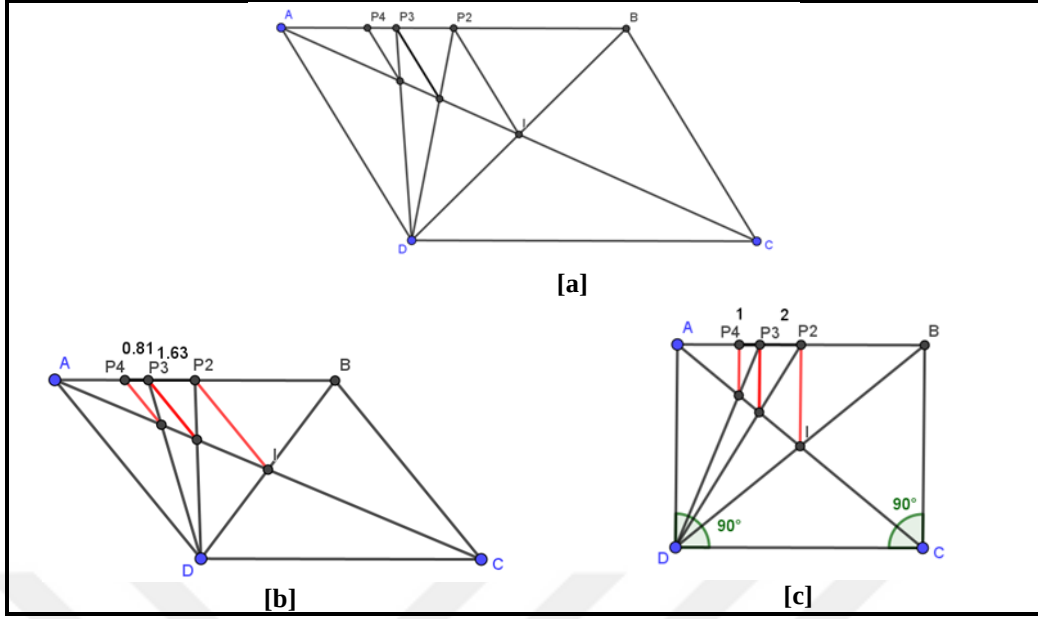
Bu noktada amaçlı ölçümün ortaya çıktığı ve problem durumuna ilişkin varsayımların oluşturulmasına destek olduğu fark edilmektedir. Ölçme, genel bir durumdan özel bir durumu elde etmek için kullanılmakta ve çoğunlukla özelliği koruyarak (amaçlı) sürüklenme ile eş zamanlı görülme potansiyeli taşımaktadır. Bu süreçte ortaya konulan varsayımın olağan şekilde ispatlanması gerektiği düşünülmekte ve varsayımı doğrulama amacıyla şekle ait ölçümler yapılmaktadır (Şekil 5). Bu durum da teorik alanından uzay-grafik alanına geçiş yapıldığına işaret etmektedir.

Uzay-grafik alanından teorik alana geçişte son ölçme türü algısal ölçümdür. Olivero ve Robutti (2007) çalışmasında algısal ölçümü tanıtmak için Şekil 6'daki etkinliği kullanmıştır. Buna göre DGO'daki katılımcı etkinlikteki geometrik yapı ile ilgili bazı özellik ve ilişkilerin sezgisine sahip ancak sezgilerinden emin değildir. Bu noktada algısal ölçüm, algının geçerliğini kontrol etme aracı olarak kullanılmakta ve niteliksel bir ilişkinin niceliksel bir ilişkiye dönüştürülmesi amacıyla ölçme yapılmaktadır (Örn., geometrik yapıda herhangi bir açının 90 derece olduğu ifade edilmekte ve ardından açı ölçülmektedir.).

Problem durumu: Bir ABCD paralelkenarı çizin. ABCD köşegenlerinin kesişme noktasından BC'ye paralel doğru oluşturunuz: P2, paralel doğru ile AB'nin kesişme noktasıdır. P2 noktasını D köşesi ile birleştiriniz. Bu doğru parçası AC köşegenini bir noktada keser; bu noktadan BC'ye paralel olan doğru ile AB doğrusunun kesişimi olarak P3 noktasını oluşturunuz. Benzer şekilde P4, P5, ..., Pn noktalarını oluşturunuz. APn AB'ye göre ne kadar uzundur? Durumu araştırınız ve varsayımlarınızı kanıtlayınız. (Olivero & Robutti, 2007, s. 149-150)

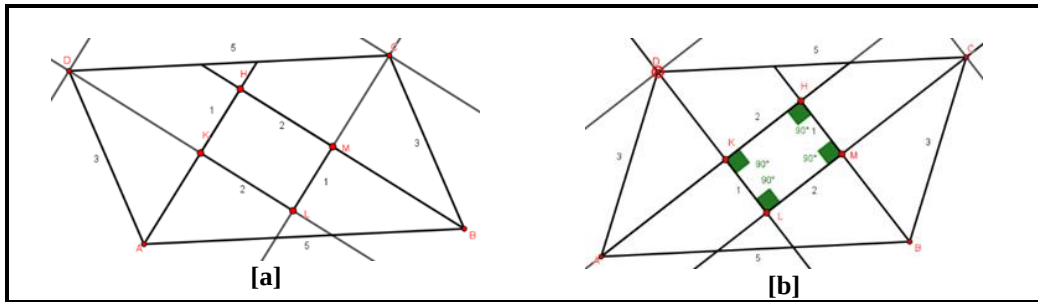
Şekil 6. Algısal ölçüm örneğine kaynaklık eden problem durumu

Problem durumuna (Şekil 6) göre algısal ölçüm şu şekilde tetiklenebilmektedir: “|P2P3|, |P3P4|’ün iki katı gibi görünüyor.” (Şekil 7, [a]) Ardından bu doğru parçalarının uzunlukları ölçülmekte (Şekil 7, [b]) ve elde edilen sonuç hem bu durumu ek matematiksel bilgi ile araştırmayı hem de yeni varsayımların oluşmasını tetikleyebilmektedir. Örneğin şekil sürüklenerek, ABCD bir dikdörtgen olduğu durumda parçaları arasındaki oran araştırılabilecektir (Şekil 7, [c]). Bu haliyle oran $\frac{1}{2}$ ’dir. Diğer durumlarda da $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ (rastgele ölçüm) ve böylece APn ve AB arasındaki oranın $\frac{1}{n}$ olduğu genel durumuna ulaşılabilmektedir. Buna göre uzay-grafik alanından teorik alanına geçişle karakterize edilen algısal ölçüm, problem durumuna ait genellemelerin ortaya çıkmasına katkı sağlayabilmektedir.



Şekil 7. Algısal ölçüm örnek durumları

Amaçlı ölçüm etkinliği neticesinde teorik alanından uzay-grafik alanına geçiş ile karakterize edilen ölçme, doğrulama ölçümüdür. Buna göre öncelikle HKLM dörtgeninin kenar uzunlukları ölçülmekte (Şekil 8, [a]), ardından iç açı ölçüleri belirlenebilmektedir (Şekil 8, [b]). Bu yaklaşım teorik alanından uzay-grafik alanına geçiş olduğuna ve öne sürülen varsayımın doğruluğunun kontrol edildiğine işaret etmektedir. Bu noktada yazılımın ondalık gösterim seçeneğinde yapılan değişikliğin (örn., 0 ondalık basamak tercih etmek) eşit uzunlukta olmasa bile eşit uzunlukta gösterime neden olabileceği ve çatışmaya sebep olacağı bilinmektedir.



Şekil 8. Doğrulama ölçümü örneği

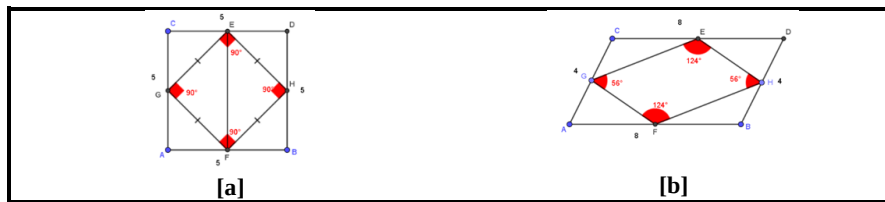
Olivero ve Robutti (2007) çalışmasında öne sürdüğü ölçme türlerinden sonuncusu olan ispat ölçümüne kaynaklık eden diğer etkinlik ise açık problem olarak formüle edilen Varignon teoremidir (Şekil 9). Contreras (2020) yaygın şekilde

Varignon teoremi olarak bilinmesine karşın Varignon problemi olarak nitelediği durumu “Bir dörtgenin orta noktaları, paralelkenarın köşeleridir.” (s. 1076) şeklinde özetlemiştir. Buna göre ispat ölçümü statik ortamda bir ispat kurulduktan sonra ispatı daha iyi anlama veya açıklayabilmek adına DGO’ya dönerek, dinamik şekil üzerinde ölçümlerin yapılmasıdır. Özetle statik ortamda (kâğıt-kalem) yürütülen işlemler dinamik ortamda test edilmektedir.

Problem durumu (Varignon problemi): Herhangi bir ABCD dörtgenini çiziniz. Dört kenarın K, L, M, N orta noktalarını belirleyiniz. (1) Dörtgen KLMN hangi özelliklere sahiptir? (2) KLMN hangi özel yapılanmaları sağlar? (3) KLMN’nin bu özel yapılanmaları sağlaması için ABCD dörtgeninin hangi hipotezlere ihtiyacı vardır? Varsayımlarda bulununuz ve onları kanıtlayınız. (Olivero & Robutti, 2007, s. 146)

Şekil 9. İspat ölçümü örneğine kaynaklık eden problem durumu

Örneğin, problem durumu (Şekil 10) hakkında öne sürülen bir varsayım şudur: “Eğer ABCD bir kare ise, KLMN eşkenar dörtgendir.” Bu varsayım önce kâğıt üzerinde ispatlanmakta ardından DGO’da kontrol edilmektedir (Şekil 10, [a]). Olivero & Robutti (2007) çalışmasında katılımcıların, varsayımlarını doğrulama amaçlı DGO’da ölçme yaparken, ölçümlerinin tezlerini doğrulamadığı durumlar ile karşılaşabildiğini belirtmiştir. Örneğin ABCD kare iken, KLMN’nin eşkenar dörtgen olmasına karşın kenar uzunluklarının birbirine eşit olmadığı görülebilmekte ve bu durum çatışmaya sebep olabilmektedir. Dolayısıyla teorik bakış açısı ile ortaya atılan varsayım deneysel açıdan doğrulanamamaktadır. Araştırmacılar bu durumu dinamik yazılımın ölçmedeki, doğruluk ve kesinlik sınırlamasına atfetmiş ve ölçümle desteklenen her ifadenin ölçme aracının sınırlamaları ile nitelendirilmesi gerektiğine vurgu yapmıştır. Bu aşamada şekil sürüklenirse yeni varsayımların oluşması da mümkündür. Örneğin, ABCD paralekenar olduğunda KLMN’de bir paralelkenardır (Şekil 10, [b]).



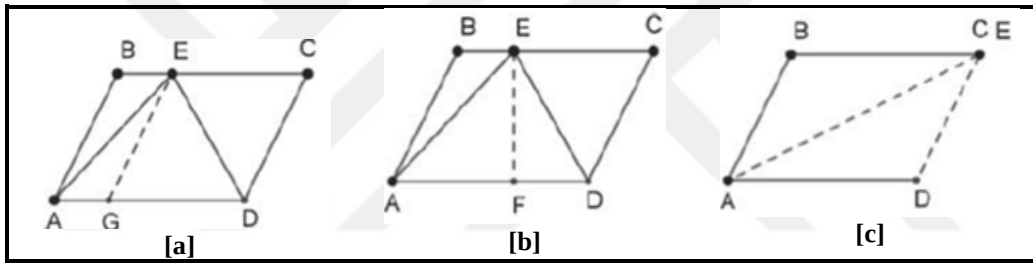
Şekil 10. İspat ölçümü örnek durumları

Yukarıda DGO’da sürüklenme ve ölçme işlev türleri birkaç problem durumu üzerinden örneklendirilmiştir. Bu örnekler, sürüklenme ve ölçmenin varsayım oluşturma veya keşif yapma aynı zamanda varsayımları veya tahminleri değerlendirme (kontrol ve doğrulama) aracı olarak kullanılabileceğine işaret etmektedir. Bu kapsamda sürüklenme ve ölçme türlerine yönelik araştırmalar (örn., Baccaglini-Frank, 2009; Olivero & Robutti, 2007) DGO’da problem kurma süreçlerinin incelenmesine ışık tutabilecek kuramsal alt yapıyı oluşturmak için uygun bulunmuştur.

Yardımcı unsur ekleme (inşa etme veya çizim yapma). Polya (1957) problem çözme alanındaki öncü kitabında “çalışmamız ilerledikçe, başlangıçta var olanlara yeni unsurlar ekleriz.” (s. 46) ifadesine yer vermiştir. Bu yaklaşıma paralel şekilde Kilpatrick (1987) problem kurmanın, problemin tekrarlı biçimlendirilmesi olarak problem çözme sürecinde yer aldığına değinmiştir. Dolayısıyla problem çözme sürecinde atılan her adım mevcut problemin yeni bir versiyonu olarak kabul edilebilecektir. Böylece mevcut duruma bir veya birden fazla yardımcı unsur eklemek keyfi bir prosedür olarak görülemeyecektir (Palatnik & Sigler, 2018). Nitekim, Polya (1957) geometrik bir problemi çözerken eklenen yardımcı doğruya (parçası) işaret etmiş ve onu “çözümü ilerletme umuduyla eklediğimiz bir elemana yardımcı unsur (*auxiliary element*) denir” (s. 46) şeklinde tanımlamıştır. Araştırmacı, probleme yardımcı eleman ekleme nedenlerini üç sınıfa ayırmıştır.

Birincisi örneğin, bilindik bir problem ile ilişkilendirme problem çözme sürecinde faydalı bir yaklaşımdır. Bu doğrultuda Polya (1957) da çözüm bekleyen problemin üçgen ile ilgili geometrik bir problem olduğunu varsayarak, problemde üçgen bulunmasa da çözümde kullanmak için mevcut şekle üçgen ilave edilebileceğine değinmiş ve onu bilinen sonuçları kullanmaya çalışmak (trying to use known results) olarak nitelendirmiştir. Örneğin, bilinen bir sonuç olarak; paralelkenarın köşegeni onu eşit alan ölçüsüne sahip iki üçgene bölmektedir (Şekil 11, [a]). Buna göre EG, AB’ye paralel olarak eklenmekte ve ABCD dörtgeni, köşegeni alanını eş bölen iki paralelkenara dönüşmektedir (Şekil 11, [a]). Polya (1957) eklemeye ilişkin sınıflamasında tanımlara işaret etmiş ve problem çözme sürecinde tanımları dile getirmenin —bir daireye işaret edildiğinde yalnızca merkezi ve yarıçapının varlığını dile getirme— yeterli olmadığını ve tanımları yansıtan geometrik yapının (örn., daire) mevcut şekle ilave edilebileceğini belirtmiştir. Bu durum Polya (1957)

tarafından tanımlara geri dönmek (going back to definitions) şeklinde açıklanmıştır. Örneğin süreçte paralelkenarın veya üçgenin alan formülü hatırlanabilmekte ve yalnızca formülü hatırlamak her zaman işlevsel olmamaktadır. Buna göre tanımlara geri dönmek mevcut şekle, paralelkenarın ve üçgenin ortak yüksekliğinin (EF) eklenmesine (Şekil 11, [b]) karşılık gelmektedir. Son olarak Polya (1957) “orijinal problemi, daha eksiksiz daha düşündürücü daha tanıdık hale getirmek için de yardımcı unsur ekleyebiliriz.” (s. 47) ifadesine yer vererek, probleme ilişkin *parlak bir fikre* sahip olmanın mümkün olduğuna değinmiştir. Buradaki önemli ayrıntı mevcut şekle yapılan eklemenin nasıl kullanılacağı hakkında açık bir fikrin bulunmamasıdır (Palatnik & Dreyfurs, 2018). Eklemeye ilişkin son bileşeni açıklayan bir örnek olarak da E noktasının ABCD paralelkenarının alanının yarısı olacak şekilde yeni üçgenlerin oluşturulması amacıyla taşınması gösterilebilecektir (Şekil 11, [c]).



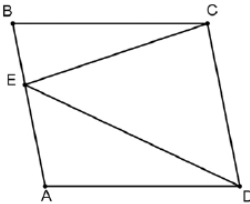
Şekil 11. Eklemeye ilişkin sınıflamayı örneklendiren şekiller (Palatnik & Sigler, 2018, s. 3)

Polya'nın (1957) sınıflaması, problemin orijinal durumuna yapılan eklemelerin (yardımcı unsur) birbirinden farklı amaçlar taşıdığına işaret etmekte ve bu anlayış DGO'da problem kurma sürecinde de geçerli olma potansiyeli taşıyabilmektedir. Çünkü bazı çalışmalarda (örn., Leikin & Elgrabli, 2015; Singer vd., 2017) mevcut şekle yapılan eklemeler, öğretmen adaylarının yaratıcılık bağlamında bilişsel stilini (Singer vd., 2017) açığa çıkarma ve sürecin nihayetinde ortaya konulan ürünün yaratıcılığını (örn., Leikin & Elgrabli, 2015) değerlendirme amaçlarıyla ele alınabilmektedir. Örneğin Singer vd. (2017) matematik öğretmeni adaylarının matematiksel yaratıcılığını problem kurma aracılığı ile analiz ederek, bilişsel stil ve (orijinal probleme yapılan eklemeler vasıtasıyla) kurulan problemler arasında belirlenen kriterlere göre matematiksel yaratıcılığı değerlendirmek için bir araç (GPP, s. 23) geliştirmiştir. Diğer yandan Leikin ve Elgrabli (2015) ise mevcut şekle yapılan

eklemeler için analiz çerçevesi sunmuş ve problemin karmaşıklığını yapılan eklemenin yerine ve sayısına göre değerlendirmiştir. Örneğin orijinal problemin dışına yapılan eklemeler içerisinde yapılan eklemelere nazaran daha karmaşık bağlantıların kurulduğuna işaret etmektedir. Ancak problem kurma ve sürecine dair yürütülen çalışmalarda mevcut şekle eklenen yardımcı unsurların genel anlamda tanımı, nedeni ve kapsamına odaklanılmamıştır.

DGO’da yürütülen ve mevcut şekle yapılan eklemenin analizlerine odaklı çalışmaların dışında statik çalışma ortamında yürütülen ve eklemenin bilişsel analizlerine yoğunlaşan araştırmalar da bulunmaktadır. Örneğin, Polya’nın (1957) eklemeye ilişkin sınıflamasını öğrenenlerin söz gelimi problem çözme veya kanıtlama sürecinde analiz birimi kabul eden araştırmalar (Palatnik & Dreyfurs, 2018; Palatnik & Sigler, 2018) oldukça yeni, başlangıç düzeyinde ve sınırlı sayıdadır. Buna göre DGO’da problem kurma süreçlerinin aydınlatılmasına farklı bir perspektiften ışık tutan Palatnik ve Dreyfurs (2018), lise öğrencisi ve çift halinde çalışan beş grubun kanıtlama sürecinde yardımcı elemanları ekleme nedenlerine odaklanmıştır. Araştırmacılar, konuya dair yürütülen çalışmalarda sıklıkla yer verilen; üçgenlerin ve/veya paralelkenarların alanlarının karşılaştırılması esasına dayalı ve biri görece daha kolay ve diğeri daha zor olan iki etkinlik (Tablo 4) üzerinden geniş yelpazede sunulan nedenleri temelde iki başlıkta karakterize etmiştir (Tablo 5).

Tablo 4. Yardımcı unsur ekleme nedenlerinin belirlenmesine kaynaklık eden etkinlikler (Palatnik & Dreyfurs, 2018)

<i>Etkinlikler</i>		
Etkinlik 1		ABCD dörtgeni bir paralelkenardır. DEC üçgeninin alanının ABCD paralelkenarının alanının yarısı olması için AB kenarı üzerinde E noktasının yeri nerede olmalıdır? Akıl yürütmenizi açıklayınız. (s. 205)
Etkinlik 2	Verilen bir dörtgenin kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden dörtgenin bir paralelkenar olduğunu ve bu dörtgenin alanının verilen dörtgenin alanının yarısı olduğunu ispatlayınız. (s. 206)	

Problem kurma; problem çözmenin öncesinde, sırası ve sonrasında görülen bir faaliyet olduğundan (Silver, 1994) problem çözme, varsayım oluşturma veya kanıtlama problemi kapsamında ortaya konulan eklemeye ilişkin sınıflama, DGO’da

problem kurma süreçlerinin analizlerinde de kullanılabilir. Bunun yanı sıra araştırmacılar (Palatnik & Dreyfurs, 2018; Palatnik & Sigler, 2018) statik çalışma ortamında eklemeye ilişkin öne sürdükleri sınıflamanın, DGO'nun inşa ve çizim yapmayı kolaylaştırma olanaklarından ötürü (örn., Laborde, 1993; Lopez-Real & Leung, 2006) DGO'da da kullanılabilmesine değinmiş ve benzeri çalışmaların DGO'da yürütülmesini önermiştir. Aşağıda sınıflamanın bileşenleri Tablo 5 gözetilerek, etkinlikler üzerinden açıklanmıştır.

Tablo 5. Yardımcı unsur ekleme nedenlerine ilişkin sınıflama (Palatnik & Dreyfurs, 2018)

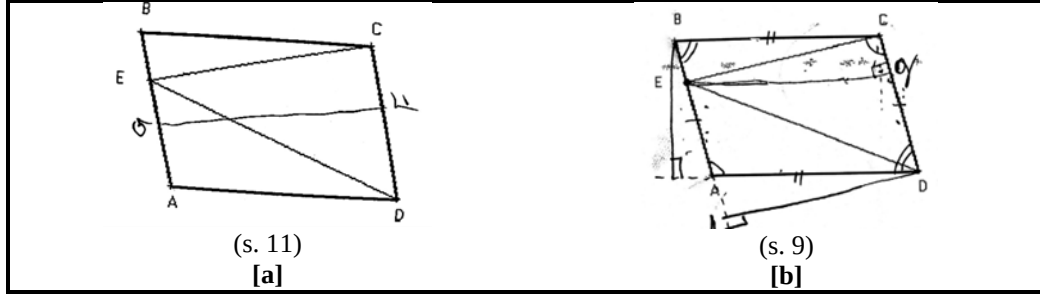
Yardımcı eleman ekleme	Açıklama
Hatırlama	Ekleme, öğrenilmiş prosedürleri uygulama bakımından bazı bilinen sonuç veya tanımları kullanma amacıyla yapılmaktadır.
Tahmin etme	Ekleme, yardımcı unsurun tam olarak nasıl kullanılacağına dair fikir bulunmadan yapılmaktadır.
<i>Sezgisel kurallar ile</i>	Ekleme, mevcut şekle ait örneğin “eşit kenar, eşit alan” akıl yürütmesi ile sorgulamaya ihtiyaç duyulmaksızın yapılmaktadır.
<i>Yeni bilgi üretme</i>	Ekleme, orijinal şekle ait üretilen fikirlerin tükenmesinin ardından yapılmaktadır. Buna göre ekleme; Belirsiz bir fikri görselleştirme/somutlaştırmak, Şeklin belirli özelliklerini daha belirgin kılmak, Gözlenen bir değişkenin ek durumları üretmek gibi amaçlarla uygulanabilmektedir. (s. 13)

Hatırlama, öğrenilmiş prosedürleri uygulama bakımından bazı bilinen sonuç veya tanımları kullanma amacıyla ekleme yapmaya karşılık gelmektedir. Bu kategori, Polya'nın (1957) sınıflamasındaki ilk iki başlığa denk düşmekte ve ekleme “Problem üçgenin alanı ile ilgilidir. Öyleyse bir yükseklik eklemek gereklidir.” şeklinde bir ifade ile örneklendirilebilecektir. Buna göre hatırlama, ekleme amacının bilindik bir problem veya çözüm yapısı ile ilişkilendirilmesine işaret etmektedir.

Tahmin etme ise Polya'nın (1957) sınıflamasında son kategoriye denk düşüp, mevcut durumdan daha fazla bilgi edinme amacıyla ekleme yapmaya karşılık gelmektedir (Tablo 5). Palatnik ve Dreyfurs (2018) mevcut şekilde var olan ögenin değiştirilmesini de yardımcı eleman olarak kabul ederek, Polya'nın (1957) yardımcı eleman tanımını genişletmiştir. Araştırmacılar etkinlik diyagramlarının çeşitli bölümleri arasındaki ilişkileri anlamının çok önemli olduğunun ve yardımcı elemanın (örn., d. parçası, paralel veya dik doğru) bu ilişkilerin algılanmasını desteklediğinin altını çizmiştir. Çünkü yardımcı eleman, orijinal şeklin daha önce ilgisiz bileşenlerini

birleştirebilmekte veya karmaşık bir şekli daha basit bileşenlerine bölebilmektedir (Palatnik & Dreyfurs, 2018; Palatnik & Sigler, 2018).

Araştırmacılar, iki etkinlik üzerinden beş grubun yardımcı eleman ekleme yaklaşımlarını sınıflamış ve grupların toplamda eklediği 26 yardımcı elemandan (örn., üçgen ve paralelkenarın yükseklikleri, paralelkenarın köşegenleri, üçgenin orta tabanı ve kenarortaylar) 14'ü bilinen formül, tanım veya prosedürlere atıfta bulunurken, 12'si mevcut durumdan daha fazla bilgi edinmek amacıyla yapılan eklemeye karşılık gelmektedir. Araştırmacılar bilinen formül, tanım veya prosedürlerin dışında yapılan 12 eklemenin 6'sını Stavy ve Tirosh'a (2000) atıfta sezgisel akıl yürütmeye "aynı A, aynı B (same A, same B)" (s. 53) ve diğerlerini ise mevcut şekle ilişkin bilginin tükendiği hissinden sonra yeni bilgi kaynağı oluşturma amacıyla yapılan eklemeye dayalı olarak tasnif etmiştir. Örneğin, Şekil 12, [a]'da GF doğru parçası $\triangle CED$ alanı ile $\triangle CBE$ ve $\triangle DEA$ alanlarını karşılaştırmak amacıyla eklenmekte ve GF doğru parçasının üçgenin alan formülüne atıfta $\triangle CED$ 'nin yüksekliği olduğu düşünülmektedir. Buna göre yüksekliğin (dik doğru parçasının) sebepsizce üçgenin ortasından geçmesi gerektiği düşünülmektedir. Buna benzer yapılan eklemeler sezgisel kurallar ile (Tablo 5) yapılmaktadır. Tahmin etmenin diğer bir yönü de mevcut şekle ait içeriğin tüketildiği hissine karşılık yeni bilgi üretme amacıyla ekleme yapılmasıdır. Örneğin, Şekil 12 [b]'de $\triangle CED$ alanının ABCD dörtgeninin alanının yarısı olduğu düşünülerek, paralelkenar ve üçgenin alanını hesaplayabilmek için orijinal şekle iki yükseklik (B köşesinden indirilen ve çözüme yol açmayan ve diğeri D köşesinden indirilen ve çözüme yol açan) eklenmiştir. Alan formülüne atıfta yükseklik oluşturmak için doğru parçalarının eklenmesi gerektiği bilinmekte ancak yüksekliklerin nasıl kullanılacağı veya hangisinin çözümü doğru kılacağı hakkında spesifik net bilgi sahibi olunamamaktadır. Böylece orijinal duruma yapılan eklemelerin çoğunluğu matematiksel problem çözme deneyimini yansıtır şekilde sürece dâhil olabilmektedir.



Şekil 12. Tahmin etme örnek durumları (Palatnik & Dreyfurs, 2018)

Geometrik kanıt problemlerinde yardımcı eleman ekleme nedenlerini karakterize eden ve böylece geometride kanıtlamaya yönelik araştırma alanını dinamize etmeyi amaçlayan Palatnik ve Dreyfurs (2018), iki etkinlik boyunca hatırlama niteliğindeki nedenler için gruplarda *yükseklik* tanımının öne çıktığını tespit etmiştir. Çünkü etkinlikler bir şekilde üçgenlerin ve/veya paralelkenarların alanları ile ilişkili olduğundan katılımcılar, alan hesabına dair öğrenilmiş algoritmanın (örn., üçgenin alan formülü olarak $\frac{\text{Kenar} \times \text{Kenara ait yükseklik}}{2}$) bir parçası olarak direkt yükseklik çizme eğilimi göstermiştir. Bu noktada araştırmacı meslektaşlar; katılımcıların alan veya etkinliklere ilişkin diğer formülleri her zaman doğru hatırlayamadığını not düşerek, yardımcı eleman eklemenin ardındaki zihinsel nedenlerin tespitinin karmaşık bir bağlam olduğunun da altını çizmiştir. Bu yönüyle katılımcıların eklemeye ilişkin nedenlerinin belirlenmesi karmaşık bir bağlam içermektedir.

Dinamik Geometri Ortamının Genel Özelliklerini Yansıtan Diğer Bileşenleri.

Bu başlık altında DGO'nun sürüklenme, ölçme ve yardımcı unsur ekleme işlevleri dışında kalanlardan birkaçı örneklendirilmiş ve diğer bileşen kapsamında ele alınmıştır. Diğer bileşenlere örnek olarak; dizi komutu, nokta etrafında döndürme, (vektörle) öteleme, yeni araç ekleme, izi aç (örn., Arzarello vd., 2002), simetri, gizle/göster (Leung, 2008) ve noktayı nesneye bağlama (Hölz, 1996) gösterilebilecektir. Bu bileşenlerin literatürde yer alan herhangi bir sınıflamasına denk gelinmemiştir. Buna karşın Sinclair ve Robutti (2013) problem çözme süreçlerindeki rollerine istinaden (Örn., sürüklenme esnasında izin açılması değişmez ilişkilerin fark edilmesine katkı sunabilmektedir.) sürüklenme ve ölçme türleri dışında kalan diğer bileşenlerin de araştırma alanının kapsamına girebileceğine değinmiştir. Bu kapsamda örneğin metin kutusu veya sürgü oluşturmanın daha çok öğretim hedefli (örn., Segal, 2024) ve hesap tablosunun ise modelleme ağırlıklı (örn., Greefrath & Siller, 2018)

çalışmalarda yer aldığı fark edilmiştir. Örneğin Abramovich ve Cho (2012), teknoloji destekli problem kurma sürecinde e-tablo'nun kullanıcılarına keşfetme dolayısıyla motive olma fırsatı sunduğunu ve bu motivasyonun da problem formüle etmeyi/yeni problem kurmayı tetiklediğini örnek bir durumla açıklamıştır. Araştırmacılar iki sütunlu e-tablo'nun sağ ve sol sütunlarındaki sayılar arasında bir ilişki aramayı ve bu sayı çiftlerine yönelik yeni tahminlerde bulunmayı gerektiren bir etkinlik tasarlamıştır. Örneğin sol sütunda sayma sayılar, sağ sütunda ise bu sayıların kısmi toplamalarının olduğu varsayılmaktadır. Bu sayı dizileri arasındaki ilişkiyi keşfetmek, kullanıcıları daha başka aritmetik dizilerin toplamının keşfi için motive edebilmekte ve hatta kareler toplamı ve daha fazlasına da teşvik edebilmektedir. Bu durumda kullanıcı, e-tablo'nun sunduğu imkânlar neticesinde sayı setlerinde değişiklik yapma, yeni sütun ve yeni veri seti ekleme olanağına da sahiptir (Abramovich & Cho, 2012). Bu kapsamda diğer bileşenler, problem kurma sürecinde çeşitli problemlerin kurulması veya problem kurma durumu hakkındaki varsayımların genişletilmesi için aracı olabilme potansiyeline sahip olup, bu tez kapsamındaki verilerin analizlerinde analiz birimi olarak ele alınmıştır.

1.6.4. Dinamik Geometri Ortamında Problem Kurmaya Yönelik Literatür İncelemesi

Bir araştırma alanı olarak problem kurma süreci ya tüm sürecin ya da süreç sonunda ortaya çıkan ürünlerin incelenmesi aracılığıyla çalışılmıştır (Baumanns & Rott, 2022b; Cai & Rott, 2024). Buna karşılık geometri alanında problem kurmaya yönelik çok çeşitli araştırmalar bulunmaktadır. Bunların bazıları problem kurma düşünme süreçlerine (örn., Kovacs, 2017; Leikin, 2014) diğerleri ise kurulan problemlerin tür ve dönüşümlerine (örn., Leikin, 2004, 2015; Leikin & Grossmann, 2013; Segal vd., 2024) veya süreçteki araştırma ve keşif stratejilerine (örn., Leikin & Elgrabli, 2015; Leikin & Elgrably, 2022; Segal vd., 2018) yönelik yürütülmüştür. Buna karşın yapılan literatür incelemesine göre DGO'nun sürüklemeye, ölçme ve yardımcı unsur ekleme gibi işlevlerinin problem kurma süreçlerinde nasıl yer aldığına doğrudan odaklanan bir araştırmaya denk gelinmemiştir. Bunun yerine problem kurma etkinlikleri ile katılımcıların söz gelimi yaratıcılık ve problem çözme süreçleri arasındaki ilişki (örn., Elgrably & Leikin, 2021) veya problem çözme ve problem

kurma yeterliklerinin gelişimi (örn., Leikin & Elgrably, 2020) çalışmaların odağında yer almıştır. Bu tez çalışmasında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının DGO'da problem kurma süreçlerini incelemek amaçlandığından; katılımcıların DGO'da problem kurma süreçleri, problem kurmaya yönelik araştırmaların yanında problem kurma bağlamında olmayan ve DGO'da yürütülen çeşitli araştırmaların (örn., Christou vd., 2004; Kuzle, 2017; Rott vd., 2021; Santos-Trigo vd., 2016) merceğinden aydınlatılabilecektir.

Bu kapsamda bu başlık altında katılımcıların DGO'da problem kurma süreçleri DGO'da yer alan çeşitli araştırmalar ışığında incelenmiş ve araştırmalara ait bulgular tartışılmıştır. Buna göre aşağıda, DGO'da problem kurma düşünme süreçlerinin incelenmesine yönelik kuramsal alt yapıyı şekillendiren araştırmalara yer verilmiştir.

Bilgisayar tabanlı teknolojilerin keşif ve deney yapmayı kolaylaştırma esnekliği, problem kurma ile ilgili görünmekte (Cai vd., 2015; Lavy, 2015) ve DGO, problem kurma ve problem çözmeye katkı sağlamaktadır (Christou vd., 2005a). Diğer taraftan DGO, sürüklenme ve ölçme işlevleri ile kullanıcısının bilgisini düzenlenmesine ve hatalarını gözden geçirmesine rehber niteliğinde görsel geri bildirimler sunmaktadır (Healy & Hoyles, 2002). Bu geri bildirimler aracılığıyla problem kurma sürecinde, kurulacak problemlerin matematiksel yapısında düzenlemeler yapmak mümkündür. Dolayısıyla DGO, kurulacak problemlerin veya ortaya atılan varsayımların matematiksel geçerliğini değerlendirmeye katkı sağlama potansiyeline sahiptir. Çünkü DGO'nun sürüklenme işlevi birçok diyagramı test etme imkânı sunmakta (Jones, 2001) ve özellikle sürüklemeyi sürdürme (*amaçlı sürüklenme*) şeklin özelliklerinin hangi koşullar altında korunduğunu gözlemlemeye izin vermektedir (Antonini & Baccaglini-Frank, 2016). Dolayısıyla geometrik bir şekil ve ailesine ait özellikler, DGO'nun sürüklenme ve ölçme işlevleri ile keşfedilebileceği gibi bu özelliklerin arasındaki ilişkiler de doğrulanabilecektir (Santos-Trigo & Moreno-Armella, 2016). DGO'da ortaya çıkan her keşif ve doğrulama bir probleme dönüştürülme potansiyeli taşımaktadır (Leikin & Elgrably, 2022). Bu olanakların gölgesinde DGO'nun sürüklenme ve ölçme işlevleri aracılığıyla yeni problemlerin kurulması ve kurulan problemlerin geçerliğinin doğrulanması mümkün olabilecektir. Çünkü DGO; dinamik yapı ve konfigürasyonlarını oluşturma ve ölçme, sürüklenme ve hesaplama işlevleri ile

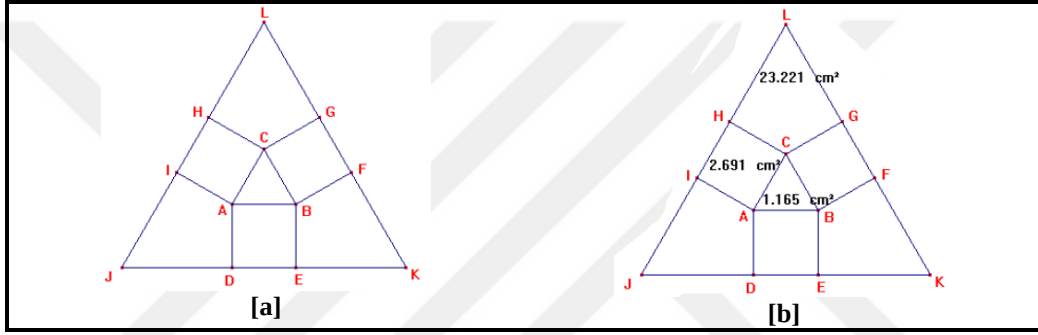
teoremlerin keşfedilmesine ve kanıtlanmasına katkı sunmaktadır (örn., Contreras, 2015; Healy & Hoyles, 2002).

Buna karşılık Öklid geometrisinde doğrulama tümdengelsel kanıta dayalı iken DGO'da sürüklenme aracılığı ile tümevarımsal doğrulama söz konusudur (Lopez-Real & Leung, 2006). DGO'nun bu işlevlerinin tümevarımsal kanıta yönelmeyi destekleyeceği ve tümdengelsel kanıta olan ihtiyacı azaltacağı yönünde literatürde endişeler bulunmasına (örn., Baccaglini-Frank, 2010b; Jones, 2000) rağmen son yıllarda yapılan çalışmalar DGO'nun, varsayım üretme ve argümantasyon süreçlerini desteklediğini öne sürmektedir (örn., Baccaglini-Frank, 2019). DGO'nun bir diyagramın çeşitli varyasyonlarını oluşturma olanağı, mevcut problem durumunun incelenmesi bakımından DGO'da problem kurma sürecinde de görülme potansiyeline sahiptir. Bu incelemeler doğrultusunda, kurulan problemlerin matematiksel geçerliği kontrol edilebileceği gibi yeni problemlerin kurulmasını aktive eden matematiksel keşifler de ortaya çıkabilecektir. Yukarıda DGO'nun problem kurmaya olası katkıları geniş kapsamda ele alınmış ve bundan sonraki kısımda DGO'da problem kurma süreçlerinin incelenmesine kuramsal temel oluşturan çalışmalar sunulmuştur.

Mogetta ve arkadaşları (1999b) dinamik yazılımın kanıtlama sürecini destekleme potansiyelini, DGO'da kapalı uçlu ispat problemini açık-uçlu probleme dönüştürme etkinliği ile ortaya koymuştur. DGO'da bir problemin üstesinden gelmenin ilk adımı, problem durumunu yazılımın menü çubuğundaki araçları yardımıyla inşa edebilmektir (Mogetta vd., 1999b). İnşa süreci mevcut problem bağlamından farklı keşiflere imkân tanıyabildiği gibi problem çözümü için olası stratejilere yön verme potansiyeli de taşımaktadır (Mogetta vd., 1999b). İnşa sürecinin sonunda şeklin özelliklerini sürükleyerek araştırmak, şekle ait değişmez özelliklerinin ve bu özelliklerin arasındaki ilişkilerin keşfedilmesine katkı sağlamaktadır. Dahası deneysel ve teorik geometri bilgisi arasında geçişken bir akıl yürütmeyi içermekte ve böylece varsayımlar üretilebilmektedir (Mogetta vd., 1999b). Araştırmacılar çalışmalarında sürüklenme, ölçme ve yardımcı unsur ekleme (inşa etme/çizim yapma) gibi eylemleri detaylandırmamış olsa da örneğin şeklin özelliklerini sürükleyerek araştırmak rastgele sürüklenme yapıldığına işaret etmekte ve sürecin başında problem durumunun inşa edilmesi ise yardımcı unsur eklemesinin yapıldığına dayanak sağlamaktadır. Buna göre problem durumunun incelenmesi bağlamında problem

kurma sürecinin başında DGO'nun *rastgele sürüklenme* ve *ekleme* işlevlerinin görülme potansiyeli bulunmaktadır.

Martínez-Cruz ve arkadaşları (2001) da teknolojinin problem kurmada potansiyel rolüne vurgu yaparak, hedefi problem bağlamından uzaklaştırmanın (açık-uçlu) öğrencilerin ilginç problem kurması ve heyecan verici keşifler yapmasına katkı sağladığını belirtmiştir. Araştırmacılar teknolojinin matematiksel keşfi ve tahmin yürütmeyi geliştirmek için aracı olabileceğini örneklendirmiştir. Katılımcılara geometrik bir içerik sunulmuş (Şekil 13, [a]) ve onlardan mevcut geometrik içerikten mümkün olduğu kadar çok ilişki bulması istenmiştir.



Şekil 13. Martínez-Cruz vd. (2001) kullanılan geometrik içerik

Katılımcılar öncelikle yazılımın alan ölçme özelliği ile çokgensel bölgelerin alanlarını ölçmüş (Şekil 13, [b]) ve bu bölgelerin alanları arasında bir oran olup, olmayacağı yönünde tahminde bulunmuştur. Bu aşamada yazılımın hesaplama özelliği (hesap tablosu) aracılığıyla alanlar oranı hesaplanmış ve şekil herhangi bir noktasından sürüklenmiştir. Bir sonuç elde etme niyetiyle *amaçlı sürüklemenin* işe koşulması ile alanlar oranının değişmediği keşfedilmiş ve bu keşif, alanlar oranının sabit değerinin olabileceği şeklinde yeni bir varsayımın oluşturulmasına hizmet etmiştir. Dolayısıyla alan ölçümlerinin yapılması *amaçlı ölçmeye* ve ardından alanlar oranının hesap tablosu aracılığıyla bulunması da *diğer* bileşenlerin kullanıldığına işaret etmektedir. Böylece DGO'da problem kurma sürecinin başında *amaçlı ölçüm*, *diğer bileşen* ve *amaçlı sürüklemenin* görülme potansiyeli bulunmaktadır. Varsayımın doğrulanması amacıyla yazılımın yardımcı yapı ekleme işlevi ile [AJ] oluşturulmakta ve ardından Pisagor teoreminin yanında trigonometrik hesaplamalarla alanlar oranının sabit değerlerine ulaşılmaktadır. Bu yaklaşım şeklin herhangi bir bölgesine yardımcı yapı ilavesi —

örneğin $|EF|$ oluşturulması— ile yeni problemlerin kurulmasına kaynaklık edebilecektir. Dolayısıyla mevcut şeklin —problem kurma durumunun— araştırma ve keşif yoluyla incelenmesi neticesinde yeni problemlerin kurulmasına kaynaklık edebilecek olan varsayımlar oluşturulmaktadır. Bu çalışma bağlamında problem kurma durumunun incelenmesine dolayısıyla varsayımların oluşturulmasına ve doğrulanmasına DGO’nun *amaçlı ölçüm, amaçlı sürüklenme, yardımcı unsur ekleme ve işlevlerinin ve diğer bileşenin (hesap tablosu)* destek sağlayabileceği anlaşılmaktadır.

Leikin (2004) ise matematik öğretmenlerinden ders kitabındaki bir ispat problemini seçme ve bu problemi DGO’da sorgulamaya dayalı araştırma problemine dönüştürmesini istemiştir. Çalışmanın odağında ortaya çıkan geometrik kalitedeki değişimin analizi yer almıştır. Araştırmacı, öğretmenlerin seçilen ispat problemini DGO’da yeniden formüle etme süreçlerinde ilk etapta serbest çizim yaptığını ve inşa etme veya çizim yapmayı şekle ait çok sayıda ölçümlerin yapılmasının takip ettiğini belirtmiştir. Bunun ardından öğretmenler oluşturdukları şekli sürükleyerek, şeklin değişmez ilişkilerini gözlemlemiş ve bu gözlemlerini varsayımlara dönüştürmüştür. Buna göre DGO’da *yardımcı unsur ekleme (inşa etme/çizim yapma), ölçme ve sürüklemenin* problem kurma gibi sorgulamaya dayalı etkinliklerde problem kurma durumunun incelenmesinin ayrılmaz parçası olduğu anlaşılmaktadır (Leikin, 2004).

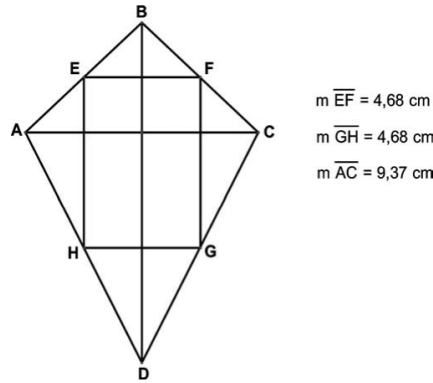
Christou vd. (2004) DGO’nun (Geometer’s Sketchpad) öğrencilerin varsayım oluşturma ve varsayımlarını doğrulamak için matematiksel argümanlar aramasına yardımcı olup, olmadığını incelemek amacıyla üç ilkökul matematik öğretmeni adayının DGO’da ispat problemine yanıt arama sürecini incelemiştir. Bu incelemede öğretmen adayları “Bir deltoid oluşturunuz ve bu deltoidin bitişik kenarlarının orta noktalarını bir dörtgen oluşturacak şekilde birleştiriniz. Bu dörtgen ile ilgili ne gözlemliyorsunuz? Varsayımınızı yazınız. Varsayımınızın niçin doğru olduğunu açıklayabilir misiniz? Deltoidinizi iç bükey deltoide dönüştürürseniz varsayımınız hala geçerli olur mu?” açık-uçlu problemi üzerinde çalışmıştır. Araştırmacılar veri analiz sürecini üç aşamada düzenlemiştir: (i) ispat öncesi aşama, (ii) ispat aşaması ve (iii) ispatı benzer problemlere genişletmenin entelektüel zorluk aşaması.

İspat öncesi aşamada; öğrenciler, öncelikle DGO’nun görselleştirme olanağı ve uygun araçlarını (örn., doğru, doğru parçası ekleme) kullanarak yapıyı oluşturmuştur. Bu durum *yardımcı unsur ekleme (inşa etme/çizim yapma)* işlevine

işaret etmekte ve problem kurma sürecinin başında problem durumunun incelenmesi kapsamında ele alınabilecektir. Bunun ardından yazılımın sürüklemeye olanağı geometrik yapıyı farklı formlara dönüştürmeye ve öğrencilerin problemin çözümüne yönelik varsayımlar üretmesine katkı sağlamıştır. Bu noktada her ne kadar çalışmada detay sunulmamış olsa da mevcut şeklin *rastgele* veya bir varsayım elde etme niyetiyle *amaçlı sürükleme* ile incelendiği anlaşılmaktadır. Örneğin öğrenciler, deltoidin bitişik orta noktalarının birleştirilmesi ile oluşacak dörtgenin bir dikdörtgen olabileceğini tahmin etmiştir. Buna göre katılımcılar, mevcut şekli bir sonuç elde etme amacıyla sürüklemiş ve tahminde bulunmuştur. Bu tahminlerini deltoidin köşelerini sürükleyerek doğrulamıştır. Tahmini doğrulama amacıyla yapılan sürüklemeye ise *sürükleme testinin* varlığına işaret etmektedir. Aynı zamanda bitişik orta noktaların birleştirilmesi ile oluşturulan dörtgenin dikdörtgen olduğu, yazılımın açı ve uzunluk ölçme olanakları sayesinde yalnızca görsel olarak değil sayısal olarak da doğrulanmıştır. Böylece sürüklemeye ve ölçmenin birbirini destekler şekilde kullanımı mevcut şekle (problem durumu) ait varsayımların veya güçlü tahminlerin oluşturulmasına ve doğrulanmasına katkı sağlamıştır. Ek olarak öğrenciler karşı kenarların birbirine paralel olduğunu yazılımın eğim ölçümü özelliğini kullanarak, doğrulamıştır. İspat öncesi aşamada varsayımların oluşturulabilmesi için problemi anlamak önem arz etmektedir (Christou vd., 2004). Buna göre DGO'nun *yardımcı unsur ekleme*, *rastgele* veya *amaçlı sürükleme* işlevleri problem durumunun incelenmesi suretiyle anlaşılmasına ve *sürükleme testi* ile *doğrulama ölçümü* de problem durumuna dair varsayımların doğrulanmasına katkı sağlayabilecektir.

İspat aşamasında; ekranda görsel ve sayısal açıdan doğrulanan durumun neden doğru olduğuna karşı matematiksel argümanlar üretilmektedir (Christou vd., 2004). Bu aşamada ölçme ve sürüklemeye eylemleri sergilenmiştir. Aşağıda EF'nin HG'ye paralel ve eşit uzunlukta olduğu aynı şekilde EH'nin de FG'ye paralel ve eşit uzunlukta dolayısıyla EFGH dörtgeninin bir paralelkenar olduğu ölçme aracı ile doğrulanmıştır (Şekil 15). Bunun ardından EFGH paralelkenarının en az bir iç açı ölçüsünün 90° olup, olmadığı yine yazılımın ölçme aracı yardımı ile incelenmiştir. Paralelkenarın en az bir iç açı ölçüsünün 90° olduğu doğrulandıktan sonra sürüklemeye aracı ile bu durumun her zaman (ör. iç bükey) sağlanıp, sağlanmadığı kontrol edilmiştir. Buna göre DGO, problem kurma sürecinde problem kurma durumunun incelenmesi neticesinde ortaya

konulan varsayımların doğruluğunu kontrol etmek için kullanılabilecektir. Bu aşamada ekranda görsel ve sayısal açıdan gözlenen durum (varsayım) *doğrulama ölçümüne* işaret eden ölçme işlevi ile doğrulanmış ve EFGH dörtgeninin bir paralelkenar olduğu belirlenmiştir. Ek olarak bir iç açısının 90° olup olmadığı *algısal ölçüm*e işaret eden biçimde incelenmiştir. Çünkü EFGH dörtgeninin sezgisel olarak dikdörtgen olduğu düşünülmüş ve dikdörtgen olup, olmadığı ölçme işlevi ile değerlendirilmiştir. Buna göre problem kurmak için başlangıç noktası sayılabilecek olan varsayımların değerlendirilmesinde *algısal ölçüm* de gözlenebilmektedir. Son olarak EFGH paralelkenarının her zaman bir dikdörtgen oluşturup, oluşturmadığı *sürüklemeye testi* ile kontrol edilmiştir. Buna göre *doğrulama ve algısal ölçüm ile sürüklemeye testinin* problem kurmak için öne sürülen varsayımların geçerliğini/doğruluğunu kontrol etmek için kullanılabileceği anlaşılmaktadır.



Şekil 14. Christou vd. (2004) çalışmasında yer alan geometrik içerik

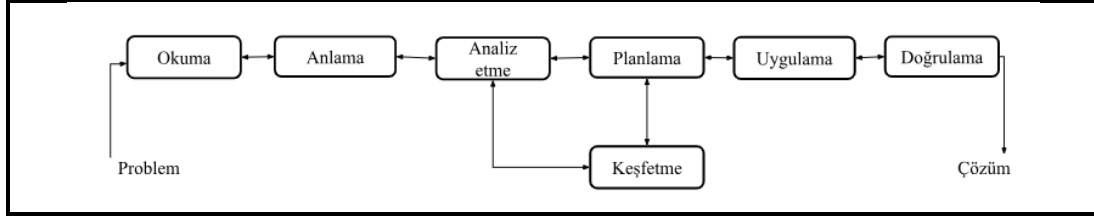
İspatı benzer problemlere genişletmenin entelektüel zorluk aşaması; araştırmacılar bu aşamayı iki problem kategorisinde tartışmıştır: (i) deltoid problemine benzer bağlamı olan problemler ve (ii) deltoid problemi ile aynı akıl yürütmeyi gerektiren problemler. Birinci kategorideki problemler öğrencilerin deltoid özelinde ulaştıkları sonuçları diğer dörtgenlere de genelleyebilmesine yardımcı olma amacı taşımaktadır. Bu aşamada öğrenciler herhangi bir dörtgenin kenarlarının orta noktalarını birleştiren (çakışmayacak şekilde) dörtgenin her zaman paralelkenar olduğu sonucuna ulaşmıştır. İkinci kategoride ise aynı akıl yürütmeyi farklı problemler üzerinde yürütebilmesi için öğrencilere “Bir paralelkenarın iç açıortayları hangi şekli oluşturur?” sorusu yöneltilmiştir. Bu alışıldık probleme karşı da öğrencilerin önceki

problemde yürüttükleri doğrulama ve ispat prosedürlerini uygulaması hedeflenmiştir. Örneğin öğrenciler dinamik yapıdaki paralelkenarın iç açıortaylarının oluşturduğu şeklin bir dikdörtgen olduğunu ve aynı zamanda bu paralelkenarın, yazılımın sürüklenme özelliği aracılığıyla eşkenar dörtgene dönüştüğünde iç açıortaylarının bir nokta belirttiğini gözlemlemiştir. Bu durumların her biri oluşturulabilecek problemlere işaret etmektedir. Şöyle ki, birinci problem kategorisi mevcut problem kurma durumunun genişletilmesi ve genellemeye yol açan problemlerin kurulmasına aracılık edebilecektir. Bu noktada sürüklenme işlevlerinden özellikle *sürüklenme testinin* öne çıktığı anlaşılmaktadır. İkinci problem kategorisi ise problem durumundaki verinin değiştirilmesi suretiyle benzer problemlerin kurulmasına işaret etmektedir. Bu noktada da yine sürüklenme işlevinin yanında *yardımcı unsur eklemenin* (inşa etme/çizim yapma) de yer alabileceği anlaşılmaktadır. Netice olarak, DGO sağladığı olanaklarla problemlerin çeşitlendirilmesi ve zengin bir problem koleksiyonu kurulmasına destek sağlayabilecektir.

Christou vd. (2005a) DGO'nun problem çözme ve problem kurma süreçlerini zenginleştirme potansiyeline işaret ederek, bu sürece uygun pedagojik modellerin geliştirilmesine hizmet etmesi adına bir çalışma yürütmüştür. Araştırmacılar, altı matematik öğretmeni adayının problem çözme ve problem kurma süreçlerinde stratejik bir araç olarak DGO'nun katkısını mercek altına almıştır. Araştırmada öğretmen adaylarına iki problem sunulmuş ve DGO'nun sürüklenme ve ölçme işlevleri vasıtasıyla bu süreçte varsayım oluşturma, genellemeye ulaşma ve varsayımları doğrulamaya aracılık ettiği öne sürülmüştür. Çalışmada kullanılan problemlerden biri açık-uçlu ve geometri literatüründe sıklıkla yer bulan havalimanı problemi diğeri ise basitçe keşfedilmeye ve şaşırtıcı sonuçlara ulaşmaya elverişli saf (pure) geometrik bir durum olan “Bir paralelkenarın (ABCD) açıortayları ile oluşan şekil nedir?” (s. 128) şeklindedir. Araştırmada, paralelkenarın açıortayları ile oluşan şeklin ne olduğu problemi üzerinden yürütülen bir diyalog, DGO'nun olanaklarının süreçte nasıl işe koşulduğunu anlayabilmek için değerlendirilmiştir. Buna göre başlangıçtaki şekilde (ABCD paralelkenarı) problem koşulunu sağlamak için paralelkenara ait iç açıortaylar oluşturulmuş ve açıortaylar aracılığıyla oluşan şeklin bir dikdörtgen olabileceğine yönelik algı, sürüklenme ile kontrol edilmiştir. Bunun ardından paralelkenarda sağlanan şartın her durumda geçerli olup, olmadığını test etmek için paralelkenar sürüklenerek

(*sürükleme testi*) eşkenar dörtgene dönüştürülmüştür. Eşkenar dörtgene ait açılımların kesişiminin bir nokta belirtmesi, orijinal şeklin (paralelkenar) dikdörtgene dönüştürüldüğünde açılımlar aracılığıyla kare oluşacağı varsayımını doğrulamış ve varsayım, mevcut paralelkenar sürüklenerek (*sürükleme testi*) doğrulanmıştır. Böylece orijinal durumdaki paralelkenar, dörtgenler arasındaki hiyerarşiye işaret eden biçimde hem eşkenar dörtgen hem de dikdörtgene sürüklenme aracılığıyla dönüştürülmüş ve problem durumuna ait çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Benzer olarak paralelkenar ve ailesine ilişkin çıkarımların ardından orijinal şekil, yamuğa dönüştürülmüş ve yeni durumlar test edilmiştir. Buna göre başlangıçtaki problem durumu, yalnızca sürüklenme altında çeşitli formlara dönüştürülmüş ve yeni problemlerin kurulmasına kaynaklık edebilmiştir. Bu noktada sürüklemenin hem varsayım oluşturma hem de ortaya konulan varsayımın geçerliğini sorgulamaya yarayan bilişsel bir araç işlevi gördüğü fark edilmektedir. Böylece DGO'nun olanakları, süreç sonunda kurulacak problem(ler)in başlangıç noktası sayılabilen varsayımların ortaya konulması ve doğrulanması aracılığıyla problem kurma sürecinde de belirebilecektir.

Kuzle (2015), bir matematik öğretmeni adayının DGO'da rutin olmayan geometri problemlerini çözerken ortaya çıkan üst-bilişsel süreçlerini incelemiştir. Araştırmacı, yerleşik problem çözme çerçeveleri (Garofalo & Lester, 1985; Polya, 1957; Schoenfeld, 1985) ışığında, DGO'da problem çözme sürecinin bilişsel ve üst-bilişsel karmaşıklığını aydınlatmış ve bu süreci resmeden bir model geliştirmiştir (Şekil 16). Ardından yalnızca bir öğretmen adayının DGO'da problem çözme sürecinde ortaya çıkan üst-bilişsel davranışları ile modelin unsurlarını ilişkilendirmiş ve bu aşamalarda gözlenen DGO'nun çeşitli kullanım olanaklarını eşleştirmiştir. Örneğin, DGO'nun yapı ekleme ve ölçme işlevleri anlama, analiz etme, keşfetme, uygulama ve doğrulama esnasında görülmüşken; yalnızca yapı ekleme işlevi daha çok problemin temsiline ortaya konulmasına dolayısıyla görselleştirilmesine ve anlaşılmasına katkı sağlamıştır. Bunun yanı sıra yalnızca ölçme işlevi, öğretmen adayının problem durumu ile ilişkili varsayım üretmesine veya planlama yapmasına ve varsayımını doğrulamasına imkân tanımıştır. Buna göre DGO'da problem çözme sürecinde DGO'nun işlevleri birden çok aşamada tek başına veya bir arada görülebilmektedir.



Şekil 15. Bilişsel ve üst-bilişsel açıdan problem çözme çerçevesi (Kuzle, 2015, s. 632)

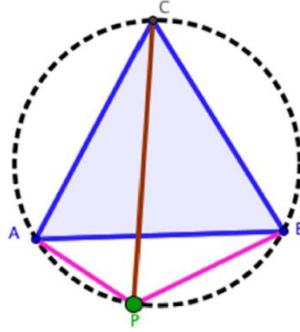
Araştırmada literatürde yaygın şekilde havalimanı problemi olarak geçen ve Viviani teoremini barındıran problem çözme durumu, dinamik halde sunulmuştur. Viviani teoremi, eşkenar üçgenin ve eş açılı çokgenlerin içinde alınan bir noktadan kenarlarına olan dik uzaklıkların toplamının sabit olmasıdır (Villiers, 2013). Ardından problem çözme durumu ortamın sürüklenme olanağı sayesinde manipüle edilmiş ve böylece sürüklenme işlevi; mevcut problem çözme durumunun anlaşılmasına, çözüm için bilgi/veri toplanmasına, planlama yapmaya veya çözüme ilişkin varsayım üretilmesine ve ortaya konulan varsayımın doğrulanmasına aracılık etmiştir. Sürüklemenin problem çözme sürecinde gözlenen aracılığının problem kurma sürecinde, araştırma ve keşif aracılığıyla problem kurma durumunun incelemesi ve problem kurma durumuna ilişkin varsayımların üretilip, doğruluğunun kontrol edilmesine de katkı sağlaması kaçınılmaz olacaktır. Araştırmanın katılımcısı sürüklenme işlevinin problem çözme durumunu daha iyi anlama, çözüme dair ek bilgi aramak gibi amaçlara hizmet eden bilişsel bir araç olduğunun farkında olarak, sürüklenme işlevinden yararlanmış ve böylece DGO'nun işlevlerini *Neden?* ve *Nasıl?* kullanması gerektiği yönünde bilinçli bir eylem sergilemiştir. Bu durum mevcut bilgidan yararlanarak, DGO'nun olanaklarını keşif aracına dönüştürmeye imkân sağlayan üst-bilişsel davranış olarak nitelenebilecektir. Buna göre DGO'nun işlevlerinin ve olanaklarının bilinçli kullanımı üst-bilişsel davranışların sergilenmesine hizmet edebilmektedir. Benzer şekilde Rott vd. (2021) problem çözme sürecini betimleyen normatif modellerin ötesinde ve süreci temsil ve analiz etmek için tanımlayıcı bir faz modeli geliştirmiştir. Bu modelin tasarımına kaynaklık eden öğretmen adaylarının bir kısmı statik (kâğıt-kalem vd.) diğer kısmı ise dinamik (DGO) ortamda çalışmıştır. Araştırmacılar statik ve dinamik ortamda gerçekleşen problem çözme süreçlerinin analizleri neticesinde doğrusal olmayan ve birbiriyle etkileşim halinde olan beş aşamalı bir model geliştirmiştir. Modelin aşamalarının birbirleriyle

geçişli olması kâğıt-kalem ortamına kıyasla DGO'da daha sık gözlemlenmiştir. Araştırmacılar bu gözlemi, katılımcıların öz-düzenleme yapması yani problem çözme sürecini daha iyi yönetmesi ile ilişkilendirmiştir. Bu durumda DGO, sonuçların kontrol edilmesi ve bir sonraki adımın planlanması bakımından öz-düzenleme yapmaya elverişli ortam sunmakta ve benzer adımların veya adımlar arası geçişlerin problem kurma süreçlerinde de gözlenmesi mümkün görünmektedir. DGO'da problem çözme sürecinde yazılımın yardımcı unsur ekleme, ölçme ve sürüklemeye olanakları; çözüm için kabul edilebilir yanıtların oluşturulmasına, yanıtların gerekçelendirilmesine ve geçerliliğinin doğrulanmasına katkı sağlamış ve dolayısıyla hem bilişsel hem de üst-bilişsel eylemleri desteklemiştir (Kuzle, 2015). Problem çözme süreçlerinin bilişsel süreçlerine odaklı modellerde (Kuzle, 2015; Rott vd., 2021) fark edildiği gibi aşamalar bütünüyle hiyerarşik bir akış göstermemekte ve DGO'nun olanakları aşamaların her birinde değişken türlerde açığa çıkabilmektedir. Benzer sonuçların DGO'da problem kurma süreçlerine yönelik ortaya konulan modellerde de görülmesi şaşırtıcı olmayacaktır.

Diğer yandan DGO'dan koordineli şekilde yararlanmak, matematiksel ilişkiler ağını güçlendirme potansiyeli taşımaktadır (Santos-Trigo vd., 2016; Zengin, 2019). Çünkü belli şartları sağlayan geometrik yapıları oluşturmak için yapılan analiz, şeklin gerekli ve yeterli koşulları hakkında düşünmeyi içermekte ve şeklin gerekli veya yeterli koşulları ise DGO'nun sürüklemeye, ölçme ve şeklin birden çok varyasyonunu oluşturmaya elverişli özellikleri ile ortaya çıkarılabilmektedir (Leikin, 2014). Bu yönüyle DGO, kullanıcının matematiksel ilişkilendirmeler yapabileceği kavramsal bir bağlam sağlamaktadır (Contreras, 2013). Örneğin Santos-Trigo ve arkadaşları (2016) lise matematik öğretmeni adaylarının dijital araçları (GeoGebra) sistematik şekilde kullanması sonucunda sergilediği problem çözme süreçlerini karakterize etmiştir.

Araştırmada biri dinamik olmak üzere iki matematiksel etkinlik kullanılmış ve dinamik etkinlikte sunulan yapının (Şekil 16) incelenmesi ve bu yapı ile ilgili birtakım problemlerin kurulması ve ardından çözülmesi istenmiştir. Katılımcı sekiz lise matematik öğretmeni adayı, yüksek lisans programında yürütülen problem çözme dersi kapsamında iki etkinlik boyunca sırasıyla bireysel, ikişerli grup ve sınıf tartışması şeklinde çalışmış ve çeşitli problemler ortaya koyarak, problemleri çözmüştür. Araştırmacılar çalışmanın sonucunda problem çözme etkinliklerinin öğretmen

adaylarını informelden formel akıl yürütmeye yönlendiren dört aşama içerdiğini öne sürmüştür: (i) kavrama, (ii) keşfetme, (iii) geometrik bir argüman arama ve (iv) genişletme. Ardından GeoGebra'nın etkinliklerin problemleştirilmesine ve içerdiği matematiksel ilişkilerin problem çözme sürecine dâhil edilmesine ne ölçüde katkı sağladığını tanımlamıştır.



Şekil 16. Santos-Trigo ve arkadaşları (2016) çalışmasında yer alan dinamik yapı

Kavrama aşamasında, uzunluk ve açı ölçme ile şeklin içerdiği hareketli noktalar sürüklenmiş ve böylece yazılımın olanakları ile yapının temel özellikleri belirlenmiştir. Örneğin katılımcılardan bazıları üçgenin kenar uzunluklarını ölçerek, eşkenar üçgen olduğunu fark etmiş ve şu problemi kurabilmiştir: “Verilen çemberin içerisine eşkenar bir üçgeni nasıl çizebiliriz?” (s. 832) Diğer bazı katılımcılar ise sürüklenabilir P noktasını (Şekil 16) AB yayı üzerinde sürükleyerek, şeklin davranışını deneysel olarak keşfetmeye odaklanmıştır. Bu sürükleme Arzarello vd., (2002) çalışmasındaki bağımlı sürükleme ile açıklanabilecektir (Tablo 2). Benzer şekilde Baccaglini-Frank'ın (2009) şemasına göre ise amaçlı sürükleme kapsamında değerlendirilebilecektir (Tablo 1). Bu noktada keşfetme aşamasında uzunluk ve açı ölçme ile varsayımların doğrulanmaya çalışıldığı anlaşılmaktadır. Örneğin $|AP|$, $|PB|$ ve $|CP|$ uzunlukları belirlenerek, P noktası AB yayı üzerinde seyrederken doğru parçalarının uzunlukları arasındaki değişim izlenmiş ve $|AP|$ ve $|PB|$ uzunlukları toplamının $|CP|$ uzunluğuna eşit olduğu keşfedilmiştir. Buna göre problem kurma durumunun incelenmesi sırasında bir sonuç elde etme niyetiyle *rastgele* veya *amaçlı sürüklemenin* ve *amaçlı ölçümün* yapılabileceği ve elde edilen sonucun direkt olarak probleme dönüştürülebileceği anlaşılmaktadır.

Geometrik bir argüman arama aşamasında yazılımın birçok işlevi (ölçme, sürüklenme, çizim yapma vd.) bir arada kullanılarak, şeklin gömülü özellikleri ortaya çıkarılmakta ve gerekçeli bir varsayım oluşturulmaktadır. Örneğin, $\angle PBD \cong \angle PCA$ aynı ve $\angle BPD \cong \angle CPA$ eşit yaylar tarafından desteklendiği için $\triangle ADC$ ve $\triangle PAC$ benzer üçgenler olduğu gösterilmiştir (Şekil 16’da D, AB ve PC doğru parçalarının keşişim noktasıdır.). Bu süreçte de yine bir sonuç elde etme niyetiyle *amaçlı ölçümlerin* yapıldığı fark edilmektedir. Buna göre *amaçlı ölçüm* problem kurma durumunun incelenmesi neticesinde varsayımların doğrulanmasına dolayısıyla kurulacak problemlerin matematiksel geçerliğinin sağlanmasına katkı sunabilecektir. Bu yönüyle problem kurma süreçlerinin yansıtmaya ilişkin eylemleri ile eş zamanlı gözlenme potansiyeli taşımaktadır.

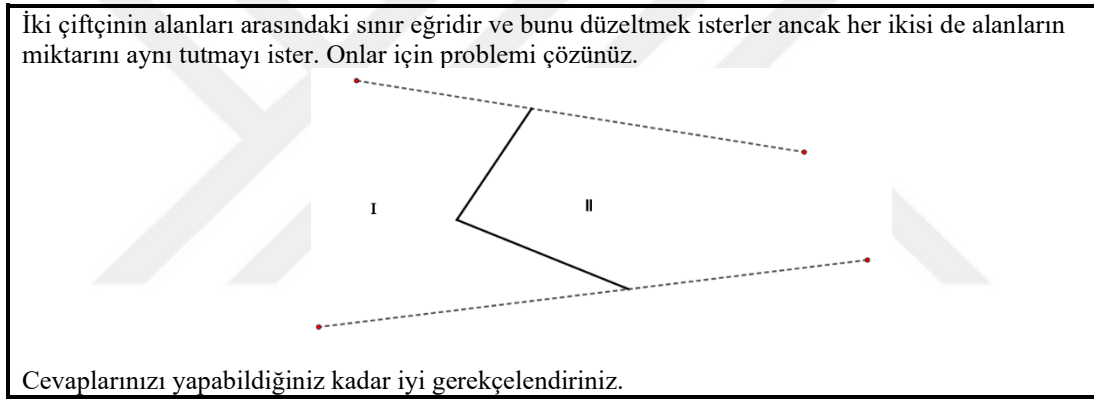
Genişletme aşamasında ise dinamik yapı, daha farklı ilişkileri keşfetmenin tetikleyicisi olmuştur. Çünkü DGO matematiksel bağlantıların kurulmasını ve bu bağlantıların anlamlandırılmasını desteklemiştir. Örneğin, sınıf tartışması evresinde katılımcılar, “Verilen çemberin içerisine eşkenar bir üçgeni nasıl çizebiliriz?” sorusunun onları böyle bir üçgeni çizmenin farklı yollarını belirlemeye yönelttiğini fark etmiş ve bu süreçte; paralellik ve benzerlik gibi kavramları kullanarak, böyle bir üçgeni inşa etmek için GeoGebra’nın farklı olanaklarından (yardımcı unsur ekleme, ölçme) yararlanmıştır. Buna göre dinamik yapılandırma şekle ilişkin problemleri kurma ve çözmek için çeşitli yollar aramayı tetikleyebilmiştir. Çünkü problemin dinamik temsili, görselleştirilmiş olan yapılandırma içindeki diğer öğelerin davranışlarını gözlemlemeyi ve geometrik ilişkiler hakkında düşünmeyi teşvik etmektedir. Benzer şekilde öğretmen adayları tarafından “Dairedeki P noktasını hareket ettirirseniz, yapılandırma içindeki hangi öğeler değişir? Hangileri değişmez kalır? Eşkenar üçgenin üç köşesinden geçen çemberi çizebilir misiniz? Bu çemberin alan değişimini sürüklenabilir noktanın konumu açısından grafiğe dökebilir misiniz? Bu grafik, iç teğet üçgen ile nasıl ilişkilidir?” (s. 840) araştırma-odaklı problemler sunulmuşken, bu problemler öğrencilerin nesnelerin nitelikleri (örn.; uzunluk, alan, açı) arasında matematiksel ilişkiler aramasına yardımcı olma potansiyeli taşımaktadır. Dolayısıyla dijital araç olarak GeoGebra kullanımı, etkinlik problem durumunu dinamik şekilde yapılandırma ve incelemenin yanında yeni matematiksel problem ve ilişkileri keşfetmenin, olası örüntü ve değişmez ilişkileri tespit etmenin de kapısını

aramaktadır. Buna göre DGO işlevlerinin koordineli kullanımı, problemleri farklı perspektiflerden temsil etme, keşfetme ve genişletmek için fırsat kaynağıdır. Böylece DGO, mevcut problem kurma durumundan hareketle çok çeşitli problemlerin kurulmasına katkı sağlayabilecektir. Araştırmanın katılımcıları problem çözme deneyimleri neticesinde GeoGebra kullanımının deneysel ve formel akıl yürütme süreçlerini birbirine bağlayan anahtar rolüne de işaret etmiştir.

Kuzle (2017) farklı öğrenim düzeyinde (lisans, yüksek lisans ve doktora) ve problem çözme deneyimine sahip üç katılımcının DGO’da rutin olmayan geometri problemlerini çözme süreçlerinin analizlerine odaklanmış ve bu süreçte DGO’dan bilişsel bir araç olarak nasıl yararlanıldığını aydınlatmaya çalışmıştır. Araştırmacı, DGO’nun problem çözme sürecine destek sağladığı varsayımını test etmeyi amaçlamış ve makalesinde tartışılan problem “Arazi Sınırı Problemi” (the Land Boundary Problem, Şekil 17) olup; problemde katılımcılar, eğimli bir çiti eş alanlı iki bölüme ayırmak için düzeltmek zorunda kalmıştır. Üç katılımcı da DGO’dan farklı biçimlerde yararlanarak, problemi çözebilmiştir. Örneğin problem durumunun keşif aşamasında test modu ve arama modu olarak (Hölz, 2001) sürüklenme işlevi kullanılmış ve böylece sürüklenme aracılığıyla yapılan keşif; problemi çözmek için veri toplama, deney yapma, varsayımda bulunma, problemi daha iyi anlama ve problemin çözümüne ait olası yolları tetikleyebilmiştir. Benzer durumun problem kurma süreçlerinde de gözlenmesi ve problem kurma durumuna ilişkin incelemelerin sürüklenmenin çeşitli türleri ile yapılması sağlanabilecektir. Ayrıca problem çözme sürecinde DGO; hesaplama (*ölçme*), inşa etme (*ekleme*), varsayım oluşturma ve gözlemlenen olgular hakkında açıklama geliştirme gibi davranışların sergilenmesine aracı olmuştur. Örneğin, arazilerin ölçülmesi problem için çözüm bulmaya olanak sağlamıştır. Bu aşamada eşit alan ölçüsüne sahip bölgelerin oluşmasını sağlamak için sınırları temsil eden doğru parçalarını sürüklemekten önce halihazırdaki durumda alanların ölçülmesi söz konusu olmuştur. Bu noktada bir sonuç elde etme niyetiyle *amaçlı ölçümün* işe koşulabildiği anlaşılmakta ve gerekli alan ölçümlerinin ardından sınırlar, eşit alan ölçüsü sağlayabilmek için *amaçlı sürüklenme* ile sürüklenebilmiştir.

Buna göre ölçme, problem durumunun incelenmesine olanak sağlayabilmekte ve kurulacak problemin tasarlanmasına katkı sunma potansiyeli taşımaktadır. Bunun yanı sıra katılımcıların problem çözme süreçlerinde inşa etme (*ekleme*) sık kullanılmış

ve daha çok problem durumunun anlaşılmasına katkı sağlayabilmiştir. Katılımcılar arasında diğer bir kullanım ise (*rastgele*) sürüklenme olmuş ve problem çözme durumu hakkında daha fazla bilgi edinmeye dolayısıyla problem durumunun incelenmesine katkı sağlayabilmiştir. Örneğin araştırmanın katılımcılarından biri, DGO'nun problemi keşfetmeye yardımcı olduğuna ve özellikle problemi çözmek için ilaveler yapmayı statik ortama kıyasla kolaylaştırdığına değinmiştir. Ayrıca, geometrik kavramlara ilişkin bilgisine dayanarak varsayım oluşturabileceğini, problemin parametrelerini değiştirebileceğini ve varsayımlarını test edebileceğini de belirtmiştir. Buna göre yazılımın görsel geri bildirimlerini okuyabilmek, problem çözme durumu hakkında varsayım oluşturma ve soyutlamayı teşvik etmiş ve DGO'daki bu türden üretken davranışlar, problem çözme deneyimi ile ilişkilendirilmiştir (Kuzle, 2017).



Şekil 17. “Arazi Sınırı Problemi” için problem durumu (Kuzle, 2017, s. 45)

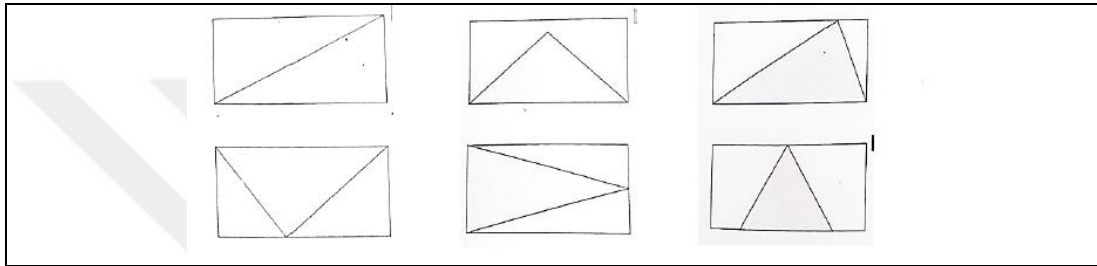
Kuzle (2017) çalışmasında DGO'nun, problem çözme sürecinde yeni düşünme yolları keşfetmeye destek sunmanın yanında sürece engel de teşkil edebileceğine değinerek, problem çözme sürecini desteklemek yerine engelleyebileceğinin de altını çizmiştir. Örneğin, araştırmasında bir katılımcı varsayımlarını doğrulama veya çürütmek için yalnızca DGO'ya güvenerek, deneme-yanılma ile sonuç elde etmeye çalışmış ve kendi akıl yürütmesine güvenmekten ziyade teknoloji üzerindeki otoritesini kaybedebilmiştir. Çalışmanın katılımcısı, problem çözme sürecinde alan problemine yönelik “... oluşturduğum yarıçapın diğer sınırda eşit bir alan verecek noktaya çarpıp çarpmayacağını test ediyorum ama öyle görünmüyor.” ifadesine yer vermiş ve katılımcının ifadesine karşılık araştırmacı neden? sorusunu yönelttiğinde ise “... yazılım hakkında kullanmayı bildiğim tek şey buydu.” benzeri açıklamalarda

bulunmuştur. Buna göre DGO'dan bilinçli şekilde yararlanmamak olumsuz sonuçlar da doğurabilecektir.

Leikin ve Elgrably (2020), lise matematik öğretmeni adaylarının problem çözme ve problem kurma yeterliklerinin ve matematiksel yaratıcılıklarının gelişimini, DGO'da araştırmalar yoluyla problem kurma etkinliği üzerinden incelemiştir. Katılımcıların etkinlikteki problem durumuna yardımcı yapılar inşa etmesi (*ekleme*), problem durumuna ilişkin daha fazla özelliğin keşfine katkı sağlamanın yanında yaratıcılığın akıcılık bileşeni ile anlamlı ilişkinin varlığına da kanıt olmuştur. Benzer şekilde yardımcı unsur ekleme ile yaratıcılığın esneklik ve orijinallik bileşenleri arasında da anlamlı ilişki tespit edilmiştir. Bununla birlikte katılımcıların kurduğu problemlerin karmaşıklığı ile keşfedilen özellikler dolayısıyla yardımcı yapı ekleme ve akıcılık arasında da anlamlı ilişki söz konusu olmuştur. Buna karşılık katılımcıların benzer karmaşıklıkta problem kurma eğiliminde olduğu belirlenmiş ve kurulan problemlerin karmaşıklığı ile yaratıcılığın esneklik boyutu arasında anlamlı bir ilişki tespit edilememiştir. Ek olarak kurulan problemlerin karmaşıklığı ve yaratıcılığın orijinallik boyutu arasında da nispeten anlamlı bir ilişki bulunmuştur. Buna göre DGO; özellikle ekleme olanağı ile katılımcıların problem durumuna ait birden çok özelliği keşfetmesine imkân tanıyarak, problemlerin çeşitlendirilmesi için kaçınılmaz fırsatlar sunmanın yanında kurulan problemlerin karmaşıklığını geliştirmeye de aracı olabilecektir. Benzer bulguların Elgrably ve Leikin (2021) çalışmasında da ortaya çıktığı bilinmektedir. Buna göre DGO'nun mevcut şekle yardımcı eleman ekleme aracılığıyla daha karmaşık problemler kurmak için elverişli bir ortam sağladığı ve ayrıca yüksek düzeyde problem çözme uzmanlığı bulunan katılımcıların problem kurması için daha uygun olduğu anlaşılmaktadır. Dolayısıyla mevcut problem kurma durumuna yapılan ilaveler (*yardımcı unsur ekleme*) katılımcıların görece yüksek düzeyde problem çözme uzmanlığına sahip olduğuna ve daha karmaşık problemler kurmayı amaçladığına da işaret edebilecektir.

Segal (2024), yüksek lisans programında yürüttüğü ders kapsamında iki grup (2 ve 3 kişiden oluşan) öğretmenin ders kitabında yer alan geometrik bir etkinliği öğretimlerine entegre etmek üzere DGO'ya aktarma sürecini incelemiş ve bu sürecin öğretmenlerin Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisine (TPAB) katkısını belirlemiştir. Katılımcı grupların doğrudan problem kurma süreçlerine odaklanmaktan ziyade ders

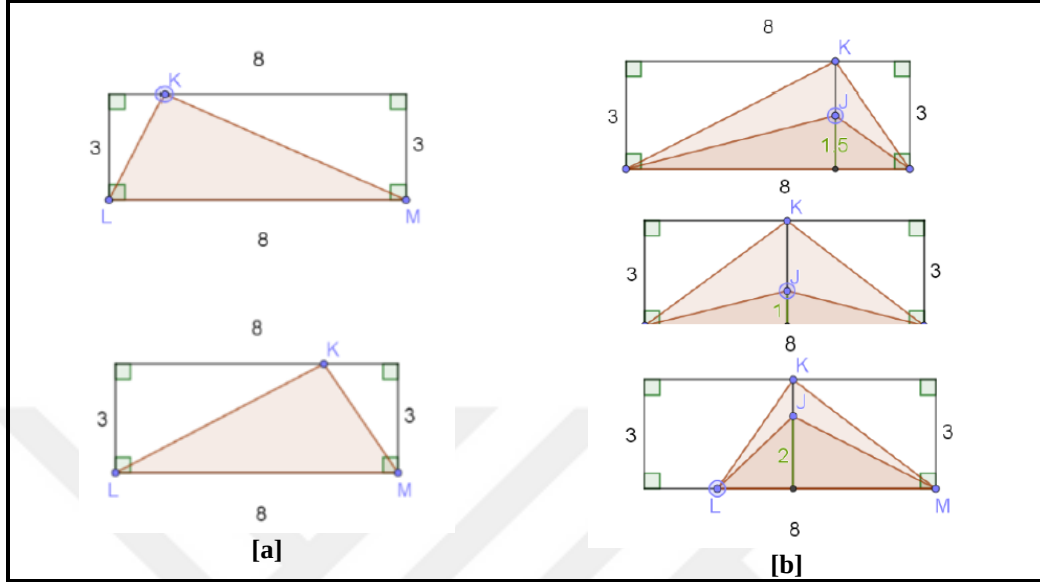
kitabında yer alan (statik) geometrik içeriği dinamik sunuma dönüştürme ve bu süreçte DGO'nun olası katkılarına odaklanan bu çalışmada; birinci grupta yer alan öğretmenler, ders kitabından bir dikdörtgen ve onun içine yerleştirilen bir üçgenin alanlarının karşılaştırılmasına yönelik içerik belirlemiştir (Şekil 18). Burada üçgenin bir kenarının dikdörtgenin bir kenarına karşılık gelmesi ve üçgenin karşı köşesinin dikdörtgenin karşı kenarına denk gelmesi ile üçgenin alanının dikdörtgenin alanının yarısına eşit olduğu durum ve koşulların belirlenmesi amaçlanmıştır. Ardından statik durum dinamik ortama aktarılmıştır (Şekil 19).



Şekil 18. Segal (2024) çalışmasında yer alan geometrik içerik örnekleri

Geometrik içeriğin dinamik temsili öğretmenlerin daha fazla ne keşfedebilecekleri yönündeki meraklarını uyandırmış ve K tepe noktasını dikdörtgenin kenarı boyunca sürükleyerek (*rastgele veya amaçlı*), üçgenin alanının dikdörtgenin alanının yarısına eşit olduğunu keşfetmişlerdir (Şekil 19, [a]). Ardından üçgenin alanının yarısı olmadığı durumları incelemiş ve K köşesinin dikdörtgenin yüksekliği boyunca ve L ve M köşelerini ise dikdörtgenin uzun kenarı boyunca sürüklemeye (*amaçlı*) karar vermişlerdir (Şekil 19, [b]). Böylece geometrik içerik hakkındaki keşif sürecini zenginleştirmiş ve sorgulamayı genişletmişlerdir. Bu esnada ayrıca üçgen ve dikdörtgenin alanları arasındaki ilişkinin görünür kılınması amacıyla yazılımın *metin kutusu ekleme (diğer)* özelliğini de kullanmış ve noktaları sürükleyerek alanlar arasındaki ilişkinin gözlenmesine yönelik problemler tasarlamışlardır. Örneğin grup üyeleri, “L ve M köşelerini üçgenin alanının dikdörtgenin alanının dörtte birine eşit olması için sürükleyiniz. L ve M noktalarının konumu ne olmalıdır? |LM| uzunluğu nedir? Buradan ne sonuç çıkarabilirsiniz?” gibi birbirinin ardılı ve araştırma- odaklı problemler kurabilmişlerdir. Buna göre problem kurma süreçlerinde *rastgele* veya *amaçlı sürüklemenin* yanında *diğer bileşeni* de problem kurmak için aracı olabilecek

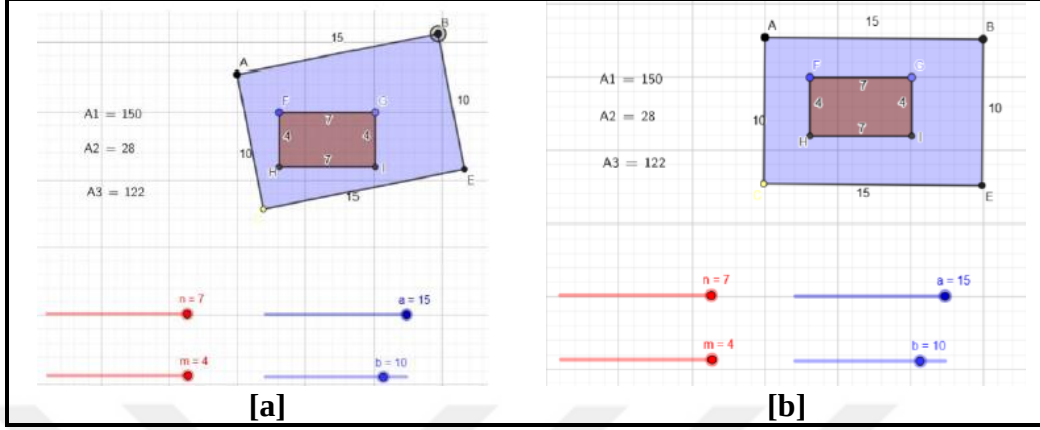
ve bu süreçte peşi sıra problem kurma gözlenebilen bir eylem olarak kabul edilebilecektir.



Şekil 19. Segal (2024) çalışmasında yer alan dinamik temsil örneği 1

Araştırmadaki diğer grup ise ders kitabından, iç içe yerleşmiş olan iki dikdörtgenin alanlarının karşılaştırılmasına yönelik ve görece günlük yaşam ile ilişkilendirilen statik bir durumu belirlemiş ve dinamik ortama aktarmıştır. Statik durumda kabaca bir oturma odası zemini ve zemine serilen bir halıyı temsil eden iç içe iki dikdörtgen bulunmaktadır. Statik durumun dinamik temsil örneklerinden ikisine Şekil 20’de yer verilmiştir. Dinamik ortamda öğretmenler, dış/iç dikdörtgenin uzunluğunu/genişliğini temsil eden sürgüler ve oturma odası zemin alanını (A1), halı alanını (A2) ve halısız zemin alanını (A3) içeren metin kutuları oluşturmuştur (Şekil 20). Ardından dikdörtgenlerin her birini köşelerinden sürükleyerek; oturma odası zemininin, halısının ve zemin ile halı arasında kalan alanın boyutlarını değiştirebileceklerini fark etmişlerdir. Bunun yanı sıra zemindeki halıyı temsil eden içerideki dikdörtgenin konumunu değiştirebilecek ve alan korunumuna işaret eden problem kurabileceklerini fark etmişlerdir. Örneğin, “... halısız alanların neden eşit olduğunu açıklayınız.” şeklinde yalnızca prosedürel değil kavramsal anlayışa da hizmet eden problem kurabileceklerini keşfetmişlerdir. Böylece özellikle günlük yaşam bağlamı ile ilişkilendirilen problem kurma sürecinde *diğer* bileşen kapsamında

sürgü aracının kullanılması yanında *amaçlı sürüklemenin* de uygulanabileceği anlaşılmaktadır.



Şekil 20. Segal (2024) çalışmasında yer alan dinamik temsil örneği 2

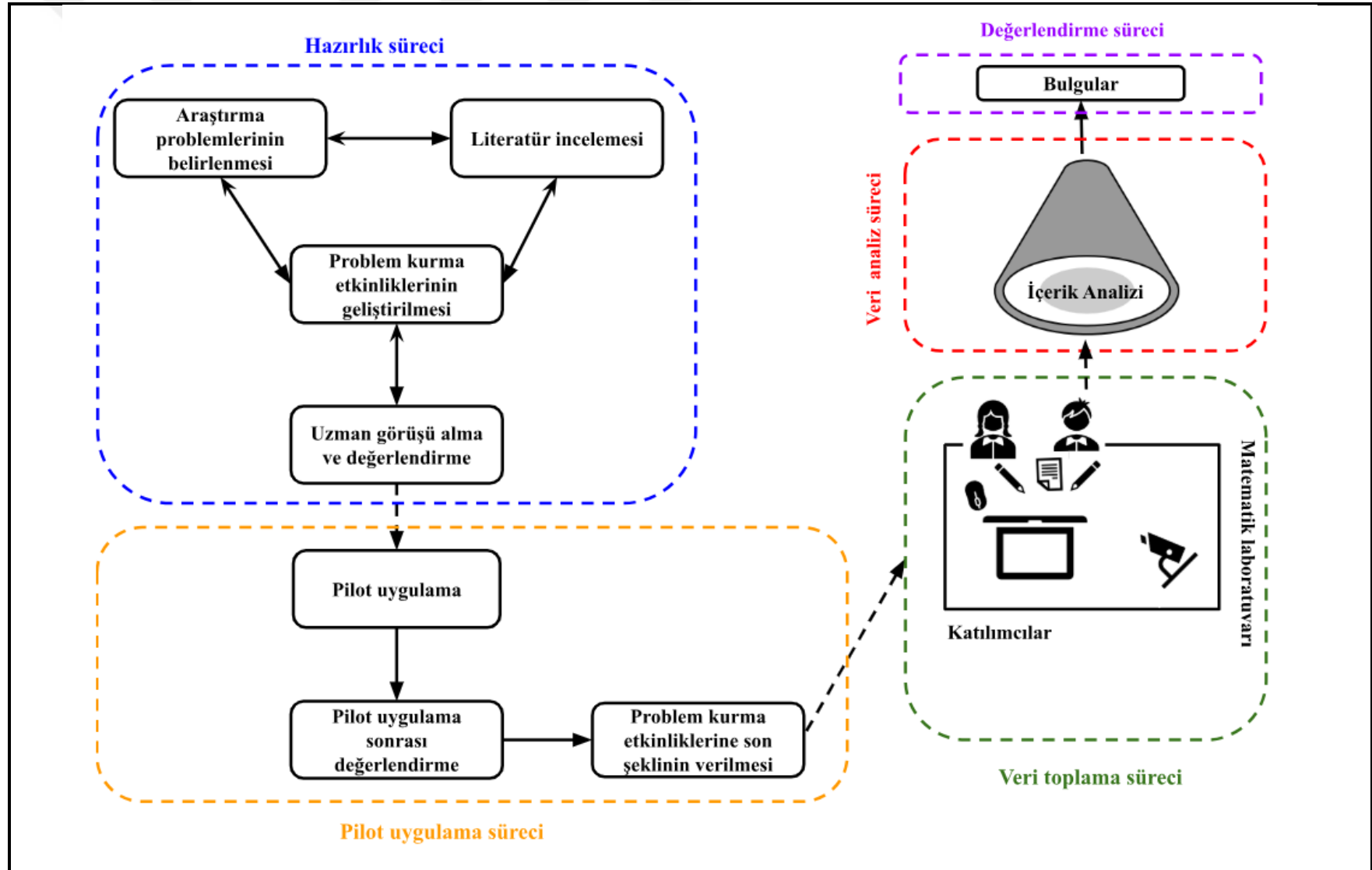
Araştırmanın sonuçlarına göre statik bir durumun dinamik ortama aktarılması sürecinde, bu sürecin öğretmenlerin TPAB'lerinin her bileşenine (örn., teknoloji bilgisi, teknolojik-pedagojik bilgisi) ayrı katkısı olduğu vurgulanmıştır. Sürecin problem kurma özelindeki birtakım sonuçları ise şunlardır: (i) statik geometrik içerikten elde edilebilecek veriyi zenginleştirme, (ii) geometrik içeriğe ilişkin genellemelere varılması ve buna yönelik varsayımların oluşturulması, (iii) DGO'da sorgulama sürecini genişletme, (iv) çoklu çözüm içeren problem durumlarının keşfedilmesi. Bunların yanı sıra DGO'da problem kurma süreci öğretmenlerin kendileri ve öğrencileri için matematiksel veya geometrik kavramlara ilişkin görüş alanını genişletmekte, öğretmenlerin öğretim için yeni pedagojik yollar keşfetmesine olanak sağlama potansiyeli taşımaktadır. Bu kapsamda DGO'da problem kurma süreci öğretmen adaylarının zengin problem koleksiyonu oluşturmaya ve pedagojik yönelimli bağlantılar kurmasına zemin oluşturabilecektir.

2. YÖNTEM

2.1. Araştırmanın Yöntemi

Nitel araştırmanın özgünlüğü, genelleme amacı gütmekten ziyade özelleştirme gayretinden kaynaklanmakta (Bogdan & Biklen, 1998; Greene & Caracelli, 1997; Stake, 1995) ve araştırma *nasıl* sorusu ekseninde dönmektedir. Bu kapsamda bu araştırma yapılandırmacı paradigma ışığında ve durum çalışması deseninde yürütülmüştür (Creswell, 2017). Durum çalışması, belirli bir durumun tanımlanması ile başlamakta ve karmaşıklığını anlamaya odaklanarak, derinlemesine düşünme gücü ile açıklığa kavuşturulmaktadır (Creswell & Poth, 2016; Stake, 1995). Stake (1995) durumu, kesin tanıma ulaştırmanın zor olduğu sınırlı bir sistem olarak tanımlamış ve durumun süreçten ziyade nesne olarak da ele alınabileceğine değinmiştir. Araştırmacı, durum çalışmasının temel misyonunun “kabul edilen durumun diğerlerinden farkına değil öncelikli olarak kendisinin ne olduğuna bakılması ve eşsizliğinin ortaya çıkarılması” (s. 4) olduğunu ifade etmiştir. Bunun yanı sıra Stake’in (1995) araştırma tasarımı yaklaşımı, başlangıçta belirlenen adımlarda ilerleyen kısımlarda önemli değişiklikler yapılmasına da imkân tanıyan esnekliğe sahiptir.

Bu araştırmada başlıca amaç, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının DGO’da problem kurma süreçlerini incelemektir. Bu incelemede kabul edilen durum ise öğretmen adaylarının DGO’da problem kurma süreçleri olup, araştırmanın ilk sorumluluğu bu durumu anlamaktır (Stake, 1995). Gerek problem kurma süreçlerine gerekse dinamik geometri ortamına yönelik yürütülen araştırmalar, karmaşık yapıları ile bilinmektedir. Dolayısıyla birden çok veri kaynağına (örn., video/ekran kaydı, GeoGebra dosyaları) sahip olan bu araştırmanın verileri çok çeşitli, karmaşık ve beklenmedik bulgulara açık bir yapıya sahip olabilmektedir. Bu nedenle süreci yapılandırmadaki esnekliğinden ötürü Stake’in (1995) durum çalışması benimsenmiştir. Ayrıca bulguların sunumu, katılımcıların doğrudan alıntıları ile desteklenmiş (Merriam & Grenier, 2019) ve böylece veriler kaydedildiği biçime olabildiği kadar yakın tutularak, tüm zenginliği ile ele alınmıştır (Bogdan & Biklen, 1998). Bu araştırmanın sürecine ait akış şeması Şekil 21’de sunulmuştur.



Şekil 21. Araştırma sürecine ait akış şeması

2.2. Katılımcılar

Bu araştırmanın katılımcılarını, Doğu Karadeniz Bölgesi'ndeki bir üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği programının dördüncü sınıfında öğrenim gören on iki öğretmen adayı oluşturmuştur. Araştırmanın yürütülmesi hakkında üniversitenin etik kurulundan onay yazısı alınmıştır. Schoenfeld (2000) matematik eğitimi araştırmalarında, daha doğal davranışlar sergilemesine yardımcı olacağı için katılımcıların yalnız çalışmasına karşılık çift olarak çalışmasının araştırma için daha güvenilir sonuçlar vereceğini belirtmiştir. Benzer şekilde Crespo ve Harper (2019) öğretmen adaylarını, düşük nitelikli problemler kurmaktan daha yüksek nitelikli problemler kurmaya geçişini desteklemek için iş birliği içinde çalışmaya teşvik etmiştir. Bu araştırmada da öğretmen adaylarını matematiksel potansiyellerini sürece tam anlamıyla yansıtmaya ve işbirlikçi çalışmaya teşvik etmek için adayların, ikişerli gruplar hâlinde çalışmasına karar verilmiştir. Katılımcılar, amaçlı örnekleme çeşitlerinden ölçüt örnekleme yöntemi dikkate alınarak belirlenmiştir. Creswell (2017) ölçüt örnekleme, katılımcıların araştırmanın amacına hizmet edecek biçimde belirlenmesi şeklinde tanımlamıştır. Buna göre katılımcıların belirlenmesinde ölçüt olarak katılımcıların problem, problem kurma ve problem çözme üzerine eğitim görmüş olmasına ve bununla birlikte etkinliklerin gerektirdiği temel geometri bilgisine ve dinamik geometri ortamı deneyiminin yanında dinamik geometri yazılımını kullanmaya yönelik öğrenim görmüş olmasına dikkat edilmiştir. Bunun yanında ölçütleri karşılayan ve gönüllülük esasına bağlı ve ulaşılabilir en fazla sayıda katılımcıya ulaşmak hedeflenmiş ve araştırmanın katılımcıları bu paralelde belirlenmiştir.

2018 yılında uygulanmaya başlanan yeni öğretmen yetiştirme programının üçüncü yılında, zorunlu “Geometri ve Ölçme Öğretimi” dersi yer almaktadır ve bu dersin kapsamı hem alan hem de pedagojik bilgiye işaret eden geniş bir içeriğe sahip bulunmaktadır:

“Van Hiele düşünme düzeyleri; temel geometrik kavramlar, geometrik yapılar, geometrik cisimler; eşlik ve benzerlik, dönüşüm geometrisi, izdüşüm, örüntü ve süslemeler, fraktallar; Pisagor teoremi; ölçmenin doğası, zaman, uzunluk, alan, hacim ve açı ölçme konularının öğretimi (ders içeriğini düzenleme-uygun öğretim materyallerini ve stratejilerini kullanma vb.); bu konulara ilişkin öğrenci bilgisi (kavramlara ilişkin öğrenci düşüncesini anlama, yorumlama; öğrenci zorluklarını, hatalarını, kavram yanlışlarını ve nedenlerini bilme); bu konuların günlük hayat ve diğer derslerle ilişkisi.” (Yükseköğretim Kurulu, [YÖK], 2018, s. 10).

Katılımcıların belirlenmesinde ölçüt olarak alınan ve öğretmen yetiştirme programının dördüncü yılında “Matematiksel Problem Çözme” dersi yer almakta ve bu dersin kapsamında, problem kurma hakkında şu içeriğe yer verilmektedir:

“...problem kurmanın tanımı, süreci, özellikleri ve önemi; problem kurmanın sınıflandırılması (etkinlikler); problem kurma stratejileri, farklı problem kurma etkinliklerinin gerçekleştirilmesi; ortaokul matematik müfredatında ve ders kitaplarında problem kurma; problem kurmanın değerlendirilmesi” ifadeleri bulunmaktadır (YÖK, 2018, s. 12).

Katılımcıların aldığı problem çözme dersi, problem kurmaya yönelik içeriğe sahiptir. Bu durum katılımcıların problem kurma hakkında farkındalıklarının bulunduğunu göstermektedir. Bu araştırmanın katılımcılarının belirlenmesinde, DGO deneyimi bulunan ve dinamik yazılımı kullanabilen adaylar ile çalışılması diğer bir ölçüt olarak alınmıştır. Buna göre katılımcıların “Bilgisayar Destekli Matematik Öğretimi” dersini almış olması önemli bir kriter olmuştur. Bu dersin içeriği ise şu şekildedir: “ ... Dinamik Geometri Sistemleri (DGS) gibi yazılımların kullanımı, bu yazılımlar aracılığı ile etkileşimli etkinlikler üretme ve uygulama; öğrenci ürünlerini değerlendirme” (YÖK, s. 23).

Problem kurma matematiksel veya geometrik içerik bilgisinden etkilenmektedir (Jones, 2000; Ma, 2020; Van Harpen & Presmeg, 2013). Buna göre katılımcıların matematiksel veya geometrik alan bilgisi hakkında fikir sunması adına yüz puan üzerinden genel ağırlıklı not ortalamaları Tablo 6’da sunulmuştur. Tablo 6’ya göre katılımcıların yüz puan üzerinden genel ağırlıklı not ortalamalarının ortalaması 78,93’tür. Araştırmanın ikişer katılımcıdan oluşan altı grubunun her birine G1, G2, G3, ..., G6 ve grup üyelerine de grup numarası ile sıralı şekilde T1, T2, T3, ..., T12 kodları atanmıştır. Ayrıca verilerin transkriptinde katılımcının mensubu olduğu grubu yansıtan G1T1, G1T2, G2T3, ..., G6T12 şeklinde kodlar atanmıştır.

Tablo 6. Katılımcıların akademik başarı durumlarına ait bilgiler

Gruplar	Adaylar	Matematikte Problem Çözme	Geometri ve Ölçme Öğretimi	Bilgisayar Destekli Matematik Öğretimi	Yüz Puan Üzerinden Genel Ağırlıklı Not Ortalaması
G1	T1	AA*	AA	AA	96.96
	T2	AA	BA	BA	87.16
G2	T3	CC	BA	BB	79.93
	T4	BB	AA	CB	75.50
G3	T5	DC	CB	AA	72.46
	T6	CC	CB	CB	80.16
G4	T7	CB	BA	CC	78.06

Tablo 6 (Devam). Katılımcıların akademik başarı durumlarına ait bilgiler

G5	T9	BA	BB	CB	77.36
	T10	BB	BA	BA	77.36
G6	T11	CC	BA	BA	81.33
	T12	DC	CB	CB	70.36

*(AA: 90-100, BA: 81-89, BB: 73-80, CB: 66-72, CC: 60-65, DC: 50-59)

2.3. Veri Toplama Araçları

Bu araştırmanın veri toplama araçları şunlardır: (i) Problem Kurma Etkinlikleri (PKE) ve (ii) Problem kurma sürecinin video kaydı. Bu bölümde veri toplama araçlarına dair bilgiler sunulmuştur.

2.3.1. Problem Kurma Etkinlikleri

Problem kurma etkinlikleri tasarlanırken araştırmanın amacına bağlı olarak hem problem kurma durumu hem de yönerge değişkeni için çeşitli kriterler belirlenebilmektedir (Baumanns & Rott, 2024). Baumanns ve Rott (2024) problem kurma durumları (yapılandırılmamış ve yapılandırılmış), yönerge (açık-uçlu ve kapalı uçlu) ve matematiksel içeriği (desenler ve geometri) sistematik olarak çeşitlendirmiş ve etkinlik değişkenlerinin yaratıcı problem kurma performansı ve öğretmen adaylarının öz yeterliliği üzerindeki etkisi incelenmiştir. Bunun yanı sıra örneğin yaratıcı düşünme becerisini ele alan çalışmalardaki (örn., Van Harpen & Sriraman, 2013) yönergelerde katılımcılardan farklı ve ilginç problemler kurması istendiği fark edilmiştir. Araştırmalardaki bu ayrıntılar, yönerge değişkeninin matematiksel bilgiyi harekete geçirebilecek ve kurulacak problemleri etkileyebileceğine işaret etmektedir (Sosa-Martín vd., 2024). Bu tez çalışmasında kullanılan problem kurma etkinlikleri ile katılımcı grupların DGO’da problem kurma süreçlerinin incelenmesi amaçlanmış ve bu amaç doğrultusunda DGO’da problem kurma etkinliklerinin belirlenmesinde iki kriter dikkate alınmıştır: (i) DGO’da zengin/farklı problem(ler) kurmaya elverişli olması ve (ii) öğretmen adaylarının matematiksel/geometrik bilgisine uygun olması. Bu kriterler ışığında tez yürütücüsü, literatürü de tarayarak problem kurma durumlarına ait bir havuz oluşturmuştur (bk. Ek- 2).

Problem kurma etkinliklerinin DGO’da zengin/farklı problem(ler) kurmaya elverişli olması güçlü bir kriter olmuştur. Buna göre katılımcı grupların PKE aracılığıyla DGO’da problem kurarken, düşünme süreçlerini geniş perspektiften ele alabilmek amaçlanmış ve mevcut problem kurma durumunun çeşitli problem kurma

durumlarına evrilebileceği etkinlikler oluşturulmasına özen gösterilerek, birbirinden farklı problemlerin kurulmasına imkân tanıyan problem kurma durumlarının belirlenmesine dikkat edilmiştir. Bu anlamda araştırmada kullanmak için belirlenen problem kurma durumlarının geniş bir araştırma spektrumunda (örn., Conteras, 2007; Hoehn, 1991; Kovacs, 2017; Leikin & Elgrably, 2022; Levav-Waynberg & Leikin, 2012; Singer vd., 2017) yer aldığı belirtilebilecektir. Bu yaklaşıma paralel olarak Rott vd. (2021) deneysel çalışmasında kullandığı dörtgenler içeriğinin uygun seçim olduğunu çünkü dörtgenler hiyerarşisi hakkında araştırma literatüründe tartışmanın ve dörtgenleri sınıflama becerisine yönelik araştırmaların yaygın olduğunu belirtmiştir. Benzer olarak Lavy ve Shriki (2010) DGO’da problem kurma deneyiminin öğretmen adaylarının matematiksel ve meta-matematiksel bilgisine etkisini incelediği çalışmasında, kullandığı problem durumunun niteliklerinin zengin olduğunu ve birçok problem kurmaya elverişli olduğunu belirtmiştir. Dolayısıyla araştırma literatürü desteği ile PKE’nin şekillenmesi veri toplama aracını güçlü kılmıştır.

Literatürde zengin problemler, genel anlamda açık-uçlu problemler ile ilişkilendirilmiştir. Açık-uçlu problemler ise geometrik şeklin bileşen ve özellikleri arasındaki ilişkiler hakkında basit ve genel açıklamalar yapabilmeyi gerektirmekte (Baccaglini-Frank vd., 2017) ve kanıtlama sürecine (durumu keşfetme, varsayımlarda bulunma, varsayımları doğrulama ve onları kanıtlamak) dâhil olma fırsatı sunmaktadır (Christou vd., 2004). Bunun yanı sıra DGO’da açık problemler akıl yürütme becerisini (Baccaglini-Frank vd., 2017; Klein & Leikin, 2020) ve problemin farklı çözümleri teşvik eden doğasına bağlı olarak yaratıcılığı beslemektedir (Brunheria & Ponte, 2017; Klein & Leikin, 2020). Son birkaç on yıldır ise DGO, açık problemlerin araştırılmasında ve keşfetmeye yönelik etkinliklerde kullanılmaktadır (Baccaglini-Frank vd., 2017). DGO’da problem kurma etkinlikleri de keşfetmeyi gerektiren, çoklu başlangıç ve sonuç içeriği ile düşünme esnekliği isteyen ve üst-bilişsel çalışmayı teşvik eden içeriğe sahiptir. Çoklu giriş ve çözüm stratejilerine sahip etkinlikler ile katılımcı öğretmen adaylarının matematiksel düşünmesinin (Klein & Leikin, 2020) yanında matematiksel yeterliği açığa çıkabilecek (Crespo & Harper, 2020) ve DGO’da problem kurarken düşünme süreçlerinin en genel resmi oluşturulabilecektir. Bu kapsamda bu tez çalışmasında DGO’da farklı/zengin problemler kurmaya elverişli ve hem açık-başlangıç (open-start) hem de açık-uçlu (open-ended) problemlerden olan

birleştirilmiş (combined) problemler tercih edilmiştir (Leikin, 2018; Leikin & Elgrably, 2022).

Leikin (2018) yaratıcılığa yönelik bir grup etkinliği analiz ederek; açık-başlangıç, açık-uçlu ve birleştirilmiş olarak sınıflamıştır. Bu sınıflamada açık-başlangıç, çoklu çözüm etkinlikleri olarak tanımlanmış ve birden çok çözüm stratejisi aracılığıyla tek bir sonuca ulaşılan etkinlikler olarak kabul edilmiştir. Açık-uçlu ise çoklu sonuç etkinlikleri olarak tanımlanmış ve birleştirilmiş (açık-başlangıç ve açık-uçlu) etkinlikler ise hem birden çok çözüm yoluna/stratejisine hem de birden çok çözüm sonucuna/cevabına elverişli etkinlikler olarak değerlendirilmiştir (Leikin, 2018; Leikin & Elgrably, 2022). Leikin ve Elgrably'nin (2022) birçok çalışmasında kullandığı *araştırmalar yoluyla problem kurma* etkinlikleri ise “katılımcılara geometrik bir şeklin verildiği ve şekille ilişkili geometri problemleri kurmayı ve onları çözmeyi gerektiren matematiksel bir etkinlik” (s. 36) olarak tanımlanmıştır. Araştırmalar yoluyla problem kurma etkinliklerini bu tez çalışmasında kullanılan PKE'den ayıran tek husus problemin çözülmesinin gerekliliğidir. Çünkü araştırmalar yoluyla problem kurma etkinlikleri problemi çözmeden tamamlanmış sayılmamakta (Leikin & Elgrably, 2022) ve PKE'de böyle bir şart bulunmamaktadır.

PKE'nin geliştirilmesi sürecinde dikkate alınan diğer kriter ise etkinliklerin, öğretmen adaylarının matematiksel bilgisine uygun olmasıdır. Çünkü problem kurma matematiksel veya geometrik içerik bilgisinden etkilenmektedir (ör., Ma, 2020; Van Harpen & Presmeg, 2013). Ayrıca matematiksel alan bilgisi yetersizliğinin zayıf problem kurma performansı ile sonuçlanabileceği (Erkan & Kar, 2022; Işık vd., 2011) de bilinmektedir. Bu tez çalışmasında katılımcılardan birbirinden farklı ve ilginç problemler kurması istendiğinden, bilişsel açıdan iyi/zengin/ ilginç problem kurmak etkinliğin içeriğini derinlemesine analiz etme (örn., Leung & Silver, 1997) ve birbirinden farklı problemler kurmak ise matematiksel ilişkilendirme becerisinin gücü ile açıklanabilecektir (örn., Leikin & Grossmann, 2013). Contreras (2015) da (geometrik) problem durumunun dinamik temsiliyi oluşturmanın ve değiştirmenin duruma ait kavram ve kavramlar arası ilişkilerin derinlemesine anlaşılmasını gerektirdiğini ifade etmiştir. Bu noktada problem durumunun analiz edilmesinde ve farklı bağlantılarla ilişkilendirmeler yapılmasında mevcut matematiksel veya geometrik bilgi işe koşulmakta ve dinamik yazılım desteği ile problem durumu

görselleştirilerek, anlaşılabilirliği artmaktadır. Bu kapsamda öğretmen adaylarının DGO’da problem kurma süreçlerinin incelenmesi için hazırlanan PKE’nin öğretmen adaylarının matematiksel bilgisine uygun olması dikkate değer ve isabetli bir kriter olmuştur.

Tez danışmanı ve yürütücüsü tarafından PKE’nin geliştirilmesi için belirlenen iki kriter göz önüne alınarak, çeşitli akademik kitap ve makaleler (örn., Arzerolla, 2002; Baumanns, 2022; Christou vd., 2005b; Hoehn, 1991; Kovacs, 2017; Leikin, 2014; Olivero, 1999; Posamentier & Salkind, 1996; Segal vd., 2018; Van Harpen & Presmeg, 2013) incelenmiştir. Yapılan inceleme neticesinde 13 problem kurma durumu belirlenmiş ve her biri için kurulabilecek problemler örneklendirilerek, etkinliğin matematiksel içeriği detaylandırılmıştır (bk. Ek-1). Ek-1’deki birtakım problem kurma durumuna açık-uçlu problemler ile yakından ilişkili olan yaratıcılık temalı araştırmalarda sıklıkla yer verilmiştir. Örneğin, 7 nolu problem kurma durumu (bk. Ek-1) Singer vd.’nin (2017) çalışmasında matematik öğretmen adaylarının matematiksel yaratıcılığının problem kurma aracılığı ile analiz edilmesine hizmet etmiştir. 11 nolu problem kurma durumu (bk. Ek-1) ise Leikin ve Elgrably (2022) çalışmasında matematik olimpiyat yarışmalarına katılma deneyimi ve problem çözme uzmanlığı bulunan adayların matematiksel uzmanlığı ve yaratıcılığı gibi üst-düzey becerileri hakkında fikir edinmek için kullanılmıştır. Özetle bu problem kurma durumları yaratıcılık bağlamındaki çalışmalarda da kullanılması nedeniyle çok çeşitli problemler üretilmesine fırsat sunmakta ve etkinliklerin belirlenmesinde esas alınan kriterleri karşılamaktadır.

Tez danışmanı ve yürütücüsü PKE’nin tasarlanması sürecinde problem kurma durumlarının yanında kullanılacak yönerge için de alternatifler üzerinde tartışmıştır. Bu araştırmada katılımcıların DGO’da problem kurma süreçleri hakkında detaylı analizler yapabilmek için mümkün olduğu kadar çok veri elde edebilmek amaçlanmıştır. Bu amaçla yürütülen tartışmada katılımcılardan “... birbirinden farklı ve ilginç” problemler kurmasını istenmesi yönünde fikir birliği sağlanmıştır. Crespo ve Sinclair (2008) ise bir problemi “iyi” yapan şeyin matematiksel açıdan daha zengin olmasına yol açan durumla aynı olduğunu ifade ederek, matematiksel açıdan “ilginç” kavramının tam olarak tanımlanmadığını (s. 404) belirtmiş ve iyi problem ile açık-uçlu problemleri ilişkilendirmiştir. Buna göre iyi problem etkinliğin içerdiği ve gerektirdiği

matematiği genişletmekte (Crespo & Sinclair, 2008) ve zengin problem ise ilginç zorluk (Guberman & Leikin, 2013) ve iyi (Crespo & Sinclair, 2008) gibi nitelemeler ile tanımlanabilmektedir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının kurduğu problemlerin mümkün olduğu kadar iyi, ilginç ve farklı olması amaçlanmış ve bu problemleri kurma süreçleri hakkında yeterli veri elde edebilmek niyetiyle yönergede “... birbirinden farklı ve ilginç” ifadesinin yer alması gerektiği isabetli bir karar olmuştur. Buna karşılık tez danışmanı ve yürütücüsü problem kurma etkinliklerinin zaman alıcı ve bilişsel açıdan zorlayıcı olmasını dikkate alarak, veri toplama aracında 3 etkinlik kullanmanın yeterli olacağını düşünmüştür. Böylece PKE’deki 3 etkinliğin belirlenmesi amacıyla 13 problem kurma durumu (bk. Ek-1) ve alternatif 2 yönerge ile bilgisayar destekli matematik öğretimi ve/veya sınıf içi teknoloji kullanımına yönelik lisans ve lisansüstü düzeyde ders verme deneyimine sahip iki öğretim üyesinin (Uzman 1 [U1] ve Uzman 2 [U2]) görüşlerine başvurulmuştur. Uzmanlara çalışmanın kapsam ve amacını yansıtan rapor ile birlikte Ek-1 sunulmuş ve belirlenen kriterler kapsamında 3 problem kurma durumunu ve yönerge önerisini gerekçesiyle belirtmeleri istenmiştir. Ayrıca uzmanlardan çalışma tasarımı (örn., uygulama süreci), etkinlik veya yönerge için varsa farklı önerilerini sunması da talep edilmiştir. Bu kapsamda U1 ve U2, etkinliklerin matematiksel içeriği veya dili yönünden olumsuz bir değerlendirmede bulunmamış ve uygulama sürecine (grup etkinliği, etkinlik ve oturum sayısı vb.) dair herhangi bir değerlendirme yapmamıştır. U1, uygulama için alternatif yönerge ve problem kurma durumu önermemiştir. U1, uygulama için Ek-1’de sunulan 6, 9 ve 12 numaralı problem kurma durumlarını tercih etmiş ve çalışmada kullanılması adına tercih ettiği durumlar için genel bir değerlendirme de yapmıştır: Genel olarak farklı problem türlerinin daha değerli olabileceğini düşündüm. 1 üçgen, bir dörtgen, bir de çember ile ilgili problemler önerdim.

U2 ise herhangi bir etkinlik önerisinde bulunmamışken, etkinlik tercihlerinde ağırlıklı olarak ikinci kriteri (öğretmen adaylarının bilgi düzeyine uygun olması) dikkate almış ve Ek-1’de sunulan 1, 3 ve 5 numaralı problem kurma durumlarını tercih etmiştir. Böylece iki uzman tarafından birbirinden farklı problem kurma durumları önerilmiş ve her iki uzmanın ortak görüşleri dikkate alınmıştır. Özellikle U1’in araştırmada birbirinden farklı geometrik içeriğe sahip etkinliklerin kullanılmasına yönelik önerisi değerli bulunmuş ve etkinliklerde 3, 6 ve 12 numaralı problem kurma

durumlarının yer almasına karar verilmiştir. Üç numaralı problem kurma durumu U2 tarafından önerilmiş ve U2 şeklin içerdiği geometrik kavramların ve ilişkilerin öğretmen adaylarının bilgi düzeyi ile uyumlu ve çeşitli keşifler yapmaya uygun olduğunu vurgulamıştır. Altı numaralı problem kurma durumu çemberle ilişkili olup, U1 tarafından tercih edilmiş ve araştırmada elde edilen verilerin çeşitliliği bakımından önem göstereceği belirtilmiştir. Çember ve daire içeriğine ait çok sayıda formül, teoremin bulunduğu bilinmekte ve bu formüllerin her biri birbirinden farklı problem kurmanın tetikleyicisi olabilecektir. Son olarak 12 numaralı problem kurma durumunun ise oldukça fazla sayıda problem kurmaya uygun olduğu vurgulanmıştır. Bununla birlikte uzmanlara iki yönerge sunulmuştur: “Size verilen geometrik şekli GeoGebra yazılımından da faydalananarak analiz ediniz. Şekle yönelik analizlerinizde çeşitli geometrik bileşenleri kaldırabilir, yeni bileşenler ekleyebilir veya şeklin bileşenlerini farklı formlara dönüştürebilirsiniz. Şekil üzerinde yaptığınız sorgulamalarınıza dayalı olarak kurabildiğiniz kadar farklı ve ilginç problemler kurunuz.” (Yönerge 1) ve “Size verilen geometrik şekli inceleyiniz. Bu şekil üzerinde matematiksel araştırmalar yaparak kurabildiğiniz kadar farklı ve ilginç problemler kurunuz.” (Yönerge 2). Bu yönergeler karşılık U1, yönerge 1’in daha anlaşılır olduğunu vurgulamış ve U2 ise iki yönergenin harmanlanması gerektiğini önermiştir. Buna göre iki uzmanın görüşleri de dikkate alınarak, Şekil 22’deki yönerge üzerinde karar kılınmıştır.

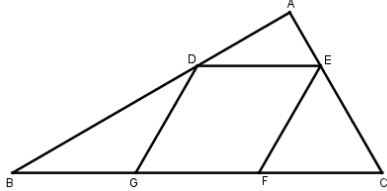
PKE’nin belirlenmesinin ardından her biri iki öğretmen adayından oluşan iki grup ile pilot uygulama yapılmıştır. Pilot uygulaması 19.05.2023-11.06.2023 tarihleri arasında yapılmış ve gruplar birinde 2 diğesinde 1 etkinlik olmak üzere iki oturumda çalışmış ve süreç katılımcılar tarafından yoğun bulunmuştur. Bu sebeple esas uygulamanın iki oturumda ve birer etkinlik ile yürütülmesine karar verilmiştir. Örneğin pilot çalışmada uygulanan üç etkinlikten biri olan 6 nolu problem kurma durumu —çember ve çemberde kuvvet ile ilgili— (bk. Ek-1) olup, pilot uygulanan katılımcılarda çember ile ilişkili oluşumları ortaya koyarken ve çembere ait formülleri hatırlarken zorluk yaşandığı fark edilmiştir. DGO’nun doğasından kaynaklı ve akıl yürütmeyi etkileyen çatışma literatürde de yer bulmaktadır (örn., Olivero & Robutti, 2007). Bu sebeple araştırmanın asıl uygulama sürecinde katılımcı adayların bilişsel süreçlerinde sapma veya aksamaları en aza indirmek için çemberle ilgili etkinliğe yer

verilmemiştir. Bu doğrultuda bu tez araştırmasında yer alan etkinliklere Şekil 22’de yer verilmiştir.

Verilerin en sağlıklı şekilde elde edilmesinin nasıl sağlanabileceğine karar vermek için pilot uygulamada katılımcı iki gruptan birine GeoGebra’da inşa edilmiş sağlam yapı ve diğerine ise yalnızca etkinlik kâğıdı sunularak, GeoGebra ekranı açılmıştır. Bunun neticesinde aday öğretmenlerin etkinlikteki geometrik problem kurma durumunu, etkinlik koşullarını sağlayacak şekilde inşa etmede zorluk yaşadığı fark edilmiş ve bu durumun kurulacak problemlerin geçerliğini etkileyeceği endişesinden dolayı araştırmanın asıl uygulamasında gruplara, GeoGebra’da inşa edilmiş ve sürüklemeye altında değişmez özellikleri korunan sağlam şekiller sunulmuştur (Jones, 2001; Laborde, 2005). Leikin (2014) da genellikle ileri seviye matematik derslerinde veya matematik öğretmeni adayları için geometrik yapının kendileri tarafından oluşturulmasını ve orta veya düşük seviye matematik derslerinde veya öğretmen adayları için ise hazır halde çeşitli yapılar sunulmasını önermiştir.

Eşkenar Dörtgen Etkinliği

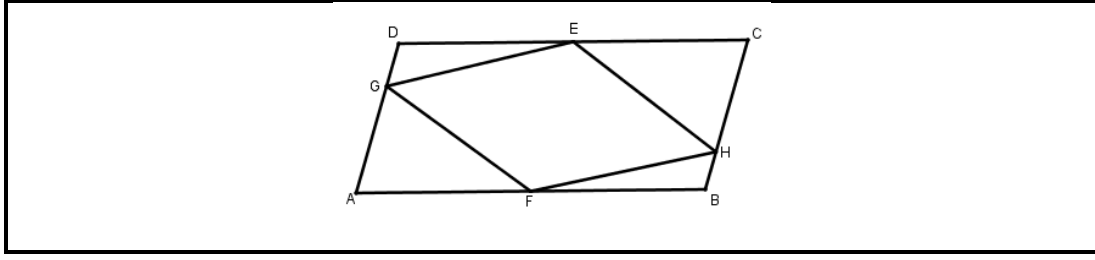
Aşağıdaki geometrik şekilde DEFG bir eşkenar dörtgen olup, $|BG|=|GF|=|FC|$ dir. Bu geometrik şekli GeoGebra yazılımında inceleyerek, şekle ait özellikleri ve ilişkileri araştırınız. Araştırmanız sonucunda elde ettiğiniz durumlardan hareketle kurabildiğiniz kadar birbirinden farklı ve ilginç problemler kurunuz.



Paralelkenar Etkinliği

Aşağıdaki geometrik şekilde ABCD bir paralelkenar olup, E ve F noktaları sırasıyla DC ve AB’nin orta noktalarıdır. Bu geometrik şekli GeoGebra yazılımında inceleyerek, şekle ait özellikleri ve ilişkileri araştırınız. Araştırmanız sonucunda elde ettiğiniz durumlardan hareketle kurabildiğiniz kadar birbirinden farklı ve ilginç problemler kurunuz.

Şekil 22. Araştırmada kullanılan etkinlikler



Şekil 22 (Devam). Araştırmada kullanılan etkinlikler

2.3.2. Problem Kurma Sürecinin Video Kaydı

Bu araştırmanın verilerinden biri, dikkat çekmeyen ve katılımcıların olağan şekilde davranmasına uygun ancak yorumlaması zor kabul edilen görsel-ışitsel nitelikteki video/ekran kayıtlarından (Creswell, 2017) elde edilmiştir. Buna göre iki etkinlik üzerinden 8 saat 51 dakikalık video kaydedilmiş ve veri analiz sürecinde araştırma problemlerini yanıtlamak için video içeriği tekraren izlenmiştir. Video verisi olarak GeoGebra kullanımı, Microsoft PowerPoint ekran kaydı özelliği ile eş zamanlı olarak kaydedilmiştir. Araştırma sürecine ait akış şemasında da (Şekil 21) belirtildiği üzere altı grup öğretmen adayı, üniversitenin matematik laboratuvarı koşullarında çiftler halinde çalışmış ve çiftlerin karşısına kamera yerleştirilmiştir. Böylece yazılım ve insan etkileşimini bütünleştiren DGO'nun doğasına uygun şekilde ve veri kaybı minimize edilerek, veriler kayıt altına alınmıştır.

Araştırmanın verileri, 06.11.2023 ve 11.12.2023 tarihleri arasında altı gün ve ikişer oturumda elde edilmiştir. Çalışmaya gönüllü katılmayı kabul eden gruplara, çalışmanın iki oturumda ve pilot uygulamaya göre yaklaşık 2 saatlik sürede tamamlanacağı bilgisi ile çalışmanın kapsamı çalışmanın başında bildirilmiştir. Katılımcılar problem kurmak için yeni fikir çıkmayacağına karar verip, süreci sonlandırmak istediğinde video ve kamera kaydı durdurulmuştur.

2.4. Veri Analizi

Bu araştırmanın verileri, altı grubun problem kurma etkinliklerine yönelik video/ekran kayıtlarından, GeoGebra dosyalarından ve bu süreçteki yazılı belgelerinden elde edilmiştir. Grupların problem kurma süreçleri iki etkinlik üzerinden incelenmiştir (Şekil 22). Eşkenar dörtgen etkinliğine yönelik problem kurma süreci en düşük 34 dk 10 sn ve en yüksek 81 dk sürmüş olup, ortalaması 45 dk 34 saniyedir. Paralelkenar etkinliğine yönelik problem kurma süreci ise en düşük 29 dk 50 sn ve en

yüksek 49 dk sürmüş olup, ortalaması 38 dk 22 saniyedir. Katılımcıların problem kurma süreçlerine dair video kayıtları da ayrıca transkript edilmiştir. Altı grubun problem kurma süreçlerinin transkriptlerinin her biri ortalama 30 sayfa olup, tüm süreci yansıtan yaklaşık 200 sayfa transkript oluşturulmuştur. Grupların problem kurma süreçleri, süreci yansıtan transkriptlerinden ziyade video kayıtlarının sırasıyla makroskobik ve mikroskobik olarak ele alınması ile incelenmiştir (Baumanns & Rott, 2022b; Rott vd., 2021; Schoenfeld, 1992). Buna göre iki etkinlik üzerinden toplamda 496 dk 35 sn video içeriği analiz edilmiştir.

Grupların DGO'da problem kurma süreçleri ve DGO'nun işlevlerinin bu süreçteki katkısı, tümdengelimsel ve tümevarımsal analitik yaklaşımların birleşimi ile detaylandırılmıştır (Kuckartz, 2019; Mayring, 2014; Patton, 2002). Buna göre araştırma literatürü (kavram-odaklı) ışığında tümdengelimsel kategorilerin ve ham verilerden (veri-odaklı) elde edilen tümevarımsal kodların sistematik karşılaştırılması ile sürece ilişkin analizler yapılmıştır (DeCuir-Gunby vd., 2011; Kuckartz, 2019; Mayring, 2014). Bu şekilde ham verilere atanan tümevarımsal kodlar, araştırma verilerine rehberlik eden araştırma literatürünü destekleme veya literatür ile çelişen yönleri açığa çıkarma potansiyeline sahiptir (DeCuir-Gunby vd., 2011). Buna göre kodlayıcı araştırmacıların teorik bilgi alt yapısı ve yöntemsel deneyimi gibi özellikler, veriye bakışı etkilemekte ve veri analizi için önem arz etmektedir (Cofie vd., 2022; Willig, 2013). Bu kapsamda grupların problem kurma süreçlerine ait video içerikleri, problem kurma deneyimi bulunan iki araştırmacı (Kodlayıcı 1 [K_1] ve Kodlayıcı 2 [K_2]) tarafından analiz edilmiştir.

Bundan sonraki kısımda veri analiz süreci sırasıyla araştırma sorularına paralel şekilde detaylandırılmıştır. Öncelikle katılımcı grupların DGO'da problem kurma süreçlerine ilişkin analizlere ardından DGO'nun işlevlerinden bu süreçte nasıl yararlanıldığına yönelik analizlere yer verilmiştir.

2.4.1. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Dinamik Geometri Ortamında Problem Kurma Süreçlerine Ait Veri Analizi

Cai ve Rott'un (2024) geliştirdiği genel problem kurma süreç modeli, katılımcıların DGO'da problem kurma süreçlerinin analizinde referans alınmıştır. Kodlayıcılar, altı gruptan rastgele seçilen iki grubun video içeriklerini ve yazılı

yanıtlarını birbirinden bağımsız olarak genel problem kurma süreç modeline göre analiz etmiştir. Analiz edilen içerikler toplam video içeriğinin yaklaşık %33'ünü (165/496 dk) oluşturmuştur.

Katılımcılardan birbirinden farklı ve ilginç problemler kurmaları istendiğinden, her grubun problem kurma süreci birden çok problemi kapsamaktadır. Bu süreçte incelenen video içerikleri kurulan her bir problem için ilk etapta makroskobik olarak ele alınmış ve genel problem kurma süreç modeli çerçevesinin bileşenlerine göre kategorilendirilmiştir. Ardından modelin bileşenleri mikroskobik olarak ele alınmış ve bileşeni karakterize eden veri odaklı kodlamalar yapılmıştır. Genel problem kurma süreç modelinin her bir bileşenini yansıtan veri odaklı kodlar, anlamlı gruplar halinde birleştirilmiş ve sınıflandırılmıştır. Son olarak, grupların DGO'da problem kurma süreçlerinin genel problem kurma süreç modeli adımlarına göre akış sırası analiz edilmiş ve grupların iki etkinlik boyunca geçiş sıklığına göre aşamalar arasındaki seyri ortaya konulmuştur. Bağımsız yapılan analizlerin fayda ve uygulamasını tartışmak; yapılan analizlere dair fikir birliği sağlamak, araştırma güvenilirliğini belirlemenin önemli bir yoludur (Cofie vd., 2022; DeCuir-Gunby vd., 2011; Flick, 2007). Bu bağlamda kodlayıcılar bağımsız analizlerini tartışarak, veri analiz çerçevesi için mutabakat sağlamıştır. Genel problem kurma süreç modelini yansıtan içerik netleştirilmiş ve belirlenen ortak kod ve kategoriler üzerinden kalan dört grubun verileri K₂ tarafından analiz edilmiştir. Süreçte ortaya çıkan belirsizliklerde kodlayıcılar tekrar bir araya gelerek son kararı vermiştir. Aşağıda genel problem kurma süreç modeli çerçevesinin her bir bileşenine yönelik yapılan analizlere yer verilmiştir.

Yönelim (Orientation) Aşamasına İlişkin Analizler: Yönelim aşaması en genel tanımı ile problem kurma etkinliğini anlamaya karşılık gelmektedir. Problem kurma etkinliği ise bir problem durumundan ve problem kurucuya yüklenen misyonu ifade eden bir yönergeden oluşmaktadır (Cai vd., 2022). Bu noktada yönelim aşamasını karakterize eden ve problem kurma etkinliğini oluşturan her iki bileşeni de vurgulayan birtakım sorular bulunmaktadır: “Durum nedir? Durumda verilen bilgi nedir? (Yönergede) Problem kurucudan ne yapması isteniyor? Etkinlik hangi ilişkileri barındırıyor?” (Cai & Rott, 2024, s. 68). Bu sorular ışığında K₁ ve K₂ bağımsız yaptıkları analizler neticesinde, yönelim aşamasını yansıtan çeşitli durumlar tespit

etmiş ve bunları iki kategori altında tasnif etmek üzere fikir birliği sağlamıştır. Geriye kalan verilerin analizinde yeni kategori oluşturulmamıştır. Yönelim aşaması için üzerinde uzlaşılan birinci kategori problem durumunu incelemedir (Tablo 7). Problem kurma durumunun incelenmesi, duruma gömülü matematiksel kavram ve ilişkilerin açığa çıkmasına (Leung & Silver, 1997) ve böylece matematiksel açıdan geçerli ve ilginç problemlerin ortaya konulmasına destek olabilecektir (Kar vd., 2025b). Kodlayıcılar problem durumunu inceleme kategorisine ait başlangıçta iki kod üzerinde uzlaşmıştır. Geriye kalan verilerin analizinde yeni kod tespit edilmemiştir (Tablo 7).

Yönelim aşaması için üzerinde uzlaşılan ikinci kategori yönergeyi incelemedir. Kodlayıcılar bağımsız yaptıkları analizler neticesinde, yönergeyi inceleme kategorisi için başlangıçta herhangi bir kod oluşturmamıştır. Buna karşın kodların oluşturulmasına yönelik yapılan tartışmada; yönergenin yalnızca problem kurma sürecinin başlangıcında dikkate alınmadığı, problem kurma sürecine yayılabildiği konusunda hemfikir olunmuştur. Fakat yönelim aşaması problem kurucuların etkinlik istemine uyum sağladığı zaman dilimini kapsamaktadır (Cai & Rott, 2024). Bu zaman dilimi ise problem fikrinin belirtmeye başladığı an ile sınırlıdır. Cai ve arkadaşları (2024) problem durumu ve yönerge değişkenlerinin problem kurma ürün ve sürecine etkisini ortaya koymayı amaçladıkları çalışmada, yönergenin katılımcıların matematiksel odaklanmasını etkileyebileceğinin üzerinde durmuştur. Etkinliğin matematiksel yapısına odaklanma; problem fikrini şekillendiren önemli bir unsur kabul edildiğinde (Erkan & Kar, 2022; Kar vd., 2025b; Leung & Silver, 1997), yönergenin de problemi şekillendiren bir etmen olduğu sonucuna ulaşılabilmektedir. Bu anlamda yapılan tartışmalarda etkinlik bağlamına uyum sağlama amacıyla yönergeyi inceleme ve problem fikrinin şekillenmesinde rolü bulunan yönerge değişkeninin süreçte dikkate alınması gibi bir ayrım söz konusu olmuştur. Bu doğrultuda geriye kalan verilerin analizinde yönergeyi inceleme kategorisine dair K₂ tarafından herhangi bir kod tespit edilmemiştir.

Tablo 7. Yönelim aşamasına ilişkin oluşturulan kategori ve kodlar

Kategori ve Kodlar	Açıklamalar
<i>Problem durumunu inceleme</i>	Problem kurma etkinliğindeki matematiksel içerik (matematiksel kavramlar ve ilişkileri) dinamik veya statik çalışma ortamında incelenmektedir.

Tablo 7 (Devam). Yönelim aşamasına ilişkin oluşturulan kategori ve kodlar

Mevcut verileri betimleme	• Problem kurma durumu içindeki veri şekil üzerine yerleştirilir.
Mevcut verilerden çıkarsanabilecek ilişkileri belirleme	• Problem kurma durumundan, matematiksel sonuçlar (ör., eş açılar, paralellik veya benzerlik durumlarının belirlenmesi) çıkarılır veya doğruluğu kontrol edilir.
	• Mevcut geometrik yapıdaki geometrik şekiller gözlenir ve listelenir.

Bağlantı Kurma (Connection) Aşamasına İlişkin Analizler: Bağlantı kurma aşaması, en genel tanımı ile problem kurmak için fikir üretmeye karşılık gelir. Bu dinamik aşamayı karakterize eden birtakım sorular bulunmaktadır: “Merak ettiğim şey nedir? A, B ile ilişkili midir? İlişki doğru mudur?” (Cai & Rott, 2024, s. 68). Bu sorular ışığında kodlayıcılar bağımsız yaptıkları analizler neticesinde, bağlantı kurma aşamasını yansıtan çeşitli kodlar üretmiş ve bu kodları üç kategori altında tasnif etmek üzere uzlaşmıştır (Tablo 8).

K_1 bağlantı kurma aşamasına yönelik yaptığı bağımsız analizlerinde, mevcut şeklin parçaları arasında ve mevcut şekle eklenen yeni veriler aracılığıyla kurulan yapısal bağlantılara dikkati çekmiştir. Bu hâliyle K_1 , katılımcı grupların geometrik şeklin kritik niteliklerini dikkate alarak, hangi matematiksel veya geometrik kavramları problem kurma sürecine dâhil etmek istediğinin üzerinde durmuştur. Bu yaklaşım matematiksel düşünmenin mantıksal ve tümdengelimsel doğasına işaret etmektedir (Fischbein, 1990). Buna karşılık K_2 yaptığı analizlerde sezgisel bilginin ve pedagojik faktörlerin yönlendirmesiyle üretilen bağlantılara dikkati çekmiştir. Sezgisel bilgi anlık yorumlamalara ve pratik deneyimlere bağlı, gerekçelendirmeye ihtiyaç duyulmaksızın kabul edilen kalıcı bilişi ifade etmektedir (Tirosh & Tsamir 2022; Tsamir vd., 2008). Buna göre mantıksal ve tümdengelimsel düşünmeyi her zaman desteklemeyen sezgisel bilgi, öznel ve dolaysız yorumlamalara kesinlik niteliği yükleyen matematiksel düşünmeye karşılık gelmektedir (Fischbein 1990; Fischbein, 2002, Tsamir vd., 2008). Sezgiyle beslenen özgür ve üretken düşünce (Mariotti & Pedemonte, 2019) dinamik yapıya ilişkin yeni bağlantıların kurulmasına aracı olabilecektir. Ayrıca sezgisel düşünme karakteristik olarak iyi tanımlanmış adımlar ile ilerlemezken, sezgisel düşünür düşünce yapısının çok az farkında olarak ilerlemekte ve düşüncelerini yeterince açıklayamamaktadır (Mariotti & Pedemonte, 2019). Bu

analizlere paralel, Cai ve Cifarelli (2005) problem çözme ve kurma sürecinde muhakeme stratejilerinin değişiklik gösterdiğini belirlemiş ve veri ve hipoteze dayalı gelişen matematiksel keşif stratejilerini öne sürmüştür. Araştırmacılar ortaya konulan stratejilerin, matematiksel keşiflerin analizlerine odaklanan çalışmalar için yararlı olabileceğine değinmiştir.

Öğretmen adayları ile yürütülen araştırmalarda, katılımcıların problem kurma süreçlerine pedagojik gereksinimlerin açık veya örtük şekilde eşlik edebildiği tartışmasız bir gerçektir (Baumanns & Rott, 2024; Erkan & Kar, 2022). Örneğin Erkan ve Kar (2022) öğretmen adaylarının problem biçimlendirme süreçlerinde günlük yaşam ile ilişkilendirme ve öğrenci düzeyini düşünme gibi faktörlerin etkili olduğunu belirlemiş ve bu faktörleri süreci etkileyen öğretimsel faktörler çatısı altında birleştirmiştir. Bu bilgiler, veri odaklı kodlamaların anlamlı gruplar halinde birleştirilmesine ve kategorilendirilmesine ışık tutmuştur. Bu kapsamda kodlayıcılar, bağlantı kurma aşamasına ilişkin tartışmalarını zenginleştirmiş ve bağlantıların nasıl veya ne amaçla kurulmaya başlandığına göre bağlantı kurma aşamasını yapısal (veri-odaklı), sezgisel (hipotez-odaklı) ve eğitsel (pedagojik-odaklı) bağlantılar şeklinde kategorilendirmiştir (Tablo 8).

Yapısal (veri-odaklı) bağlantılar altında iki kod sunulmuştur. Bu kodlar mevcut geometrik yapının kritik özelliklerini dikkate alarak, mevcut şekil veya şekle yardımcı yapılar ekleyerek ortaya çıkan yeni yapı üzerinden kurulan, veriye dayalı bağlantıları temsil etmektedir. Bunun yanında mevcut şekle ait bilinen prosedürlerin işe koşulması ile de tanımlanabilecektir. Sezgisel (hipotez-odaklı) bağlantılar kategorisi altında da iki kod bulunmaktadır. Kodlar deneyim ve merak duygusunun eşlik ettiği sezgisel bilgi aracılığıyla, mevcut geometrik şeklin veya şekle eklenen yardımcı elemanlarla oluşan yeni yapının öğeleri arasındaki olası ilişkileri açığa çıkarmayı ve varsayıma dayalı bağlantıları kapsamaktadır. Bunların dışında yapılan analizlerde pedagojik gereksinimlerin dikkate alınmasıyla ortaya konulan bağlantılar fark edilmiş ve eğitsel (pedagojik-odaklı) bağlantılar altında kategorilendirilmiştir. Örneğin; bazı katılımcılar kendi eğitim süreçlerinden veya ders kitaplarından yola çıkarak, aşına oldukları problem(ler)i sürece katmak istemiştir. Benzer şekilde problemin potansiyel çözücüsünün öğrenci olduğuna istemsizce kanaat getirip, öğrencinin bilgi ve muhakemesini açığa çıkarmayı amaçlayan bağlantılar kurmayı hedeflemişlerdir.

Bunların yanında kurulan bağlantılar arasında, günlük yaşam ilişkilendirmeleri de söz konusu olmuştur. Günlük yaşam ilişkilendirmelerinin başlangıçta ayrı bir kategori olarak sunulması düşünülmüş ancak yapılan tartışmada günlük yaşam ilişkilendirmelerinin de öğretimsel kaygılar taşıdığı ve eğitsel bağlantılar ile tek çatı altında birleştirilmesine yönelik fikir birliği sağlanmıştır. Bu kapsamda bağlantı kurma aşamasına ait ortaya çıkan kod ve kategorilerin ayrıntılı açıklamalarına Tablo 8’de yer verilmiştir.



Tablo 8. Bağlantı kurma aşamasına ilişkin oluşturulan kategori ve kodlar

Kategori ve Kodlar	Açıklamalar
<i>Yapısal (veri-odaklı) bağlantılar</i>	Problem kurmak için geometrik yapıdaki şekiller ve aralarındaki ilişkilere yönelik incelemeler yapılmaktadır. Genel anlamda mevcut şekle ait bilinen prosedürlerin işe koşulması ile tanımlanabilecektir.
Mevcut şeklin bileşenleri arasında bağlantılar kurmak	Mevcut geometrik şekildeki bileşenler ve aralarındaki ilişkilere (örn., uzunluk veya alanlar arasındaki değişimler) odaklanılır.
Mevcut şekle yardımcı elemanlar ekleyerek yapısal bağlantılar kurmak	Mevcut geometrik şekle yardımcı elemanlar eklenerek ortaya çıkan yapı üzerinden bileşenler ve aralarındaki ilişkilere odaklanılır.
<i>Sezgisel (hipotez-odaklı) bağlantılar</i>	Mevcut veya yeni elemanlar eklenerek oluşturulan geometrik şekildeki öğeler arasında sezgilere dayalı olarak ortaya konulan ilişkilere odaklanılır. Genel anlamda mevcut şekle ait bilinen prosedürlerin tükenmesi ile kurulan bağlantıları tanımlamaktadır.
Varsayımlar üreterek bağlantılar kurmak (... Olsa ne olur? What happens if ...)	Deneyim ve keşfe dayalı olarak geometrik şeklin parçalarının çağrıştırdığı ilişkiler üzerinden problem konusu olabilecek varsayımlar üretilir (örn., “Ya şöyle olsa ne olur?” “Farz edelim ki ...” “Diyelim ki ...” gibi ifadeler kullanılır).
Raslantısal bağlantılar kurmak	Geometrik şeklin anlık görünümüne dayalı veya şekle veri ekleme aracılığıyla, olası bağlantılar kurulmaya çalışılır.
<i>Eğitsel (pedagoji-odaklı) bağlantılar</i>	Pedagojik gereksinimlerin açık veya örtük şekilde dikkate alınması sonucunda geometrik şekildeki bileşenler ve aralarındaki ilişkilere yönelik bağlantıların kurulmasıdır.
Günlük yaşam bağlantıları	Geometrik şekil günlük yaşam bağlamlarıyla ilişkilendirilir.
Öğretimsel bağlantılar	Öğrencilerin matematiksel öğrenmesi için önemli olduğu ön görülen ilişkilere odaklanılır.
	Geometrik şeklin çağrıştırdığı problem tipleriyle bağlantı kurulur.

Oluşturma (Generation) Aşamasına İlişkin Analizler. Oluşturma aşaması, problemi yazıya geçirmeye ve görünür kılmaya karşılık gelir. K_1 bağımsız analizlerinde katılımcıların problemi yazma esnasında gerçekleştirdiği problem ifadesindeki kelime dönüşümlerine dikkati çekmiştir. K_2 ise katılımcıların problemi yazma esnasında problem içeriğine yönelik sürdürdüğü tartışmalara odaklanmıştır. Bu fikir havuzu neticesinde K_1 ve K_2 , oluşturma aşamasını yansıtan çeşitli kodlar üretmiş ve bu kodları iki kategori altında derlemiştir. Ardından geriye kalan verilerin analizleri K_2 tarafından gerçekleştirilmiştir. Buna göre oluşturma aşamasını yansıtan altı kod üretilmiş ve iki kategori altında tasnif edilmiştir (Tablo 9).

Oluşturma aşamasını yansıtan kategorilerden biri anlamsaldır (Tablo 9). Anlamsal kategorisi altında dört kod sunulmuştur. Bu kodlar kurulan problemin yapısal ve bağlamsal yönüne vurgu yapmaktadır (Goldin & McClintock, 1979). Örneğin katılımcılar arasında, problem cümlesinin çözülebilirliği için yeterli veri içerip, içermediği söz konusu olabilmektedir. Bununla birlikte problem cümlesinde sunulan verinin çözümü aşikâr edip etmemesi de dikkate alınmaktadır. Ayrıca problem cümlesi oluşturulurken, problemin hedef kitlesinden beklentileri niteleyen ifadeler yer verildiği de fark edilmiştir. Bu ifadeler örneğin kapalı uçlu bir problemin açık-uçlu hâle dönüştürülmesine hizmet edebilmektedir. Problem cümlesini oluştururken, kurulan problemin çözümünün dinamik veya statik ortamda gerçekleştirilmesine yönelik bağlamını yansıtan ifadeler yer verildiği de dikkati çekmiştir.

Oluşturma aşamasını yansıtan diğer kategori dilseldir (Tablo 9). Dilsel kategorisi problem cümlesindeki sayı ve sembollerin kullanımına ilişkin yönü vurgulamaktadır (Goldin & McClintock, 1979). Buna göre oluşturma aşamasında, problem ifadesindeki nicel verileri düzenleme amacı taşıyan müdahaleler ve matematiksel sembol ve gösterimlerin doğruluğuna yönelik düzenlemeler yapılması söz konusudur.

Tablo 9. Oluşturma aşamasına ilişkin oluşturulan kategori ve kodlar

Kategori ve kodları	Açıklamalar
<i>Anlamsal (Semantik)</i>	Problem cümlesinin yapısal ve bağlamsal yönüne ilişkin düzenlemeleri kapsamaktadır.
Problem ifadesine dinamik yönerge(ler) ekleme	Kurulan problemin dinamik yazılım aracılığıyla çözülmesine yönelik problem cümlesinde dinamik yönergeler eklenir.
Problemin çözülebilirliğini söz konusu yapma	Problemin yazımındaki ifadelerin çözülebilir bir problemin ortaya çıkışına hizmet edip etmediği kararlaştırılır.
Problemin karmaşıklığını söz konusu yapma	Problemin yazımındaki ifadelerin çözümü aşikâr edip etmediği kararlaştırılır.
Problem çözücünden beklentileri karşılayan ifadelere yer verilmesi	Kelime dönüşümleri aracılığıyla kapalı uçlu problemde açık-uçlu problem üretilir.
<i>Dilsel (Söz dizimi)</i>	Soru köküne “neden, açıklayınız” gibi öğretimsel hedefli ilaveler yapılır.
Problem ifadesindeki nicel verileri düzenleme	Problem cümlesinde sayı ve sembollerin kullanımına ilişkin yönü vurgulamaktadır.
Problem ifadesinde matematiksel notasyonları düzenleme	Problemin nicel parametreleri üzerinde düzenlemeler yapılır (örn., çözümü kolay kılan uygun sayılar kullanma).
	Matematiksel sembol ve gösterimlerin yazımının doğruluğu sorgulanır.

Yansıtma (Reflection) Aşamasına İlişkin Analizler: Yansıtma aşaması en genel anlamda problem kurma sürecinin değerlendirilmesine karşılık gelir. Buna göre bir problemi kurduktan sonra, bir problemenden diğerine geçerken ve tüm problemleri ortaya koyduktan sonra yansıtma şeklinde görülebilecektir (Cai & Rott, 2024). Bu aşamayı karakterize eden birtakım sorular bulunmaktadır: “Problemler(im) çözülebilir mi? Problemler(im) zor mu?” (Cai & Rott, 2024, s. 68). Bu sorular paralelinde kodlayıcılar yansıtma aşamasına ilişkin yaptıkları bağımsız analizler neticesinde, potansiyel kod ve kategoriler üzerinde tartışmıştır. Bu tartışmada araştırmacılar, analizlerini karşılaştırmış ve fikir birliği sağlamaya önem vermiştir. Örneğin K₁, yaptığı analizlerde katılımcıların problemi yazdıktan sonra problem kurma sürecine dair genel değerlendirmede bulunmadığını belirtmiştir. Ayrıca yansıtma aşamasına ilişkin eylemlerin problem kurma sürecinin herhangi bir aşamasında belirebildiğine dikkati çekmiştir. Bu durum, K₂’nin analizlerinde de vurguladığı bir dinamik olmuştur. Araştırmacılar benzer noktalara dikkati çekmiş ve yansıtma aşamasına ilişkin eylemlerin yalnızca problemi kurduktan sonra geçerli bir durum olmadığı hususunda anlaşmaya varılmıştır. Bu noktada yansıtmaya ilişkin eylemler problem fikrinin belirmeye başladığı bağlantı kurma aşaması ile ortaya çıkmakta ve sürece örtük şekilde eşlik edebilmektedir. Bunun yanında yapılan analizlerde problemi kurduktan sonra gerek kurulmuş olan probleme gerekse problem kurma sürecinin tümüne yönelik yapılan değerlendirmeler de fark edilmiştir. Bu bağlamda yapılan görüşmeler neticesinde kodlayıcılar, yansıtma aşamasına ilişkin kodları iki kategori altında sınıflandırmıştır: (i) problem kurma sürecinde yapılan yansıtma ve (ii) problemi kurduktan sonra yapılan yansıtma.

Problem kurma sürecinde yapılan yansıtma kategorisi altında üç kod sunulmuştur (Tablo 10). Bu kodlar problem fikrinin belirdiği ve problemin ortaya konulduğu aşamalar arasında yapılan yansıtmalara karşılık gelmektedir. Birincisi problem fikrinin yönergeye uygun olmasıdır. Bu kod altında kurulacak problemin sayısına, niteliğine ve hedef kitlesine yönelik yapılan yansıtma söz konusudur. Örneğin hedef kitlesine yönelik yapılan yansıtma, yönergenin yalnızca problem kurucuların kendisi için mi yoksa hedef grup için mi geçerli olup olmadığı sorgulanabilmektedir. İkincisi problem fikrinin potansiyel çözücüye uygun olmasıdır. Buna göre öğretimsel faktörler dikkate alınarak, kurulmak istenen problemin birden

çok çözüm yolunun bulunması amaçlanabilmekte ve problem için birey faktörü vurgulanabilmektedir. Üçüncüsü problem fikrinin kurucunun kendisi için uygun olmasıdır. Buna göre problem kurucu(lar) problem fikrine ilişkin kendilerinin uygun bulduğu hedef belirleyebilmektedir.

Problemi kurduktan sonra yapılan yansıtma kategorisi altında iki kod sunulmuştur (Tablo 10). Bu kategori altında sunulan kodlar bir problemin kurulmasının veya kurulmuş tüm problemlerin ardından yapılan yansıtmalara karşılık gelmektedir (Cai & Rott, 2024). Birincisi gözden geçirmedir. Buna göre ortaya konulan problemin matematiksel geçerliği değerlendirilebilmekte ve kurulmuş diğer problemlere göre bir karşılaştırma yapılabilmektedir. İkincisi genel değerlendirmedir. Buna göre problemin matematiksel yapısı hakkında veya problem kurma sürecine ilişkin memnuniyet derecesini ifade eden açıklamalara yer verilebilmektedir. Yansıtma aşamasına ait ortaya konulan kod ve kategorilerin açıklamalarına Tablo 10'da yer verilmiştir.

Tablo 10. Yansıtma aşamasına ilişkin oluşturulan kategoriler ve kodlar

Kategori ve Kodları	Açıklamalar
<i>Problemi kurma sürecinde yapılan yansıtma</i>	Problem tasarımı ve yazımının tamamlanmasına kadarki süreçte yapılan değerlendirmelere karşılık gelir.
Problem fikrinin yönergeye uygun olması	• Yönergedeki istemlerin karşılanıp karşılanmadığına ilişkin değerlendirmeleri kapsamaktadır. • Çok sayıda problem kurulmasının gerekliliği ifade edilir. • Problemin tasarımında matematiksel olarak karmaşık ve meydan okuyucu olması gerektiğine dikkat çekilir. • Problemin tasarımına ilişkin durumlara dikkat çekilir (ör., açık-uçlu olması). • Yönergenin sunduğu esneklik dile getirilir (Yönergede bulunan “ilginç” ifadesine istinaden; “... (ne yapacağımız) bize kalmış.” benzeri ifadeler söz konusu olur.). • Problem tasarımı için problemin hedef kitlesine ilişkin değerlendirmelerde bulunulur. • Problem fikrinin potansiyel çözümler için uygunluğu değerlendirilir.
Problem fikrinin potansiyel çözümler için uygun olması	
Problem fikrinin kurucunun kendisi için uygun olması	
<i>Problemi kurduktan sonra yapılan yansıtma</i>	Problem cümlesinin tamamlanmasının ardından gerek kurulmuş olan probleme gerekse problem kurma sürecinin tümüne yönelik yapılan değerlendirmelere karşılık gelir.
Gözden geçirme	• Mevcut problemin önceki problemlerle olan benzerlik ve farklılığı incelenir. • Problem fikri için belirlenen tüm ilişkilerin probleme yansıtılıp yansıtılmadığı kontrol edilir. • Problemin matematiksel geçerliği incelenir.
Genel değerlendirme	• Problemin matematiksel karmaşıklığı ve problem kurma sürecinin verimliliğine yönelik genel değerlendirme yapılır.

Problem kurma süreçlerinin incelenmesine odaklanan araştırmalarda problem kurma sürecinin aşamalarını belirlemek yaygındır (örn., Koichu & Kontorovich, 2013). Bu tez çalışmasında ise grupların DGO’da genel problem kurma süreç modelinin adımlarına göre yapılan analizlerde, problem kurma süreçlerinin incelenmesine odaklanan farklı araştırmalar ile uyumlu (Baumanns & Rott, 2022b; Pelczer & Gamboa, 2009) iki etkinlik boyunca aşamalar arasında çeşitli yönlerde geçiş olduğu belirlenmiştir.

Grupların iki etkinlik boyunca kurduğu her problem için genel problem kurma süreç modelinin adımlarına yönelik analizler referans alınarak, aşamalar arasındaki geçiş yönleri de ayrıca tespit edilmiş ve ardından iki etkinlik için geçiş sıklıkları ayrı ayrı belirlenmiştir. Buna göre altı grup eşkenar dörtgen etkinliğinde toplamda 29 ve paralelkenar etkinliğinde ise 24 problem kurmuştur. Kurulan her problem için video içeriği incelenmiş ve bir problemin kurulması ile başlayan süreç, problemin yazımının tamamlandığı ve diğer problemin kurulmaya başladığı esnaya kadar aşamalar arası geçişlerin tek veya çift yönlü olup olmadığı dikkate alınarak, yeniden analiz edilmiştir. Yapılan analizler neticesinde DGO’da problem kurma sürecinin genel problem kurma süreç modelinin adımlarına göre akış şemasına birinci araştırma problemine ait bulgular kısmında yer verilmiştir.

2.4.2. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Problem Kurma Süreçlerinde Dinamik Geometri Ortamının İşlevlerinden Nasıl Yararlandığına Ait Veri Analizi

Teorik modeller ışığında analiz çerçevesi oluşturulmuş ve kodlayıcılar birbirinden bağımsız olarak veri analizlerini, teorik çerçevelerin merceğinden detaylandırmıştır. Buna göre genel problem kurma süreç modelinin bileşenlerine göre makroskobik açıdan ele alınan video içeriklerine; mikroskobik pencereden tekrar bakılmış ve modelin unsurlarında ortaya çıkan katkılar, analiz çerçeveleri ışığında tespit edilmiştir. Grupların video içerikleri, GeoGebra ve problem kurma etkinlik dosyaları karşılaştırmalı olarak incelenmiş ve genel problem kurma süreç modelinin adımlarına paralel şekilde, katılımcıların DGO’da problem kurma süreçleri betimlenmiştir. Bu süreçte ortaya çıkan fikir ayrılıkları üzerinde tartışılmış ve veri analizine ilişkin mutabakat sağlamaya özen gösterilmiştir (Flick, 2007). Cofie ve

diğerlerinin (2022) önerdiği gibi kodlamaların tutarlılığını sağlamak için kodlayıcı iki araştırmacı, diyalog ve fikir birliği neticesinde kodların paylaşılan anlamlarına odaklanmıştır. Buna göre verilerin analizlerinde DGO'nun genel problem kurma sürecinin aşamalarında nasıl yer aldığına odaklanılmış ve kodlayıcılar, bir grubun video içeriklerini ve GeoGebra dosyalarını birbirinden bağımsız analiz etmiştir. İkinci araştırma problemi kapsamında analiz edilen içerikler, toplam video içeriğinin yaklaşık %26'sını (130/496 dk) oluşturmuştur. Böylece araştırmanın verileri, titizlikle belirlenen analiz çerçevelerine göre detaylıca analiz edilmiş ve uyum sağlanmayan kodlamalarda müşterek kararlar alınarak, analizlere nihai hali verilmiştir. Örneğin K₂, yaptığı analizlerde sürüklenme türlerine dair kabul edilen teorik çerçevede yer almayan bir sürüklemenin varlığını söz konusu etmiş ve bu durumu K₁ ile paylaşmıştır. Yapılan görüşmeler neticesinde görsel algıya bağlı olarak tespit edilen sürüklemenin varlığı kabul edilmiştir.

Kodlayıcıların tartışmaları neticesinde şekillenen ve nihai hali verilen analizlere bundan sonraki kısımda yer verilmiş ve DGO'nun problem kurma süreçlerine katkısına yönelik sırasıyla *ölçme*, *sürüklenme*, *yardımcı unsur ekleme* işlevleri ve *diğer* bileşenlerine ilişkin yapılan analizler sunulmuştur.

Ölçme: Grupların DGO'da problem kurma sürecinde yararlandığı işlevlerden biri ölçme olmuştur. Ölçmenin analizleri için Olivero ve Robutti'nin (2007) çerçevesi temel alınmıştır. Bu çerçeve esas alınarak, yapılan analizlerde beş tür ölçüm —*amaçlı, doğrulama, algısal, ispat ve rastgele*— grupların problem kurma süreçlerinde tespit edilmiştir. Bu tez çalışmasında kabul edilen teorik çerçeve varsayım oluşturma ve kanıtlama sürecinde ölçmenin bilişsel rolüne odaklanarak, ortaya konulmuştur. Bu kapsamda yapılan görüşmeler neticesinde *doğrulama ölçümü*, ispatlanması gereken bir varsayımın geçerliğini sorgulama niyetiyle başlamaktadır. Buna karşılık *ispat ölçümü* ise doğruluğundan emin olunan bilginin DGO'da tekrar teyit edilmesi niyetiyle yapılmaktadır. Dolayısıyla çerçevedeki ölçüm türlerine ait tanımlar problem kurma süreçlerinde yer alan ölçme tanımları ile birebir örtüşmemektedir. Bu anlamda ölçüm türlerine yönelik tanımlar, genel çerçeve olarak kabul edilmiş ve bu tez çalışması özelinde tanımlanmıştır (Tablo 11). Bu ayrımı en net *ispat ölçüm* türü göstermektedir. Çünkü *ispat ölçümü*, katılımcıdan bir ispatın istendiği etkinlik neticesinde açığa çıkmıştır. Bu çalışmada ise katılımcılardan ortaya koydukları

problemleri çözmeleri istenmediğinden, süreçte tam anlamıyla matematiksel ispatlamaya başvurmaları beklenmemiştir. Bu yönüyle Olivero ve Robutti'nin (2007) çerçevesindeki ispat ölçümünde yer alan matematiksel kesinlik, bu tez çalışmasında ispat ölçümünü tanımlarken temel alınmıştır. Buna göre ispat ölçümü, katılımcının statik ortamda doğruluğundan emin olduğu bir sonucun DGO'da tekrar teyit etmesi kapsamında ele alınmıştır. Dolayısıyla ispat ölçümü ve doğrulama ölçümü arasındaki başlangıçta bulanık kabul edilen sınır, görüşmeler neticesinde netleştirilmiştir.

Benzer şekilde algısal ölçümün ayırıcı özelliğinin vurgulanması yönünde yapılan tartışmalarda; K_1 algısal ölçümün sezgisel bir varsayımın ardından öne sürüldüğünü vurgulamışken, K_2 sezgisel varsayımın görsel algı ile şekillendiğinin altını çizmiştir. Buna göre *algısal ölçüm*, ölçme ile keşfetme —rastgele—, ölçme neticesinde keşfetme —amaçlı— ve ölçme ile varsayımın geçerliğini sorgulama —doğrulama— kapsamındaki ölçümlerden ayrılmaktadır. Bu kapsamda ölçme türlerine yönelik tanımlarda Olivero ve Robutti'nin (2007) tanımları genel perspektiften referans alınmış ve türlerin bu tez çalışmasında şekillenen ve kabul edilen tanımlarına Tablo 11'de yer verilmiştir.

Sürüklenme: Grupların DGO'da problem kurma süreçlerinde yararlandığı işlevlerden bir diğeri sürüklenme olmuştur. Araştırmanın katılımcılarını yansıtan grupla yürütülen pilot uygulamanın verilerine yönelik analizlerde; katılımcıların, araştırmacıların (Arzarello vd., 2002; Olivero, 1999; 2002) öne sürdüğü çeşitlilikte (örn., kısıtlı, çizgi ve bağımlı) sürüklenme eylemi sergilemediği fark edilmiştir. Buna karşılık Hölz (2001) çalışmasında sürüklemenin aynı şeklin farklı temsillerini gösteren bir araç ve temelde iki işlevi olduğuna vurgu yapmıştır. Birinci durumda geometrik yapının var olan özelliklerini sağlayıp, sağlamadığı kontrol edilirken; ikinci durumda ise yeni özelliklerin aranması veya keşfedilmesi söz konusudur. Pilot uygulama sonrasında verilerin ön analizlerine göre katılımcı grupların her ne kadar sürüklenme eylemini kısıtlı kullandığı fark edilmişse de yalnızca iki amaçla kullandığına kanaat getirilmemiş ve Hölz'e (2001) nazaran daha ayrıntılı bir bakış sunan ve kendinden önceki sınıflamaları göz önünde tutan Baccaglini-Frank'ın (2009) sürüklenme şemasını verilerin esas analizlerinde referans almanın daha uygun olacağına karar verilmiştir. Nitekim Hölz'ün (2001) sınıflaması sürüklemenin ilkel bir sınıflaması olarak da kabul edilebilecektir. Bu kapsamda problem kurma sürecinde beliren sürüklemenin

analizleri için Baccaglini-Frank'ın (2009) dört kategoriden oluşan sürüklenme şeması genel çerçeve olarak temel alınmıştır. Analizler neticesinde Baccaglini-Frank'ın (2009) şemasındaki üç tür sürüklenme tipi —rastgele, amaçlı ve sürüklenme testi— bu çalışmada katılımcıların DGO'da problem kurma süreçlerinde de tespit edilmiştir. Bunların dışında bu çalışmada *algısal* sürüklenme adında yeni bir sürüklenme türü tanımlanmıştır. Algısal sürüklemenin odağında şemadaki diğer sürüklemelerin odak noktasında yer alan; sürüklenme ile keşfetme —rastgele—, sürüklenme neticesinde keşfetme —amaçlı— ve sürüklenme ile keşfin veya varsayımın geçerliğini test etme —sürüklenme testi— yerine şeklin mevcut görünümüne ve görsel algıya bağlı olarak doğrudan bir durumun varlığının öne sürülmesi yer almaktadır. Bu sürüklenme türü Baccaglini-Frank'ın (2009) şemasında izi açarak sürüklenme ile de benzerlik göstermektedir. Ancak sürüklenme izi açarak, sürdürülmediğinden bu kategori kapsamı yerine ayrı bir tür olarak değerlendirilmiştir. Dolayısıyla Baccaglini-Frank'ın (2009) genel çerçeve olarak belirlenen şemasındaki tanımlamalar, bu tez çalışması kapsamında biçimlendirilmiştir. Örneğin rastgele sürüklemelerde sürüklenme eyleminin plansızca ve buna karşılık amaçlı sürüklemelerdeki sürüklenme eyleminin planlı şekilde yapıldığı vurgulanmıştır. Bu kapsamda bu tez çalışmasında kullanılan sürüklenme türleri ve tanımlarına Tablo 11'de yer verilmiştir.

Yardımcı unsur ekleme: Kodlayıcılar DGO'da problem kurma sürecinde katılımcıların halihazırdaki problem kurma durumuna yeni unsurlar ilave ettiklerine dikkat etmiş ve ilave edilen unsurları yardımcı unsur ekleme adında tek bir kodla belirtmiştir. Ardından yapılan literatür incelemesine göre katılımcıların yeni unsurları hangi nedenlerle sürece dahil ettiklerinin analizi için Palatnik ve Dreyfus'un (2018) statik ortamda eklemeye ilişkin nedenleri kategorize ettiği çerçevesi, DGO'da problem kurma sürecinde yapılan eklemeler ile uyumlu bulunmuştur. Böylece verilerin analizlerinde ekleme kategorisinde Palatnik ve Dreyfus'un (2018) çerçevesi temel alınmış ve çerçevede araştırmanın verilerine göre herhangi bir değişiklik yapılmamıştır. Bu tez kapsamında yardımcı unsur eklemeye dair kabul edilen tanımlara da Tablo 11'de yer verilmiştir.

Diğer bileşen: DGO'nun sürüklenme, ölçme ve ekleme işlevlerinin dışında kalan ve genel özelliklerini yansıtan diğer bileşenleri kapsamında şu durumlar tespit edilmiştir: sürgü oluşturma, hesap tablosu veya hesap makinesi kullanma, ondalık

gösterimde basamak sayısını belirleme, ilişki tespit etme. Bu kapsamda DGO'nun ölçme, sürükleme ve yardımcı unsur ekleme dışında kalan bileşenleri, verilerin analizlerinde *diğer bileşen* kapsamında ele alınmıştır (Tablo 11).



Tablo 11. Araştırmanın veri analiz birimlerine ilişkin sınıflamalar

DGO'nun işlevi	Açıklamalar
<i>Ölçme</i>	
Amaçlı ölçüm (M-g)	Geometrik şeklin belli öğelerini bir sonuç elde etme ve varsayım oluşturma amacıyla ölçme eylemidir.
Doğrulama ölçümü (M-v)	Geometrik şekle dair ortaya konulan varsayımları doğrulama veya çürütme amacıyla ölçme eylemidir.
Algısal ölçüm (M-per)	Geometrik şeklin özellik veya ilişkilerine yönelik sezgilere dayalı görsel algının geçerliğini sorgulama amacıyla uygulanan ölçme eylemidir.
İspat ölçümü (M-p)	Geometrik yapıya ait emin olunan bir bilginin teyit edilmesi, daha iyi anlaşılması veya daha iyi açıklanabilmesi amacıyla DGO'ya dönerek, şekil üzerinde ölçümlerin yapılmasıdır. Bu kapsamda statik ortamda yürütülen işlemler dinamik ortamda yeniden yapılmakta veya etkinlik verisi kontrol edilmektedir.
Rastgele ölçüm (M-w)	Geometrik şekildeki sayısal ilişki veya değişmezlikleri keşfetme amacıyla plansızca uygulanan ölçme eylemidir
<i>Sürüklenme</i>	
Rastgele (D-w)	Geometrik şekillerdeki yapıları ve aralarındaki ilişkileri keşfetme amacıyla plansızca sürdürülen sürüklenme eylemini tanımlamaktadır.
Amaçlı (D-m)	Geometrik şekillere ait özellik ve ilişkileri açığa çıkarma niyetiyle, planlı sürdürülen ve varsayım oluşturulmasına aracılık eden sürüklenme eylemini tanımlamaktadır.
Sürüklenme testi (D-t)	Geometrik şekillere ait varsayımların veya şeklin değişen görünüşleri altında kalan değişmez özelliklerinin ayırt edilmesine, test edilmesine veya genelleme yapılmasına aracılık eden sürüklenme eylemini tanımlamaktadır.
Algısal (D-p*)	Geometrik şeklin özellik veya ilişkilerine yönelik görsel algıya dayalı olarak ve algının geçerliğini sorgulama amacıyla uygulanan sürüklenme eylemidir. Algısal sürüklenme “Öyle mi acaba?” şeklinde bir ifade ile eş zamanlı uygulanan sürüklenme ile karakterize edilebilecektir.
<i>Yardımcı Unsur Ekleme</i>	
Tahmin etme (A-g)	Yardımcı unsur ekleme, yardımcı unsurun tam olarak nasıl kullanılacağına dair fikir bulunmadan yapılmaktadır. Problem kurma durumundan elde edilebilecek veri miktarı arttırılmaktadır. Bunun için belirsiz bir fikri görselleştirme/somutlaştırma, şeklin bazı özelliklerini daha belirgin kılma, gözlenen bir değişkenin ek durumları üretmek gibi amaçlarla uygulanabilmektedir
Hatırlama (A-r)	Ekleme, öğrenilmiş prosedürleri uygulama bakımından bazı bilinen sonuç veya tanımları kullanma amacıyla yapılmaktadır
<i>Diğer Bileşen (O-)</i>	Sürüklenme, ölçme ve yardımcı unsur eklemenin dışında kalan ve DGO'nun genel özelliklerini yansıtan bileşenlerini tanımlamaktadır. Örneğin, sürgü oluşturma, ondalık basamak belirleme (yuvarlama özelliği) ve araçlar çubuğunda yer alan ilişki tespiti vb. şeklinde sıralanabilecektir.

Not 1. Sürüklenme türlerine yönelik yapılan analizlerde ve bulguların sunumunda sürüklenme türüne işaret eden kodlamalar ilk sütunda parantez içerisinde verilmiştir. Örn., rastgele sürüklenme “D-w” şeklinde kodlanmıştır. Benzer şekilde örneğin, amaçlı sürüklenme “M-g” ve diğer bileşenlere ait kodlamalar da parantez içinde sunulmuştur.

Not 2. * algısal sürüklemenin şemadaki diğer sürüklemelerden farklı bir sürüklenme türü olduğuna işaret etmektedir.

3. BULGULAR

Bulgular araştırma problemlerinin sırasına paralel şekilde sunulmuştur. İlk olarak katılımcı grupların DGO’da problem kurma süreçlerine, ardından DGO’ dan bu süreçte nasıl yararlanıldığına ait bulgulara yer verilmiştir.

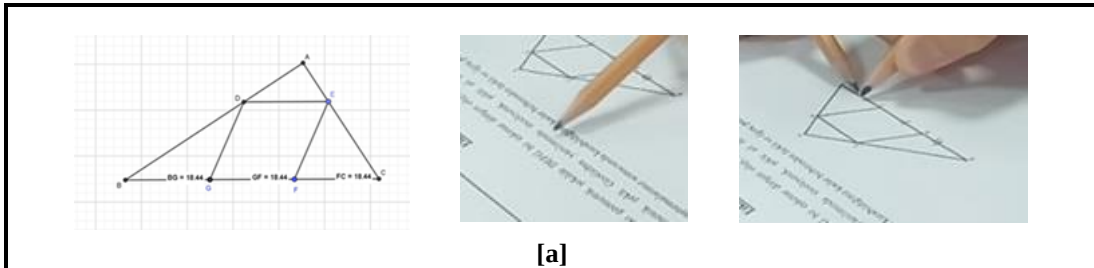
3.1. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Dinamik Geometri Ortamında Problem Kurma Süreçlerine Ait Bulgular

Bu kısımda bulgular sırasıyla genel problem kurma süreç modelinin yönelim, bağlantı kurma, oluşturma ve yansıtma şeklindeki adımlarına göre sunulmuştur.

3.1.1. Problem Kurma Süreçleri İçin Yönelim Aşamasına Ait Bulgular

Yönelim aşaması, etkinliğin bileşenleri olan problem kurma durumu ve yönergesini anlamaya yönelik faaliyetleri içermektedir. Bu aşamada grupların yaygın davranışı, etkinlikleri okuma ve ardından problem kurma durumunu incelemeye koyulmadır. Problem kurma durumunu inceleme, etkinliğin barındırdığı matematiksel kavramları ve ilişkileri belirlemeyi kapsamaktadır. Buna göre, henüz bir problem fikri ortaya atılmaksızın yalnızca problem kurma durumunu statik veya dinamik ortamda analiz etmek amaçlanmaktadır. Bu kapsamda iki kod belirlenmiştir: (i) mevcut verileri betimleme [P1] ve (ii) mevcut verilerden çıkarsanabilecek ilişkileri belirleme [P2].

P1’in odak noktasında, etkinliklerdeki verilerin şekil üzerine yerleştirilmesi bulunmaktadır. Örneğin, gruplar eşkenar dörtgen etkinliğinde eşkenar dörtgene ait kenarları ve etkinlikte sunulan “ $|BG|=|GF|=|FC|$ ” verisini statik ve dinamik ortamların birinde veya her ikisinde betimlemiş (Şekil 23, [a]), paralelkenar etkinliğinde ise paralelkenara ait E ve F noktalarının orta nokta olması durumunu şekil üzerine yerleştirmiştir (Şekil 23, [b], [c]).



Şekil 23. Yönelim aşamasına ait mevcut verileri betimleme davranışı

- [1] G5T9: Eşkenar dörtgenmiş (*Etkinlik problem kurma durumuna işaret etmektedir.*)
 [2] G5T10: Açılar karşılıklı eş.
 [3] G5T9: Kenarlardan çıkalım. Eşkenar dörtgen olduğu için kenarlar eşitmiş. Bunlar da eşit. Eşkenar dörtgende kenarlar eşit. [a]

[...]*

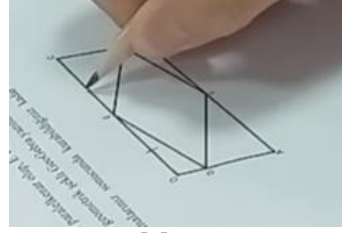
- [4] G1T1: ABCD bir paralelkenarmış. E, F noktaları sırasıyla DC ve AB kenarlarının orta noktalarıymış. Bunların orta nokta olduğunu gösterelim. [b]

[...]

- [5] G3T5: E orta noktasıymış. Bakalım buralar ($|DE|$ ve $|EC|$) birbirine eşit mi ama zaten paralelkenar olduğu için eşit [c].



[b]



[c]

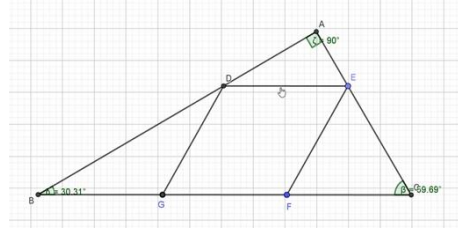
Şekil 23 (Devam). Yönelim aşamasına ait mevcut verileri betimleme davranışı

Not. * Problem kurma sürecinde tartışmaların öncesi ve sonrası olduğunu ifade etmektedir. Parantez içi *italik* ifadeler, yazara tarafından okuyucuya sunulan ayrıntılardır.

Yönelim aşaması kapsamındaki P2'nin odak noktasında mevcut verilerden çıkarsanabilecek ilişkileri belirlemek yer almıştır. Problem kurma durumundan matematiksel sonuçların (ör., eş açılar, paralellik veya benzerlik durumlarının belirlenmesi) çıkarılması ve doğrulanması gruplarda görülen genel eğilim olmuştur. Grupların çıkarımda bulunduğu durumlar ise şu şekildedir: (i) açı ve uzunluk değerlerine ait çıkarımlarda bulunma ve (ii) geometrik şeklin içeriğindeki farklı unsurları —eşkenar dörtgen, ikizkenar üçgen, paralellik, eşkenar üçgen, dik üçgen, geniş açılı üçgen, benzerlik, orta nokta, paralelkenar ve dikdörtgen— belirleme.

Gruplar yaygın şekilde problem kurma durumundaki açıları belirlemiş ve geometrik şekli oluşturan doğru parçalarının uzunluklarını ölçmüştür. Bu durumda genellikle açının dinamik tanımına uygun ölçüm yapıldığı fark edilmiştir (Şekil 24, satır 3-4). Örneğin G6, eşkenar dörtgen etkinliğinde mevcut geometrik şekilde açının dinamik tanımına uygun ölçüm yaparak, verilen şekilde $m \angle A = 90^\circ$ olarak belirlemiş ve bu ölçüm sonucundan hareket ederek, şekle ait dikliği kullanmayı gerektiren ilişkilere işaret etmiştir. (Şekil 24, satır 6).

- [1] G6T11: İlk başta GeoGebra'dan açıları ölçerek, başlayabiliriz.
 [2] G6T12: Ha şurada açılar. Şu. (*Açı sekmesini arama*)
 [3] G6T11: Sağdan sola doğruydum değil mi?
 [4] G6T12: Aynen saatin dönme yönünün tersi.
 [5] G6T11: 90 derece [a].
 [6] G6T12: Oradan bir dik indirebiliriz.



[a]

Şekil 24. Yönelim aşamasına ait mevcut verilerden çıkarsanabilecek ilişkileri belirleme davranışı örnek durumu 1

Eşkenar dörtgen etkinliğinde “ $|BG|=|GF|=|FC|$ ” verisi hem statik hem dinamik ortamda betimlenmiş ve çıkarsanabilecek ilişkilere kaynaklık etmiştir (Şekil 25, satır 4-7). Örneğin G1, bu bilgiden hareketle problem durumu içindeki ikizkenar üçgenleri dinamik ortamda, G3 ise benzer durumu statik ortamda belirlemiştir (Şekil 25, satır 19-22). G2 eşkenar dörtgen etkinliğinde mevcut durumda açıları belirleyerek, durumdan çıkarsanabilecek ilişkiler hakkında tartışma yürütmüştür (Şekil 25, satır 8-18). Bu tartışmaya göre EFC üçgeninin başlangıçta eşkenar üçgen olabilme ihtimali üzerinde durulmuştur. Bunun yanı sıra problem kurma durumunu incelerken G2, etkinlikte sunulan üçgenin dik üçgen olduğu öngörüsünden hareketle mevcut şeklin barındırdığı geometrik şekillere ilişkin varsayımlarını test etmiştir. Böylece ilk etapta eşkenar üçgen olarak belirledikleri şeklin eşkenar üçgen olmadığı çıkarımına ulaşmıştır (Şekil 25, satır 8-18). Bu çıkarsama faaliyeti henüz problem fikri belirmeksizin problem durumunu inceleme kapsamında yürütülmüştür.

[a]

[5] G1T1: Şunlar ($\triangle EFC$ ve $\triangle DGB$) ikizkenar üçgen çıktı [b].
 [6] G1T1: Açılarına bakalım mı? ... Açılarını ölçelim o zaman [c].

[...]

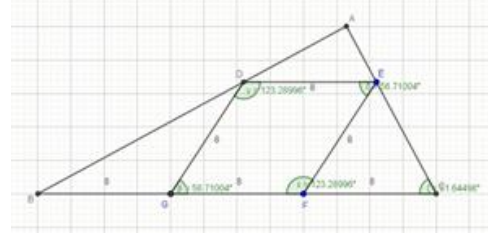
[1] G1T1: Açılarını ölçebiliriz GeoGebra'dan ... Açılarını ölçelim mi?
 [2] G1T2: Ölç bakalım! [a]
 [3] G1T1: Eşkenar verilmiş zaten eşit olacak. ($|BG|=|GF|=|FC|$ bilgisinden hareket etmektedir.)
 [4] G1T2: Olsun yine de ölçelim. $|BG|$, $|GF|$ ve $|FC|$ de birbirine eşitmiş hepsi birden.

[b]

Şekil 25. Yönelim aşamasına ait mevcut verilerden çıkarsanabilecek ilişkileri belirleme davranışı örnek durumu 2

[7] G1T2: O zaman uğraşacağımız şeyler paralellikten ilerleyeceğiz, ikizkenar üçgenlerimiz var.

[...]



[c]

[8] G2T3: Açılarını bir inceleyebiliriz.

[9] G2T4: Eşkenar dörtgenin açlarına bakayım mı?

[10] G2T3: Aynen Hocam.

[11] G2T4: 30-60-90 üçgeni diyebilir miyiz? Bu üçgene ($\triangle ABC$) yaklaşık olarak.

[12] G2T3: Diyebiliriz.

[13] G2T4: Kenar uzunluklarından belli olur bence.

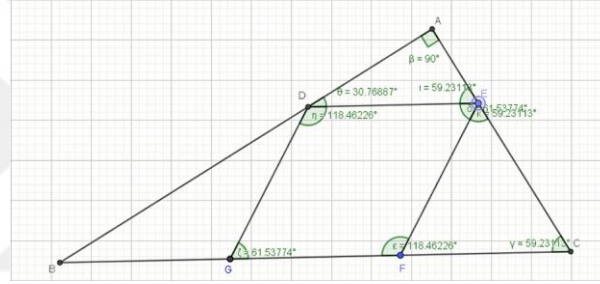
[14] G2T3: Acaba şuradaki üçgenler ($\triangle EFC$) ne oldu? Bakalım ... 60-60-60, burada bir eşkenar üçgen oluşuyor diyebiliriz.

[15] G2T4: 118, sanki orası ($\angle F$) 60'tan büyük olur gibi geliyor bana [d].

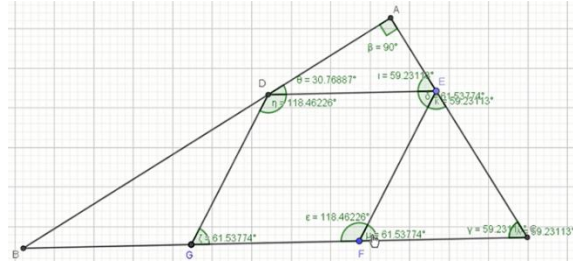
[16] G2T3: (*Açılar ölçülmektedir*) ... Şuradan mı gidecektim? (*Açı yön tayini, dinamik tanım dikkate alınmaktadır.*)

[17] G2T4: 60 dereceden büyük oldu. Eşkenar üçgen olmuyor, galiba

[18] G2T3: Evet, 60'tan büyük oldu [e].



[d]

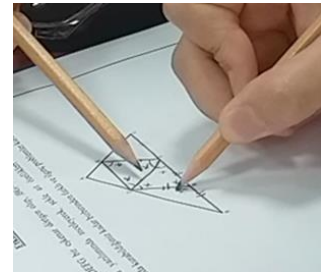


[e]

[19] G3T5: Şimdi eşkenar dörtgen olduğu için aynı zamanda şurada ikizkenar üçgenlerimiz ($\triangle EFC$ ve $\triangle DGB$) olacak.

[20] G3T5: Peki şöyle bir çizgi (*köşegen*) yapsak. Doğru parçası şeklinde. [f]

[21] G3T6: Çiz sonra da ölçelim. [22] G3T5: Doğru parçası ($|DF|$) şeklinde. Açılardan şöyle çizdiğimizizde şurası (G) α ise şurası (E) da α . Şurada ikizkenar üçgen ($\triangle DGB$) oluştu. [f]



[f]

Şekil 25 (Devam). Yönelim aşamasına ait mevcut verilerden çıkarsanabilecek ilişkileri belirleme davranışı örnek durumu 2

P2 kodu kapsamında gruplar her iki etkinlikte yer alan paralellik durumlarını belirlemiştir. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde G5, mevcut geometrik yapıdaki eşkenar dörtgenin varlığından hareket etmiş ve şekle ait paralelliklerin benzerlik ilişkisine kaynaklık ettiğini tespit etmiştir. G1 ise paralelkenar etkinliğinde incelemeyi orta noktaların varlığı üzerinden yürütmüş ve içeride oluşan dörtgenin eşkenar dörtgen olabileceği fikrini sorgulamıştır. Bu amaçla içeride oluşan dörtgenin tüm kenar uzunluklarını ölçerek varsayımlarını test etmiştir.

Yönelim aşamasında P1 ve P2 kodlarının gruplarda görülme durumlarına ait dağılım Tablo 12’de sunulmuştur. Buna göre, her iki etkinlikte de yönelim aşamasını yansıtan kodlar gözlenmiştir. Eşkenar dörtgen etkinliğinde P2, tüm gruplarda görülürken; P1 yalnızca G2’de tespit edilmemiştir. Benzer şekilde G2, paralelkenar etkinliğinde de P1 kapsamında eylem sergilememiştir. Paralelkenar etkinliğinde P1 iki grupta gözlemlenmemiştir. P2 kapsamında değerlendirilen eylemler, her iki etkinlikte de P1’den daha fazla görülmektedir. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde altı grubun tümünde P2 belirlenmesine karşın, P1 beş grupta belirlenmiştir. Paralelkenar etkinliğinde de benzer durum söz konusudur. P2, paralelkenar etkinliğinde altı gruptan beşinde P1 ise altı gruptan dördünde tespit edilmiştir.

Tablo 12. Yönelim aşamasına ait kodların gruplarda görülme durumları

Etkinlik	G1	G2	G3	G4	G5	G6
<i>Eşkenar dörtgen</i>	■	□	■	■	■	■
<i>Paralelkenar</i>	■	□	■	■	□	■

Not. Yönelim aşamasına ait P1 → ■ ve P2 → ■ ile temsil edilmiştir. Beyaz renk ise grupta ilgili kodun gözlenmediğini belirtmektedir.

3.1.2. Problem Kurma Süreçleri İçin Bağlantı Kurma Aşamasına Ait Bulgular

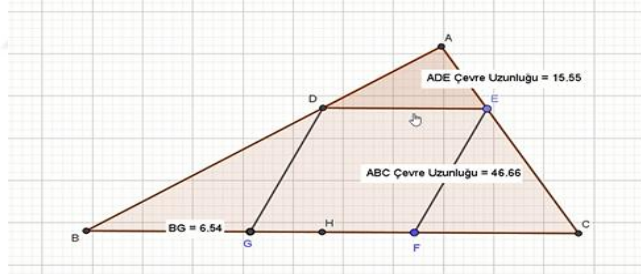
Bağlantı kurma aşaması, problem(ler) için fikir üretmeye karşılık gelmektedir. Bu aşamada mevcut problem kurma durumu hakkında merak duyulan özellik ve ilişkilerin ortaya konulması söz konusudur. Bunun yanı sıra gruplar yaygın şekilde problem kurmak için orijinal geometrik yapıya dayanarak, varsayımlar öne sürmekte ve bunların geçerliğini sorgulamaktadır. Ayrıca bu aşamada matematiksel deneyim ile karakterize edilebilecek ilişkiler de sürece dâhil edilmektedir. Bu kapsamda gruplar, keskin çizgilerle ayırmanın zor olduğu usamlama faaliyetleri ile problem kurmak için çeşitli bağlantıları öne sürmüş ve bu bağlantılar üç kategori altında tasnif edilmiştir: (i) yapısal (veri-odaklı), (ii) sezgisel (hipotez-odaklı) ve (iii) eğitsel (pedagoji-odaklı) bağlantılar. Yapısal bağlantılar; matematiksel düşünmenin tümdengelimsel doğasına işaret eden biçimde mevcut geometrik şeklin kritik niteliklerini dikkate alarak, problem kurma durumuna ilişkin gerçek sonuçlara odaklanan fikirler geliştirmektir. Buna göre yapısal bağlantılar kapsamında iki kod belirlenmiştir: (i) mevcut şeklin bileşenleri arasında bağlantılar kurmak [B1] ve (ii) mevcut şekle yardımcı elemanlar ekleyerek bağlantı kurmak [B2].

B1'in odak noktasında, mevcut geometrik şeklin bileşenleri ve arasındaki ilişkilere yoğunlaşma yer almaktadır. Buna göre gruplar; şekle ait alan, uzunluk veya benzerlik ilişkileri hakkında incelemeler yapabilmekte ve var olan geometrik ya da matematiksel bilgilerini sürece dâhil etme davranışı sergileyebilmektedir. Örneğin G5, eşkenar dörtgen etkinliğinde $\triangle ADE$ ve $\triangle ABC$ 'nin benzer üçgenler olduğunu varsayarak, çevreleri oranının benzerlikleri arasındaki orana eşit olabileceğini öngörmüştür. Böylece iki üçgen arasındaki benzerlik oranının çevreleri oranına eşit olduğu fikrini problem kurmak için referans kabul etmiş ve yazılımın olanakları ile bu ilişkinin doğruluğunu incelemiştir (Şekil 26, satır 1-25). Bu incelemeler esnasında GeoGebra programını kullanmada sınırlılıklar (Şekil 26, satır 10-15) göze çarparken, programın yönerge sunma olanağının katılımcıların yazılımı kullanırken karşılaştığı zorlukları gidermeye yardımcı olduğu da fark edilmiştir (Şekil 26, satır 13).

G5, eşkenar dörtgen etkinliğinde problem kurma durumunda yer alan iki benzer üçgenin ($\triangle ADE$ ve $\triangle ABC$) varlığını kabul etmiş ve aralarındaki benzerlik oranının çevre uzunlukları arasındaki oran ile aynı olduğu bilgisini kullanmaya karar

vermiştir. Ancak bu esnada yazılımın Öklid düzlemini simüle etmesi, katılımcıların sahip olduğu matematiksel bilgiyi sorgulamasına yol açmıştır (Şekil 26, satır 16-22). Ardından bunun yazılımdan kaynaklı bir durum olduğuna karar kılarak, problem fikri için veri-odaklı bağlantılarına güvenmeyi tercih etmişlerdir (Şekil 26, satır 23-25).

- [1] G5T9: Şey diyeceğim. Şunun ($\triangle ADE$) çevresinin tamamının ($\triangle ABC$) çevresine oranını bulabilir miyiz? [a]
- [2] G5T10: Hangisinin?
- [3] G5T9: Çevresinin toplamı ($\triangle ADE$ ve $\triangle ABC$ çevre uzunluklarına işaret etmektedir.) Benzerlikten çıkar aslında. Benzerlik oranı çevreleri oranı (değil mi?).
- [4] G5T10: O zaman bak şu farklı şu farklı şu farklı ($\triangle AED$ üçgeninin kenar uzunluklarına işaret etmektedir.).
- [5] G5T9: Oran diyorum.
- [6] G5T10: Oran şöyle çıkar. a'lı k'lı çıkar ($\triangle ADE$ ve $\triangle ABC$ kenar uzunlukları arasındaki benzerlik oranına işaret etmektedir.)
- [7] G5T9: Yoo! gider. Gidiyor ki ADE üçgeninin çevresi (Benzerlik oranına işaret etmektedir.)
- [8] G5T10: Yazalım.
- [9] G5T9: Ölçsek ya burada. Zaten şekille ilgili özellikleri ve ilişkileri araştırınız diyor. Çokgen yapman lazım.
- [10] G5T10: Çevre ölçebiliyorduk değil mi?
- [11] G5T9: Çokgen yapalım onu ($\triangle ADE$). Direkt bunun ($\triangle ADE$) çevresi. Çokgenin direkt çevresini nasıl buluyorduk? [a]
- [12] G5T10: Şeyden. Uzaklıktan.
- [13] G5T9: Hı! çokgen seçiniz diyor (GeoGebra'nın yönergesi dikkate alınmaktadır.) ABC çevre uzunluğu üç katı çıkıyor. [a]



[a]

- [14] G5T10: Ama tam üç katı (çıkıyor).
- [15] G5T9: Limit olarak çıkıyor.
- [16] G5T10: Yuvarlama hesabı çıkıyor.
- [17] G5T9: Zaten üç katı mı olması gerek?
- [18] G5T10: Aynen.
- [19] G5T9: 1'e 3. Evet. Biz de oran isteyeceğimiz için.
- [20] G5T10: (1'e 3 olduğu belirtilen oran bilgisayarın hesap makinesi aracılığıyla kontrol edilmektedir.) Ama tam üç katı çıkıyor. 46. 65 çıkıyor. 46. 66. [b], [c]

15,55			
%	CE	C	GE
%	1	2	3
7	8	9	x
4	5	6	-
1	2	3	+

[b]

46,65			
%	CE	C	GE
%	1	2	3
7	8	9	x
4	5	6	-

[c]

Şekil 26. Bağlantı Kurma aşamasına ait yapısal bağlantılar kapsamındaki mevcut şeklin bileşenleri arasında bağlantılar kurma davranışı örnek durumu 1

[21] G5T9: Onun çıkmasının sebebi açının düzgün (*Ondalık basamak değerinin, 0 ondalık olarak belirlenmemiş olmasına işaret etmektedir.*) olmaması. Biz yazalım. Çünkü benzerlikten o varsayıma çıkabilir.

[22] G5T10: Aynen

[23] G5T9: Çünkü benzerlikte çevre uzunluğunun benzerlik oranına eşit olduğu. Onu şey yapıyorum (hatırlıyorum) ben.

[24] G5T10: Şura a olsa şura k olsa şura da b olsa (*ADE üçgeninin kenar uzunluklarına işaret etmektedir.*). k, a, b burada da 3k, 3a, 3b (*Zihinden ADE üçgeninin kenar uzunlukları ile ABC üçgeninin kenar uzunluklarını oranlamaktadır.*).

[25] G5T9: İşte onu diyorum direkt gidiyor a+b'ler. 1'e 3 kalıyor. Yine yazıyorum.

[...]

Şekil 26 (Devam). Bağlantı kurma aşamasına ait yapısal bağlantılar kapsamındaki mevcut şeklin bileşenleri arasında bağlantılar kurma davranışı örnek durumu 1

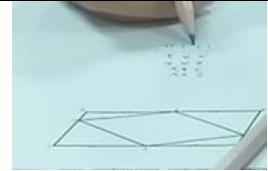
G6 paralelkenar etkinliğinde, *Varignon teoremine* işaret eden bilgiyi sürece dahil etmeye çalışmıştır. Buna göre problem kurmak için mevcut şeklin bileşenleri arasındaki alan ilişkisi hakkında incelemelerde bulunmuş ve içeride oluşan dörtgenin alanı ile ABCD paralelkenarının alanı arasındaki 1:2 oran ilişkisini problem kurma fikri için belirlemiştir (Şekil 27, satır 1-8). Bu grupta da G5'te olduğu gibi yazılımın Öklid düzlemini simüle etmesinden kaynaklı sınırlılıklar meydana gelmiş ve katılımcılar problem fikri için belirlenen alan ilişkisinin doğruluğunu statik hesaplama ile kontrol etmiştir (Şekil 27, satır 5-6). Böylece veriye dayalı yapısal bağlantılarına güvenerek, problemi tasarlamaya koyulmuşlardır (Şekil 27, satır 8). Benzer şekilde paralelkenar etkinliğinde G3, dinamik sunulan problem durumunu yeni baştan oluşturmayı tercih etmiştir (Şekil 27, satır 9-10). Gruplar arasında yalnızca G3'te gözlenen bu faaliyet, grupların genelinde sergilenen bir eylem olmamıştır. Bu davranış neticesinde G3, yine G6 gibi *Varignon Teoremine* işaret eden ilişki üzerinden problem fikrini benimsemiş ve bu fikrin sonucunda genellemeye varabilecek bir açıklamada bulunmuştur (Şekil 27, satır 11-14).

[1] G6T12: Dur bir saniye. Bunun (*ABDC paralelkenarında GEHF dörtgeninin dışında kalan üçgenlerin alanlarına işaret etmektedir.*) alanı ne? 2.62 ...

[2] G6T11: Yine içeride oluşan dörtgen tüm paralelkenarın alanının yarısını veriyor.

[3] G6T12: Şu dördünün (*GEHF dörtgeninin dışında kalan üçgenlerin alanlarına işaret etmektedir.*) toplamı içeridekinin (*GEHF dörtgeni*) alanını veriyor mu?

[4] G6T11: Evet.



[a]

Şekil 27. Bağlantı kurma aşamasına ait mevcut şeklin bileşenleri arasında bağlantılar kurma davranışı örnek durumu 2

[5] G6T12: 2.59, 2.62, 5.96, 5.93 [a] (İşaret ettiği çokgenlerin ekranda görülen alan değerlerini yazılı işlem olarak toplamaktadır. Toplamın ondalık gösterimli çıkması varsayımın geçerliği hakkında tereddüt yaşanmasına neden olmuştur.)

[6] G6T11: Burada noktalı, kareli kâğıt ya küsuratlar tabi ki oynar.

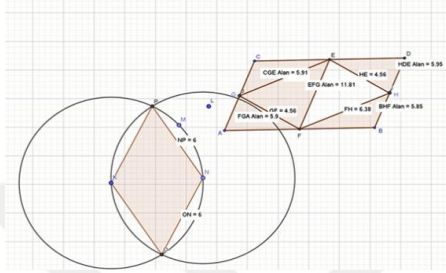
[7] G6T12: Ama ortayı veriyor.

[8] G6T11: O zaman bununla ilgili bir tane problem yazalım. Ne diyelim? İçeride oluşan paralelkenar tüm alanın yarısı mı diyelim? Kaliteli problem kuralım.

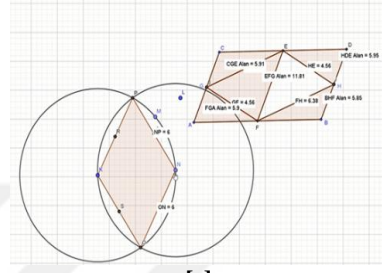
[...]

[9] G3T5: Eşkenarı (dörtgen) çember yardımıyla çiziyorduk değil mi? Yarıçapımız bizim 6 cm olsun. (Eşkenar dörtgeni yeniden dinamik şekilde oluşturmaya çalışmaktadırlar. Ardından eşkenar dörtgen olup olmadığını kontrol etmek için kenar uzunluklarını ölçmektedirler.) [b]

[10] G3T5: Şimdi bunun (Eşkenar dörtgene işaret etmektedir.) orta noktalarını alacağız. Nerede orta nokta? Sonra da bunları birleştireceğiz [c].



[b]



[c]

[11] G3T5: Sonra biz soru olarak diyeceğiz ki dışardaki eşkenar dörtgen olsa buradaki (içerideki) dikdörtgen oldu [d]. Peki bunların ikisi arasında ne gibi bir bağlantı var?

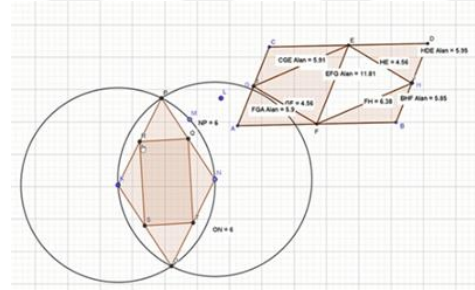
[...]

[12] G3T5: Şu üçgenler birbirine eşit oldu. Acaba bu üçgenlerin alanları arasında bir ilişki var mı? KRS ile SOT'nin alanı eşit olmayacak mı?

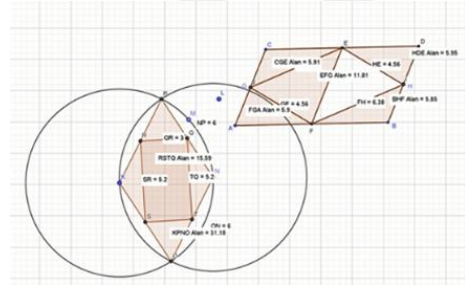
[...]

[13] G3T6: Bunun alanı (eşkenar dörtgen) bunun alanının (dikdörtgen) tam iki katı oluyor. [e]

[14] G3T5: Bunun zaten dikdörtgen olmasına gerek yok. Herhangi bir şey (dörtgen) olabilir.



[d]



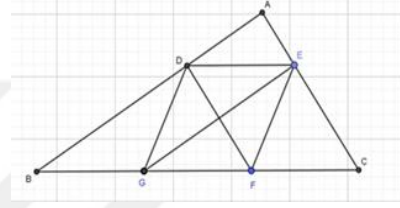
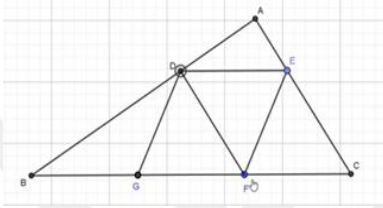
[e]

Şekil 27 (Devam). Bağlantı kurma aşamasına ait yapısal bağlantılar kapsamındaki mevcut şeklin bileşenleri arasında bağlantılar kurma davranışı örnek durumu 2

Bağlantı kurma aşamasını yansıtan yapısal bağlantılar kategorisine ait *mevcut şekle yardımcı elemanlar ekleyerek bağlantı kurmak* adlı B2'nin odak noktasında, problem kurma durumundaki geometrik şekle yeni koşul ya da sınırlılıklar ekleyerek bağlantıları araştırmak ve bunları bir problem fikrine doğru yönlendirmek yer almaktadır. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde; eşkenar dörtgene ait köşegenlerin birbirini dik ortalaması, Pisagor teoremi, Muhteşem Üçlü gibi bağlantılar kurulurken; paralelkenar etkinliğinde şekillere ait alanlar arasındaki oranları dikkate alma söz

konusu olabilmektedir. Örneğin, eşkenar dörtgen etkinliğinde hipotenüsü üç eş parçaya ayrılmış ABC üçgeninde, eşit uzunluktaki doğru parçalarından birini eşkenar dörtgenin kenarı kabul eden G3, DEFG eşkenar dörtgenine ait köşegenleri oluşturmuş ve böylece oluşan yeni yapı üzerinden çeşitli problem fikirleri ortaya atmıştır (Şekil 28, satır 1-3). Bunun yanında, G3 eşkenar dörtgene ait köşegenlerin birbirini dik ortalağığı fikri etrafında dolaşmış ancak bu fikirden olgunlaştırılmadan vazgeçilmiştir.

[1] G3T5: Buraya diklik yani köşegen çektiğimizde şununla şu da ($|DF|$ ve $|EC|$) birbirine eşit oluyor. [a] Burada da farklı bir eşkenar değil de paralelkenar (*DECF dörtgenine işaret etmektedir.*) oluşmuş oluyor. Bu paralelkenarlık nasıl oluşuyor? Bunu keşfettirsek. Neden oluşur? Nasıl böyle bir paralelkenar oluşur?



[a]

[2] G3T5: Doğru parçası olarak çektiğimizde EC ile DF birbirine eşit oluyor. Eşit uzunlukta oluyor. DE ile de FC birbirine eşit uzunlukta oluyor. Burada paralelkenar (*DECF dörtgenine işaret etmektedir.*) oluşuyor. Tamam mı? Şuradaki paralelkenar (*DEGB dörtgenine işaret etmektedir.*) aynı şekilde şu tarafta da oluşuyor bu arada.

[a] Bununla alakalı bir problem kursak nasıl bir problem kurabiliriz?

[3] G3T5: Burada mesela eşkenar dörtgenin köşegenleri ile alakalı bir problem kurabiliriz.

[...]

[4] G5T9: Şu E'den F'ye çekince mesela yarı alan oluyor değil mi? [b]

[5] G5T10: Çekelim mi?

[6] G5T9: İki de orta nokta çünkü.

[7] G5T10: Şuradan EFH'ı verip, tamamını isteyebiliriz. 4'te biri tamamının (*EFH üçgeninin alanının ABDC paralelkenarının 4'te 1'i olduğuna işaret etmektedir.*)

[8] G5T9: Hangisi?

[9] G5T10: EFH. Bu alan ($\triangle EFH$) k ise şu ($\triangle EFG$) k şu ($\triangle EGF$) k, 2k (*EHFG dörtgenine işaret etmektedir.*). Tamamı da bunun iki katı 4k oluyor.

[10] G5T9: Tamam onu da yazdırabiliriz.

[...]

[11] G1T2: Şu GF uzunluğunu nasıl bulacak? Ha bak şimdi şurası ($\angle E$) dik açı değil mi? 8-8-8 muhteşem üçlü. [c]

[12] G1T1: Ama muhteşem üçlü olması için dik açı olmasına gerek yok!

[13] G1T2: Dik açıdan indirdin kenar ... ($|GF|$, $|FC|$ ve $|EF|$ uzunluklarının eşit olmasına işaret edip, E köşesindeki açının 90° olduğuna işaret etmiştir.)

[14] G1T1: Dik açı gibi durmuyor ki burası (*E açısına işaret etmektedir.*) [c]

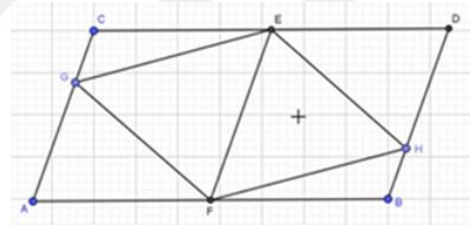
[15] G1T2: Şurası şurası bak G, E, C'idi dimi dik açı!

[16] G1T1: Hı şurası bir ölçelim o zaman dik açı mı diye tam.

[17] G1T2: Şuradan bakıyorduk değil mi? (*Araçlar çubuğunda açı ölçme sekmesine işaret etmektedir.*)

[18] G1T1: Direkt açıyı da ölçebiliriz.

[19] G1T2: Şuradan mı başlayayım? (*E açı ölçüsünü belirlemek için G veya C köşelerine işaret etmektedir.*)

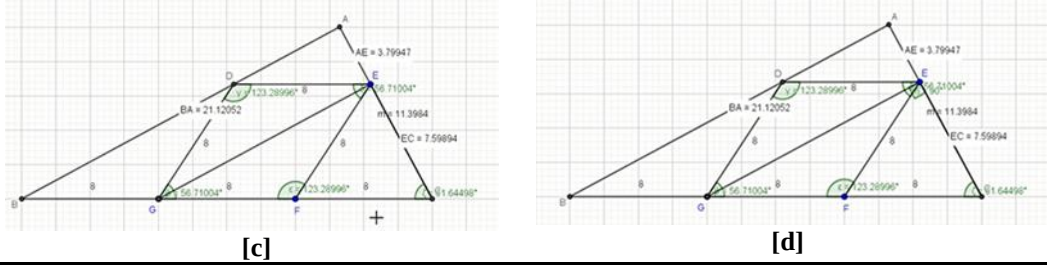


[b]

Şekil 28. Bağlantı kurma aşamasına ait yapısal bağlantılar kapsamındaki mevcut şekle yardımcı elemanlar ekleyerek bağlantı kurma davranışı örnek durumu 1

- [20] G1T1: Diğer taraftan herhalde bakalım doğru mu?
 [21] G1T1, G1T2: Dik ($\angle E$ açısı ölçüsünün 90° olduğu tespit edilmiştir.) [d]
 [22] G1T2: Çünkü muhteşem üçlü.
 [23] G1T2: Problem kuracağız şimdi. (Bağlantı kurma aşamasında problem fikrine karar kılındığına işaret etmektedir.)

[...]



Şekil 28 (Devam). Bağlantı kurma aşamasına ait yapısal bağlantılar kapsamındaki mevcut şekle yardımcı elemanlar ekleyerek bağlantı kurma davranışı örnek durumu 1

B2 kapsamında G5, paralelkenar etkinliğinde E ve F orta noktalarını doğru parçası ile birleştirmiş ve böylece EGFH dörtgenine ait köşegenlerden birini —[EF]— oluşturmuştur. G5, matematiksel deneyiminden hareketle oluşan iki dörtgen arasındaki alan ilişkilerini problem kurmak için tespit etmiştir (Şekil 28, satır 4-10). G1 ise B2 kapsamında eşkenar dörtgen etkinliğindeki eşit uzunluktaki doğru parçalarından yararlanarak, Muhteşem Üçlü bilgisini ortaya koymuş ve şekle ait diklikleri belirlemiştir. Örneğin G1, “Şu GF uzunluğunu nasıl bulacak?” (Şekil 28, satır 11) ifadesinin ardından yürüttüğü incelemeler sonucunda Pisagor teoremine işaret eden ilişkiler hakkında tartışmıştır. Bu ve benzeri tartışmalar problem kurucuların örtük şekilde problemin çözücüsünü dikkate aldığına ve dolayısıyla problem fikri için inceleme yaptığına işaret etmektedir.

B2 kapsamında paralelkenar etkinliğinde G6, dörtgenler arasındaki hiyerarşiye işaret eden bir ilişki etrafında dönmüş ve şekle eklenen yardımcı elemanlar ($|AJ|$ ve $|JB|$) aracılığıyla içeride oluşan dörtgen ile ABCD paralelkenarının alanları oranı üzerinden bir problem fikri oluşturmaya çalışmıştır (Şekil 29, satır 1-5). G6, dikdörtgenin de bir eşkenar dörtgen olup olmadığını söz konusu etmiş ve ardından karenin bir eşkenar dörtgen olduğuna karar kılmıştır. Dinamik ortamda yürütülen inceleme, statik ortama taşınmış ve hatırlanmaya çalışılan formül (alan hesaplayabilmek için köşegen uzunluklarının çarpımından ve benzerlikten yararlanma) problem kurmak için sürece dâhil edilmeye çalışılmıştır (Şekil 29, satır 8-12). Onlar, içeride oluşan şeklin eşkenar dörtgen olduğundan yola çıkarak

köşegenlerin birbirini dik ortalaması ve köşegen uzunlukları bilgisinden yararlanarak problem oluşturmaya çalışmıştır. Buna karşın gerek alan bilgisi gerekse yazılımı kullanma becerisindeki eksikliğe işaret eden tartışma neticesinde ortaya konulan problem fikrinden vazgeçilmiştir (Şekil 29, satır 7-14). Söz gelimi G6T11 “*Şu an şekli tam tutturamıyoruz. Açılarını o yüzden deneyemiyorum.*” ifadesine yer vermesi, yazılımı kullanma ve ekrandaki görüntüyü istenen şekle dönüştürme zorluğundan kaynaklı problem fikrinden vazgeçildiğine işaret etmektedir (Şekil 29, satır 14).

[1] G6T12: Aa! Şuradan (Orta nokta J'den A ve B köşelerine doğru parçası oluşturmayı kastetmektedir.) bir tane dik çeksek [d]. Bunlar hakkında bir şey diyebilir miyiz?

[2] G6T11: Dikdörtgen olursa mı? Dikdörtgen de bir eşkenar dörtgen miydi? Onu sorsak.

[3] G6T12: Kare de bir eşkenar dörtgen.

[4] G6T11: Diyelim mi şöyle? GFHE eşkenar dörtgen olduğuna göre ve bize AC ve DE uzunluklarını da versin. İçeride oluşan dörtgenin alanı nedir?

[5] G6T12: Olabilir.

[6] G6T11: Şeyden geliyor sanırım. Orta noktalarını vermiş ya E ve F noktalarını. Şöyle düşün. E ve F noktalarını orta nokta olarak göstermiş ya şunun da orta noktalarını göstermiş olursak. Şöyle çektiğimizde bunun (ABDC paralelkenarı içinde oluşan GEHF dörtgenine işaret etmektedir.) eşkenar dörtgen olduğunu düşün [f].

[7] G6T12: Tam olarak neyi göstermeye çalışıyorsun?

[8] G6T11: 1'e 2 oranda. (GEHF dörtgeni ile ABDC dörtgenlerinin alanları oranına işaret etmektedir.) Ya şurası e şurası f ya $e \cdot f / 2$ 'den alanı bulacağız (GEHF dörtgeninin köşegen uzunlukları olarak, e ve f temsiliinde bulunmuş ve dörtgenin alanının köşegen uzunluklarının çarpımının yarısı kadar olduğuna işaret etmektedir.).

[9] G6T12: Tamam formülü hatırladım.

[10] G6T11: Hatırladın değil mi? Öyle bir şey vardı. Ama bu şekil farklı ya ondan şimdi çıkaramadım. Oranlamayı nasıl yapıyorduk?

[11] G6T12: Hiç hatırlamıyorum. Ama evet formülümüz böyle vardı.

[12] G6T11: Hatırlayamadım. Şu an yazamayacağım galiba.

[13] G6T12: Başka?

[14] G6T11: Şu an şekli tam tutturamıyoruz açılarını o yüzden deneyemiyorum.

[d]

[f]

[g]

Şekil 29. Bağlantı kurma aşamasına ait yapısal bağlantılar kapsamındaki mevcut şekle yardımcı elmanlar ekleyerek bağlantı kurma davranışı örnek durumu 2

B2 kapsamında diğer bir örnek olarak G2, mevcut şekle ait $\triangle ADE$ üçgeninin dik kenarlarından birini kenar kabul eden eş bir dik üçgen ($\triangle ADH$) daha oluşturmuş

ve yeni yapı üzerinden alanları karşılaştırmayı hedeflemiş ve böylece beş tane eşit alan ölçüsüne sahip üçgenin varlığını belirlemiştir (Şekil 30, satır 1-5). Belirlenen ilişkinin doğruluğu eş zamanlı olarak test edilmiş ve direkt olarak yazıya geçirilmiştir. G2’de gözlenen bu durum, problem fikrini doğrudan yazıya geçirme eylemi, diğer gruplarda da fark edilmiştir.

[...]

[1] G2T3: Alanlarını mı karşılaştıralım şimdi. **[a]**

[2] G2T4: Şuraya ($\triangle BDG$) da bakalım. Ama önce çokgen seçmeliyiz. **[b]**

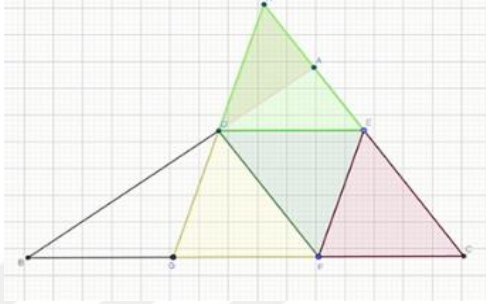
[3] G2T3: Burası geniş açılı üçgen ama sanki burası da eşit olacak gibi çünkü taban uzunlukları ve yüksekliği eşit olduğuna göre buradaki alanın da eşit olması gerektiğini düşünüyorum (BDG ile GFD üçgenlerinin alanlarına işaret etmektedir.). **[c]**

[b]

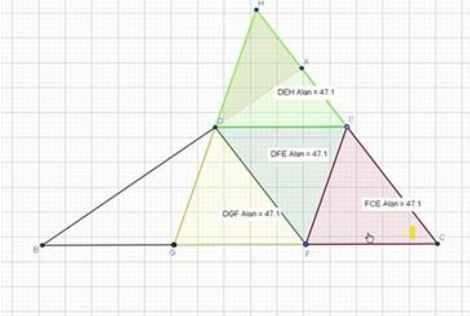
[4] G2T4: Evet. Katılıyorum. Aslında dediğinizi de probleme çevirebiliriz. Mesela buranın eşit olduğunu verelim alan olarak. Diyelim ki DBG ’nin alanı ile EFC ’nin alanı birbirine eşittir. Bunun sebebi neler olabilir? Hem kenarı hem de yüksekliği bilmeleri gerekiyor.

[5] G2T3: Hemen yazalım. **[d]**

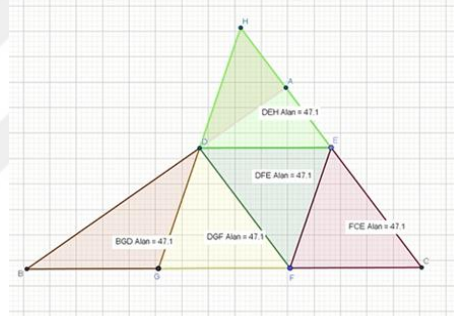
[...]



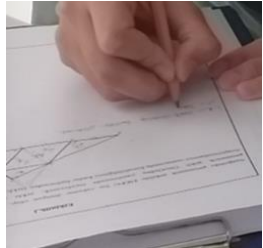
[a]



[b]



[c]



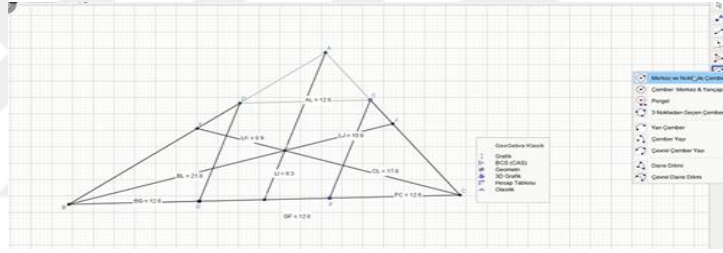
[d]

Şekil 30. Bağlantı kurma aşamasına ait yapısal bağlantılar kapsamındaki mevcut şekle yardımcı elemanlar ekleyerek bağlantı kurma davranışı örnek durumu 3

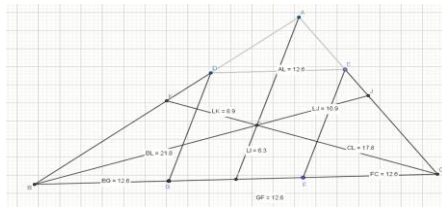
Bağlantı kurma aşamasında veri-odaklı kurulan yapısal bağlantılar yanında görülen bir diğer kategori ise hipotez-odaklı kurulan sezgisel bağlantılardır. Sezgisel bağlantıları yansıtan iki kod tespit edilmiştir: (i) varsayımlar üreterek bağlantılar kurma [S1] ve (ii) rastlantısal bağlantılar kurma [S2].

S1'in odağında, *Olsa ne olur?* düşüncesi yer almaktadır. Bu durum karşıt örneği düşünmeksizin veya matematiksel gerekçelendirmeye her zaman ihtiyaç duymaksızın ortaya çıkmaktadır. Örneğin G2, eşkenar dörtgen etkinliğinde arka planda *İçteğit olsa ne olur?* düşüncesi ile sezgisel bağlantı kurmaya çalışmıştır (Şekil 31, satır 1-7). G2, mevcut şekle kavramsal açıdan hatalı olan içteğit çemberi eklemiş ve bunun üzerinden problem fikri oluşturmuştur (Şekil 31, satır 2-4). G3 ise paralelkenar etkinliğinde içeride oluşan dörtgen hakkında *eşkenar dörtgen olsa ne olur?* düşüncesi etrafında bağlantı kurarak, problem fikri belirlemeye çalışmıştır (Şekil 31, satır 8-10). G3, problem fikrini dinamik ortamda ortaya koymuş ancak matematiksel geçerliğini statik ortamda tartışarak, problem fikrinden vazgeçmiştir (Şekil 31, satır 8-15).

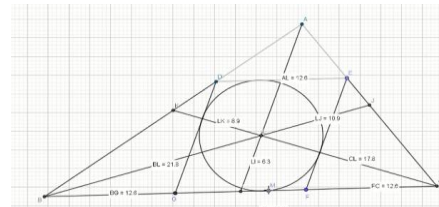
[1] G2T3: İçteğit olabilir mi acaba? İçteğit çemberin ... (Kenarortayların kesim noktasını iç teğit çemberin merkezi olarak kabul ederek, kavramsal açıdan hatalı şekilde içteğit çemberini oluşturmaya çalışmaktadırlar.)
[a], [b]



[a]



[b]



[c]

[2] G2T4: Kenardaki bir noktaya ya da kenara dokunabilirsiniz. (Kavramsal olarak oluşturulmayan sözde içteğit çember kenarlara bir şekilde teğit olacak biçimde hareket ettirilmektedir.) Aynen iç teğit çemberin merkezi [c]

[3] G2T3: İçteğit çemberin de merkezi oldu aynı zamanda.

[4] G2T4: Paralelkenarın içine bir çember yerleştirecek olsak.

[5] G2T3: Ve bu çemberin merkezinden geçen doğru parçaları kenarortayları hangi oranda böler?

[6] G2T4: Direkt oran mı isteyelim? Yoksa bu çemberin merkezi L olsun. Bu çemberin merkezi ve ABC üçgeninin özellikleri ile ilgili ne tür özellikler keşfedebilirsiniz?

[7] G2T3: Ucu kapalı olması için olur.

Şekil 31. Bağlantı kurma aşamasına ait sezgisel bağlantılar kapsamındaki varsayımlar üreterek bağlantılar kurma örnek durumu

[...]

[8] G3T5: Şimdi ortadaki şekil, farz edelim ki eşkenar dörtgen tamam mı? Bakalım buradaki eşkenar dörtgen ile ilgili bir şeyler yapalım. (GeoGebra'ya dönerek, fikirlerini şekillendirmeyi amaçlamaktadırlar.)

[9] G3T6: Onların (GEHF dörtgenine ait kenar uzunluklarına işaret edilmektedir.) şeyini kenarlarının uzunluklarını falan bir ölçelim. Uzunluk uzaklıktan (Ölçüm yapılmaktadır.). Eşkenar dörtgen değil. [d]

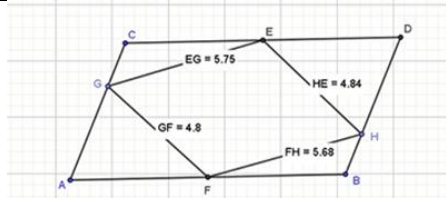
[10] G3T5: O zaman bu içeridekini eşkenar kabul edersek, nasıl bir şey olur? (Sürüklenebilir G noktasını sürüklemektedir.) [e] Şu noktayı farz edelim ki işte şura ile şura eşit ya problem kurduğumuzda diyeceğiz ki içerdeki dörtgen eşkenar dörtgen ise şuraların alanlarını mesela sorabiliriz. Mesela buraların alanları arasında bir ilişki var mı acaba? (İçerdeki paralelkenarın dışında kalan üçgenlere işaret etmektedir.) Eşkenar ise şurası alfa ise şurası da alfa ya şurası beta şurası da beta. [f]

[11] G3T5: Şu şey ya çekilen köşegen büyük ihtimalle şu paralelkenarı da ikiye böldü. [g]

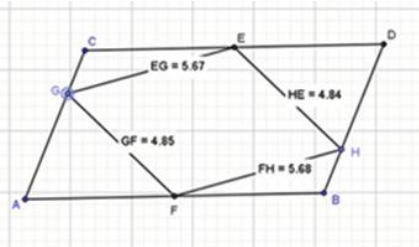
[12] G3T5: Eğer içerdeki EGFH dörtgeni bir eşkenar dörtgen ise eşkenar mı paralelkenar mı olacak?

[13] G3T6: (Grup arkadaşına bakış atmakta ve fikir sunmamaktadır.)

[14] G3T5: Bu (GEHF dörtgenine işaret etmektedir.) eşkenar olursa burada paralelkenar olacak. Şura ile şura paralelkenar olsun (GEHF dörtgenine ait köşegeni çizdiğinde ortaya oluşan iki dörtgene işaret etmektedir.). Eşkenar olmasını farklı bir problemde kullanalım.

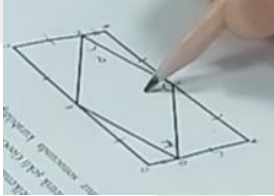
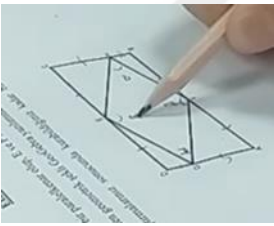
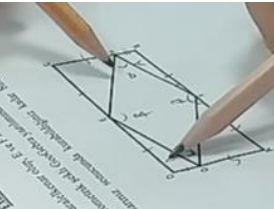


[d]



[e]

[15] G3T5: ... (Problemi yazıya geçirmeye başlamaktadır.) Paralelkenar ise alanlarını inceleyiniz gibi bir şey sorabilir miyiz? Buradan ne keşfedebilir ama alanlarını inceleyeceksek. Alanları arasındaki ilişkiyi inceleyiniz gibi bir şey sorabilir miyiz? Ya da mesela paralelkenar ve mesela şurada herhangi bir açıyı versek. Neyi bulabilir burada ama şurayı bilmiyor. Beta tamam beta dedik. Buradan bir şey bulamayız. [g]

[f]

[g]

[...]

Şekil 31 (Devam). Bağlantı kurma aşamasına ait sezgisel bağlantılar kapsamındaki varsayımlar üreterek bağlantılar kurma örnek durumu

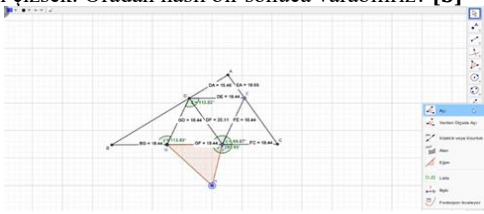
Sezgisel bağlantılar kurmak kategorisindeki diğer bir kod olan *rastlantısal bağlantılar kurma* adlı S2'nin odağında temelde iki durum yer almaktadır. Birincisi mevcut şeklin anlık görünümüne dayalı veya geometrik şekil ile bir şekilde ilişkilendirilmiş eklemeler aracılığıyla olası bağlantıların kurulması yer almaktadır. Buna göre varsayıma dayalı ortaya konulan bağlantılar, geometrik şeklin bağlamını değiştirebilmekte veya şeklin anlık görünümüne dayalı olarak ortaya çıkan yeni yapı

hakkında herhangi bir öngörü olmaksızın süreci zenginleştirme amacı taşımaktadır. Bu noktada katılımcıların merak duygusu, anlık yorumlama veya algılama gücü öne çıkabilmektedir. İkincisinde ise ortaya konulan bağlantılar daha çok “*Bir de bunu deneyelim. Belki bir sonuç elde edebiliriz.*” anlayışı taşımaktadır. Bu daha çok şekle dair tüm ilişkilerin belirlendiği veya problem fikri olarak tüm fikirlerin ortaya konulduğu düşüncesinden hareketle gözlenmekte ve kimi zaman yeni ilişkilerin doğmasına kaynaklık edebilmektedir. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde G3, farkında olmaksızın simetri kullanma stratejisinden yararlanmış ve DGF üçgenine bir şekilde eş üçgen oluşturmaya çalışmıştır. Grubun başlangıçta gerekçelendirmeksizin ortaya attığı rastlantısal bağlantı, matematiksel gerekçelendirme ihtiyacına dönüşmüş ve katılımcılarda “*Eş üçgeni nasıl oluşturabiliriz?*” düşüncesine evrilmiştir (Şekil 32, satır 1-5). Ardından başlangıçta gerekçelendirme amacı taşımayan ilişki, bir şekilde matematiksel gerekçelendirmeler sunmaya kapı aralamıştır (Şekil 32, satır 6-12).

Paralelkenar etkinliğinde ise G6, şeklin anlık görünümüne bağlı ilişkilendirmeler etrafında dönerek sezgisel hareket etmiştir. Çünkü etkinliğin barındırdığı dörtgenler arasındaki hiyerarşik ilişkiye işaret eden bağlantı kurmaya çalışmıştır. Şöyle ki şeklin anlık görünümü, katılımcının zihninde kareyi anımsatmış ve mevcut şekli kareye dönüştürerek bağlantı kurmayı amaçlamıştır (Şekil 32, satır 14-20).

[1] G3T5: Şurada mesela iki tane üçgen çizsek buraya. Şöyle bir şey çizsek mesela. Acaba öğrenciye şu şu üçgenler varya bunlar arasında bir bağlantı var mı? Nasıl bir bağlantı vardır? Bu üçgenin neresi? **[a]**

[2] G3T5: Dur uzunluklarını ölçelim ya da açısını ölçelim. 45 derece. Peki bu ikizkenar olsa? 45 derece olarak ayarlasak. 45 değil de. Mesela şöyle bir ayarlasak altta da ikizkenar bir üçgen çizsek. Oradan nasıl bir sonuca varabiliriz? **[b]**

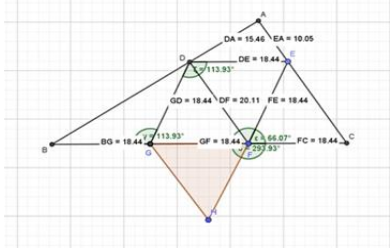


[b]

[4] G3T6: Eşit değil.

[5] G3T5: Nasıl eşit yapabiliriz?

[6] G3T6: Şey yapalım.

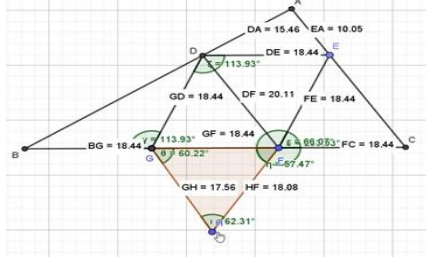


[a]

[3] G3T5: Bu ikizkenarla şu tabanları eşit olduğu için ikiz olmayacak mı? (GHF ile GDF üçgenlerine işaret etmektedir.) ... Eşit olmuyor bunlar. Köşegeni 20 ise bunlar 18. Şuranın uzunluğu ne mesela? Ama bunlar herhalde eşit olmadı. **[c]**

Şekil 32. Bağlantı kurma aşamasına ait sezgisel bağlantılar kapsamındaki rastlantısal bağlantılar kurma örnek durumu

[7] G3T5: Burada farz edelim ki en yakın çizdik mesela. (GDF üçgeni ile GHF üçgenlerinin kenar uzunluklarını eşitlemek için şekli H noktasından sürüklemektedir. Sürükledi) [d]

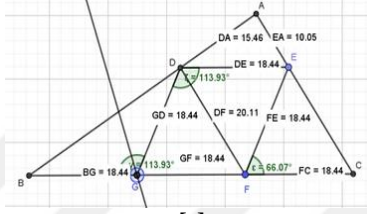


[d]

[8] G3T5: Şimdi biz orayı ikizkenar yaparsak buradan ne olur? (Kendisinin de spesifik bir fikri bulunmamaktadır.)

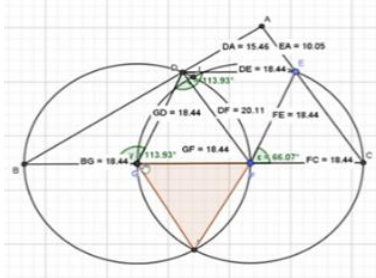
[9] G3T5: Uzunluğunu ayarlasak.

[10] G3T5: Çember edelim şimdi mesela. (Eş üçgenler oluşturmak için çember oluşturmaya çalışmaktadır.) [e]

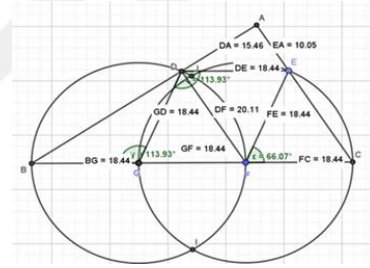


[e]

[11] G3T5: Çember yardımıyla yapmamız gerekiyor onu. Çemberlerin kesişim noktasını. Farz edelim şimdi mesela. [f]



[f]



[g]

[12] G3T5: Ama buradan tam sonuç elde etmek? 18.44 şeyi. Yazalım bunu. Kesişim noktasını almamız gerekli. [g]

[13] G3T5: Şimdi biz bu üçgende neyi keşfedebiliriz. DGF üçgeni ile IGF üçgeni eşit oldu. 3 tane eş üçgenimiz var burada. (IGF) Bu eşkenar oldu galiba. [g]

[...]

[14] G6T11: İçeridekini kare yapalım mı? [h]

[15] G6T12: Şu içeridekini mi?

[16] G6T11: Kare yapacak şekilde değiştir bakalım. (Sürüklenebilir nokta aracılığıyla şekli sürüklemeyi kastetmektedir.)

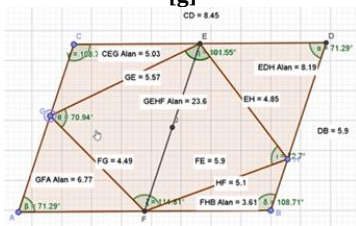
[17] G6T12: G'den tut. [h]

[18] G6T11: Şekli oynatırsak 90 derece olur mu acaba? [i]

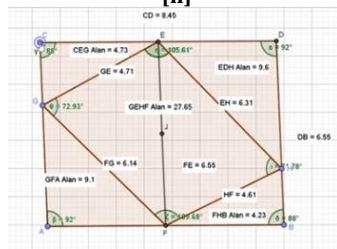
[19] G6T12: Büyüğü kare yapalım. [i]

[20] G6T11: Büyüğü mü kare yapalım? Büyüğü kare olursa yine içeride ...

[...]



[h]



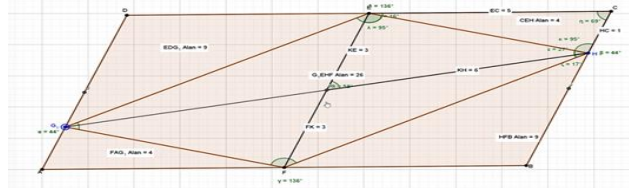
[i]

Şekil 32 (Devam). Bağlantı kurma aşamasına ait sezgisel bağlantılar kapsamındaki rastlantısal bağlantılar kurma örnek durumu

Bağlantı kurma aşamasını yansıtan son kategori eğitsel bağlantılardır. Eğitsel (pedagoji - odaklı) bağlantılar, pedagojik gereksinimlerin açık veya örtük biçimde aktive ettiği problem kurma fikri ile sonuçlanmaktadır. Buna göre mevcut şekil veya şekle yardımcı elemanlar ekleyerek, pedagojik yönelimli ilişkiler kurulmakta ve problem fikri olarak benimsenmektedir. Bu kapsamda iki kod tespit edilmiştir: (i) günlük yaşam bağlantıları [E1] ve (ii) öğretimsel bağlantılar [E2].

E1'in odağında, mevcut geometrik şekli günlük yaşam bağlamları ile ilişkilendirme yer almaktadır. Örneğin paralelkenar etkinliğinde G2, tasarlamak istediği probleme günlük yaşam bağlamı olarak uçurtmayı eklemek istemiş ve bunun üzerinden bir tartışma yürütmüştür (Şekil 33, satır 1-5). Mevcut geometrik şekil uçurtmaya benzetilmiş ve uçurtma bağlamı problemin matematiksel yapısına dâhil edilmek istenmiştir. Eşkenar dörtgen etkinliğinde G1 ve G5, günlük yaşam bağlamlarını problem kurma sürecine katmak istemiş ancak mevcut geometrik şeklin günlük yaşam problemi kurmak için uygun olmadığını düşünmüştür. Böylece günlük yaşam bağlamı olarak tasarlamayı hedefledikleri ilişkilendirmeden vazgeçmişlerdir (Şekil 33, satır 10-14).

[1] G2T3: Benim de aklıma şey geldi. Şimdi birazcık gerçek hayatla ilişkilendirme olur mu bilmiyorum ama hani uçurtma yerleştirecek olsak. Bir uçurtma yapıyor çocuklar ve bu uçurtmalarını bu paralelkenarın içerisine yerleştiriyorlar. Şekil biraz uçurtmaya benziyor ya oradan aklıma geldi. Ama bunu nasıl soruya dökebilirim bilmiyorum. Dediğiniz gibi alanları kullanabiliriz. Uçurtmayı yerleştirdikten sonra kenarda kalan şeklin alanlarının eşit olması mümkün müdür? Mümkün, evet. Böyle bir durum olabiliyor. Uçurtmanın özelliğine bağlı olarak mesela. Alanlar karşılıklı çapraz olarak birbirine eşit çıkabiliyor ama bu her zaman sağlanmıyor. Yani evet mümkündür ama bazı durumlar için mümkündür yorumu çıkacak buradan.



[a]

[2] G2T4: Burada da o eşitliği kullanması gerekecek buradaki o uzunlukların (HB, EF) ve paralelliklerin birbirine eşit olduğunu düşünmesi gerekecek. Uçurtma mı diyelim yani normal bir günlük hayat problemi şeklinde?

[3] G2T3: Yani siz bilirsiniz benim aklıma o geldi.

[4] G2T4: Şeklimiz uçurtma gibi daha doğrusu şeklimizi bir uçurtma modeli üzerinde ele alırsak ve ...

[5] G2T3: Ama şimdi durduk yere niye uçurtma modeli olarak ele alalım? Onun bir günlük hayattaki bir problemi vardır. O yüzden uçurtma olarak ele alırsız (*Günlük yaşamla ilgili bir bağlam oluşturmayı kastetmektedir.*). Yoksa durduk yere matematiksel olarak ele aldığımızda uçurtma şekli demeyiz bence.

[6] G2T4: O zaman kenar. Bu noktaların (E ve F) orta nokta olduğu belli diğer kenara ait diğer paralel kenarlar üzerinde alınan ve orta nokta olmayan noktalarla oluşturulabilecek iç taraftaki dörtgenin paralelkenar olması için hangi şartlar sağlanmalıdır? Nasıl bir koşul oluşturulması nasıl bir benzerlik ya da eşitlik kurulması gerekir?

[7] G2T3: Yani içerdekini paralelkenar olma şartını sağlaması için neler olmalı?

[8] G2T4: Evet. Öyle düşündüm.

Şekil 33. Bağlantı kurma aşamasına ait eğitsel bağlantılar kapsamındaki günlük yaşam bağlantıları örnek durumu

[...]

[10] G1T2: Üçgen falan olduğu için günlük hayat olmaz.

[11] G1T1: Günlük hayattan mesela, arazi falan olsa

[...]

[12] G5T10: Bir de böyle tam günlük hayat ile ilişkili problem kursak.

[13] G5T9: Nasıl?

[14] G5T10: Bu şekil için günlük hayat problemine gerek var mı?

[...]

Şekil 33 (Devam). Bağlantı kurma aşamasına ait eğitsel bağlantılar kapsamındaki günlük yaşam bağlantıları örnek durumu

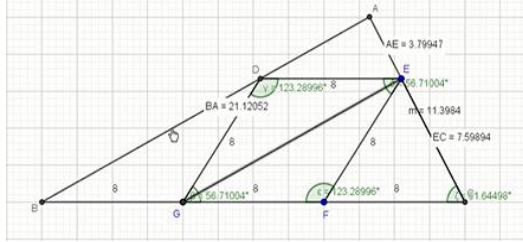
Eğitsel bağlantıları yansıtan diğer E2 kodu olarak öğretimsel bağlantılar, etkinlikteki geometrik şeklin çağrıştırdığı problem türlerini sürece dâhil etmek amaçlanmakta ve problemin potansiyel çözücüsünü öğrenciler olduğu varsayılarak, öğretimsel katkı sunacak problem fikri tasarlanmaktadır. Örneğin, eşkenar dörtgen etkinliğinde G1, mevcut şekli açı problemi kurmak için uygun bulmuş ve problem için tasarladığı çözüm yolundan öğrencinin de geçmesini düşünerek, öğretimsel amaçlı bağlantı kurmuştur (Şekil 34, satır 1-5).

[1] G1T1: Açı verip şey yapsak ama o da çok basit oluyor.

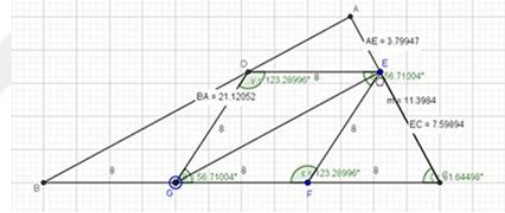
[2] G1T2: Mesela köşegen çizsek GE'den sonra onun BA'ya paralel olup olmadığını inceleyelim. Büyük ihtimal paralel [a, b, c]

[3] G1T1: Buradan da (DF) çizeyim mi? Yok.

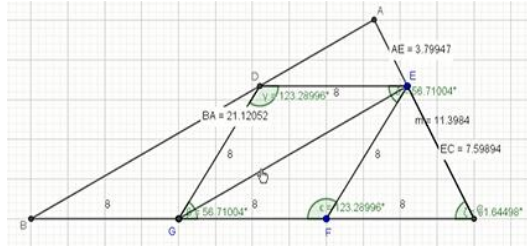
[4] G1T2: Sadece şu ilişkiden (GeoGebra'nın özelliğine işaret etmektedir.) paralelliği bakalım. [d]



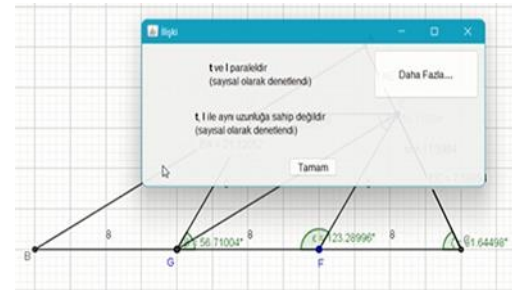
[b]



[a]



[c]



[d]

[5] G1T2: Öyle bir problem kuralım ki çocuk oradan (GE) paralel çeksin yani çizmesi gerektiğini düşünsün benzerlikten, şurası (BG) sekizse şimdi o zaman şey çıkıyor. 16'ya (CG) 24 (CB). (CGE üçgeni ile CBA üçgeni arasındaki benzerlik oranına işaret etmektedir.)

[...]

Şekil 34. Bağlantı kurma aşaması eğitsel bağlantılar kapsamındaki öğretimsel bağlantılar örnek durumu 1

Benzer şekilde G5, geometrik şekli alan taşıma problemi ile ilişkilendirmiş ve ortaokul öğretim programında yer alan yansıma simetrisini problem kurma sürecine katmak istemiştir. Grup ortaya koyduğu problem fikrine GeoGebra'nın araçlar çubuğunda rastgele gezinirken, ulaştığı fark edilmiştir (Şekil 35, [a]). Buna karşın ortaya konulan fikir, tatmin edici bulunmamış ve probleme dönüştürmek için yetersiz görülmüştür (Şekil 35, satır 1-7). Benzer olarak eşkenar dörtgen etkinliğinde G2, mevcut problem durumunu kendi eğitim sürecinde karşılaştığı, Pisagor teoremini kullanmayı gerektiren bağlantı ile ilişkilendirmiş ancak problemi tasarlamak için fikri yeterli görmediğinden vazgeçmiştir (Şekil 35, satır 8-9).

[1] G5T9: Yansıma (simetrisi) kullanabilir miyiz?
(GeoGebra'nın araçlar çubuğunda gezinirken ortaya konulan problem kurma içeriği hakkındaki fikirdir.) [a]

[2] G5T10: Neyi yansıtacağız?

[3] G5T9: Paralelkenarı.

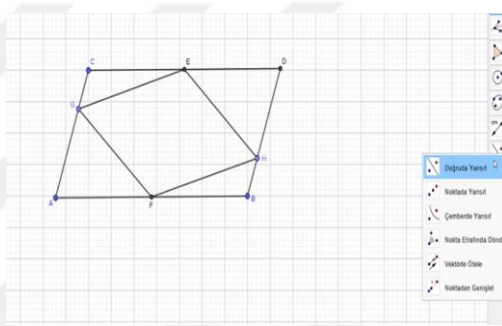
[4] G5T10: Oradan da bir şey çıkmaz ama ya.

[5] G5T9: Yansımayı şu verdiğimiz örnekte alanda kullandık. (Daha önce kurulmuş olan problem işaret etmektedir.)

[6] G5T10: Nasıl?

[7] G5T9: İşte kullandık yani orada.

[...]



[a]

[...]

[8] G2T4: Bu sanki şeye de benziyor. Öklid'in ama yok o neler üzerinde yapmıştı? Kareler üzerinde yapmıştı değil mi? Ne olabilir? Şey de diyebiliriz. Eşit alana sahip üçgenler oluşturup, bu üçgenlerin özelliklerini incelemelerini isteyebiliriz. Üçgenlerin elemanlarının işte kenarortay, açıortay, yükseklik bunların özelliklerini incelemelerini isteyebiliriz.

[9] G2T3: Aynen öyle katılıyorum.

[10] G2T3, G2T4: O zaman ne diyelim?

[11] G2T4: Bu böyle kalmasın yazalım. Birinci sorumuz olsun. İkinci sorumuzda da GeoGebra'yı kullanacağız dedik.

[12] G2T3: BCED yamuğu ...

[13] G2T4: Kendileri isimlendirsınler ...

[14] G2T3: Olur.

[15] G2T4: Kendinizin isimlendirdiği bir yamuk inşa ediniz. İlk aşama bu ya da şey bilgisayar destekli alırken hoca şey yapıyordu ya bu şekli verip, bizim de aynısını inşa etmemizi istiyordu. Şu DBEC yamuğunu inşa etmelerini isteyebiliriz. Bu şekli veririz. Kâğıtta mesela bu şekli şu yamuk kısmını GeoGebra'da inşa etmelerini isteyebiliriz.

[16] G2T3: Ya da başka bir şey deneyebiliriz.

Şekil 35. Bağlantı kurma aşaması eğitsel bağlantılar kapsamındaki öğretimsel bağlantılar örnek durumu 2

Bağlantı kurma aşaması kapsamında tespit edilen kodlar farklı frekanslarda her iki etkinlikte de gözlenmiştir (Tablo 13). Buna göre iki etkinlik boyunca S1, en fazla gözlemlenen bağlantı olmuştur. S1, eşkenar dörtgen etkinliğinde altı gruptan beşinde ve paralelkenar etkinliğinde ise altı grubun tümünde ortaya çıkmıştır. İki etkinlik

kapsamında diğer baskın olan kod E2 olmuştur. Buna göre pedagoji odaklı kurulmak istenen bağlantılar, eşkenar dörtgen etkinliğinde altı gruptan beşinde ve paralelkenar etkinliğinde ise altı gruptan dördünde gözlenmiştir. Bu kodları takiben B2 kapsamında veri-odaklı bağlantılar yer almıştır. Buna göre B2, eşkenar dörtgen etkinliğinde altı grubun tamamında paralelkenar etkinliğinde ise altı gruptan ikisinde belirlenmiştir. Buna karşılık B2, iki etkinlik arasında sıklığın en uyumsuz olduğu bağlantı olmuştur. Şöyle ki diğer kodlar iki etkinlikte birbirine yakın yoğunlukta gözlenmişken, B2 kapsamında belirgin fark dikkati çekmiştir. İki etkinlikte de benzer yoğunlukta olan B1 ve S2 kodları olmuştur. Hem B1 hem de S2 eşkenar dörtgen Etkinliğinde altı gruptan üçünde ve Paralelkenar etkinliğinde altı gruptan ikisinde gözlemlenmiştir. İki etkinlik kapsamında en az yoğunlukta gözlenen kod ise E1 olmuştur. E1, eşkenar dörtgen etkinliğinde altı gruptan ikisinde Paralelkenar Etkinliğinde ise altı gruptan yalnızca birinde ortaya çıkmıştır. Buna göre DGO'da problem kurma sürecinde günlük yaşamla ilişkilendirme en az yoğunlukta ortaya çıkan bağlantı olmuştur.

Tablo 13. Bağlantı kurma aşamasına ait kodların gruplarda görülme durumları

Etkinlik	G1	G2	G3	G4	G5	G6
<i>Eşkenar Dörtgen</i>						
<i>Paralelkenar</i>						

Not. Bağlantı kurma aşamasına ait B1 → , B2 → , S1 → , S2 → , E1 → ve

E2 → ■ ile temsil edilmiştir. Beyaz renk ise ilgili kodun grupta gözlenmediğini belirtmektedir.

3.1.3. Problem Kurma Süreçleri İçin Oluşturma Aşamasına Ait Bulgular

Oluşturma aşaması, yönelim ve bağlantı kurma aşamaları neticesinde ortaya konulan fikirlerin veya varsayımların bir problem olarak görünür kılınmasını kapsamaktadır. Oluşturma aşaması altında iki kategori belirlenmiştir: (i) anlamsal (semantik) ve (ii) dilsel (söz dizimi).

Anlamsal kategorisinde problemin yapısal ve bağlamsal yönü öne çıkarılmaktadır ve bu kategori altında dört kod belirlenmiştir: (i) problem ifadesine dinamik yönerge(ler) ekleme [A1], (ii) problemin çözülebilirliğini söz konusu yapma [A2], (iii) problemin karmaşıklığını söz konusu yapma [A3] ve (iv) problem çözücünden beklentileri karşılayan ifadelere yer verilmesi [A4].

A1'in odak noktasında problem cümlesine, problemin dinamik yazılım aracılığıyla çözülmesine veya problem cümlesinde ortaya konulan ilişkinin dinamik yazılım aracılığıyla inşa edilmesine yönelik ifadelerin eklenmesi gerektiği yönünde tartışma ve gerekli eklemelerin yapılması yer almaktadır. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde, G2T4 problemin çözücüsüne dinamik inşa yapması gerektiği yönünde açıklama eklemenin gerekliliğine değinmiş ve problem cümlesini dinamik yönerge ile başlatmıştır (Şekil 36, satır 2-3). G2T4, paralelkenar etkinliğinde de problem cümlesine dinamik yazılımın dahil edilmesinin gerekliliği üzerine tartışmış ve problem ifadesinde yazılımı kullanmayı not düşmüştür (Şekil 36, satır 6-14).

[1] G2T4: Bu böyle kalmasın yazalım. Birinci sorumuz olsun. İkinci sorumuzda da GeoGebra'yı kullanacağız dedik.

[...]

[2] G2T4: Kendinizin isimlendirdiği bir yamuk inşa ediniz. İlk aşama bu ya da şey bilgisayar destekliyi alırken hoca şey yapıyordu ya bu şekli verip, bizim de aynıını inşa etmemizi istiyordu. Şu DBEC yamuğunu inşa etmelerini isteyebiliriz. Bu şekli veririz. Kâğıtta mesela bu şekli şu yamuk kısmını GeoGebra'da inşa etmelerini isteyebiliriz.

[3] G2T4: GeoGebra'yı kullanarak size verilen şekildeki ...

[...]

[4] G1T3: Ya da alınan farklı noktaları rastgele alınan farklı noktaların diyelim. Olur mu? Karşılar mı? ... (Problem cümlesi yazılırken, üzerinde kritik edilmektedir.) oluşturduğu dörtgenin alanı ile paralelkenar içerisinde kalan diğer bölgelerin alanları arasındaki ilişkiyi inceleyiniz. Cümlemizde bozuk olmasın. Peki biz bunu GeoGebra üzerinde istemedik.

[5] G2T4: Evet.

[6] G2T3: Burada (statik) istedik.

[7] G2T4: GeoGebra üzerinden hareket ediyoruz.

[8] G2T3: Ama GeoGebra kullanmalarını istemedik. O zaman onu soruda istememiz lazım.

[9] G2T4: Zaten kastetmiyor muyuz soruda? GeoGebra yazılımında inceleyerek, şekle ait ...

Şekil 36. Oluşturma aşamasına ait anlamsal kategorisi A1 koduna ilişkin örnek durum

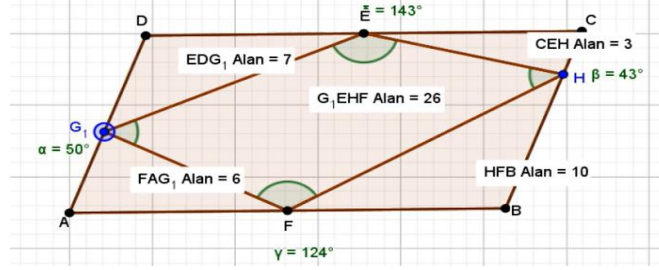
[10] G2T3: Yok bu bize yöneltilen soru, biz mesela bu soruyu yönelttiğimizde bu şekli vereceğiz. ABCD'nin paralelkenar olduğunu E, F'nin orta nokta olduğunu. Bu bilgi onlarda olacak. Geriye kalan sorma şekli bize ait. Biz mesela burada GeoGebra demedik. GeoGebra demezsek burada bir veri yok. Hani kenar belirtmedik. [a]

[11] G2T4: Onu nasıl değiştirelim o zaman yeniden aynı problemi mi uygulayalım?

[12] G2T3: Parantez içinde GeoGebra üzerinden yapın diyebiliriz.

[13] G2T4: Evet. GeoGebra üzerinden ekleyebiliriz o zaman. Ben GeoGebra üzerinden oluşturulacağını düşündüğüm için.

[14] G2T3: Tamam o zaman. İncelemelerinizi GeoGebra üzerinden yapınız diyebiliriz.



[a]

Şekil 36 (Devam). Oluşturma aşamasına ait anlamsal kategorisi A1 koduna ilişkin örnek durum

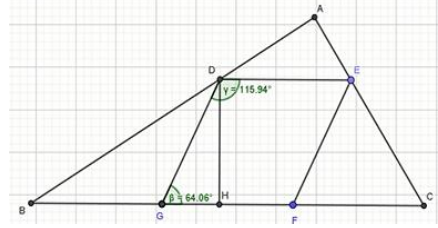
Anlamsal kategorisi altında diğer bir kod A2 olup, odak noktasında problemin çözülebilirliği hakkında karar kılınmakta; problemin yeterli ve gerekli veri içerip, içermediği tartışılmaktadır. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliği kapsamında G5, kurmak istediği problemde yalnızca G açısının verilmesinin yeterli olduğu hakkında tartışarak, çözülebilir bir problem oluşturmaya çalışmıştır (Şekil 37, satır 1-6). A2 kapsamında daha detaylı bir örnek olarak paralelkenar etkinliği kapsamında G2 tarafından yürütülen tartışma dikkati çekmiştir (Şekil 37, satır 7-37). G2, eğitsel bağlantı neticesinde ortaya çıkan problem fikrini görünür kılmaya çalışmış ve etkinlikte orta nokta olarak verilmeyen ve sabit olmayan H ve G noktaları arasındaki ilişkiye odaklanan bir problem oluşturmaya çalışmıştır (Şekil 37, satır 7-19). G2, etkinlikte içeride oluşan geometrik şeklin hangi durumda paralelkenar olduğuna yönelik oluşturulan problemde H ve G noktalarının orta nokta olup olmamasının problem cümlesinde belirtilmesinin gerekliliği üzerine tartışarak, bu noktaların orta nokta olmaması gerektiği bilgisinin problem cümlesinde yer alması gerektiğine karar vermiştir (Şekil 37, satır 20-37).

[1] G5T10: Şuradaki (Etkinlik kâğıdına işaret etmektedir.) gibi isimlendirelim. H diyelim. Açı, GDH. [a]

[2] G5T9: Sadece şu verilerek, bulunabilir mesela G açısını [a]

[3] G5T10: O zaman aynen daha dikkati de ölçer. GDE açısı.

[4] G5T9: Yukarıdaki verilen ABC üçgeninde, öyle mi girelim?



[a]

[5] G5T10: Yukarıdaki verilen şekilde diye gir.

[6] G5T9: Sadece şurayı (G) versek oradan hepsini (Diğer açı ölçülerine işaret etmektedir.) çıkartır yani. [a] [...]

[7] G2T3: Alınan iki noktayla paralelkenarın içerisinde paralelkenar oluşturulmak istenirse ... Bu biraz birinci soruya benzeyecek ama birinci soruda GeoGebra kullanıyorduk. Bu yönden fark olur. Paralelkenar oluşturabilmek için gerek ve yeter şart mı diyelim?

[8] G2T4: Aynen paralelkenar oluşturulması için gerekli şartların ne olması gerektiğini düşünüyorsunuz? Parantez içinde uzunluk ve açı diye belirtebiliriz

[9] G2T3: Peki şey şurayı kullanırmayacak mıyız? Kenardaki (köşelerde oluşan) dört tane üçgenin alanlarının karşılıklı çapraz olarak birbirine eşit olma durumunu? O yüzden açı ya da uzunluk diye sınırlandırmamız mı? [b]

[10] G2T4: Yani

[11] G2T3: Belki alandan gider.

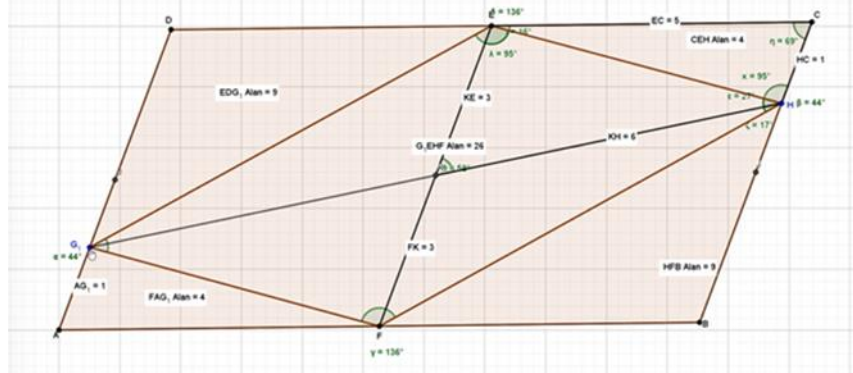
[12] G2T4: O zaman açı, uzunluk, alan ...

[13] G2T3: Paralelkenar oluşturulmak istenirse dikkat edilmesi gereken noktalar nelerdir? Gerek ve yeter şart nelerdir? ... Ama yok gerek ve yeter şartta sanki çok sınırlıyor. O olmaz. Paralelkenar özellikleri tamam. Bunu büyük paralelkenarla karşılaştırmasını isteyeceğiz. ABCD paralelkenarı ile ne tür özellikleri olacak? Nasıl bir ilişki içinde olması lazım. Biz onu istiyoruz değil mi? Bunu yapabilmek için oluşturacağımız paralelkenarla ABCD paralelkenarı arasındaki özelliklerin ilişkisini inceleyiniz. Olur mu?

[14] G2T4: İlişki olarak inceleyeceğiz ama içeridekinin paralelkenar oluşturma şartında değil miyiz şu an? Onun için içeride paralelkenar oluşturulması için geri kalan noktalarındaki şartların hangi oranda ve eşitlikte sağlanması gerektiğini bulunuz. Olabilir bence.

[15] G2T3: Anlamadım.

[16] G2T4: Geri kalan noktalar H ve G noktalarındaki paralelkenar oluşturabilme şartını hangi oranda (HC ve AG oranları) yani mesela şuradaki (AG) oran ile şuradaki (HC) birbirine eşit mi olacak?



[b]

[17] G2T3: Yani H ve G arasındaki ilişkiyi mi incelesin? O zaman şey diyelim H ve G'yi orta nokta almadan nasıl paralelkenar oluşturabiliriz. Zaten orta nokta alırsa paralelkenar olacak.

[18] G2T4: Paralelkenar olacak ve orta nokta almadan orantısız olarak nasıl bir eşitlik kullanması gerekiyor kenarlar arasında. Çünkü buradaki uzunluk ile buradaki uzunluğun birbirine eşit uzunlukta olması gerekiyor.

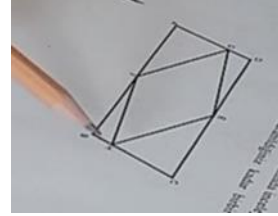
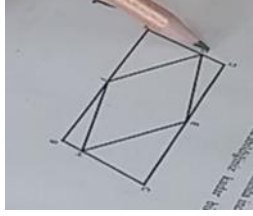
[19] G2T3: O zaman onu en son ekleyelim bu rastgele noktalar orta nokta harici noktalar diyelim. Tamam onu en son ekleyelim. Peki cümleyi nasıl kuracağız?

[20] G2T4: (Cümle kurmaya destek oluyor. Cümleleri düzeltmeye çalışıyorlar cümlelerin anlaşılabilirliği vb.)

[21] G2T3: Buradaki şekli (statik) ile bakalım. Burası (H) ile şurası (G) arasındaki ilişkiyi mi soruyoruz? [c]

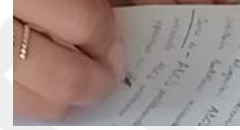
Şekil 37. Oluşturma aşamasına ait anlamsal kategorisi A2 koduna ilişkin örnek durum

[22] G2T4: Evet. Ona bağılı olarak içeride nasıl bir paralelkenar oluşturmaya çalıştığımızı soruyorum.
 [23] G2T3: Ama ya öğrenci şuradan (DG ve HB doğru parçalarına işaret etmektedir.) düşünürse? O zaman kısıtlamış oluruz. O zaman AG , HC diye vermeyelim de ... (Problem cümlesinin açık-anlaşılabilirliği ve çözülebilirliğini değerlendirmektedirler.)

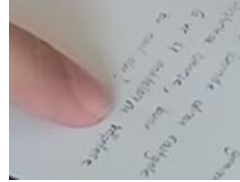


[c]

[24] G2T4: AD üzerinde alınan G noktası ile BC üzerinde alınan ...
 [25] G2T3: H noktasının birbirleriyle ilişkisi ne durumda olmalıdır?
 [26] G2T4: Birbirleriyle ilişkisi?
 [27] G2T3: Aralarında nasıl bir oran olmalıdır? Bu muydu soru?
 [28] G2T4: Evet o şekilde ama oranı neye göre kuracağız. Oran hangisine göre olacak?
 [29] G2T3: Onu öğrenci kendisi alacak mesela ben AG 'ye göre işte şununla şunun arasında şöyle bir oran al diyecek mesela. (Yukarıdakileri kastederek farklı oranlar kurulabileceğini ifade etmektedir.)
 Farklı çözüm yolları olmuş olacak soruda [e]
 [30] G2T4: O zaman şöyle diyelim AD ve BC noktaları üzerinden H ve G noktalarına olan uzaklıkları arasındaki orantısal ilişki ile devam edersek
 [31] G2T3: Tamam o zaman kenar şöyle gösteriyorduk değil mi? (Yazı ile devam edip etmememde tereddüt yaşamaktadır.) [f]
 [32] G2T4: G ve H noktalarının köşelere olan uzaklıkları arasında paralellik oluşturulabilmesi için nasıl bir orantı ...
 [33] G2T3: Arasında belli bir oran olmalı mıdır? Olmalıysa bu nasıl olmalıdır? Bir okuyun hocam isterseniz olmuş mu?
 [34] G2T4: Şurada noktalarının köşelere... Evet. [g]
 [35] G2T4: Ana fikri vermiş miyiz?
 [36] G2T3: Aynen oldu bence bayağı bir zorlandık.
 [37] G3T4: Tamam. Bir de şeyi eklemeliyiz. G ve H orta nokta olmamak şartı ile ...



[f]



[g]

Şekil 37 (Devam). Oluşturma aşamasına ait anlamsal kategorisi A2 koduna ilişkin örnek durum

A3'ün odağında problem cümlesinde yer verilen bilginin problemin çözümünü aşikâr edip etmediği yer almaktadır. Buna göre, gruplar oluşturma kapsamında problemin yönlendirici veri veya çözümü belirgin kılacak ipucu içerip içermediği noktasında tartışabilmıştır. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde G6, içerideki eşkenar dörtgen ile ABC üçgeni arasındaki alan ilişkisine yönelik problem kurmaya çalışmış ancak problem cümlesinde ikisi arasındaki ilişkinin doğrudan “*Nasıl bir ilişki vardır?*” şeklinde sunulmasının çözücü için yönlendirici olacağı noktasında kısa bir tartışma yürütmüştür (Şekil 38, satır 1-3). Onlar etkinlikle ilişkili açık-uçlu problem oluşturmaya çalışmış ancak soru kökünün yönlendirici olup, problemin karmaşıklığını

azaltacağına örtük de olsa kanaat getirmiştir. Bu noktada etkinlik yönergesini dikkate alarak, problemin uygun olduğu düşünülmüştür (Şekil 38, satır 3). Diğer bir örnek olarak G2 eşkenar dörtgen etkinliğinde DECB yamuğunu inşa edip, bu yamuğu eşit alanlara paylaştırmaya yönelik bir problem oluşturmaya çalışmıştır. Buna göre grup üyeleri problemin çözümünü aşikâr kılan verinin gerekliliği yönünde tartışmıştır (Şekil 38, satır 4-14). Çözümde gerekli olan, iki uzunluk arasındaki mesafenin, verinin problemde belirtilmesi gerektiği yönünde tartışmış ve böyle bir tercihin problemin karmaşıklığını azaltacağına işaret eden savunmalar yapılmıştır (Şekil 38, satır 5-10).

- [...]
- [1] G6T11: Sen söyledin. İçeride oluşan DEFG eşkenar dörtgeni ile ABC üçgeninin alanı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- [2] G6T11: Çok mu böyle direkt yönlendiriyoruz?
- [3] G6T12: Sınıf seviyesi belli değil. O yüzden sıkıntı yok.
- [4] G2T4: *(Problemi yazarken seslendirme yapmaktadır.)* GeoGebra'yı kullanarak size verilen şekilde ...
- [5] G2T3: Taban uzunluğu ile tavan uzunluğu arasındaki uzunluk oranı 3 olacak şekilde ayarladıktan sonra diyebiliriz bence.
- [6] G2T4: Ama ipucunu vermiş oluyoruz. İpucunu vermeyelim. Onu onlar keşfetsinler. Nasıl ayarlamamız gerekiyor. Ne yaptınız ayarlamak için bunu onlar söylesinler.
- [7] G2T3: Evet doğru!
- [8] G2T4: GeoGebra'yı kullanarak size verilen şekildeki DECB yamuğunu inşa ediniz. Ardından bu yamuğu eşit alanlara sahip geometrik şekillere nasıl ayırabilirsiniz. Bunu açıklayınız.
- [9] G2T3: Kenar uzunlukları ile bağdaştırsak biraz daha iyi olur sanki hocam orayı.
- [10] G2T4: Ama işte bunu dikkate almaları gerektiğini biz söylersek olmaz. Açık-uçlu problem zengin problem yani biz sınırlandıramayız. Yani siz ne diyorsunuz bilmiyorum ama şimdi şey var. Biz kenar uzunluklarını dikkate almaları gerektiğini biz söylersek bir kapıyı biz kapıyı kapatmış oluyoruz. Geriye onlara ne kalıyor? Üçgen oluşturma ve yükseklik kalıyor bulabilecekleri. Bir de hani burası eşit.
- [11] G2T3: Tamam o şekilde ipucu vermeyelim o zaman ben açık olması için düşündüm öyle de.
- [12] G2T4: Ardından bu yamuğu eşit alanlara sahip geometrik şekillere nasıl parçalayabileceğinizi açıklayınız. Nasıl yaptığınız GeoGebra'da gösteriniz gibi bir ifade ekleyeyim mi?
- [13] G2T3: Evet
- [14] G2T4: O zaman bu problem burada biter herhalde ... Tamam geçelim üçüncü probleme ...
- [...]

Şekil 38. Oluşturma aşamasına ait anlamsal kategorisi A3 koduna ilişkin örnek durum 1

G2 yine paralelkenar etkinliğinde, paralelkenarda orta nokta olarak verilmeyen sürüklenebilir iki noktanın (G ve H) problem cümlesinde nasıl yer alması gerektiği yönünde bir tartışma yürütmüş ve tartışmada bu bilginin problemde yer alıp, almamasının problemin karmaşıklığını etkileyebileceğine işaret etmiştir (Şekil 39, satır 3-21). Böylece her ne kadar iki kullanımda da açık-uçlu problem oluşturmak hedef olmuş olsa da sürüklenebilir ifadesine yer vermemek, problemi daha da karmaşıklatabilecektir. Grup, nihayetinde GeoGebra'da çalışılması gerektiğini problem cümlesine eklemeye karar vermiştir (Şekil 39, satır 22-31).

- [1] G2T3: Tamam. Şimdi bu E ve F noktalarını kullanarak, zaten soru onlarda var. E ve F noktalarının orta nokta olduğu bilgisi onlarda var. Bu bilgiyi kullanarak, diğer kenarlardan aldığımız herhangi iki nokta ile oluşan buradaki dörtgenin ve üçgenlerin alanı arasındaki ilişkiyi inceleyiniz. Birazcık karmaşık olacak soru ama.
- [2] G2T4: Paralellik üzerinden açıklayalım isterseniz hocam. E ve F kenarlarına ait paralelkenarlar hariç diğer kalan paralelkenarlar üzerinde alınan noktaların ve bu orta noktaların birleşimi ile oluşan dörtgenin ... (Problem cümlesini oluşturmaya çalışmaktadırlar.)
- [3] G2T3: Paralelkenarın diğer kenarları mı diyelim o zaman?
- [4] G2T4: Orta noktaya ait olmayan diğer paralel kenarlar üzerindeki noktalar diyebiliriz.
- [5] G2T3: Tamam. Orta noktası verilmeyen diğer paralelkenarlar...
- [6] G2T4: Orta noktası verilmeyen ...
- [7] G2T3: diğer kenarlar üzerinde alınan herhangi iki nokta ...
- [8] G2T4: Diğer kenarlar üzerinde alınan iki noktanın dersek.
- [9] G2T3: Tamam.
- [10] G2T4: Paralelkenarlar üzerindeki noktalarla birleşimi ile ...
- [11] G2T3: E ve F noktaları ile birleşimi ile mi diyeyim?
- [12] G2T4: E ve F'de diyebiliriz. Doğru!
- [13] G2T3: E ve F orta noktalarıyla?
- [14] G2T4: Evet.
- [15] G2T3: Orta noktalarıyla birleştirilerek oluşturulan dörtgenin alanı ile kenarlarda ...
- [16] G2T4: Şöyle desek daha güzel olur bence hocam. Paralelkenarın içinde kalan diğer alanlar ile arasında ...
- [17] G2T3: Evet. Direkt üçgen diye vermeyeyim. Daha mantıklı!
- [18] G2T4: Paralelkenar içerisinde kalan diğer alanlar toplamı arasında nasıl bir ilişki vardır? Ama bunların (G ve H) hareket edebileceğini de belirtmemiz gerekiyor
- [19] G2T3: Şimdi herhangi iki nokta dedik ya bu iki noktanın değişebileceğini bence burada vurguladık.
- [20] G2T4: Diğer kenarlar üzerinde değişkenlik gösteren iki nokta mıdır? Diyelim. Sürüklenebilir desek daha iyi olur
- [21] G2T3: Ya da alınan farklı noktaları rastgele alınan farklı noktaların diyelim. Olur mu? Karşılar mı? ... oluşturduğu dörtgenin alanı ile paralelkenar içerisinde kalan diğer bölgelerin alanları arasındaki ilişkiyi inceleyiniz. Cümlemizde bozuk olmasın. Peki biz bunu GeoGebra üzerinde istemedik.
- [22] G2T4: Evet.
- [23] G2T3: Burada (statik) istedik.
- [24] G2T4: GeoGebra üzerinden hareket ediyoruz.
- [25] G2T3: Ama GeoGebra kullanmalarını istemedik. O zaman onu soruda istememiz lazım.
- [26] G2T4: Zaten kastetmiyor muyuz soruda? GeoGebra yazılımında inceleyerek, şekle ait.
- [27] G2T3: Yok bu bize yöneltilen soru, biz mesela bu soruyu yönelttiğimizde bu şekli vereceğiz. ABCD'nin paralelkenar olduğunu E, F'nin orta nokta olduğunu. Bu bilgi onlarda olacak. Geriye kalan sorma şekli bize ait. Biz mesela burada GeoGebra demedik. GeoGebra demezsek burada bir veri yok. Hani kenar belirtmedik. (Etkinliğe bağlı kalınmaktadır.)
- [28] G2T4: Onu nasıl değiştirelim o zaman yeniden aynı problemi mi uygulayalım?
- [29] G2T3: Parantez içinde GeoGebra üzerinden yapın diyebiliriz.
- [30] G2T4: Evet. GeoGebra üzerinden ekleyebiliriz o zaman. Ben GeoGebra üzerinden oluşturulacağını düşündüğüm için.
- [31] G2T3: Tamam o zaman ... İncelemelerinizi GeoGebra üzerinden yapınız diyebiliriz.
- [...]

Şekil 39. Oluşturma aşamasına ait anlamsal kategorisi A3 koduna ilişkin örnek durum 2

Anlamsal kategorisi altında son kod olan A4'ün odak noktasında, problemin açık-uçlu forma dönüştürülmesi veya “açıklayınız, inceleyiniz veya neden?” vb. öğretimsel amaçlı soru köklerini ilave etmek yer almaktadır. Örneğin G2, eşkenar dörtgen etkinliği kapsamında farklı kenar uzunluklarına sahip ancak eş alanlı geometrik şekillerin belirlenmesini istemiş ve bunun için problem cümlesinde eşit alan

ölçüsüne sahip olma ifadesine yer vermeyip, soruyu "... inceleyiniz." şeklinde tamamlamaya karar vermiştir. G2, doğrudan eş alanlı geometrik şekilleri belirleyiniz cümlesi yerine problemin açıklığını genişletmiş ve problemi keşif problemine dönüştürmüştür (Şekil 40, satır 1-6). G2 yine eşkenar dörtgen etkinliğinde çözücünden kendi teoremini oluşturmasına yönelik beklentisini dile getirmiş ve problemi keşif problemi olarak sunmuştur (Şekil 40, satır 7-9). Benzer şekilde eşkenar dörtgen etkinliğinde G3, eşkenar dörtgenin köşegenlerini oluşturmuş ve problem cümlesinde, ortaya çıkan iki paralelkenarın (*DEGB* ve *DFCE*) keşfedilmesini talep eden ifadelerle yer vermiştir. G3 bu problemi bir başka problemi yazarken oluşturmuş ve peşi sıra yazmıştır (Şekil 40, satır 10). Buna göre, DGO'da problem kurma sürecinde oluşturma aşamasında problemler ardı sıra yazılabilmektedir.

[1] G2T4: Verilen şekilde ... Biraz da birbirinden farklı diyoruz ya artık şeyden çıkalım. Son şu üç dördü tamamlayalım alandan çıkalım artık. Başka bir şeye odaklanalım. Başka bir özelliğe, verilen şekilde kenar uzunluğuna bağlı olarak mı diyeyim. Kenar uzunluğunu inceleyerek mi diyeyim?

[2] G2T3: Fark etmez.

[3] G2T4: Kenar uzunluğuna bağlı olarak ne oluşturmasını istiyoruz?

[4] G2T3: Eşit alanlara sahip daha doğrusu biz alanlar arasındaki orantıyı keşfetmesini bekliyoruz.

[5] G2T4: Kenar uzunluğuna bağlı olarak alanların nasıl değiştiğini inceleyiniz. İncelemeleriniz açıklayınız.

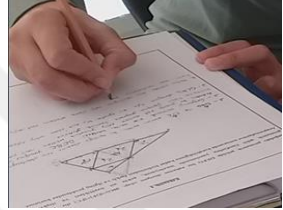
[6] G2T3: Kenar uzunlukları değiştiğiçe incelemelerinizi açıklayınız.

[7] G2T4: Thales teoreminden yola çıkarak, kendi teoreminizi oluşturunuz

[8] G2T3: Thales teoremine benzer de olabilir. Bir özellik keşfetmesini isteyebiliriz.

[9] G2T4: [...] Keşfediniz. Keşfinizi nasıl yaptığınızı açıklayınız. Düşünelim. [...]

[10] G3T5: Yani nasıl soracağız? Diyelim ki mesela eşkenar dörtgenin köşegenlerini birleştirdiğimizde yeni şekiller oluşur mu? Ne gibi ... hangi şeyler oluşabilir? Eşkenar dörtgenler oluşabilir diye bir şey sorabiliriz. Bu dörtgenlerin ... Çünkü biz onlardan şeyi fark etmelerini istiyoruz. Bu dörtgenlerin eşkenar dörtgen olduğunu ...



Şekil 40. Oluşturma aşamasına ait anlamsal kategorisi A4 koduna ilişkin örnek durum 1

G2, paralelkenar etkinliğinde de problem çözücünden beklentilerini dile getiren ifadelerle yer vermeye çalışmıştır (Şekil 41, satır 1-7). Buna göre içeride oluşan dörtgen ile paralelkenarın alanları arasındaki ilişkinin keşfedilmesine yönelik problemi oluşturmuştur. Başka bir örnek olarak G3, yine paralelkenar etkinliğinde içeride oluşan dörtgen ile paralelkenarın alanları arasındaki ilişkinin keşfedilmesine yönelik ifadeler kullanmayı tercih etmiştir (Şekil 41, satır 8). G3, benzer şekilde paralelkenar etkinliğinde yer alan sürüklenebilir noktaları (G ve H) köşe kabul eden dörtgenin

köşegenleri ile dışarıdaki paralelkenarın kenarlarının birbirine paralel olması durumunun keşfine yönelik problem kurmuştur. Bu noktada G3, dışarıdaki paralelkenarın kenarları ile içeride oluşan dörtgenin köşegenlerinin yalnızca G ve H (sürüklenebilir) noktalarının orta nokta olması halinde mümkün olduğunun sezgisel olarak farkında olup, matematiksel geçerliğe dikkat etmeksizin problem çözücünden beklentilerini dile getirmiştir (Şekil 41, satır 9). Bu örnek DGO'da problem kurma sürecinin katılımcıların matematiksel bilgi birikimine bağlı olarak incelenmeye değer olduğuna işaret edebilmektedir.

[...]

[1] G2T4: Birbirine paralel olan iki kenarlı orta noktalarını birleştirdiğimiz zaman iç tarafta nasıl bir dörtgen elde ettik? Bence bir eşkenar dörtgen değil. Benzemiyor da zaten

[2] G2T3: Acaba yine GeoGebra mı kullandırsak? Hani şöyle desek. Öyle bir paralelkenar çizin ki ortadaki dörtgen ... Hayır bu soru olmaz. Bu bilgi onlarda var. Öyle bir problem olmaz.

[3] G2T4: Şöyle yazalım. Birbirine paralel olarak verilen kenarlardan, kenarların orta noktaları işaretlediğimizde ve diğer paralel olan kenarlardaki herhangi bir noktaların birleşimi ile oluşan iç taraftaki dörtgenin alanı sonradan oluşturulan noktaların kenar üzerinde sürüklenmesiyle nasıl bir değişiklik gösterir? İç taraftaki alana göre nasıl bir farklılaşma olur?

[4] G2T3: İç taraftaki alana göre mi? Yani şu 26'nın alanına göre mi? [a]

[5] G2T4: Aynen değişmediğini. Buradaki alanların toplamının eşit olduğunu görmesini isteyelim. [b]

[6] G2T3: O zaman bu kenarlarla alanın ilişkisini incelemesini istiyoruz. Doğru mu?

[7] G2T4: Evet.

[a]

[b]

[8] G3T5: ... Paralelkenar ise alanlarını inceleyiniz gibi bir şey sorabilir miyiz? Buradan ne keşfedebilir ama alanlarını inceleyeceksek. Alanları arasındaki ilişkiyi inceleyiniz gibi bir şey sorabilir miyiz? Ya da mesela paralelkenar ve mesela şurada herhangi bir açıyı versek. Neyi bulabilir burada ama şurayı bilmiyor. Beta tamam beta dedik. Buradan bir şey bulamayız. Alan ilişkisine yönelik yazıyorum.

[...]

(Problem cümlesine yönelik tartışılmaktadır.)

[9] G3T5: EHFG dörtgeninin köşegenlerini hangi durumlarda ABCD dörtgeninin kenarlarına paraleldir? Sağladığı durumları açıklayınız. Anladın mı? Her durumda paralel olmuyor bunlar. Paralel olması için de büyük ihtimal şunların (G ve H) orta nokta olması gerekiyor.

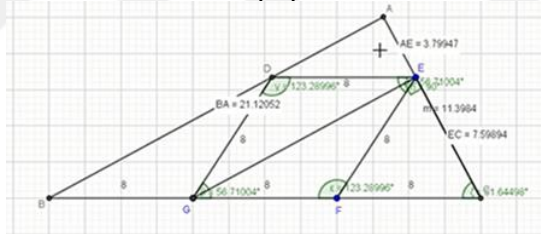
Şekil 41. Oluşturma aşamasına ait anlamsal kategorisi A4 koduna ilişkin örnek durum 2

Oluşturma aşamasını yansıtan diğer bir kategori dilseldir. Dilsel kategorisi problem cümlesinde sayı ve sembollerin kullanımına yönelik olup, iki kod altında birleştirilmiştir: (i) problem ifadesindeki nicel verileri düzenleme [D1] ve (ii) problem ifadesindeki matematiksel notasyonları düzenleme [D2].

D1'in odak noktasında, problemi yazma esnasında çözümü kolay kılan (işlem adım sayısını azaltma vb.) uygun sayılar kullanma veya hesaplamayı kolaylaştıracak açı ölçüleri kullanma yer almaktadır. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde G1, problemi yazarken, problem durumundaki 1'e 3 benzerlik oranı ile uyumlu ve birbirinin katı olan sayılar kullanmaya dikkat etmiştir (Şekil 42, satır 1-3). Benzer şekilde, aynı etkinlik kapsamında G1, problem durumunda yer alan Pisagor teoremini 6-8-10 üçgeni olarak sunmayı tercih etmiştir (Şekil 42, satır 5-9). G6, paralelkenar etkinliğinde açı ölçüsü ve kenar uzunluklarının nicel değerini ekrandaki veriler yerine yuvarlama hesabı olarak verilmesini tercih etmiştir (Şekil 42, satır 10-14). Bu yaklaşım G3 tarafından da tercih edilmiş ve kurulmak istenen problemin görseli olarak ekranda yer alan şeklin nicel verisi yerine hesaplaması kolay açı ölçüsü kullanılmıştır (Şekil 42, satır 15).

[1] G1T1: Yazalım yine de yazalım belki bir şey çıkar.
 [2] G1T2: Uzunluğu 3 ya bence buraya bağlı kalmamıza gerek yok sadece özelliklerini keşfedelim diye dinamik değil ya kendimiz böyle şey çıksın (*Uygun/kolay bölünebilir sayılar kullanmaya işaret etmektedir.*)
 [3] G1T1: Düzgün sayılar verelim.
 [4] G1T2: 8'e 24. 1'e üçlük bir şey kuracağız benzerlik kuracağız. AE eşittir. İşte 3 cm olsun o zaman şura 3 ise 1'e 3 olacak ya 6 oluyor burası

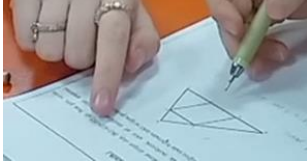
[...]



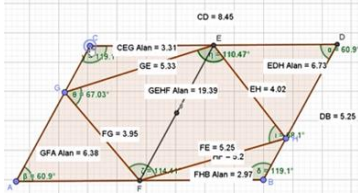
[a]

[5] G1T2: Onların da 8-8 olmasına gerek yok 6-8-10 üçgeni yapalım 5-5 olsun. Kolaydan çıksın [a]
 [6] G1T1: he doğru
 [7] G1T2: oradaki ilişkiyi keşfetmek için yaptık ya. Diyelim ki ...
 [8] G1T1: Bir tanesini söyleyelim.
 [9] G1T2: Şurada eşit olduğunu söylemiş. BG, GF, FC eşittir 5 cm. (*Etkinlik yönergesine işaret etmektedir.*) [b]

[...]



[b]



[c]

[10] G6T11: Yazmak istersen yaz.
 [11] G6T12: Açığı kaç derece verelim? Kenar uzunluklarını da ... [c]
 [12] G6T11: Bilmiyorum senin sorun.
 [13] G6T12: Tamam o zaman.
 [14] G6T11: Açığı belirli bir şey ver. 60 ver. 30 ver. (*Bu esnada sürüklüyor. Diğeri yazıyor.*)
 [15] G3T5: O zaman ilk problemimiz bizim şey olsun. DEFG eşkenar dörtgeninde D açısının ölçüsünü biz 100 (113) derece olarak verelim.

Şekil 42. Oluşturma aşamasına ait dilsel kategorisi D1 koduna ilişkin örnek durum

Dilsel kategorisi altında sunulan D2'nin odağında ise problemin matematiksel cümlesine yönelik müdahaleler yapılması yer almaktadır. Buna göre, açı veya açı ölçüsü gösterimlerinin nasıl olması gerektiği noktasında kararsızlık yaşayabilen grup üyeleri çözümü, problem cümlesini matematiksel gösterim ile temsil etmede bulmuştur (Şekil 43, satır 2-5). Diğer bir örnek olarak G5, üçgen ve açı temsili arasında karmaşa yaşamış ve açı ölçüsünü ifade etmek için açının önüne m (*measure*) harfi getirmenin uygunluğunu sorgulamıştır (Şekil 43, satır 6-10). G6 ise problem cümlesini sözel ifadeler yerine matematiksel gösterimlerle oluşturmaya çalışmıştır (Şekil 43, satır 11-13). Buna göre D2 kapsamında öğretmen adayları problem cümlesinde matematiksel gösterimlerin önemine işaret eden davranışlar sergileyebilmiştir.

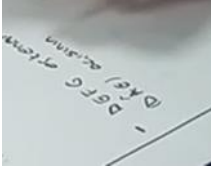
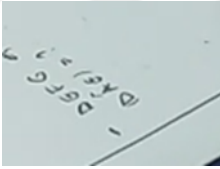
[1] G3T5: O zaman ilk problemimiz bizim şey olsun. DEFG eşkenar dörtgeninde D açısının ölçüsünü biz 100 (113) derece olarak verelim.

[2] G3T6: D açısı derken mesela şey yazsan EDG değil mi?

[3] G3T5: Doğru. Böyle yazılıyor (*Siler ve EDG açısı olarak yazar*) [a]

[4] G3T6: Evet.

[5] G3T5: DAE açısı ... açı ölçüsü? Açısının? ... ya da direkt şöyle yazalım. [b]
[Sözel olarak yazmaktan vazgeçip, matematiksel gösterim ile sunmayı tercih etmektedirler.]

[b]

[6] G5T10: Sadece şurayı (G) versek oradan hepsini çıkartır yani.

[7] G5T9: Aynen. DGH. Bunu üçgen olarak mı gösteriyorduk? Açığı nasıl yapıyorduk? m mi koyuyorduk?

[8] G5T10: Yok kanka. Üçgen geliyor altını kapatma.

[9] G5T9: Şöyle mi? Şura m mi koyuyorduk? (*Açı ve açı ölçüsü hangisini kullanması gerektiği yönünde tereddüt yaşamaktadır.*)

[10] G5T10: Koymasan da olur.

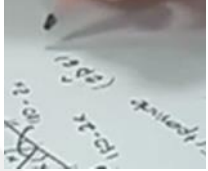
[11] G6T11: Ya da dur. Eşkenar dörtgenin özelliğini yine şey yaptık. Eşkenar dörtgende şöyle değil miydi? Şu açılar birbirine eşit değil miydi? Köşegenler çekince, F açısını soralım. [c]

[12] G6T12: Yaz. De ki AC uzunluğu 10 br. Yok A açısı 90 derece ise

[13] G6T11: A açısı 90 derece virgül diyelim. AC uzunluğu 10 cm. [d]




[d]



[a]



[c]

Şekil 43. Oluşturma aşamasına ait dilsel kategorisi D2 koduna ilişkin örnek durum

Oluşturma aşaması kapsamında ele alınan kodların gruplarda görülme durumlarına Tablo 14'te yer verilmiştir. Tablo 14'e göre iki etkinlik boyunca oluşturma aşaması kapsamında A2, en fazla sayıda gözlenen kod olmuştur. A2,

eşkenar dörtgen etkinliğinde altı gruptan ikisinde görülmüş iken paralelkenar etkinliğinde altı gruptan beşinde tespit edilmiştir. Buna göre DGO’da problem kurma süreci için oluşturma aşamasında katılımcı gruplar, problem ifadesindeki verinin çözüm için yeterli ve gerekliliğine ağırlık vermişken, bunun ardından problem ifadesinde çözücünden beklentileri karşılayan ifadeler kullanmaya dikkat etmiştir. Buna göre A4, eşkenar dörtgen etkinliğinde altı gruptan ikisinde ve paralelkenar etkinliğinde ise altı gruptan dördünde tercih edilen bir yaklaşım olmuştur. Katılımcıların bir sonra ağırlık verdiği yaklaşım ise problemin karmaşıklığını söz konusu etmek olmuştur. Buna göre A3, eşkenar dörtgen etkinliğinde altı gruptan üçünde ve paralelkenar etkinliğinde ise altı gruptan ikisinde görülmüştür. Gruplar problem cümlesinde sayı ve sembollerin kullanımına da dikkat edebilmiştir. Bu kapsamda hem D1 hem de D2 iki etkinlik boyunca üçer kez gözlenmiştir. D1, eşkenar dörtgen etkinliğinde altı gruptan ikisinde ve paralelkenar etkinliğinde ise altı gruptan yalnızca birinde görülmüştür. Buna karşın D2, eşkenar dörtgen etkinliğinde altı gruptan üçünde görülmüşken, paralelkenar etkinliğinde hiçbir grupta görülmemiştir. Tablo 14’e göre özellikle dikkati çeken iki durum belirlenmiştir. Birincisi paralelkenar etkinliği kapsamında D2, hiçbir grupta görülmemiştir. İkincisi ise G4’te oluşturma aşamasına ait hiçbir kodun gözlemlenmemiş olmasıdır.

Tablo 14. Oluşturma aşamasına ait kodların gruplarda görülme durumları

Etkinlik	G1	G2	G3	G4	G5	G6
<i>Eşkenar Dörtgen</i>						
<i>Paralelkenar</i>						

Not. Oluşturma aşaması kapsamındaki A1→ , A2→ , A3→ , A4 → , D1→ ve D2 → ile temsil edilmiştir. Beyaz renk ise ilgili kodun grupta gözlenmediğini belirtmektedir.

Tablo 14 (Devam). Oluşturma aşamasına ait kodların gruplarda görülme durumları

Kod	Grup 1	Grup 2	Grup 3	Grup 4	Grup 5
A1					
A2					
A3					
A4					
D1					
D2					

Not. Oluşturma aşaması kapsamındaki A1→ , A2→ , A3→ , A4→ , D1→ ve D2→ ile temsil edilmiştir. Beyaz renk ise ilgili kodun grupta gözlenmediğini belirtmektedir.

3.1.4. Problem Kurma Süreçleri İçin Yansıtma Aşamasına Ait Bulgular

Yansıtma aşaması, üst-bilişsel davranışa işaret eder biçimde problem(ler)in veya problem kurma sürecinin değerlendirmesine ilişkin eylemleri içermektedir. Bu kapsamda iki kategori tespit edilmiştir: (i) problem kurma sürecinde yapılan yansıtma ve (ii) problemi kurduktan sonra yapılan yansıtma. Problem kurma sürecinde yapılan yansıtma kategorisi, problem fikrinin belirmesinden problem cümlesine nihai hali verilene dek geçen süreci kapsamaktadır. Bu noktada problem kurma sürecinde yansıtma üç kod etrafında birleştirilmiştir: (i) problem fikrinin yönergeye uygun olması [R1], (ii) problem fikrinin potansiyel çözücüye uygun olması [R2] ve problem fikrinin kurucunun kendisi için uygun olması [R3].

R1 kapsamında gruplar, ortaya atılan problem fikrinin etkinlik yönergesine uygunluğu hakkında değerlendirmelerde bulunabilmektedir. Buna göre, yönergedeki istemlerin karşılanıp karşılanmadığı söz konusu edilmekte ve kimi zaman yönerge kriterlerini karşılamadığından problem fikrinden vazgeçilebilmektedir. Örneğin G1, kurmaya çalıştığı problemin etkinlik yönergesi ile uyumlu olmadığına karar vermiş (Şekil 44, satır 8-9) ve problem kurmak için daha farklı bağlantılar kurmaya çalışmıştır. Bu nokta da G1, eşkenar dörtgen etkinliği kapsamında henüz yazıya geçirmediği problem fikrinin çözülebilirliğini değerlendirirken, ortaya konulan fikri çeşitli yönlerden ele alan bir tartışma yürütmüştür (Şekil 44, satır 1-7). Diğer yandan G2, yine eşkenar dörtgen etkinliği kapsamında ortaya koyduğu problem fikrini problem cümlesi haline getirmeye çalışırken, etkinlik istemlerinden biri olan “*ilginç problem*” ifadesine dikkat etmiş (Şekil 44, satır 10-13) ve ilginç ifadesi ile problem tasarımının hedef kitle için uygunluğu üzerinde durmuştur (Şekil 44, satır 14-19).

	[...]
[1]	G1T2: Köşegenleri kesiştirdiğimiz zaman köşegenler eşit uzunlukta bölüyor ya şunun şuna eşit olduğunu bilecek
[2]	G1T1: Sonra kenarortaydan 2a'ya a olduğunu da bilecek. Bir tane şeyi versek biz bunu (DK) buradan sonra buna (KF) gelecek şunu (AK, KH) kendisi bulması lazım.
[3]	G1T2: BAC 90 derecededir desek zaten çocuk orda şey indirip kenarortaya indirdiğini bulacak.
[4]	G1T1: Sonra muhteşem üçlüyü görecek.
[5]	G1T2: Ondan sonra bir de hep çocuk diyoruz da onların seviyesine düşünmeyecektik.
[6]	G1T2: 90 derece olduğunu verdik diyelim ondan sonra evet, EC uzunluğunu versek
[7]	G1T1: EC'yi versek benzerlikten
[8]	G1T2: Bunlar soru oldu. Problem olmadı ki!
[9]	G1T1: ilginç değil.
	[...]
[10]	G2T3: Tamam bununla ilgili nasıl bir problem kuracağız?
	...
[11]	G2T4: İki katı ... İlginç bir problem olması da lazım
	...
[12]	G2T4: Şimdi biz bu problemde GeoGebra kullandırmayacağız değil mi? O zaman bu yapıyı onların inşa etmesini istesek, GeoGebra'da göstermelerini isteyelim. Mesela bu yapı ne? Bir yamuk değil mi? Bir yamuk inşa etmelerini isteyelim ve bu yamuğun içinde alanları birbirinin iki olacak olan şekiller olsun isteyelim ve böyle bir yamuk GeoGebra'da inşa eder misiniz? Diyelim.
[13]	G2T4: Farklı ve ilginç bir problem? Mesela şu şekli (mevcut) biz vermiş olsak GeoGebra'da oluşturmalarını bir tane istedik. Kağıda geçelim mesela. Biz bununla ilgili ne sorabiliriz?
	[...]
[14]	G2T4: O zaman Thales teoremine uygun bir teorem ortaya koyunuz desek nasıl olur? Hem ilginç üst düzey olsun falan olsun diyoruz ya
[15]	G2T3: Acaba onu hangi açıdan inceleyebiliriz? Çok genel olur ama Thales teoremine uygun bir problem oluşturunuz bir formül bulunuz demek çok genel olur diye düşünüyorum. Ona bağlı olarak buradaki uzunluklara bağlı olarak alanların nasıl değişeceğini incelemelerini isteyebiliriz
[16]	G2T4: O zaman bunu farklı bir soruda yapalım. Eşit alana sahip eşkenar üçgenler oluşsun dedik ya. O dediğinizi şey yapabiliriz
[17]	G2T3: Birini alanda diğerini uzunlukta mı kullanalım.
[18]	G2T4: Şey desek sizin dediğiniz problem için kenar uzunluklarına bağlı olarak alanlar nasıl değişiyor? Değişenler var mı? Varsa nasıl değişiyor? Bunu bir dördüncü soru yapayım mı?
[19]	G2T3: Evet.
	[...]
[20]	G2T4: Şimdi o zaman söylüyorum. DEFG eşkenar dörtgeninin (yazıyor) ... İlginç problem cümlesi de biraz şey yani problem kur demiyor ilginç problem kur diyor. O da birazcık şey yapıyor (zorluyor) insanı. DEFG eşkenar dörtgeninin içerisine kenarlara teğet olacak şekilde bir çember.
	[...]
[21]	G5T10: D (köşe) kenarından GF kenarına.
[22]	G5T9: Dik indirmemize gerek yok. Direkt şu açığı versek.
[23]	G5T10: Biraz daha şey olur. Problemi çözme yolu uzun olur.
[24]	G5T9: Ya ilginç diyor ya ama onu da kurabiliriz istiyorsan.
[25]	G5T10: Tamam nasıl diyorsan öyle yapalım.
[26]	G5T9: Yoo...ilginç dediği için seninki daha güzel yani mantıklı oluyor. Benimkisinde direkt açığı verip, orayı buldurmak mantıksız geldi.
	[...]

Şekil 44. Yansıtma aşaması kapsamındaki R1 koduna ilişkin örnek durum 1

G5, problemi çözme yolunun uzunluğu (adım sayısı) ile problemin ilginçliğini bağdaştıran bir tartışma yürütmüştür (Şekil 44, satır 21-26). Buna göre ilginç problem

ile görece daha karmaşık problem eş değer tutulmuş ve çözümündeki adım sayısı fazla olan problem fikri yönerge için daha uygun bulunmuştur. G3 ise yönergede yer alan “kurabildiğiniz kadar birbirinden farklı” ifadesi üzerinde durmuş ve yönerge kriterlerini sağlamak adına bir şekilde “ilginç” olmasa da problem fikrini yazıya geçirmek için kısa bir tartışma yürütmüştür (Şekil 45, satır 1-3). Buna karşılık eşkenar dörtgen etkinliğinde G6, ortaya koyduğu problem fikrinin hedef kitlesine ilişkin değerlendirmede bulunmuş ve yönergede sınıf seviyesinin belirtilmemesinden dolayı problem kurmak için ortaya konulan fikrin geçerli olduğuna karar vermiştir (Şekil 45, satır 4-5).

- [...]
- [1] G3T6: Bence önce biz şeyi verelim. Ondan sonra oradan alanları bulabilsinler.
- [2] G3T5: Ama biz sadece çocuklara yönelik bir şey yapmıyoruz ki bizim seviyemizdeki insanlarla da (çalışıyoruz).
- [3] G3T6: Kaç tane farklı ... Yani yapabileceğimiz kadar çok oluşturacağız ya problemler bir tane öyle soralım. Alt tarafına da mesela şey diyelim.
- [...]
- [4] G6T11: Sen söyledin. İçeride oluşan DEFG eşkenar dörtgeni ile ABC üçgeninin alanı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- [5] G6T11: Çok mu böyle direkt yönlendiriyoruz?
- [6] G6T12: Sınıf seviyesi belli değil. O yüzden sıkıntı yok.
- [...]

Şekil 45. Yansıtma aşaması kapsamındaki R1 koduna ilişkin örnek durum 2

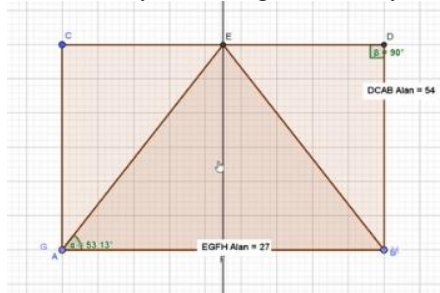
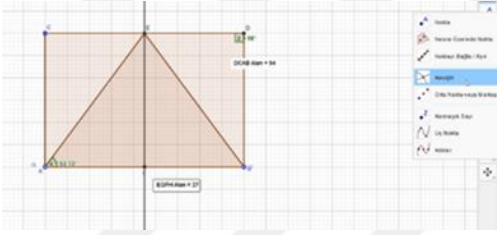
R1 kapsamında G5, problem kurmak için belirlediği ilişkiyi yazıya geçirirken problemi hesaplama problemi olarak sunmak yerine araştırma problemine dönüştürmeyi tercih etmiştir (Şekil 46, satır 1-12). G5’te gözlenen bu eylem problem kurma sürecinde aşamaların birbirinden ayrılmaz nitelikte iç içe olduğuna işaret etmektedir. Çünkü her ne kadar grup üyeleri arasında yönergeye uygunluk dile getirilmese de problem kurmak için belirlenen ilişkinin hesaplama probleminden ziyade araştırma problemi olarak sunmak, etkinlik istemleri ile daha uyumlu görüldüğüne işaret etmektedir. Oluşturma aşamasında problem fikrini görünür kılarken şekillendirmek söz konusu iken, R1 kapsamında doğrudan oluşturulan problemin uygunluğuna yönelik değerlendirme yapmak söz konusu olmaktadır. R1 kapsamında diğer bir örnek ise G6’da gözlenmiştir. Buna göre G6, ortaya koyduğu problem fikirlerinin etkinlik istemi ile uyumlu olarak zengin, kaliteli vs. kriterleri

sağlamadığına değinmiş ve problem kurmak için daha farklı ilişkiler belirlemeye koyulmuştur (Şekil 46, satır 13-17).

[1] G5T10: Alandan soru bulacağız ya şuradan bir tane (doğru parçası vs.)

[2] G5T9: Ama biz şekli çevirdik dikdörtgene getirdik.

[3] G5T10: Ne oldu ya? Dik doğru ve noktayı seç.

[b]

[a]

[4] G5T9: Bence direkt diyelim verilen şekli, şu dıştaki paralelkenarın içteki dörtgene oranı nedir? Oranı ikidir diyelim. Niye ikidir?

[5] G5T10: Tamam olur. Araştırma problemi gibi.

[6] G5T9: Evet. Çünkü dıştaki paralelkenarı sürükleyince dikdörtgen oluyor.

[7] G5T10: Aynen.

[8] G5T9: Yazayım mı?

[9] G5T10: Yaz. **[a]**

[10] G5T9: Şu G ve H noktalarını da indirirsek aşağıya doğru. Gözüküyor zaten.

[11] G5T10: Aynen. Yükseklik aynı.

[12] G5T9: ABCD paralelkenarının ... **[b]**

[13] G6T12: Hiç zengin problem özelliklerini koymadık. Kaliteli problem!

[14] G6T11: Neyse özelliğimiz o değildi. Amacımız problem kurmaktır.

[15] G6T12: İlginç, merak uyandırması lazım.

[16] G6T11: Benim dediğim soruyu yaz bari.

[17] G6T12: Ne?

Şekil 46. Yansıtma aşaması kapsamındaki R1 koduna ilişkin örnek durum 3

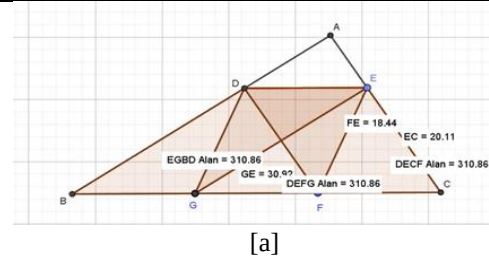
R2 kapsamında G1, problem fikrinin potansiyel çözücüsü için uygunluğuna ilişkin değerlendirmelerde bulunmuştur (Şekil 47, satır 1-18). Buna göre G1 eşkenar dörtgen etkinliği kapsamında hem problem fikrinin çözülebilirliği hem de fikrin çözücü için uygunluğu hakkında bir tartışma yürütmüştür. G1, ortaya koyduğu problem fikrinin çözüm adımlarını sırasıyla dile getirerek, aynı adımlardan çözücünün (muhtemelen öğrenci) de geçip geçemeyeceği ve söz konusu fikrin çözücü için anlaşılır olup olmadığı gibi değerlendirmelerde bulunmuştur (Şekil 47, satır 3-15). Problemin çözümünü ve çözücüsünün geçeceği adımları düşünmek olarak, üst-bilişsel düşünmeye işaret eden bu tartışmada problem fikrinin hedef kitle için uygunluğunun değerlendirilmesi dikkat çekmektedir.

- [1] G1T2: Kesiştiğine göre şunların (BG, GF, FC) eşit olduğunu biliyor çocuk, bize vermişler. Şurası mesela DF uzunluğunu versek ...
- [2] G1T1: DF uzunluğunu vereceğiz. Diğerini çocuk düşünecek. Mesela şu üçgenin de kenarortaylarını düşünecek
- [3] A2: DF uzunluğunu verdiğimiz zaman neyi bulabilecek? AC'yi bulacak. Ama kenarortayı kullanması lazım. Ağırlık merkezi şurası da kenarortay zaten şunu atıyorum işte 5-10-15 (taban uzunluğu) ise 15 olmasın bu sefer de 24 olsun. BH ile HC'nin birbirine eşit olduğunu anlaması lazım. Eşit olması için de 4-4 (GF) paylaşılması lazım zaten şunun 4 (HF) olduğunu bilecek.
- [4] G1T1: Zaten 8 verdik ya eşit olduğunu biliyor zaten. Söylemeye gerek yok.
- [5] G1T2: Yazalım. BAC açısı 90 derece DE uzunluğu işte 8 olsun. DE'yi verdik ya bunları buldu.
- [6] G1T1: Neyi soracağız peki o zaman?
- [7] G1T2: 90 dereceyi verdiğimiz için kenarortayı indireceğini anladı. O yüzden GH ile HF'yi zaten bulacak.
- [8] G1T1: Buradan muhteşem üçlü olacak bunu bilecek.
- [9] G1T2: GH ile HF'yi bulsa ...
- [10] G1T1: Tamam onu buluyorsa zaten şurasının muhteşem üçlü olduğunu anlayacak, buranın (K) dik olduğunu anlayacak.
- [11] G1T2: 2a'ya a'yı kullanmasını gerektirecek bir şey bulmamız lazım.
- [12] G1T1: Şurası kaçtır? Mesela.
- [13] G1T2: Burayı (K) sorarsak da basit oluyor.
- [14] G1T1: Ağırlık merkezi olduğunu o ikisinin ağırlık merkezinin kesiştiğini anlayabilir mi? Ağırlık merkezleri şurada (K) kesişiyor desek. Diyelim ki hepsini denedi. ... Eşkenar dörtgenin ağırlık merkezi olduğunu?
- [15] G1T2: Bence zor olur anlaması.
- [16] G1T1: Şurayı bulabilir mi?
- [17] G1T2: Şey değil mi? Thales teoreminden buluyorduk hatırlıyor musun?
- [18] G1T1: Şu GF uzunluğunu nasıl bulacak?

Şekil 47. Yansıtma aşaması kapsamındaki R2 koduna ilişkin örnek durum 1

Diğer bir örnek olarak G3 eşkenar dörtgen etkinliği kapsamında, problem kurmak için belirlenen ilişkilerin ne şekilde sorulması gerektiği yönünde tartışmış (Şekil 48, satır 1-3) ve problem cümlesinin araştırma/keşif problemi olarak sunulmasının potansiyel çözücü için uygun olduğuna karar verilmiştir (Şekil 48, satır 4). Öte taraftan G2 yine eşkenar dörtgen etkinliği kapsamında, ortaya konulan problem fikirlerini kıyaslamış ve problemin çözücüsü için nispeten daha karmaşık olan problem fikrinin uygunluğu hakkında tartışarak, karar vermiştir (Şekil 48, satır 5-8).

- [1] G3T5: Farkındaysan içerdeki eşkenar dörtgenin paralelkenarın ve dışardaki paralelkenarın alanları eş çıktı. Bunun sebebi nedir diye bir soru sorabiliriz. [a]
- [2] G3T5: DEFG eşkenar dörtgeni ile bir tanesini karşılaştırması yeterli aslında DECF paralelkenar dörtgeni karşılaştırınız. Bulduğunuz benzerlik, alanları eşit ya direkt biz alanları eşittir. Bunun sebebi nedir gibi bir şey mi sormalıyız?
- [3] G3T6: Ben hala böyle bir şekil oluşturup, oluşturamayacağımızı düşünüyorum. Sonuç olarak sen çocuğa şunu vereceksin. (Etkinlik kağıdını kastetmektedir.)
- [4] G3T5: Çocuk diye düşünmeyeceksin. Karşında bizim yaşımızda bir insan var. Ona böyle keşfettirmeye çalışacağız. Aynen karşılaştırınız. Bulduğunuz benzerliklerin sebebini, benzerlikler varsa sebebini ne ile gösteriniz. Oran ile gösteriniz gibi bir şey



Şekil 48. Yansıtma aşaması kapsamındaki R2 koduna ilişkin örnek durum 2

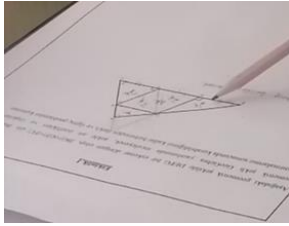
- [5] G2T3: Burada orta taban kullanacağız değil mi? Eşit alana sahip eşkenar üçgenler oluşsun ve bu üçgenin alanları DF uzunluğu ile HC uzunluğuna bağlı olarak eşkenar üçgenlerin alanlarının nasıl değişeceğini gözlemlesin.
- [6] G2T4: O çok basit kaçıyor sanki ya yani Thales teoremi dedim ya. Bunu dememin sebebi şuydu: Orada bilmesi gerekecek buna bu şuna şu. Ondan sonra durup düşünecek Thales neydi? İşte bunu uzattıktan sonra bunu kenar uzunluklarında Neyi kullanacağı da soruyu çözüme bağlı kalacak. Daha zengin geldi bana, sizce?
- [7] G2T3: Tamam olur.
- [8] G2T4: Daha spesifik, daha özelinde daha uygun olur.

Şekil 48 (Devam). Yansıtma aşaması kapsamındaki R2 koduna ilişkin örnek durum

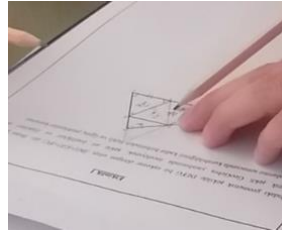
2

R3'ün odağında problem fikrinin kurucuların kendisi için uygunluğuna ilişkin değerlendirmeler bulunmaktadır. Buna göre eşkenar dörtgen etkinliğinde G2T4 ortaya attığı problem fikrinin uygunluğunu grup arkadaşına danışmış ve problem fikrinin şekillenmesi için ortak akıl kullanmaya çalışmıştır (Şekil 49, satır 1-2). Aynı etkinlik kapsamında benzer yaklaşım sergileyen G2, problem fikrinin kendileri için uygun olmadığına karar kılarak, ortaya koyulan problem fikrinden vazgeçebilmiştir (Şekil 49, satır 3-8). Benzer tartışmaya G5'te de rastlanmıştır (Şekil 49, satır 11-17). Buna göre problem kurma sürecinde, problem fikrinin tespitinde veya problem fikrini şekillendirirken katılımcılar fikrin kendileri için uygunluğu hususuna dikkat etmektedir.

- [1] G2T4: Mesela şey yapmayı denesek problem olarak; tüm şekli eşit alana sahip üçgenler olacak şekilde düzenleyiniz desek. Şuradan bunu (köşegen) çizip burayı 2k göstermeleri gerekecek. Buradan da ekleme yapmaları gerekecek. Böyle bir problem olabilir mi sizce? [a]



[a]



- [2] G2T3: Şöyle olabilir bence hocam (*arkadaşına hitaben*), şurayı görmediğiniz zaman o dediğiniz çok mantıklı, 2k, 2k. (*Kenar uzunlukları arasındaki orana işaret etmektedir.*) Eşkenar üçgenler oluşturabiliriz burada. Burayı görmediğimiz anda. (*Parmağı ile kapatmaktadır.*)

- [3] G2T4: Burada üçgen değil de deltoid ile bağlasak nasıl olur? Deltoidin özelliklerini sağlar mı bunlar? Üç tane deltoid var. Ama deltoidin özelliklerin kesin ve net sağlar mı?

- [4] G2T3: Deltoidin özelliklerini tabanları çıkışık

- [5] G2T4: ama şurası bir deltoid mi?

- [6] G2T3: Evet deltoid üç kenarı mı olması mı gerekiyordu?

- [7] G2T4: Bir de bir yerden bir diklik vardı deltoid öyle hatırlıyorum

- [8] G2T3: Deltoid çok özelinde kalıyor. Alanları sadece göstermelerini isteyebiliriz.

- [9] G2T4: Yani farklı ve ilginç demiş

- [10] G2T3: Orada çünkü bir kafa karışıklığımız var. Ben de tam problemi kuramayacağım. Ama siz güveniyorsanız yazabilirsiniz.

- [11] G5T9: Nereyi dik indireceğiz?

- [12] G5T10: D (köşe) kenarından GF kenarına.

Şekil 49. Yansıtma aşaması kapsamındaki R3 koduna ilişkin örnek durum

- [13] G5T9: Dik indirmemize gerek yok. Direkt şu açığı versek.
[14] G5T10: Biraz daha şey olur. Problemi çözme yolu uzun olur.
[15] G5T9: Ya ilginç diyor ya ama onu da kurabiliriz istiyorsan.
[16] G5T10: Tamam nasıl diyorsan öyle yapalım.
[17] G5T9: Yoo...ilginç dediği için seninki daha güzel yani mantıklı oluyor. Benimkisinde direkt açığı verip, orayı buldurmak mantıksız geldi.

Şekil 49 (Devam). Yansıtma aşaması kapsamındaki R3 koduna ilişkin örnek durum

Yansıtma aşaması kapsamında ele alınan ikinci kategori problemi kurduktan sonra yapılan yansıtmadır. Buna göre problem cümlesinin tamamlanmasının ardından gerek kurulmuş probleme gerekse problem kurma sürecinin bütününe yönelik değerlendirmeler söz konusu edilmektedir. Bununla birlikte süreç içinde bir problemden diğerine geçiş esnasında da problemi kurduktan sonra yansıtma eylemi gözlenebilmektedir. Bu kapsamda problemi kurduktan sonra yapılan yansıtma altında iki kod belirlenmiştir: (i) gözden geçirme [G1] ve (ii) genel değerlendirme [G2].

G1'in odağında kurulmuş problem(ler)den daha farklı problem kurma ihtiyacı bulunmaktadır. Bunun yanı sıra etkinlik bağlamında problem kurmak için belirlenen tüm ilişkilerin problem olarak ifade edilip edilmediği söz konusu edilmektedir. Örneğin G1, kurduğu problemleri gözden geçirmiş ve bu problemlerden daha farklı bir içerikte problem kurmak üzerine tartışmıştır (Şekil 50, satır 1-7). Bu tartışma esnasında problemin matematiksel geçerliğini de değerlendirmiş ve hemen ardından problem durumundan yeni problem fikirleri oluşturmaya koyulmuştur (Şekil 50, satır 4-7). Bu durum problem kurma sürecinde aşamaların birbiriyle girift ilişkide olduğuna işaret etmektedir. Benzer şekilde G2, eşkenar dörtgen etkinliği kapsamında ortaya koyduğu problem fikirlerini gözden geçirmiş ve daha farklı bir problem içeriği belirlemek noktasında karar kılarak, problem durumundan yeni ilişkiler belirlemeye koyulmuştur (Şekil 50, satır 8-10).

- [1] G1T1: Alan falan sorsak bari farklı bir şey olsa.
[2] G1T2: Hiç alandan ilerlemedik.
[3] G1T1: Üçgenin alanı... Yine çok basit oluyor. Eşkenar dörtgenin alanı falan.
[4] G1T2: AE'yi bulsa şurayı buldu, şurayı buldu. Şuranın 90 derece olduğunu keşfetti. Başka ne sorabiliriz ona ... Benzerlikten GL uzunluğunu bulsun. GL uzunluğu?
[5] G1T2: Peki GL uzunluğunu bulması için ...
[6] G1T1: Başka yerden de çözebilir.
[7] G1T2: Kurdukları problemi çözüyorlar ... Bence yeter ...
[8] G2T3: Bunu keşfedeceklerini düşünüyoruz artık peki şunu yazmış mıydık? İlk problemimiz miydi? Buradaki (BDG) alan ile buradaki (FEC) alanın nasıl eşit olacağını taban uzunluklarına bağlı olarak, nasıl değişeceğini ilk problem için oluşturduk.

Şekil 50. Yansıtma aşaması kapsamındaki G1 koduna ilişkin örnek durum 1

[9] G2T4: Evet, doğrudur.

[10] G2T4: Şimdi artık alanlardan çıkalım. Alan, eşkenar üçgen bunlardan bir çıkalım. Başka ne sorabiliriz.

Şekil 50 (Devam). Yansıtma aşaması kapsamındaki G1 koduna ilişkin örnek durum

1

Yansıtma aşamasını karakterize eden G1 kapsamında G5, problem durumundan hareketle ortaya konulan tüm ilişkilerin problem olarak sunulup sunulmadığını gözden geçirmiş ve daha farklı bir problem kurmayı hedeflemiştir (Şekil 51, satır 1-5). G5'te gözlenen bu eylem bir probleminden diğerine geçerken belirmiş ve makroskobik açıdan süreç içinde ancak mikroskobik açıdan ise bir problemi kurduktan sonra ortaya çıkan değerlendirme olarak kabul edilmiştir. Bu ayrıntı grupların genelinde gözlemlenmiştir. Örneğin G6 paralelkenar etkinliği kapsamında beş problem ortaya koymuşken, üçüncü probleme geçiş esnasında kurulan ilk iki problemi gözden geçirmiş ve ortaya konulan problem fikrinin diğerlerinden farkı değerlendirilmiştir (Şekil 51, satır 8-14). Bunun yanında G6, paralelkenar etkinliği kapsamında belirledikleri ilişkileri henüz problem olarak ortaya koymadıklarını gözden geçirerek, yeni problemlerin içeriğini değerlendirmeye almıştır (Şekil 51, satır 15-17). Problem kurma sürecine mikroskobik açıdan bakıldığında süreç içinde beliren gözden geçirme, makroskobik açıdan sürecin sonlanmasına da sebep olabilmektedir. Örneğin G6, paralelkenar etkinliği kapsamında tespit ettiği tüm ilişkileri probleme dönüştürdüğünü ve artık benzer problemler kurmaya başladıklarını fark ederek, problem kurma süreçlerini sonlandırabilmiştir. Bu yaklaşım eşkenar dörtgen etkinliği kapsamında G4'te de gözlemlenmiştir. Buna göre etkinliğin barındırdığı tüm ilişkileri problem olarak ortaya koyduklarını belirterek, süreci tamamlamıştır.

[1] G5T9: Şimdi daha farklı bir tane de benzerlikten yola çıkarak.

[2] G5T9: Başka?

[3] G5T10: Dikliği kullandık mı?

[4] G5T9: Dikliği kullandık.

[5] G5T9: Aklıma problem gelmedi. Açı da. Açı buldurduk mu hiç? Açı ile ilgili bir tane soru yazdık. İki tane alan. Oran. Daha farklı?

[...]

[6] G6T11: Aynen tam çıkmayabilir.

[7] G6T12: Başka? Orta noktayı kullanmamıştık....

[8] G6T12: Başka? Şey diyebiliriz. Bir kareye benzetelim şekli, içerideki paralelkenarın alanını bulsun. Tüm alandan paralelkenarın alanını çıkarsın. Bunları ayrı ayrı üçgen olarak hesaplayabilir. Toplam alandan dikdörtgenin alanını çıkartıp da bulabilir. Anladın mı ne demek istediğimi?

Şekil 51. Yansıtma aşaması kapsamındaki G1 koduna ilişkin örnek durum 2

[9] G6T11: Diğeri ile farkı ne?
 [10] G6T12: Biz yerine ne sormuştuk?
 [11] G6T11: Diğeri ile aynı.
 [12] G6T12: Yo burada ilişkiyi sorduk. Burada direkt sadece bir alanı soruyoruz.
 [13] G6T11: İkinci soruyu oku bir de!
 [14] G6T12: İlişkiyi sormuyorum ki ben sana diyorum ki toplam alandan içeride oluşan paralelkenarın alanını çıkardığımızda kalan alanı hesaplayınız.
 [15] G6T11: Birinci soru tarzında sorular sormaya çalışalım. Öyle şey oluyor sanki. Başka ne yapabiliriz? Paralelkenar, paralellik falan var. Onların özelliğinden ne yapabiliriz? Şekli oynatalım mı? Kare falan yapalım mı? [15] G6T11: Birinci soru tarzında sorular sormaya çalışalım. Öyle şey oluyor sanki. Başka ne yapabiliriz? Paralelkenar, paralellik falan var. Onların özelliğinden ne yapabiliriz? Şekli oynatalım mı? Kare falan yapalım mı?
 [16] G6T12: Bu şekli mi?
 [17] G6T11: Eşkenar dörtgeni. Oynayabilirsiniz denildi.
 [...]

Şekil 51 (Devam). Yansıtma aşaması kapsamındaki G1 koduna ilişkin örnek durum
 2

G2 kapsamında gruplar problem kurma sürecinin genel verimliliğine ilişkin açıklamalarda bulunmuştur. Buna göre tüm problemler ortaya konulduktan sonra sürece geniş bir pencereden bakılmış ve kısaca değerlendirmelerde bulunulmuştur (Şekil 52).

[1] G1T2: Bence Yeter. 50 dk da iki tane soru yazdık problem bile değil.
 [...]
 [2] G1T1: Benden bu kadar. Yani birbirini tekrar etmeye başladı artık.
 [3] G1T2: Belki zorlasak olurdu ama neyse. *(Daha farklı ilişkiler bulup, probleme dönüştürebileceklerine işaret etmektedir.)*
 [4] G5T9: Daha yaratıcı şeyler çıkarabiliriz de
 [...]
 [5] G1T2: Yeter bence ... Yani, daha iyisini yapmak istedik.

Şekil 52. Yansıtma aşaması kapsamındaki G2 koduna ilişkin örnek durum

Tablo 15'e göre yansıtma aşaması kapsamında en fazla gözlenen G1 gözlenen olmuştur. Buna göre katılımcılar problem fikrinin diğerlerinden farklı olmasına dikkat ederek, süreci zenginleştirmeye çalışmıştır. G1; eşkenar dörtgen etkinliğinde altı gruptan dördünde gözlenmişken, Paralelkenar Etkinliğinde altı gruptan beşinde görülmüştür. G1'i takiben problem kurma sürecinde yansıtma kapsamında R1, gruplarda yaygın görülen ikinci eylem olmuştur. Buna göre problem fikrinin yönergeye uygunluğu eşkenar dörtgen etkinliğinde altı gruptan beşinde ve paralelkenar etkinliğinde ise altı gruptan üçünde dikkate alınmıştır. Tablo 15'e göre R3, eşkenar dörtgen etkinliğinde altı gruptan dördünde ve paralelkenar etkinliğinde altı gruptan üçünde fark edilmiştir. Buna karşılık süreç nihayetinde değerlendirme olarak G2 hem eşkenar dörtgen etkinliğinde hem de paralelkenar etkinliğinde altı

gruptan ikisinde gözlemlenmiştir. Tablo 15'e göre DGO'da problem kurma sürecinde katılımcılar en az problem fikrinin potansiyel çözücü için uygunluğuna dikkat ettiği fark edilmiştir. Buna göre R2 hem eşkenar dörtgen hem de paralelkenar etkinliğinde altı gruptan birinde gözlenmiştir. Tablo 15'e göre her iki etkinlik kapsamında da gruplar, değerlendirme kriterlerini birbirine yakın yoğunlukta işe koşturmuşur.

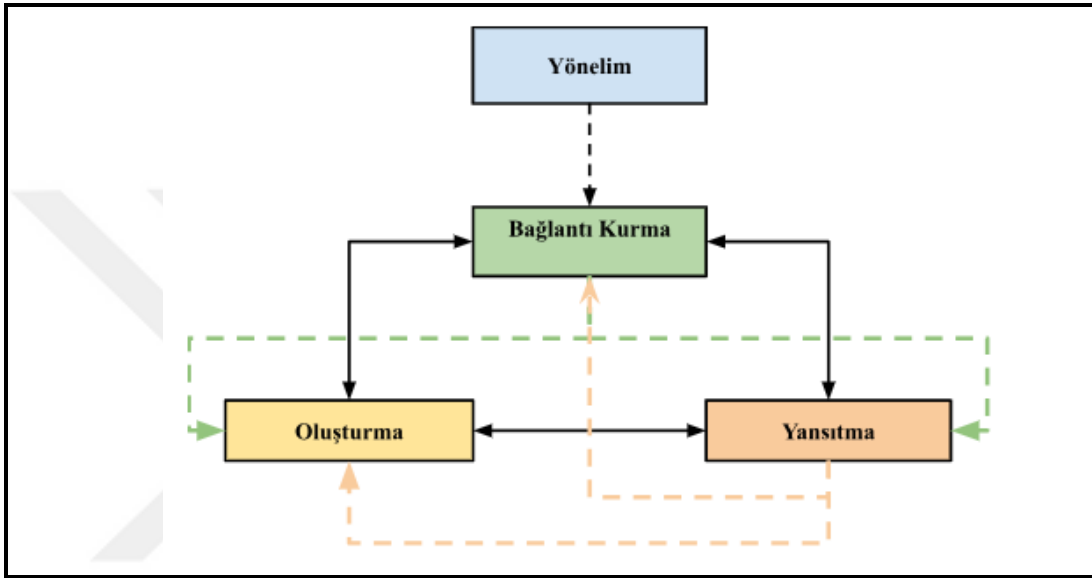
Tablo 15. Yansıtma aşamasına ait kodların gruplarda görülme durumları

Etkinlik	G1	G2	G3	G4	G5	G6
Eşkenar						
Dörtgen						
Paralelkenar						

Not. Yansıtma aşaması kapsamındaki R1 → , R2 → , R3 → , G1 →  ve G2 →  ile temsil edilmiştir. Beyaz renk ise ilgili kodun grupta görülmediğini belirtmektedir.

Grupların DGO'da problem kurma süreçlerinin genel problem kurma süreç modelinin adımlarına göre geçişlerini betimleyen akış şeması: Genel problem kurma süreç modeline göre eşkenar dörtgen etkinliğinde grupların kurduğu toplam 29 problemde yönelim aşamasından doğrudan bağlantı kurma aşamasına gerçekleşen tek yönlü geçiş sayısı 13 iken, bağlantı kurma ve yansıtma aşamaları arasındaki çift yönlü (geçişken) geçiş sayısı 7 olarak tespit edilmiştir. Benzer şekilde paralelkenar etkinliğinde grupların kurduğu toplam 24 problemde yönelim aşamasından doğrudan bağlantı kurma aşamasına gerçekleşen tek yönlü geçiş sayısı 7 iken, bağlantı kurma ve yansıtma aşamaları arasındaki çift yönlü geçiş sayısı 10 olarak belirlenmiştir.

Grupların tüm süreçte aşamalar arasındaki mümkün tüm geçişleri şematize edilmiştir (Şekil 53). Grupların iki etkinlikte farklı sayılarda problem ortaya koymuş olması ve farklı sıklıklarda geçişler belirlendiğinden, şemanın oluşturulmasında geçiş sıklığı bir değişken olarak belirlenmemiş ve yalnızca geçişin varlığı betimlenmiştir. Buna göre her iki etkinlik için tüm problem kurma süreçlerinin genelinde mümkün olan geçişler belirlenmiş ve Şekil 53'te sunulmuştur.



Şekil 53. DGO'da problem kurma sürecinin genel problem kurma süreç modelinin adımlarına göre akış şeması

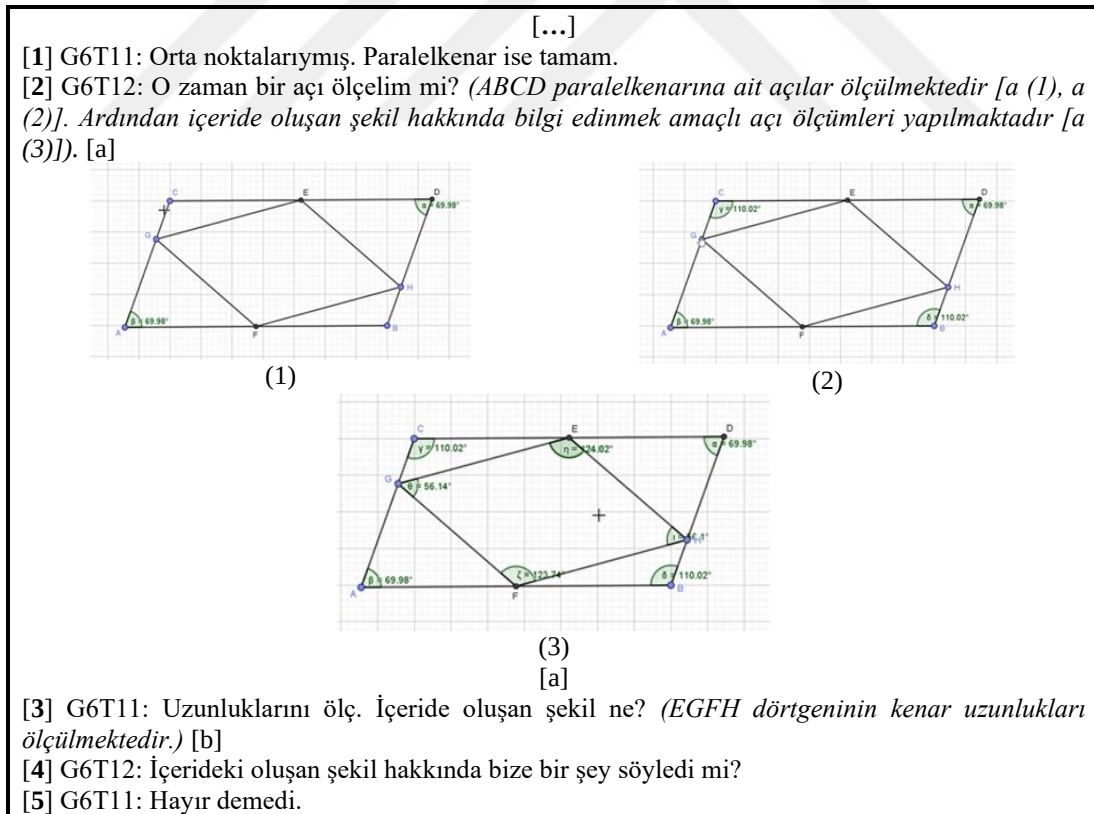
Not. Çift yönlü oklar $\longleftrightarrow$ iki aşama arasında çift yönlü geçiş olduğunu betimlemekte ve kesikli oklar bir aşamadan diğerine tek yönlü geçişin de ayrıca mümkün olduğunu ifade etmektedir. Örn., yansıtma aşamasından bağlantı kurma aşamasına olan tek yönlü geçiş kesikli ve yansıtma aşaması renginde ve bağlantı kurma aşamasından oluşturma aşamasına olan tek yönlü geçiş ise bağlantı kurma aşamasının rengi ile kesikli şekilde betimlenmiştir.

3.2. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Problem Kurma Süreçlerinde Dinamik Geometri Ortamının İşlevlerinden Nasıl Yararlandığına Ait Bulgular

DGO'nun işlevlerinin öğretmen adaylarının problem kurma süreçlerine katkısına ilişkin bulgulara, genel problem kurma süreç modelinin adımlarına paralel şekilde sunulmuştur.

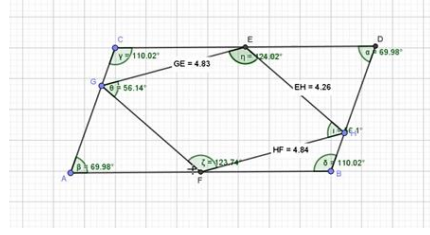
Yönelim aşaması: En genel ifadesiyle bu aşama problem kurma etkinliğini anlamaya ve keşfetmeye yönelik eylemleri içermektedir. Yönelim aşamasında ölçme işlevi kapsamında görülen *amaçlı ölçümün* (M-g) odağında, mevcut şekle ait açı ve

uzunluk ölçümleri ile bir sonuç elde etme veya şekle ait varsayımında bulunma yer almaktadır. Dolayısıyla amaçlı ölçümün ana hedefi şeklin barındırdığı ilişki veya özellikleri açığa çıkaran sonuçlar elde etmektir. Örneğin paralelkenar etkinliğinde G6, ABCD'nin paralelkenar ve E ve F noktalarının üzerinde bulunduğu kenarın orta noktası olması bilgisinden yola çıkmış ve EGFH dörtgeni hakkında sonuç elde etmek amacıyla sırasıyla açı ve uzunluk ölçümleri yapmıştır (Şekil 54, satır 1-5). Bu süreçte EGFH dörtgenini paralelkenar veya eşkenar dörtgen olup olamayacağı grup üyeleri arasında tartışılmıştır. Öte yandan eşkenar dörtgen etkinliğinde G3, eşkenar dörtgenin varlığından hareketle öncelikle $\triangle EFC$ ve $\triangle DGB$ 'nin ikizkenar olduğunu belirlemiş ve sonrasında $\triangle ADE$ 'nin kenar uzunluklarını tespit etmeyi amaçlayarak, üçgenin kenar uzunluklarını ölçmüştür (Şekil 54, satır 6). Yönelim aşamasında amaçlı ölçme yaparken her iki grupta etkinlik verilerini dikkate alarak, ölçme işlemlerini bu verilerin etrafında başlatmıştır. Buna göre etkinlik içeriği yönelim aşamasında dikkate alınmakta ve ölçme veya sürüklenme eylemlerine yön verebilmektedir.

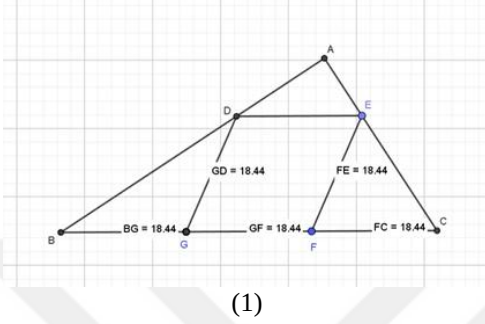


Şekil 54. Yönelim aşaması amaçlı ölçüm örneği

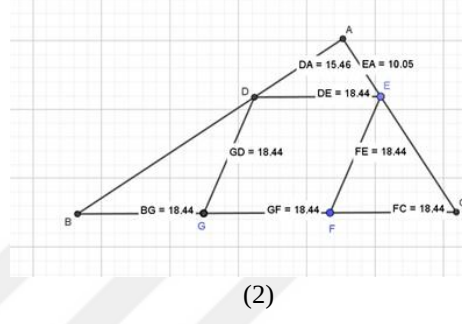
[6] G3T5: Şimdi eşkenar dörtgen olduğu için şurada ikizkenar üçgenimiz olacak bizim. ($\triangle EFC$ ve $\triangle DGB$ üçgenlerinin ikizkenar olması durumlarını belirlemektedir.) [c(1)]. Şunlar ($\triangle ADE$ 'nin kenar uzunlukları ölçmektedir.) ne oluyor bakalım? [c(2)]



[b]



(1)



(2)

[c]

Şekil 54 (Devam). Yönelim aşaması amaçlı ölçüm örneği

Yönelim aşamasında gözlenen diğer ölçme türü, *doğrulama ölçümü* (M-v) olmuştur. Yönelim aşamasında ortaya çıkan doğrulama ölçümünün karakteristik özelliği, şekle ait olası ilişkilere yönelik ortaya konulan fikirlerin veya varsayımların test edilmesidir. Örneğin G6 eşkenar dörtgen etkinliğinde sunulan eşitliklerden yararlanarak, $\triangle ABC$ 'de DEFG eşkenar dörtgeni dışında kalan üçgenlerin alanları toplamının eşkenar dörtgenin alanına eşit olma ihtimalini öne sürmüş ve varsayımını test etmek için alan ölçümleri yapmıştır (Şekil 55, satır 1-13). Grup başlangıçta $\triangle ABC$ çokgen olarak belirlemeden alanını ölçmeyi denemiş ve yazılımı etkin şekilde kullanamamaları keşif sürecini aksatmıştır (Şekil 55, satır 1-5). Bu noktada yazılımın araçlar çubuğunda yer alan yönerge sunma olanağı, katılımcıların hatalarını fark etmesine ve ölçmeyi doğru şekilde yapmalarına destek olmuştur (Şekil 55, satır 7-9). Doğrulama ölçümü sırasında grup üyelerinden birinin “Aynı çıkacak mı bakalım?” ifadesine yer vermesi, keşif sürecinde ölçme ile merak duygusunun eş zamanlı ilerlediğine işaret etmektedir

[1] G6T11: Eşitlikler var. Acaba şey mi? Şuradaki şu üçgenlerin alanları toplamı şu içerdeki eşkenar dörtgenin alanını mı veriyor? ($\triangle ABC$ üçgeninde DEFG eşkenar dörtgeni dışında kalan üçgenlerin alanları toplamının eşkenar dörtgenin alanına eşit olma ihtimalini öne sürmektedir.) [a] Alanlarına bakalım. Nereden bakıyorduk? Şuradan değil mi? (Araçlar çubuğunda açtık sekmesine işaret etmektedir.)

Şekil 55. Yönelim aşaması doğrulama ölçümü örneği

[2] G6T12: Şuradan önce alan seçiyorduk (*Araçlar çubuğunda alan sekmesine işaret eder.*).

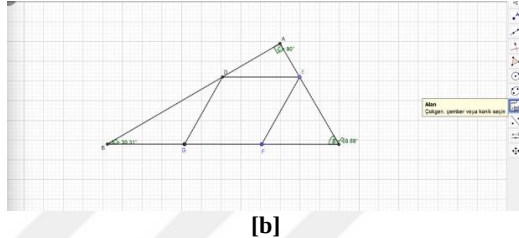
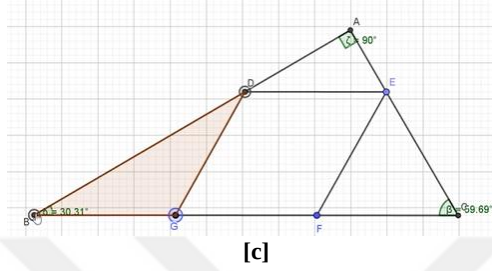
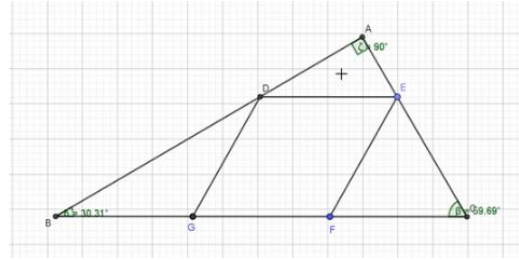
[3] G6T11: Üzerine tıklayınca gösteriyordu ya! ($\triangle ABC$ çokgen olarak belirlemeden alanını ölçmeyi dener.)

[4] G6T12: Alan tarayacaksın.

[5] G6T11: Olmuyor bak.

[7] G6T11: Bir dakika şöyle yönergeler yazıyor. Sen de bir denesene! [b]

[8] G6T12: ($\triangle ABC$ çokgen olarak belirlemeden ölçüm yapmaya çalışmaktadır).



[9] G6T11: Şimdi alana tıklayıp, ortasına tıklarsan hepsinin alanını verecektir.

[10] G6T12: Dur hepsini seçeyim. Hatta farklı renk bile yapabiliriz.

[11] G6T12: Aynı çıkacak mı bakalım?

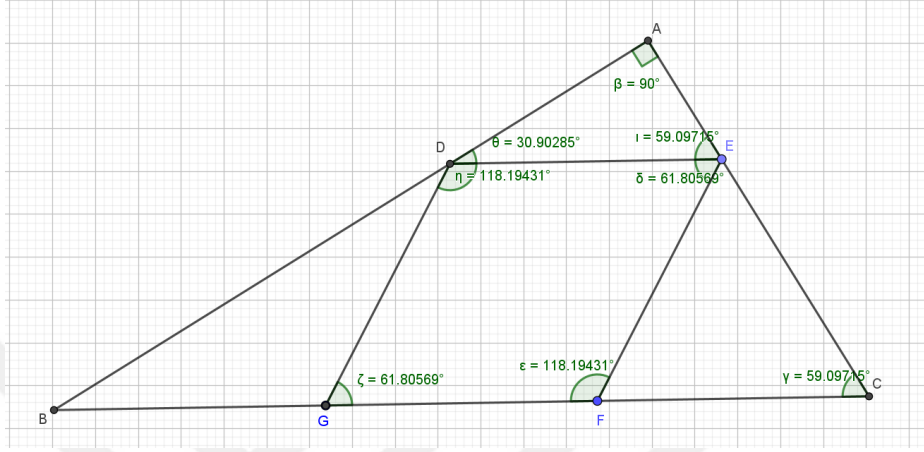
[12] G6T11: Önce şeyi oluşturmamız lazım alan ölçmesi için çokgenleri seçip, belirlememiz gerekiyor. Ondan sonra alan ölçmemiz gerekiyor.

[13] G6T12: Aynen öyle ($\triangle BDG$ alanını ölçmektedir [c]).

Şekil 55 (Devam). Yönelim aşaması doğrulama ölçümü örneği

Yönelim aşamasında *algısal ölçümün (M-per)* odağında, şekle ait ölçümler henüz yapılmadan sezgisel veya algısal olarak ölçümler hakkında fikir sunma ve fikrin yönlendirmesi ile geçerliğini DGO’da sorgulamak yer almaktadır. Örneğin G2 eşkenar dörtgen etkinliğinde $\triangle ABC$ ait açı ölçülerini henüz incelemeden $\triangle ABC$ ’nin 30-60-90 üçgeni olabileceğini düşünmüş ve $\angle BAC=90^\circ$ olduğu görülmüştür. Bu noktada algısal ölçüm, şekle ait öne sürülen fikrin doğrulanmasına katkı sunmuştur (Şekil 56, satır 1-6). Bunun ardından $\triangle ECF$ ’nin eşkenar üçgen olabileceği yönünde algısal fikir ortaya atılmış ve ardından açının dinamik tanımına uygun ölçümlerle algının geçerli olmadığı tespit edilmiştir (Şekil 56, satır 7-10). Diğer yandan paralelkenar etkinliğinde G5, paralelkenarı sürüklemiş ve ardından bir iç açı ölçüsünün 90° olabileceğini öne sürmüştür. Sürükleme altındaki şekle ait algısal olarak ortaya konulan fikir, algısal ölçüm neticesinde doğrulanmıştır (Şekil 56, satır 11-12). Bu noktada sürükleme ve ölçmenin birbirini destekler şekilde kullanılması, mevcut şekle ait ilişki veya özelliklerin açığa çıkmasına katkı sağlamıştır.

- [1] G2T3: Açılarını bir inceleyebiliriz.
 [2] G2T4: Eşkenar dörtgenin açılarına bakayım mı?
 [3] G2T3: Aynen Hocam (*Grup arkadaşına hitaben seslenmektedir*).
 [4] G2T3: 30-60-90 üçgeni diyebilir miyiz? Bu üçgene ($\triangle ABC$) yaklaşık olarak. [a]
 [5] G2T4: Diyebiliriz.
 [6] G2T3: Kenar uzunluklarından belli olur bence
 [7] G2T4: Acaba şuradaki üçgenler ($\triangle ECF$) ne oldu? Bakalım ... 60-60-60 (*derece*), burada bir eşkenar üçgen oluşuyor diyebiliriz.

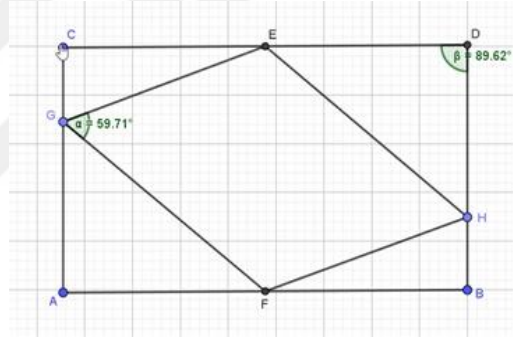


[a]

- [8] G2T4: Şuradan mı gidecektim? ($\triangle EFC$ 'nin açılarını ölçmektedir.
 [9] G2T3: 60 dereceden büyük oldu. Eşkenar üçgen olmuyor, galiba.
 [10] G2T4: Evet, 60'den ($\angle F$) büyük oldu [a].

[...]

- [11] G5T9: Şimdi şeyin paralelkenarın şeyini ölç ($ABCD$ paralelkenarının açılarını belirlemekten bahsetmektedir.) Şunlar ($\angle D$) 90 (*derece*) çıkacak büyük ihtimal.
 [12] G5T10: Yani 90'a yaklaşık ($\angle D = 89.62$). [b]



[b]

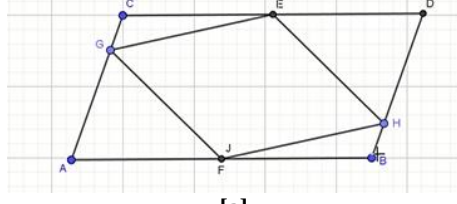
Şekil 56. Yönelim aşaması algısal ölçüm örneği

Yönelim aşamasındaki *ispat ölçümü* ($M-p$) olup, bir ispatın kurulup kontrol edilmesinden daha ziyade etkinlik verisinin doğruluğunu kontrol etme amacıyla statik ortamda sunulan bilginin (etkinlik kâğıdı) dinamik ortamda kontrol edilmesini de kapsamaktadır. Örneğin paralelkenar etkinliğinde G4, E ve F noktalarının üzerinde bulunduğu kenarların orta noktası olduğu bilgisine rağmen yine de bu bilginin doğru olduğunu dinamik ortamda da ortaya koymayı hedeflemiştir. Bunun neticesinde de $ABCD$ 'nin paralelkenar olduğundan emin olmuş ve E ve F noktalarının eşit uzunlukta doğru parçaları oluşturduğundan emin olmuşlardır. Bu noktada yazılımın doğru

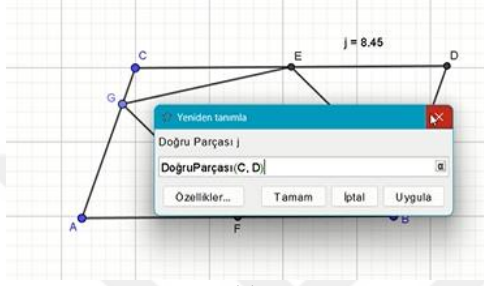
parçalarını seçme hassasiyeti süreçte aksamaya neden olabilmıştır (Şekil 57, satır 2-4).

[1] G4T7: Uzunlukların eşit olduğunu gösterelim (ABCD paralelkenarında E ve F noktalarının orta nokta olmasından hareketle eş doğru parçaları belirlenmeye çalışılmaktadır.) [a]

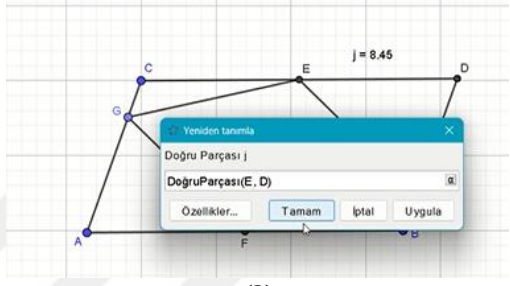
[2] G4T8: Buranın tamamı herhalde (ölçmeye çalışıyorlar ama olmuyor) E ile D olarak değiştirsem şurayı. [b (1)]



[a]



(1)



(2)

[b]

[3] G4T7: Yok böyle bir şey o zaman.

[4] G4T8: Doğru parçası o zaman çiziceğiz. [b (2)]

[5] G4T7: C ve D'nin orta noktası E noktası mı onu kontrol et.

[6] G4T8: Kontrol ettik.

[7] G4T7: Tamam bu paralelkenar. ED, CE, AF ve FB birbirine eşit. H'ye alfa desek ...

[...]

Şekil 57. Yönelim aşaması ispat ölçümü örneği

Yönelim aşamasında ortaya çıkan son ölçme türü olan *rastgele ölçümün* (M-w) odağında, problem kurma durumuna ait spesifik bir noktaya odaklanmadan herhangi bir ögesinin ölçülmesi yer almaktadır. Böylece problem kurma durumunun barındırdığı özellik veya ilişkiler keşfedilebilmekte ve şekle ilişkin daha fazla araştırma yapılması fikri tetiklenebilmektedir. Örneğin G1 eşkenar dörtgen etkinliğinde, öncelikle etkinliğe sunulan “ $|BG|=|GF|=|FC|$ ” verisinden yola çıkarak, şekle ait diğer doğru parçalarının uzunluklarını ölçmüş (Şekil 58, [a]) ve $\triangle DBG$ ve $\triangle EFC$ ikizkenar olduğunu tespit etmiştir. Bunun ardından eş açılarının da var olabileceğini düşünerek, şekle ait herhangi bir açıya odaklanmadan açılarının ölçülmesini hedeflemiştir. Bu noktada açının dinamik tanımına uygun ölçüm yapmaya dikkat etmiştir (Şekil 58, satır 4-6). Diğer bir örnek olarak G6, problem kurma sürecinin henüz başında yine belli bir açıya odaklanmadan $\triangle ABC$ 'ye ait açıları ölçerek başlamıştır. Bu noktada yine açının dinamik tanımına uygun ölçme yapmaya dikkat

ederek, $\angle A=90^\circ$ olduğunu keşfetmiş ve A köşesinden bir dikme indirilebileceğini fark etmiştir (Şekil 58, satır 9-12). Böylece yönelim aşamasında rastgele ölçüm, mevcut şekle ait sorgulamayı genişletmeye aracılık etmiştir.

[...]

[1] G1T2: $|BG|$, $|GF|$ ve $|FC|$ de birbirine eşitmiş hepsi birden

[2] G1T1: Hım... Şunlar ($\triangle DBG$ ve $\triangle EFC$) ikizkenar üçgen çıktı [a].

[3] G1T2: Açılara bakalım mı? ... Açılarını ölçelim o zaman.

[4] GT1: Ters olmayacak şekilde ölçeceğiz, buradan mıydı?

[5] G1T2: Aynen, soldan sağa oldu. Sağdan sola doğru (olacak).

[6] G1T1: O zaman şöyle, buradan mıydı? Şuradan... (Açının dinamik tanımına uygun ölçüm yapılmasına dikkat edilmektedir.)

[...]

[7] G6T11: İlk başta GeoGebra'dan açılarını ölçerek, başlayabiliriz.

[8] G6T12: Şurada açılar. Şu. (Araçlar çubuğunda açı sekmesi aranmaktadır.) [b]

[9] G6T11: Sağdan sola doğruydum değil mi?

[10] G6T12: Aynen saatin dönme yönünün tersi.

[11] G6T11: 90° ($\angle A$) [c]

[12] G6T12: Oradan (A köşesinden) bir dik indirebiliriz. [c]

[...]

[a]

[b]

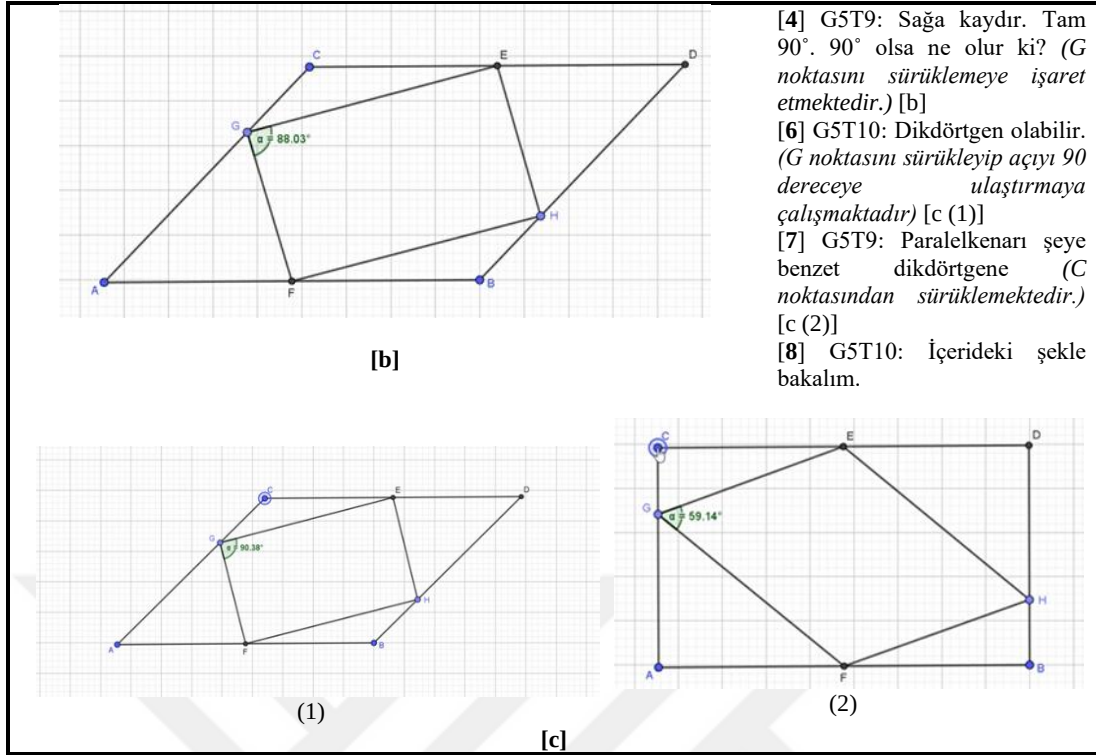
Şekil 58. Yönelim aşamasında rastgele ölçüm örneği

Yönelim aşamasında DGO'nun sürüklemeye işlevi kapsamında görülen türlerden biri *rastgele sürüklemeye* (*D-w*). Bu işlevin karakteristik özelliği olan plansızlık bu aşamada da belirmiştir. Örneğin paralelkenar etkinliğinde G5, etkinlikle karşılaşır karşılaşmaz mevcut şekli plansızca sürüklemiş ve şeklin biçimsel değişimini gözlemlemiştir (Şekil 59, satır 1-2). ABCD paralelkenarını C köşesinden sürüklemiş ve içeride oluşan çokgenin bir dikdörtgene benzediğini gözlemlemiştir.

[1] G5T9: Ne oldu şimdi bu? (Etkinlikle karşılaşır karşılaşmaz doğrudan dinamik ortamda çalışmaktadır.) [a]

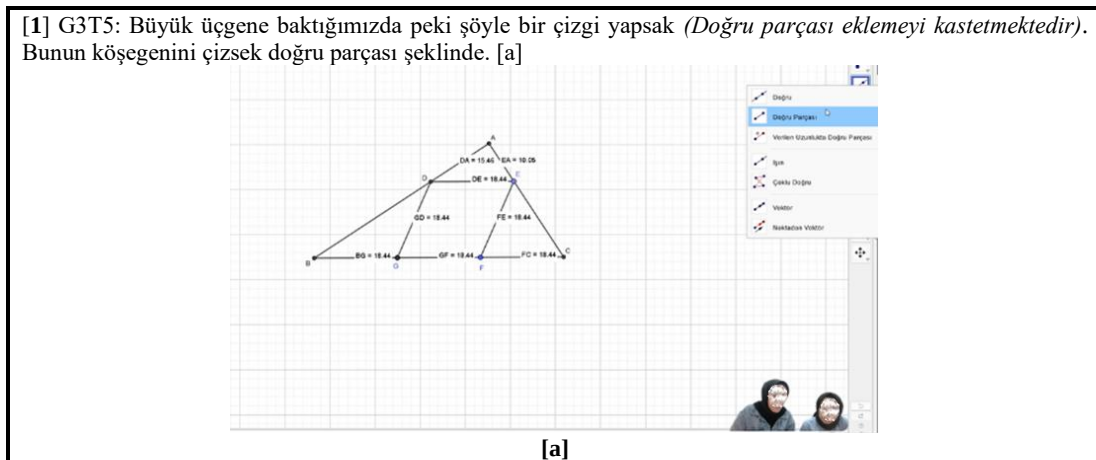
[2] G6T10: Dikdörtgene benzedi. Açı ölçüsü. (GEHF dörtgenine ait iç açıları ölçmek için araçlar çubuğunda açı, aranmaktadır)

Şekil 59. Yönelim aşaması rastgele sürüklemeye örneği



Şekil 60 (Devam). Yönelim aşaması amaçlı sürükleme örneği

Yönelim aşamasında gözlenen bir diğer durum ise *ekleme işlevi* kapsamında tahmin etmedir (A-g). Buna göre mevcut şekle spesifik bir amaç yerine yalnızca bir sonuç elde etme niyetiyle yardımcı unsurlar eklenmektedir. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde G3, DEFG eşkenar dörtgenine ait köşegen oluşturmak için $|DF|$ 'yi çizmiş ve uzunluğunu ölçmüştür (Şekil 61). Dolayısıyla mevcut şekle yardımcı unsur ekleme, ölçme eylemini de beraberinde getirmektedir.

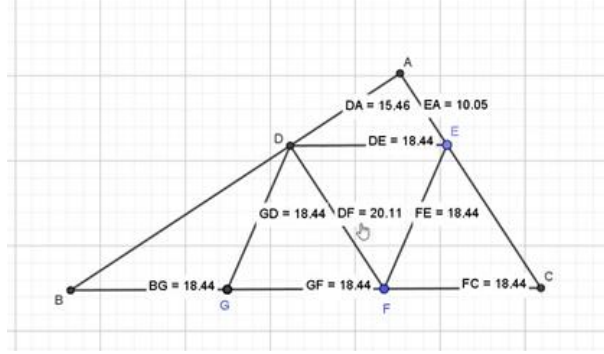


Şekil 61. Yönelim aşamasında yardımcı unsur ekleme işlevi kapsamında tahmin etme örneği

[2] G3T6: Çiz. Sonra da ölçelim. (İlk olarak statik çizim yapılmakta ardından dinamik ortamda doğru parçasının $[DF]$ uzunluğu ölçülmektedir.) [b]



(1)



(2)

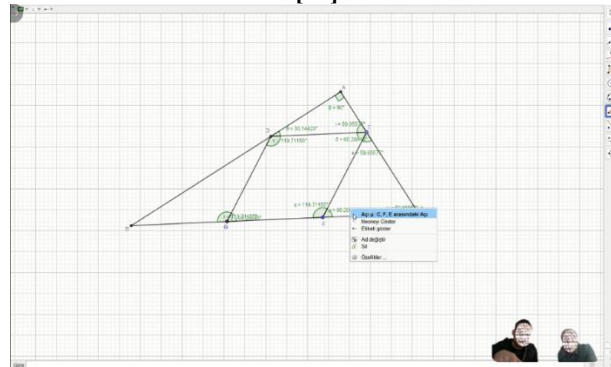
[b]

Şekil 61 (Devam). Yönelim aşaması yardımcı unsur ekleme işlevi kapsamında tahmin etme örneği

Yönelim aşamasında DGO'nun *diğer işlevi* (O-) kapsamında ondalık gösterimi değiştirme özelliği gözlenmiş ancak tam olarak yerine getirilememiştir. G2, eşkenar dörtgen etkinliğinde açı ölçülerini tam sayılı gösterime dönüştürmeyi amaçlamış ancak yazılımı etkili kullanamamış olmanın dezavantajı ile bunu gerçekleştirememişlerdir. Bu esnada araçlar çubuğunda birden çok sekmeyi veya özelliklerde arama yapmışlardır (Şekil 62).

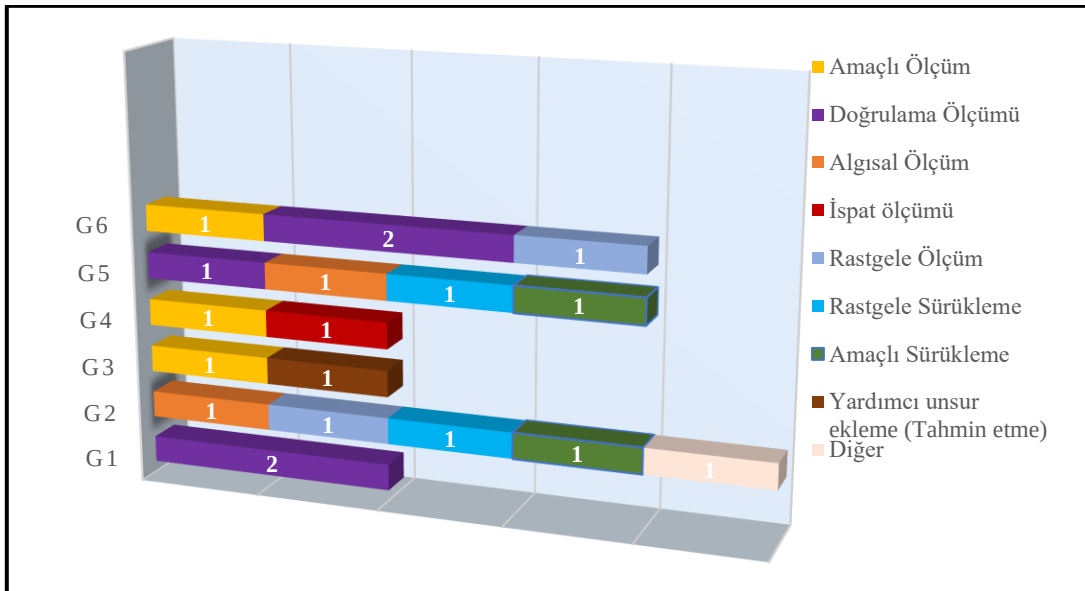
- [1] G2T3: Acaba, açılarımız çok küsuratlı çıktığı için virgülden sonraki basamağı, ondalıklı gösterimi 1'e mi düşürsek?
- [2] G2T4: Olur, yapalım. Etiketli gösterden mi yapıyorduk? (Nereden yapması gerektiğini hatırlayamamaktadır.)
- [3] G2T3: Ayarlar? Yerleşime bir bakabilir misin? (Grup arkadaşına işaret etmektedir.)
- [4] G2T4: Özellikler?
- [5] G2T3: Başlangıç ayarları?
- [6] G2T4: [...] Nereden yapıyorduk bunu?
- [7] G2T3: Neyse, böyle devam edelim. (Ondalık gösterimi değiştirmeden devam etmektedirler.)

[...]



Şekil 62. Yönelim aşaması diğer bileşen örneği

Yönelim aşamasında iki etkinlik boyunca gruplarda gözlenen *sürükleme*, *ölçme*, *ekleme* ve *diğer* kapsamındaki işlevlere ait dağılımlara Şekil 63'te yer verilmiştir. Buna göre, yönelim aşamasında altı grubun tümünde DGO'nun sürükleme, ölçme veya eklemeye ait türlerinden ve diğer bileşeninden ortak gözlenen bulunmamaktadır. DGO'nun bileşenlerinden yönelim aşamasında en fazla gözlenen doğrulama ölçümü olup, G1 ve G6'da iki etkinlikte de görülmüş ve G5'te yalnızca bir etkinlikte tespit edilmiştir. Doğrulama ölçümünü amaçlı ölçüm takip etmiş ve G3, G4 ve G6'da birer etkinlikte gözlenmiştir. Yönelim aşamasında doğrulama ve amaçlı ölçümün ardından altı grupta iki etkinlik boyunca birbirinden farklı gruplarda birer kez rastgele ve algısal ölçüm yer almıştır. Yönelim aşamasında ölçme türlerine ilişkin en az gözlenen ise ispat ölçümü olup, yalnızca G4'te bir etkinlikte tespit edilmiştir. Yönelim aşamasında sürüklemeye ilişkin yalnızca iki tür tespit edilmiş ve bu türlerin her ikisi de birer etkinlik boyunca G2 ve G5'te görülmüştür. Ekleme ise tahmin etme alt türü ile sadece G3'te bir etkinlikte tespit edilmiştir. Yönelim aşamasında diğer kapsamında bir eylem ise yalnızca G2'de görülmüştür. Buna göre yönelim aşamasında altı grupta iki etkinlik boyunca değişen frekanslarda en fazla ölçmeye ilişkin türlere rastlanmıştır. Bunların dışında DGO'nun bileşenlerine yönelik en fazla çeşitlilik G2 ve G5'te görülmüşken, sürüklemeye ilişkin türler de yalnızca bu iki grupta görülmüştür.



Şekil 63. Gruplarda yönelim aşamasına ait dinamik ortam işlevlerinin görülme durumları

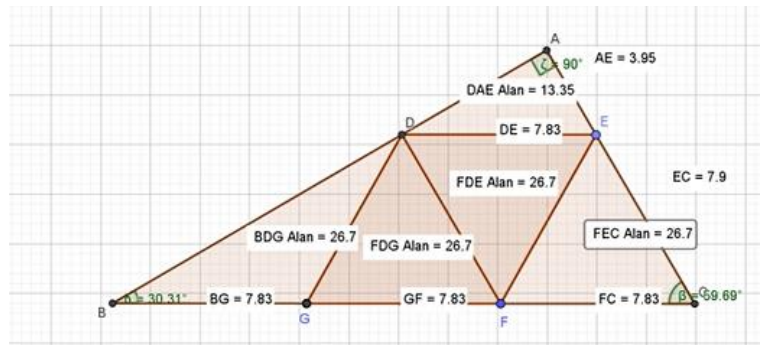
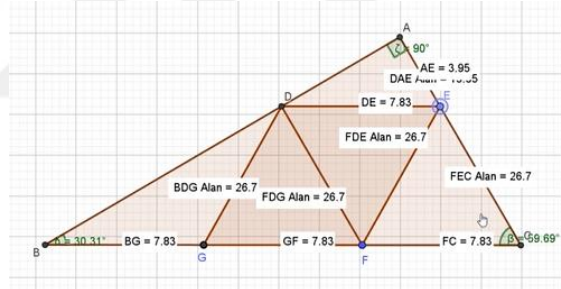
Not: Çubuklar üzerindeki sayılar işlevin kaç etkinlikte ortaya çıktığını göstermektedir. Örneğin, G1’de doğrulama ölçümü2 etkinlikte görülmüştür.

Bağlantı kurma aşaması: Bu aşama problem kurmak için fikirlerin üretilmesi ve problem fikirlerinin araştırma ve keşiflerle ilişkilendirilmesi ile karakterize edilmektedir. Bu aşamada ölçme işlevi kapsamında yararlanılan *amaçlı ölçümün* (M-g) odağında, geometrik şekle ait ilişki veya özelliklerden hareketle problem kurma konusu olabilecek bağlantıların tasarlanması amacıyla ölçümler yapılması yer almaktadır. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde G6, problem kurmaya içerik oluşturmak amacıyla şekle ait uzunluk ölçümlerini değerlendirmeyi amaçlamış ve bu amaçla eşlik ve benzerlikten yararlanarak, doğru parçalarının uzunluklarını belirlemiş (Şekil 64, satır 1-2) ve eşit uzunlukların tespitinin ardından eşit alanlara odaklanmıştır (Şekil 64, satır 3). Böylece amaçlı ölçüm mevcut şekle ait birden çok ilişkiyi açığa çıkarma potansiyeline ve dolayısıyla problem kurmak için birden çok içeriğin belirlenmesine destek olmuştur.

[1] G6T11: Uzunluklarını ölçelim bir de. Uzunluklar arasında bir problem kurarız. Alana gelersen uzunluk oradadır (*Araçlar sekmesine işaret etmektedir.*)

[2] G6T12: Tamam buraların ($|BG|$, $|GF|$ ve $|FC|$) eşit olduğunu biliyoruz. Aynen 1’e 3’lük bir oran var ya. ($|DE|/|BG|=1:3$ şeklindeki kenar uzunlukları oranına işaret etmektedir.) [a]

[3] G6T11: Şurada şöyle bir ne oluyor? Eşkenar dörtgen oluşuyor. Burada da bir eşkenar dörtgen oluşuyor. (*DECF* dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğu öne sürülmektedir.) Bak şurada oluşan üçgenlerin ($\triangle BDG$, $\triangle FDG$, $\triangle FDE$ ve $\triangle FEC$) alanları birbirine eşit. [b]



[4] G6T12: Benzerlik oranı. 1’e 3 ($|DE|/|BG|=1:3$). Ama bunu nasıl soru olarak yazdıralım?

[5] G6T11: O zaman diyelim ki AE’nin EC’ye oranı. Uzunluklarını verelim. Böyle eşittir diyelim. Bunun karesinden alanını bulmaya çalışsın. Alanına gitsin. Karesi alanları oranını veriyor ya. ($\triangle DAE$ ve $\triangle BAC$ üçgenlerinin alanları oranına işaret etmektedir.)

Şekil 64. Bağlantı kurma aşaması amaçlı ölçüm örneği 1

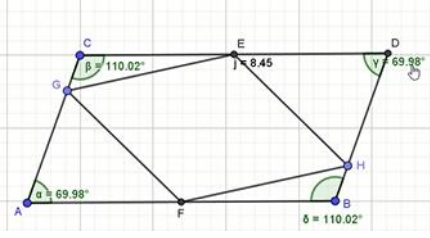
Diğer bir örnek olarak G4, ABDC paralelkenarı ile içerisinde oluşan dörtgenin alanları oranının 1:2 olmasını problem kurmak için hedef belirlemiş ve buna yönelik açı ölçümlerine odaklanmıştır (Şekil 65, satır 1-4). G4, açı ölçümlerinin ardından içerideki şeklin bir paralelkenar olmadığını dile getirerek, amaçlı ölçümden etkin yararlanamamış ve problem fikrinden vazgeçmiştir. Benzer şekilde paralelkenar etkinliğinde G5, yine iki dörtgen arasındaki ilişkiye odaklanmış ve çevreleri arasında bir ilişki bulmayı amaçlamıştır (Şekil 65, satır 7-11). Bu esnada ABDC paralelkenarı ve içerisinde oluşan dörtgenin çevreleri oranının 1:2 olacağı düşünülmüş ve amaçlı ölçümün sonucunda problem kurma fikrinden vazgeçilmiştir (Şekil 65, satır 12-17). Bu noktada dörtgenlerin çevreleri oranının 1:2 olacağı başlangıçta varsayım olarak ortaya konulup, varsayımı test etme söz konusu değildir. G5, herhangi bir varsayım öne sürmeden çevreleri arasında bir ilişkinin bulunup, bulunmadığını keşfetmek için ölçüm yapmıştır.

[...]

[1] G4T8: Şeyi gösterelim mi? Bir tane şey vardı. Alanların yarısı olması. (ABDC paralelkenarı ile içerisinde oluşan dörtgenin alanları oranının 1:2 olmasını kastetmektedir.) [a]

[2] G4T7: Açılardan gidersek, uzunluklardan buluruz herhalde.

[3] G4T8: Şuradan da açılarını şey yapayım ben. (ABDC paralelkenarına ait iç açılar ölçmeye işaret etmekte ancak hata ile A köşesine ait dış açıyı ölçmektedir.) [a]

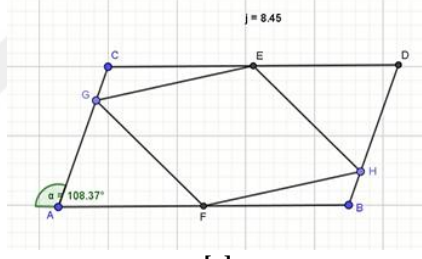


[b]

[12] G5T9: 18, 18. Diğeri de onun iki katı çıkar mı? (EGFH dörtgeninin çevre uzunluğunu ölçmekte ve ABDC dörtgeninin de çevre uzunluğunun 2 katı olup, olamayacağını sorgulamaktadır.) [b (2)]

[13] G5T10: Çıkmayabilir de çıkabilir de ...

[14] G5T9: Matematik kesindir!



[a]

[4] G4T8: Şimdi diğer açılarını göstereyim. [b]

[5] G4T7: İçerdeki bir paralelkenar değil. Kaydırdın mı sen şekli?

[6] G4T8: Geri aldım. Şekil kaydı ben de geri aldım. İlk hali ile aynı oldu.

[...]

[7] G5T10: Çevresini ölçeceğim. İlk haline mi getireyim?

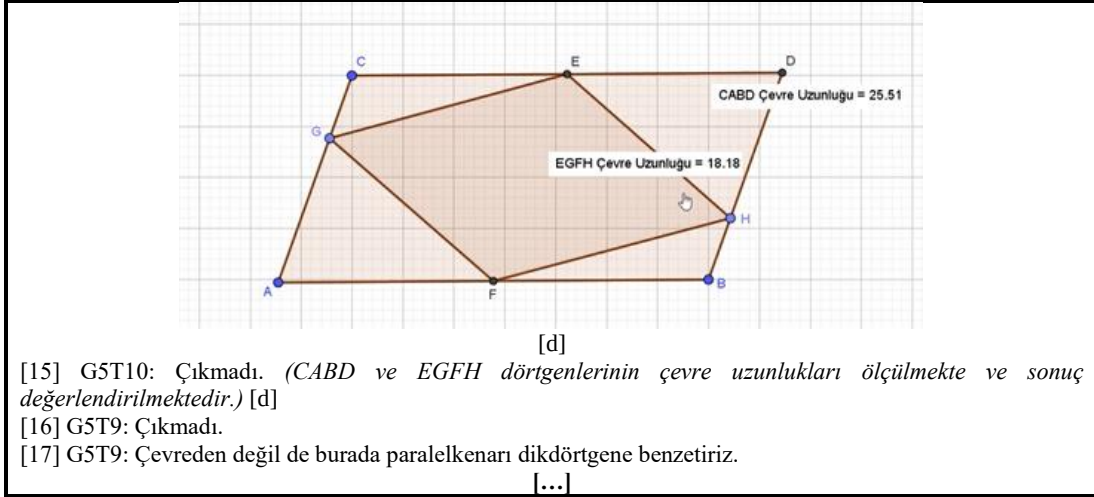
[8] G5T9: Aynen.

[9] G5T10: Çevresini ölçmek için çokgen yapmamız gerekiyor.

[10] G5T9: Direkt ölçüyor mu öyle çevresini.

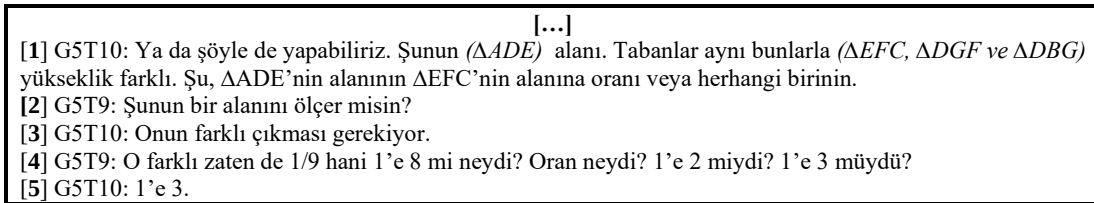
[11] G5T10: Ölçelim. Ama üst üste olunca birini ölçüyor ya.

Şekil 65. Bağlantı kurma aşaması amaçlı ölçüm örneği 2



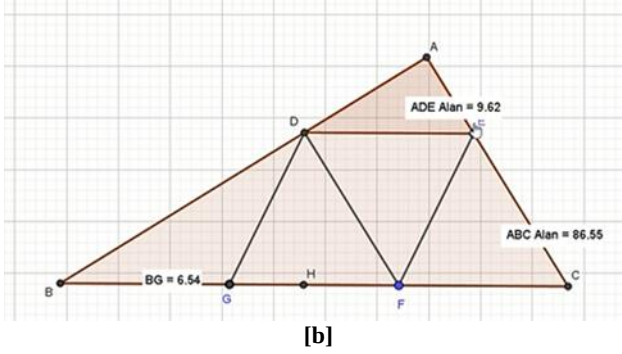
Şekil 65 (Devam). Bağlantı kurma aşaması amaçlı ölçüm örneği 2

Bağlantı kurma aşamasında ölçme işlevi kapsamında gözlenen bir diğer ölçme türü *doğrulama ölçümü* (M-v) olup, odak noktasında araştırma ve keşif sürecinde şeklin içerdiği veya yapılan eklemeler neticesinde ortaya çıktığı düşünülen ilişki ve özellikler hakkında öne sürülen tahmin veya varsayımların geçerliğini sorgulamak yer almaktadır. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde G5, $\triangle ADE$ ve $\triangle ABC$ 'nin alanları oranına yönelik problem fikri oluşturmuş ve bu fikrin matematiksel geçerliğini sağlamak için doğrulama ölçümünü uygulamıştır. G5, $\triangle ADE$ ve $\triangle ABC$ 'nin benzerlik oranı olan 1:3'e işaret eden tartışma yürütmüş ve benzerlik oranına göre alanlar oranının 1:9 olacağı hakkında tereddüt yaşamıştır (Şekil 66, satır 1-4). Buna karşılık sırasıyla $\triangle ADE$ ve $\triangle ABC$ 'nin alanlarını ölçmüşler (Şekil 66, satır 6-9) ve bilgisayarın hesap makinesi yardımıyla oranın 1:9 olup, olmadığını kontrol etmişlerdir. Dinamik yazılımın ondalık basamak gösteriminde değişiklik yapılmadığından, üçgenlerin alanları oranı tam 1:9 çıkmamış bunun yerine yaklaşık değeri hesaplanmıştır (Şekil 66, satır 10-14). Grup üyelerinin geçerliğini sorguladığı matematiksel ilişkide DGO'nun otoritesi baskın gelmiş ve bu durum da problem kurma fikrinden vazgeçilmesine neden olmuştur (Şekil 66, satır 15).

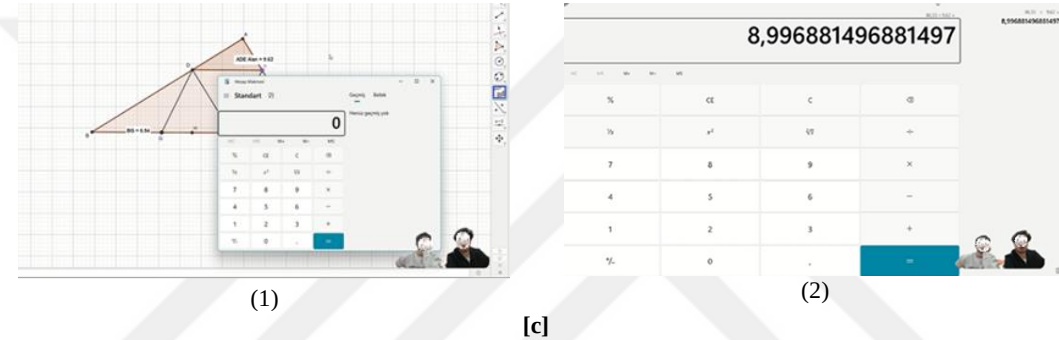


Şekil 66. Bağlantı kurma aşaması doğrulama ölçümü örneği 1

- [6] G5T9: O zaman.
 [7] G5T10: Şu da k'ya 9k çıkacak ($\triangle ADE$ ve $\triangle ABC$ 'nin alanları oranına işaret etmektedir.). Şu 2k, 2k, 2k ($\triangle EFC$, $\triangle DGF$ ve $\triangle DBG$ alanlarına işaret etmektedir.). [a]
 [8] G5T9: Aaa! evet oradan da çıkarabiliriz. 8k'ya. Biz bunları kaç bulmuştuk?
 [9] G5T10: 9.62 bu ($\triangle ADE$ alanı). Oranına bir bakalım. [b]



- [10] G5T9: Kaç katı?
 [11] G5T10: 9 katı.
 [12] G5T9: Hesap makinesi kullanabilir miyiz? [c (1)]
 [13] G5T9: Bak tam çıkmıyor. Ama 9 yani. [c (2)]
 [14] G5T10: Yaklaşık 9.
 [15] G5T9: Bence ona girmeden şey yapalım. Hesap makinesini kapat. Şu alanı ($\triangle DBG$) verelim. Şu alanın ($\triangle ECF$) eşitliğini sorgulayalım bir tane problemde. Eşit olduğunu gösterebiliriz.
 [...]



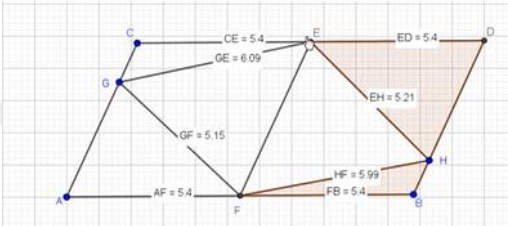
Şekil 66 (Devam). Bağlantı kurma aşaması doğrulama ölçümü örneği 1

Doğrulama ölçümü paralelkenar etkinliğinde de görülmüştür. Örneğin G1 bağlantı kurma aşamasında problemini tasarlarlarken, $A(\triangle DEH) + B(\triangle HBF) = A(\triangle EFH)$ eşitliği sorgulanmak niyetiyle doğrulama ölçümünden yararlanmıştır (Şekil 67, satır 1-3). Alanların eşitliğine yönelik yapılan sorgulama mevcut şekle ilişkin başka bir ilişkinin varlığını araştırmayı tetiklemiştir. Bu noktada DEFB dörtgeninin de bir eşkenar dörtgen olup, olmadığı öne sürülmüş ve varsayım doğrulama ölçümü ile kontrol edilmiştir (Şekil 67, satır 5-6). G1, DEFB dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğu varsayımının geçerli olmadığını görmüş ve geçerliliğinden emin olduğu ilişki üzerinden ilerlemeye ve problemini kurmaya devam etmiştir (Şekil 67, satır 7). Diğer bir örnek ise yine paralelkenar etkinliğinde G6'da gözlemlenmiştir (Şekil 67, satır 8-14). G6 bağlantı kurma aşamasında $A(\triangle DEH) + A(\triangle FBH)$ ile $A(\triangle ECG) + A(\triangle GAF)$ eşit olduğunu ve bunun EGFH dörtgeninin alanına eşit olduğunu öne sürerek, varsayımın geçerliliğini sorgulamıştır. Bu aşamada farklı çokgenlerin alanlarını belirginleştirmek niyetiyle yazılımın renk seçeneğini kullanmayı amaçlamış ve zaman kaybetmemek

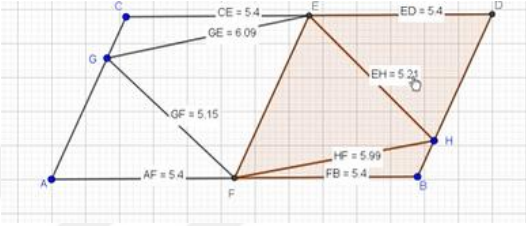
için vazgeçmişlerdir (Şekil 67, satır 9-10). G6 doğrulama ölçümü ile varsayımlarının matematiksel geçerliği hakkında kısa süreli bir tartışmanın ardından varsayımlarından emin olmuş ve problemi kurmaya koyulmuştur (Şekil 67, satır 12-14). Bu yönüyle doğrulama ölçümü bağlantı kurma aşamasında problem fikrinin matematiksel geçerliğini sağlamaya katkı sunmuştur.

[...]

[1] G1T2: Şu zaten alanın ikiye bölündüğünü anlayacak oradan $|EF|$ köşegen olarak çizilmektedir. EFH üçgeninin alanına bakalım [a (1)]. Şimdi şu 3 alanı inceleyelim 2 alanın toplamı 2 katı mı olacak? $A(\triangle DEH) + B(\triangle HBF)$ ikisinin toplamı olacak $A(\triangle DEH) + B(\triangle HBF)$ ile $A(\triangle EFH)$ eşitliği sorgulanmaktadır.) [a (2)].



(1)



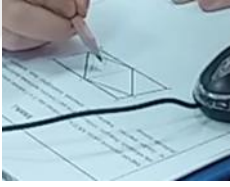
(2)

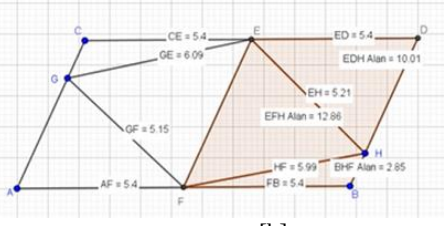
[a]

[2] G1T1: Şu EDH 10 oldu mu?

[3] G1T2: $(A(\triangle EDH) 10, (A(\triangle EFH) 12. \text{ Evet oldu } (A(\triangle EDH) + B(\triangle BHF) = A(\triangle EFH)). [b]$

[4] G1T1: O zaman burası da aynı ortak olduğunu bildiğimiz için hemen şunu zaten insan şey yapıyor onu çizmek istiyor tamam mı?

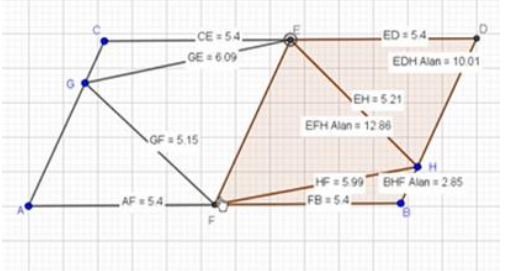




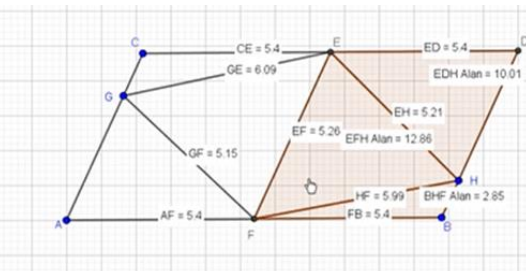
[b]

(STATİK)

[5] G1T2: DE ile EF uzunluğuna bakabilir miyiz? Eşkenar dörtgen çıkabilir belki (Statik ortamda öne sürülen tahmini doğruluğunu kontrol etmek için dinamik ortama dönülmektedir.) [c (1)]



(1)



(2)

[c]

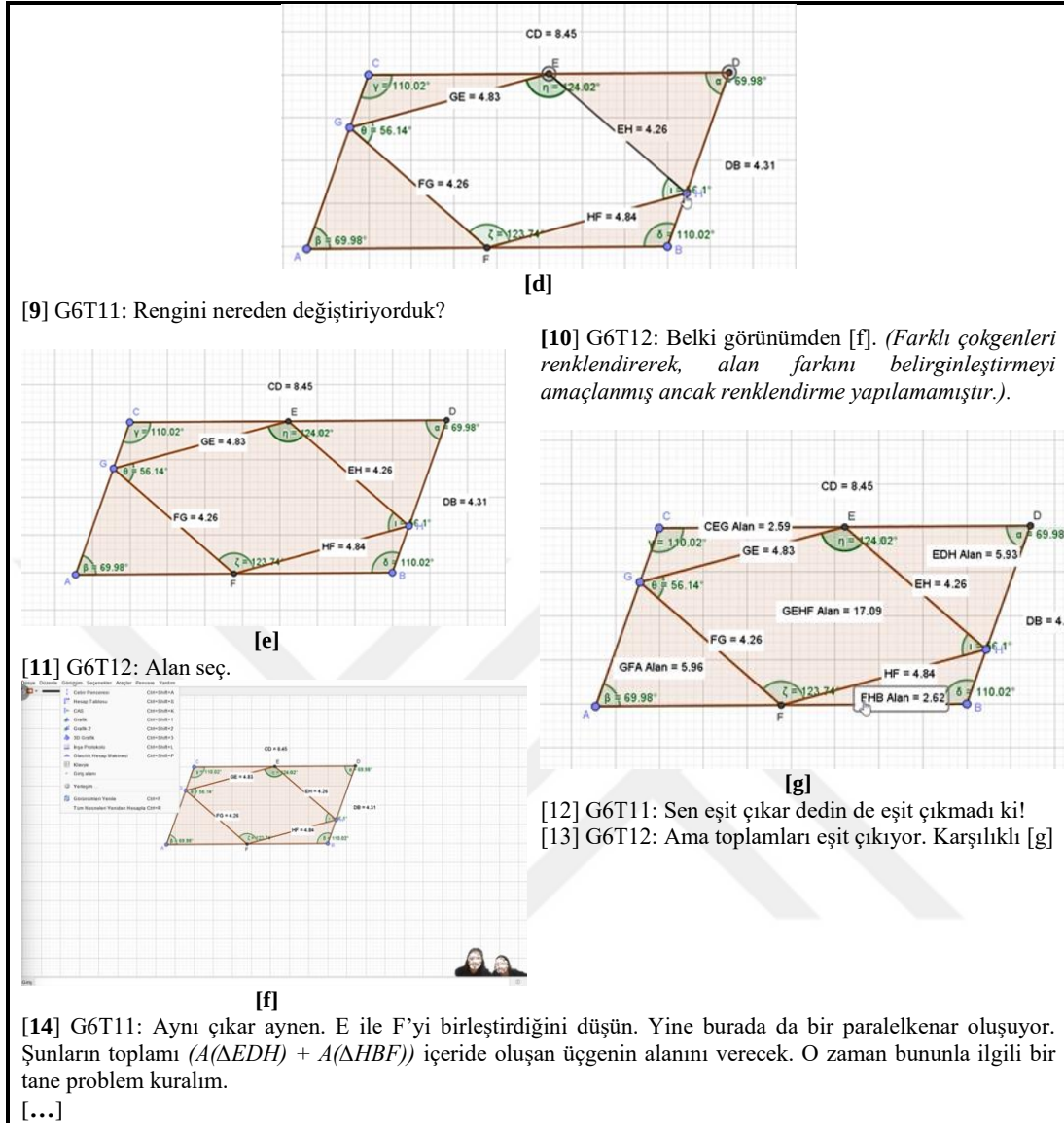
[6] G1T1: Yok. Çıkmadı. Paralelkenar işte eşkenar değil [c (2)]

[7] G1T2: Alandan ilerleyelim.

[...]

[8] G6T12: Bence şu iki kenar arasındaki alan ile karşı taraftaki eşit olacak. O da ortadakini verecek $(A(\triangle DEH) + A(\triangle FBH))$ ile $A(\triangle ECG) + A(\triangle GAF)$ eşit olduğu ve bunun EGFH dörtgeninin alanına eşit olduğu öne sürülmektedir.) [d]

Şekil 67. Bağlantı kurma aşaması doğrulama ölçümü örneği 2

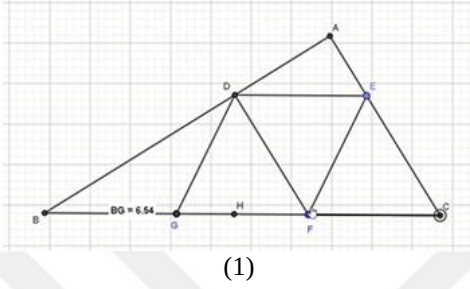


Şekil 67 (Devam). Bağlantı kurma aşaması doğrulama ölçümü örneği 2

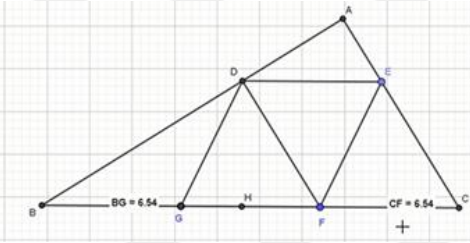
Bağlantı kurma aşamasında ölçme işlevi kapsamında *algısal ölçüm* (M-per) de görülmüştür. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde G5 problem kurma fikrine yön vermeye çalıştığı ve bağlantılarını keşfetmeye yönelik sürdürdüğü tartışmasında, görsel açıdan DECF dörtgeninin de bir eşkenar dörtgen olabileceğini öne sürmüş ve algısal ölçüme işaret eden ölçümler yapmıştır (Şekil 68, satır 1-16). Bu noktada $\triangle EFC$ 'nin ikizkenar üçgen olduğu bilgisi ve $|EC|$ 'nin de $|FC|$ vb. ile eşit uzunlukta olduğu düşünülmüş ve uzunluğu ölçülmüştür. $|EC|$ 'nin uzunluğu hakkında kısa bir tartışma yürütülmüş (Şekil 68, satır 6-16) ve algısal ölçüm neticesinde öne sürülen fikrin geçerli olmadığı kararlaştırılmıştır. Benzer şekilde G4 paralelkenar etkinliğinde,

ΔGCE ve ΔHBF alanlarının eş olduğunu öne sürmüş ve geçerliğini sorgulamıştır (Şekil 68, satır 17-19).

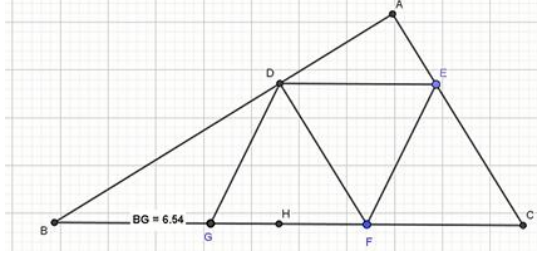
[1] G5T9: Aaa! Bir şey diyeceğim. Bu yine şey oldu. Eşkenar dörtgen oldu (*DECF* dörtgenini kastetmektedir) [a]. Şu FC kenarını bir ölçsene ya da EC kenarını [b (1)].
[2] G5T10: Doğru parçası.



(1)



(2)
[b]

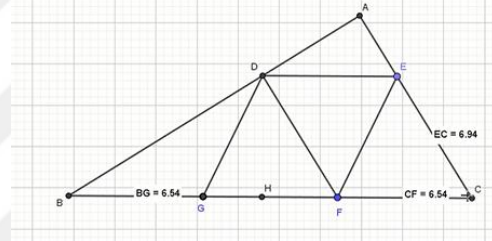


[a]

[3] G5T9: Gördün mü? [b]

[4] G5T10: Burayı (*|FC|*) zaten biliyorduk.

[5] G5T9: Hayır burayı biliyorduk. Şu EC'yi ölçer misin? Bura (*\Delta EFC*) ikizkenardı zaten. [c]



[c]

[6] G5T9: Ama yok. Eşit çıkmayacak. İşte o yüzden diyorum sana 3S, 3S, 3S. Yukarılara ne diyebiliriz?

[7] G5T10: Şunun (*|DE|*) uzunluğu ne?

[8] G5T9: 6.54.

[9] G5T10: Bunlar hep 3S (*|DG|*, *|EF|* vs.)

[10] G5T9: Şu (*|FC|*) değil ama

[11] G5T10: Hayır bu da 3S.

[12] G5T9: Değil kanka.

[13] G5T10: Taban aynı. 6.54, 6.54, 6.54. Yükseklikler aynı.

[14] G5T9: Ölçsene bir alan ölçmeden. Eşit çıkmayacak!

[15] G5T10: Eşit çıkacak.

[16] G5T9: Çıkmayacak. Kenar seçsene...

[...]

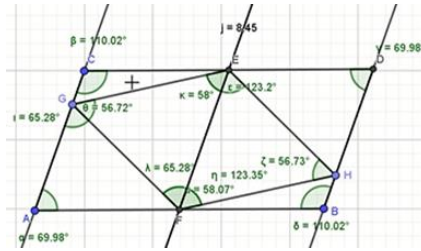
[...]

[17] G4T8: Şu üçgenler (ΔGCE ve ΔHBF) eş.
[d]

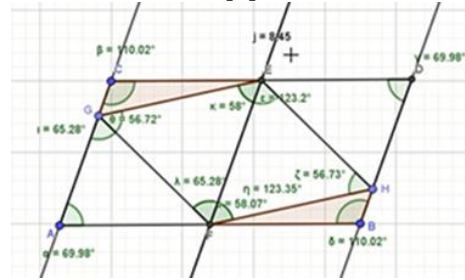
[18] G4T7: Muhtemelen.

[19] G4T8: Üçgen(ler)i oluşturup, ölçeyim de [e]

[...]



[d]



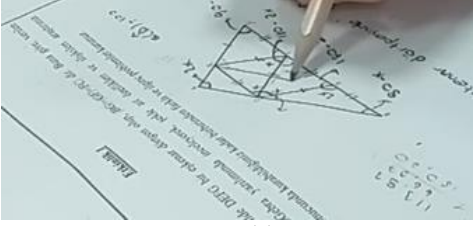
[e]

Şekil 68. Bağlantı kurma aşaması algısal ölçüm örneği

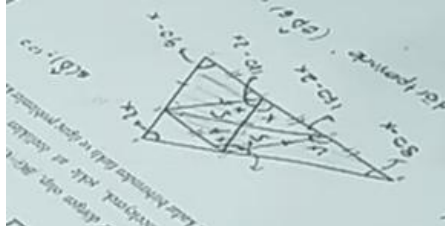
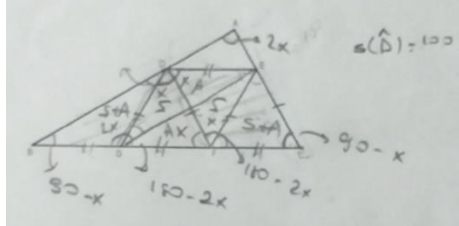
Bağlantı kurma aşamasında ölçme işlevi kapsamında *ispat ölçümü* (M-p) de gözlemlenmiştir. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde G3, statik ortamda ABCD paralelkenarının içerisinde yer alan eşkenar dörtgenin köşegenlerini belirlemiş ve eşkenar dörtgeni eş iki alana bölmüştür. Bunun ardından grup üyelerinden biri neden iki eş alan olduğu sorusunu yöneltince grubun diğer üyesi argümanını desteklemek ve grup arkadaşını ikna etmek için iki alanın eşitliğini DGO'da göstermeye çalışmıştır (Şekil 69, satır 2-3). Bu anlamda ispat ölçümü bağlantı aşamasında görülebilen ve grup üyelerinin fikirleri hakkında birbirini ikna etmesi amacıyla DGO'dan yararlanmayı sağlayan bir eylem olmuştur.

[...]

[1] G3T5: Paralelkenarları kurduğumuzda acaba paralelkenarların alanları veya neyleri arasında bir ilişki olabilir? Mesela şu bölge şurayı yaptığımızda şu ve şurası [DEFG ve DECF] iki tane farklı paralelkenar oluyor ya acaba bu paralelkenarlar arasında bir bağlantı var mı? Çünkü mesela şurasının alanı S ise (sağ) şurası (sol) da S olacak. [a (4)] Mesela burası (üst) A olsun. Şurası ne olacak? S+A olacak mesela buranın alanı (Statik ortamda ABCD paralelkenarının içerisinde yer alan eşkenar dörtgenin köşegenleri çizilmiş ve eşkenar dörtgen eş iki alana bölünmüştür [a].) [a (4)].




(1) (2)

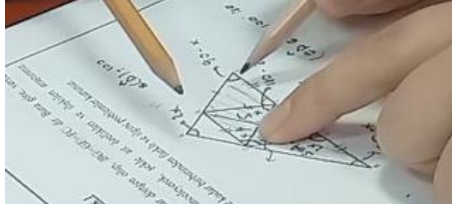



(3) (4)

[a]

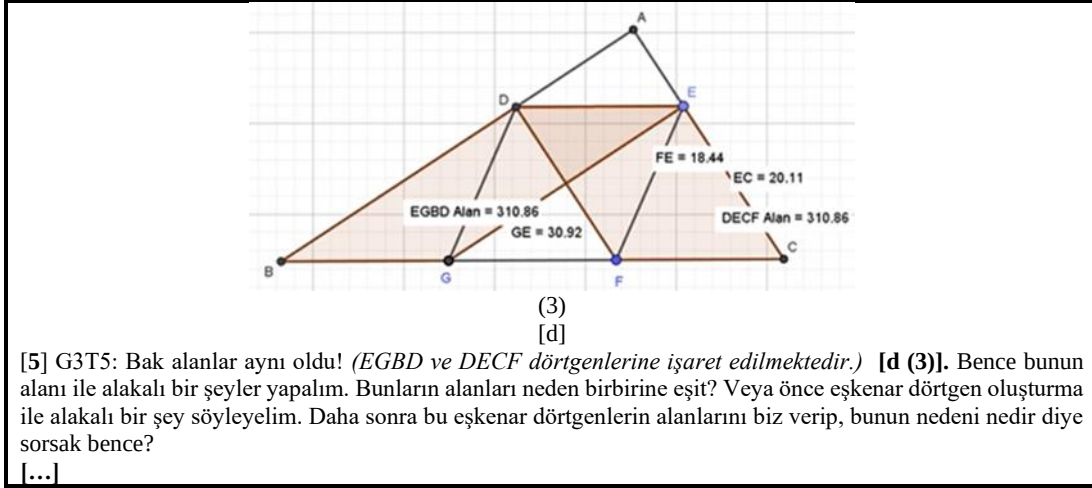
[2] G3T6: Buraya niye S+A dedin? [b]

[3] G3T5: Çünkü şuradan şöyle düşündüğünde ikiye bölüyor ya şurası S, A var bu tarafta bu tarafta da S, A olması gerekmiyor mu? [c] [Öğretmen adayı doğruluğundan emin olduğu ilişkiyi grup arkadaşına ikna etmeye çalışmaktadır. Statik ortamda sürdürülen ikna faaliyeti dinamik ortama taşınmaktadır.] [d]

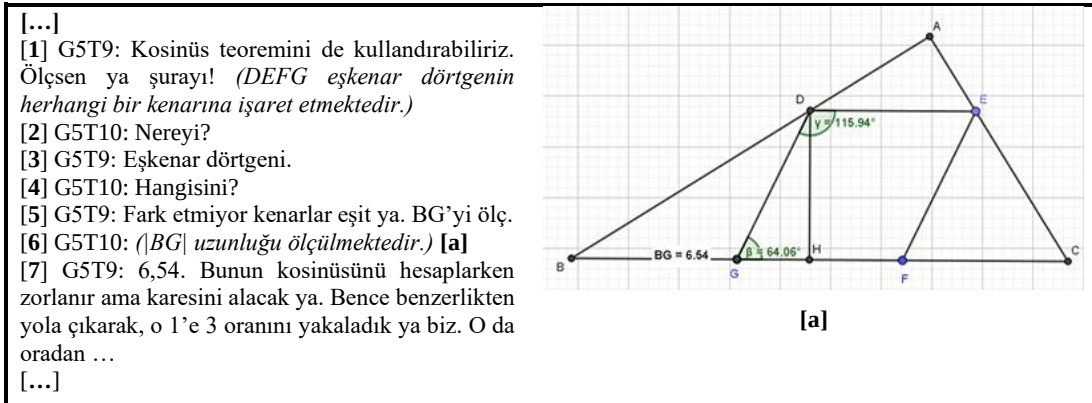
[b] [c]

Şekil 69. Bağlantı kurma aşaması ispat ölçümü örneği



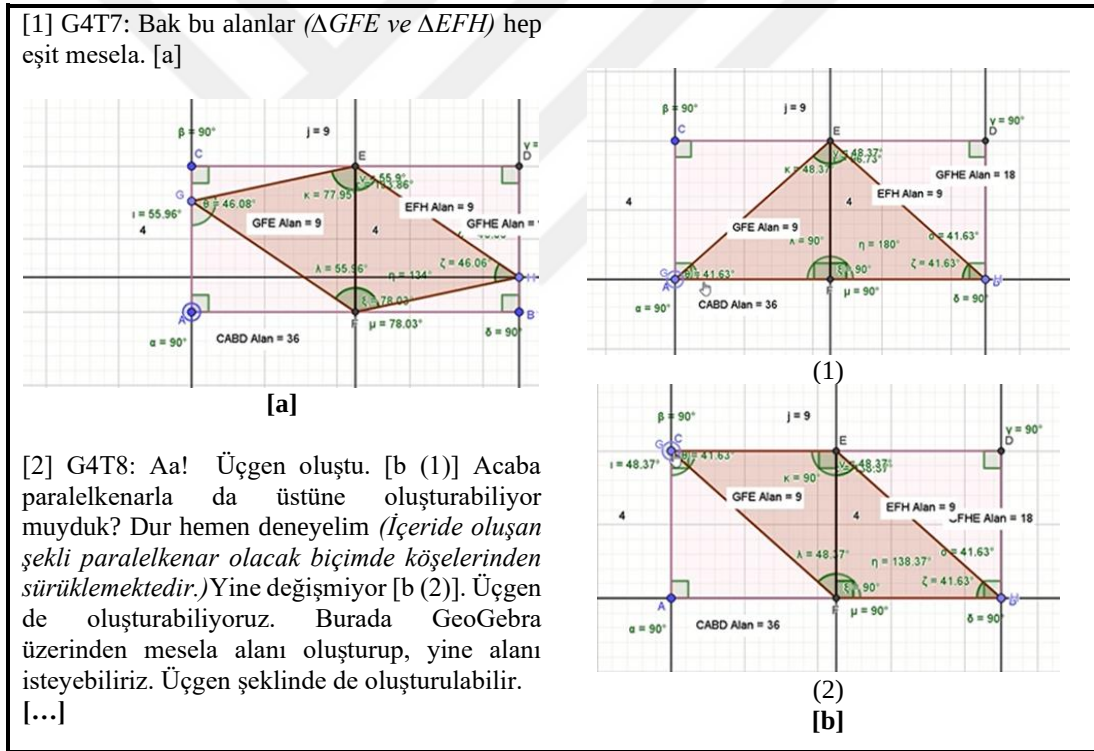
Şekil 69 (Devam). Bağlantı kurma aşaması ispat ölçümü örneği

Bağlantı kurma aşamasında ölçme işlevi kapsamında ortaya çıkan bir diğer durum ise *rastgele ölçümdür* (*M-w*). Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde G5, kurmak istediği problemde kosinüs teoremini kullanılmayı amaçlamış ve bir kenar uzunluğuna ihtiyaç duymuştur. Bu noktada hangi açı veya kenarlar üzerinden teoremi kullanmak istediğine karar vermemiş ve şekle ait açı veya kenar uzunluklarından herhangi birini ölçebileceklerine işaret etmiştir (Şekil 70, satır 1-6). G5, kurmayı planladığı problem için rastgele ölçümle belirlenen kenar uzunluğunun teoremi uygulamak için zorluk yaşatacağını düşünmüş ve problem fikri nihayete ulaştırılmamıştır (Şekil 70, satır 7). Buna göre rastgele ölçüm problem kurma fikrinden vazgeçilmesine neden olmaktadır.



Şekil 70. Bağlantı kurma aşaması rastgele ölçüm örneği

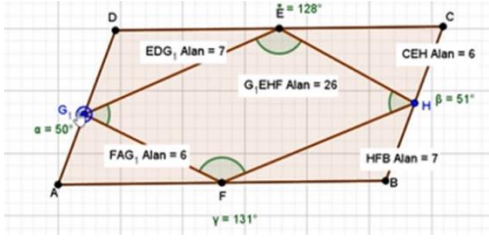
Bağlantı kurma aşamasında sürüklemeye yönelik durumlarla da karşılaşmıştır. Bunlardan biri *rastgele sürüklemeye* (D-w). Örneğin paralelkenar etkinliğinde G4 problem fikrini tasarlama kapsamında şekle ait ilişkileri araştırırken, alan ölçümleri yapmış ve şekle ait G noktasını istemsizce sürüklemiş ve alan korunumunu fark etmiştir (Şekil 71, satır 1). Bunun ardından sürüklemeye devam etmiş ve ABDC dikdörtgeni içinde bir üçgen oluştuğunu gözlemlemiştir. Alan korunumunun devam etmesi G4'ü benzer ilişkinin içerideki şekil paralelkenar olduğunda da devam edip, etmeyeceğini sorgulamaya ve amaçlı sürüklemeye teşvik etmiştir (Şekil 71, satır 2). Buna göre sürüklemeye türleri de birbirinin ardılı şekilde yapılabilmekte ve bağlantı kurma aşamasında şekle ait değişmez ilişkilerin açığa çıkmasına destek sağlamaktadır.



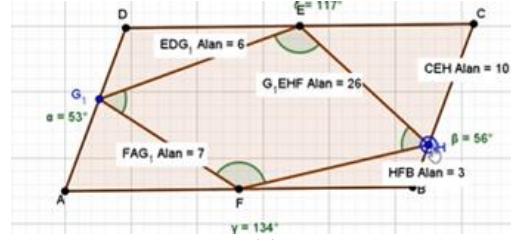
Şekil 71. Bağlantı kurma aşaması rastgele sürüklemeye örneği

Bağlantı kurma aşamasında sürüklemeye işlevi kapsamında görülen bir diğer durum *amaçlı sürüklemeye* (D-m). Örneğin paralelkenar etkinliğinde G6, ABDC dörtgenini C köşesinden sürüklerken içerideki EGFH dörtgenini kare yapmayı amaçlamış ve G köşesinden sürükleyerek, kareye dönüştürmeye çalışmıştır (Şekil 72, satır 1-4). Bunun ardından içerideki şeklin amaçlı sürüklemeye neticesinde kareye

- [1] G2T3: Değiştirsek nasıl olacak? Şu mesela G_1 noktasını hareket ettirsek? [a (1)]
 [2] G2T4 Alanları toplamı değişmiyor. (H noktasını sürüklemektedir.) [a (2)]



(1)

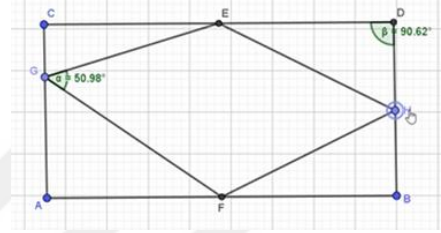


(2)

[a]

- [3] G2T3: Her türlü ortamın alanını veriyor. Bu sabit kesin. Bununla ilgili bir soru yapalım o zaman. (Sürüklenabilir noktaları sürükleyip, alan korunumuna işaret edilmektedir.)

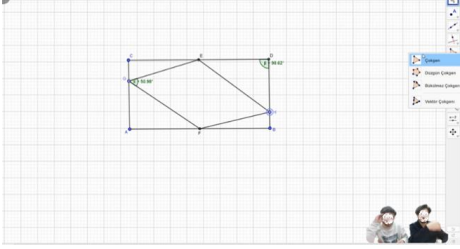
- [4] G5T9: Şu noktaları şöyle götüremiyor musun? [b] (G ve H noktalarını sürüklemeyi kastetmektedir.). O dışındaki paralelkenarın alanı bunun yarısı. ($EGFH$ dörtgeni ile $ABDC$ paralelkenarının alanları oranının 1:2 olduğuna işaret etmektedir.)



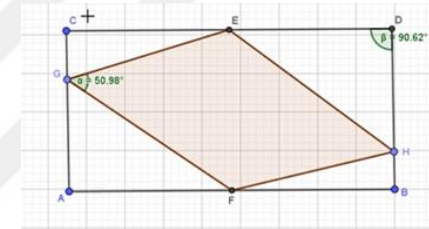
[b]

- [5] G5T10: Tamamının alanı bunun ($EGFH$) yarısı mı? [c]

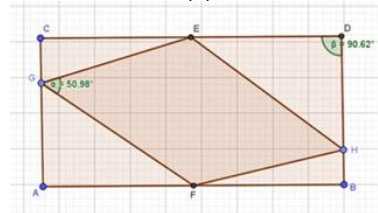
- [6] G5T9: Alanını ölçsene. (Öncelikle $EGFH$ ardından $ABDC$ dörtgeni çokgen olarak belirlenmektedir.) [d (1, 2)]



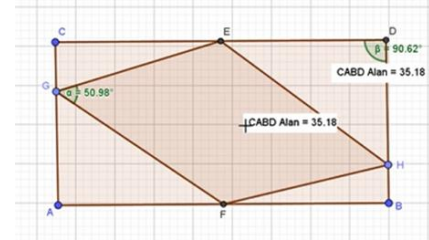
[c]



(1)



(2)



(3)

[d]

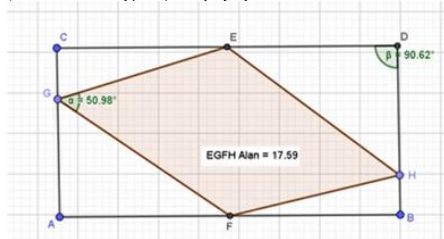
- [7] G5T9: Eşitmiş. [d (3)]

- [8] G5T10: Eşit değil.

- [9] G5T9: Eşit.

- [10] G5T10: Bak CABD'yi ölçüyor. Baksana! [d (3)] Önce şey yapmam lazım (Alanlar üst üste geldiği için yeni baştan alanları belirleyip, teker teker ölçüm yapmaya işaret etmektedir.)

- [11] G5T9: Yarısı çıkacak ya büyük ihtimal. Burayı ($EGFH$ dörtgeni) ölç. [e]



[e]

- [12] G5T9: Diğer kaçtı? 35?

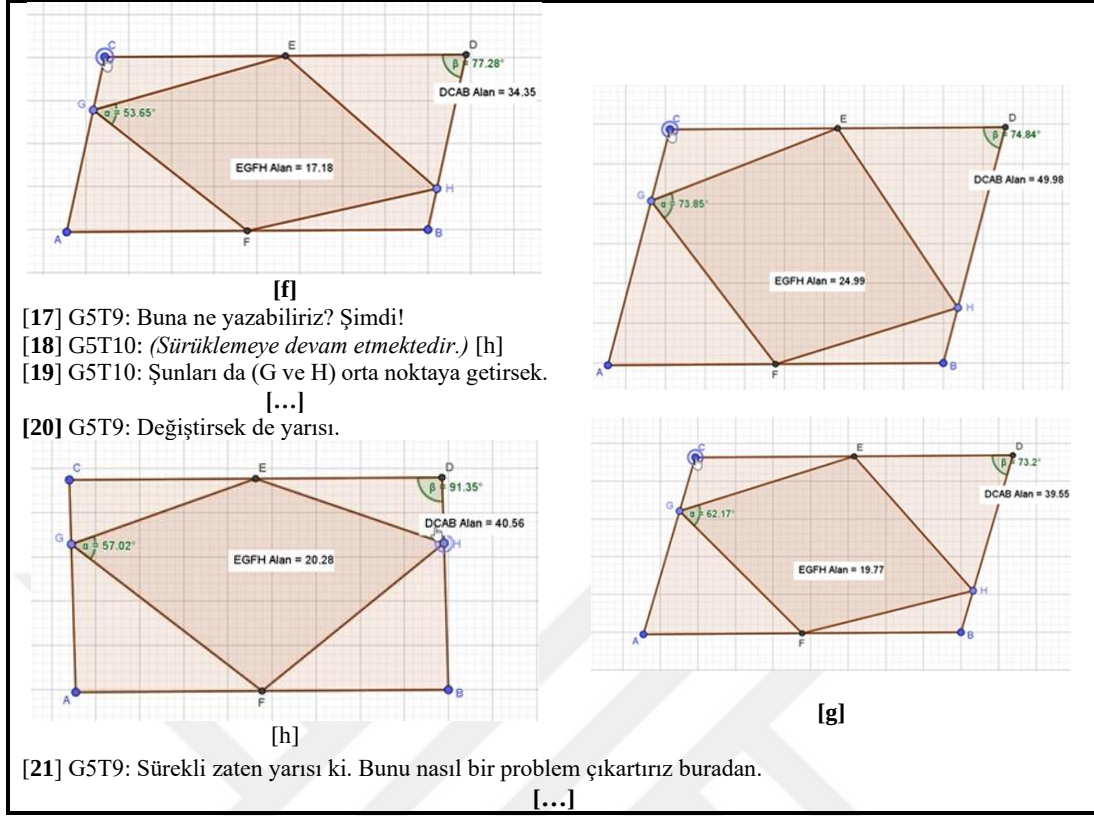
- [13] G5T10: 35'li bir şey aynen. [f]

- [14] G5T9: 35.18. Yarısı. Orta noktaları ya.

- [15] G5T10: Hareket ettirsek de hep yarısı ($ABDC$ dörtgeni C köşesinden sürüklenir ve iki dörtgenin alanları oranının 1:2 olduğu gözlemlenir.) [g]

- [16] G5T9: Hareket ettirsen de hep yarısı

Şekil 73. Bağlantı kurma aşaması sürüklemeye testi örneği



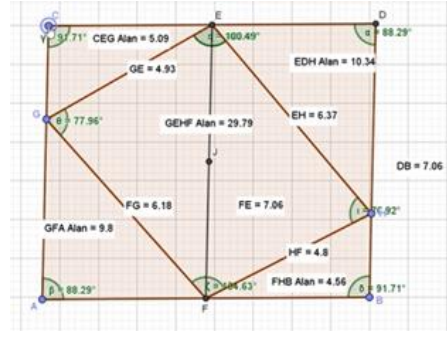
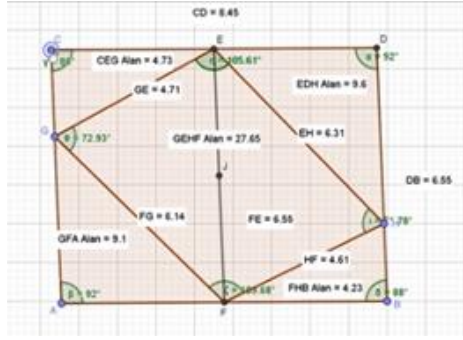
Şekil 73 (Devam). Bağlantı kurma aşaması sürükleme testi örneği

Bağlantı kurma aşamasında sürükleme işlevi kapsamında ortaya çıkan son durum *algısal sürüklemedir* ($D-p^*$). Örneğin paralelkenar etkinliğinde G6, ABCD paralelkenarının sürüklemeye altında dikdörtgene dönüşebileceğinin sezgisine varmış ve bunun geçerliğini sorgulamak niyetiyle C köşesinden şekli sürüklemiştir (Şekil 74, satır 1). Benzer şekilde G4, paralelkenar etkinliğinde dörtgenin dikdörtgene dönüşebileceğini düşünerek, şekli sürüklemeye çalışmıştır (Şekil 74, satır 2-6). Bu yönüyle bağlantı kurma aşamasında görsel algıya dayalı ve sezgisel olarak bir şeklin veya özelliğin açığa çıkabileceği ön görüşü test edilebilmektedir. G4 doğruluğundan emin olduğu bir ilişkiyi açığa çıkarmasına rağmen bu fikri bir problemin kurulması ile neticelendirmemiştir. Buna karşın algısal sürüklemeye, mevcut şekille ilişkili problem fikrini olgunlaştırmaya destek sağlamıştır. Bu anlamda algısal sürüklemenin şekle ait daha farklı özelliklerin keşfedilmesine katkı sunabileceği anlaşılmaktadır.

[1] G6T11: Şekli oynatarsak 90° olur mu acaba? (ABDC dörtgeni C köşesinden sürüklenmekte ve) [a]

[...]

Şekil 74. Bağlantı kurma aşaması algısal sürüklemeye* örneği



[a]

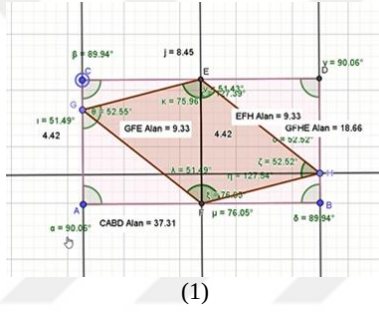
[2] G4T8: Şunu dikdörtgen şekline çevirebilir miyiz? Acaba? (ABDC dörtgenini C köşesinden sürükleyerek, dikdörtgene dönüştürmeye işaret edilmektedir.) [b (1)]

[3] G4T7: Tam 90°.

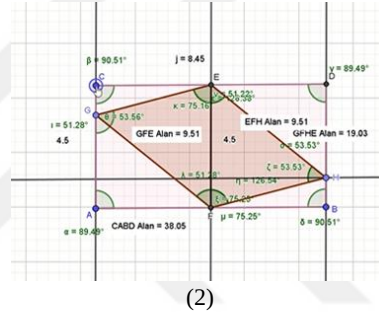
[4] G4T8: Tam 90 olmuyor değil mi? Oldu. Alfa 90 gösteriyor şurası (A köşesine işaret edilmektedir.) [b (1)]

[5] G4T7: Hayır olmadı. Bak üst taraf bir tık kaydır.

[6] G4T8: Çok zor (A köşesini 90° yapmak için sürüklemektedir.). [b (2)]



(1)



(2)

[b]

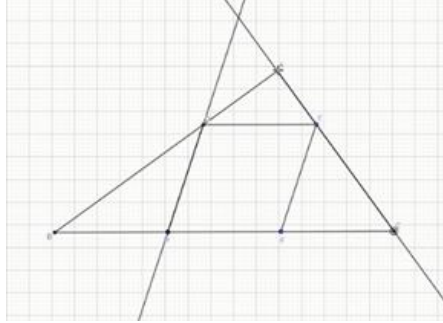
Şekil 74 (Devam). Bağlantı kurma aşaması algısal sürüklenme* örneği

Bağlantı kurma aşamasında gruplar orijinal şekle yeni unsurlar ilave etmiştir. Bu kapsamda *ekleme işlevi* altında ele alınan örnekler sunulmuştur. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde G2, belirsiz bir fikri görselleştirme niyetiyle ve dolayısıyla eklenen yardımcı unsurların tam anlamıyla ne şekilde sonuçlanacağı hakkında fikre sahip olmadan *tahmin etme* yoluyla DG ve AC kenarları üzerinden doğrular oluşturmuştur (Şekil 75, satır 1-2). Benzer olarak eşkenar dörtgen etkinliğinde G3 ise *hatırlama* kapsamında eklemelerde bulunmuştur. Buna göre eşkenar dörtgene ait köşegenlerin birbirini dik ortalaması bilgisini işaret eden şekilde doğru parçaları oluşturmuştur (Şekil 75, satır 3). Bu eklemeler mevcut durumdan yeni ilişkilerin örneğin, DFCE paralelkenar olarak gözlenmesine neden olmuş ve problem kurma fikrini tetiklemiş ve sürecin sonunda kurulan bir problemin ana fikrini oluşturmuştur (Şekil 75, satır 4-5). Bu anlamda tahmin etme yoluyla mevcut şekle yapılan eklemeler, problem kurmayı desteklemiştir.

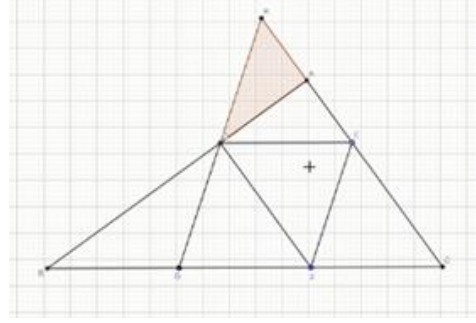
[...(Kâğıt üzerinde düşündükleri tasarımı dinamik ortamda uygulamaktadırlar.)]

[1] G2T4: Yukarıstı ($\triangle AED$) için mi?

[2] G2T3: Şuradan hemen Bir doğruları uzatıp, kesiştirip o şekilde oluşturabiliriz diye düşünüyorum. Sonra buradan da bir doğru parçası (doğru ekleme) oluşturmak istiyorum. (DG ve AC kenarları üzerinden doğrular oluşturmaktadır.) [a (1)] Sonra farklı renklerde mi olsun. [a (2)]



(1)

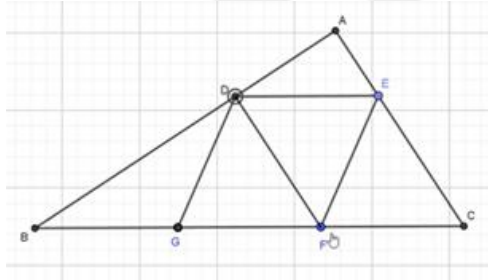


(2)

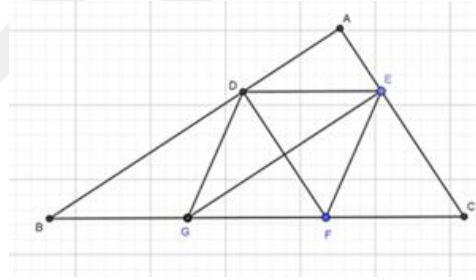
[a]

[...]

[3] G3T5: Doğru parçası olarak çektiğimizde köşegen çektiğimizde $|EC|$ ile $|DF|$ birbirine eşit oluyor [b (1)]. Eşit uzunlukta oluyor. $|DE|$ ile de $|FC|$ birbirine eşit uzunlukta oluyor. Burada paralelkenar oluşuyor ($DECF$ dörtgenine işaret etmektedir.) [b (2)]. Tamam mı? Şuradaki ($DECF$ dörtgeni) paralelkenar aynı şekilde şu tarafta da ($DEGB$) oluşuyor. Bununla alakalı bir problem kursak nasıl bir problem kurabiliriz?

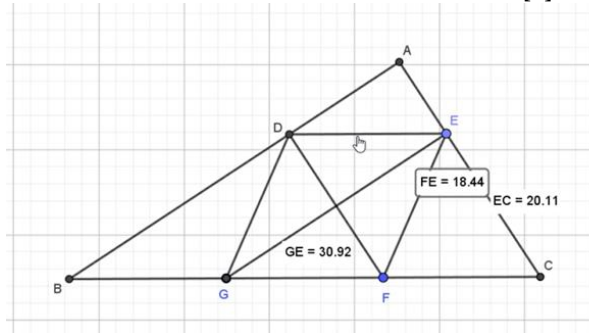


(1)



(2)

[b]



[c]

[4] G3T5: Burada mesela eşkenar dörtgenin köşegenleri ile alakalı bir problem kurabiliriz.
[5] G3T5: Köşegenleri birbirini kesim noktaları kadar eşit olur. 4 farklı bölmede bunlar birbirine eşit olur. ($DEFG$ eşkenar dörtgeninin köşegenlerinin birbirini dik ortalamasına işaret etmektedir.) Bence şurada $DFCE$ paralelkenar oluşuyor ya onunla alakalı bir problem kuralım. Uzunluk katalım işin içine! [c]

[...]

Şekil 75. Bağlantı kurma aşaması yardımcı unsur ekleme örneği 1

Bağlantı kurma aşamasında tahmin etme niyetiyle yapılan eklemeler kapsamında gruplar arasında fark edilen bir diğer husus ise mevcut şeklin içeriğine yönelik tüm ilişki veya özelliklerin açığa çıkarıldığının düşünülmesidir. Bu durumda

gruplar, bazen belirsiz olarak kabul edilebilecek niyetlerini görselleştirmek için şekle yeni unsurlar ilave edebilmektedir. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde G5, henüz tasarı halinde olan ve belirsiz fikrini somutlaştırmak niyetiyle eşkenar dörtgene bir şekilde teğet olan çember ilave etmeyi amaçlamıştır (Şekil 76, satır 1-6). Bunun ardında çember ilavesi yapılmış ancak çemberi nasıl kullanacakları hakkında bilgi ve deneyim eksikliğine işaret eden kısa süreli bir tartışma yürütmüşlerdir (Şekil 76, satır 7-10). Böylece eklemeye çalıştıkları unsurdan verim elde edemeyip, problem kurma fikrinden vazgeçmiş ve daha farklı ilaveler yapmayı düşünmüşlerdir (Şekil 76, satır 11). Bu noktada eşit uzunluktaki doğru parçalarını taban kabul eden sırasıyla $\triangle BGD$, $\triangle GFD$ ve $\triangle FCE$ alanlarının eş olduğu durumundan yararlanmayı hedeflemiş ve şekle DF doğru parçasını ilave etmişlerdir (Şekil 76, satır 11-15). Bu yönüyle grup, bilgi ve deneyimleri ile örtüşen veya daha aşına oldukları bağlamda ekleme yapmış ve problem kurmak için uygun bularak, problemini kurmuştur.

[...]

[1] G5T9: İstiyorsan hiç oraya da girmeyelim. Daha farklı? Şimdi eşkenar dörtgenin bütün kenarları eşit ya içine çember. Çemberlerden yola çıksak (*Eşkenar dörtgen etkinliğinde mevcut şekle çember ilave etmeyi amaçlamaktadır.*).

[2] G5T9: Buna teğet çemberi çizebiliyor muyuz?

[3] G5T9: Yarıçapları eşit olan 4 tane çember. Hayır bunu nasıl bir soru olarak problem olarak kullanabiliriz.

[4] G5T10: Düşünelim.

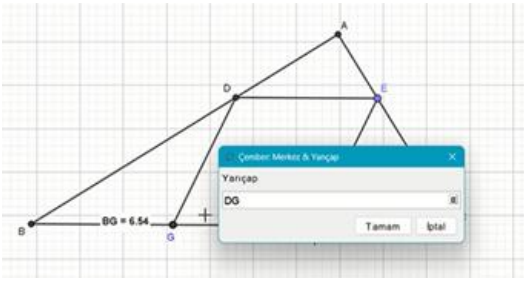
[5] G5T9: İstiyorsan üzerine çiz (*Mevcut şekle ekleme yaparak, sonuç elde etme amaçlanmaktadır.*). Bu da bir düşünme biçimi.

[6] G5T10: Nasıl çizeceğiz?

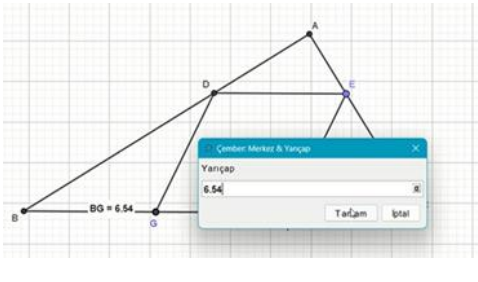
[7] G5T9: Şunu yarıçap kabul eden DG kenarını (*Araçlar çubuğundan merkez & yarıçap seçilmiş ve ardından yarıçap olarak önce DG ardından |DG| uzunluğu belirlenmiştir.*) [a (1, 2)].

[8] G5T10: Yarıçap!

[9] G5T90: Aynen. Kenarlar eşit ya hepsinin. Bir şey çıkmayacak da işte sadece şekil üzerinde göster diye şey yaptım.



(1)



(2)

[...]

Şekil 76. Bağlantı kurma aşaması yardımcı unsur ekleme örneği 2



[...]

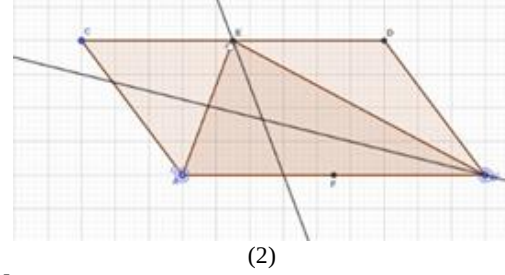
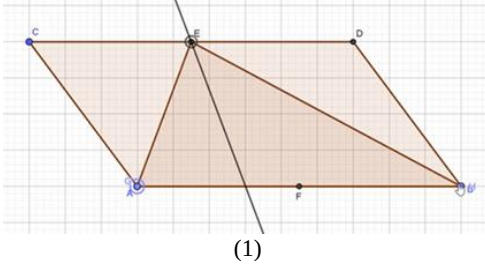
[b]

Şekil 76 (Devam). Bağlantı kurma aşaması yardımcı unsur ekleme örneği 2

165

[...]

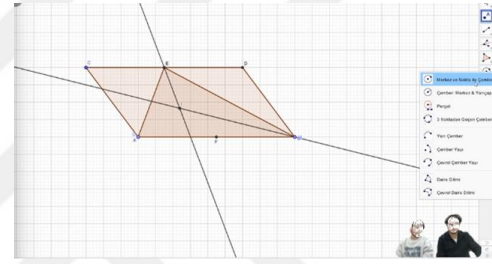
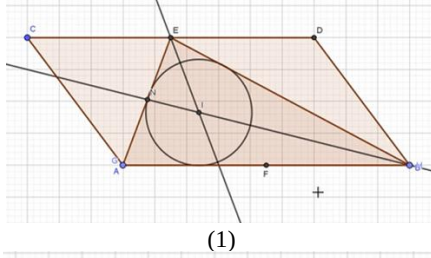
- [1] G5T10: O zaman çevrel çember!
 [2] G5T9: Taktın çevrel çembere.
 [3] G5T10: (Çevrel çemberi oluşturmak için ilk önce E daha sonra B köşesine ait iç açıortay doğrularını eklemektedir.) [a (1,2)]
 [4] G5T9: Ne yapacaksın ki?
 [5] G5T10: Çevrel çemberini oluşturacağız. Ya da iç teğet mi oluyor?



[a]

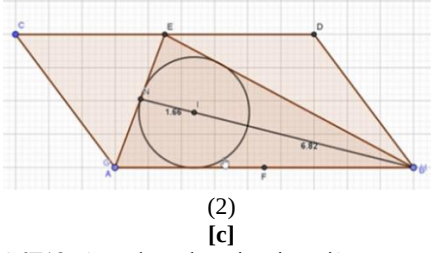
- [6] G5T9: İç teğet oluyor. Açıortayların kesişim noktası.
 [7] G5T10: (Merkez ve nokta ile çember seçmeye çalışmaktadır.) [b]
 [8] G5T10: Şimdi nokta (N) belirleyeceğiz. [c (1)]
 [9] G5T9: Açıortayların merkezi oldu da bunu ne yapacağız?
 [10] G5T10: Bilmiyorum.

[...]



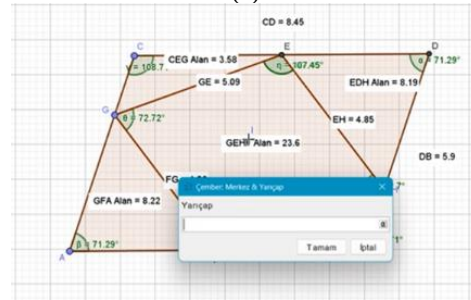
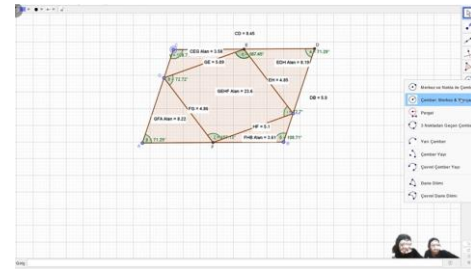
- [11] G5T10: Çevrel çemberi oluşturduk ama formülü bilmiyorduk. Ne yapacağız bunu?
 [12] G5T9: Bilmiyorum sen çizdin çevrel çember. Şu orta noktaları kullanmalıyız.
 [13] G5T10: Bunların uzunlukları? [c (2)]

[...]



[c]

- [14] G6T12: Çevrel çember çizeyim mi?
 [15] G6T11: Hayır canım.
 [16] G6T12: Niye ki?
 [17] G6T12: Deneyebilirsin.
 [18] G6T12: (Çevrel çemberin kavramsal yapısına uygun olmaksızın bir şekilde GEHF dörtgenine teğet çember oluşturma amaçlanmaktadır.) [d (1, 2)]
 [19] G6T12: Bunun için merkezini almam lazım. Doğru çekelim. (E ve F köşelerini birleştiren doğru parçası eklenmektedir.) [e]
 [20] G6T12: Uzunluğunu ölçelim. Bunun orta noktasını alalım. [f]
 [21] G6T11: Şey yapalım mı mesela? EDH şuradaki üçgen ile şuradaki (ΔHBF) üçgenin alanları toplamının şuradaki üçgenin (ΔEHF) kaçta kaç olduğunu anlar. Kaçta kaç olduğunu söyleyelim mi?



[d]

Şekil 77. Bağlantı kurma aşaması yardımcı unsur ekleme örneği 3

Gruplar bağlantı kurma aşamasında DGO'nun *diğer işlevi* (O-) kapsamındaki unsurları da sürece dahil etmiştir. Bağlantı kurma aşamasında genel olarak ondalık gösterimde basamak sayısını belirleme, sürgü oluşturma, ilişki tespit etme, hesap makinesi kullanma bileşenleri kullanılmıştır. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde G2 açılara ait niceliksel değerleri 0 ondalık basamak yaparak, daha net sayısal ilişkiler içeren bir problem tasarlamayı hedeflemiştir. Bu yönüyle problem fikri henüz netleştirilip, oluşturma aşamasına geçilmemiş ve tartışma bağlantı kurma aşaması kapsamında sürdürülmüştür. G2, ondalık basamağın ne şekilde değiştirileceği hakkında başlangıçta zorlanmış ve ekranda birçok sekmede arama yapmıştır (Şekil 78, satır 1-6). Bunun üzerine ondalıklı gösterimi değiştirme seçeneğine erişemeyince niceliksel değerleri değiştirmekten başlangıçta vazgeçmiş ancak daha sonra ondalık basamak değiştirme seçeneğine erişmiş ve tasarlamak istedikleri problemde alanlar arasındaki sayısal değerleri tam sayılı gösterime ulaştırmışlardır (Şekil 78, satır 8-13). Bunun neticesinde problem fikri netleştirilmiş ve yazıya geçirilmeye karar verilmiştir (Şekil 78, satır 13). G2'nin eşkenar dörtgen etkinliği kapsamındaki problem fikrine yönelik tartışması bağlantı kurma ve oluşturma aşamaları arasındaki geçiş örneklendirmekte ve aşamaların ne yönlü iç içe olabildiğine kanıt sağlamaktadır.

[1] G2T3: Acaba, açılarımız çok küsuratlı çıktığı için virgülden sonraki basamağı, ondalıklı gösterimi 1'e mi düşürsek?

[2] G2T4: Olur, yapalım. Etiketleri gösterden mi yapıyorduk?

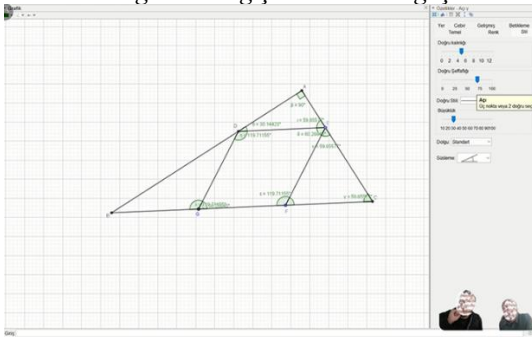
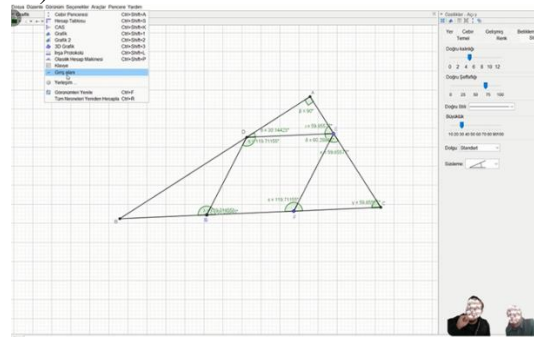
[3] G2T4: Ayarlar? Yerleşime bir bakabilir misin?

[4] G2T4: Özellikler?

[5] G2T3: Başlangıç ayarları?

[6] G2T4: [...] Nereden yapıyorduk bunu? *(Denemek için araç çubuğu, başlangıç ayarları vb. noktalarda arama yapmaktadırlar.)* [a]

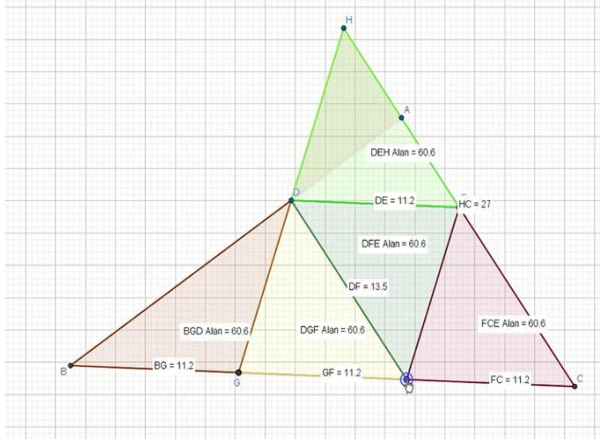
[7] G2T4: Neyse, böyle devam edelim. *(Ondalıklı gösterimi değiştirme seçeneğine erişemeyince niceliksel değerleri değiştirmekten vazgeçmektedirler.)*

[a]

Şekil 78. Bağlantı kurma aşaması diğer bileşen örneği 1

[...]



[b]

[8] G2T3: DF ile HC uzunlukları arasında ... 13'e ayarlamaya çalışıyorum DF'yi ve CH 25.9 ufak bir fark var [b]. 0 ondalık basamak olsun. Daha net görünsün. O zaman buradaki GCAD dörtgenini eşkenar üçgen oluşturacak şekilde tamamladığımızda ($\triangle ADE$ ile simetrik $\triangle ADH$ oluşturulmaktadır.) [b]

[9] G2T4: Öyle bir ayırınız ki eşit alanlara sahip eşkenar üçgenlerden oluşsun. (Ondalık gösterim değiştirilmiştir. Problem tasarlama başlamaktadır.) [c (1, 2)]

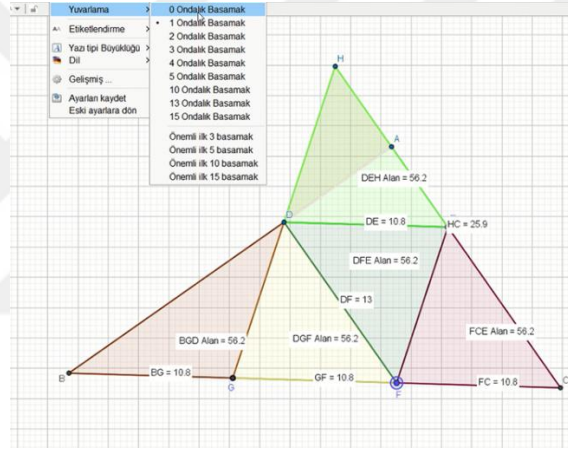
[10] G2T3: Evet, ipucu vermeyelim.

[11] G2T4: Öyle bir ayırınız ki mi diyeyim bilemedim şu an.

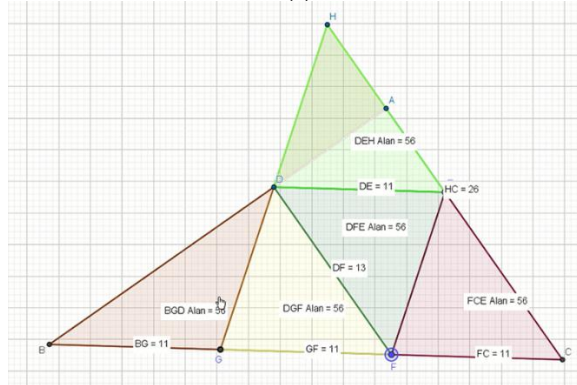
[12] G2T3: Öyle bir ayırılım ki!

[13] G2T4: Tamam, ... üçgenlerden oluşsun ... (Problemi yazıya geçirmektedir.)

[...]



(1)



(2)

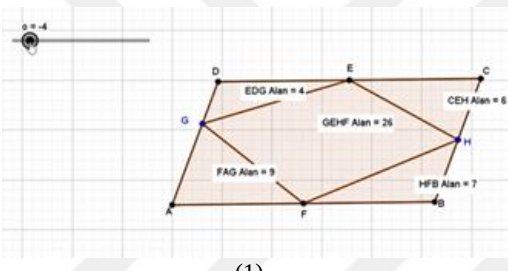
[c]

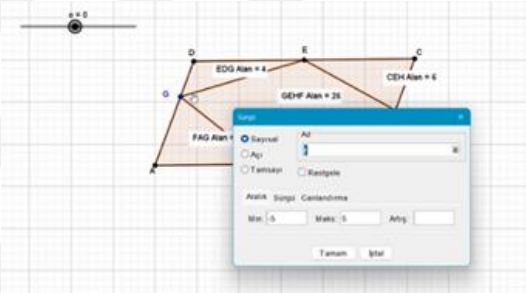
Şekil 78 (Devam). Bağlantı kurma aşaması diğer bileşen örneği 1

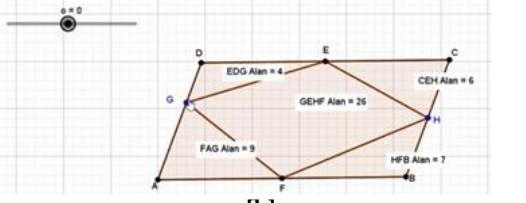
Bağlantı kurma aşamasında diğer işlevler kapsamında sürgü oluşturma da yer almaktadır. Örneğin paralelkenar etkinliğinde G2 sürgü oluşturarak, paralelkenar ve

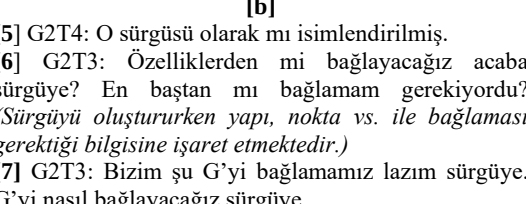
içerisinde oluşan dörtgenin alanları oranına işaret eden ilişkiyi görünür kılmayı amaçlamıştır (Şekil 79, satır 1-2). Bağlantı kurma aşamasında sürgünün alanlar oranını keşfetmeye katkı sağlayacağı düşünülmüş ve bu amaçla oluşturulmak istemiştir ancak yazılımın olanaklarından etkili yararlanılamamıştır (Şekil 79, satır 3-14). Bu yönüyle problem fikri etrafında dönen düşüncelerin yerini sürgünün nasıl oluşturulması gerektiği almış ve problem kurma süreci aksamaya uğramıştır. G2 sürgü oluşturmak için yoğun çaba sarf etmiş ancak sürgüyü oluşturamamış ve onu kullanmayı gerektiren problem fikrinden de vazgeçmiştir.

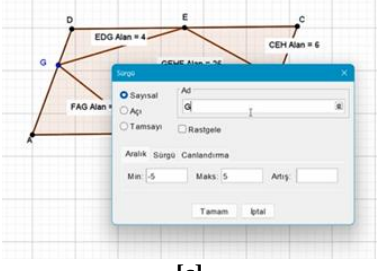
[1] G2T3: Bu sefer sürgüyü kullansak. Asla hatırlamıyorum nasıl sürgü yaptığımızı ama. Şu alanların değişme durumlarına göre sürgü yapsak. Nasıl yapıyorduk acaba? (Sürgü ile problem kurma durumundaki alan ilişkisi ortaya koymak amaçlamakta ancak yazılımı kullanma zorlukları nedeniyle sürgü sürece etkin dâhil edilememektedir.)

(1) 

(2) 

[a] 

[b] 

[c] 

[2] G2T3: G noktasını sürgüye bağlayabiliriz. Oradaki o G'yi hareket ettirdiğimiz zaman.

[3] G2T3: Tamam şimdi burada ne yazacağım.[a (2)]

[4] G2T3: Rastgele hareket ettireyim. Neyi hareket ettiriyor? Hiçbir şeyi hareket ettirmiyor. (GEHF dörtgenine ait G köşesinin sürgüye bağlı olduğunu düşünerek, rastgele sürükleme yapmaktadır.) [b]

[5] G2T4: O sürgüsü olarak mı isimlendirilmiş.

[6] G2T3: Özelliklerden mi bağlayacağız acaba sürgüye? En baştan mı bağlamam gerekiyordu? (Sürgüyü oluştururken yapı, nokta vs. ile bağlaması gerektiği bilgisine işaret etmektedir.)

[7] G2T3: Bizim şu G'yi bağlamamız lazım sürgüye. G'yi nasıl bağlayacağız sürgüye

[8] G2T4: Sürgünün ismini değiştirirsek ona bağlı oluyordu galiba.

[9] G2T3: Tamam

[10] G2T3: Bence açı olmaz. Açı sürgüsü çünkü şu iç kısım oluyor. Ama gerçi yapabiliriz. Buranın açısını belirleyip, bağlayabiliriz oraya. Şu açı değişikçe diye de bakabiliriz oraya ... (Sürgü ile ilişkili çeşitli seçenekleri amaçları yönünde denemektedirler.) [c]

[11] G2T3: Sürgünün adı burası.

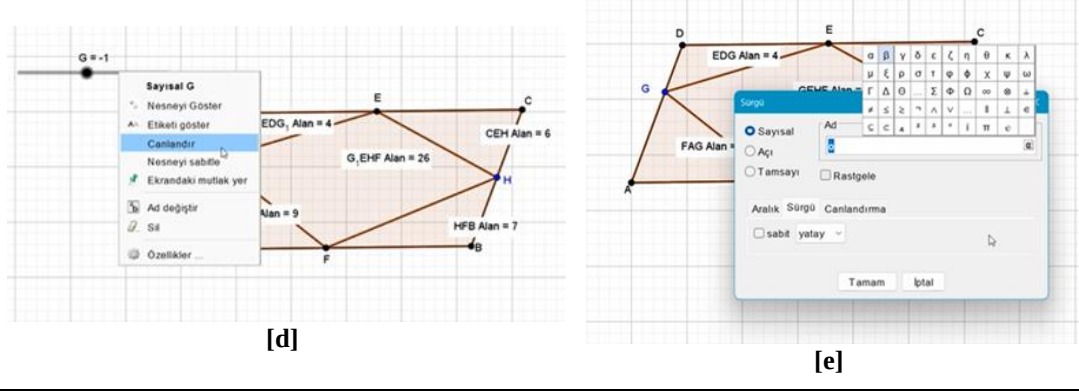
[12] G2T4: G'yi bir atayalım bakalım. [c]

Şekil 79. Bağlantı kurma aşaması diğer bileşen örneği 2

[13] G2T4: Canlandır [d]

[14] G2T3: Açık üstünden gidelim bir de isterseniz. [e]

[...]



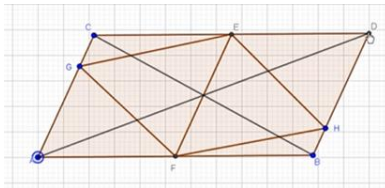
Şekil 79 (Devam). Bağlantı kurma aşaması diğer bileşen örneği 2

Bağlantı kurma aşamasında *diğer işlevler* kapsamında görülen farklı bir durum ise *ilişki tespit etme* özelliği olmuştur. Buna göre DGO'da herhangi iki nesne arasında paralellik vb. bir ilişkinin olup olmadığı yazılım aracılığıyla belirlenebilmektedir. Örneğin G1 hem paralelkenar hem de eşkenar dörtgen etkinliğinde ilişki tespit etme özelliğinden yararlanmıştır. Paralelkenar etkinliğinde içeride oluşan dörtgenin paralelkenar olduğu düşüncesini kontrol etmek niyetiyle $|EH|$ 'in $|FG|$ 'ye paralel olup olmadığı incelenmiştir (Şekil 80, satır 1-9). Benzer şekilde eşkenar dörtgen etkinliğinde de şekle $|EG|$ ilave edilmiş ve $|EG|$ ile $|DB|$ 'nin paralel olup, olmadığı incelenmiştir (Şekil 80, satır 10).

[1] G1T2: $|EH|$, $|FG|$ 'ye paralel mi? [a]

[2] G1T1: Yok çıkmayacak. Bir şey çıktı mı?

[3] G1T2: O paralellığe bakabilir misin?



[a]

[4] G1T1: Nereyi ölç demiştin sen bana?

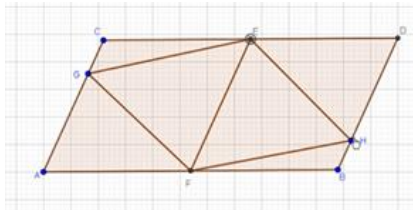
[5] G1T2: $|EH|$ ile $|GF|$ 'nin ilişkisini. Yok ki öyle olsaydı zaten.

[6] G1T1: Ben ilişkiyi ilk defa senden gördüm. (Öncelikle $|EH|$ [b (1)], ardından $|GF|$ [b (2)] seçilerek, iki doğru parçası arasındaki ilişkinin varlığı belirlenmektedir [b (3)].) [b]

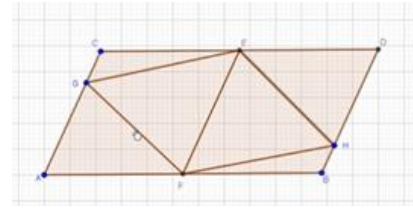
[7] G1T1: Aynı uzunluğa sahip değildir. [b (3)]

[8] G1T2: Zaten paralel de değil.

[9] G1T1: Çeşitkenar dörtgen? Başka paralellik yok.

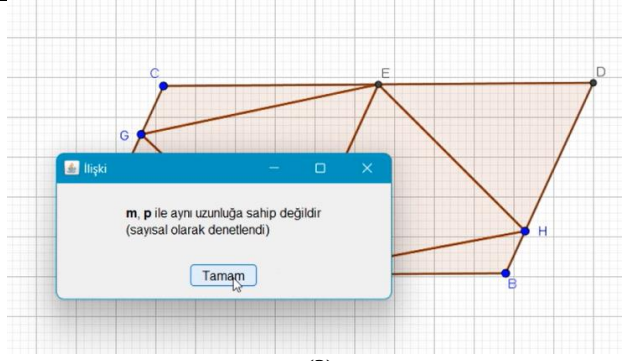


(1)



(2)

Şekil 80. Bağlantı kurma aşaması diğer işlev örneği 3

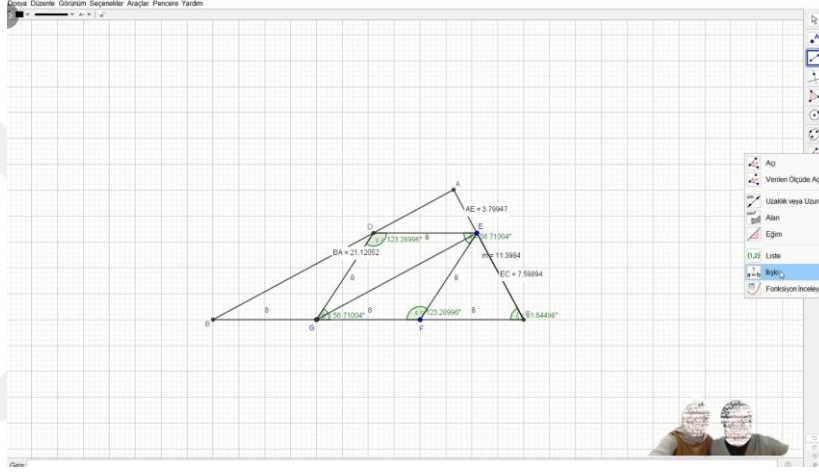


(3)

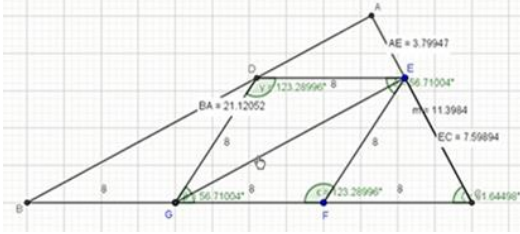
[b]

[...]

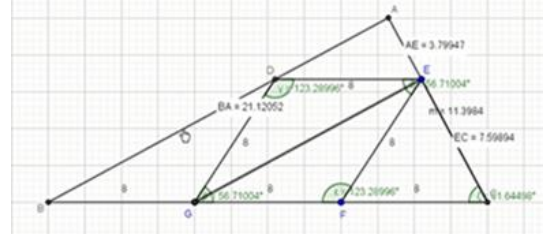
[10] G1T2: Sadece şu ilişkiden yine paralellığı bakalım. $|EG|$ ve $|DB|$ 'nin paralel olup, olmadığı incelenmektedir.) [c] (Ardından önce $|EG|$, [d (1)] sonra $|DB|$, [d (2)] seçilerek ilişkinin varlığı tespit edilmektedir [d (3)].) [d]



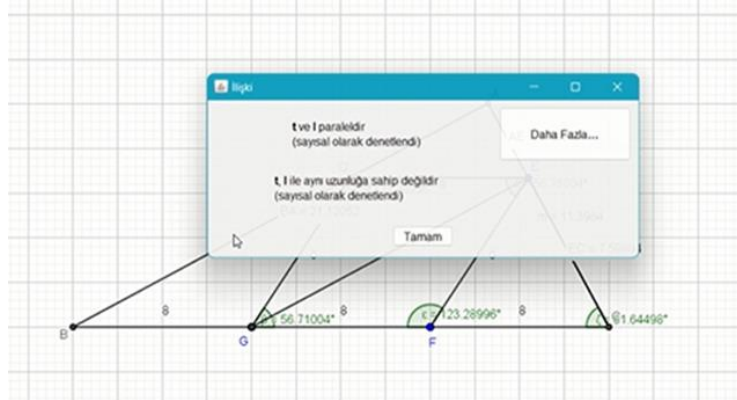
[c]



(1)



(2)

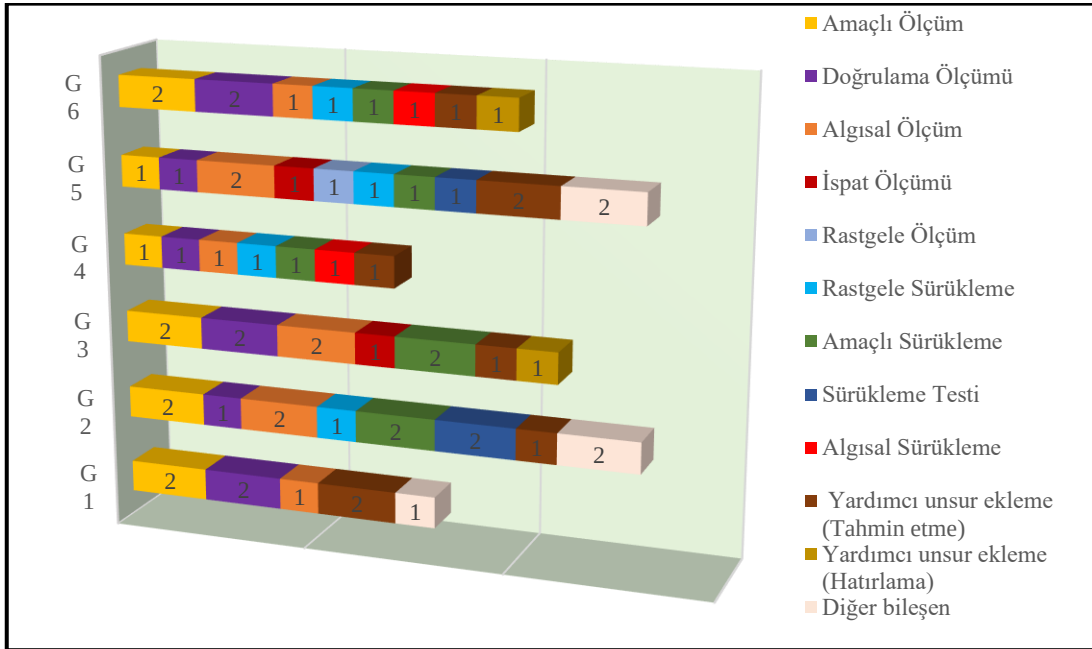


(3)

[d]

Şekil 80 (Devam). Bağlantı kurma aşaması diğer bileşen örneği 3

Bağlantı kurma aşamasında iki etkinlik boyunca gruplarda gözlenen *sürükleme, ölçme, ekleme* ve *diğer* kapsamındaki tür veya bileşene ait dağılımlara Şekil 81’de yer verilmiştir. Buna göre bağlantı kurma aşamasında *sürükleme, ölçme* ve *eklemeye* ait işlevlerin tamamı görülmüş ve bağlantı kurma aşamasında DGO’nun olanakları mümkün olduğu kadar çok sayıda işe koşulmuştur. Altı grubun tümünde amaçlı ölçüm, doğrulama ölçümü, algısal ölçüm ve tahmin etme kapsamında ekleme tespit edilmiştir. Buna göre bağlantı kurma aşamasında en yoğun gözlenen tür amaçlı ölçümdür. Amaçlı ölçüm altı gruptan dördünde iki etkinlik boyunca görülmüşken diğer iki grupta birer etkinlikte gözlenmiştir. Bağlantı kurma aşamasında amaçlı ölçümü doğrulama ölçümü ve algısal ölçüm takip etmiştir. Grupların tümünde ortak görülen bir diğer unsur ise tahmin etme kapsamındaki eklemedir. Tüm gruplarda tespit edilen ve bağlantı kurma aşamasında en fazla beliren ölçme türlerini ve eklemeyi altı gruptan beşinde görülen amaçlı sürükleme takip etmiştir. Bu sürüklemeyi yine altı gruptan dördünde gözlenerek, rastgele sürükleme takip etmiştir. Buna göre bağlantı kurma aşaması, araştırma ve keşif yoluyla bir sonuç elde etme veya varsayım oluşturmayı teşvik eden türler vasıtasıyla dinamize edilmiştir. Son olarak bağlantı kurma aşamasında en az görülen tür rastgele ölçüm olmuştur.



Şekil 81. Gruplarda bağlantı kurma aşamasına ait dinamik ortam işlevlerinin görülme durumları

Not: Çubuklar üzerindeki sayılar, işlevin kaç etkinlikte ortaya çıktığını göstermektedir. Örneğin, G1'de amaçlı ölçüm 2, doğrulama ölçümü 2, algısal ölçüm 1, ekleme (tahmin etme) 2 ve diğer ise 1 etkinlikte görülmüştür.

Oluşturma aşaması: Bu aşama en genel ifadesiyle bağlantı kurma aşamasında ortaya atılan problem fikrinin nihayete erdiği ve problemin yazıya geçirildiği süreci kapsamaktadır. Bu kapsamda grupların problem kurma süreçlerinin oluşturma aşamasında DGO'nun ölçme, sürüklenme ve ekleme bileşenlerine yönelik bulgular elde edilmiş ve sırasıyla aşağıda sunulmuştur.

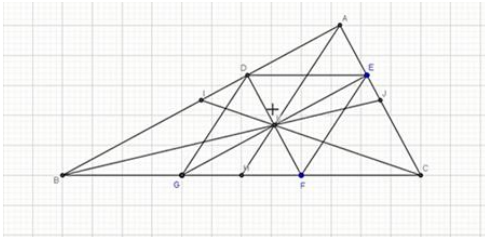
Oluşturma aşamasında ölçme türlerinden yalnızca doğrulama ölçümüne denk gelinmiştir. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde G1, problemi yazarken problemin matematiksel geçerliğini ve potansiyel çözücüye uygunluğunu değerlendirmiş ve ölçme yapma gereği duymuştur (Şekil 82, satır 1-3). Buna göre şeklin muhteşem üçlü özelliğini içerdiği ifade edilmiş ve $\angle A = 90^\circ$ olduğu öne sürülerek, doğrulama ölçümü yapılmıştır (Şekil 82, satır 4-7). Bunun sonrasında $\triangle GKF$ 'de $\angle K = 90^\circ$ olarak belirlenip, belirlenemeyeceği tartışılmıştır (Şekil 82, satır 8-10). Buna göre problem yazıya geçirilirken problemin matematiksel geçerliğini sorgulamak için statik ortamdan dinamik ortama geçiş yapılarak, doğrulama ölçümüne başvurulmaktadır.

[...]

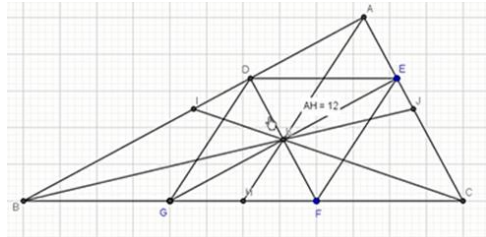
[1] G1T2: Şu üçgenden ($\triangle GKF$) nasıl keşfedecek ki hemen? ($\triangle ABC$ 'de ve $DEFG$ dörtgeninde köşegenlerin kesim noktası K 'dır.) [a (1)]

[2] G1T1: Şunu da her şeyini bilse muhteşem (üçlü) ...

[3] G1T2: Şu (KF) şuna (CE) paralel. Şurası da AH 'yi de ölçebilir misin? [a (2)]



(1)



(2)

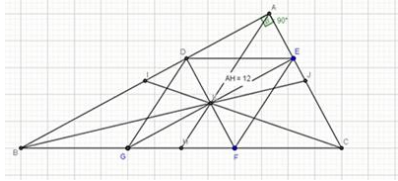
[a]

[4] G1T1: a'ya 2a çıktı. ($|AH|=12$ sonucundan hareketle kenarortayın 1:2 oranda doğru parçasını bölmesine işaret edilmektedir.)

[5] G1T2: BAC 90° çıkmadı mı?

[6] G1T1: Ölçelim mi? ($\angle A = 90^\circ$ olduğu öne sürülmekte ve doğrulamak için ölçüm yapılmaktadır.)

[7] G1T2: 90° muhteşem üçlü. [b (1)]



(1)

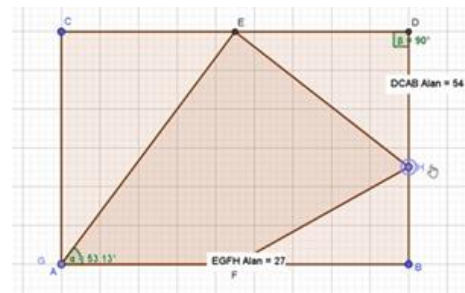
Şekil 82. Oluşturma aşaması doğrulama ölçümü örneği

The diagram illustrates the construction of a perspective view of a triangle ABC from a plan view. The plan view shows points B, C, D, E, F, G, H, I, J on a horizontal line. The elevation view shows points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Key angles are labeled as 90° at vertices A and D. A dimension $AH = 12$ is indicated.

(2)

[b]

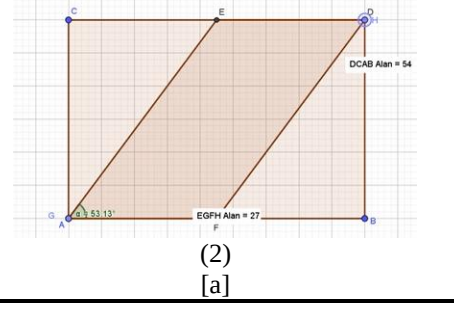
Ölçü



[a]

- [9] G5T10: Yani paralelkenar diye biliyoruz.
 [10] G5T10: Alanına oranı da sorabiliriz.
 [11] G5T10: Hangisinin? Tamamının mı?
 [12] G5T9: Tamamının dıştaki mi içteki mi?

[...]

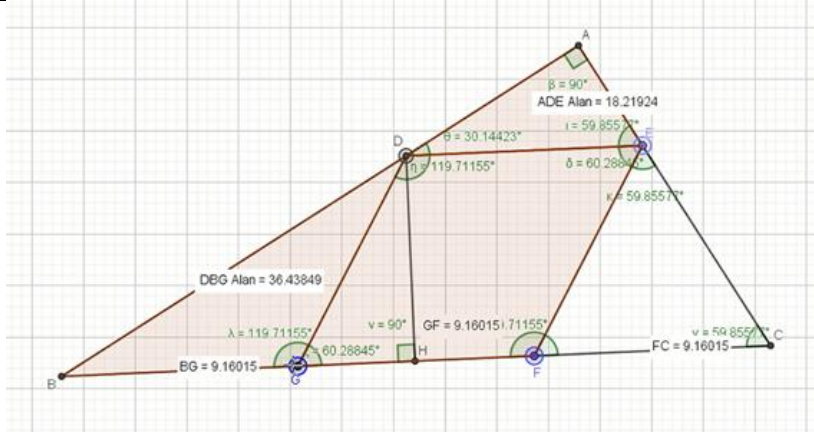


Şekil 83 (Devam). Oluşturma aşaması rastgele sürükleme örneği

Oluşturma aşamasında tespit edilen diğer sürükleme türü ise sürükleme testi olup, odağında grup üyelerinden birinin problemi yazıya geçirmesi ve diğerinin şekli sürüklemeye devam etmesi yer almaktadır. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde G2, DBG üçgeni ile DEFG dörtgeninin alanları oranının her zaman 1:2 olduğunu sürükleme testi aracılığıyla belirlemiş ve matematiksel geçerliğinden emin olduğu ilişkiyi probleme dönüştürmeye çalışmıştır (Şekil 84, satır 1-10). Bu aşamada sürükleme testi ile eş zamanlı olarak problemin ilginç olması veya problem cümlesinin ne şekilde sunulması gerektiği yönünde problemin tasarımı hakkında tartışıldığı da fark edilmiştir (Şekil 84, satır 6-7). Oluşturma aşamasında problem cümlesine dinamik yönergeler ilave etmek gözlenen bir durum iken, G2 problem cümlesinde sürüklenabilir noktanın yer alıp almamasına işaret etmiş ve problemde GeoGebra kullanımının varlığını söz konusu etmiştir (Şekil 84, satır 11). Bu yönüyle sürükleme testi, oluşturma aşamasında problemin matematiksel geçerliğini kontrol etmenin yanında problem cümlesini şekillendirmeye de aracı olmaktadır. Benzer şekilde G2 paralelkenar etkinliğinde de alan korunumuna işaret eden bir diyalog sürdürmüş ve problem cümlesini yazıya geçirirken, eş zamanlı olarak sürükleme testinden yararlanmıştır (Şekil 84, satır 12-16). Böylece problemin potansiyel muhatabına işaret ederek, tartışmada “Aynen değişmediğini. Buradaki alanların toplamının eşit olduğunu görmesini isteyelim.” ifadesi yer almıştır.

- [1] G2T4: Tamam bununla ilgili nasıl bir problem kuracağız?
 [2] G2T3: Aynı yüksekliğe ait taban uzunlukları eşit olan çokgenlerin alanları ...
 [3] G2T4: Bir kenar uzunluğu eşit ve aynı yüksekliğe sahipler. Buranın (DEFG dörtgeni) alanını da hemen hesaplayalım. Belki alandan bir soru yazarız.
 [4] G2T3: Yine önce bir çokgen oluştursak. (DEFG dörtgeninin alanını ölçmek için köşe noktaları işaretlenmektedir.) [a]
 [5] G2T4: Evet. Doğru!

Şekil 84. Oluşturma aşaması sürükleme testi örneği



[a]

[6] G2T4: İki katı ... (DBG üçgeni ile DEFG dörtgeninin alanları oranına işaret etmektedir.) İlginç bir problem olması da lazım. [b]

[7] G2T3: Taban uzunlukları eşit olup, aynı yüksekliğe sahip olan geometrik cisimlerin alanları şekle ait hangi parçayla orantılı olarak değişiyor? Tamamının yarısı olmasının sebebi ...?

[8] G2T4 Bakalım, şuradan bir hareket ettirelim. (G noktasından sürüklemeyi kastetmektedir.) [b]

[9] G2T4: Kenar uzunluğuna bağlı olarak mı hareket ediyor diyebiliriz?

[10] G2T3: Alan her türlü iki katı oluyor zaten.

[11] G2T4: Şimdi biz bu problemde GeoGebra kullanırmayacağız değil mi?

[...]

[...]

[12] G2T4: Şöyle yazalım. Birbirine paralel olarak verilen kenarlardan, kenarların orta noktaları işaretlediğimizde ve diğer paralel olan kenarlardaki herhangi bir noktaların birleşimi ile oluşan iç taraftaki dörtgenin alanı sonradan oluşturulan noktaların kenar üzerinde sürüklenmesiyle nasıl bir değişiklik gösterir? İç taraftaki alana göre nasıl bir farklılaşma olur?

[c]

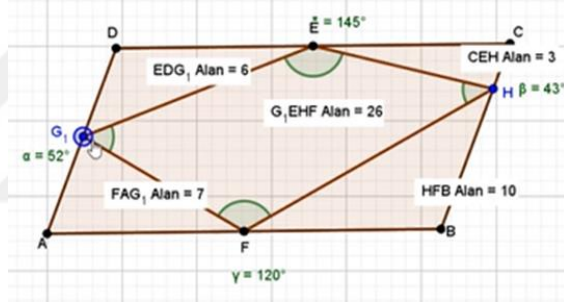
[13] G2T3: İç taraftaki alana göre mi? Yani şu 26'nın alanına göre mi? [c]

[14] G2T4: Aynen değişmediğini. Buradaki alanların toplamının eşit olduğunu görmesini isteyelim.

[15] G2T3: O zaman bu kenarlarla alanın ilişkisini incelemesini istiyoruz. Doğru mu?

[16] G2T4: Evet

[...]



[c]

Şekil 84 (Devam). Oluşturma aşaması sürüklenme testi örneği

Oluşturma aşamasında iki etkinlik boyunca gruplarda gözlenen bir diğer husus ise mevcut şekle yapılan eklemeler olmuştur. Bu noktada gruplar problem kurma durumunda veri miktarını genişleterek, tahmin etme kapsamında eklemeler yapabildiği gibi bilinen prosedürleri uygulamaya dönük olarak hatırlama kapsamında da eklemeler yapabilmektedir. Söz gelimi paralelkenar etkinliğinde G5, etkinliğin içeriğini DGO'nun sürüklenme olanağı ile genişletmiş ve alan problemi kurmaya karar vermiştir (Şekil 85, satır 1-9). Bu durum öğrenilmiş prosedürleri uygulama bakımından hatırlama kapsamında yapılan eklemeler olarak değerlendirilmiştir. Bunun ardından $\triangle EGH$ 'a ait $|GH|$ 'ı E köşesinden eklenen doğru parçaları yardımıyla üç eş

parçaya ayırmayı hedeflemiş ancak ayıramayacağına kanaat getirince ABDC dinamik dörtgenine ait AB kenarını dört eş parçaya bölmüştür (Şekil 85, satır 10-14). Bu noktada statik ve dinamik ortam arasında karmaşa yaşandığı ve durumun kurulacak probleme yansıdığı görülmüştür. G5 önce problemi sayısal ve görsel açıdan tasarlamış ardından yazıya geçirmiştir (Şekil 85, satır 19-27). Dolayısıyla ekleme ile eş zamanlı gerçekleştirilen sürüklenme eylemi problem tasarım sürecini etkilemiştir.

[...]

[1] G5T9: Soru yazalım bir tane. Alanla ilgili yazalım.

[2] G5T10: Tamam.

[3] G5T9: Orta noktaları verilen ...

[4] G5T10: Önce bunu paralelkenar mı yapalım diyorsun? (ABDC dörtgenine işaret etmektedir.) [a (1)]

[5] G5T9: Hayır şu dışarıdaki paralelkenar ya en dıştaki normalde vermiş.

[6] G5T10: Yani paralelkenar diye biliyoruz.

[7] G5T9: Alanına oranı da sorabiliriz.

[8] G5T10: Hangisinin? Tamamının mı?

[9] G5T9: Tamamının dıştaki mı içteki mi?

[10] G5T10: Ya da şunu ($\triangle EGH$ 'a ait $|GH|$ 'ı E köşesinden eklenen üç doğru parçası yardımıyla üç eş parçaya ayırmaktan bahsetmektedir.) da üçe bölüp, şöyle [a (2)]

[11] G5T9: Nasıl yani?

[12] G5T10: Şöyle bak şuradan (E köşesinden) doğru parçaları oluşturacağız. Üçe böleceğiz. Üçe bölemeyiz de kolay bir şekilde dörde bölebiliriz.

[13] G5T9: Üçe bölünür o 54. (DCAB dörtgeninin alanına göre düşünüp, üç ile tam bölünen bir sayı olduğuna işaret etmektedir.)

[14] G5T10: Yok şey diyorum şu uzunluğu ($|AB|$) üçe bölüp, üç nokta oluşturduk mesela. Sonra şuradan bak şöyle göstereyim. Üçe değil de dörde böleyim. Dik doğru. (Dinamik ortamda çalışırken, statik ortama geçilmektedir.) [b]

[15] G5T9: Anlamadım ki ne yapmaya çalıştığını

[16] G5T10: Alandan soru bulacağız ya şuradan bir tane (Doğru parçası eklemeyi kastetmektedir.)

[17] G5T9: Ama biz şekli çevirdik dikdörtgene getirdik.

[18] G5T10: Ne oldu ya? Dik doğru ve noktayı seç.

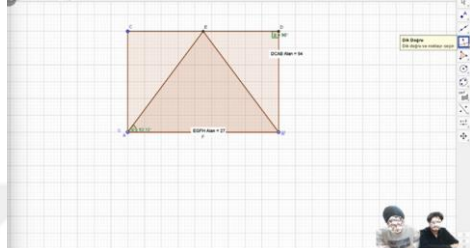
[19] G5T9: Bence direkt diyelim verilen şekli, şu dıştaki paralelkenarın içteki dörtgene oranı nedir? Oranı ikidir diyelim. Niye ikidir?

[20] G5T10: Tamam olur. Araştırma problemi gibi.

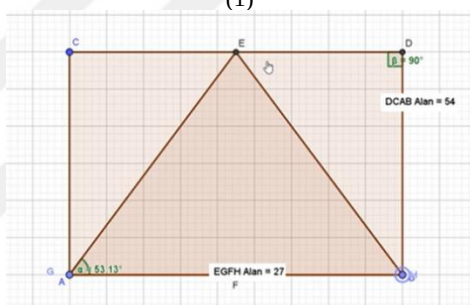
[21] G5T9: Evet. Çünkü dıştaki paralelkenarı sürükleyince dikdörtgen oluyor.

[22] G5T10: Aynen.

[23] G5T9: Yazayım mı? [b]



(1)



(2)

[a]

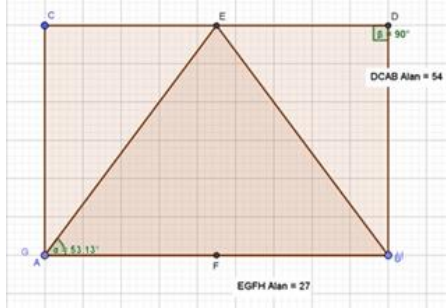


[b]

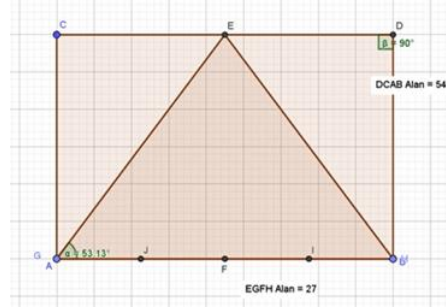
Şekil 85. Oluşturma aşamasına ait yardımcı unsur ekleme örneği 1

[23] G5T9: Yazayım mı? [b]

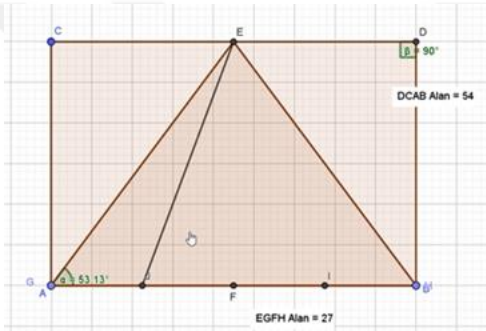
[24] G5T10: (Kendi problem fikrine grup arkadaşını ikna etmeye çalışırken, ilk keşfedilen EGFH ve DCAB dörtgenlerinin alanlarının 1:2 oranda olması probleme dönüştürülür. Bu esnada grup üyelerinden biri problemi yazarken, diğeri problem fikrini dinamik ortamda somutlaştırmaya devam etmektedir.) [c (1, 2, 3)]



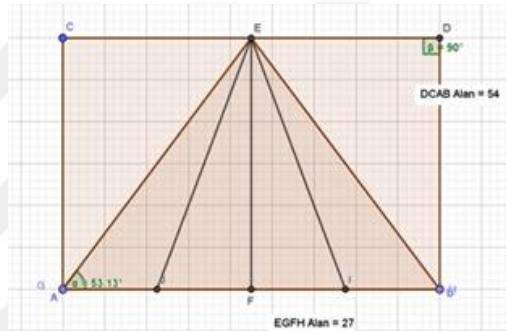
(1)



(2)



(3)



(4)

[c]

[24] G5T10: Bak şimdi şu kenarlar ($|AJ|$, $|JF|$, $|FI|$ ve $|IH|$) eşit. Şunun ($\triangle EIH$) alanını isteyebiliriz. [c (4)]

[25] G5T9: Nerenin?

[26] G5T10: Herhangi birinin şu dört taneden ($\triangle EAJ$, $\triangle EJF$, $\triangle EFI$ ve $\triangle EIH$) herhangi birinin alanı. [c (4)]

[27] G5T9: Şekil üzerinden mi çıkacağız?

[28] G5T10: Evet. Şekli çizmemiz gerekiyor.

[29] G5T9: Basit bir şey çizerim.

[30] G5T10: Onu çizelim. Bunu da yazalım.

[31] G5T9: 4 tane mi? Bence üçe bölelim. 27 ya daha kolay bölünür.

[32] G5T10: Ama üçe burada bölüp, gösteremedim.

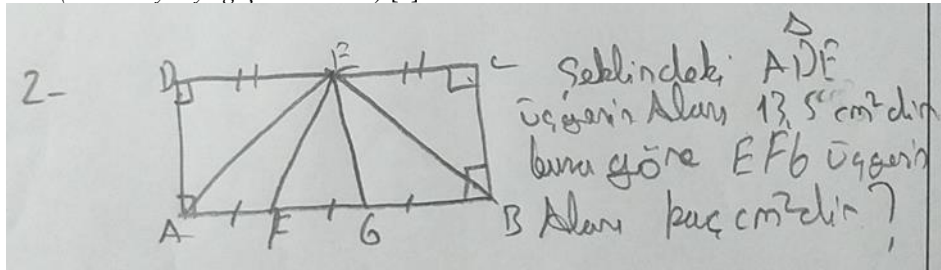
[33] G5T9: Biz burada (statik) şöyle üç parçaya ayırsak.

[34] G5T10: Tamam.

[35] G5T9: Şimdi harfleri söylesene bana.

[36] G5T10: Rastgele orada farklı yazıyor şu an.

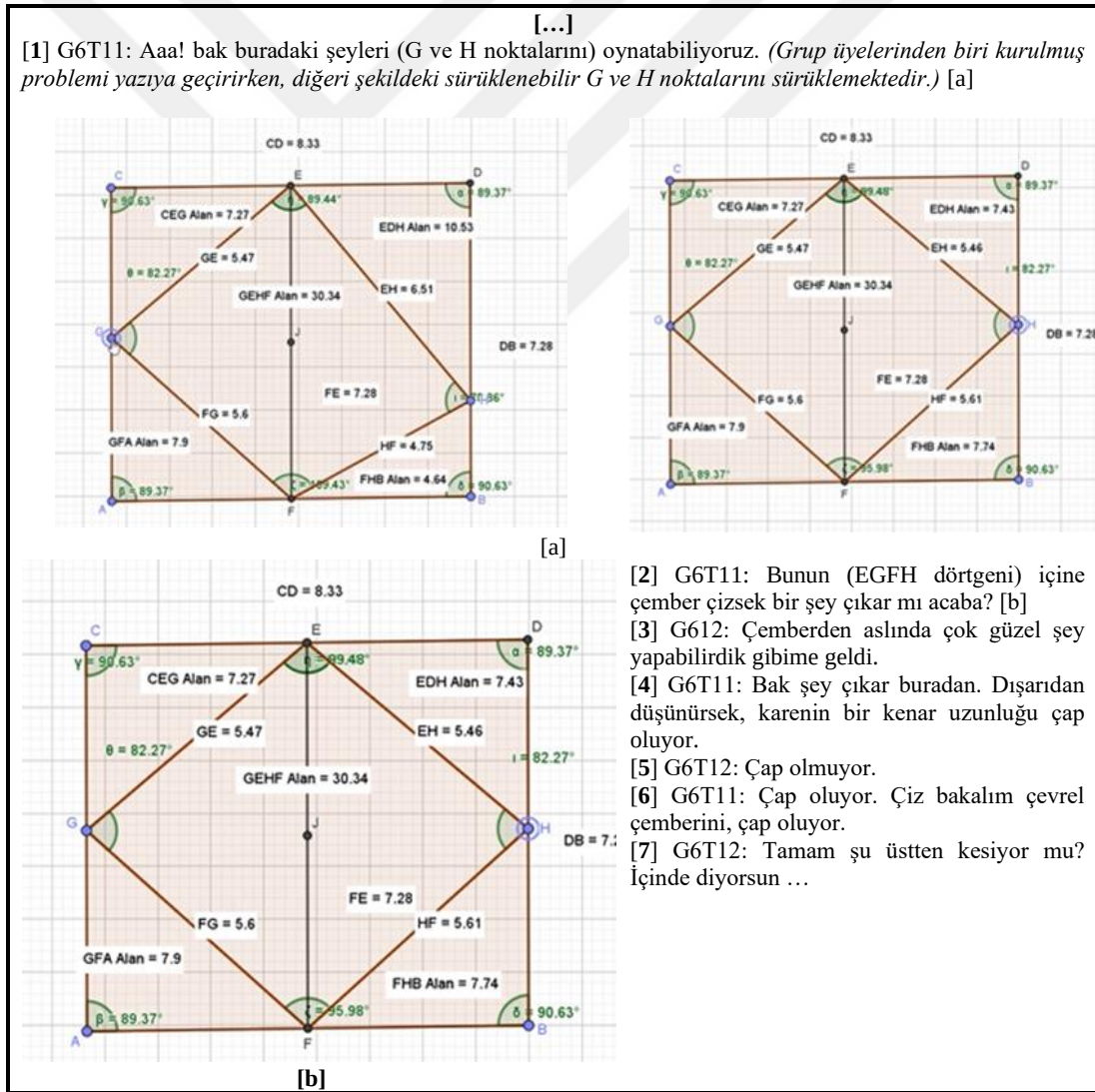
[37] G5T9: (Problem yazıya geçirilmektedir.) [d]



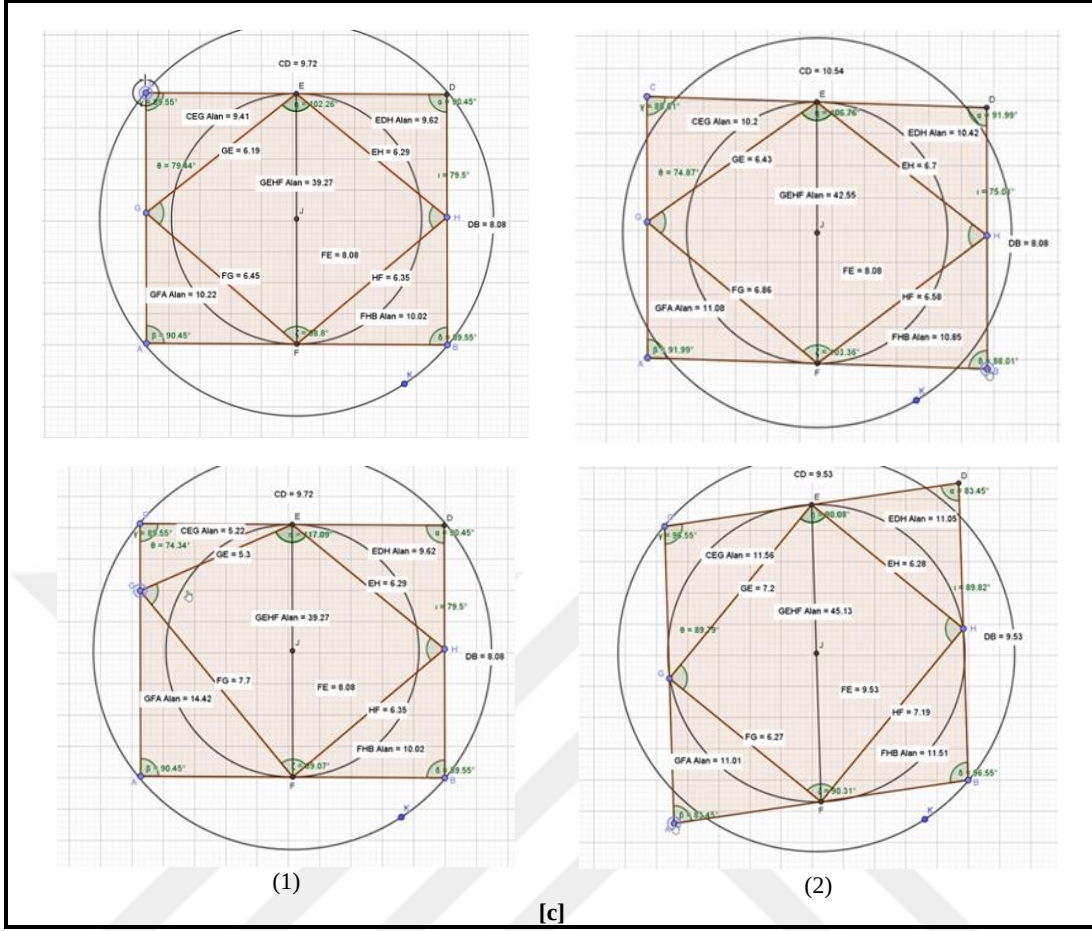
[d]

Şekil 85 (Devam). Oluşturma aşamasına ait yardımcı unsur ekleme örneği 1

Öte yandan G6 paralelkenar etkinliğinde, problemi yazıya geçirirken dinamik yapıda incelemelerine devam etmiş ve oluşturma aşaması ile bağlantı kurma aşamasının birlikteliğine işaret eden bir diyalog kurmuştur. Buna göre grup üyelerinden biri “Bunun (EGFH dörtgeni) içine çember çizsek bir şey çıkar mı acaba?” ifadesine yer vermiş ve grup, yardımcı unsurun nasıl kullanılacağına dair spesifik bir fikir belirtmeden tahmin etme kapsamında ekleme yapmıştır (Şekil 86, satır 2-7). Tahmin etme kapsamında yapılan ekleme probleme dönüştürülmemiş bunun yerine grubun bir üyesi kendi düşündüğü problemi yazıya geçirmiş ve diğer üyesi ise çember ilavesine yönelik tasarım için dinamik ortamda sürükleme yaparak, incelemelerine devam etmiştir (Şekil 86, satır 8-9).

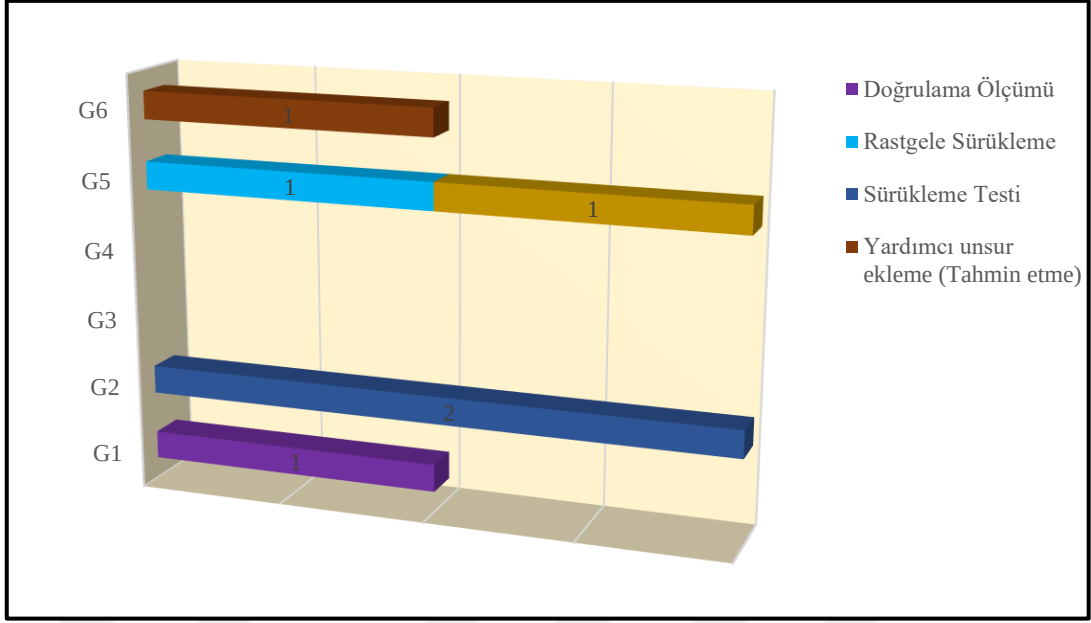


Şekil 86. Oluşturma aşaması yardımcı unsur ekleme örneği 2



Şekil 86 (Devam). Oluşturma aşaması yardımcı unsur ekleme örneği 2

Oluşturma aşamasında iki etkinlik boyunca grupta gözlenen *ölçme*, *sürükleme* ve *ekleme* türlerine ait dağılımlara Şekil 87’de yer verilmiştir. Buna göre oluşturma aşamasında en fazla gözlenen sürükleme eylemi olup, farklı türlerde ve sadece iki grupta görülmüştür. G2 iki etkinlikte de sürükleme testine yer vermiş ve G5 yalnızca bir etkinlikte rastgele sürüklemeyi kullanmıştır. Oluşturma aşamasında ölçme türlerinden doğrulama ölçümü altı gruptan yalnızca G1’de ve bir etkinlikte tespit edilmiştir. Oluşturma aşamasında gözlenen ekleme ise altı gruptan yalnızca ikisinde birer etkinlikte gözlenmiştir. Oluşturma aşamasında altı gruptan ikisi DGO’da hiçbir faaliyette bulunmamıştır. Bu anlamda oluşturma aşaması DGO’nun olanaklarının görece daha az ortaya çıktığı aşama olarak değerlendirilmiştir.

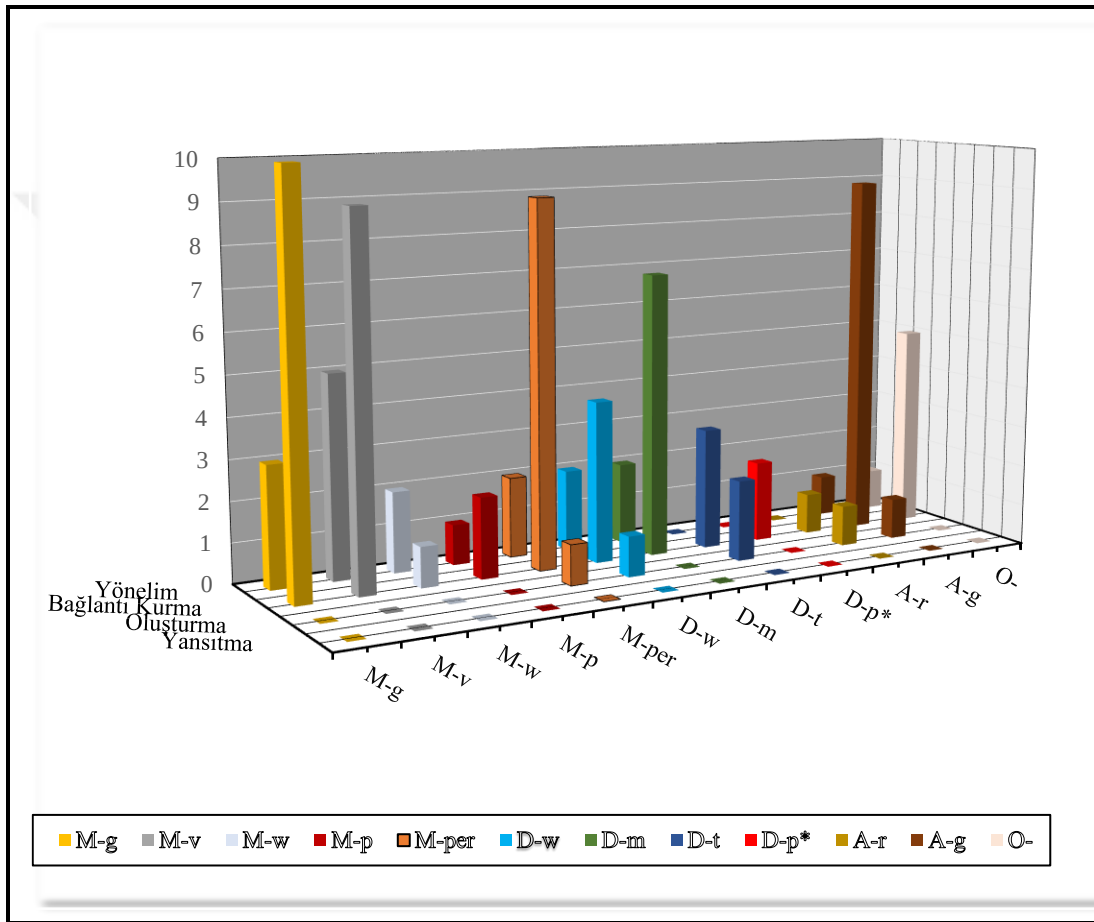


Şekil 47. Gruplarda oluşturma aşamasına ait dinamik ortam işlevlerinin görülme durumları

Not. Çubuklar üzerinde yer alan sayılar, işlevin kaç etkinlikte ortaya çıktığını göstermektedir. Örneğin G1’de doğrulama ölçümü 1 etkinlikte görülmüştür.

Grupların iki etkinlik boyunca problem kurma süreçlerinin aşamalarında tespit edilen ölçme, sürükleme, ekleme ve diğer bileşen ve türlerine yönelik dağılımlara Şekil 88’de yer verilmiştir. Buna göre bağlantı kurma aşaması DGO’nun olanaklarının en yoğun gözlemlendiği aşama olup; ölçme, sürükleme ve ekleme türleri ile diğer bileşenler kapsamındaki tüm işlevler bu aşamada görülmüştür. Altı grubun ikişer etkinlikten toplamda 12 problem kurma sürecinin 10’unda amaçlı ölçme (*M-g*) görülmüş ve böylece problem kurma sürecinde en çok görülen tür olmuştur. Benzer şekilde bağlantı kurma aşamasında ve amaçlı ölçmenin ardından en sık görülen türler 12 süreçten 9’unda gözlenen doğrulama ölçümü, algısal ölçüm ve tahmin etme kapsamındaki ekleme olmuştur. Bağlantı kurma aşamasında ve problem kurma süreçlerinde yoğun gözlenen diğer tür ise amaçlı sürükleme olmuş ve 12 süreçten 7’sinde gözlenmiştir. Bağlantı kurma aşamasında 12 süreçten 1’inde görülen ve böylece en seyrek türler ise rastgele ölçüm ve hatırlama kapsamındaki ekleme olmuştur. DGO’nun olanaklarının bağlantı kurma aşamasının ardından en yoğun gözlemlendiği aşama ise yönelim olmuştur. Buna göre yönelim aşamasında ve 12 süreçten 5’inde gözlenerek, en fazla görülen doğrulama ölçümü olmuştur. Yönelim aşamasında 12 süreçten 3’ünde görülen amaçlı ölçme, en yoğun gözlenen doğrulama ölçümünü takip

etmiştir. Oluşturma aşaması diğer aşamalara kıyasla DGO'nun olanaklarının daha az belirlediği aşama olmuştur. Buna göre oluşturma aşamasında 12 süreçten 2'sinde gözlenen sürüklenme testini; 12 süreçten yalnızca 1'inde algısal ölçüm, rastgele sürüklenme, hatırlama kapsamındaki ekleme ve tahmin etme kapsamındaki ekleme takip etmiştir. Son olarak grupların problem kurma süreçlerinin yansıtma aşaması kapsamında DGO'nun kullanımına denk gelinmemiştir.



Şekil 88. Dinamik geometri ortamı işlevlerinin problem kurma sürecinin aşamalarında görülme durumları

Not. Amaçlı ölçüm (M-g), Doğrulama ölçümü (M-v), Rastgele ölçüm (M-w), Algısal ölçüm (M-per), Rastgele sürüklenme (D-w), Amaçlı sürüklenme (D-m), Sürüklenme testi (D-t), Algısal sürüklenme (D-p*), Ekleme (hatırlama) (A-r), Ekleme (tahmin etme) (A-g) ve Diğer (O-) ile temsil edilmiştir.

4. TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Matematiksel yetkinlik, matematiksel düşünmeyi geliştirme ve uygulama yeteneğidir (Schoenfeld & Kilpatrick, 2013). Problem kurma ise kişinin matematiksel düşünmesini geliştirme ve derinleştirme ile yakından ilişkilidir (Silver, 1994) ve öğretim dokümanlarında da problem kurma etkinliklerinin matematik sınıflarında yer almasının gerekliliği vurgulanmaktadır (NCTM, 2000; National Research Council [NRC], 2000). Teknolojinin bir kolu olarak DGO (GeoGebra) işlevleri ve etkileşimli yapısıyla geometrik kavram, şekil ve cisimlerin özelliklerini keşfetme, inceleme ve araştırma fırsatı sunmaktadır (Dockendorff, 2017; Sarıyasa, 2017). Benzer şekilde DGO, matematiksel durumun ilişkilerini ve sınırlarını keşfetmede özerklik sağlamaktadır. da Ponte ve Henriques (2013) matematiksel araştırmaların problem kurmayı teşvik edeceğini savundukları çalışmada, matematiksel araştırmaların kavramların anlaşılmasını ve pekiştirilmesini desteklemenin yanında matematiksel düşünmeyi de geliştirmeye önemli ölçüde katkı sağlayacağını bildirmiştir. Bu sebeple öğretim ortamları problem kurma gibi araştırma ve keşfetmeye uygun etkinlikler ile donatılmalı ve teknoloji bu sürecin bir unsuru olarak, matematik eğitime entegre edilmelidir (NCTM, 2015).

Teknolojik ortamda ortaya çıkan keşifler, birden fazla varsayım veya problemin oluşturulmasına destek sunabilecektir. Ancak rastgele bir keşif veya varsayım süreci tıpkı simyacıların sonuçsuz kalan felsefe taşı arayışına benzer (Polya, 1957). Buna karşın rastlantısal olmayan keşif ve varsayım sürecinde, kişi bilgisini sistematik olarak genişletmenin yollarını aramakta, varsayımları değerlendirmekte ve bir karar vermektedir (Schoenfeld, 2020). Dolayısıyla DGO’da varsayımlar aracılığıyla ortaya konulan problemler, matematiksel bir anlam ifade ettiğinde ve özellikle bilinçli bir yansıma sürecinin (üst-bilişsel düşünme) sonucu olduğunda önemli sayılabilecektir (Ramírez vd., 2022). Bu anlamda DGO, problem kurma sürecini araştırma ve keşif yapmaya fırsat sunan doğası ile beslemektedir. Dolayısıyla problem kurma süreçlerinin incelenmesinin gerekliliğine yapılan vurgunun (Cai vd., 2022) yanında DGO’da problem kurma süreçlerinin detaylı analizleri de matematiksel problem kurmanın öğretim ortamlarına entegrasyonu için güçlü veriler sunma potansiyeli taşımaktadır. Problem kurma süreçlerindeki

aksamaların nedenleri irdelenebilecek ve hem uygulayıcılara hem de araştırmacılara yeni perspektifler sunulabilecektir. Bu kapsamda bu tez araştırmasında matematik öğretmeni adaylarının DGO’da problem kurma süreçlerinin genel problem kurma süreç modelinin bileşenleri referans alınarak, tasvir edilmesi hedeflenmiş ve süreçteki karakteristik davranışları analiz edilmiştir. Bunun yanında problem kurma süreçlerinde DGO’nun işlevlerinden nasıl yararlandıkları belirlenmiştir. Böylece DGO’da problem kurma sürecinin genel bir fotoğrafı sunulmuş ve problem kurma süreçlerine yönelik literatüre yeni ve geliştirilmeye açık bir araştırma yönü tayin edilmesi hedeflenmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının DGO’da problem kurma süreçlerinden elde edilen anlayışların teknoloji destekli problem kurma süreçlerinin matematik eğitime entegre edilmesine yönelik önerilere yer verilmiştir.

Bu bölümde bulgulara ait tartışma, araştırma problemlerinin sırasına paralel şekilde sunulmuştur. Buna göre katılımcı grupların öncelikle dinamik geometri ortamında problem kurma süreçlerine yönelik bulgular sonrasında da dinamik geometri ortamının işlevlerine yönelik bulgular tartışılmıştır.

4.1. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Dinamik Geometri Ortamında Problem Kurma Süreçlerine Ait Bulgulara İlişkin Tartışma

Cai ve Rott’un (2024) modelindeki yönelim aşaması problem kurma etkinliğinin anlaşılmasına denk düşmektedir. Gruplardan elde edilen bulgulara göre katılımcı öğretmen adaylarının DGO’da problem kurma sürecinin henüz başında problem kurma durumunu analiz etmeye odaklandığı ve analizlerinden elde ettikleri verileri problem fikri olarak şekillendirmeyi amaçladıkları tespit edilmiştir. Bu bulgu Cai ve Rott’un (2024) modelindeki yönelim aşamasına ait davranışlardan bir kısmını desteklemektedir. Grupların yönelim aşamasındaki davranışları problem kurma durumunun incelenmesi kategorisi altında birleştirilmiştir. Bu kategori altında grupların mevcut verileri betimlediği ve mevcut verilerden çıkarsanabilecek ilişkileri belirlediği tespit edilmiştir. İki etkinlik üzerinden toplamda on iki problem kurma sürecinde yönelim aşamasına ilişkin kodlarda mevcut verilerden çıkarsanabilecek ilişkileri belirleme (11/12 süreç) davranışı mevcut verileri betimleme (9/12 süreç) davranışından daha yoğun gözlenmiştir. Buna göre eşkenar dörtgen etkinliğinde altı grupta ve paralekenar etkinliğinde ise altı gruptan beşinde mevcut verilerden

çıkarsanabilecek ilişkileri belirleme davranışı tespit edilmiş ve problem kurma sürecinin henüz başında yaygın davranış olarak kabul edilmiştir. DGO'da problem kurma sürecinde katılımcılar mevcut şekli incelemeye ve şekilden çıkarsanabilecek ilişkileri belirlemeye odaklanmıştır. Yönelim aşamasına ait kodların paralelkenar etkinliğinde eşkenar dörtgen etkinliğine göre daha az belirmesi, paralelkenar etkinliğinin eşkenar dörtgen etkinliğinden daha sonra uygulanmasına ve eşkenar dörtgen etkinliğinde paralelkenar etkinliğine kıyasla daha fazla veri sunulmuş olmasına bağlanabilmektedir. Bu durum etkinlikteki veri yoğunluğunun ve karmaşıklığının problem kurma sürecinde daha fazla odaklanmayı gerektirdiğine işaret edebilecektir. Crespo ve Sinclair (2008) matematik öğretmeni adaylarının problem durumunu keşfetmeye odaklandıklarında matematiksel açıdan daha iyi problemler ortaya koyduklarını bildirmiştir. Bu anlamda problem kurma etkinliklerinde sunulan veri miktarı problem kurma sürecinde yönelim aşamasına ait karakteristik davranışlara (ör., problem durumunu inceleme) yön verebilmekte ve problem kurma süreci nihayetinde ortaya konulan problemleri şekillendirebilmektedir.

Problem kurma süreçlerini betimleyen modellerde, yönelim aşamasında genellikle prototip problemlerin oluşturulduğu rapor edilmiştir (Koichu & Kontorovich, 2023; Pelczer & Gamboa, 2009). Nitekim Koichu ve Kontorovich (2013), yönelim aşamasına karşılık gelen ısınma aşamasında katılımcıların problem durumuna ilişkin yaygın fikirler ve alışlagelmiş problem türleri ortaya koyduklarını belirlemiştir. Buna karşın, DGO'da yürütülen bu tez çalışmasında grupların yönelim aşamasında prototip problem kurma eylemi sergilemediği fark edilmiştir. Bu farklılık, çalışmada sunulan verinin sınırlı oluşuna ve problem kurma durumunun tümüyle yapılandırılmamış olmasına bağlanabilmektedir. Baumanns ve Rott'un (2024) bulguları da verilen bilginin miktarı ile problem kurma performansı arasındaki ilişkiyi vurgulayarak bu yorumu desteklemektedir; araştırmacılar, veri miktarı azaldıkça öğretmen adaylarının problem kurmada daha düşük performans sergilediğini ifade etmiştir. Her ne kadar bu tez kapsamında grupların problem kurma performansları değerlendirilmemiş olsa da süreç içinde dikkat çeken bir olgu, katılımcıların kurdukları ilk problemi prototip olarak kabul edip onun üzerinden değişiklik yapmaya yönelmeleri olmuştur. Bu, problem kurma deneyimi sınırlı öğretmen adaylarını

desteklemek adına, önce problem biçimlendirme ile başlayıp giderek daha karmaşık problemlere geçmenin etkili olabileceğine işaret etmektedir.

Problem kurma modellerinde genellikle açık bir biçimde yer almayan ancak kuramsal olarak önemli olduğu belirtilen bir diğer unsur yönerge değişkenidir. Cai ve Rott (2024), geliştirdikleri genel problem kurma süreci modelinde yönelim aşamasında yönerge bileşenine dair sorgulamalara yer vermiş ve yönergenin önemini vurgulamıştır. Ancak mevcut araştırmada gruplar, yönelim aşamasında yönergeyi irdelememiştir. Deneysel modeller incelendiğinde ise yönelim aşamasında yönergeye dair doğrudan açıklamaların nadir olduğu, bunun yerine problem kurma etkinliğinin bütünsel olarak ele alındığı fark edilmektedir. Örneğin Pelczer ve Gamboa'nun (2009) modelinde yönelim aşamasına denk düşen kurulum aşamasında etkinliğin sınırları ve bağlamına değinilmekte ancak yönergeye spesifik bir vurgu yapılamamaktadır. Koichu ve Kontorovich (2013) ise "... kurabildiğiniz kadar çok ilginç matematiksel problem kurunuz." (s. 72) yönergesini kullanmıştır. Böylece, ısınma aşamasında ortaya çıkan prototip problemlerin ilginçlik kriterine göre değerlendirilip ikinci aşamada değişime uğraması olasıdır. Dolayısıyla yönerge değişkeni problem kurma sürecinde etkin bir rol üstlenebilmektedir. Sosa-Martín ve arkadaşlarının (2024) yönergenin matematiksel bilgiyi etkinleştirdiğine ilişkin bulguları da dikkate alındığında, katılımcıların sürecin başında yönergeyi göz ardı etmiş olmaları dikkat çekicidir. Bu durum katılımcıların problem kurma deneyimsizliğinin yanında yönerge ve problem kurma durumu ilişkisine dair bilgi eksikliğiyle açıklanabilecektir. Ayrıca tez kapsamında her ne kadar süreç sonunda üretilen problemlerin karmaşıklığı vb. değerlendirilmemiş olsa da katılımcıların ilginç ifadesini süreç boyunca meydan okuyucu veya açık-uçlu problem arayışı olarak yorumladıkları fark edilmiştir. Dolayısıyla yönerge, sürecin başında dikkate alınmasa da süreç boyunca etkili bir değişken olarak rol oynamıştır. Benzer olarak bulgularımız yalnızca sürecin başında etkili olduğu varsayılan yönergenin aslında süreç boyunca işlevsel olabileceğini ortaya koymakta ve problem kurma süreci modellerinde yeterince ele alınmamış bir noktaya ışık tutmaktadır. Bu bulgu, mevcut modellerde yeterince ele alınmayan bir noktayı aydınlatmakta ve problem kurma etkinliklerinin öğretime entegrasyonunda yönergenin başlangıçta vurgulanmasının ve ayrıca katılımcılar tarafından göz ardı edilme nedenlerinin ayrıntılandırılmasının gerekliliğine işaret etmektedir. Dolayısıyla,

öğretmen eğitiminde problem kurma süreçlerinin tasarımında yönerge unsuruna verilen önemin artırılması hem başlangıçta hem de sürecin ilerleyen aşamalarında katılımcıların bilişsel yönelimini destekleyecek şekilde ele alınabilecektir.

Problem kurma sürecinin ikinci aşaması olan bağlantı kurma en genel ifadesi ile problem fikirlerinin şekillendirildiği aşamayı temsil etmektedir (Cai & Rott, 2024). Katılımcı öğretmen adaylarının bağlantı kurma aşamasına ilişkin faaliyetleri yapısal (veri-odaklı), sezgisel (hipotez-odaklı) ve eğitsel (pedagoji-odaklı) şeklinde kategorize edilmiştir. Bu sınıflandırma hem adayların epistemolojik yönelimlerine hem de problem kurma sürecindeki üretkenlik biçimlerine ışık tutmaktadır. Erkan ve Kar (2022) da öğretmen adaylarının problemden hareketle problem biçimlendirme süreçlerinde bilişsel, üst-bilişsel ve öğretimsel faktörleri dikkate aldığını belirlemiştir. Benzer olarak bağlantı kurma aşamasına ilişkin bulgularımız, problem kurmanın yalnızca bilişsel değil aynı zamanda epistemolojik ve pedagojik bir etkinlik olduğuna işaret etmektedir. Nitekim bu aşamada gruplar süreçte kurmuş oldukları problemlerin üzerinde çeşitli faktörleri dikkate alarak, değişiklik yapmış ve yeni problemler kurabilmiştir.

Grupların bağlantı kurma aşamasında sezgisel bağlantılar kurmaya çalıştığı bunun ardından ise yapısal bağlantıların öne çıktığı tespit edilmiştir. Bağlantı kurma aşamasında gruplar eğitsel bağlantılara daha az yer vermiştir. Buna göre grupların iki etkinlik boyunca sezgisel bağlantılar kapsamında varsayımlar üreterek bağlantılar kurduğu (11/12 süreç) öne çıkmışken, bunu eğitsel bağlantılar kapsamındaki ve etkinliğin matematiksel yapısından bağımsız dikkate alınan öğretimsel bağlantıların (9/12 süreç) takip ettiği fark edilmiştir. Bu aşamada yapısal bağlantılar kapsamındaki mevcut verilerden çıkarsanabilecek ilişkileri belirlemenin (8/12 süreç) öne çıktığı da söylenebilecektir. Bu anlamda gruplar DGO’da problem kurma süreçlerinde daha çok sezgisel düşünmenin aktive ettiği bağlantılara öncelik vermiştir. Bu bulguyu DGO’nun varsayım üretmeyi destekleyen dinamik yapısı ile açıklamak mümkündür.

Bağlantı kurma aşamasında kurulan veri-odaklı yapısal bağlantılar, adayların şeklin içinde bulunan somut ilişkileri (örneğin açı, uzunluk, alan, simetri) kullanarak problem oluşturmalarına işaret etmektedir. Bu tür bağlantılar, sıklıkla geometrik şeklin ölçülebilir veya gözlemlenebilir özelliklerine dayanmakta ve çoğunlukla veri odaklı stratejiler ile biçimlenmektedir. Dolayısıyla yapısal bağlantılar katılımcı öğretmen

adaylarının geometrik şekle ilişkin kural tabanlı bilgilerinin açığa çıktığı bağlantıları kapsamaktadır. Örneğin gruplar eşkenar dörtgen etkinliğinde daha çok problem kurma etkinliğinde sunulan “ $|BG|=|GF|=|FC|$ ” bilgisinden yola çıkarak, $\triangle ADE$ ve $\triangle ABC$ ’nin benzer üçgenler olduğu fikri etrafında dönmüştür. Paralelkenar etkinliğinde ise Varignon teoremine değinmeden, yaygın şekilde içeride oluşan dörtgenin alanı ile ABCD paralelkenarının alanı arasındaki 1:2 oran ilişkisi etrafında problem fikri oluşturmaya çalışmıştır. Benzer şekilde veri-odaklı yapısal bağlantılar kapsamında mevcut şekle yardımcı elemanlar ekleyerek kurulan bağlantılarda da eşkenar dörtgen etkinliğinde çoğunlukla köşegen ilavesi yapıldığı ve eşkenar dörtgenin köşegenlerinin birbirini dik ortalaması bilgisinin sürece katılmak istendiği ve Pisagor teoremi yanında Muhteşem üçlü gibi ilişkilerin söz konusu edildiği dikkati çekmiştir. Paralelkenar etkinliğinde ise dörtgenler arasındaki hiyerarşik ilişkiye odaklanıldığı ve genel anlamda mevcut şeklin bileşenleri arasındaki alan ilişkilerine odaklanıldığı tespit edilmiştir. Bu tür bağlantılar, genellikle adayların önceki bilgi birikimiyle doğrudan ilişkilidir. Ancak bazı durumlarda, verilerin yüzeysel yorumlamaları hatalı matematiksel çıkarımlara da neden olabilmektedir. Örneğin, bazı adayların şekil üzerine iç teğet çemberi yerleştirme çabası, sezgisel bir üretkenliği yansıtsa da ilave edilmek istenen geometrik yapı ile verilen şekil arasında geçerli bir ilişki olmadığından yapısal açıdan doğruluk taşımamaktadır. Bu durum, öğretmen adaylarının matematiksel alan bilgisi ile üretkenlik arasındaki gerilimi nasıl yönettiklerine dair de göstergeler taşımaktadır. Çünkü yapısal bağlantılar problem kurma etkinliğinde sunulan problem kurma durumunun geometrik içeriğine odaklanması ve geometrik şeklin kritik niteliklerinin dikkate alınması ile karakterize edilmiştir. Kritik nitelikler ise kavram tanımından kaynaklanmakta ve kavramın yalnızca gerekli ve yeterli koşullarını içermektedir (Tsamir vd., 2008). Dolayısıyla bu yöndeki matematiksel açıdan hatalı ilişkilendirmeler öğretmen adaylarının alan bilgisi hakkında ayrıntılar taşımaktadır.

Grupların mevcut şeklin bileşenleri arasında veya mevcut şekle yardımcı unsurlar ekleyerek, geometrik şeklin yapısı ile ilişkili bağlantılar kurduğu da tespit edilmiştir. Bu eylemler problemden hareketle problem kurma olarak kabul edilebilecek ve benzer bağlamı olan problemler kurma şeklinde değerlendirilebilecektir. Örneğin gruplarda iki etkinlik boyunca yapısal bağlantılar

kapsamında gözlenen yaygın bir durum; etkinlikteki geometrik içerikten yola çıkarak, şeklin farklı noktalarına odaklanma ve birbirinin benzeri problem fikirleri (örn., alan veya uzunluk ilişkisi) oluşturmak olmuştur. Benzer faaliyetlerin Christou vd.'nin (2004) üç ilkökul matematik öğretmeni adayının DGO'da ispat problemine yanıt arama sürecini incelediği çalışmasında da yer aldığı fark edilmiştir. Araştırmacılar veri analiz sürecini üç aşamada ele almış ve bunlardan birini ispatı benzer problemlere genişletmenin entelektüel zorluk aşaması olarak kabul etmiştir. Bu aşamada katılımcıların, orijinal problem ile benzer bağlamı olan problemler ve aynı akıl yürütmeyi gerektiren problemler kurduğu tespit edilmiştir.

Grupların veri-odaklı yapısal bağlantılarında etkinlik problem kurma durumunun barındırdığı özellik, ilişki veya teoremleri bir şekilde keşfederek, problem fikri olarak kabul ettiği tespit edilmiştir. Bu noktada belirlenen ilişkiler dinamik ortam olmaksızın da ortaya konulabilecek türden olup, fikirlerin daha çok problem kurma etkinliği kapsamındaki matematiksel birikimin işe koşulması ile açığa çıktığı belirtilebilecektir. Benzer şekilde grupların DGO deneyimlerinin ve geometrik kavramlara ilişkin bilgi düzeylerinin görece sınırlı olduğu da dikkat çeken bir diğer bulgudur. Çünkü örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde G5, problem kurma durumunda yer alan iki benzer üçgenin ($\triangle ADE$ ve $\triangle ABC$) varlığını kabul etmiş ve aralarındaki benzerlik oranının çevre uzunlukları arasındaki oran ile aynı olduğu bilgisini kullanmaya karar vermiştir. Bu noktada ölçümlere ilişkin DGO'nun Öklid düzlemini simüle etmesinden kaynaklanan çatışmanın belirttiği fark edilmiş ve bu durumda G5, DGO'nun geri bildirimleri yerine kendi veri-odaklı çıkarımlarına ve matematiksel bilgisine güvenmeyi tercih etmiştir. Dolayısıyla bağlantı kurma aşamasındaki veri-odaklı yapısal bağlantıların daha çok mevcut geometrik şeklin içerdiği ilişki ya da özellikler gibi somut matematiksel verilere dayandığını ortaya koymaktadır. Bunun yanında gruplar, bağlantı kurma aşaması kapsamındaki yapısal bağlantıları kurmaya çalışırken bildikleri teorem, formül vb. ilişkiyi sürece katmaya çalıştığı ancak kimi zaman bu girişimin başarısızlıkla sonuçlandığı tespit edilmiştir. Buna göre adayların, yapısal bağlantılar kapsamında geometrik şeklin kritik niteliklerine yönelik bilgi dağarcığının problem kurma sürecinde önem arz ettiği ve kurulabilecek ilişkilerin potansiyel zenginliğini açığa çıkarmada engel oluşturabileceği söylenebilecektir. Nitekim problem kurma sürecinde matematiksel alan bilgisinin önemli bir etmen

olduğu bilinmektedir (Lee vd., 2018; Ma, 2020; Van Harpen & Presmeg, 2013). Bunun yanı sıra diğer başlıkta tartışılacağı üzere grupların kimi zaman yazılımı kullanma becerisindeki eksikliğe işaret eden ifadeler kullandığı ve böylece sürece katmak istedikleri ilişkileri gerçekleştiremedikleri de önemli bir bulgu olarak belirtilebilecektir. Bu bulguların yanında katılımcı grupların bağlantı kurma aşaması kapsamında belirlediği yapısal ilişkileri direkt olarak probleme dönüştürmeye çalıştığı da dikkat çekicidir. Bu anlamda bağlantı kurma aşamasında problem fikrini belirlemek problemin matematiksel yapısının örtük şekilde değerlendirildiğine ve katılımcıların ifadelerine yansımaya da problem kurma sürecindeki üst-bilişsel düşünmeye işaret etmektedir (Baumanns & Rott, 2022a; Pelczer & Gamboa, 2009; Ramírez vd., 2022).

DGO'nun bağlantı kurma aşamasını yansıtan diğer bir kategori de sezgisel bağlantılar olmuştur. Sezgisel bağlantılar, adayların doğrudan gözlemlenemeyen ancak potansiyel olarak var olabileceğini düşündükleri ilişkiler üzerine varsayım geliştirdikleri süreçleri tanımlamaktadır. Bu bağlantılar genellikle “Acaba şöyle olursa?”, “Şunu değiştirsem ne olur?” gibi üst-bilişsel sorgulamalarla başlamakta ve deneysel bir süreci temsil etmektedir. Örneğin, bazı grupların What if not? stratejisini örtük biçimde kullanarak verilen koşulu tersine çevirmesi yaratıcı düşünme açısından önemli ipuçları sunmaktadır. Ancak bu bağlantı türü de kimi zaman yüzeysel sezgilere dayalı olarak hatalı yönelimlere yol açabilmektedir. Nitekim bazı adayların şekilde rastlantısal olarak fark ettikleri özelliklere dayalı olarak problem kurmaya çalıştıkları ve bu durumun çoğu zaman geçerli matematiksel ilişkiler üretmekten uzak olduğu gözlemlenmiştir. Bu açıdan sezgisel bağlantılar, üretkenlik ile doğruluk arasındaki dengenin önemli bir test alanı olduğuna işaret etmektedir.

Sezgisel bağlantılar DGO'nun varsayım oluşturmaya elverişli doğasına uygun düşen biçimde grupların problem kurma süreçlerinde en sık gözlemlenen bağlantı kurma şekli olarak tespit edilmiştir. Cai ve Cifarelli (2005) problem çözme ve kurma sürecinde hipoteze dayalı matematiksel keşiflerin süreci canlandırdığına değinmiştir. Nitekim sezgisel düşünme özgür ve üretken düşünmeyi teşvik etmektedir (Mariotti & Pedemonte, 2019; Tirosh & Tsamir 2022). Böylece gruplar varsayımlara dayalı olarak ya da mevcut şeklin görünümüne bağlı kalarak bağlantılar kurmuş ve bu bağlantıları problem kurmak için başlangıç noktası kabul etmiştir. Bu kapsamda grupların sezgisel

bağlantılar kapsamında varsayımlar üreterek veya rastlantısal bağlantılar kurduğu tespit edilmiştir.

Bağlantı kurma aşamasında varsayımlar üreterek bağlantılar kuran gruplar, “*Olsa ne olur?*” sorusunu odaklarına taşımış ve mevcut şeklin sunduğu yapısal ilişkilerin tükendiğini hissettikleri anda sezgisel yaklaşımlara yönelmiştir. Bu aşamada katılımcıların, geometrik olarak hatalı —örneğin iç teğet çember ekleme— unsurları da şekle dâhil ettikleri gözlenmiştir. Bu bakımdan sezgisel bağlantılar, özgür ve üretken düşünmeyi teşvik ederek problem kurma sürecini zenginleştirmekle birlikte, aynı zamanda matematiksel açıdan geçersiz problemlerin ortaya çıkmasına da zemin hazırlayabilmektedir. Dolayısıyla sezgisel bağlantılar yeni fikirlerin filizlenmesine imkân tanıyan değerli bir alan sunarken, katılımcıların sınırlı matematiksel alan bilgisi nedeniyle sürecin yanlış yönlere sapmasına da yol açabilmektedir. Dolayısıyla matematiksel dayanaktan yoksun bağlantılar aracılığıyla kurulan problemler pedagojik açıdan da olumsuz sonuçlar doğurma potansiyeli taşımaktadır.

Bağlantı kurma aşamasında sezgisel yaklaşımların bir diğer türü rastlantısal bağlantılardır. Bu bağlantılar, genellikle problem kurma sürecinin tıkanıp hissedildiğinde “*Bir de bunu deneyelim, belki sonuç verir.*” düşüncesiyle ortaya çıkmakta bazen de şeklin anlık görünümünden veya DGO’da (örn., araç çubuğunda gezinirken) rastgele beliren fikirlerden beslenmektedir. Nitekim eşkenar dörtgen etkinliğinde G3 araçlar çubuğunda gezinirken, simetri kavramını başlangıçta gerekçelendirmeksizin öne sürmüştür; ancak süreç ilerledikçe bu önerme matematiksel bir gerekçelendirme ihtiyacına dönüşmüştür. Bu bulgu, DGO’nun varsayım üretme ve argümantasyon süreçlerini desteklediği (Baccaglini-Frank, 2019) sonucu ile de örtüşmektedir. Dolayısıyla DGO, uygun yönlendirmelerle kullanıldığında matematiksel açıdan geçerli problemlerin kurulmasına katkı sağlayabilecektir.

Bağlantı kurma aşaması kapsamında grupların pedagojik amaçlı bağlantılar kurduğu da tespit edilmiş ve bu bağlantılar eğitsel bağlantılar şeklinde kategorize edilmiştir. Buna göre bazı grupların problem kurarken yalnızca matematiksel bağlamı değil, aynı zamanda bu problemin öğretimsel işlevini de dikkate alarak hareket ettiği fark edilmiştir. Bu türden eğitsel bağlantılar, adayların kendi öğrenme süreçlerine, öğrencilerin yaşantılarına ya da müfredat bağlamına dayalı olarak kurdukları ilişkileri

açıklamaktadır. Bu bağlantılar pedagojik alan bilgisi ile doğrudan ilişkili olup, öğretmen adaylarının problem kurmayı yalnızca bireysel bir matematiksel eylem değil, aynı zamanda öğretimsel bir araç olarak kavramsallaştırdıklarına da işaret etmektedir. Erkan ve Kar (2022) da benzer özellikleri taşıyan katılımcı grup ile yürüttüğü çalışmasında öğretimsel faktörlerin dikkate alındığını tespit etmiştir. Bu tez çalışmasında da eğitsel bağlantılar kapsamında grupların kendi öğrenme süreçlerinden yola çıkarak, problem fikri tasarladığı veya matematiksel deneyimlerinde yer alan problemleri sürece dahil etmeye çalıştığı fark edilmiştir. Özellikle öğretmen adayları ile yürütülen çalışmalarda (örn., Baumanns & Rott, 2022b) katılımcı grupların problem kurma süreçlerinde pedagojik niyetleri örtük şekilde taşıdığı bilinmektedir. Bunun yanında deneyim, hangi bilginin problemle alakalı veya hangi kavramların probleme uygun olduğunu belirlemeyi desteklemektedir (Schoenfeld, 1989). Dolayısıyla DGO’da problem kurma süreçlerinde grupların eğitsel bağlantılar kurmayı hedeflemesi literatür ile uyumlu bir kategori olmuştur. Buna göre gruplar, eğitsel bağlantılar kapsamında günlük yaşam bağlantıları ve öğretimsel bağlantılar kurmaya çalıştığı tespit edilmiştir. Gruplar günlük yaşam bağlantılarına iki etkinlik boyunca daha az yer vermişken öğretimsel bağlantılara daha çok yer verdiği fark edilmiştir. Örneğin eşkenar dörtgen etkinliğinde altı gruptan beşi ve paralelkenar etkinliğinde altı gruptan dördü öğretimsel bağlantılar kurarak, problem kurma sürecini sürdürmüştür. Buna göre gruplar yaygın şekilde geometrik içeriğin çağrıştırdığı problem fikirleri ile bağlantı kurmayı hedeflemiş ve sıklıkla öğrencilerin öğrenmesi için önemli olduğunu düşündükleri ilişkilere odaklanmayı amaçlamıştır. Dolayısıyla öğretmen adaylarından oluşan katılımcı gruplarımızın problem kurma süreçlerinde pedagojik faktörleri dikkate aldığı bulgusu literatürü de desteklemektedir. Ek olarak, grupların DGO’da problem kurma süreçlerinde iki etkinlik boyunca en az yer verdiği bağlantılar eğitsel bağlantılar kapsamındaki günlük yaşam bağlantıları olmuştur.

Bağlantı kurma aşaması genel anlamda problem kurmanın yalnızca bilişsel değil aynı zamanda epistemolojik ve pedagojik bir etkinlik olduğunu göstermektedir. Öğretmen adaylarının bu süreçte kurdukları bağlantılar, onların hem matematiksel düşünme biçimlerini hem de öğretimle ilgili değerlerini ortaya koymak açısından zengin veriler sunmaktadır. Bu nedenle, öğretmen eğitiminde bu tür bağlantı kurma süreçlerine yönelik sistematik desteklerin sunulması hem alan bilgisi hem de

pedagojik içerik bilgisinin bütünsel olarak gelişmesine katkı sağlayacaktır. DGO'nun işlevleri özellikle sezgisel bağlantıların gelişmesini desteklemiş ve söz gelimi şekil üzerinde farklı yapıların dinamik olarak oluşturulabilmesi, adayların varsayım oluşturmasını kolaylaştırmıştır. Ancak aynı zamanda bazı teknik sınırlılıklar (örn., ölçüm hataları, yapıların doğru tanımlanamaması) özellikle yapısal bağlantıların doğruluğunu ve geçerliliğini olumsuz etkilemiştir. Bu durum, DGO'nun hem üretkenliği hem de bilişsel dikkat düzeyini nasıl etkilediğini yeniden değerlendirmeyi gerekli kılmaktadır.

Genel problem kurma süreci modelinin üçüncü aşaması olan oluşturma, problem fikrinin yazılı ve paylaşılabılır bir ifadeye dönüştürülmesini kapsamaktadır. Bu çalışmada öğretmen adaylarının DGO'da oluşturma aşamasında problem kurarken yürüttükleri tartışmalar, anlamsal ve dilsel olmak üzere iki alt başlıkta ele alınmıştır. Goldin ve McClintock'un (1979) tanımladığı biçimiyle, anlamsal tartışmalar problem cümlesinin matematiksel geçerliliği, karmaşıklık düzeyi ve çözücüye yüklenen bilişsel istemler ile ilişkilidir. Bu doğrultuda öğretmen adayları, problemde sunulan verilerin çözüm için yeterli ve gerekli olup olmadığı üzerine yoğun tartışmalar gerçekleştirmiştir. Dolayısıyla grupların iki etkinlik boyunca problem kurma süreçlerinde yaygın şekilde problemin çözülebilirliğini söz konusu ettiği (7/12 süreç) ve bu bulguyu problemin çözücüsünden beklentileri karşılayan ifadelere yer vermenin (6/12 süreç) takip ettiği belirlenmiştir. Grupların oluşturma aşamasına ilişkin yönelimlerinde en az problem cümlesine dinamik yönergeler ilave etmeye (3/12 süreç), problem cümlesindeki nicel verileri (3/12 süreç) ve matematiksel notasyonları (3/12 süreç) düzenlemeye dikkat ettiği belirlenmiştir.

Oluşturma aşamasında bazı gruplar, verinin çok fazla veya eksik olması durumunda çözümün yönünün değişeceğini vurgulamış, bu da probleme dair üst-bilişsel bir değerlendirme sürecini ortaya koymuştur. Dilsel tartışmalar ise problem ifadesinde kullanılan matematiksel notasyonların uygunluğu ve nicel verilerin sunum biçimi üzerine odaklanmıştır. Grupların, problem cümlesini daha açık, yapılandırılmış ve çözücünden beklentiyi netleştiren şekilde ifade etmeye çalıştıkları gözlenmiştir. Cai ve Rott'un (2024) önerdiği problem kurma modeli, problem yazıldıktan sonra yürütülen çözüm odaklı değerlendirmeleri yansıtma aşamasında konumlandırırsa da bu çalışmanın verileri, yansıtma davranışlarının problem ifadesi henüz son hâline

ulaşmadan, oluşturma aşamasıyla eşzamanlı biçimde gerçekleştiğini göstermektedir. Dolayısıyla bu durum, problem kurma süreçlerinin ardışık değil, geçişli ve iç içe aşamalardan oluştuğunu ortaya koymaktadır. Nitekim Baumanns ve Rott (2022a) da problemin çözülebilirliği üzerine yapılan değerlendirmeleri yansıtma kapsamında ele almıştır; ancak bu çalışmada söz konusu değerlendirmelerin problem yazılırken ortaya çıkması, yansıtmanın oluşturma süreciyle ayrılmaz bir şekilde iç içe geçtiğini düşündürmektedir. Benzer biçimde Kar vd. (2025) öğretmenlerin öğretim senaryoları üzerine yürüttükleri çalışmada da problem ifadesinin açık, anlaşılır ve etkinlikle ilişkili olup olmadığı öğretmenler arasında önemli bir tartışma konusu olarak ortaya çıkmıştır. Bu bağlamda oluşturma aşaması, yalnızca bir problem cümlesi üretme süreci değil, aynı zamanda çözümün olanaklılığını değerlendiren üst-bilişsel bir düşünme alanı olarak da değerlendirilebilecektir. Böylece oluşturma ve yansıtma aşamaları arasında keskin bir ayrım yapmak yerine, bu aşamaların dinamik, geçişli ve eşzamanlı olarak işlediğini ileri sürmek mümkündür. Dolayısıyla bulgularımız, oluşturma aşamasının sanılanın aksine yalnızca metni yazma değil, aynı zamanda eşzamanlı üst-bilişsel yansıtma barındırdığını vurgulayarak literatüre özgün bir katkı sunmaktadır.

Problem kurma sürecinde son aşamayı temsil eden yansıtma aşaması, problem kurma sürecinde gerçekleşen üst-bilişsel eylemleri kapsamaktadır ve Cai ile Rott (2024) tarafından meta-düzey olarak tanımlanmaktadır. Bulgularımız, yansıtmanın iki biçimde ortaya çıktığını göstermiştir: (i) problem kurma sürecinde yansıtma, problem fikrinin belirlediği andan problem cümlesinin yazımına dek süren değerlendirmeleri içerirken; (ii) problemi kurduktan sonra yapılan yansıtma, problem yazıldıktan sonra yapılan kıyas ve genel geri bildirimleri kapsamaktadır. Problem kurma sürecinde yapılan yansıtma sırasında gruplar, yönergeyi dolaylı olarak akılda tutmuş ancak tartışmanın ilk anlarında açıkça gündeme getirmemiştir. Bunun yerine problemi kendileri ve potansiyel çözücü için uygun kılacak veri miktarını, karmaşıklığı ve çözücüye yüklenen bilişsel görevi sorgulamışlardır. Bu bulgu, Kontorovich vd.'nin (2012) küçük grup çalışmalarında rapor ettiği problem uygunluğu tartışmalarıyla örtüşmekle birlikte söz konusu değerlendirmelerin henüz problem tamamlanmadan gerçekleştiğini ortaya koyarak literatüre yeni bir nüans eklemektedir. Problemi kurduktan sonra yapılan yansıtma ise gruplar, oluşturdukları problemi prototip olarak değerlendirip önceki denemelerle kıyaslamış ve sürecin sonunda problem

portföyünü genel olarak gözden geçirmiştir. Bu davranış kurulan problem prototip kabul edilip, onun üzerinden problem kurmanın gerçekleştirilmesi bakımından Baumanns ve Rott'un (2024) yapılandırılmış etkinliklerde yüksek performansa ilişkin bulgularını desteklemekte ve yansıtmanın tüm sürece eşlik eden dinamik bir bileşen olduğunu göstermektedir. Kısacası, araştırmanın bulguları yansıtmayı yalnızca nihai ürünün değerlendirilmesine indirgemek yerine, problem kurma sürecinin başlangıcından sonuna dek süregelen ve bilişsel ve üst-bilişsel etkileşimi yönlendiren kritik bir işlev olarak konumlandırmaktadır.

Bu çalışmada grupların problem kurma süreçlerinde gözlemlenen eylemleri yanında problem kurma sürecinin aşamaları arasındaki geçişlerine de odaklanılmıştır. Buna göre çalışmada elde edilen bulgular, problem kurma sürecinin yalnızca belirli aşamalardan oluşan doğrusal bir yapı sergilemediğini, aksine bu aşamalar arasında esnek ve çok yönlü geçişlerin mümkün olduğunu ortaya koymaktadır. Özellikle katılımcı grupların problem kurma modelinin aşamaları arasında tek ya da çift yönlü geçişler gerçekleştirebilmesi, sürecin doğasına dair önemli ipuçları sunmaktadır. Bu durum Pelczer ve Gamboa'nın (2009) aşamalar arası geçişlerin mutlak olmadığı yönündeki önerisiyle uyumlu olup, problem kurma süreçlerinin iç içe geçmiş ve dinamik bir yapıya sahip olduğunu bir kez daha doğrulamaktadır. Yalnızca grupların gerçekleştirdiği eylemler değil, aynı zamanda bu eylemlerin hangi aşamalarda ve hangi yönelimlerle gerçekleştiği de dikkate alındığında, sürecin katı bir aşamalar dizisi şeklinde değil, esnek bir etkileşim ağı biçiminde ilerlediği görülmektedir. Benzer şekilde, Baumanns ve Rott (2022b) geliştirdikleri modelde, problem kurma sürecinin aşamaları arasında belirli geçiş yolları tanımlamakla birlikte, bu geçişlerin mutlak olmadığını ve temsil edilen tüm yolların deneysel olarak gözlemlendiğini belirtmişlerdir.

Bu tez çalışmasında katılımcı grupların problem kurma sürecinin genel modelinde yer alan aşamalar arasında hem tek yönlü hem de çift yönlü geçişler gerçekleştirdikleri tespit edilmiştir. Bu anlamda aşamalar arasında ipek iplik kadar hassas geçişlerin olması problem kurma sürecinin yalnızca bilişsel düzeyde değil, aynı zamanda duyuşsal (üst-bilişsel) bileşenlerin etkileşimiyle şekillenen karmaşık bir yapı olduğunu desteklemektedir (Cai & Leikin, 2020; Cai vd., 2022; Leavy & Hourigan, 2024). Bununla birlikte aşamalar arasındaki ayırt etmesi güç geçişlerin DGO'nun

varsayım oluřturma ve varsayımın geerliđini eř zamanlı olarak kontrol etmeye uygun dođasından kaynaklandıđı dūřunūlmektedir. Dolayısıyla DGO’da problem kurma sūrecinde biliřsel ve ūst-biliřsel etkileřimin yođun olduđu belirtilebilecektir.

4.2. İlkōđretim Matematik Őđretmeni Adaylarının Problem Kurma Sūrelerinde Dinamik Geometri Ortamının İşlevlerinden Nasıl Yararlandığına Ait Bulgulara İlişkin Tartışma

Bu arařtırmada DGO’nun sūrūkleme, ōlme ve yardımcı unsur ekleme iřlevleri ve diđer bileřenlerine problem kurma sūrecinin dōrt ařaması boyunca dikkat edilmiřtir. Yōnelim ařaması, problem kurma etkinliđini anlama ve keřfetme amalı eylemleri iermektedir. Bu ařamada DGO’nun ōlme, sūrūkleme, yardımcı unsur ekleme ve sınırlı da olsa diđer bileřenleri devrededir. Yōnelim ařamasında sūrūkleme, ōlme, yardımcı unsur ekleme gibi DGO bileřenlerinin tūr dađılımları (ōrn., Baccaglini-Frank, 2009; Palatnik & Dreyfurs, 2018) incelendiđinde tūm gruplarda devreye sokulan ortak bir alt tūre rastlanmamıřtır. Yōnelim ařamasında, tūm gruplar problem durumunu keřfetmek iin en ok *ōlme* aracını kullanmıř; aı ve uzunluk deđerlerini kaydederek yeni varsayımlar geliřtirmiřtir. Őlme, bōylece hem řekle dair ayrıntılı veri ūretmiř hem de sonraki problemler iin referans noktaları oluřturmuřtur. Bu ařamada ōđrencilerin, řekli anlamlandırmaya ve keřfetmeye dōnūk etkileřimleri, onların geometrik dūřınme biimlerinin ve ōlme tūrū tercihlerinin ōnemli gōstergeleri olarak deđerlendirilebilecektir. Bulgular, yōnelim ařamasının yalnızca řekli tanıma sūreci olmadıđını, aynı zamanda problem kurma yolculuđuna zemin hazırlayan ok katmanlı biliřsel ve etkileřimsel sūreleri ierdiđini gōstermektedir. Yōnelim ařamasında ōzellikle ōlme tūrlerinin eřitliliđi, grupların řekil ūzerinde farklı amalarla dūřūndūđūnū ve her bir ōlme tūrünün farklı bir biliřsel ihtiyaa karřılık geldiđini ortaya koymaktadır. Őrneđin amalı ōlm, ōnceden sahip oldukları řekil bilgilerini test ederek yeni varsayımlar geliřtirmelerine olanak sađlarken; dođrulama ōlmū, bu varsayımların geerliliđini sınamalarını mūmkūn kılmıřtır. Algısal ōlm ise sezgisel olarak řekle yōnelik ilk yargılarını ortaya koymalarına imkān tanımıř ve ođu durumda bu sezgiler, ōlmler aracılıđıyla yeniden deđerlendirilmiřtir. Bu bađlamda, ōlm tūrleri arasında belirgin bir geiřkenliđin

olduğu da söylenebilecektir. Buna göre amaçlı ölçümden doğrulama ölçümüne ya da rastgele ölçümden algısal ölçüme geçilebilmektedir.

Yönelim aşamasında beliren sürüklenme eylemleri de iki farklı boyutta ele alınmıştır. Rastgele sürüklenme, öğrencilerin şekil üzerinde plansız fakat sezgisel bir şekilde etkileşim kurmalarına olanak tanırken; amaçlı sürüklenme, daha bilinçli bir keşif sürecine işaret etmektedir. Amaçlı sürüklenmenin özellikle şekil üzerinde varsayımsal düşünme becerilerini tetiklediği ve öğrencilerin ilişkisel özellikleri fark etmelerini sağladığı fark edilmiştir. Bu yönüyle sürüklenme türlerinin grupların geometrik akıl yürütme süreçlerini dışa vurmayı sağladığı belirtilebilecektir.

Özellikle ölçüm yaparken yazılımın sunduğu hassasiyet ya da sınırlılık, strateji üretimini destekleyebildiği gibi zaman zaman aksatıcı bir rol de oynayabilmektedir. Bu durum, teknolojik araçların pedagojik etkilerini anlamada kritik bir rol oynamaktadır. Sonuç olarak, yönelim aşamasında kullanılan ölçme ve sürüklenme türleri, grupların matematiksel düşünme biçimlerini yansıttığı gibi aynı zamanda problem kurma süreçlerinin nasıl biçimlendiğine dair de önemli ipuçları sunmaktadır. DGO'daki dinamik yapının, varsayım oluşturma, doğrulama, keşfetme ve yeniden yapılandırma gibi süreçlerde aktif roller üstlenmesine olanak tanıdığı söylenebilecektir.

Bağlantı kurma aşamasında DGO'nun olanakları belirgin biçimde devreye girmiştir. Sürüklenme özelliğinin geometrik ilişkileri keşif, varsayım oluşturma ve kanıtlama süreçlerinde kritik rol oynadığı literatürde vurgulanmaktadır (Leung, 2008; Sinclair & Robutti, 2013) ve benzer örüntüler problem kurma sürecinde de gözlenmiştir. Bununla birlikte, DGO'nun tümevarımsal-tümdengelsel düşünme arasındaki sıkışık doğası (De Villiers, 2006; González & Herbst, 2009; Olivero & Robutti, 2007; Sinclair & Robutti, 2013) kurulan bağlantıların zaman zaman matematiksel temelden yoksun kalmasına yol açmıştır. DGO'nun Öklid düzlemini simüle etmesi çelişkili durumları da beraberinde getirmiş; bazı gruplar DGO'nun otoritesine boyun eğerek özgün problem fikirlerinden vazgeçmiş veya karmaşık arayüzde odaklanma güçlüğü yaşamıştır. Sinclair ve Robutti'nin (2013) bilişsel ölçme analizleri de benzer bulgular sunmaktadır.

Oluşturma aşamasında gruplar bu aşamada sürüklenme, ölçme ve yardımcı unsur ekleme işlevlerinden yararlansa da DGO'nun katkısına ilişkin ortak bir strateji

geliştirmemiştir. Bu durum, bağlantı kurma aşamasında varsayım üretimi ile geçerlik kontrolünün eşzamanlı yürütülmesine bağlanabilecektir. Sonuç olarak, DGO'nun işlevleri oluşturulan problemlerin matematiksel geçerliğini sınamaya hizmet etmiştir. Oluşturma aşamasında sürüklenme ve ölçme sınırlı kullanılsa da varsayımların geçerliliğini eşzamanlı kontrol etme ihtiyacı, DGO'ya yeniden dönülmesine yol açmıştır. Buna karşılık yansıtma aşamasında gruplar, problemlerin matematiksel geçerliğini tartışırken DGO'dan doğrudan yararlanmamış; geçerlik kararlarını önceki ölçme ve sürüklenme sürecinde elde ettikleri bulgulara dayandırmışlardır. Bu bulgu, DGO'nun başta problem tasarlamak için veri toplama ve varsayımı doğrulama aracı olarak işlev gördüğünü, ancak nihai değerlendirmede kavramsal akıl yürütmenin ön plana çıktığını göstermektedir. Gruplar, problemi matematiksel açıdan değerlendirme bağlamında yansıtma eylemleri sergilemiş olsa da (Cai & Rott, 2024), DGO'yu doğrudan kullanmamıştır. DGO bileşenlerinin yansıtma aşamasında görünür olmaması, varsayım ve geçerlik kontrolünün zaten önceki aşamalarda DGO destekli yürütülmesiyle ilişkilendirilebilecektir. Özetle DGO, problem kurma sürecine çoğunlukla keşif (ölçme) ve varsayım oluşturma (sürüklenme) düzeyinde katkı sağlamakta; bununla birlikte yazılımın doğasından kaynaklanan bilişsel sınırlılıkların farkında olunmadığında, adayların problem geliştirme motivasyonunu zayıflatabilmektedir. Dolayısıyla, DGO'nun problem kurma sürecinde destekleyici olduğunun farkındalığı yanında süreçte aksaklık yaratmaması için yazılımın sınırlılıklarının farkında olmak veya kullanıcısının alan bilgisi derinliğinin güçlü olması kritik görünmektedir.

4.3. Sonuç ve Öneriler

Bu tez çalışmasında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının problem kurma süreçleri ile DGO'nun işlevlerinin nasıl açığa çıktığı birlikte ele alınmıştır. Elde edilen bulgular doğrultusunda, problem kurma sürecinin aşamalarının birbiriyle iç içe geçtiği; DGO'nun sürüklenme (rastgele – D-w, amaçlı – D-m), ölçme, yardımcı unsur ekleme işlevleri ve diğer bileşenlerinin bu aşamalarda farklı frekanslarda belirlediği tespit edilmiştir.

Bulgulara göre, sürecin başlangıcındaki yönelim aşamasında öğretmen adaylarının sıklıkla rastgele ve amaçlı sürüklenme türlerine başvurdukları, çeşitli ölçüm

türlerinin ise bu aşamayı dinamik hâle getirdiği belirlenmiştir. Bağlantı kurma aşamasında ise sürüklenme ve ölçmenin yanı sıra yardımcı unsur ekleme ve diğer bileşenlerin de süreçte belirgin bir şekilde yer alabildiği gözlemlenmiştir. Bununla birlikte, çalışmanın yalnızca ikişer kişiden oluşan altı grup öğretmen adayıyla yürütülmüş olması, elde edilen bulguların genellenebilirliğini sınırlı kılmaktadır.

DOĞO'nun problem kurma sürecine entegrasyonunun matematik eğitimi açısından önemli bir potansiyel taşıdığını göstermektedir. Bu bağlamda, öğretmenlerin ve öğretmen eğitimcilerinin DOĞO'nun bileşenlerinin hangi aşamalarda ve hangi amaçlarla sürece katkı sunduğunun farkında olmaları; ayrıca bu süreçlerde ortaya çıkabilecek olası bilişsel çatışmalara yönelik hazırlıklı olmaları gerekmektedir. Bu kapsamda, problem kurma sürecinin pedagojik yönergelerle yeniden yapılandırılması ve öğretmen eğitimi programlarında bu sürecin sistematik biçimde ele alınması önerilmektedir. Bulgularımız literatürdeki benzeri çalışmalarda öne çıkan ve bilişsel bir araç olarak da kabul edilen sürüklemenin grupların problem kurma süreçlerinde daha az belirdiğini ortaya çıkarmıştır. Bu durum katılımcı grupların dinamik yapı algılarının ve sürüklenebilirlik nokta, şekil vs. hakkındaki deneyiminin sınırlı olması ile açıklanabilecektir. Bu anlamda geometrik zihin alışkanlığının önemli bir göstergesi olan ve geometrik şekillerin kavramsal yapısını anlamaya hizmet eden değişmezliği araştırmak, sürüklenme ile açığa çıkabilmektedir. Dolayısıyla sürüklenme ve sürüklenebilirlik şekil algısının gelişmesi öğretmen adaylarının geometrik düşünmesini geliştirebilecek ve öğretimsel bilgilerini de zenginleştirebilecektir. Bu bakımdan öğretmen eğitimi programlarının konuya ilişkin derslerinin içeriğinde DOĞO'nun sürüklenme işlevini ön plana çıkaran etkinlikler yer alabilir.

Tezin sonuçları doğrultusunda, ileride gerçekleştirilecek çalışmaların farklı akademik başarı düzeyindeki katılımcı gruplar ile yürütülerek bulguların karşılaştırılması önerilmektedir. Çünkü bulgularımız katılımcı grupların alan ve teknoloji bilgisi eksikliğine işaret eden sonuçları raporlamaktadır. Dolayısıyla matematiksel alan bilgisi ve özellikle DOĞO'dan bilinçli yararlanabilen farklı katılımcı gruplar ile yürütülen benzer çalışmaların sonuçları, DOĞO'da problem kurma sürecinin detaylandırılmasına aracı olabilecektir. Katılımcı sayısı elde edilen kod ve kategorilerin detaylandırılması için artırılabilir. Bu bağlamda daha geniş katılımcılar sürecin daha derinlemesine araştırılmasına imkân sunacaktır.

Etkinlik problem durumu ve yönergesinin problem kurma süreç ve performansına etkisi göz önüne alındığında (Baumanns & Rott, 2024; Cai vd., 2023) benzer çalışmaların farklı problem kurma durumu ve yönergesi üzerinden de yürütülmesi önem arz edebilmektedir. Örneğin yapılandırılmış problem kurma ya da problemden hareketle problem biçimlendirme gibi yaklaşımların DGO'da uygulanması, sürecin daha sistematik analizine olanak sağlayabilecektir. Çünkü gruplar problem kurma süreçlerinde belirledikleri bir prototip problem üzerinde iyileştirme yapmaya veya buldukları bir ilişkinin üzerinde DGO'ya dönerek, yeni ilişkiler keşfetmeye çalışmıştır. Bu tür çalışmalar, DGO'da düşük problem kurma performansı ya da sürecin görece kalitesizliğine neden olan etmenleri detaylandıracak bilgiler sunabilecektir. Bunun yanında, DGO'da problem kurma ile problem çözme süreçlerinin eş zamanlı incelenmesi, süreçlerin bütüncül bir bakış açısıyla değerlendirilmesine katkı sunacak ve problemi çözme gerekliliği olduğunda DGO'nun daha farklı hangi işlev veya bileşenlerinin açığa çıkabileceği de belirlenebilecektir.

KAYNAKÇA

- Abramovich, S., & Cho, E. K. (2012). Technology-enabled mathematical problem posing as modeling. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 22-32.
- Abramovich, S., & Connell, M. L. (2021). Geometry and measurement. In S. Abramovich & M. L. Connell, *Developing deep knowledge in middle school mathematics: A textbook for teaching in the age of technology* (Chap. 7). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-68564-5_7
- Antonini, S., & Baccaglini-Frank, A. (2016). Maintaining dragging and the pivot invariant in processes of conjecture generation. *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/1605.02582>
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(3), 66-72. <https://doi.org/10.1007/BF02655708>
- Baccaglini-Frank, A. (2009). Conjecturing and proving in dynamic geometry after an introduction of the dragging schemes. In *Proceedings of the 10th International Conference of the Mathematics into the 21st Century Project* (pp. 31–36). Mathematics into the 21st Century Project.
- Baccaglini-Frank, A. (2010a). *Conjecturing in dynamic geometry: A model for conjecture-generation through maintaining dragging* (Doctoral dissertation). University of New Hampshire. (ISBN 9781124301969). <https://www.proquest.com/dissertations-theses/conjecturing-dynamic-geometry-model-generation/docview/746579145>
- Baccaglini-Frank, A. (2010b). The maintaining dragging scheme and the notion of instrumented abduction. In P. Brosnan, D. B. Erchick, & L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 6, pp. 607–615). The Ohio State University.
- Baccaglini-Frank, A. (2012). Dragging and Making Sense of Invariants in Dynamic Geometry. *The Mathematics Teacher*, 105(8), 616–620. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.105.8.0616>
- Baccaglini-Frank, A., Antonini, S., Leung, A., & Mariotti, M. A. (2017). Designing non-constructability tasks in a dynamic geometry environment. In A. Leung & A. Baccaglini-Frank (Eds.), *Digital technologies in designing mathematics education tasks* (pp. 93–118). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0_6
- Baranović, N., & Milinković, J. (2023). Students' achievements and typical obstacles in solving open-ended tasks. *Unpublished manuscript*.

- Baumanns, L. (2022). Problem posing from a subject-matter didactics perspective. In *Mathematical problem posing* (Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-39917-7_4
- Baumanns, L., & Rott, B. (2022a). Identifying metacognitive behavior in problem-posing processes. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21, 1381–1406. <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10297-z>
- Baumanns, L., & Rott, B. (2022b). The process of problem posing: Development of a descriptive phase model of problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 110, 251–269. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10136-y>
- Baumanns, L. (2023). Four mathematical miniatures on problem posing. In D. Sarikaya, L. Baumanns, K. Heuer, & B. Rott (Eds.), *Problem posing and solving for mathematically gifted and interested students*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-41061-2_1
- Baumanns, L., & Rott, B. (2024). Problem-posing tasks and their influence on pre-service teachers' creative problem-posing performance and self-efficacy. *Journal of Mathematical Behavior*, 73, Article 101130. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101130>
- Bicer, A., Lee, Y., Perihan, C., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2020). Considering mathematical creative self-efficacy with problem posing as a measure of mathematical creativity. *Educ Stud Math* 105, 457–485 <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09995-8>
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1998). *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods* (3rd ed.). Allyn & Bacon.
- Brown, S.I., & Walter, M.I. (2005). *The Art of Problem Posing* (3rd ed.). Lawrence Erlbaum. <https://doi.org/10.4324/9781410611833>
- Brunheira, L., & Ponte, J. P. (2017). Constructing draggable figures using GeoGebra: The contribution of the DGE for geometric structuring. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of CERME 10*. European Society for Research in Mathematics Education.
- Brunheira, L., & Ponte, J. P. (2019). Justifying geometrical generalizations in elementary-school preservice teacher education. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of CERME 11*. European Society for Research in Mathematics Education.
- Cai, J. (2022). What Research Says About Teaching Mathematics Through Problem Posing. *Éducation et didactique*, 16 (3), 31-50. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.10642>
- Cai, J., & Cifarelli, V. (2005). Exploring mathematical exploration: how two college students formulated and solved their mathematical problems. *Focus Learn Probl. Math.* 27(3):43–72

- Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001>
- Cai, J., & Hwang, S. (2021). Teachers as redesigners of curriculum to teach mathematics through problem posing: conceptualization and initial findings of a problem-posing project. *ZDM Mathematics Education* 53, 1403–1416. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01252-3>
- Cai, J., & Hwang, S. (2023). Making mathematics challenging through problem posing in the classroom. In R. Leikin (Ed.), *Mathematical challenges for all* (pp.115–145). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8_7
- Cai, J., & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: conceptualization, advances, and future directions for research. *Educ Stud Math* 105, 287–301. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10008-x>
- Cai, J., & Rott, B. (2024). On understanding mathematical problem-posing processes. *ZDM Mathematics Education* 56, 61–71. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01536-w>
- Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. In: Singer, F., F. Ellerton, N., Cai, J. (Eds) *Mathematical Problem Posing. Research in Mathematics Education*. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_1
- Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R., & Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: task variables, processes, and products. *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 119-145.
- Cai, J., Koichu, B., Rott, B., & Jiang, C. (2024). Advances in research on mathematical problem posing: Focus on task variables. *The Journal of Mathematical Behavior*, 101186. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101186>
- Cai, J., Ran, H., Hwang, S., Ma, Y., Han, J., & Muirhead, F. (2023). Impact of prompts on students' mathematical problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior*, 72, Article 101087
- Cai, J., Wang, T., & Xie, S. (2025). Mathematical problem posing in Chinese Curriculum Standards. *Asian Journal for Mathematics Education*, 0(0). <https://doi.org/10.1177/27527263251340993>
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through Exploration in Dynamic Geometry Environments. *Int J Sci Math Educ* 2, 339–352. <https://doi.org/10.1007/s10763-004-6785-1>

- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Problem solving and problem posing in a dynamic geometry environment. *The Mathematics Enthusiast*, 2(2), 125-143.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 37(3), 149–158. <https://doi.org/10.1007/s11858-005-0004-6>
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 133–148. <https://doi.org/10.1007/s10857-011-9173-0>
- Cofie, N., Braund, H., & Dalgarno, N. (2022). Eight ways to get a grip on intercoder reliability using qualitative-based measures. *Canadian Medical Education Journal*, 13(2), 73–76. <https://doi.org/10.36834/cmej.72504>
- Contreras, J. N. (2003). A problem-posing approach to specializing, generalizing, and extending problems with interactive geometry software. *The Mathematics Teacher*, 96(4), 270–276. <http://www.jstor.org/stable/20871308>
- Contreras, J. N. (2007). Unraveling the mystery of the origin of mathematical problems: Using a problem-posing framework with prospective mathematics teachers. *The Mathematics Educator*, 17, 15–23.
- Contreras, J. N. (2013). Fostering mathematical creativity through problem posing and modeling using dynamic geometry: Viviani’s problem in the classroom. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 4(2), 1–8.
- Contreras, J. N. (2015). Discovering, applying, and extending Ceva’s Theorem. *The Mathematics Teacher*, 108(8), 632–637. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.108.8.0632>
- Contreras, J. N. (2020). Learning to pose problems within dynamic geometry environments: A self-study involving Varignon’s problem. In *Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Mathematics Education Across Cultures*.
- Crespo, S., & Harper, F. K. (2020). Learning to pose collaborative mathematics problems with secondary prospective teachers. *International Journal of Educational Research*, 102, Article 101578. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.05.003>
- Crespo, S., & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(5), 395–415. <https://doi.org/10.1007/s10857-008-9081-0>

- Creswell, J. W. (2017). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (5. basım, Türkçesi: Eğiten Kitap Yayıncılık).
- Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2016). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (4th ed.). Sage Publications.
- De Villiers, M. (2006). Some pitfalls of dynamic geometry software. *Learning and Teaching Mathematics*, 4(2), 46–52.
- DeCuir-Gunby, J. T., Marshall, P. L., & McCulloch, A. W. (2011). Developing and using a codebook for the analysis of interview data: An example from a professional development research project. *Field Methods*, 23(2), 136–155. <https://doi.org/10.1177/1525822X10388468>
- Demir, M., & Zengin, Y. (2023). The effect of a technology-enhanced collaborative learning environment on secondary school students' mathematical reasoning: A mixed method design. *Education and Information Technologies*, 28, 9855–9883. <https://doi.org/10.1007/s10639-023-11587-x>
- Dockendorff, M., & Solar, H. (2017). ICT integration in mathematics initial teacher training and its impact on visualization: The case of GeoGebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(1), 66–84. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1341060>
- Duckworth, E. (2006). The having of wonderful ideas. In E. Duckworth (Ed.), *“The having of wonderful ideas” and other essays on teaching and learning* (3rd ed., pp. 1–14). Teachers College Press. (Original work published 1973).
- Einstein, A., & Infeld, L. (1938). *The evolution of physics*. Simon & Schuster.
- Elgrably, H., & Leikin, R. (2021) Creativity as a function of problem-solving expertise: posing new problems through investigations. *ZDM Mathematics Education* 53, 891–904. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01228-3>
- English, L.D. (1997). The Development of Fifth-Grade Children's Problem-Posing Abilities. *Educational Studies in Mathematics* 34, 183–217. <https://doi.org/10.1023/A:1002963618035>
- Ergene, Ö. (2021). Posing probability problems related to continuous and discrete sample space. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(2), 311–336. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.2004464>
- Erkan, B., & Kar, T. (2022). Pre-service mathematics teachers' problem-formulation processes: Development of the revised active learning framework. *The Journal of Mathematical Behavior*, 65. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100918>
- Fischbein, E. (1990). Intuition and information processing in mathematical activity. *International Journal of Educational Research*, 14(1), 31-50

- Fischbein, E. (2002). Intuition and Mathematical Reasoning. In: *Intuition in Science and Mathematics*. Mathematics Education Library, vol 5. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47237-6_2
- Flick, U. (2007). *Managing quality in qualitative research*. SAGE. <https://doi.org/10.4135/9781849209441>
- Fukuda, C., & Kakihana, K. (2009). Problem posing and its environment with technology. In *Proceedings of the 33rd Conference of the Japan Society for Science Education* (pp. 179–182). Japan Society for Science Education.
- Garofalo, J. & Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 163-176.
- Geiger, V. (2006). More than tools: mathematically enabled Technologies as partner and collaborator. In C. Hoyles, J.-B. Lagrange, Le. Hung Son, & N. Sinclair (Eds.), *Technology revisited: proceedings of the seventeenth study conference of the international commission on mathematical instruction* (pp. 182–189). Hanoi Institute of Technology
- Goldin, G. A., & McClintock, C. E. (1979). *Task variables in mathematical problem solving*. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.
- Gonzales, N. A. (1998). A blueprint for problem posing. *School Science and Mathematics*, 98(8), 448-456. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1998.tb17437.x>
- González, G., & Herbst, P.G. (2009). Students' Conceptions of Congruency Through the Use of Dynamic Geometry Software. *Int J Comput Math Learning* 14, 153–182. <https://doi.org/10.1007/s10758-009-9152-z>
- Greene, J. C., & Caracelli, V. J. (Eds.). (1997). *Advances in mixed-method evaluation: The challenges and benefits of integrating diverse paradigms* (New Directions for Evaluation, No. 74). Jossey-Bass.
- Guberman, R., & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *J Math Teacher Educ* 16, 33–56. <https://doi.org/10.1007/s10857-012-9210-7>
- Halmos, P. R. (1980). The Heart of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87(7), 519–524. <https://doi.org/10.2307/2321415>
- Healy, L., & Hoyles, C. (2002). Software Tools for Geometrical Problem Solving: Potentials and Pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 6, 235–256. <https://doi.org/10.1023/A:1013305627916>
- Hoehn, L. (1991). Problem Posing in Geometry. *The Mathematics Teacher*, 84(1), 10–14. <http://www.jstor.org/stable/27966987>

- Hohenwarter, M., Jarvis, D.H., & Lavicza, Z. (2009). Linking Geometry, Algebra and Mathematics Teachers: GeoGebra Software and the Establishment of the International GeoGebra Institute. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 16, 83-87.
- Hollebrands, K. F. (2007). The Role of a Dynamic Software Program for Geometry in the Strategies High School Mathematics Students Employ. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 164-192. <http://www.jstor.org/stable/30034955>
- Hölzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry. *Int J Comput Math Learning* 1, 169-187. <https://doi.org/10.1007/BF00571077>
- Hölzl, R. (2001). Using Dynamic Geometry Software to Add Contrast to Geometric Situations – A Case Study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 6, 63-86. <https://doi.org/10.1023/A:1011464425023>
- Işık, C., Kar, T., Yalçın, T., & Zehir, K. (2011). Prospective teachers' skills in problem posing with regard to different problem posing models. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 15, 485-489.
- Jacinto, H., & Carreira, S. (2017). Mathematical Problem Solving with Technology: the Techno-Mathematical Fluency of a Student-with-GeoGebra. *Int J of Sci and Math Educ* 15, 1115-1136. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9728-8>
- Jones, K. (2001). Learning geometrical concepts using dynamic geometry software. In K. Irwin (Ed.), *Mathematics education research: A catalyst for change* (pp. 50-58). University of Auckland.
- Jones, K. (2000). Providing a Foundation for Deductive Reasoning: Students' Interpretations when Using Dynamic Geometry Software and Their Evolving Mathematical Explanations. *Educational Studies in Mathematics* 44, 55-85. <https://doi.org/10.1023/A:1012789201736>
- Juandi, D., Kusumah, Y. S., Tamur, M., Perbowo, K. S., & Wijaya, T. T. (2021). A meta-analysis of Geogebra software decade of assisted mathematics learning: what to learn and where to go? *Heliyon*, 7(5), e06953. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2021.e06953>
- Kar, T. (2023). Matematiksel problem kurma sürecine ilişkin modeller. K. Özgen, T. Kar, S. Çenberci & Y. Zengin (Ed.), *Matematikte problem çözme ve problem kurma* içinde (s. 399-419). Ankara: Pegem Akademi.
- Kar, T., & Öçal, M. F. (2022). İlköğretimde teknoloji destekli ölçme öğretimi: Sınıf ve matematik öğretmenleri için (6. Baskı). Pegem Akademi.
- Kar, T., Öçal, M. F., & Güler, G. (2023). Matematiksel problem kurmanın doğası, amacı ve önemi. K. Özgen, T. Kar, S. Çenberci & Y. Zengin (Ed.), *Matematikte problem çözme ve problem kurma* içinde (s. 243-261). Ankara: Pegem Akademi.

- Kar, T., Öztürk, F., & Özkaya, M. (2025). Pose, solve and pose cycle: An examination of the change in pre-service mathematics teachers' problem-posing performances. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrae010>
- Kar, T., Öztürk, F., Öçal, M. F., & Özkaya, M. (2025). Problem posing via scriptwriting: What instructional flows do mathematics teachers use in implementing the problem-posing task? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 23, 1127–1151. <https://doi.org/10.1007/s10763-024-10507-w>
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123–147). Erlbaum.
- Klein, S., & Leikin, R. (2020). Opening mathematical problems for posing open mathematical tasks: what do teachers do and feel?. *Educ Stud Math* 105, 349–365. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09983-y>
- Koichu, B. (2020). Problem posing in the context of teaching for advanced problem solving. *International Journal of Educational Research*, 102, Article 101428. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.05.001>
- Koichu, B., & Kontorovich, I. (2012). Dissecting success stories on mathematical problem posing: a case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 71–86. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9431-9>
- Komatsu, K., & Jones, K. (2019). Task Design Principles for Heuristic Refutation in Dynamic Geometry Environments. *Int J of Sci and Math Educ* 17, 801–824 <https://doi.org/10.1007/s10763-018-9892-0>
- Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 149–161. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.11.002>
- Kovács, Z. (2017). Mathematics teacher trainees facing the “What-If-Not” strategy: A case study. In A. Ambrus & É. Vásárhelyi (Eds.), *Problem solving in mathematics education* (Vol. 19, pp. 68–81). Eötvös Loránd University, Budapest.
- Köse, N., Uygan, C., & Özen, D., (2012). Dinamik geometri yazılımlarındaki sürüklenme ve çeşitlerinin geometri öğretimindeki rolü. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 3/1, 35-52.
- Kuckartz, U. (2019). Qualitative text analysis: A systematic approach. *Compendium for early career researchers in mathematics education*, 181-197.

- Kuhn, T. S. (2021). *Bilimsel devrimlerin yapısı* (N. Kuyaş, Trans.; 10. ed.). Kırmızı Yayınları. (Original work published 1962)
- Kusharyadi, R., Pertiwi, S., Siahaan, E. Y. S., & Dasari, D. (2023). Bibliometric Analysis: Software Usage Trends GeoGebra in Mathematics Learning From 2017-2022. *Prisma Sains: Jurnal Pengkajian Ilmu dan Pembelajaran Matematika dan IPA IKIP Mataram*, 11(1), 196-205. [10.33394/j-ps.v11i1.6786](https://doi.org/10.33394/j-ps.v11i1.6786)
- Kuzle, A. (2013). Patterns of Metacognitive Behavior During Mathematics Problem-Solving in a Dynamic Geometry Environment. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 8(1), 20-40. <https://doi.org/10.29333/iejme/272>
- Kuzle, A. (2015). Nature of metacognition in a dynamic geometry environment. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 3(5), 627–646. <https://doi.org/10.31129/lumat.v3i5.1010>
- Kuzle, A. (2017). Delving into the Nature of Problem Solving Processes in a Dynamic Geometry Environment: Different Technological Effects on Cognitive Processing. *Tech Know Learn* 22, 37–64. <https://doi.org/10.1007/s10758-016-9284-x>
- Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: The case of geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 48–67). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-78542-9_3
- Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: Two sides of the use of dynamic geometry environments. In S.-C. Chu et al. (Eds.), *Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics (ATCM)* (pp. 22–35). Korea National University of Education.
- Lavy, I. (2015). Problem-posing activities in a dynamic geometry environment: When and how. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing* (pp. 393–410). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_19
- Lavy, I., & Bershadsky, I. (2003). Problem posing via “what if not?” strategy in solid geometry: A case study. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 369–387. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.007>
- Lavy, I., & Shriki, A. (2010). Engaging in problem posing activities in a dynamic geometry setting and the development of prospective teachers’ mathematical knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(1), 11–24. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.12.002>

- Leavy, A., & Hourigan, M. (2024). Attending to task variables when engaging in group problem posing for elementary level mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101128. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101128>
- Lee, H. S., & Hollebrands, K. F. (2006). Students' use of technological features while solving a mathematics problem. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), 252–266. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.005>
- Lee, S. Y. (2021). Research status of mathematical problem posing in mathematics education journals. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(8), 1677–1693. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10128-z>
- Lee, Y., Capraro, R. M., & Capraro, M. M. (2018). Mathematics teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge in problem posing. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(2), 75–90. <https://doi.org/10.12973/iejme/2698>
- Leikin, R. (2004). Towards high quality geometrical tasks: Reformulation of a proof problem. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 241–248.
- Leikin, R. (2014). Challenging mathematics with multiple solution tasks and mathematical investigations in geometry. In Y. Li, E. Silver, & S. Li (Eds.), *Transforming mathematics instruction* (pp. 59–80). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-04993-9_5
- Leikin, R. (2015). Problem posing for and through investigations in a dynamic geometry environment. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing* (pp. 375–391). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_18
- Leikin, R. (2018). Openness and constraints associated with creativity-directed activities in mathematics for all students. In N. Amado, S. Carreira, & K. Jones (Eds.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving* (pp. 323–341). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99861-9_17
- Leikin, R., & Elgrabli, H. (2015). Creativity and expertise: The chicken or the egg? Discovering properties of geometry figures in DGE. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1024–1031). ERME. (hal-01287306)
- Leikin, R., & Elgrabli, H. (2020). Problem posing through investigations for the development and evaluation of proof-related skills and creativity skills of prospective high school mathematics teachers. *International Journal of Educational Research*, 102, 101410. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.002>

- Leikin, R., & Elgrably, H. (2022). Strategy creativity and outcome creativity when solving open tasks: Focusing on problem posing through investigations. *ZDM Mathematics Education*, 54, 35–49. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01319-1>
- Leikin, R., & Grossman, D. (2013). Teachers modify geometry problems: From proof to investigation. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 515–531. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9460-4>
- Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13, 135–157. <https://doi.org/10.1007/s10758-008-9130-x>
- Leung, A., Chan, Y.-C., & Francis, L.-R. (2006). Instrumental genesis in dynamic geometry environments. In C. Hoyles, J.-B. Lagrange, L. H. Son, & N. Sinclair (Eds.), *Technology revisited: Proceedings of the seventeenth study conference of the International Commission on Mathematical Instruction* (pp. 346–353). Hanoi Institute of Technology.
- Leung, S. S., & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 5–24. <https://doi.org/10.1007/BF03217299>
- Levav-Waynberg, A., Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior* 31(1), 73-90. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.11.001>
- Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: A look at the state of the art. *ZDM Mathematics Education*, 53, 723–735. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w>
- Lopez-Real, F., & Leung, A. (2006). Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(6), 665–679. <https://doi.org/10.1080/00207390600712539>
- Ma, L. (2020). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States* (3rd ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003009443>
- Manuel, D., & Freiman, V. (2017). Differentiating instruction using a virtual environment: A study of mathematical problem posing among gifted and talented learners. *Global Education Review*, 4(1), 78–98.
- Marco, N., & Palatnik, A. (2024). Teachers pose and design context-based mathematics tasks: What can be learned from product evolution? *Educational*

- Studies in Mathematics*, 115, 223–246. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10271-8>
- Mariotti, M. A. (1999). *Geometry: Dynamic intuition and theory*. (hal-00190493)
- Mariotti, M. A., & Pedemonte, B. (2019). Intuition and proof in the solution of conjecturing problems. *ZDM Mathematics Education*, 51, 759–777. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01059-3>
- Martínez-Cruz, A. M., Contreras, J. N., Diekelman, A., & Louchart, C. (2001). Problem solving and problem posing in geometry with dynamic software.
- Mayring, P. (2014). *Qualitative content analysis: Theoretical foundation, basic procedures and software solution*. Klagenfurt. <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0168-ssoar-395173>
- Merriam, S. B., & Grenier, R. S. (Eds.). (2019). *Qualitative research in practice: Examples for discussion and analysis*. John Wiley & Sons.
- Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2024). *Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli: Ortaokul 5, 6, 7 ve 8. sınıflar öğretim programı*. Ankara: Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları. <https://mufredat.meb.gov.tr/>
- Mogetta, C., Olivero, F., & Jones, K. (1999a). Designing dynamic geometry tasks that support the proving process. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 19(3), 97–102.
- Mogetta, C., Olivero, F., & Jones, K. (1999b). Providing the motivation to prove in a dynamic geometry environment. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 19(2), 91–96.
- Muldner, K., & Burleson, W. (2015). Utilizing sensor data to model students' creativity in a digital environment. *Computers in Human Behavior*, 42, 127–137.
- Mulligan, J. (2015). Looking within and beyond the geometry curriculum: Connecting spatial reasoning to mathematics learning. *ZDM Mathematics Education*, 47, 511–517. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0696-1>
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2015). *Strategic use of technology in teaching and learning mathematics: A position of the National Council of Teachers of Mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Research Council. (2000). *How people learn: Brain, mind, experience, and school: Expanded edition*. The National Academies Press. <https://doi.org/10.17226/9853>

- Ng, O. L., Shi, L., & Ting, F. (2020). Exploring differences in primary students' geometry learning outcomes in two technology-enhanced environments: Dynamic geometry and 3D printing. *International Journal of STEM Education*, 7, 50. <https://doi.org/10.1186/s40594-020-00244-1>
- Olivero, F. (1999). Cabri-géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations. In W. Maull & J. Sharp (Eds.), *Proceedings of the 4th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. University of Plymouth.
- Olivero, F. (2002). *The proving process within a dynamic geometry environment* [Doctoral dissertation, University of Bristol]. University of Bristol. (ISBN 0-86292-535-5)
- Olivero, F., & Robutti, O. (2002). An exploratory study of students' measurement activity in a dynamic geometry environment. In *Proceedings of CERME 2* (Vol. 1, pp. 215–226). Mariánské Lázně, Czech Republic.
- Olivero, F., & Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 12, 135–156. <https://doi.org/10.1007/s10758-007-9115-1>
- Olsher, S., Abrahamson, D., Arcavi, A., Arzarello, F., Chazan, D., Clark-Wilson, A., Leikin, R., Sinclair, N., & Yerushalmy, M. (2023). Problem solving with technology: Multiple perspectives on mathematical conjecturing. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel, & M. Tabach (Eds.), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 134–158). PME 46.
- Oxman, V., Stupel, M., & Segal, R. (2017). On teaching extrema triangle problems using dynamic investigations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(4), 603–616. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1259514>
- Öçal, M. F., Kar, T., Güler, G., & İpek, A. S. (2020). Comparison of prospective mathematics teachers' problem-posing abilities in paper-pencil test and on dynamic geometry environment in terms of creativity. *Journal of Research in Mathematics Education*.
- Özçakır, B., & Çakıroğlu, E. (2019). Effects of dynamic geometry activities on seventh graders' learning on area of quadrilaterals. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 20, 257–271.
- Palatnik, A., & Dreyfus, T. (2018). Students' reasons for introducing auxiliary lines in proving situations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 52. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.10.004>

- Palatnik, A., & Sigler, A. (2018). Focusing attention on auxiliary lines when introduced into geometric problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(2), 202–215. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1489076>
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods* (3rd ed.). Sage.
- Pea, R. D. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 89–122). Erlbaum.
- Pelczer, I., & Gamboa, F. (2009). Problem posing: Comparison between experts and novices. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 353–360). PME.
- Pittalis, M., & Drijvers, P. (2023). Embodied instrumentation in a dynamic geometry environment: Eleven-year-old students' dragging schemes. *Educational Studies in Mathematics*, 113, 181–205. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10222-3>
- Polya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.). Princeton University Press.
- Ramírez, M. C. (2006). A mathematical problem-formulating strategy. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 79–90.
- Ramírez, M. C., Pérez, M. M. Á., & Hernández, N. G. (2022). A strategy for enhancing mathematical problem posing. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 15, 55–70.
- Rott, B., Specht, B., & Knipping, C. (2021). A descriptive phase model of problem-solving processes. *ZDM – Mathematics Education*, 53, 737–752. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01244-3>
- Ruthven, K. (2019). Problematising learning to teach through mathematical problem posing. *International Journal of Educational Research*, 98, Article 101377. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.07.004>
- Santos-Trigo, M. (2023). Trends and developments of mathematical problem-solving research to update and support the use of digital technologies in post-confinement learning spaces. In T. L. Toh, M. Santos-Trigo, P. H. Chua, N. A. Abdullah, & D. Zhang (Eds.), *Problem posing and problem solving in mathematics education* (pp. [17–40]). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-99-7205-0_2
- Santos-Trigo, M., & Moreno-Armella, L. (2016). The use of digital technology to frame and foster learners' problem-solving experiences. In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 189–207). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_12

- Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM – Mathematics Education*, 48, 827–842. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0757-0>
- Sariyasa. (2017). Creating dynamic learning environment to enhance students' engagement in learning geometry. *Journal of Physics: Conference Series*, 824, 012057. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/824/1/012057>
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 338–355. <https://doi.org/10.2307/749440>
- Schoenfeld, A. H. (1992). On paradigms and methods: What do you do when the ones you know don't do what you want them to? Issues in the analysis of data in the form of videotapes. *The Journal of the Learning Sciences*, 2(2), 179–214. <http://www.jstor.org/stable/1466838>
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Journal of Education*, 196(2), 1–38. <https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Schoenfeld, A. H. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM – Mathematics Education*, 52, 1163–1174. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01162-w>
- Schoenfeld, A. H. (2023). Commentary on Part III of *Mathematical challenges for all: On problems, problem-solving, and thinking mathematically*. In R. Leikin (Ed.), *Mathematical challenges for all* (pp. [415–428]). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8_29
- Schwartz, J. L. (1992). Can we solve the problem-solving problem without posing the problem-posing problem? In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies* (NATO ASI Series 89, pp. 167-176). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-58142-7_12
- Segal, R. (2024). Mathematics teachers' PCK development as a result of posing problems in a dynamic geometry environment. In *ICERI2024 Proceedings* (pp. 4159–4165). IATED. <https://doi.org/10.21125/iceri.2024.1049>
- Segal, R., Oxman, V., & Stupel, M. (2021). Using dynamic geometry software to enhance specialized content knowledge: Pre-service mathematics teachers' perceptions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(3), em0647. <https://doi.org/10.29333/iejme/11065>
- Segal, R., Stupel, M., Sigler, A., & Jahangiril, J. (2018). The effectiveness of the “what if not” strategy coupled with dynamic geometry software in an inquiry-based

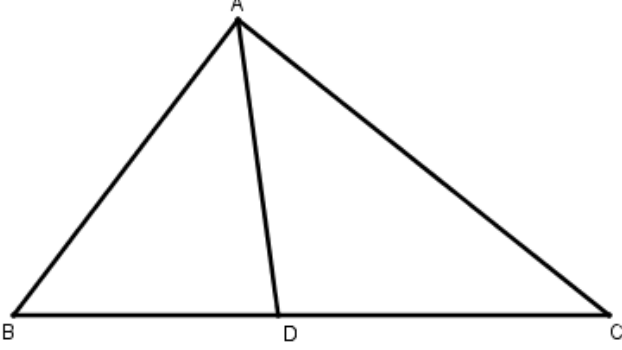
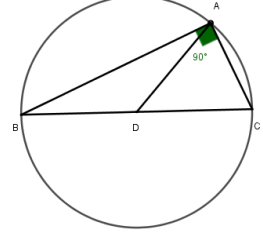
- geometry classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), 1099–1109. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1452302>
- Septian, A., Inayah, S., Suwarman, R. F., & Nugraha, R. (2020). GeoGebra-assisted problem-based learning to improve mathematical problem-solving ability. In *SEMANTIK Conference of Mathematics Education (SEMANTIK 2019)* (pp. 67–71). Atlantis Press.
- Sertöz, A. S. (2023). *Öklid'in Elemanları* (5. baskı). TÜBİTAK Yayınları.
- Shriki, A., & Lavy, I. (2012). Problem posing in a dynamic geometry environment and the development of mathematical insights. *The International Journal of Learning*, 18(5), 61–70. <https://doi.org/10.18848/1447-9494/CGP/v18i05/47613>
- Siller, H. S., Cevikbas, M., Geiger, V., & Greefrath, G. (2022). The role of digital resources in mathematical modelling research. In *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 152–155). PME.
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28. <http://www.jstor.org/stable/40248099>
- Silver, E. A. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives.
- Silver, E. A. (2023). Conclusion: Mathematics problem posing and problem solving—Some reflections on recent advances and new opportunities. In T. L. Toh, M. Santos-Trigo, P. H. Chua, N. A. Abdullah, & D. Zhang (Eds.), *Problem posing and problem solving in mathematics education* (pp. [265–279]). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-99-7205-0_14
- Silver, E. A., & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics*, 12(3), 129–135.
- Sinclair, N., & Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry. In M. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 571–596). Springer.
- Singer, F. M., & Voica, C. (2015). Is problem posing a tool for identifying and developing mathematical creativity? In F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing* (pp. 141–174). Springer.
- Singer, F. M., Voica, C., & Pelczer, I. (2017). Cognitive styles in posing geometry problems: Implications for assessment of mathematical creativity. *ZDM – Mathematics Education*, 49, 37–52. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0820-x>

- Sosa-Martín, D., Perdomo-Díaz, J., Bruno, A., Almeida, R., & García-Alonso, I. (2024). The influence of problem-posing task situation: Prospective primary teachers working with fractions. *Journal of Mathematical Behavior*, 73, Article 101139. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101139>
- Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Sage.
- Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis)understand science and mathematics: Intuitive rules*. Teachers College Press.
- Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518–525). Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Sua, C., Gutiérrez, A., & Jaime, A. (2023). From 2D to 3D: Support of a 3-dimensional dynamic geometry environment in learning proof. In *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. PME.
- Tirosh, D., & Tsamir, P. (2022). Missing and mis-in concept images of parallelograms: The case of Tal. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 981–997. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10175-0>
- Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 81–95. <http://www.jstor.org/stable/40284536>
- Ubuz, B., Üstün, İ., & Erbaş, A. K. (2009). Effect of dynamic geometry environment on immediate and retention level achievements of seventh grade students. *Eurasian Journal of Educational Research*, 35.
- Ünlü, M., & Ertekin, E. (2023). Geometri öğretimi. In E. Ertekin & M. Ünlü (Eds.), *Geometri ve ölçme öğretimi* (ss. 37–62). Pegem Akademi.
- Van Harpen, X. Y., & Presmeg, N. C. (2013). An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 117–132. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9442-8>
- Villiers, M. D. (2013). 3D generalisations of Viviani's theorem. *The Mathematical Gazette*, 97(540), 441–445. <https://doi.org/10.1017/S0025557200000188>
- Weiss, M. K., & Moore-Russo, D. (2012). Thinking like a mathematician. *The Mathematics Teacher*, 106(4), 269–273. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.106.4.0269>
- Wells, D. (1990). Are these the most beautiful? *The Mathematical Intelligencer*, 12(3), 37–41. <https://doi.org/10.1007/BF03024015>

- Willig, C. (2013). *Introducing qualitative research in psychology* (3rd ed.). McGraw Hill/Open University Press.
- Yıldırım, C. (2021). *Matematiksel düşünme*. Remzi Kitabevi.
- Yükseköğretim Kurulu (YÖK). (2018). *İlköğretim matematik öğretmenliği lisans programı*. <https://www.yok.gov.tr>
- Zengin, Y. (2019). Development of mathematical connection skills in a dynamic learning environment. *Education and Information Technologies*, 24, 2175–2194. <https://doi.org/10.1007/s10639-019-09870-x>
- Zhang, L., Cai, J., Song, N., Zhang, H., Chen, T., Zhang, Z., & Guo, F. (2022). Mathematical problem posing of elementary school students: The impact of task format and its relationship to problem solving. *ZDM–Mathematics Education*, 54, 497–512. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01324-4>
- Zhang, L., Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2025). Approaches to supporting and measuring mathematical problem posing: A systematic review of interventions in mathematics education. *International Journal of Science and Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s10763-025-10542-1>
- Ziatdinov, R., & Valles, J. R., Jr. (2022). Synthesis of modeling, visualization, and programming in GeoGebra as an effective approach for teaching and learning STEM topics. *Mathematics*, 10(3), 398. <https://doi.org/10.3390/math10030398>

EKLER

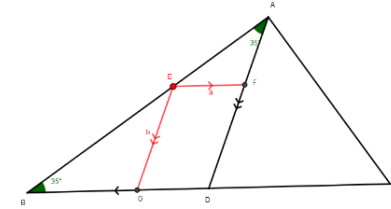
Ek- 1. Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

No	Problem kurma durumu	Problem kurma durumunun matematiksel içeriği	Örnek problem kurma durumları
1	Aşağıda size bir ABC üçgeni verilmiştir. BC kenarı üzerinde bir D noktası bulunmaktadır. ADB ve ADC üçgenleri birer ikizkenar üçgenler ve $AD = BD = DC$ dir.  (Arzarello vd., 2002, s. 67; Olivero, 1999, s.6)	İkizkenar üçgen Muhteşem üçlü Öklid bağıntısı Yükseklik Dik açı Çevre Açısı Çap Diklik merkezi Kenar orta dikmelerin merkezi Çevrel çember Stewart teoremi Trigonometrik bağıntılar	a. ABC üçgeninde A açısının 90° olduğunu doğrulayınız. <i>Örnek gösterim;</i>  b. ABC üçgeninin maksimum alana sahip olması nasıl mümkün olur? c. ABC üçgeninde A noktasının üçgenin diklik merkezi olduğunu gösteriniz.

Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

- d. AB kenarı üzerinde alınan bir E noktasından eş kenarlara paralel çizilen doğru parçalarının toplamının, eş kenarlardan birinin uzunluğuna eşit olduğunu doğrulayınız.

Örnek gösterim;



- e. ABC üçgeninde A açısının 90° olduğunu ispatlayınız.

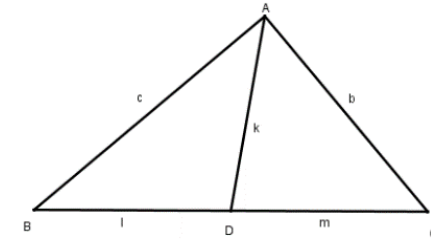
- f. C açısı 35° olduğuna göre diğer açı ölçülerini bulunuz.

Açıklama;

Bu problem hesaplama türü problem örneği olup, buna benzer açı, kenar ve alanlar arasında çeşitli problem örnekleri kurulabilir.

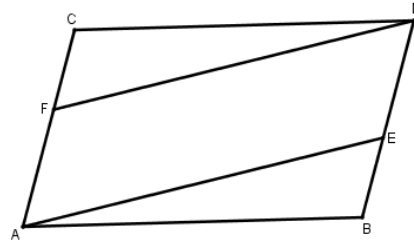
- g. Aşağıdaki şekilde $k^2 = \frac{b^2 \cdot l + c^2 \cdot m}{l+m} - l \cdot m$ olduğunu gösteriniz (Stewart teoremi).
-

Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları



2

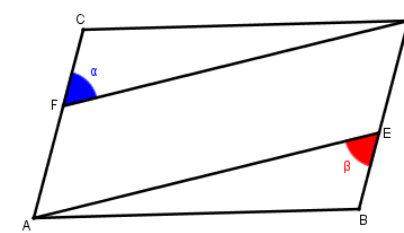
Aşağıda size bir ABCD paralelkenarı verilmiştir.
 $|AE| \parallel |DF|$ dir.



(Leikin & Grossman, 2013, s. 519)

Paralelkenar
Benzerlik
Üçgen
Açıortay
Köşegen
Açı
Alan bağıntıları

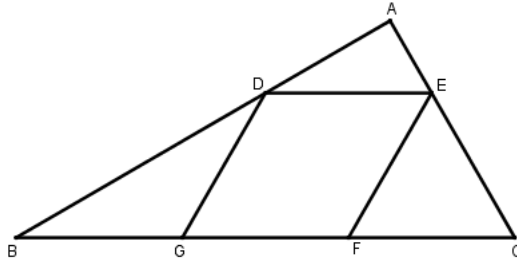
- a. AEDF dörtgeninin bir paralelkenar olduğunu doğrulayınız.
b. $\angle AEB = \angle CFD$ olduğunu gösteriniz



- c. $3|BE|=|DE|$ olduğuna göre Alan (ABE)/Alan (ABDC)=?

Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

- 3 Aşağıdaki geometrik şekilde DEFG bir eşkenar dörtgen olup, $|BG|=|GF|=|FC|$ dir.



(Leikin & Grossman, 2013, s. 519; Levav-Waynberg & Leikin, 2012, s. 74; Muldner & Barleson, 2014, s. 4)

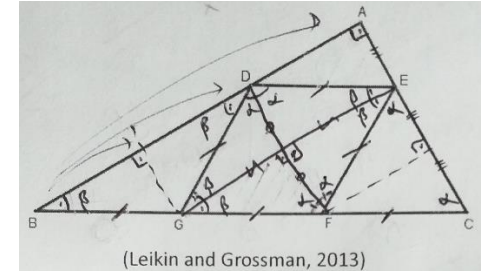
Eşkenar dörtgen
Dik üçgen
Ağırlık merkezi
Benzerlik
Alan bağıntıları
Açı
Bütünler açı
Dik açı
Köşegen
Kenar orta dikmeler

- a. $A(\triangle BDG) = A(\triangle FED)$ eşitliğini gösteriniz.

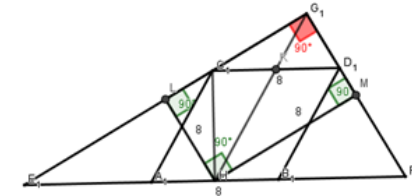
- b. Verilen şekilde mümkün olan benzerlik oranlarını belirleyiniz.

Örnek gösterim;

Sadece eşkenar dörtgenin özelliklerinden yararlanarak dik ve ikizkenar üçgenler arasında benzerlik oranları kurulabilir.



- c. ABC üçgeninin kenar orta dikmelerinin kesişim noktasını ve A köşesini köşegen

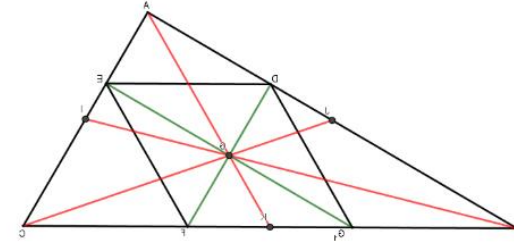


kabul eden dörtgenin dikdörtgen olduğunu doğrulayınız.

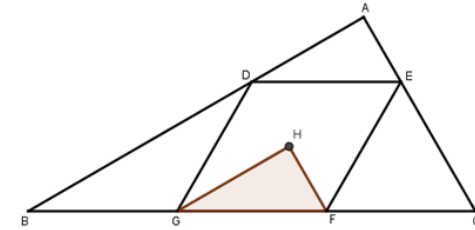
Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

- d. ABC üçgeninin ağırlık merkezi ile eşkenar dörtgenin köşegenlerinin kesim noktasının aynı nokta olduğunu gösteriniz.

Örnek gösterim;



- e. A açısının 90° olduğunu ispatlayınız
f. Aşağıdaki şekilde $A(\triangle GHF)/A(\triangle BAC)=?$

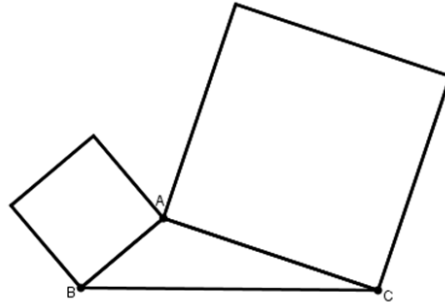


Açıklama;

f maddesi hesaplama türü problem örneği olup, şekil üzerinde açı, kenar ve alanlar arasında çeşitli hesaplama problemleri de kurulabilir.

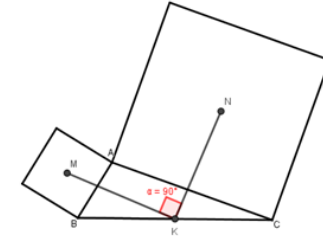
Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

- 4 Aşağıdaki geometrik şekilde size bir ABC üçgeni verilmiştir.
Bu ABC üçgeninin AB ve AC kenarları üzerinde üçgenin dışına doğru kareler oluşturulmuştur.



Üçgen
Kare
Bottema teoremi
Napolyon teoremi
Van Aubel teoremi
Pisagor

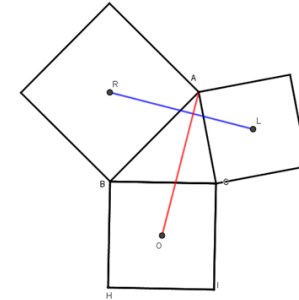
- a. Verilen şekilde karelerin merkezlerinin BC kenarının orta noktasında dik kesiştiğini ispatlayınız.



Açıklama;

Herhangi bir ABC üçgeninin AB ve AC kenarlarının üzerinde sırasıyla M ve N merkezli kareler yerleştirilsin. $|MK|=|NK|$ ve $MK \perp NK$ (Bottema Teoremi)

- b. Herhangi bir üçgenin üç kenarı üzerinde kareler yerleştirilmiş olsun. Bu durumda $|AO|=|RL|$ ve $AO \perp RL$



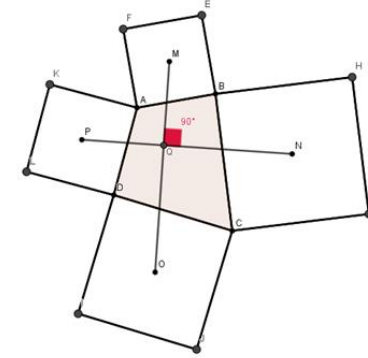
Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

Açıklama;

b maddesindeki durum herhangi bir dörtgen için de geçerlidir. Bu keşifler ispat, doğrulama ve hesaplama türü problemlere dönüştürülebilir.

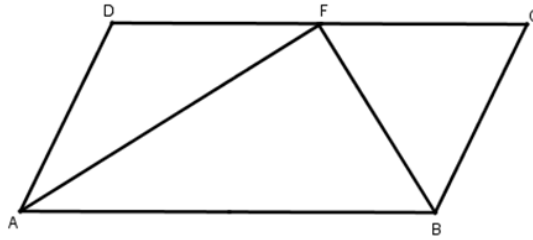
Örnek Gösterim;

Aşağıdaki şekilde $|MO|=|PN|$ ve $MO \perp PN$ dir. Aynı zamanda P, M, N ve O merkezli karelerin ağırlık merkezlerini birleştiren doğru parçaları ABCD dörtgeninin köşegenlerinin kesim noktasıdır.



Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

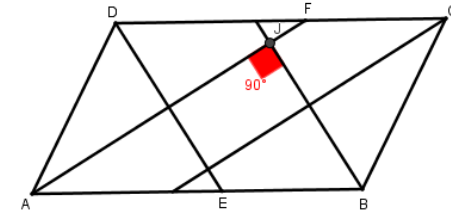
- 5 Aşağıda size bir ABCD paralelkenarı verilmiştir.
ABCD paralelkenarının A ve B köşelerine ait açkırtay
doğruları oluşturulmuştur.



Dörtgen
Paralelkenar
Eşkenar Dörtgen
Kare
İç Açkırtay
İç Açkırtay Doğruları
Alan Bağıntıları
Konveks çokgen
Konkav çokgen

- a. ABCD paralelkenarının iç açılarının
açkırtayları bir dikdörtgen oluşturmaktadır.

Örnek gösterim;



Açıklama;

*Bu keşif farklı formatlarda problemlere
dönüştürülebilir*

- b. ABCD paralelkenarının alanı ile şeklin iç
açkırtaylarının oluşturduğu şeklin alanı
arasında bir ilişkinin olup olmadığını
araştırınız.
- c. Bir dörtgenin komşu iç açkırtaylarının
eğimleri çarpımı -1 olduğuna göre bu
dörtgenin iç açkırtaylarının oluşturduğu
geometrik şekil hakkında argüman belirtiniz.
- d. Herhangi bir dörtgenin iç açkırtaylarının
kesişimi her zaman dış bükey çokgen midir?

Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

- e. Bir geometrik şeklin iç açıortaylarının oluşturduğu geometrik şekil bir eşkenar dörtgen ise bu geometrik şekil hakkında gerekçeli bir varsayımda bulununuz (argüman belirtiniz).

Açıklama;

Paralelkenarın iç açıortaylarının kesişimi özel bir hali olan dikdörtgen oluştururken, yine paralelkenarın özel bir hali olarak dikdörtgenin iç açıortaylarının kesişimi bir eşkenar dörtgendir. Bir sonraki adımda, bir eşkenar dörtgen olarak karenin iç açıortaylarının kesişimi bir nokta belirtmektedir.

Bu süreç tersten okunduğunda tanımsız elemanın (örn., nokta) aksiyom ve postulatlarla (Öklid) birlikte matematikte tanımlı elemanları (örn., kare) oluşturduğu ifade edilebilir.

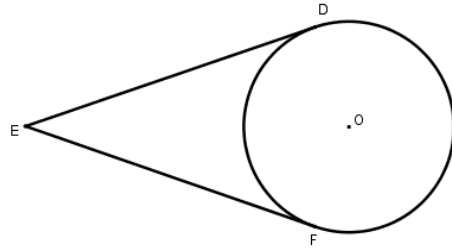
- f. Bir ikizkenar yamuğun iç açılarının açıortayları bir deltoid olduğunu gösteriniz.
- g. ABCD bir dörtgendir. Dörtgenin iç açılarının açıortayları H, K, L ve M noktalarında arka arkaya çiftler halinde kesişir. Dörtgen HKLM hakkında ne gözlemliyorsunuz? Bulduklarınızı başka birini ikna edecek şekilde açıklayın (Mogetta vd., 1999b, s. 99).

- h. ABCD paralelkenarının iç açıortaylarının oluşturduğu şeklin bir dikdörtgen olduğunu kanıtlayınız.

- i. Bir geometrik şeklin iç açıortaylarının oluşturduğu geometrik şekil bir dikdörtgen ise bu geometrik şeklin paralelkenar olduğunu kanıtlayınız.
-

Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

- 6 Aşağıdaki geometrik şekilde O merkezli bir çember ve bu çembere dışındaki E noktasından teğet iki doğru parçası verilmiştir.

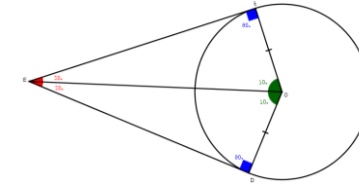


(Hoehn, 1991, s. 10)

Çember
Teğet
Çemberde kuvvet
Çemberde uzunluk

- a. Çemberin dışındaki bir noktadan çembere teğet doğru parçalarının eşit uzunlukta olduğunu gösteriniz.

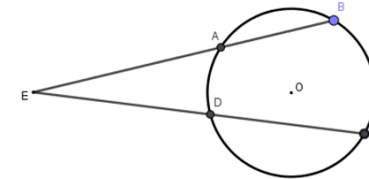
Örnek;



$$|DE| = |EF|$$

- b. Çemberin dışındaki bir noktadan çembere çizilen teğet doğru parçalarının oluşturduğu bölgede, merkez açı ile çember çizilen teğetlerin arasındaki açının birbirini 180° tamamladığını doğrulayınız.

- c. Aşağıdaki şekilde EB ve EC doğru parçalarının her biri O merkezli çemberi iki noktada kesmektedir. $|EA| \cdot |EB| = |ED| \cdot |EC|$ olduğunu gösteriniz.

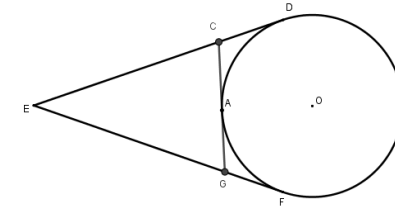


Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

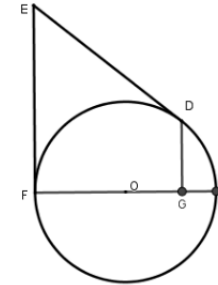
Açıklama;

Bu problem, a maddesindeki durumu “Ya teğet olmasaydı ne olurdu?” şeklindeki bir düşünce ile sorgulama örneğidir. Bu yaklaşımla daha farklı problemler kurmak mümkündür.

- d. Aşağıdaki şekilde CG, O merkezli çembere A noktasından teğet olacak şekilde çizilmiştir. Buna göre, $|EF|+|ED|=|EC|+|CG|+|GE|$ doğruluğunu gösteriniz.



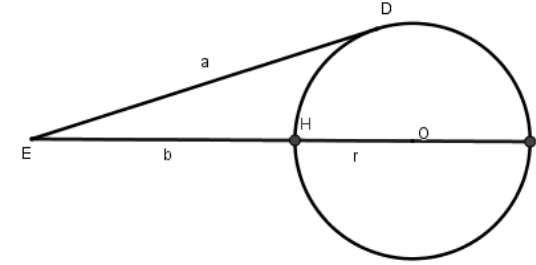
- e. Aşağıdaki şekilde $|FG| \cdot |FO| = |EF| \cdot |DG|$ eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.



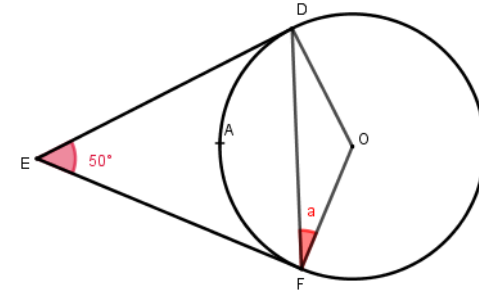
Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

f.

Aşağıdaki şekilde $a^2 = b(b + 2r)$ olduğunu kanıtlayınız.



g. Aşağıdaki şekilde α açısı ölçüsünü bulunuz.

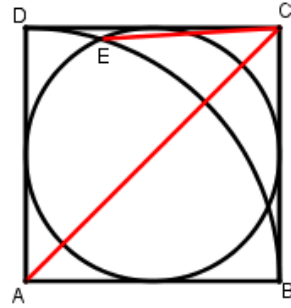


Açıklama;

g maddesi hesaplama türü problem olup, şekilde uzunluk ve açı ölçüleri arasında daha farklı problemler kurmak mümkündür.

Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

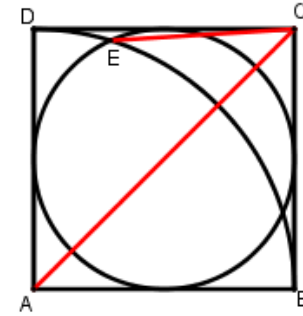
- 7 Aşağıdaki geometrik şekilde bir ABCD karesi, ABCD karesine içten teğet bir çember ve A merkezli AB yarıçapına sahip bir yay bulunmaktadır.



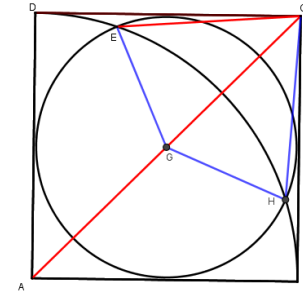
(Singer vd., 2017, s. 39)

Çember
İçteğet
Doğru parçası
Çember yayı
Çember
Çevre açısı
Merkez açısı
Alan bağıntıları
Trigonometrik ilişkiler

- a. Aşağıdaki şekilde, $2|EC|=|AC|$ olduğunu kanıtlayınız.

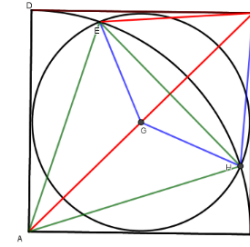


- b. Aşağıdaki şekilde ECHG dörtgeninin köşegenlerinin dik kesiştiğini doğrulayınız.



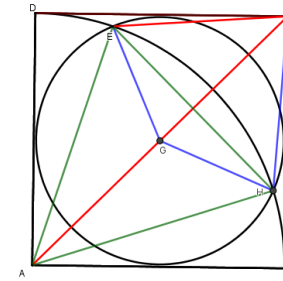
Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

- c. Aşağıdaki şekilde, G noktasının AEH üçgeninin ağırlık merkezi olup olmadığını araştırınız.



- d. Yukarıdaki şekilde, AECH dörtgeni ile ECHG dörtgeninin alanları oranının $\frac{1}{2}$ olduğunu doğrulayınız.

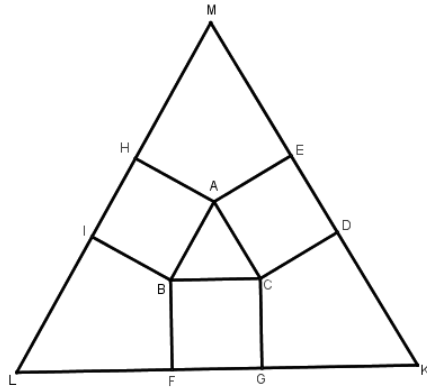
- e. Aşağıdaki şekilde oranı $\frac{1}{2}$ olan ilişkileri ortaya çıkarınız.



Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

8

Aşağıdaki geometrik şekilde bir ABC eşkenar üçgeni ve bu eşkenar üçgenin kenarlarından dışarı doğru kareler oluşturulmuştur. Bunun sonrasında yeniden bir üçgen oluşturulmuştur.



(Martínez-Cruz vd., 2001, s. 22)

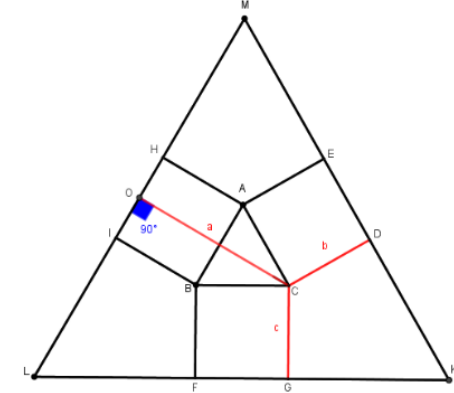
Eşkenar Üçgen
Kare
Ağırlık Merkezi
Kenarortay
Açıortay
Açıortay doğrusu
Benzerlik
Yükseklik
Carnot Teoremi
Trigonometrik
bağıntılar
Oran

a. $A(\triangle ABC)$ ile $A(\triangle KLM)$ arasında bir ilişki kurunuz.

Açıklama;

Problem a, şekildeki büyük ve küçük üçgen ile üçgen ve kareler arasında alan bağıntılarının varlığını sorgulama odaklıdır.

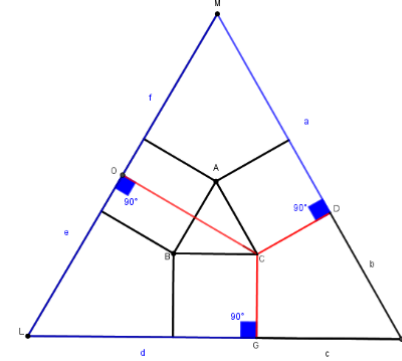
b. Aşağıdaki geometrik şekilde, $|CD|+|CG|+|CO|$ toplamının KLM üçgeninin yüksekliğine eşit olduğunu



c. Üçgenin içinde alınan herhangi bir noktadan üçgenin kenarlarına indirilen dikmelerin ayırdığı doğru parçalarının karşılıklı kareleri toplamının birbirine eşit olduğunu ispatlayınız.

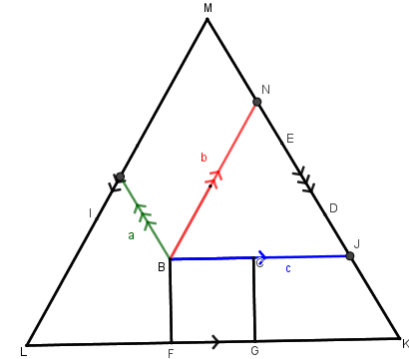
$$|KD|^2 + |MO|^2 + |LG|^2 = |DM|^2 + |OL|^2 + |GK|^2$$

Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları



- d. Eşkenar üçgende üçgenin içindeki bir noktadan kenarlara çizilen paralel doğru parçalarının uzunlukları toplamı eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğuna eşittir.

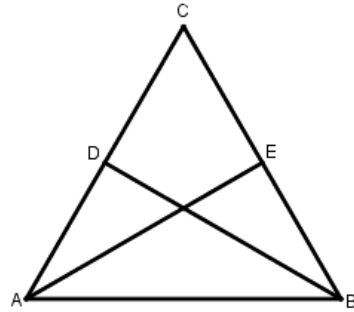
Örnek gösterim;



$$a+b+c=|ML|=|MK|=|KL|$$

Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

- 9 Aşağıdaki geometrik şekilde bir ABC ikizkenar üçgeni bulunmaktadır. Bu geometrik şekilde D ve E noktaları üçgenin eş kenarlarının orta noktalarıdır. Bu noktalara üçgenin karşı köşelerinden doğru parçaları oluşturulmuştur.



(Conteras, 2007, s.16)

Üçgen
İkizkenar üçgen
Kenar
Doğru parçası
Kenarortay
Açıortay
Yükseklik

- a. D ve E noktalarını karşı köşeleri ile birleştiren doğru parçalarının kesim noktasının üçgenin ağırlık merkezi olduğunu doğrulayınız.
- b. ABC üçgeninden hareketle herhangi bir üçgenin kenarortayları arasında nasıl bir ilişki vardır?

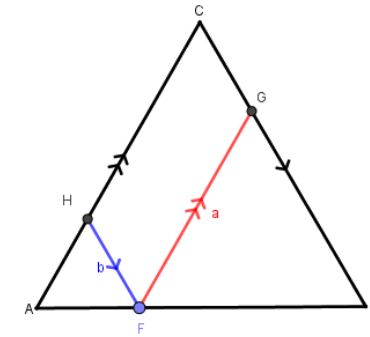
Açıklama;

Bir çeşitkenar üçgenin kenarortayları arasında bir ilişki bulunmazken, ikizkenar üçgenin kenarortayları arasında eşlik bakımından bir ilişki bulunmaktadır. Bunun yanında kenar uzunlukları ile kenara ait kenarortay uzunlukları arasında da ters ilişki bulunmaktadır.

- c. $|AE|=|BD|$ olduğunu ispatlayınız.
- d. Kenarortayları eşit uzunlukta olan bir üçgenin ikizkenar üçgen olduğunu kanıtlayınız.
- e. 2 eş kenarortayı bulunan bir üçgende kenarortaylara karşılık gelen kenarların eş olduğunu ispatlayınız.

Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

- f. İkizkenar üçgende eş olmayan kenar üzerinde alınan herhangi bir noktadan eş kenarlara çizilen paralele doğru parçalarının toplamı ikizkenar üçgenin eş kenarlarından birinin uzunluğuna eşittir.
Örnek gösterim;

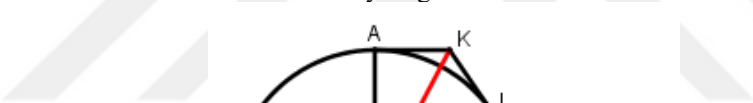


- g. Dik ikizkenar üçgende eş kenarlara ait kenarortayların eş olduğunu kanıtlayınız.
- h. Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğunun dik kenarlara ait kenarortay uzunluklarının toplamının 5 katı olduğunu kanıtlayınız.

Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması a

10 Aşağıdaki geometrik şekilde O merkezli bir daire bulunmaktadır. AK, KM ve BM doğru parçaları, O merkezli daireye teğettir.

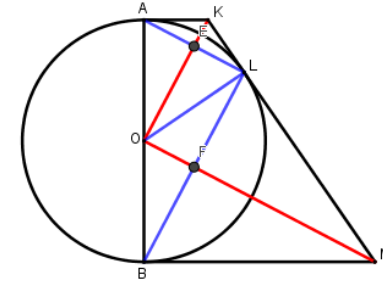
10



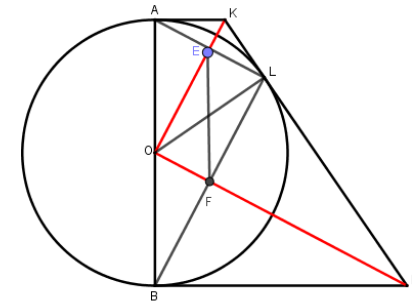
(Leikin, 2014, s. 72; Leikin & Elgrably, 2015, s. 1025)

Daire
Teğet
Dik aç
Öklid bağıntısı
Merkez
Yarıçap
Çap
Alan bağıntıları
Oran

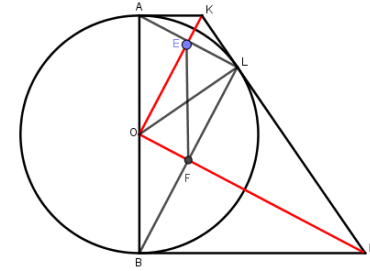
a. Aşağıdaki şekilde teğet doğru parçaları arasında bir bağıntı bulunuz.



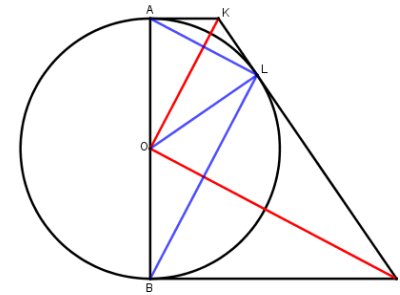
b. Aşağıdaki şekilde $2|EF|=|AB|$ olduğunu doğrulayınız.



- c. Aşağıdaki şekilde ELFO dörtgeninin bir dikdörtgen olduğunu doğrulayınız.



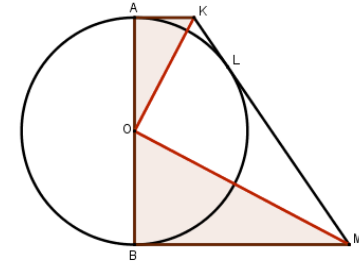
- d. Aşağıdaki şekilde $\frac{A(BOL)}{A(AKL)} = \frac{A(BML)}{A(OAL)}$ ile $\frac{A(ALB)}{A(AKMB)} = \frac{1}{2}$ bağıntılarının doğruluğunu araştırınız.



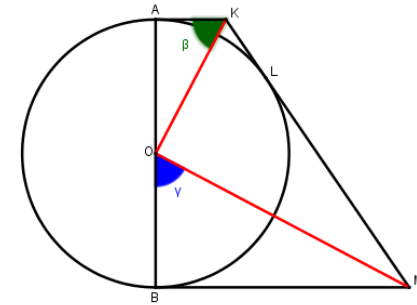
Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

e. $m(\angle KOM) = 90^\circ$ olduğunu kanıtlayınız.

f. Aşağıdaki şekilde $A(\triangle OAK) + A(\triangle OBM) = A(\triangle KOM)$ olduğunu gösteriniz.



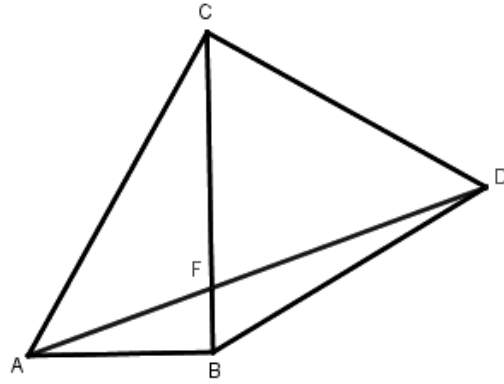
g. Aşağıdaki şekilde β ve γ açılarının eş olduğunu gösteriniz.



Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

11

Aşağıdaki geometrik şekilde ABC bir dik üçgen olup, dik kenarlarından BC kenarı üzerinde BCD eşkenar üçgeni oluşturulmuştur. BC ve AD, F noktasında kesişmektedir. $\angle BCA = 60^\circ$ dir.

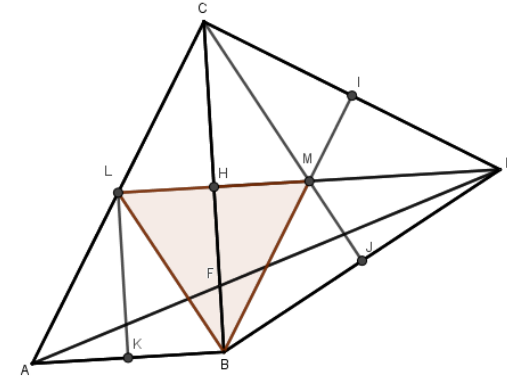


(Leikin & Elgrably, 2020, s. 3)

Dik Üçgen
Eşkenar Üçgen
Kesişim Noktası
Kenarortay
Hipotenüs
Açıortay
Kenar orta dikme
Alan bağıntıları

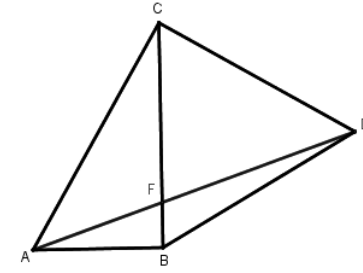
- CBA ve CBD üçgenlerinin kenar orta dikmelerinin aynı doğru üzerinde olduğunu gösteriniz.
- Bu iki üçgenin kenar orta dikmelerini birleştiren doğru parçasının bir kenar kabul eden üçgenin, eşkenar üçgen olduğu doğru gösteriniz

Örnek gösterim;



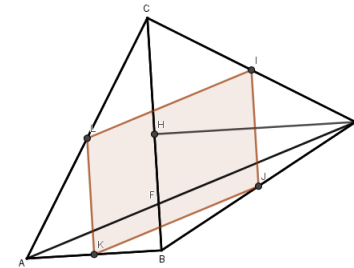
Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

- a. Yukarıdaki şekilde BML üçgeninin alanı ile ABC ve BCD üçgenlerinin alanları arasındaki ilişkileri araştırınız.



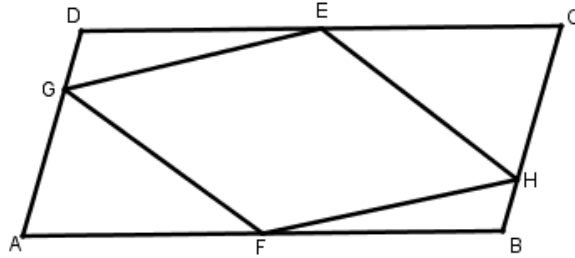
- b. Yukarıda verilen şekilde iki üçgenin her bir kenarına ait orta noktaları birleştiren doğru parçalarının bir paralelkenar olduğunu gösteriniz.

Örnek gösterim;



Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

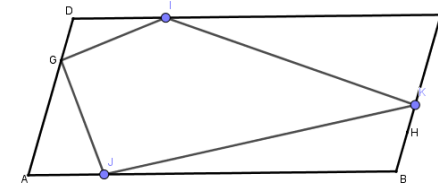
- 12 Aşağıdaki geometrik şekilde ABCD bir paralelkenar olup, E ve F noktaları sırasıyla DC ve AB'nin orta noktalarıdır.



(Kovacs, 2017; Leikin, 2014, s. 65)

Paralelkenar
Orta Nokta
Doğru parçası
Dörtgenler
Varignon Teoremi
Alan bağıntıları
Oran
Dörtgenler hiyerarşisi

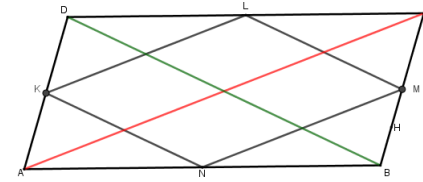
- a. Paralelkenarın karşılıklı orta noktalarını diğer iki kenarda herhangi birer nokta ile birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu dörtgenin alanı ile paralelkenarın alanı arasında bir bağıntı mümkün müdür?
- b. Aşağıdaki ABCD paralelkenarının her bir kenarında alınan birer rastgele noktayı birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu geometrik şeklin alanı ile ABCD paralelkenarının alanı arasında bir bağıntı mümkün müdür?



Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

- c. ABCD paralelkenarında dört kenarın orta noktasını birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu geometrik şeklin çevresinin ABCD paralelkenarının köşegenleri toplamına eşit olduğunu doğrulayınız.

*Açıklama ve örnek gösterim;
c maddesinde doğrulanması istenen durum,
şekilde ortaya çıkabilecek bir keşiftir.*

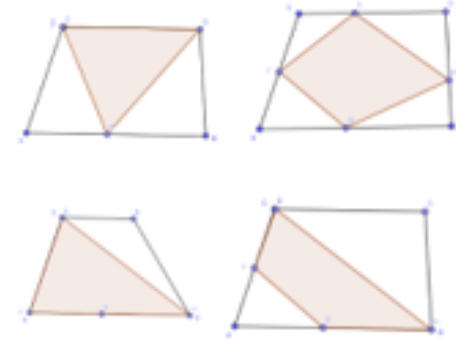


$$\text{Ç(KLMN)} = |AC| + |BD|$$

- d. ABCD paralelkenarında her bir kenar üzerinde K, L, M ve N noktaları alınmıştır. Bu noktaları birleştiren geometrik şeklin çevresi ABCD paralelkenarının köşegenleri toplamına eşittir. Öyleyse K, L, M ve N noktaları hakkında neler söylenebilir? Bu noktalar hakkında argüman belirtiniz.
-

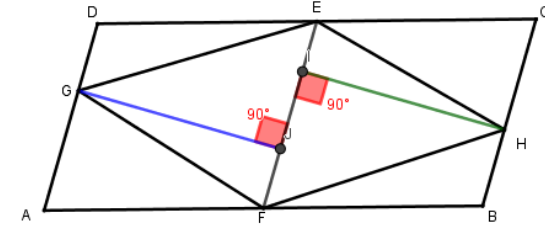
Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

- e. ABCD paralelkenarını en genel hâli olan bir yamuk olarak düşününüz. Bu durumda ABCD yamuğunun her bir kenarında alacağınız rastgele birer noktanın oluşturduğu geometrik şekil ile ABCD yamuğu arasında mümkün olan alan bağıntıları ortaya çıkarınız.



- f. Paralelkenarın karşılıklı orta noktalarını diğer iki kenarda herhangi birer nokta ile birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu dörtgenin alanının, ABCD paralelkenar alanının yarısı olduğunu kanıtlayınız.
-

Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

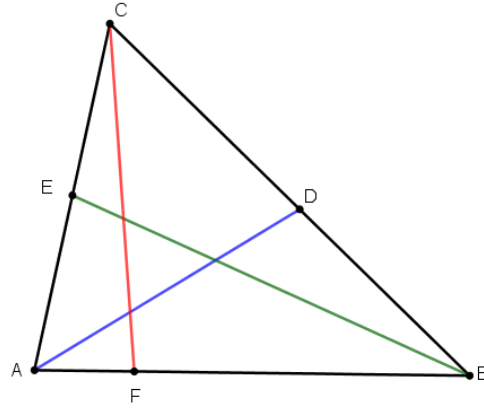


- g. Herhangi dörtgende bitişik kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçaları, paralelkenar oluşturur.
- h. İki kardeş bir keşif gezisinde yeni bir ada keşfetmişlerdir. Gökyüzünden adanın düzensiz bir dışbükey dörtgen şeklinde olduğunu fark ederler. Adanın gerçek boyutlarından emin değiller ama adayı ikisi arasında âdil bir şekilde paylaşırabilmenin yolunu belirlemek istiyorlar. Bu iki kardeşe keşfettikleri adayı âdil bir şekilde paylaştınız.
-

Ek-1 (Devam). Problem kurma etkinliklerinin oluşturulması amacıyla hazırlanan taslak problem kurma durumları

13

Aşağıdaki geometrik şekilde ABC üçgeninin her bir kenarına karşı köşelerinden doğru parçaları çizilmiştir. Bu geometrik şekil üzerinde matematiksel araştırmalar yoluyla problemler kurunuz.



(Contreras, 2015, s. 633)

Seva (Ceva) Teoremi
Üçgen
Kenarortay
Açıortay
Yükseklik

- a. $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|CE|}{|EA|} = 1$ ne zaman mümkündür
- b. D, E, F noktaları bulundukları kenarı iki eşit parçaya ayırdığında ABC üçgeninde yüksekliklerin kesim noktası hakkında gerekçeli bir varsayım sununuz.

ETİK KURUL KARARI



RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERİ BİLİMLER ETİK KURULU

DEĞERLENDİRME RAPORU

Toplantı Tarihi : 12/07/2023
Toplantı K. Sayısı : 2023/208

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Öğrencisi Melek ŞAHİN'in "Dinamik Geometri Ortamında Problem Kurma: İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Problem Kurma Süreçlerinin İncelenmesi" isimli projesi kapsamında yürütülecek çalışmalar için izin talebi kurulumuzca değerlendirilmiş olup;

- ☒ Etik açıdan uygun bulunmuştur.
- ☐ Etik açıdan uygun bulunmamıştır.
- ☐ Etik açıdan önerilen değişikliklerin yapılmasıyla uygun bulunmuştur.



Prof. Dr. Nebi GÜMÜŞ

Başkan



Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fener Mah. Zihni Derin Yerleşkesi 53100 RİZE
Tel: 0464 223 81 00 Faks: 0464 223 63 28
www.erdogan.edu.tr