



T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

**Dinamik Geometri Yazılımının Öğretmen Adayları ve Öğretmenlerin
Sözsüz İspat Yapma Becerileri Üzerine Etkililiğinin Değerlendirilmesi**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma ÇAKIR

TOKAT

Eylül, 2021



T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

**Dinamik Geometri Yazılımının Öğretmen Adayları ve Öğretmenlerin
Sözsüz İspat Yapma Becerileri Üzerine Etkililiğinin Değerlendirilmesi**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma ÇAKIR

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Esra YILDIZ

TOKAT

Eylül, 2021

ETİK SÖZLEŞME

Bu belge ile bu tezdeki bütün bilgi toplama ve raporlaştırma sürecinin Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'ne, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzuna, genel akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak gerçekleştirildiğini; bu tez çalışmasının “intihal engelleme” programı ile tarandığını, bana ait olmayan tüm bilgi, düşünce ve bulgulara atıf yaptığımı ve kaynağını gösterdiğimi beyan eder, sorumluluğun tarafıma ait olduğunu kabul ederim.

Tarih: 21/09/2021

Fatma Çakır

İmza

Jüri Onay Sayfası

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Fatma ÇAKIR'ın Dinamik Geometri Yazılımının Öğretmen Adayları ve Öğretmenlerin Sözsüz İspat Yapma Becerileri Üzerine Etkililiğinin Değerlendirilmesi adlı çalışması 21/09/2021 tarihinde jürimiz tarafından Matematik ve Fen Bilimleri Eğitim Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Adı Soyadı

İmza

Başkan: Doç. Dr. Gürsel Güler

.....

Üye (Tez Danışmanı): Dr. Öğr. Üyesi Esra YILDIZ

.....

Üye: Doç. Dr. Adem Şahin

.....

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2021

.....

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca tezimle ilgili her konuda danışmanlığıyla bana destek olan, yol gösteren, deneyimlerini her aşamada paylaştan, özellikle tez uygulama sürecinde benimle birlikte çalışan ve manevi olarak desteğini her daim hissettiren Dr. Öğr. Üyesi Esra Yıldız hocama çalışmama verdiği değerli katkılardan dolayı çok teşekkür ederim. Alan uzmanı olarak eserime verdikleri öneri ve düzeltmelerle tezimi şekillendiren jüri üyelerimiz Doç. Dr. Gürsel Güler ve Doç. Dr. Adem Şahin hocalarıma kıymetli katkılarından dolayı çok teşekkür ediyorum. Yüksek lisans eğitimim süresince ders aldığım tüm kıymetli hocalarıma bana kazandırdıkları değerli bilgi ve deneyimlerden ötürü çok teşekkür ederim. Tez uygulama sürecinde üniversite öğrencileri ile çalışabilmem için gerekli izinleri veren Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Rektörlüğü'ne ve çalışmama katılan lisans ve yüksek lisans öğrencilerine çalışmama verdikleri katkılardan dolayı teşekkür ederim.

Bu yolda yürümem için bana daima destek olan, arkamda duran ve bu başarılarımda imzası olan biricik annem ve tez sürecinde kaybını yaşadığım sevgili babam, hayatım boyunca aldığım tüm başarılar sizin eseriniz. Ben bu tezi sizinle yazdım, en büyük teşekkürü sizler hak ediyorsunuz. Babacığım seni çok özleyorum, tüm başarılarımı gördüğünü biliyorum, huzur içinde uyu.

ÖNSÖZ

İspat, pür matematik derslerinde olduğu kadar, matematik eğitimi derslerinde de üzerinde önemle durulması gereken, öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini geliştirme fırsatı sunan bir konudur. Özellikle küçük yaştaki öğrencilerin ispat yapma becerilerini geliştirme yöntemlerinden birisi görselleştirme yaklaşımı olmuştur. Matematik eğitiminde görselleştirme yaklaşımı ile ilgili adı geçen tekniklerden biri sözsüz ispatlardır. Sözsüz ispatlar, ispat becerilerinin gelişimini destekler. Ancak ispatın doğasından dolayı, öğrenciler ve öğretmenler sözsüz ispat yaparken halen zorluklar yaşamaktadırlar. Yaşanılan bu zorlukları çözümlmek için geliştirilen yöntemlerden birisi ispat öğretiminde dinamik geometri yazılımı kullanmaktır. Görsel özellikleri ile ispat öğretiminde kullanılan dinamik geometri yazılımlarından biri GeoGebra dinamik geometri yazılımıdır. Literatürde GeoGebra dinamik geometri yazılımıyla yapılan çalışmalar ile sözsüz ispatlarla yapılan çalışmalara rastlanmaktadır. Ancak sözsüz ispat yöntemini dinamik ortama aktaran çalışmalara oldukça az rastlanmaktadır. Mevcut çalışmada, dinamik geometri yazılımı olan GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan bir eğitim programının matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat becerilerinde nasıl bir değişim sağladığını belirlemek ve katılımcıların süreç hakkındaki görüşlerini almak amacıyla gerçekleştirilmiştir.

Çalışmanın birinci bölümünde problem, çalışmanın amacı, önemi, sayıltıları, sınırlılıkları ve tanımları açıklanmıştır. İkinci bölümde çalışmanın kavramsal çerçevesi doğrultusunda matematiksel ispat, matematik eğitiminde görselleştirme ve sözsüz ispat, matematikte bilgisayar destekli öğretim ve dinamik geometri yazılımları ve GeoGebra ile ilgili kavramsal açıklamalara ve literatürde ilgili çalışmalar sunulmuştur. Üçüncü bölümde, araştırma modeli, katılımcılar, veri toplama araçları, uygulama süreci, veri analiz yöntemleri, çalışmanın geçerlilik ve güvenilirlik çalışmaları hakkında bilgiler verilmiştir. Dördüncü bölümde çalışmanın alt problemleri doğrultusunda incelenen nicel veri analizi sonucunda elde edilen bulgulara, katılımcıların ön-test ve son-test sorularına verdikleri farklı cevaplara ilişkin bulgulara ve GeoGebra eğitim sürecine ait görüşme bulgularına yer verilmiştir. Beşinci bölümde, bulgulardan elde edilen sonuçlara yer verilirken bulgular ilgili literatürde yer alan çalışmalarla benzerlik ve farklılıkları yönünden tartışılmıştır. Altıncı bölümde ise çalışmaya ait genel sonuçlara yer verilmiş ve bu alanda gelecekte yapılacak çalışmalarda dikkat edilmesi gereken hususlara yönelik öneriler sunulmuştur.

ÖZET

DİNAMİK GEOMETRİ YAZILIMININ ÖĞRETMEN ADAYLARI VE ÖĞRETMENLERİN SÖZSÜZ İSPAT YAPMA BECERİLERİ ÜZERİNE ETKİLİLİĞİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

Çakır, Fatma

Yüksek Lisans, Matematik Eğitimi Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Esra Yıldız

Eylül 2021, xvii + 172 sayfa

Bu araştırma, dinamik geometri yazılımı GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan bir eğitim programının, matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat yapma becerileri üzerine etkililiğinin değerlendirilmesi ve katılımcıların bu eğitim süreci hakkındaki görüşlerinin ortaya konulması amacıyla gerçekleştirilmiştir. Araştırmada nicel ve nitel çeşitli veri toplama araçlarının bir arada kullanılmasından dolayı verilerin bir arada yorumlandığı karma araştırma yöntemlerinden sıralı açıklayıcı yöntem kullanılmıştır. Çalışma 2019-2020 eğitim öğretim yılı Orta Karadeniz Bölgesinde bir ilin devlet üniversitesinde İlköğretim Matematik Öğretmenliğinde öğrenim gören üçüncü sınıf 35 matematik öğretmen adayı ve Matematik Eğitiminde yüksek lisans yapan 6 matematik öğretmeni olmak üzere toplam 41 katılımcı ile gerçekleştirilmiştir. Katılımcılar ile öncelikle beş haftalık GeoGebra sözsüz ispat becerilerini geliştirme eğitimi yapılmıştır. Daha sonra katılımcılar arasından ölçüt örnekleme yöntemi ile 9 katılımcı seçilerek çalışma grubu oluşturulmuştur. Araştırmanın verilerini katılımcıların ispat beceri testine verdikleri cevaplar, GeoGebra eğitim sürecinde alınan kamera kayıtları, değerlendirme formları ve ses kayıtları alınarak yapılan görüşmeler oluşturmuştur. Bu çalışmada nicel olarak elde edilen bulguların nitel olarak elde edilen bulgularla desteklenmesinin sonuçları anlamlandırmada daha etkili olacağı düşünüldüğü için üçgenleme metodu kullanılmıştır. Araştırmanın nicel bulguları sonucunda katılımcıların ön-testleri ile son-testleri arasında son-test lehine anlamlı bir farklılık tespit edilmiştir. Bu sebeple dinamik geometri yazılımı olan GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan bir eğitim programının matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat becerilerinin gelişimini desteklediğini söylemek mümkündür. Ayrıca GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan bu eğitim programının, matematik

öğretmenlerinin ispat becerilerini öğretmen adaylarının ispat becerilerinden istatistiksel olarak anlamlı şekilde daha çok geliştirdiği sonucuna ulaşılmıştır. Çalışmanın nitel verilerinde örnek olay incelemesi (case study) kullanılmıştır. Araştırmanın nitel verilerinden ortaya çıkan bulgulara göre katılımcıların GeoGebra ile sözsüz ispat becerilerini geliştirme eğitimi ile ilgili görüşlerinin genel olarak olumlu olduğu, bu etkinliklerdeki ispatların program üzerinde gözlemlenebildiğini ve bu etkinliklerin dikkat çekici, dinamik, pratik ve hassas ölçümlere uygun özellikleri olduğunu belirttikleri görülmüştür. Katılımcılar GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan etkinliklerin ilişki kurabilme, akılda kalma, anlamlandırma, zihinde canlandırma, görselleştirme, somutlaştırma gibi bilişsel becerilerde ve istekli, eğlenerek öğrenme, ön yargıyı kırma gibi duyuşsal becerilerde ispat yapma becerisine etkisini açıkladıkları görülmüştür. Sonuç olarak matematik eğitiminde GeoGebra dinamik geometri yazılımı ile öğrencilerin sözsüz ispat yapma becerilerini geliştirme çalışmaları yapılması önerilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel İspat, Sözsüz İspat, Görselleştirme, Dinamik Geometri Yazılımları, GeoGebra

ABSTRACT

EVALUATION OF THE EFFECTIVENESS OF DYNAMIC GEOMETRY SOFTWARE ON PRE-SERVICE TEACHERS AND TEACHERS' SKILLS IN MAKING NONVERBAL PROOFS

Çakır, Fatma

Master's Thesis, Department of Mathematics Education

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. Esra Yıldız

September 2021, xvii + 172 pages

This research was carried out to evaluate the effectiveness of a training program designed to improve proof skills with the dynamic geometry software GeoGebra on nonverbal proof making skills of mathematics teachers and pre-service teachers and to reveal the opinions of the participants about this training process. Due to the use of various quantitative and qualitative data collection tools in the research, the sequential explanatory method, one of the mixed research method, was used. The study was carried out with a total of 41 participants, including 35 third-year mathematics teacher candidates studying in Primary School Mathematics Teaching at a state university in a state university in the Central Black Sea Region in the 2019-2020 academic year, and 6 mathematics teachers doing a master's degree in Mathematics Education. First of all, a five-week GeoGebra nonverbal proof skills development training was conducted with the participants. Then, 9 participants were selected among the participants by criterion sampling method and the study group was formed. The data of the research consisted of the answers given by the participants to the proof skill test, the camera recordings taken during the GeoGebra training process, the evaluation forms and the interviews made by taking the audio recordings. In this study, the triangulation method was used because it was thought that supporting the quantitative findings with qualitative findings would be more effective in making sense of the results. As a result of the quantitative findings of the study, a significant difference was found between the pre-tests and post-tests of the participants in favor of the post-test. For this reason, it is possible to say that a training program designed to develop proof skills with GeoGebra, a dynamic geometry software, supports the development of nonverbal proof skills of mathematics teachers and teacher candidates. In addition, it was concluded that this training program, which was designed to develop proof skills with GeoGebra, improved the proof skills of mathematics

teachers statistically significantly more than the proof skills of prospective teachers. A case study was used in the qualitative data of the study. According to the findings that emerged from the qualitative data of the research, it was seen that the participants' opinions about the training on developing non-verbal proof skills with GeoGebra were generally positive, that the proofs in these activities could be observed on the program and that these activities were remarkable, dynamic, practical and suitable for sensitive measurements. It was observed that the participants explained the effects of the activities performed in GeoGebra dynamic geometry software on cognitive skills such as establishing relationships, keeping in mind, making sense, visualizing, concretizing, and on the ability to prove on affective skills such as learning with pleasure, learning with fun. As a result, it is recommended to develop students' nonverbal proof skills with GeoGebra dynamic geometry software in mathematics education.

Keywords: Mathematical Proof, Proofs Without Words, Visualization, Dynamic Geometry Software, GeoGebra

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ETİK SÖZLEŞME.....	i
JÜRİ İMZA SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
TABLO LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiv
KISALTMALAR.....	xvii
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ	1
Problem	1
Amaç	4
Önem	4
Sayıtlar	5
Sınırlılıklar	6
Tanımlar	6
BÖLÜM II	7
KAVRAMSAL ÇERÇEVE	7
Matematiksel İspat	7
Matematik Eğitiminde İspat	8
Gelişim Dönemlerine Göre İspat Yapma Becerileri.....	9
Matematiksel İspat ile İlgili Yapılan Çalışmalar	10
Matematik Eğitiminde Görselleştirme ve Sözsüz İspat	15
Sözsüz İspatın Tarihçesi	17
Sözsüz İspatın Aynı Anlama Geldiği Kullanımları	19
Sözsüz İspatların Eğitimdeki Yeri ve Önemi	19
Sözsüz İspat Örnekleri.....	20
Görselleştirme ve Sözsüz İspat ile İlgili Yapılan Çalışmalar	26
Matematikte Bilgisayar Destekli Öğretim ve Dinamik Geometri Yazılımları	32

Matematik Eğitiminde Dinamik Geometri Yazılımları ile Yapılan Çalışmalar.....	34
Matematik Eğitiminde GeoGebra.....	36
GeoGebra Dinamik Geometri Yazılımı ile Yapılan Çalışmalar.....	38
Matematiksel İspatlarda Dinamik Yazılımların Kullanılması.....	41
Matematiksel İspatlarda Dinamik Yazılımların Kullanılması ile İlgili Yapılan Çalışmalar.....	44
BÖLÜM III.....	47
YÖNTEM	47
Araştırma Modeli	47
Çalışma Grubu.....	47
Veri Toplama Araçları	49
Etik Kurul İzni	49
İspat Beceri Testi	49
Değerlendirme Formu.....	51
Yarı Yapılandırılmış Görüşmeler	51
Veri Toplama Süreci	52
Verilerin Analizi.....	59
İspat Beceri Testinin Analizi	60
Görüşmelerden Elde Edilen Verilerin Analizi.....	63
Araştırmanın Güvenirlik ve Geçerlik Çalışmaları.....	63
Geçerlik	63
Güvenirlik.....	64
BÖLÜM IV.....	65
BULGULAR.....	65
Öğretmen Adaylarının Ön-Test ile Son-Test Puanlarının Karşılaştırılması	65
Matematik Öğretmenlerinin Ön-Test ile Son-Test Puanlarının Karşılaştırılması.....	66
Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının Ön-test Puanlarının Karşılaştırılması	67
Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının Son-test Puanlarının Karşılaştırılması	67
Katılımcıların Ön-Test ve Son-Test Sorularına Verdikleri Cevapların Karşılaştırmalı Olarak İncelenmesi.....	68

Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının Son-Testte Verdikleri Cevapların Karşılaştırılmasına İlişkin Bulgular	78
GeoGebra ile Yapılan Etkinliklere Ait Görüşmelerin Bulguları.....	82
Üçgenin İç Açılar Toplamı 180° 'dir Birinci Etkinliğine İlişkin Bulgular	82
Üçgenin İç Açılar Toplamı 180° 'dir İkinci Etkinliğine İlişkin Bulgular	83
Pisagor Teoremi Etkinliğine İlişkin Bulgular.....	84
Viviani Teoremi Etkinliğine İlişkin Bulgular.....	85
Eşkenar Dörtgen Alanını Dikdörtgen Yardımıyla Bulma Etkinliğine İlişkin Bulgular	87
Aritmetik Ortalama ve Geometrik Ortalama Etkinliğine İlişkin Bulgular	89
Silindir ile Koni Hacmi Arasındaki İlişkiyi Gösteren Etkinliğe İlişkin Bulgular	91
BÖLÜM V	93
TARTIŞMA	93
BÖLÜM VI.....	103
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	103
Sonuçlar.....	103
Öneriler.....	105
KAYNAKÇA.....	107
EKLER.....	119
Ek 1. Etik Kurul İzni	119
Ek 2. Gönüllü Katılım Formu	123
Ek 3. İspat Beceri Testi	128
Ek 4. Değerlendirme Formu.....	133
Ek 5. Görüşme Formu	134
Ek 6. Etkinlikler	141
1.Etkinlik	141
2.Etkinlik	146
3.Etkinlik	149
4.Etkinlik	153
5.Etkinlik	159
6.Etkinlik	162
7.Etkinlik	165
8.Etkinlik	167

Ek 7. Dereceli Puanlama Anahtarı	171
Ek 8. Özgeçmiş	172



TABLO LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 1. Çalışma Grubunun İspat Beceri Testlerinden Aldığı Puanlar	48
Tablo 2. GeoGebra ile Sözsüz İspat Becerilerini Geliştirme Eğitim Süreci	53
Tablo 3. Çalışma Grubunun Belirlenen Sorularda Aldıkları Puanlar	61
Tablo 4. Öztürk ve Kaplan'ın (2017) Dereceli Puanlama Anahtarı	62
Tablo 5. Öğretmen Adaylarının Ön-Test ve Son-Test Puanlarına İlişkin Wilcoxon İşaretili Sıralar Testi Sonuçları	66
Tablo 6. Matematik Öğretmenlerinin Ön-Test ve Son-Test Puanlarına İlişkin Wilcoxon İşaretili Sıralar Testi Sonuçları	66
Tablo 7. Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının Ön-Test Puanlarına İlişkin Mann Whitney U Testi Sonuçları	67
Tablo 8. Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının Son-Test Puanlarına İlişkin Mann Whitney U Testi Sonuçları	68
Tablo 9. Etkinlikleri Derslerde Kullanma Amacı	83
Tablo 10. Pisagor Teoremi Etkinliğinin Sözsüz İspat Olarak Değerlendirilme Nedenleri....	84
Tablo 11. Viviani Teoremi Etkinliğinin Sözsüz İspat Yapma Becerilerine Etkisi	86
Tablo 12. Etkinliklerin GeoGebra Yazılımında Yapılmasının İspat Yapma Becerilerine Etkisi	87
Tablo 13. Etkinlikleri Derslerde Kullanmanın Faydaları	90

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1. Antik Çin Metni Zhou Bi Suan Jing den Aktarılan Pisagor Teoremi	17
Şekil 2. Öklid'in Elementler Kitabındaki Pisagor Teoreminin İspatı	18
Şekil 3. Viviani Teoreminin Sözsüz İspatı	21
Şekil 4. İlk n Pozitif Tamsayı Toplamının Sözsüz İspatı	21
Şekil 5. İlk n Pozitif Tamsayı Toplamının Sözsüz İspatı	22
Şekil 6. Ardışık Tek Tamsayıların Toplamının Sözsüz İspatı	22
Şekil 7. Pisagor Teoreminin Sözsüz İspatı	23
Şekil 8. Pisagor Teoreminin Sözsüz İspatı	23
Şekil 9. Pisagor Teoreminin Sözsüz İspat Örnekleri	23
Şekil 10. Sonsuz Geometrik Serilerin Sözsüz İspatı.....	24
Şekil 11. İki Paralel Doğrudan Oluşan İç Ters Açıların Eşitliğine Dair Sözsüz İspat	25
Şekil 12. İç Ters-Ters Açıların Oluşturduğu Doğruların Paralellğine Dair Sözsüz İspat	25
Şekil 13. Paralelkenarın Köşegenlerinin Birbirini Ortalama Durumunun Sözsüz İspatı	26
Şekil 14. GeoGebra 5.0 Kullanıcı Arayüzü	37
Şekil 15. GeoGebra 6.0 Kullanıcı Arayüzü	38
Şekil 16. GeoGebra'da Yapılan 1'den n'e Kadar Olan Sayıların Küpleri Toplamı	42
Şekil 17. Geometrik Problem.....	43
Şekil 18. Geometrik Problemin GeoGebra Yazılımında Yapılan Sözsüz İspatı	43
Şekil 19. Üçgenin İç Açılar Toplamına İlişkin Birinci Etkinlik.....	53
Şekil 20. Üçgenin İç Açılar Toplamına İlişkin İkinci Etkinlik.....	54
Şekil 21. Dörtgenin İç Açılar Toplamına İlişkin Etkinlik	55
Şekil 22. Pisagor Teoremi Etkinliği.....	56
Şekil 23. Viviani Teoremi Etkinliği.....	57
Şekil 24. Eşkenar Dörtgen Alanını Dikdörtgen Yardımıyla Bulma Etkinliği	57
Şekil 25. Aritmetik ve Geometrik Ortalama Arasındaki İlişkiyi Gösteren Etkinlik.....	58
Şekil 26. Silindir ve Koni Hacmi Arasındaki İlişkiyi Gösteren Etkinlik.....	59
Şekil 27. ÖA ₅ Kodlu Öğretmen Adayının Ön-Testte İlk Soruya Verdiği Cevap	69
Şekil 28. ÖA ₅ Kodlu Öğretmen Adayının Son-Testte İlk Soruya Verdiği Cevap.....	69
Şekil 29. Ö ₃ Kodlu Matematik Öğretmeninin Ön-Testte 4. Soruya Verdiği Cevap.....	70
Şekil 30. Ö ₃ Kodlu Matematik Öğretmeninin Son-Testte 4. Soruya Verdiği Cevap	71
Şekil 31. Ö ₁ Kodlu Matematik Öğretmeninin Ön-Testte 7. Soruya Verdiği Cevap.....	72

Şekil 32. $\ddot{O}_1$ Kodlu Matematik Öğretmeninin Son-Testte 7. Soruya Verdiği Cevap	73
Şekil 33. $\ddot{O}A_2$ Kodlu Öğretmen Adayının Ön-Testte 8. Soruya Verdiği Cevap.....	75
Şekil 34. $\ddot{O}A_2$ Kodlu Öğretmen Adayının Son-Testte 8. Soruya Verdiği Cevap	76
Şekil 35. $\ddot{O}_2$ Kodlu Matematik Öğretmeninin Son-Testte 10. Soruya Verdiği Cevap	77
Şekil 36. $\ddot{O}A_5$ Kodlu Öğretmen Adayının Son-Testte Yedinci Soruya Verdiği Cevap.....	78
Şekil 37. $\ddot{O}_4$ Kodlu Matematik Öğretmeninin Son-Testte Yedinci Soruya Verdiği Cevap...	79
Şekil 38. $\ddot{O}A_3$ Kodlu Öğretmen Adayının Son-Testte Sekizinci Soruya Verdiği Cevap	80
Şekil 39. $\ddot{O}_1$ Kodlu Matematik Öğretmeninin Son-Testte Sekizinci Soruya Verdiği Cevap	81
Şekil 40. İlk Etkinlikte Oluşturulan Sürgü Aracı.....	141
Şekil 41. İlk Etkinlikte Oluşturulan Orta Nokta veya Merkez Aracı ile Yapılan İşlemler ..	142
Şekil 42. İlk Etkinlikte Oluşturulan Çoklu Doğru Aracı ile Yapılan İşlemler	143
Şekil 43. İlk Etkinlikte Oluşturulan Döndür Aracı ile Yapılan İşlemler	144
Şekil 44. İlk Etkinlikte Açıların Renklendirilmesi ve Doğru Stili ile Yapılan İşlemler	145
Şekil 45. GeoGebra Yazılımında Yapılan İlk Etkinlik	146
Şekil 46. İkinci Etkinlikte Oluşturulan Üçgen ve Yapılan İşlemler	147
Şekil 47. İkinci Etkinlikte Oluşturulan İkinci Üçgen ve Yapılan İşlemler	148
Şekil 48. GeoGebra Yazılımında Yapılan İkinci Etkinlik	149
Şekil 49. Üçüncü Etkinlikte Oluşturulan Çemberler ve Yapılan İşlemler.....	150
Şekil 50. Üçüncü Etkinlikte Öteleme Hareketleri Sonucu Oluşan Aç Kolları	152
Şekil 51. GeoGebra Yazılımında Yapılan Üçüncü Etkinlik	153
Şekil 52. Dördüncü Etkinlikte Oluşturulan Dik Üçgen ve Kareler	154
Şekil 53. Dördüncü Etkinlikte Oluşturulan Çokgenlerin Renklendirilmesi	155
Şekil 54. Dördüncü Etkinlikte Oluşturulan Çokgenlerin Ötelenmesi.....	157
Şekil 55. Dördüncü Etkinlikte Oluşturulan Vektör ve Çember	158
Şekil 56. GeoGebra Yazılımında Yapılan Dördüncü Etkinlik	159
Şekil 57. Beşinci Etkinlikte Oluşturulan Dik Doğrular ve Doğru Parçaları	160
Şekil 58. Beşinci Etkinlikte Oluşturulan Paralel ve Dik Doğrular	160
Şekil 59. Beşinci Etkinlikte Oluşturulan Doğru Parçaları ve Çemberler	161
Şekil 60. GeoGebra Yazılımında Yapılan Beşinci Etkinlik	162
Şekil 61. Altıncı Etkinlikte Oluşturulan Eşkenar Dörtgen	163
Şekil 62. Altıncı Etkinlikte Oluşturulan Dikdörtgen	164
Şekil 63. GeoGebra Yazılımında Yapılan Altıncı Etkinlik	165

Şekil 64. Yedinci Etkinlikte Yapılan İşlemler	166
Şekil 65. GeoGebra Yazılımında Yapılan Yedinci Etkinlik.....	167
Şekil 66. Sekizinci Etkinlikte Oluşturulan Koniler	168
Şekil 67. Sekizinci Etkinlikte Oluşturulan Silindirler	169
Şekil 68. Sekizinci Etkinlikte Oluşturulan Düğmeler.....	170
Şekil 69. GeoGebra Yazılımında Yapılan Sekizinci Etkinlik.....	170



KISALTMALAR

BDÖ: Bilgisayar Destekli Öğretim

DGY: Dinamik Geometri Yazılımları

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics



BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu bölümde araştırmanın amacı, önemi, problem durumu, sayıtları (varsayımlar), sınırlılıkları ve tanımlarına yer verilmiştir.

Problem

Doğruya ve gerçeğe ulaşabilme ihtiyacından dolayı ortaya çıkan ispat kavramı; matematiksel bir ifadenin doğruluğunun veya yanlışlığının bilinen önermelerle ilişkilendirilip mantıksal çıkarımlar yapılarak bilinen matematiksel elemanların (tanım, teorem ve aksiyom) kullanıldığı genel, doğru ve ikna edici bir süreçtir (Dede ve Karakuş, 2014; Doruk ve Kaplan, 2017; Uygur Kabael, 2020). Bu sürecin temelinde akıl yürütme ile karar verme becerileri vardır (Moralı ve diğerleri, 2006).

İspat, Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi'nin hazırladığı "Okul Matematigi İlkeleri ve Standartları" öğretim programındaki standartlardan biridir (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Ayrıca MEB'in öğretim programlarında ispat yapma becerilerine dair her sınıf seviyesinde hedeflerin olduğu görülmektedir (Güler, 2020; Knuth, 2002). Hem NCTM hem MEB öğretim programlarında yer alan hedefler doğrultusunda matematik eğitiminde matematiksel ispat yapma becerileri üzerinde durulmalıdır (Moralı ve diğerleri, 2006).

İspatın öğretiminde öncelikle, öğretmenlerin kendi bildikleri ispat bilgileri etkili olmaktadır (Knuth, 2002). Bu sebeple ilk olarak öğretmenlerin ispatı iyi öğrenmeleri sağlanmalıdır (Doğan, 2019). Öğretmenlerin, ispatı daha iyi öğretebilmesi için ise önceden hazırlanmaları ve öğrenci seviyesine uygun ispat yaklaşımını seçmeleri gerekir (Doğan, 2019; Sezen Yüksel, 2020). Ayrıca öğretmenlerin, öğrencilere ispat sürecinde aktif olma fırsatı vermeleri gerekir (Bell, 2011). Öğrencilerin ispat konularında aktif olmaları onların yaşadığı zorlukların bilinmesiyle mümkündür ve bu sebeple öğrencilerin ispatla ilgili yaşadıkları sıkıntıların araştırılması gerekmektedir (Zeybek Şimşek, 2020).

İspat ile ilgili yaşanan sıkıntılar incelendiğinde ispatın özellikle geometri alanında etkili olduğu ve birçok araştırmacının üzerinde durduğu görsel akıl yürütme

becerilerinde yaşanan sıkıntılar ortaya çıkmaktadır. Bu sıkıntıların nedenlerinin, şekilsel kavramların algısında yaşanan zorluklar ile görsel materyallerin kullanımındaki eksikler olduğu görülmüştür (Bardelle, 2009; Y. Akkan, P. Akkan, Öztürk ve Demir, 2018). Öğrenmede görme duyusunun payı çok büyüktür ve görsel akıl yürütme becerilerinde yaşanan sıkıntıları gidermek için görsel materyallerin kullanılması gerekmektedir (Özer ve Şan, 2013).

Görsel materyaller açısından zengin bir öğrenme ortamının hazırlanması, öğretimin görsel-işitsel araçlarla desteklenmesi, bilginin öğrenci zihninde sistemli bir şekilde işlenişini hızlandırmakta ve daha kalıcı hale getirmektedir. Çağdaş öğrenme yaklaşımına göre görsel-işitsel araçlarla öğrenenin birden fazla duyusuna hitap etme düşüncesi, matematikte cebirsel yaklaşımın görselleştirme yaklaşımıyla desteklenmesi gerektiğini ön plana çıkarmaktadır (Özer ve Şan, 2013).

Görselleştirme yaklaşımı, öğrencilerin ispat yapma becerisini geliştirmenin alternatif yollarından biridir (Demircioğlu ve Arslantaş İlter, 2020). Matematik derslerinde yapılan ispatların çoğu cebirsel olduğu için ispatın özü yeterince anlaşılabilir. İspatlarda görselleştirme yaklaşımı, görsel ve cebirsel düşünmenin bir arada kullanılmasını sağlayarak anlamlı ve kalıcı öğrenmeler kazanılmasını sağlar (Tekin ve Konyalıoğlu, 2010).

Görselleştirme ile adı geçen “Sözsüz İspatlar” alternatif ispat yöntemlerinden biri olarak kabul edilmektedir (Polat, 2018). Sözsüz ispatlar çok eski olmalarına rağmen son yıllarda önemi artmış ve eğitimde yardımcı araç olarak matematikte sıklıkla kullanılmaktadır (Demircioğlu ve Polat, 2016b). Sözsüz ispatlar literatürde görsel ispat, resimlerle ispat, diyagramatik ispat gibi farklı isimlerle yer almaktadırlar (Demircioğlu ve Polat, 2016b; Şadan ve Uğurel, 2020).

Sözsüz ispatları kullanan öğrencilerin akıl yürütme becerilerinde gelişmeler görülmektedir. Akıl yürütme becerileri gelişen öğrenciler, formal bir ispatın nasıl başlanacağını bilir ve matematiksel kavramları anlamaları kolay olur. Aynı zamanda öğrenciler daha üst düzey matematik öğrenmiş olmaktadır. Böylece sözsüz ispatların kullanılması, öğrencilerin ispat sürecini anlamalarına yardımcı olmaktadır (Bell, 2011). Öğrenci ispatın kendisini unutsa bile sözsüz ispatları öğrendiği için görsel olarak ispatı

hatırlayabilmekte ve böylelikle öğrencilerin matematiksel düşünme becerileri gelişmektedir (Polat, 2018; Şadan ve Uğurel, 2020).

Son yıllarda görselleştirme ve sözsüz ispat ile ilgili yapılan araştırmalarla birlikte, bilgisayarların da görselleştirme yapma amacıyla kullanımının yaygınlaştığı söylenebilir. Bilgisayar ve teknolojinin kullanılmaya başlanmasıyla ortaya çıkan “Dinamik Geometri Yazılımları” aynı zamanda sınıf içerisinde ispat yapmanın daha etkili yollarını bulma yollarından biri olarak da kabul edilebilmektedir (Hanna, 2000).

Dinamik geometri yazılımları, geometriyi statik olan kağıt kalem sürecinden kurtarıp bilgisayarlarda yapılan canlandırmalar ile dinamiklik sağlar (Baki, 1996; Güven ve Karataş, 2003; İçel, 2011). Ayrıca dinamik geometri yazılımları renklendirme yapabilmeyi, hesaplamalar ile sayısal doğrulama yapabilmeyi, farklı değerler için denemeler yapabilmeyi ve yapılabilen değişiklikler sayesinde doğruluğu denetleyebilmeyi sağlamaktadır (Şadan ve Uğurel, 2020). Bu yazılımlar ile öğrenciler araştırma yapma, bağlantı kurma, keşfetme, varsayımda bulunma, formüle etme gibi olanaklara ve karmaşık şekilleri çok kolay bir şekilde oluşturabilme imkanına sahip olurlar (Karataş ve Güven, 2015; Vatansever, 2007). Bu yazılımlar ayrıca somutlaştırma ve görselleştirme yapabilmeyi de sağladığı için sınıflarda matematiksel ispatın doğası değişmiştir (Baydaş, 2010; Güven, 2002; Tutkun ve diğerleri, 2011). Bu teknolojik yazılımlar ile her seviyeye uygun ispatlar yapılabilmekte ve bu yazılımlarda görselleştirmeler de yapılabildiği için sözsüz ispatların kullanımına uygun olduğu söylenebilmektedir (Karataş ve Güven, 2015; Şadan ve Uğurel, 2020; Yiğit Koyunkaya, 2020).

Cebirsel ispatların yanında sözsüz ispatların da kullanıldığı dinamik geometri yazılımlardan biri olan GeoGebra yazılımı geometri, cebir ve analizi birleştiren, Türkçe ara yüzü olan bir yazılımdır (Doğan ve Karakırık, 2009; Ogan ve Ibibo, 2018; Şadan ve Uğurel, 2020). Bu yazılımın çoklu gösterim yapısı sayesinde değişkenler arası ilişkiler kolayca çıkarılabilmekte, değişkenler arasında geçiş yapılabilmekte ve böylece sözsüz ispatların öğretiminde kolaylık sağlanabilmektedir (Hıdıroğlu ve Bukova Güzel, 2014; Şadan ve Uğurel, 2020). Ayrıca sözsüz ispatların bu dinamik yazılımlarda kullanılması, sözsüz ispatlara karşı olan endişeleri yok etme açısından önemlidir (Şadan ve Uğurel, 2020). Sözsüz ispatların dinamik yazılımlarda kullanılmasının önemli olması nedeniyle matematik eğitiminde sözsüz ispat yöntemini dinamik ortamlarda inceleyen

çalışmaların artması önem arz etmektedir. Bu sebeple, bu çalışmaya ihtiyaç duyulmuş ve alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Amaç

Bu araştırmanın amacı, dinamik geometri yazılımı GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan bir eğitim programının matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat yapma becerileri üzerine etkililiğinin değerlendirilmesi ve katılımcıların bu eğitim süreci hakkındaki görüşlerinin ortaya konulmasıdır. Bu amaçlar doğrultusunda çalışma boyunca aşağıdaki alt problemlere yanıt aranmıştır.

- Dinamik geometri destekli verilen görsel ispat becerileri eğitiminin matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat yapma becerileri üzerine nasıl bir etkisi vardır?
- Matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının dinamik geometri programı ile sözsüz ispat yapma eğitimi hakkındaki görüşleri nelerdir?

Önem

İspat, öğrencilerin kavrayabilecekleri kolay bir kavram değildir (Doğan, 2019). Öğrencilerin çoğunun ispat yapmada başarısız olması ve görüşlerinin genelde olumsuz olması sebebiyle öğretmenler, öğrencilerin başarısını ve görüşlerini değiştirme konusunda önemli rollere sahiptir (Doruk, Özdemir ve Kaplan, 2014). Bu sebeple matematik öğretmenlerinin ileri düzeyde ispat yapma becerilerine ve ispat ile ilgili köklü bilgilere sahip olması beklenir (Doğan, 2019). Aslında bu bilgiler öğretmenlerde lisansta öğrenim gördükleri zaman büyük çoğunlukta oluşmaktadır. Lisansta alan derslerinin hemen hemen hepsinde öğretmen adayları ispat ile karşılaşmaktadırlar. Öğretmen adaylarının ispatlarla karşılaştıklarında hangi yöntemi kullanacaklarını bilmeleri ve okul hayatına atıldıklarında öğrencilerin ispat yapma becerilerini geliştirmek için buna uygun öğrenme ortamı oluşturmaları gerekir. Bu sebeple öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispat ile alakalı derslerde kendilerini geliştirmeleri gerekmektedir (Moralı ve diğerleri, 2006).

Öğretmenlerin ispat konusunda kendilerini geliştirmeleri ve iyi bir ispat anlayışına sahip olmaları sonucunda öğrencilerinin daha iyi bir ispat anlayışına sahip

olmalarını sağlayabilirler. Bu noktada yaşanan en büyük sıkıntılardan biri öğretmenlerin ispat bilgilerini sınıf içi uygulamalara taşımakta zorluk yaşamaları söylenebilir (Doğan, 2019). Bu zorlukların giderilmesi için uygulamaya dönük çalışmaların yaygınlaşması gerekmektedir. Sözsüz ispatlar ile ilgili uygulamaya dönük olarak yapılan çalışmalar incelendiğinde öğretmenlerin sözsüz ispatı zor buldukları ancak dinamik geometri programlarının görsel ispat yapma becerilerini geliştirme sürecini destekleyebileceği tespit edilmiştir (Demircioğlu ve Polat, 2016b; Şadan ve Uğurel, 2020). Bu sebeple hem öğretmenlerin hem öğrencilerin sözsüz ispat yaparken zorlanmalarından dolayı alternatif yollar aranmıştır. Dinamik geometri yazılımları bu alternatif yollardan birisidir. Bu yazılımlardan biri olan GeoGebra dinamik geometri yazılımı, Türkçe ara yüzü sayesinde kullanım kolaylığı sunmaktadır.

Literatürde sözsüz ispat becerisini geliştirmek amacıyla dinamik geometri yazılımının kullanıldığı az sayıda çalışma (Doyle, Kutler, Miller ve Schueller, 2014b; Štrausová ve Hašek, 2013; Stupel, Sigler ve Jahangiri, 2019; Şadan ve Uğurel, 2020) bulunmaktadır. Bu çalışma kapsamında katılımcılar dinamik geometri yazılımı GeoGebra ile görsel ispatların oluşturulduğu bir eğitim sürecine tabi tutulmuşlardır. Daha sonra katılımcılarla uygulamalar ve görüşmeler yapılarak bu eğitimin görsel ispat becerileri üzerine nasıl bir katkısı olduğu ortaya konulmaya çalışılmıştır. Kısıtlı bir alana yönelik olarak tasarlanan bu çalışmanın, içeriği ve bulguları ile alana katkı sağladığı düşünülmektedir. Çalışma kapsamında hazırlanan dinamik geometri yazılımı ile hazırlanan sözsüz ispat etkinlikleri araştırmacılara örnek teşkil etmesi açısından ekler bölümünde paylaşılmıştır.

Sayıtlar

1. Araştırmacı ve aynı zamanda dersi yürüten öğretmen araştırma konusunda yeterli bilgi ve beceriye sahiptir.
2. Araştırmaya katılan matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının ispat beceri testine yönelik bilgileri yeterlidir.
3. Bu çalışma yapılırken dinamik geometri yazılımının uygulandığı sınıf yeterli uygunluğa sahiptir.
4. Araştırmaya katılan matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının bu çalışma ile ilgili görüşlerini ortaya çıkarmak için oluşturulan değerlendirme ve görüşme formlarının hazırlanma aşamasında başvuru uzman görüşleri yeterlidir.

Sınırlılıklar

1. Bu araştırma Orta Karadeniz Bölgesinde bir ilin devlet üniversitesinde öğrenim gören matematik öğretmeni ve öğretmen adayları ile sınırlıdır.
2. Araştırma için toplanan veriler 2019- 2020 eğitim öğretim dönemi ile sınırlıdır.
3. Araştırma sürecinde elde edilen veriler ispat beceri testleri, değerlendirme formu, yarı yapılandırılmış görüşmeler, kamera ve ses kayıtları ile sınırlıdır.

Tanımlar

Matematiksel İspat: Bir önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını göstermek için yapılan herkes tarafından bilinen matematiksel elemanların kullanıldığı genel, doğru ve ikna edici argümanlardır (Doruk ve Kaplan, 2017).

Görselleştirme: Soyut kavramların somut ya da yarı somut yapılarla ifade edilmesidir (Konyalıoğlu, 2003).

Sözsüz İspat (Proof Without Words): Okuyucu için belirli bir matematiksel ifadenin neden doğru olabileceğini görmesini sağlayan ve ispatlamaya nasıl başlanabileceğini gösteren resim veya diyagramlardır (Alsina ve Nelsen, 2010).

Dinamik Geometri Yazılımları: The Geometer's Sketchpad, Cabri Geometri, Cinderella veya GeoGebra gibi programların genel adıdır (İçel, 2011).

GeoGebra: Matematik öğretimi-öğrenimi için ilköğretimden üniversite seviyesine kadar kullanımı kolay, ücretsiz, her yerde sıklıkla kullanılan, geometri, cebir ve hesap özellikleri olan bir dinamik geometri yazılımıdır (J. Hohenwarter, M. Hohenwarter ve Lavicza, 2008).

BÖLÜM II

KAVRAMSAL ÇERÇEVE

Matematiksel İspat

Matematikçiler ve matematik eğitimcileri ispatlara farklı anlamlar yükleyerek ve ispatın farklı özelliklerine vurgu yaparak matematiksel ispatı tanımlamaya çalışmışlardır (Doruk ve Kaplan, 2017). Bu tanımlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

“Matematiksel ispat bir iddianın doğru ya da yanlış olduğunu göstermeyi amaç edinen, formel elemanları kullanarak aksiyomatik bir yapıda ilerleyen, mantıksal muhakemenin ön planda olduğu ve kendine has bir gösterim şekli olan sosyal bir süreçtir.” (Kaplan, Doruk, Öztürk ve Duran, 2016). “Matematiksel ispat, matematiksel bir sav ile bağlantılı bir iddialar dizisinden oluşan ve sınıf topluluğunda kabul edilebilir bir ispat oluşturacak bir normu barındıran matematiksel argümanlardır.” (Doğan, 2019). “Matematiksel ispat, bir ifadenin niçin doğru olduğunun mantıksal bir açıklamasıdır.” (Altıparmak ve Öziş, 2005). Dede ve Karakuş’a (2014) göre ispat, öğrencilerin önceden bildiği sonuçların doğruluğunu ve bu sonuçların neden doğru olduğunun gösterilmesinde kullanılan bir kavramdır.

İspat tanımları üzerinde çeşitli görüşlerin olması ispatın farklı bakış açılarıyla güçlenmesini sağlamaktadır (Sezen Yüksel, 2020). İspat kavramının tanımları farklılaşmış olsa bile bu anlamlar birbirini tamamlar boyuttadır (Zeybek Şimşek, 2020).

Matematiksel ispatın tarihçesi incelendiğinde ilk olarak Babil döneminde sezgisel yaklaşımlar görülmüştür ancak bu yaklaşımlar ispat olarak ele alınmamış olup ispatın temelleri Antik Yunan döneminde atılmıştır. Bu dönemde Yunan matematikçi olan Thales tarafından ispatları yapılan ilk önermeler yer almaktadır. Ayrıca bu dönemde Thales’in öğrencisi Pisagor’un tarihe kattığı ve kendi adını verdiği “Pisagor Teoremi” yer almaktadır. Bu teoremin geometri ve cebir alanında çok farklı kullanımının olmasından dolayı bu teoremin ispatına yönelik çok fazla farklı yaklaşımlar yer almaktadır. Bir teoremin farklı zamanlarda farklı ispatlarının görülmesi, ispatın bulunduğu dönemden etkilendiğini göstermektedir (Sezen Yüksel, 2020).

Antik Yunan döneminde Thales ve Pisagor'dan sonra ispatlara yer veren, "Elementler" adlı eseri ile bilinen Öklid yer almaktadır (Britz, Mammoliti ve Sørensen, 2014; Sezen Yüksel, 2020). Öklid, bu eserinde kendinden önceki ve kendi ispatlarını dahil ederek ispat kavramında yeni bir durum ortaya koymuştur. Ayrıca dilinin sade ve anlaşılır olması bu kitabın eskiden beridir ele alınmasını sağlamıştır (Sezen Yüksel, 2020).

Eski çağlarda sezgisel olarak yaklaşılan ifadeler, zamanla yerini ispat kavramına bıraksa da sezgiler, ispat için matematiksel ifadeleri somut olarak ele almada ilk yoldur ve ispat için her zaman yadsınamaz bir gerçek olarak kalacaktır (Sezen Yüksel, 2020).

Son yıllarda ispat ile ilgili makalelerde artış olmuştur. 1990 ve 1999 yılları arasında önde gelen matematik dergileri bu konuda yüzden fazla makale yayınlamışlardır. Ayrıca, Uluslararası Eğitim ve Öğretim Bülteninde Nicolas Balacheff'in Web sitesi olarak çıkarttığı "Matematiksel İspat" yılda yaklaşık altı kez yayınlanmaktadır. Yapılan bu çalışmalar ispatın matematik eğitiminde öne çıktığını göstermektedir (Hanna, 2000).

Matematik Eğitiminde İspat

Günümüz matematik öğretiminde matematiksel formülleri ve kuralları vermek yerine matematiksel bilgiyi elde etme yolları önem kazanmaktadır. Direk matematiksel formüller ve kurallar verilerek yapılan öğretimde ezbere dayalı öğrenmek kaçınılmazdır. Matematik eğitiminde ezbere dayalı olmadan matematiksel bilgiyi üretmedeki temel yollardan biri de ispattır (Arslan, 2007).

Literatür incelendiğinde matematik eğitiminde kullanılan ispat tanımlarına göre ispatın formal ve sosyokültürel boyutları yer almaktadır. Matematik eğitiminde daha erken yaşlarda ispatın sosyokültürel boyutları öne çıkarken daha ileri yaşlarda ispatın formal boyutu öne çıkmaktadır. Her eğitim seviyesinde ispatın hem formal hem sosyokültürel boyutları vurgulanmalıdır (Zeybek Şimşek, 2020).

Matematiğin her düzeyinde ispatın kullanılması gerektiği belirtilse de öğrencilerin matematiksel ispat yapmada zorluklar yaşadığı görülmektedir. Öğrencilerin matematiksel ispat yaparken ispatı anlama ve oluşturmada, akıl yürütme adımlarını takip etmede, formelleştirme yapmada zorluklar yaşadıkları söylenebilir (Moralı ve

diğerleri, 2006). Bu zorluklardan biri olan akıl yürütme becerileri ile ispat kavramı NCTM'in (2000) hazırladığı “Okul Matematiği İçin İlke ve Standartlar” öğretim programındaki süreç standartlarından biridir. Bu öğretim programında ele alınan süreç standartları problem çözme, akıl yürütme ve ispat, iletişim, bağlantılar ve gösterimlerdir. NCTM (2000) akıl yürütme ve ispatı aynı standart içerisinde ele almıştır. Matematik eğitiminde akıl yürütme ve ispatın kullanılması; matematiksel iç görü geliştirme, ifade etmenin güçlü yollarını ortaya koyma, matematiksel argümanları değerlendirme, sonuçları gerekçelendirme ve matematiksel varsayımları kullanma becerilerini geliştirmektedir (NCTM, 2000).

İspat yapma sürecinin temelinde yer alan akıl yürütme becerisi, rasyonellik ile ortaya çıkar. Rasyonellik ile kastedilen, kişinin seçim yapması gerektiğinde harekete geçirilen kurallar sisteminde karar almak veya yargılarda bulunmaktır. Rasyonalite ister bireysel ister toplu olarak insan hayatının her yerindedir. Mantığın şekillendirdiği bilim olan matematik, özünde rasyonalitenin en iyi örneği olarak ortaya çıkmaktadır (Balacheff, 2002).

İspat yapma süreci doğrulama/yanlışlama ve ikna etme sürecinden oluşmaktadır. Bu süreçler bireyin yaş ve hazırbulunuşluğuna göre değişmektedir. İlkokul ve ortaokulda ispat süreci, sonlu sayıda örnekler üzerinden yapılırken lise ve sonraki dönemlerde öğrencilerin soyut işlemler dönemine dahil olması ile ikna süreci formal ispat sürecine dönüşmektedir (Uygur Kabael, 2020). Gelişim dönemlerine göre ispat yapma becerileri aşağıda detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

Gelişim Dönemlerine Göre İspat Yapma Becerileri

Okul öncesi dönem mantıksal düşünceye geçiş dönemidir. Çocukta mantıksal düşünme ilköğretim döneminde başlar. Bu dönem için ispat sürecinde öğrencilerin şekilleri sınıflandırmaları, genellemeler hakkında varsayım oluşturup değerlendirmeleri, matematiksel iddiaları formüle edip muhakeme edebilmesi ve geliştirmeleri beklenir (Altıparmak ve Öziş, 2005).

İlköğretim döneminin ilk yılları somut düşünme, son yılları ise soyut düşünme dönemidir (Altıparmak ve Öziş, 2005). Dede ve Karakuş'a (2014) göre ilkokul düzeyindeki öğrenciler matematiksel ilişkiler için fikir üretebilir ve matematiksel

önergeleri doğrulayabilir. Bazen öğrenciler bu ilişkiler hakkında yanlış fikirlere sahip olabilirler. Bu yanlış fikirler ilkokul öğrencilerinin keşif yapmaları için önemli bir fırsat olur. Örneğin özel örneklerden bir genellemeye ulaşılmasının her zaman doğru olmayacağını keşfetmeleri gerekir. Ortaokul düzeyindeki öğrenciler ise kendi önermelerini ayrıntılı şekilde tümdengelim ve tümevarım mantığını kullanarak değerlendirebilirler. Bu düzeydeki öğrenciler eksikliklere sahip olsa da fikirlerini sunma, mantıksal açıklamalar yapabilme gibi önemli özelliklere sahiptir (Dede ve Karakuş, 2014). Yapılan araştırmalar sonucunda ilköğretim düzeyinde öğrenci seviyelerine uygun olacak şekilde ispatların matematik derslerinde kullanılması gerekmektedir (Zeybek Şimşek, 2020).

Ortaöğretim döneminde öğrencilerin soyut düşünme becerileri gelişmiştir ve bu dönemde öğrencilerin ispat süreçlerinde şekilleri tanıyabilmeleri, bu şekillere uygun örnekler bulmaları, araştırma yapmaları, önceden kullanılan ispat tekniklerinin geliştirmesi beklenir (Altıparmak ve Öziş, 2005).

Günümüz matematik eğitimcileri matematiksel ispatların ana okuldan lise son sınıfa kadar matematik eğitiminin önemli bir parçası olması gerektiğini belirtirler. MEB tarafından yayınlanan öğretim programları ile matematiksel ispatların önemi vurgulanmış ve matematiksel ispata tüm matematik sınıflarında öğrenci düzeylerine uygun olacak şekilde yer verilmesi önerilmiştir (Zeybek Şimşek ve Üstün, 2019).

Matematiksel İspat ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Matematik eğitiminde ispat kavramını inceleyen pek çok çalışma bulunmaktadır (Altıntaş ve Ilgün, 2020; Doruk, Kıymaz, Horzum ve Morkoyunlu, 2014; Doruk ve diğerleri, 2014; Doruk ve Kaplan, 2013; Doruk ve Kaplan, 2017; Gökkurt, Deniz, Akgün ve Soylu, 2014; Gökkurt ve Soylu, 2012; Güler ve Dikici, 2012; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Hemmi ve Löfwall, 2009; Karakuş, Erşen ve Ocak, 2017; Kaplan ve diğerleri, 2016; Kayagil, 2012; Moralı ve diğerleri, 2006; Öztürk ve Kaplan, 2017; Turğut, Yenilmez ve Uygan, 2013; Uğurel ve Moralı, 2010; Uzel ve Özdemir, 2009; Zeybek Şimşek ve Üstün, 2019). Çalışmalarda genellikle öğretmen adaylarının, öğrencilerin veya öğretmenlerin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri, matematiksel ispat yapma becerileri, ispat yapmada kullanılan yöntemler, ispat yapmaya yönelik tutumlar ve ispat kavramları incelenmiştir.

Doruk ve Kaplan (2013) yaptıkları çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşlerini incelemeyi amaçlamıştır. Bu çalışmada “İspata Yönelik Görüş Mülakat Formu” ile veriler toplanmıştır. Araştırma sonucuna göre katılımcıların çoğunun matematiksel ispata karşı olumlu görüşler belirtmelerine rağmen ispatı faydasız gördükleri belirlenmiştir. Ayrıca katılımcıların ispata dair özgüven eksiklikleri hissettikleri görülmüştür. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşlerini inceleyen bir başka çalışma Altıntaş ve İlgün’ün (2020) çalışmasıdır. Bu çalışmada öğretmen adaylarının görüşlerini belirlemek için ölçek kullanılmıştır. Araştırma sonucuna göre katılımcıların görüşlerinin “Kararsızım” aralığında kaldığı ve “Boyutlar” çerçevesi açısından “Fayda” ile “Alan” boyutlarında olumlu değerlendirmeler yaptıkları görülmüştür. Ayrıca katılımcılar “Gerekliklik, Özgüven, Problem ve İspat” arasındaki ilişki boyutlarında negatif olarak değerlendirmelerde bulunmuşlardır. Araştırmada belirlenen alt boyutların hepsi sayısal olarak birbirini tamamlarken anlamsal olarak tamamlamadığı belirtilmiştir.

Doruk ve diğerleri (2014) yaptıkları çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerini incelemişlerdir. Çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerini belirlemenin yanı sıra matematiğe karşı öz yeterlik algılarını incelemeyi ve aralarındaki ilişkiyi çıkarmayı amaçlamışlardır. Çalışma sonucuna göre öğretmen adaylarının görüşleri ile öz yeterlik algıları orta düzeyde çıkmış ve öz yeterlik algılarının ispat yapmaya dair görüşlerin anlamlı bir yordayıcı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerini inceleyen aynı zamanda bu görüşlerin bazı değişkenlere (cinsiyet, sınıf, okul türü gibi) göre incelenmesini amaçlayan bir diğer çalışma Kayagil’in (2012) çalışmasıdır. Çalışmada Türkçeye uyarlanan Almeida’nın (2000) görüş ölçeği kullanılmıştır. Araştırma sonucuna göre görüş ölçeği ile ispata yönelik görüşler “ne olumlu ne olumsuz” olarak teyit edilmiştir. Ayrıca görüşler ile değişkenler arasında anlamlı bir fark bulunamadığı görülmüştür.

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri ile fen bilgisi öğretmen adaylarının görüşlerini Gökkurt ve Soylu (2012) yaptıkları çalışma ile incelemiştir. Çalışma sonucuna göre her iki bölümdeki öğrencilerin ispata dair görüşleri arasında anlamlı bir fark bulunmadığı ve düşüncelerinin yetersiz kaldığı görülmüştür. Morali ve diğerleri (2006) çalışmasında

ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerini incelemişlerdir. Çalışmada Almeida'nın ölçeği geliştirilerek kullanılmış. Çalışmada ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının çoğunun ispat yapmaya yönelik görüşlerinin olmadığı veya yetersiz olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

İlköğretim matematik öğretmenliği, ortaöğretim matematik öğretmenliği ve matematik bölümü öğrencilerinin ispat yapmaya yönelik görüşlerini Kaplan ve diğerleri (2016) yaptıkları çalışma ile incelemişlerdir. Çalışmada ilköğretim matematik öğretmenliği, ortaöğretim matematik öğretmenliği ve matematik bölümü öğrencilerinin ispat yapmaya yönelik görüş düzeylerinin yanı sıra bölümlere göre görüşlerin farklılık gösterip göstermediği belirlenmeye çalışılmıştır. Doruk ve Güler'in (2014) geliştirdiği matematiksel ispata yönelik görüş ölçeği kullanılmıştır. Araştırmada ortaöğretim matematik öğretmen adayları için ispat yapmaya yönelik genel görüşlerin, ispatın faydalarına yönelik görüşlerin, ispata karşı özgüven ile ispata karşı yüklenen anlamın diğer öğrencilere göre olumsuz çıktığı görülmüştür. Bu sebeple ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik öz yeterliklerinin diğer bölüm öğrencilerine göre düşük olduğu belirtilmiştir. Ayrıca matematik bölümündeki öğrencilerin ispatın gerekliliği konusundaki görüşlerinin diğer öğrencilere göre olumlu çıktığı görülmüştür. Eğitim fakültesinde öğrenim gören ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencileri ve fen edebiyat fakültesinin pedagojik formasyon eğitiminde öğrenim gören ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapmaya yönelik görüşlerini Turgut ve diğerleri (2013) yaptıkları çalışma ile incelemişlerdir. Çalışmada ortaokul ve lise matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri karşılaştırılarak incelenmiştir. Araştırma sonucuna göre görüşler okul, cinsiyet ve okul-cinsiyet ortak etkisine göre farklılaşma göstermezken bazı alt faktörlerde farklılaşma görülmüştür.

Güler ve Dikici (2012) yaptıkları çalışmada ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerini incelemiştir. Araştırmaya göre katılımcıların büyük bir kısmı olumlu görüş belirttiği görülmüştür. Çalışmada literatürdeki diğer araştırma sonuçları karşılaştırılmış ve diğer araştırmacılara öneriler sunulmuştur. Doruk ve diğerleri (2014) yaptıkları çalışmada sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşlerini almayı amaçlamışlardır. Araştırma sonucuna göre ispatı kullanmanın önemli olduğu ancak öğretmen adaylarının

kendilerinin ispatlamalarının gereksiz olduğu belirtilmiştir. Çalışmada ayrıca çoğu ispatların temsili ispatlarla desteklenmesinin gerekliliği tespit edilmiştir.

Hemmi ve Löfwall (2009) yaptıkları çalışmada İsveç'teki üniversite derslerinde öğretim yapan matematikçilerin ispat yapmanın faydalarına ilişkin görüşlerini ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Çalışmada on matematikçi ile çalışılmıştır. Veriler, matematikçilerin sorulara verdiği yazılı yanıtlardan oluşmuştur. İspatın işlevi hakkında matematikçilerden çeşitli fikirler ve görüşler alınmıştır. Çalışmada matematikçilerin, ispatın öğrenciler için önemli olduğunu belirttikleri görölmüştür. Ayrıca çalışmada ispatın öğrencilere yeni yöntemler kazandırdığı, önemli kavramları sunduğu ve problem çözmede ihtiyaç duyulan mantıksal akıl yürütmeyi sağladığı belirtilmiştir. Bazı matematikçilerin ispatlama ile problem çözmenin aynı türden olduğunu belirttikleri görölmüştür.

Uğurel ve Moralı (2010) yaptıkları çalışmada özel fen lisesinde okuyan 11 öğrenci ve bu sınıfın matematik öğretmeniyle matematik dersindeki ispat yapmaya yönelik sınıf içinde yaşanan iletişim durumlarını incelemeyi amaçlamıştır. Söylem çözümlemeleri ile araştırma sonuçlarına göre öğrenciler için ispatın sadece sözel açıklamalarla yapılamayacağı, örnekleme yoluyla tek başına ispatın oluşturulamayacağı, ispat yaparken sadece anlamları ifade ederek değil gösterimlerin de kullanılması gerektiği, ispatın mantıksal adımlar içinde istenene ulaşma ve kendi ispat yapma süreçlerine aktarmada zorluklar yaşadıkları tespit edilmiştir.

Gökkurt ve diğerkleri (2014) yaptıkları çalışmada matematik alanında öğretmenlerin, öğrencilerin, öğretmen adaylarının ispat yapma düzeyleri, ispat yapmada kullandıkları yöntemler, yaşadıkları zorluklar ve ispata yönelik görüşlerine dair yapılan çalışmaları derlemişlerdir. İncelenen çalışmalarda daha çok öğrenci ve öğretmen adaylarının ispat yapma sürecine odaklandığı tespit edilmiştir.

Üzel ve Özdemir (2009) yaptıkları çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik tutumlarını incelemiştir. Çalışmaya göre sınıf düzeyi ile cinsiyetin öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik tutum puanları üzerinde etkili olduğu ve puanların sınıf düzeyi ile cinsiyete göre anlamlı farklılık oluşturduğu belirtilmiştir.

Doruk ve Kaplan (2017) yaptıkları çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanında yaptıkları ispatları incelemiştir. Çalışmaya göre öğretmen

adaylarının ispat yapma konusunda zorluklar çektikleri belirtilmiştir. Ayrıca katılımcıların 9 farklı ispat özellikleri (doğru ispat, kısmen doğru ispat, tamamlanmamış ispat, geçersiz ispat, açıklama, örnekle doğrulama, tanımları kopyalama, tanımları manipüle etme ve hipotez yazma) taşıdığı tespit edilmiştir.

Öztürk ve Kaplan (2017) yaptıkları çalışmada ortaöğretim matematik öğretmenleri için 3'ü cebir, 3'ü geometri olan ispat yapma beceri testi ve altı düzeyden oluşan dereceli puanlama anahtarı geliştirmiştir. Çalışmaya göre oluşturulan dereceli puanlama anahtarının ispat beceri testine uygun olduğu belirlenmiştir.

Knuth (2002) çalışmasında ortaöğretim matematik öğretmenlerinin ispat kavramlarını ele almayı amaçlamıştır. Bu çalışmanın katılımcılarını 16 tane ortaöğretim (9-12.sınıf) matematik öğretmenin oluşturduğu ve bu öğretmenlerin deneyimlerinin 3 ile 20 yıl arasında değiştiği görülmüştür. Veri toplama aracı olarak yarı yapılandırılmış görüşmeler kullanılmıştır. Görüşmelerde “İspat ne demektir?”, “İspat kavramı sizin için neyi ifade etmektedir?”, “İspat matematikte ne amaçla hizmet etmektedir?” gibi sorular sorulmuştur.

Balacheff (1987) çalışmasında matematiksel bir problemi çözmede kullanılan ispat ve çelişkiler arasındaki ilişkileri bulmayı amaçlamıştır. Bu çalışmada matematik öğreniminde bilginin işleyişiyle ilgili bilgiler verilerek hem bilişsel hem duyuşsal yaklaşıma olan gereklilik belirtilmiştir. Ayrıca bu çalışmanın pragmatik ispatlardan entelektüel ispatlara kadar çeşitli aşamaların sınırlarını çizmeye götürdüğü ve bir çelişkinin üstesinden gelmede bilişsel ilerlemenin şart olmadığı gösterildiği görülmüştür. Çalışmada 4.sınıf (13- 14 yaş) öğrencilerinin karşı örneklerle nasıl başa çıktıkları ele alınmıştır.

Literatürde yer alan çalışmalar genel olarak değerlendirildiğinde çalışmaların hem nitel hem nicel olarak tasarlandığı görülmektedir. Katılımcıların çoğunlukla öğretmen adaylarından oluştuğu, öğretmen adaylarından çoğunlukla matematik öğretmen adayları ile çalışıldığı ayrıca fen bilgisi, sınıf öğretmenliği gibi başka bölümlerde öğrenim gören öğretmen adaylarıyla da çalışıldığı görülmüştür. Ayrıca ilköğretim/ortaöğretim düzeyindeki öğrenciler ile bu kurumlarda görev yapan matematik öğretmenleri üzerinde yapılan çalışmaların da olduğu görülmüştür. Çoğunlukla görüş ölçeği, klinik mülakatlar, yarı yapılandırılmış görüşmeler ve ölçeklerin kullanıldığı görülmüştür. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde, ispat yapmaya

yönelik görüşlerin genelde olumlu olduğu görülmüştür. Ancak bazı çalışmalarda ispata yönelik görüşlerin tam oluşmadığı ya da yetersiz olduğu bazı çalışmalarda da ispat yapmaya yönelik ne olumlu ne olumsuz görüşlerin olduğu görülmüştür. Ayrıca ispat yapmaya yönelik ve katılımcıların kendi ispat yapma süreçlerine aktarmada zorluklar yaşandığı, ispat yapmaya yönelik tutumların sınıf düzeyine, cinsiyet gibi faktörlere göre farklılık gösterdiği görülmüştür.

Matematik Eğitiminde Görselleştirme ve Sözsüz İspat

Matematik, ilerleyen sınıflarda öğrenciler açısından daha soyut bir hale gelir ve öğrenciler soyut matematiksel konuları genellikle okulda öğrenirler (Uysal Koğ, 2012). Öğrenciler daha çok soyut kavramlarda zorlanırlar. Bu sebeple soyut kavramlardan kaynaklanan öğrenme zorluklarının giderilmesi için okullarda uygun yollar bulunmalıdır (Polat, 2018; Uysal Koğ, 2012). En uygun yollardan biri olarak bu kavramların somutlaştırılması gelmektedir ve öğretmenin görevi de soyut kavramları olabildiğince somutlaştırabilmektir (Polat, 2018; Özer ve Şan, 2013).

Somutlaştırmanın en bilindik örnekleri görsel materyallerin kullanılmasıdır. Diyagramlar, grafikler, karikatürler, üç boyutlu modeller, maketler, geometri şekilleri, cebir karoları, birim küpler, simetri aynası ve kesir çubukları matematikte kullanılan görsel materyallere örnek olarak verilebilir (Özer ve Şan, 2013). Matematik öğretiminde görsel materyallerin kullanılmasını öneren araştırmacılar, yanıltıcı durumların fazlaca bulunduğunu ve bu materyallerin derslerde kullanımında dikkatli olunması gerektiğini belirtmişlerdir (Hanna, 2000).

Çağdaş öğrenme anlayışına göre sınıflarda uygun görsel materyallerin kullanıldığı “Görselleştirme” yaklaşımı matematik eğitimi için gerekli ve kullanımı önemlidir (Alsina ve Nelsen, 2010; Uysal Koğ, 2012). Ders işlenişinde zengin materyaller ile görsel araçların kullanıldığı görselleştirme yaklaşımıyla yapılan öğretim, göze ve kulağa hitap ettiğinden dolayı öğrenme sürecinin daha zevkli olmasını, öğretimin de daha başarılı olmasını sağlar (Özer ve Şan, 2013; Uysal Koğ, 2012).

Görselleştirmenin matematik eğitiminde kullanılması öğrencilerin hem bilişsel hem de duyuşsal açıdan olumlu yönde etkilenmesini sağlar (Tutkun, Öztürk ve Demirtaş, 2011). Matematiksel anlama açısından gerekli olan görselleştirmenin

matematik eğitiminde kullanılması ile öğrencilerin dikkati derse çekilmiş olur ve öğrencilerin kendi bilgilerini yapılandırması sağlanır (Işık ve Konyalıoğlu, 2005; Polat, Oflaz ve Akgün, 2019). Bu yüzden görselleştirilmiş öğretim okullarımızda yaygınlaştırılmalıdır. İlköğretimde ve ortaöğretimde dersler işlenirken öğretmenler, gelişen teknolojileri de kullanarak görselleştirilmiş öğretimden faydalanabilirler (Özer ve Şan, 2013; Tutkun ve diğerleri, 2011).

Görselleştirme ile yapılan öğretimin başarılı olabilmesindeki temel faktörlerden biri öğretmenlerin görsel araç gereç kullanabilir olmalarıdır. Ancak öğretmenlerin geneli görsel materyallerin çoğunu hiç duymadığı için veya gereksiz bulduğu için kullanmayı tercih etmemektedir. Bu yüzden görsel materyallerin kullanımı konusunda öğretmen adaylarının gerekli eğitimi üniversitede almaları gerekmektedir. Öğretmen adayları mesleğe atıldıklarında öğrencilerine görsel materyallerin gereksiz olmadığını anlatmalıdırlar. Böylece görselleştirilmiş öğretime öğrencilerin ilgisi artar. (Özer ve Şan, 2013).

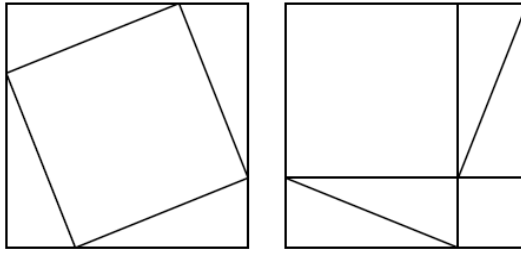
Görselleştirme ile adı geçen tekniklerden biri olan “Sözsüz İspatlar” alternatif ispat yöntemlerindendir (Polat, 2018). Çok eski zamanlarda ortaya çıkan sözsüz ispatların matematikçiler tarafından kabul görme konusunda görüş ayrılıkları yaşanmıştır ve bazıları sözsüz ispatların gerçek ispat olmadığını savunmuştur (Alsina ve Nelsen, 2010; Uğurel, 2020). Yaşanan bu görüş ayrılıkları, sözsüz ispatlar açısından birçok farklı tanım yapılmasına sebebiyet vermiştir. Bu tanımlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Alsina ve Nelsen (2010) sözsüz ispatları “Okuyucu için belirli bir matematiksel ifadenin neden doğru olabileceğini görmesine ve ayrıca doğru olduğunu kanıtlamaya nasıl başlayabileceğini gösteren resimler veya diyagramlardır.” olarak tanımlamıştır. Bardelle (2010) sözsüz ispatları “Kelimeler olmadan yalnızca diyagramlara dayanarak, sayılar, harfler, oklar, noktalar veya diğer işaretlerle donatılmış ve sembolik ifadelerle; ispatın yeniden yapılandırılmasının okuyucuya bırakılmış olduğu ispatlardır.” olarak tanımlamıştır. Gierdien (2007) sözsüz ispatları “Semboller ve geometrik çizimler dışında herhangi bir kelime içermeyen ispatlardır.” olarak tanımlamıştır. Ayrıca Gierdien (2007) sözsüz ispatlar için bir matematiksel ifadenin neden doğru olabileceğini ve bu doğrulamaya nasıl başlanabileceğini göstermeye yarayan ispatlar olduğunu açıklamıştır.

Literatürde yapılan tanımlara göre sözsüz ispat; bir matematiksel ifadenin neden doğru olabileceğini göstermeye yarayan, kelimeler olmadan yalnızca şekillere, şemalara, grafiklere, benzer çizimlere dayandırılarak yapılan ve sayılar yerine genellikle nokta, kare, top, küp veya basitçe anlaşılan nesnelerin kullanıldığı resimler veya diyagramlardır (Alsina ve Nelsen, 2010; Bardelle, 2010; Gierdien, 2007; Yiğit Koyunkaya, 2020).

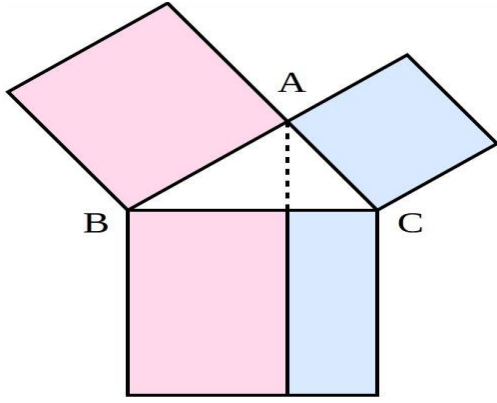
Sözsüz İspatın Tarihçesi

Eski zamanlarda matematikçiler fikirlerini resimlerle ifade ederlermiş (Miller, 2012). Bu nedenle sözsüz ispatların gelişimine katkıda bulunan resimler son yeniliklerden değildir, çok uzun zamanlardan beri vardır. Önce Çin ve Antik Yunan'da daha sonra Arabistan ve İtalya Rönesansında bu resimlerin kullanıldığı bilinmektedir (Alsina ve Nelsen, 2010). Antik Çin metni olan Zhou Bi Suan Jing'den aktarılan ve Şekil 1'de gösterilen ispat, Pisagor Teoreminin bilinen en eski ispatıdır (Miller, 2012; Şadan ve Uğurel, 2020).



Şekil 1. Antik Çin Metni Zhou Bi Suan Jing den Aktarılan Pisagor Teoremi (Miller, 2012).

Şekil 1'de verilen Pisagor Teoremi eski zamanlarda matematikçilerin ispatlarını çizdikleri resimlere verilebilecek en güzel örneklerdir biridir. Daha sonraları Hindu matematikçi Bhaskara ve Antik Yunan matematikçisi Öklid, Pisagor Teoreminin görselleri ile çalışmıştır. Öklid, Pisagor Teoreminin ispatına “Elementler” eserinde yer vermiştir (Miller, 2012; Şadan ve Uğurel, 2020). Şekil 2'de Öklid'in Elementler kitabında yer alan Pisagor Teoreminin ispatı yer almaktadır (Miller, 2012).



Şekil 2. Öklid'in Elementler Kitabındaki Pisagor Teoreminin İspatı (Miller, 2012).

Şekil 2’de gösterilen Öklid’in Elementler kitabındaki Pisagor Teoreminin ispatına göre pembe ve mavi renkli alanlar yardımıyla Pisagor Teoremi görsel olarak ispatlanmıştır.

Sözsüz ispatların kimlik kazanması ilk olarak 1975 yılında Mathematics Magazine dergisinde başlamıştır ve daha sonraları College Mathematics Journal dergisinde yayınlanmaya başlamıştır (Alsina ve Nelsen 2010; Miller, 2012; Şadan ve Uğurel, 2020). 1975 yılında Mathematics Magazine dergisinde Rufus Issacs tarafından “Two Mathematical Papers Without Words” adlı bir makale yayınlanmıştır. Pisagor Teoreminin ispatı da bu makalede yer almıştır. Ancak makalede özel olarak ispat diye belirtilmemiştir. Ocak 1976'da Mathematics Magazine dergisinin yönetimi, iki yeni editör olan J. Arthur Seebach ve Lynn Arthur Steen tarafından alınmıştır. Liderlikteki değişiklikle birlikte formatta da küçük bir değişiklik olmuştur. Yapılan değişiklikle okuyucunun geri bildirim sürecini kolaylaştırmak için yorumlara izin verilmiştir. Okuyucular makalelerle ilgili yorumları dergiye göndermişlerdir. Dergide gönderilenler “Proofs Without Words” başlığı altında yaklaşık olarak yılda bir veya iki defa yayınlanmaya başlanmıştır. 1987 yılında, bu oran yıllık ortalama beş veya altıya yükselmiştir. Matematikçiler için sözsüz ispatlar ilgi çekici olarak gelmeye başlamıştır (Miller, 2012).

Sözsüz ispatı literatüre kazandıran kişi Nelsen (1993) olmuştur. Nelsen sözsüz ispatı gerçek ispat olarak kabul etmez. Sözsüz ispatları, ispata yardımcı olan diyagram ve resimler olarak kabul etmektedir (Demircioğlu ve Polat, 2016b). Nelsen’in sözsüz ispata ilişkin “Proof Without Words: Exercises in Visual Thinking”, “Proof Without

Words II: More Exercises in Visual Thinking” ve “Proof Without Words III: Further Exercises in Visual Thinking” kitapları bulunmaktadır (Demircioğlu ve Polat, 2016b; Şadan ve Uğurel, 2020).

Sözsüz İspatın Aynı Anlama Geldiği Kullanımları

Sözsüz ispatlarda ortak kanıya varılamayan noktalardan biri sözsüz ispatın farklı isimlerle adlandırılmasıdır (Demircioğlu ve Polat, 2016b). Görsel ispat, resimli ispat, resimlerle ispat, diyagramatik ispat gibi adlandırmalar örnek verilebilir (Demircioğlu ve Polat, 2016b; Şadan ve Uğurel, 2020).

Demircioğlu ve Polat (2015, 2016a, 2016b) çalışmasında bu kavramı “Sözsüz İspat” olarak ele almıştır. Dede ve Karakuş (2014), Polat ve diğerleri (2019), Şadan ve Uğurel (2020) ile Tekin ve Konyalıoğlu (2010) çalışmalarında “Görsel İspat” olarak ele almıştır. Alsina ve Nelsen (2010), Bell (2011), Gierdien (2007), Miller (2012), Nelsen (1993) ve Wayne (2017) çalışmalarında sözsüz ispatın İngilizce karşılığı olan “Proof Without Words” olarak ele almıştır. Görsel ispatın İngilizce karşılığı olan “Visual Proof” olarak çalışmasında kullanan kişi Bardelle (2010) ile Uğurel, Moralı, Karahan ve Boz (2016) olmuştur. Bardelle (2010) çalışmasında sözsüz ispatlar için “Diyagramatik İspat (diagrammatic proof)” kavramını da kullanmıştır. Alsina ve Nelsen (2010) makalesinde “Proof Without Words” kavramının yanında “Visual Proof” kelimesine de yer vermiştir. Britz ve diğerleri (2014) sözsüz ispatı “Proof By Picture” olarak ele almıştır.

Sözsüz İspatların Eğitimdeki Yeri ve Önemi

Sözsüz ispatlar, görsel akıl yürütmeyi gerektirdiği için ispat becerisi üzerinde olumlu etki yaratmaktadır (Polat ve diğerleri, 2019). Bu sebeple sözsüz ispatlar, teoremleri ispatlamak için matematiğin geometri, tamsayılar, trigonometri, analiz, eşitsizlikler vb. birçok alanında kullanılabilir (Alsina ve Nelsen, 2010; Miller, 2012).

Matematik eğitiminde sözsüz ispat yapılırken teorem ya da ifadeler bir görselle sunulmaktadır. Sözsüz ispatlar, görseller üzerinde zihinde döndürme, öteleme, parçalara bölme, birleştirme ve üç boyutlu düşünme gibi zihinsel işlemler yaptırabilmektedir. Sözsüz ispatları anlamak için zihinsel işlemlerin yanında çeşitli matematiksel bilgileri de kullanmak gerekebilir (Polat ve diğerleri, 2019). Ayrıca sözsüz ispatlar matematiksel

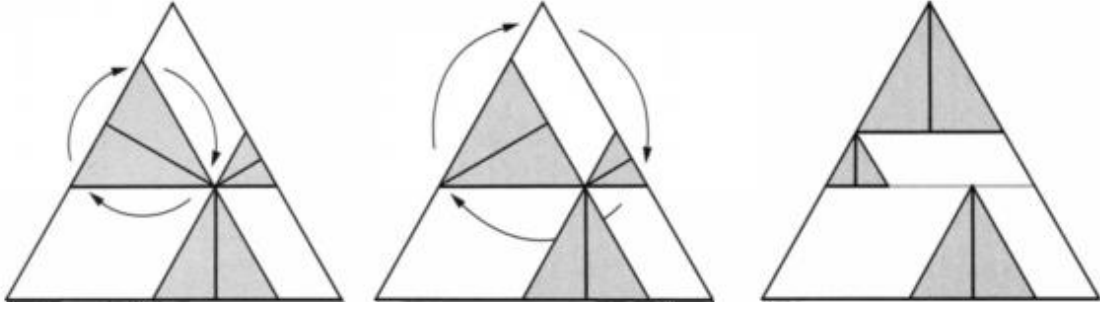
düşünmeyi ve merakı teşvik eder (Miller, 2012). Matematik eğitimi açısından sunabileceği fırsatları keşfetmek için sözsüz ispatların kullanımı gerekmektedir (Bardelle, 2010).

Günümüz matematik eğitiminde sözsüz ispatlara olan ilgi artmıştır (Bardelle, 2010). İlköğretimden üniversitelere kadar matematik derslerinde sözsüz ispatların önemli rolü olduğu bilinmekte ve her müfredatta formal ispatların yanında sözsüz ispatlara da yer verilmelidir (Alsina ve Nelsen, 2010; Demircioğlu ve Polat, 2016b).

Sözsüz bir ispatın gerçekten bir ispat olarak nitelenip nitelenmediği konusunda tartışmalar vardır (Alsina ve Nelsen, 2010; Gierdien, 2007). Miller'e (2012) göre sözsüz ispat için sorulan bu sorulara verilebilecek cevap zordur. Literatürde sözsüz ispatların zayıf yönü, geleneksel ispatlar gibi gerçek ispat olarak kabul edilmemesi olarak belirtilmektedir (Alsina ve Nelsen, 2010; Demircioğlu ve Polat, 2016b). Ancak sözsüz ispatlar, ispat olarak kabul edilmese de matematik öğretiminde teoremlerin ya da ifadelerin neden doğru olduğunu göstermeye yarayan kavramlar oldukları için önemli sayılmaktadırlar (Demircioğlu ve Polat, 2016b; Miller, 2012). Ayrıca sözsüz ispatlar görsellikle yakından ilişkilidir. Görselleştirmenin matematiğe olan katkısı bilinirken sözsüz ispatların da matematiğe önemli katkı sağlayacağı söylenebilir (Demircioğlu ve Polat, 2016b).

Sözsüz İspat Örnekleri

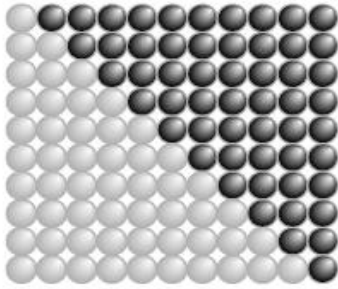
Miller (2012) çalışmasında sözsüz ispatların kullanıldığı alanları üç kategoriye ayırmıştır. Bu kategoriler “Geometri, Analiz ve Tamsayı İlişkileri” olarak ele alınmıştır. Geometri doğası gereği uzaydaki cisimlerle ilgilenir ve kolayca sözsüz ispatlara yer verme eğilimindedir. Standart analiz sonuçları, pek görsel içermediğinden dolayı sözsüz ispatlara daha az uygundur. En güzel ve sezgisel sözsüz ispatlar tamsayı ilişkilerinden gelir. Tamsayılar, nokta veya diğer ayrıklarla kolayca temsil edilebilirler ve nesneler düzenlendiğinde ortaya çıkan desenler kolayca görülebilir (Miller, 2012). Açıklanan kategorilerden geometri alanına ilişkin sözsüz ispat örneği Şekil 3'te gösterilmiştir.



Şekil 3. Viviani Teoreminin Sözsüz İspatı
(Miller, 2012).

Şekil 3'te okuyucu, üçgenin yüksekliğine ve dikliklere ihtiyaç duymadan sadece içteki üçgenleri döndürerek ispatı kolayca anlayabilir (Miller, 2012). Üstteki iki iç üçgenin yükseklikleri, alttaki iç üçgenin yüksekliğine paralel olacak şekilde döndürülür. Bu döndürme ile iç üçgenlerin yükseklikleri toplamı rahatça görülmektedir. Bu üçgenlerin yükseklikleri toplamının, en büyük üçgenin yüksekliğine eşit olduğu açıkça anlaşılmaktadır.

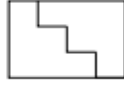
Açıklanan kategorilerden tamsayılara ilişkin ilk n pozitif tamsayının toplamının sözsüz ispatı Alsina ve Nelsen (2010) için Şekil 4'te, Britz ve diğerleri (2014) için Şekil 5'te gösterilmiştir.



Şekil 4. İlk n Pozitif Tamsayı Toplamının Sözsüz İspatı
(Alsina ve Nelsen, 2010).

Şekil 4'te verilen birbirine eş üçgenlerden birinin döndürülmesiyle dikdörtgen şekli oluşturulmuştur. Dikdörtgenin alanı toplamın sayısı ile belirtilmiştir. Dikdörtgenin içindeki eşit iki üçgenin her biri $1+2+\dots+n$ toplamı kadar yuvarlak toplardan oluşmaktadır. Dikdörtgenin kenarları n ve $n+1$ olur, dikdörtgenin alanı ise $n \cdot (n+1)$ dir. O halde iki üçgen eş olduğu için $1+2+\dots+n$ toplamı dikdörtgenin alanın yarısına eşit olur. Böylece ispat görsel olarak tamamlanmış olur.

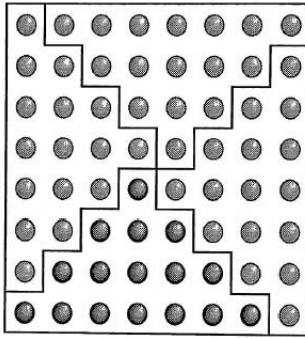
$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$



Şekil 5. İlk n Pozitif Tamsayı Toplamının Sözsüz İspatı
(Britz ve diğerleri, 2014).

Şekil 5'te dikdörtgenin içindeki iki bölgenin her biri $1+2+\dots+n$ şeklinde karelerden oluşmaktadır ($n=3$ 'tür). Dikdörtgende n tane satır, $n+1$ tane sütun kare vardır. Dikdörtgen toplamda $n \cdot (n+1)$ tane kareden oluşmaktadır. İki bölgenin her biri bunun yarısı eder ve böylece teoremi verir (Britz ve diğerleri, 2014).

Nelsen'in (1993) kitabında yer verdiği $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$ olan ardışık tek tamsayıların toplamının sözsüz ispatı Şekil 6'da gösterilmiştir.

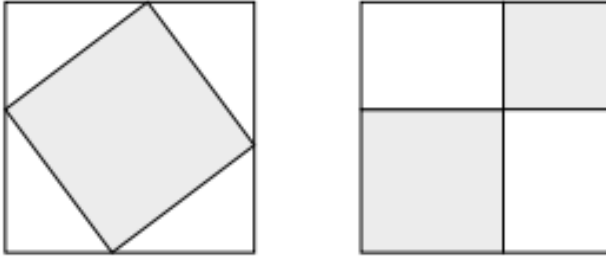


$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = \frac{1}{4}(2n)^2 = n^2$$

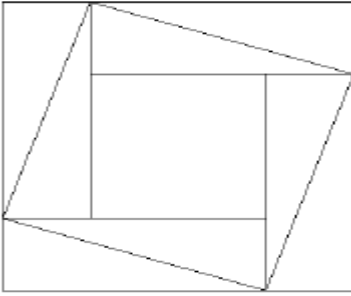
Şekil 6. Ardışık Tek Tamsayıların Toplamının Sözsüz İspatı
(Nelsen, 1993).

Şekil 6'ya göre bir kare dört eşit parçaya ayrılmıştır. Her bir parça $1+3+5+\dots+(2n-1)$ şeklinde toplardan oluşmaktadır. Karenin bir kenar uzunluğu $2n$ 'dir. Her bir parçadaki topların toplam sayısı dıştaki en büyük karenin alanını vermektedir. Yani karenin alanı $(2n)^2$ 'ye eşit olur. Karenin alanının dörtte biri ardışık tek tamsayıların toplamına eşittir. Karenin alanının dörtte biri olan $\frac{1}{4}(2n)^2$, ardışık tek tamsayıların toplamı olan $1+3+5+\dots+(2n-1)$ 'ye eşit olur. Böylelikle $\frac{1}{4}(2n)^2 = n^2$ eşitliği ile $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$ elde edilir.

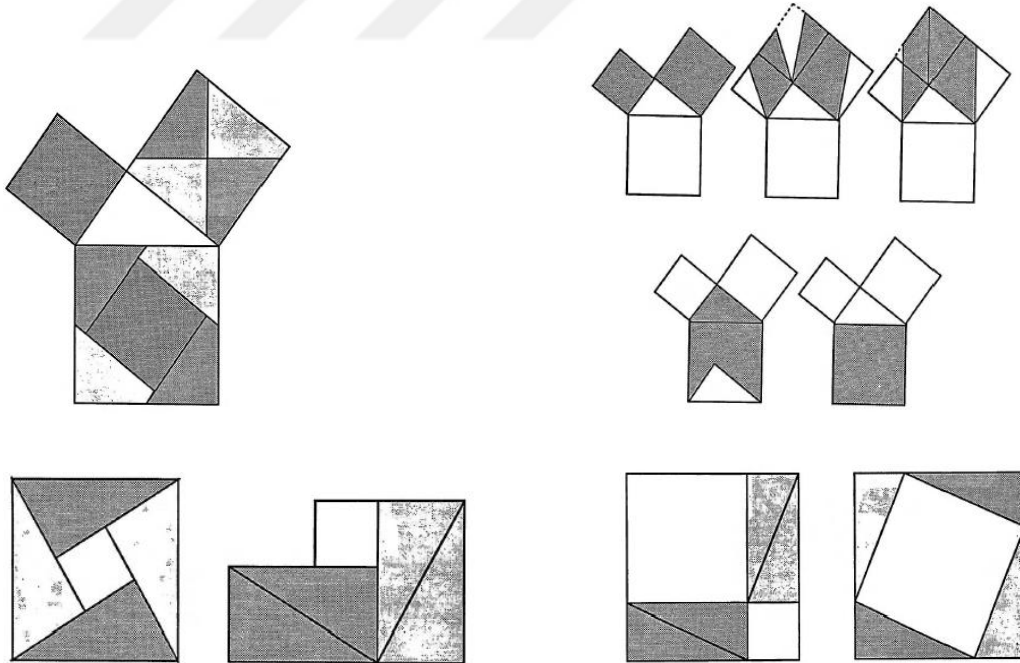
Literatürde Pisagor Teoreminin birçok sözsüz ispatı bulunmaktadır. Pisagor Teoreminin sözsüz ispatı Britz ve diğerleri (2014) için Şekil 7'de, Bardelle (2010) için Şekil 8'de, Nelsen (1993) için Şekil 9'da gösterilmiştir.



Şekil 7. Pisagor Teoreminin Sözsüz İspatı
(Britz ve diğerleri, 2014).



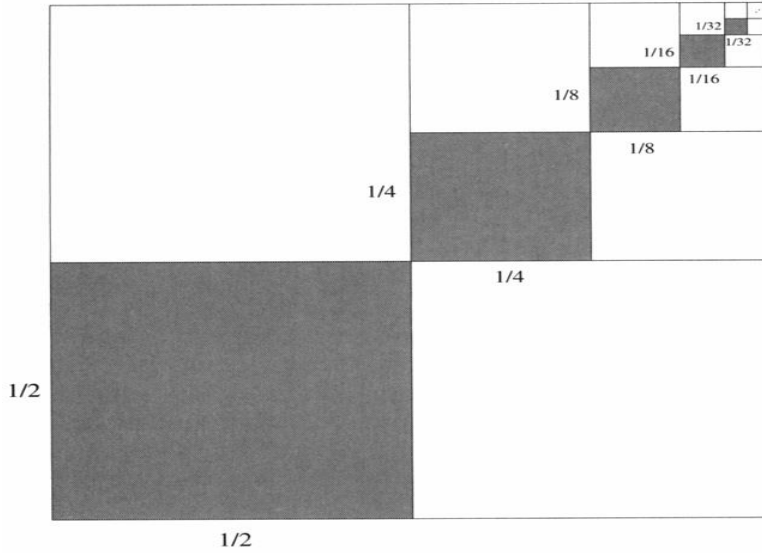
Şekil 8. Pisagor Teoreminin Sözsüz İspatı
(Bardelle, 2010).



Şekil 9. Pisagor Teoreminin Sözsüz İspat Örnekleri
(Nelsen, 1993).

Sonsuza kadar uzanan geometrik serilerin sözsüz ispatları yapılırken yalnızca belirli sayıda alana kadar görselleştirme işlemi yapılabilir. Görselleştirme yaparken

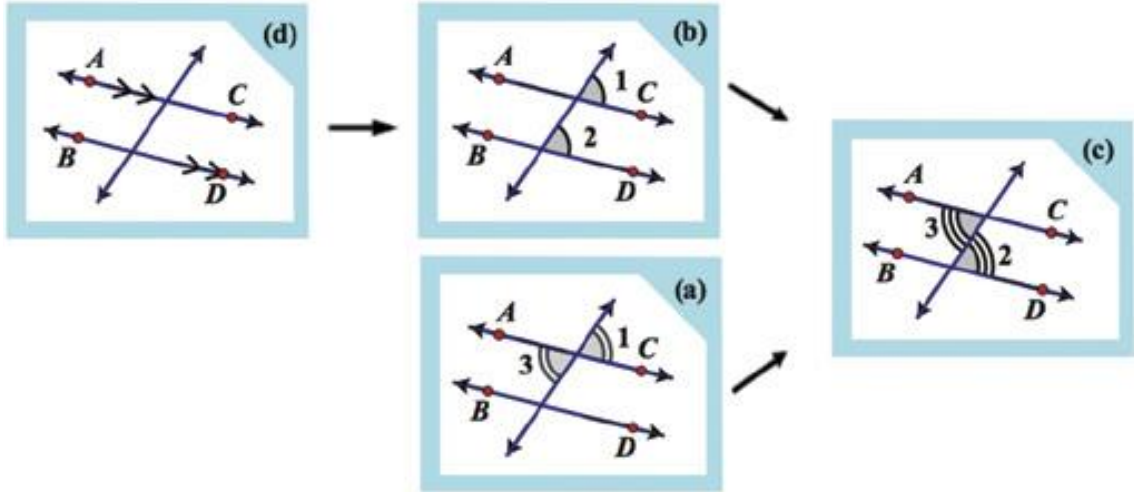
sonsuz geometrik serideki her alan alınmaz yalnızca bazı alanlar ele alınır. Görünmeyen kısmı görmek okuyucunun görüşüne bağlıdır. Süreçteki ilk birkaç adımı görselleştirerek okuyucu her adımın ortak noktasını belirler (Gierdien, 2007). Şekil 10’da belirtilen duruma uygun sözsüz ispat örneği yer almaktadır.



Şekil 10. Sonsuz Geometrik Serilerin Sözsüz İspatı
(Gierdien, 2007).

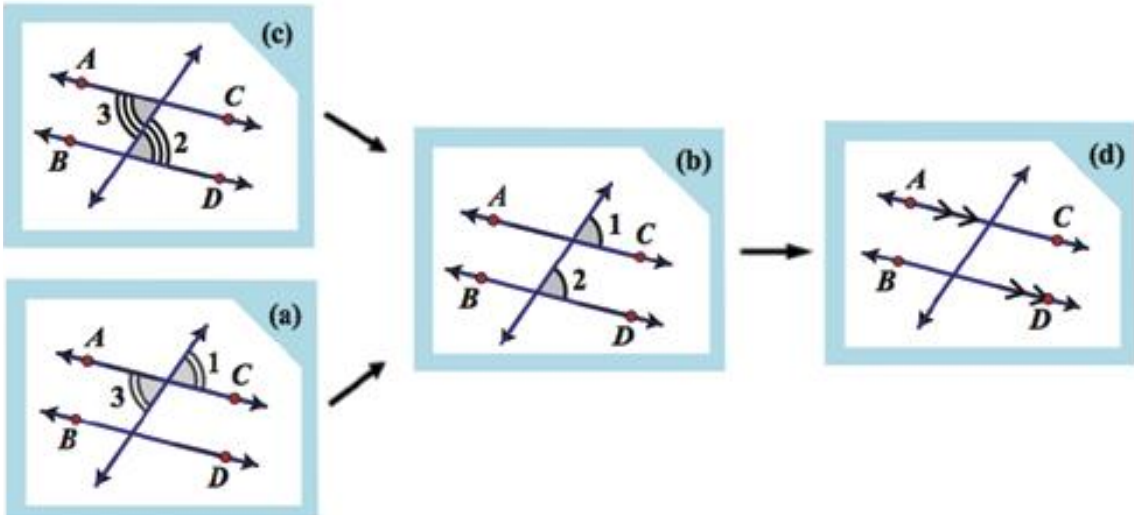
Şekil 10’a göre büyük kareyi çeyreklere böleriz, bu çeyreğin sol alt parçasını işaretler ve diğer üçünü işaretlemeyiz. Burada her aşamada dört kareden birinin işaretlenmesi düşüncesi ortaya çıkmaktadır. İşaretlenen karelerden ilkinin alanı $(\frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2})$, ikinci karenin alanı $(\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{2})^2$ olur. İşaretlenen kareler sonsuza doğru gitmektedir. Belli sayıda alanlardan yola çıkarak sonsuza giden işaretlenen karelerin alanları toplamının $\frac{1}{3}$ olduğu anlaşılmaktadır. $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^6 + \dots = \frac{1}{3}$ sonsuz geometrik serisinin sözsüz ispatı, birkaç adımdan yola çıkılarak bulunmuş olur (Gierdien, 2007).

Wayne (2017) çalışmasında iki paralel doğrunun oluşturduğu iç ters açılarının eşit olma durumunun sözsüz ispatını ele almıştır. Çalışmada bu ispat için dört kart gösterilmiştir. Bu kartların düzenlenerek hangi teoremi ispatladığı açıklanmıştır. Bu ispat Şekil 11’de gösterilmiştir.



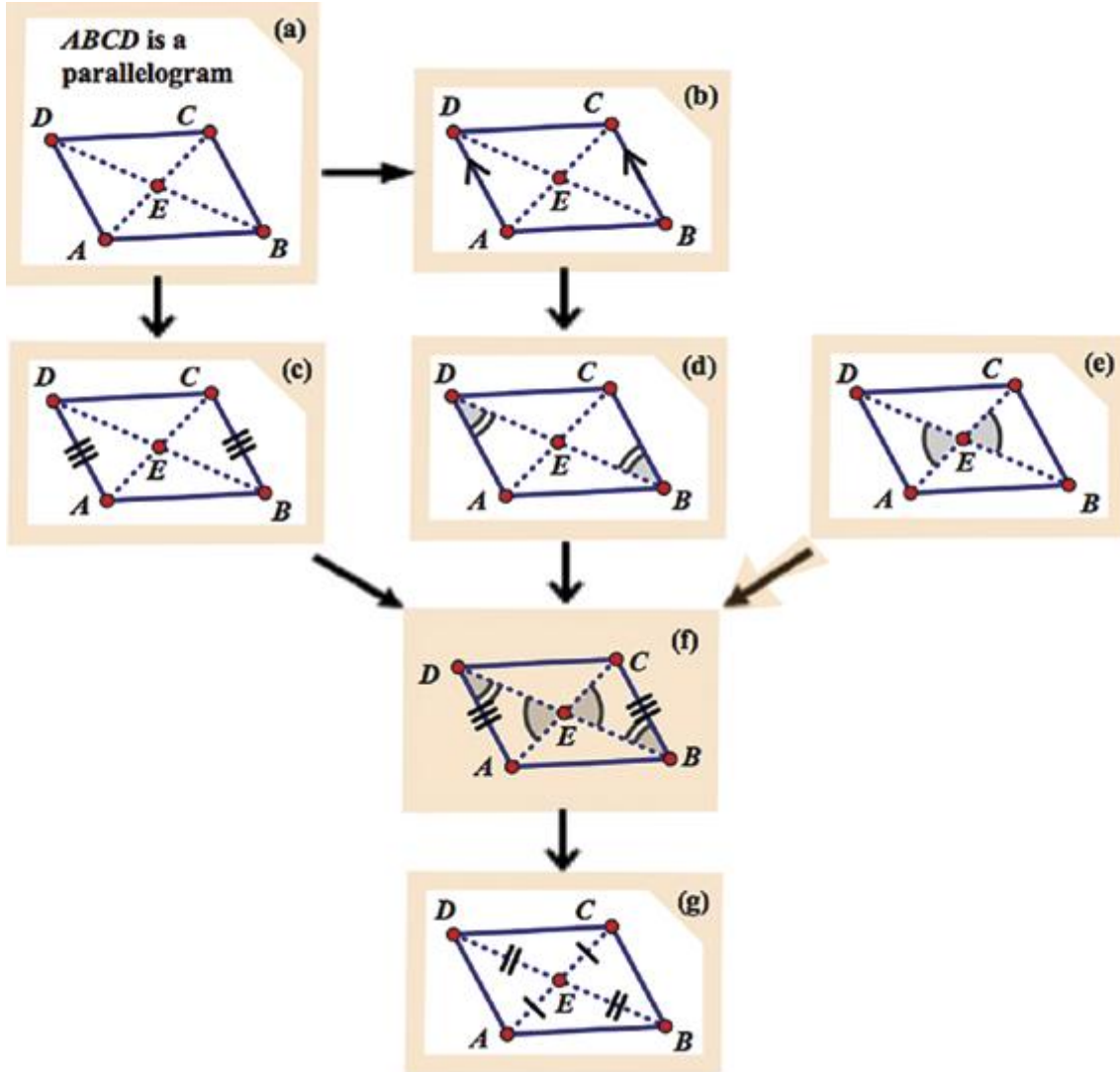
Şekil 11. İki Paralel Doğrudan Oluşan İç Ters Açıların Eşitliğine Dair Sözsüz İspat (Wayne, 2017).

Şekil 11’de gösterilen d kartında AC ile BD doğruları birbirine paraleldir. Paralel doğrulardan dolayı aynı yönlü olan açı 1 ile açı 2 birbirine eşit olur. Aynı zamanda ters açı olan açı 1 ile açı 3 de birbirine eşittir. Bu eşitliklerin sonucunda geçiş özelliği ile iç ters açı olan açı 2 ile açı 3 birbirine eşit olur. Yapılan işlemler sonucunda paralel doğruların oluşturduğu iç ters açılarının birbirine eşit olma durumunun sözsüz ispatı şekilde gösterildiği yapılmaktadır (Wayne, 2017). Bu ifadenin tersi durumunun sözsüz ispatı Şekil 12’de gösterilmiştir.



Şekil 12. İç Ters-Ters Açılarının Oluşturduğu Doğruların Paralelliğine Dair Sözsüz İspat (Wayne, 2017).

Bir dörtgen paralelkenar ise köşegenleri birbirini ortalamaktadır ve bu ifadenin sözsüz ispatı Şekil 13’te gösterilmiştir.



Şekil 13. Paralelkenarın Köşegenlerinin Birbirini Ortalama Durumunun Sözsüz İspatı (Wayne, 2017).

Görselleştirme ve Sözsüz İspat ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Matematik eğitiminde görselleştirme kavramını inceleyen çalışmalar bulunmaktadır (Akkan ve diğerleri, 2018; Duval, 1999; Işık ve Konyalıoğlu, 2005; Özer ve Şan, 2013; Uysal Koğ ve Başer, 2011; Yılmaz ve Argün, 2013). Çalışmalarda genellikle görselleştirme kavramının matematik eğitimi üzerine etkisi ele alınmıştır.

Yılmaz ve Argün (2013) yaptıkları çalışmada matematik yapma yöntemlerinden genelleme sürecinde görselleştirmeyi incelemeyi amaçlamıştır. Çalışmaya göre katılımcıların görselleştirmelere sıkça başvurduğu ve görselleştirmeleri genelleme sürecinin ilk seviyesinde kullandıkları tespit edilmiştir. Katılımcıların genellemenin ikinci seviyesinde görselleştirmeleri kullanmadıkları ve üçüncü seviyesinde ise görselleştirme kullanmaya gerek duymadıkları görülmüştür.

Işık ve Konyalıoğlu (2005) yaptıkları çalışmada görselleştirmenin matematik eğitimi üzerine etkilerini araştırmıştır. Araştırmaya göre görselleştirmeyi ilköğretimden başlayarak matematik eğitiminde kullanmanın yararlı olacağı belirtilmiştir. Özer ve Şan (2013) bu durumu biraz daha özelleştirerek ilköğretim öğrencileri üzerinde “Özdeşlikler” konusu için görselleştirmenin etkisini incelemiştir. Öğrenciler deney ve kontrol grubu olarak iki gruba ayrılmıştır. Deney grubunda görselleştirilmiş eğitim, kontrol grubunda ise var olan öğretim yöntemiyle eğitim yapılmıştır. Araştırma sonucuna göre deney grubu öğrencilerinin daha başarılı olduğu görülmüştür. Görselleştirme kullanmanın matematik öğretiminde etkili bir yöntem olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Uysal Koğ ve Başer (2011) yaptıkları çalışmada ilköğretim öğrencileri için görselleştirme yaklaşımının matematikte öğrenilmiş çaresizlik ve soyut düşünme becerilerine etkisini incelemiştir. Araştırmaya göre görselleştirmenin soyut düşünme becerileri ve öğrenilmiş çaresizliklere olumlu etki gösterdiği belirtilmiştir.

Akkan ve diğerleri (2018) yaptıkları çalışmada ortaöğretim matematik öğretmenlerinin görsel akıl yürütme becerileri, geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal görselleştirme becerileri arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Araştırmaya göre görsel akıl yürütme becerileri, geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal görselleştirme becerileri arasında ilişki olduğu belirtilmiştir. Daha yüksek geometrik düşünme düzeyine sahip öğretmenlerin görsel teoremleri ispatlamada daha iyi olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Matematik eğitiminde sözsüz ispat kavramını inceleyen pek çok çalışma bulunmaktadır (Bardelle, 2010; Demircioğlu ve Polat, 2015; Demircioğlu ve Polat, 2016a; Demircioğlu ve Polat, 2016b; Gelişen, 2007; Ülker, 2018; Polat, 2018; Polat ve diğerleri, 2019; Tekin ve Konyalıoğlu, 2010). Çalışmalarda genellikle öğretmen adaylarının veya öğretmenlerin sözsüz ispata yönelik görüşleri, sözsüz ispat yapma süreçleri, sözsüz ispat yapma sürecinde yaşanan zorluklar, sözsüz ispatların matematiksel ispat becerileri üzerine etkisi ve matematiksel konuların görsel olarak ispatlanması incelenmiştir.

Demircioğlu ve Polat (2015) yaptıkları çalışmada ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının sözsüz ispat yöntemi ile ilgili görüşlerini incelemeyi amaçlamıştır. Demircioğlu ve Polat (2016a) yaptıkları çalışmada ise ortaöğretim matematik öğretmen

adaylarının sözsüz ispat yapma sürecinde yaşadıkları zorluklarla ilgili görüşlerini belirlemeyi amaçlamıştır. Her iki çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden olan durum çalışması kullanılmıştır. Her iki çalışmanın katılımcılarını üniversite 5. sınıfta öğrenim gören 1. öğretimden 26 öğrenci, 2. öğretimden 31 öğrenci olmak üzere toplamda 57 öğretmen adayının oluşturduğu görülmüştür. Bu çalışmalarda veriler dönem sonunda öğretmen adaylarına yöneltilen açık uçlu sorulardan oluşturulmuştur. Veriler yazılı olarak toplanmış ve verilen cevapların benzerlik/farklılıklarına göre sınıflandırılarak analizi yapılmıştır. İlk çalışmanın sonuçlarına göre öğretmen adaylarının sözsüz ispatların kalıcı olduğunu, matematiksel kavramları daha anlaşılır yaptığını, matematiksel kavramları somutlaştırdığını ve konular arası ilişki kurmada yardımcı olduğunu belirttikleri görülmüştür. İkinci çalışma sonuçlarına göre öğretmen adaylarının en fazla zorlandıkları kısımların şekilleri anlayamama, açıklamaların olmaması, alan bilgi eksikliği, kaynak sıkıntısı, sözsüz ve cebirsel ispat arasında ilişki kuramama olduğu belirtilmiştir.

Polat ve diğerleri (2019) yaptıkları çalışmada Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin ve uzamsal düşünmenin görsel ispatla olan ilişkisini çıkarmayı amaçlamışlardır. Çalışmada nicel araştırma yöntemi olan korelasyon araştırma yöntemi kullanılmıştır. Araştırmanın katılımcılarını 85 tane ilköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan öğretmen adaylarının oluşturduğu görülmüştür. Veri toplama aracı olarak Van Hiele geometrik testi, 4'er seçenekli 27 test sorusu olan uzamsal yetenek testi ve 10 tane açık uçlu sorudan oluşan görsel ispat beceri testi kullanılmıştır. Çalışmada testlerden alınan puanlar SPSS programı ile analiz edilmiştir. Verilerin analizinde Spearman korelasyon katsayısına bakılmıştır. Çalışmanın sonuçlarına göre öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinden 3. düzeyde yoğunlaştıkları, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile görsel ispat arasında anlamlı bir ilişkinin olduğu ancak uzamsal yetenekle görsel ispat arasında anlamlı bir ilişkinin olmadığı tespit edilmiştir.

Bardelle (2010) çalışmasında matematiksel bilginin öğretiminde kullanılan diyagramların temel zorluklarını ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Çalışmanın katılımcılarını Piemonte Üniversitesi öğrencilerinden 2. ve 3. sınıf matematik öğrencilerinin oluşturduğu görülmüştür. Bu çalışmada diyagramatik ispatlar görsel ispat olarak ele alınmıştır. Çalışmanın katılımcılarına Pisagor Teoremi ve geometrik serilerle ilgili görsel ispatlar verilmiştir. Katılımcıların Pisagor Teoremi ile daha çok

karşılaştıklarından dolayı Pisagor Teoreminin görsel ispatında geometrik serilere göre çok fazla zorlanmadıkları görülmüştür. Geometrik serilerle ilgili olan görsel ispatlarda ilgili ipuçları verilse de öğrencilerin çoğunun ispatı yeniden yapılandıramadıkları görülmüştür. Çalışma sonucuna göre öğrencilerin, görselleri kullanma bakımından zorluklar yaşadıkları ve ipuçlarına ihtiyaç duydukları belirlenmiştir.

Polat (2018) doktora tezi çalışmasında lise öğrencilerinin sözsüz ispat yapma süreçlerini incelemeyi, sözsüz ispatların matematiksel ispat becerileri üzerine etkisini belirleyebilmeyi hem öğretmenlerin hem öğrencilerin görüşlerini almayı amaçlamıştır. Çalışmada karma araştırma yöntemi kullanılmış ve çalışmanın katılımcılarını 9.sınıfta okuyan 25 öğrencinin oluşturduğu görülmüştür. Veri toplama aracı olarak tüm sınıfa uygulanan ispat beceri testi, seçilen dört öğrenciye uygulanan bireysel sözsüz ispat etkinlikleri, görüşmeler ve gözlemler kullanılmıştır. Ayrıca öğretmenlerle de görüşmeler yapılmıştır. Öğrencilerle yapılan görüşmelerde öğrencilerin sözsüz ispatlarda zorlandıkları noktaları açıklamaları istenmiş, derste sözsüz ispatlara yer verip veremeyecekleri sorulmuş, sözsüz ispatların olumlu veya olumsuz yönlerini açıklamaları istenmiştir. Öğretmenlerle yapılan görüşmelerde öğretmenlerin sözsüz ispatlarda zorlandıkları noktaları açıklamaları istenmiş, öğretmenlerin sözsüz ispatları derslerinde yer verip vermeyecekleri sorulmuş, sözsüz ispatların olumlu ya da olumsuz yönlerini açıklamaları istenmiştir. İspat beceri testi hem uygulama öncesinde ön test olarak hem uygulama sonrasında son test olarak uygulanmıştır. Veri analizinde nitel verilerde SPSS programı kullanılmış, nitel verilerde ise içerik analizi kullanılmıştır. Bu araştırmada ispat beceri testlerinden alınan puanların bağımlı örneklem t-testi ile analizi sonucu, sözsüz ispatların ispat becerisi üzerinde olumlu olduğu bulunmuştur. Hem öğretmenlerle hem öğrencilerle yapılan görüşmeler sonucunda sözsüz ispatlar için olumlu görüşler alınmıştır.

Gelişen (2007) yüksek lisans tez çalışmasında 9. sınıf öğrencilerine Üçgenler konusunun öğretiminde origami ile sözsüz ispat yapmayı amaçlamıştır. Çalışmanın katılımcılarını lisede öğrenim gören 31 öğrenci oluşturmuştur. Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden öğretim deneyi kullanılmıştır. Veri toplama aracı olarak problem çözme testi, mülakatlar, origami etkinliklerinin değerlendirildiği çalışma yapıları ve kamera kayıtları kullanılmıştır. Problem Çözme Testi, araştırmacının dersine girdiği sınıfta 30 öğrenciye 40 dakika süre ile uygulanmıştır. Test sonucu verileri ile gönüllülük esasına göre 4 öğrenci seçilmiştir. Bu öğrencilerle 5 ay sonra yarı yapılandırılmış görüşmeler

yapılmıştır. Çalışma yaprağının birincisinde üçgenin iç açıları ve dış açıları toplamıyla alakalı kavram karikatürü verilmiştir. Diğer çalışma yapraklarında origami yöntemi kullanılmıştır. İkinci çalışma yaprağında üçgenin iç açıları toplamı, üçüncü çalışma yaprağında ikizkenar üçgen, dördüncü çalışma yaprağında eşkenar üçgen, beşinci çalışma yaprağında açortay, altıncı çalışma yaprağında kenarortay, yedinci çalışma yaprağında Pisagor Teoremi, sekizinci çalışma yaprağında muhteşem üçlü, dokuzuncu çalışma yaprağında dikdörtgen ve üçgenin alan etkinliği verilmiştir. Veriler içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Bu araştırmanın sonuçlarına göre öğrenciler origami ve sözsüz ispat yöntemleriyle ilk kez karşılaşmış olmalarına rağmen öğrencilerin origami ve sözsüz ispat yöntemlerini zevkli, eğlenceli, ilgi çekici ve öğretici buldukları belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin bu yöntemleri kolayca benimseyebildikleri tespit edilmiştir.

Ülker (2018) yüksek lisans tez çalışmasında ortaokul seviyesi için sözsüz ispatların formel ispata geçiş olarak nasıl kullanılabileceğini incelemeyi amaçlamıştır. Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden öğretim deneyi kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcılarını ortaokul 7. sınıf öğrencilerinden 17 erkek ve 13 kız olarak toplamda 30 öğrencinin oluşturduğu görülmüştür. Bu 30 öğrenci beşerli olacak şekilde altı gruba ayrılmıştır. Her öğrencinin grup arkadaşını kendisinin seçtiği ve gruplar arası akademik başarı farklılıklarının olduğu görülmüştür. Veri analizi için görüntü ve ses kaydı alınmıştır. Öğrenci defterleri ve araştırmacının gözlem notları ile veriler sağlanmıştır. Video kaydı alınan odak grubunun ve ikinci grubun akademik açıdan en başarılı olduğu belirlenmiştir. Üçüncü grubun başarısının bu iki grubun başarısından düşük olduğu, diğer gruplardan ise yüksek olduğu tespit edilmiştir. Dördüncü grubun akademik başarı düzeyinin ortalama olduğu, beşinci ve altıncı grubun akademik başarı düzeyinin ise ortalamanın altında olduğu belirlenmiştir. Öğrencilere GME çerçevesinde sözsüz ispat durumları sözel bir problem bağlamında verilmiştir. Öğrencilere sorulan problemler “İşyeri problemi, Örüntü problemi, Asansör problemi, Küp problemi ve Kaplama problemi” olarak belirtilmiştir. Çalışmadan elde edilen sonuçlara göre öğrencilerin, sözsüz ispatların kullanıldığı bir öğretim ortamında ispata yönelik birtakım süreçler yaşadıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin gerçek hayat problemlerinden cebire, geometriye, aritmetiğe geçiş yapabildikleri ve bu alanlar arasında ilişkiler kurabildikleri belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin yaşanan süreçlerde ilerleme kaydettikleri görülmüştür.

Demircioğlu ve Polat (2016b) yaptıkları çalışmada matematik eğitimi için alternatif bir ispat yöntemi olan sözsüz ispat kavramına ve örneklerine yer vererek sözsüz ispatların kuramsal olarak ele alınmasını amaçlamıştır. Çalışmada ispat ve görselleştirme kavramlarının önemi üzerine odaklanılmış, ispat ve görselleştirmenin birbiriyle olan ilişkileri incelenmiştir. Sözsüz ispatların hem ispat hem görselleştirme ile ilgili yönleri tarihsel süreç içinde incelenmiştir. Araştırmalarda sözsüz ispatlara yönelik tanımlarda ortak bir kanaat olduğu ancak sözsüz ispatlara dair kullanımlar hakkında ortak kanaate varılmadığı belirtilmiştir. Çalışmada sözsüz ispatların zayıf yönünün, gerçek ispat olarak kabul edilmemesi olduğu belirtilmiştir. Ancak sözsüz ispatların görsellikle yakından ilişkili olmasından dolayı matematik eğitiminde sözsüz ispatların önemli olduğu belirtilmiştir.

Tekin ve Konyalıoğlu (2010) yaptıkları çalışmada trigonometri konusundaki toplam ve fark formüllerinin görsel şekillerle ispat edilmesini ve tanıtılmasını amaçlamıştır. Bu çalışmada görsel ispat ve cebirsel ispat sırasıyla yapılarak verilmiştir. İspat için görsel şekillere dayalı olarak yapılan çizimler sayesinde öğrencilerin formülleri anlayabildikleri, formüldeki açı ve kenarları görebildikleri belirtilmiştir. Çalışmada cebirsel olarak yapılan ispatların mantıksal düşünmeyi sağladığı belirtilmiştir. Ancak bu ispatlarda öğrencilerin formüllerin özünü oluşturan açı, kenar ilişkilerini görsel ispattaki kadar yeterince göremedikleri tespit edilmiştir. Böylece görsel ispatların, formüllerdeki açı ve kenarların nasıl oluştuğunu görmeye olanak sağladığı, bunların nereden geldiğini açıklayabilmeye yardımcı olduğu ve kalıcı öğrenmeler oluşturduğu belirlenmiştir.

Literatürde yer alan çalışmalar genel olarak değerlendirildiğinde çalışmaların çoğunlukla nitel olarak tasarlandığı görülmektedir. Katılımcıların matematik öğretmen adaylarından, ilköğretim/ortaöğretim düzeyinde okuyan öğrencilerden ve matematik öğretmenlerinden oluştuğu görülmüştür. Çalışmalarda çoğunlukla ispat beceri testlerinin, çalışma yapraklarının, yarı yapılandırılmış görüşmelerin, gözlemlerin, mülakatların ve kamera kayıtlarının kullanıldığı görülmüştür. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde görselleştirme kavramının matematik eğitiminde kullanımının yararlı ve etkili olduğu, görselleştirmenin soyut düşünme ve öğrenilmiş çaresizliklere olumlu etki gösterdiği, matematik eğitiminde sözsüz ispatların önemli olduğu, sözsüz ispatların matematik eğitiminde kalıcı olarak öğrenmeyi sağladığı, sözsüz ispatlar hakkında genelde olumlu görüşlerin yer aldığı görülmüştür.

Matematikte Bilgisayar Destekli Öğretim ve Dinamik Geometri Yazılımları

Bilgi ve iletişim teknolojilerinde yaşanan hızlı gelişmeler eğitim ortamlarını, eğitim programlarını ve eğitim araç gereçlerini değiştirmektedir. Eğitimde önemli olan neyin öğretileceği değil nasıl öğretileceğidir ve bu durum teknoloji ile rahatça sağlanabilmektedir (Baki, 2000; Kepceoğlu ve Yavuz, 2017a). Teknoloji öğrenciler için öğrenme süreçlerinde geri bildirim verme, kavram yanlışlarını tespit etme ve eğitim durumlarını belirleme konusunda ölçme değerlendirme aracı olarak da kullanılabilmektedir (Kepceoğlu ve Yavuz, 2017a).

NCTM (2000) okul matematiğinin altı ilkesini eşitlik, müfredat, öğretim, öğrenme, değerlendirme ve teknoloji olarak açıklamıştır. NCTM'in (2000) altı ilkesinden biri olan teknoloji, günümüzde sınıfların vazgeçilmezi olmuştur. Böylece eğitim teknolojileri eğitim ve öğretime farklı boyutlar kazandırmıştır. Genel anlamda teknoloji destekli eğitim demek herhangi eğitim öğretim sürecinde bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılarak yapılan eğitim demektir (Erginbaş, 2009).

Teknoloji destekli öğretim, matematiğin pek çok konusunda kullanılabilmektedir (Hacısalıhoğlu Karadeniz ve Akar, 2014). Matematik öğretiminde denklemlerin çözümleri ve grafikleri, üç boyutlu uzay geometrisi, yeni matematiksel ilişkiler bilgisayar yazılımları ile rahatça elde edilebilmektedir. Ayrıca bilgisayar teknolojisi ile matematiğin görsel yollarla öğrenilmesi ve soyut matematik kavramlarının somutlaştırılması sağlanır (Baki, 1996; Karataş ve Güven, 2015). Bu sebeple bilgisayarlar, matematik eğitiminde kullanılan teknolojilerden en önemlisi ve en yaygın olanıdır (Baki, 1996).

Yapılandırmacı yaklaşımla 1970'lerde ortaya çıkan "Bilgisayar Destekli Öğretim (BDÖ)", önceden bilinen ilişkilerin öğrenciler tarafından yeniden keşfedilerek orijinal genellemelerde bulunmalarını sağladığı için günümüzde önemi artmıştır (Baki, 2000; Öztürk, 2011). Bu sebeple öğrenciler, bilgisayarı matematik için kullanabilen aktif bireyler olmalıdır (Baki, 1996; Hacısalıhoğlu Karadeniz ve Akar, 2014). Yapılandırmacı öğretim yaklaşımına göre matematikteki genellemelere öğrencinin kendisinin ulaşması ve bilgiyi öğrencinin kendisinin yapılandırması gerekmektedir (Hacısalıhoğlu Karadeniz ve Akar, 2014).

Öğretmenler öğrencilerin aktif olduğu, zengin ve kalıcı öğrenme ortamı oluştururken bilgisayar destekli öğretimi kullanabilmelidir. Bilgisayar destekli matematik öğretimi yapabilen öğretmenlere sahip olabilmek için öğretmen yetiştiren kurumlara büyük sorumluluklar düşmektedir. Örneğin bilgisayardan ders işlemek isteyen öğretmen yardımcı kaynaklar yardımı ile önceden yapılan örneklerle göre ya da yabancı kaynaklara bakarak dersini işlemek ister. Öğretmen yabancı dilde sıkıntı çekebilir ya da belirtilen yazılım Türkiye’de olmayabilir. Aslında öğretmen tecrübeyi dergi ya da kitaplardan daha çok lisansta kazanır (Baki, 1996). Öğretmen yetiştiren kurumlarda teknolojinin sınıf ortamına aktarımı öğretmen adaylarına öğretildiği için öğretmen lisansta gördüğü derslerden kolayca teknolojiyi sınıfında kendi amacına uygun kullanabilir (Baki, 1996; Karataş ve Güven, 2015). Ayrıca öğretmenler hizmet içi eğitimlerle de teknoloji hakkında bilgilendirilebilir (Hacısalıhoğlu Karadeniz ve Akar, 2014). Öğretmenlere verilen hizmet içi eğitimlerde hem yeni yazılımlar öğretmeli hem de uygulamaları teknolojiye nasıl transfer edecekleri öğretilmelidir (Kabaca, Aktümen, Aksoy ve Bulut, 2010).

Bilgisayar destekli öğretim yaparken öğretmen ve öğretmen adaylarına teknolojik yazılımları öğretmenin yanı sıra okulun bilgisayar kapasitesi, bilgisayarların sahip olduğu yazılımlar, seçilen yazılımın kullanımı ve uygulama örnekleri yeteri kadar bilinmelidir. Eğer öğretmen seçtiği yazılımı yeterince bilmiyor ve dilini anlamıyorsa sıkıntı çekecek, sınıf içi uygulamalarda bu sıkıntı ortaya çıkacaktır (Baki, 1996). Ayrıca bilgisayar destekli öğretim için ders kitaplarının buna uygun olarak hazırlanması gerekir (Hacısalıhoğlu Karadeniz ve Akar, 2014).

Bilgisayar destekli matematik öğretiminde kullanılan en önemli yazılımlar “Dinamik Geometri Yazılımları (DGY)”dır. Geleneksel öğretime alternatif olarak çıkan dinamik geometri yazılımları, bilişsel becerileri geliştirmede ve matematikçilerin deneyimlerini öğrencilere yaşatarak kendi öğrenmelerini sağlamada köprü görevi görmektedir (Karataş ve Güven, 2015; Özen, 2009). Dinamik geometri yazılımları nokta, doğru, vektör gibi nesnelerden grafik ve geometrik şekiller oluşturan; Cabri, Geometer’s Sketchpad, Cinderella veya GeoGebra gibi özel geometri programlarının ortak adı olan yazılımlardır (Çörekçioğlu, 2019; Güven, 2002; İçel, 2011).

Dinamik geometri yazılımları geometriyi durağan yapıdan kurtararak dinamik olarak öğrenmeyi sağlamaktadır (Güven ve Karataş, 2003). Dinamik geometri

yazılımlarının dinamiklik özelliği sayesinde matematiksel nesnelerin hareketlerini keşfetme, aynı zamanda değişmeyen ilişkileri fark etme, bu ilişkilerin değişimden etkilenmediğini görme, bu sayede güçlü varsayımlar yapma, keşfetme ve geometriyi farklı algılama gibi beceriler ortaya çıkmaktadır (Güven, 2002; Güven ve Karataş, 2003).

Dinamik geometri yazılımları öğrencilerin motivasyon, işbirliği yapma gibi matematiğe karşı tutumlarını olumlu etkiler. Öğrencilerin uzamsal algı oluşturmalarını sağlayarak görselleştirme, problem çözme ve muhakeme etme becerilerini geliştirir. Bu sebeple matematik öğretiminde dinamik geometri yazılımları kullanılmalıdır (Tutkun ve diğerleri, 2011).

Matematik Eğitiminde Dinamik Geometri Yazılımları ile Yapılan Çalışmalar

Matematik eğitiminde dinamik geometri yazılımlarının kullanımının etkililiğini inceleyen çalışmalardan biri Cantürk Günhan ve Açıan'ın (2016) çalışmasıdır. Bu çalışmada meta-analiz yöntemi ile dinamik geometri yazılımı kullanımının öğrencilerin geometrik başarılarına etkisi incelenmiştir. Son 9 yılda Türkiye'de yapılan çalışmalarda dinamik geometri yazılımı kullanımının geleneksel öğretime göre başarılı olduğu tespit edilmiştir. Matematik eğitiminde DGY kullanımının etkililiğini inceleyen çalışmalardan bir diğeri Tutkun ve diğerlerinin (2011) çalışmasıdır. Bu çalışmada matematik öğretiminde kullanılan matematik yazılımları ve bu yazılımların etkililiği incelenmiştir. Araştırma sonucuna göre matematik öğretiminde bu yazılımların kullanımının zorunluluğu belirtilmiştir. Ayrıca matematik yazılımlarının kullanımı ilk ve ortaöğretimde yaygınlaştırılarak öğretmenlere destek verilmesi gerektiği belirtilmiştir.

Matematik eğitiminde birden fazla dinamik geometri yazılımlarının incelendiği çalışmalar bulunmaktadır. Bu çalışmalardan biri olan Kepceoğlu ve Yavuz'un (2017a) çalışmasında GeoGebra, Cabri 2 Plus ve Cabri 3D programlarıyla çalışılmıştır. Bu çalışma nitel bir yöntem olan durum çalışmasıdır ve ortaöğretim matematik öğretmen adaylarıyla çalışılmıştır. Araştırmada önce programların temel özellikleri tanıtılmış sonra bu programların kullanıldığı problem durumları çözümlenmiştir. Yapılan ölçme değerlendirme sonuçlarına göre dinamik geometri yazılımları ile matematik dersinde hem yazılı hem sözlü yoklamaların yapılabileceği ve ödevler verilebileceği belirtilmiştir. Matematik eğitiminde birden fazla dinamik geometri yazılımlarının incelendiğinde bir diğeri Özen'in (2009) yüksek lisans tez çalışmasıdır. Bu

çalışmada dinamik geometri yazılımlarından olan Elica Cubix Editör, Cabri 3D ve Geometer's Sketchpad programlarıyla çalışılmıştır. Çalışmada 7. sınıf öğrencilerinin derslerinde dinamik geometri yazılımları kullanılarak öğrencilerin erişilerine etkisi ve görüşleri ele alınmıştır. Çalışmada ön-test ve son-test kontrol gruplu deneme modeli kullanılmıştır. Deney grubunda dinamik geometri yazılımları ile bilgisayar destekli öğretim, kontrol grubunda ise geleneksel yöntem kullanılmıştır. Araştırma sonucuna göre deney grubu lehine erişi ortalamaları açısından anlamlı fark bulunmadığı ve uzamsal yetenekler açısından gruplar arasında fark olduğu görülmüştür.

Matematik eğitiminde dinamik geometri yazılımlarından olan Sketchpad programının incelendiği çalışmalar bulunmaktadır. Bu çalışmalardan biri olan Hacısalihoğlu Karadeniz ve Akar'ın (2014) çalışmasında Sketchpad kullanımının üçgende kenarortay-açıortay konusu için meslek lisesi öğrencilerinin başarıları üzerine etkisi incelenmiştir. Deney grubuna dinamik geometri yazılımları ile dersler verilmiştir. Araştırma sonucuna göre dinamik geometri yazılımlarının kullanımının anlatım yöntemine göre geometri öğretiminde daha etkili olduğu tespit edilmiştir. Sketchpad programının incelendiği bir diğer çalışma ise Erdener ve Gür'ün (2018) çalışmasıdır. Bu çalışmada Sketchpad programının matematik dersinde kullanımının öğrenciler üzerinde etkisi araştırılmıştır. Bu çalışma özel durum çalışması olup 7. sınıf öğrencileriyle çalışılmıştır. Araştırmaya göre bu programın kullanımının öğrencilerin matematik dersine yönelik görüşlerini olumlu olarak değiştirdiği ve kavramları öğrenmede kolaylaştırdığı belirtilmiştir. İncelenen çalışmalara göre Sketchpad dinamik programı kullanımının öğrenci başarıları ve öğrenci görüşlerine olumlu yansıdığı tespit edilmiştir.

Literatürde dinamik geometri yazılımlarından olan Cabri programının incelendiğinde pek çok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalardan biri olan Açıkgül ve Aslaner'in (2015) çalışmasında matematik öğretmen adaylarının Cabri ve kâğıt-kalemle geometrik yer problemlerinin çözüm süreçleri incelenmiştir. Çalışmada iki süreç kıyaslanmış olup yazılımla çözüm esnasında kâğıt ve kalemle farklı olarak hipotez kurma, kurdukları hipotezleri test etme, genelleme yapma gibi fırsatlar bulunduğu tespit edilmiştir. Yavuz ve Can (2010) yaptıkları çalışmada Cabri ile yapılan öğretimin matematik öğretmen adayları üzerinde değişimini ve gelişimini incelemiştir. Bu çalışmaya göre verilen Cabri eğitiminden sonra katılımcıların teknoloji ile matematik öğretimine yönelik tutumlarında olumlu değişiklikler tespit edilmiştir. Güven (2002) tez çalışmasında Cabri ile materyaller geliştirip bu materyallerle öğretim yapılan ilköğretim

sınıflarda öğrencilerin öğrenme ürünleri ve algılarını incelemiştir. Çalışmada öğrencilerin Cabri ile hazırlanan etkinliklere karşı olumlu görüşler belirttiği görülmüştür. Bayraktar, Tapan Broutin ve Güneş (2018) yaptıkları çalışmada Cabri ile öğretmen adaylarının analitik geometri başarılarını ve matematikte teknoloji kullanımına dair bakış açılarını incelemiştir. Çalışma sonucuna göre DGY'leri öğretmen adaylarının kullanmak istediği görülmüştür. Kaleli Yılmaz ve diğerleri (2010) ise yaptıkları çalışmada Cabri programının trigonometri konusunda öğrencilerin bilişsel öğrenmelerine etkisini incelemiştir. Çalışmada teknoloji kullanılarak görselleştirilen matematiksel nesnelerin öğrencilerin matematiksel kavramları anlamalarında etkili olduğu belirtilmiştir. Cabri ile yapılan araştırma sonuçlarına göre Cabri programının sınıf ortamında matematik eğitimi üzerine olumlu etkilerinin olduğu tespit edilmiştir.

Matematik Eğitiminde GeoGebra

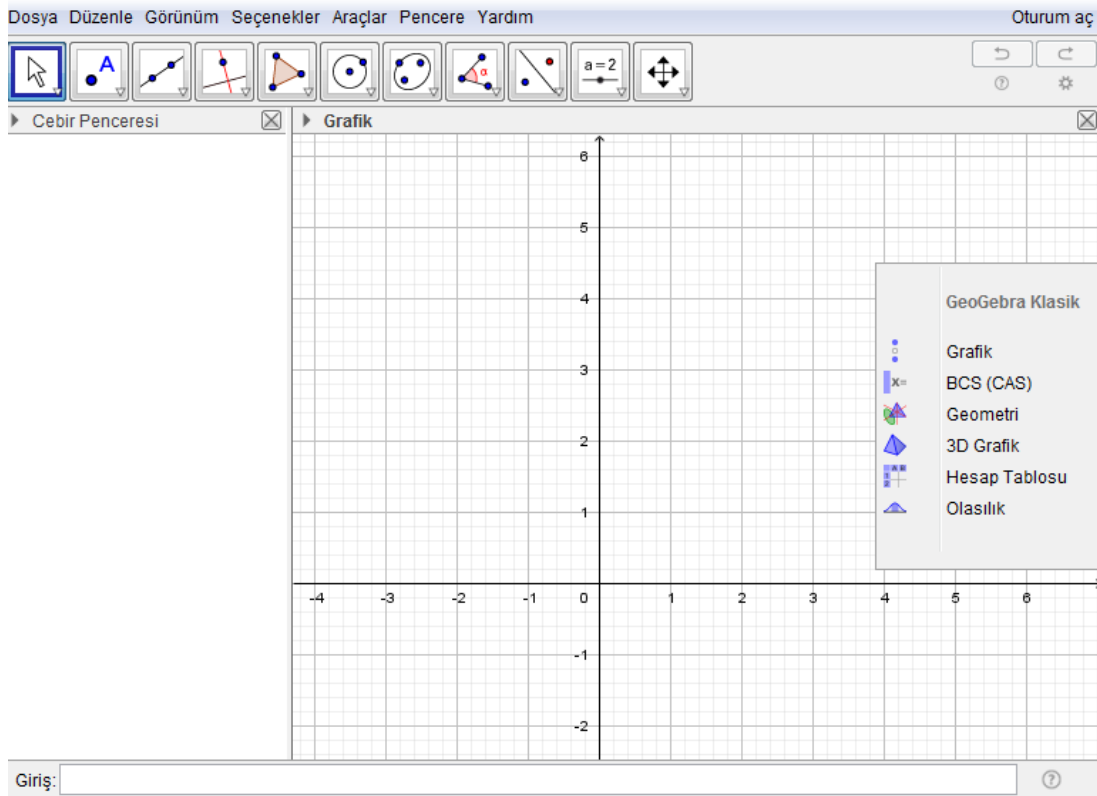
Dinamik geometri yazılımlarından biri olan GeoGebra yazılımı matematikte konunun öğretilmesini daha pratik, kolay ve anlaşılır hale getirmektir. GeoGebra dinamik geometri yazılımı, öğrencilerin matematiksel kavramlarla bağımsız olarak veya grup olarak etkileşime girmesi için teknolojiyi görsel yardımcıları birlikte kullanmanın yeni bir yoludur (Ogan ve Ibibo, 2018).

GeoGebra dinamik geometri yazılımı Markus Hohenwarter ve bir grup uluslararası yazılım uzmanı tarafından geliştirilmiştir (Doğan ve Karakırık, 2009). GeoGebra dinamik geometri yazılımı internette çok sayıda farklı dile çevrilmiştir. Dünya çapında birçok eğitimci bu yazılımı kullanmaktadır ve bu yazılım gün geçtikçe artan bir kullanıcı topluluğuna sahiptir (Hohenwarter ve diğerleri, 2008). GeoGebra'nın cebir, grafik, tablo gibi çoklu gösterim yapısı sayesinde değişkenler arası ilişkiyi çıkarmayı ve geçiş yapabilmeyi sağladığı görülmektedir (Hıdıroğlu ve Bukova Güzel, 2014).

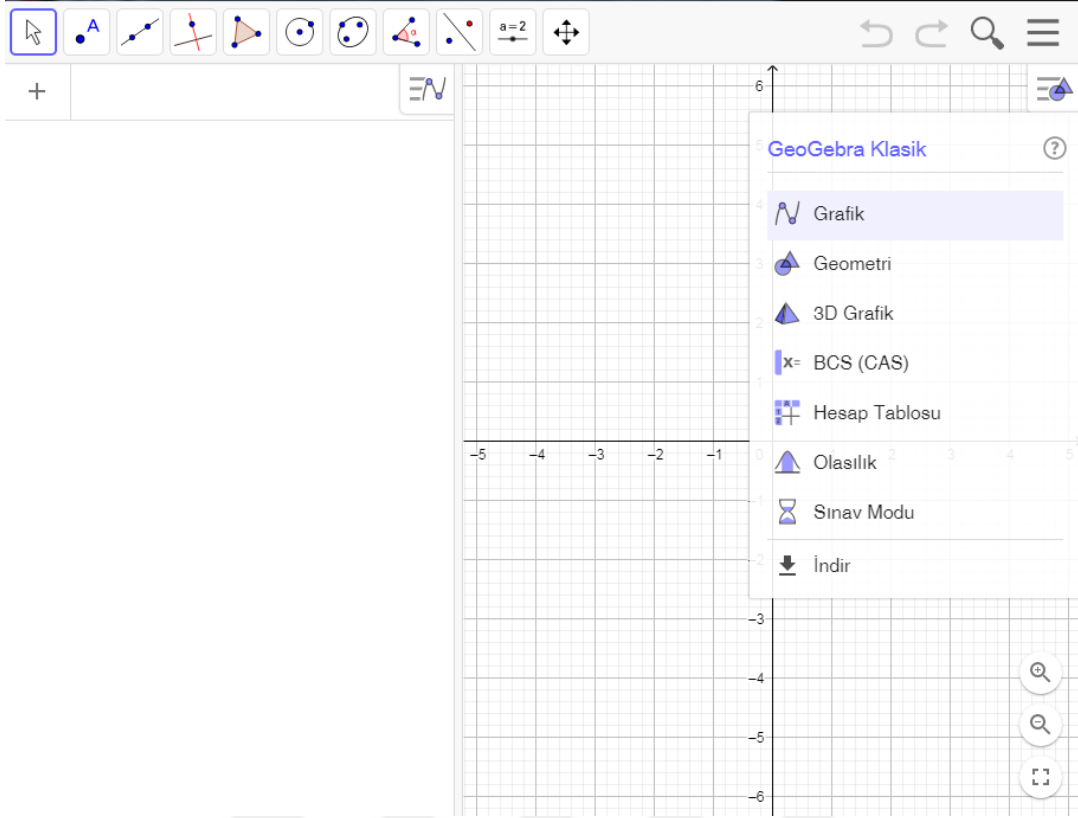
Eğitimciler derslerinde zamandan tasarruf etmek için bu yazılımla yapacak etkinlikleri önceden hazırlamalıdır. Programın esnekliği sayesinde ders esnasında da bu programla yaratıcı etkinlikler ve fikirler üretilebilir. GeoGebra dinamik geometri yazılımı kullanımı hakkında önceden bilgi sahibi olan öğrenciler de ders esnasında matematiksel işlemleri ve ilişkileri kolayca keşfedebilirler. GeoGebra dinamik geometri yazılımı öğretmen ve öğrenciler için hem evde hem sınıfta herhangi bir kısıtlama

olmaksızın kullanmalarına olanak sağlar. Ayrıca GeoGebra dinamik geometri yazılımı sınırların ötesine ulaşarak kullanıcı topluluklarının işbirliği ile teknolojik kaynaklara eşit erişimi sağlamaktadır (Hohenwarter ve diğerleri, 2008).

GeoGebra dinamik geometri yazılımının devamlı güncellenen yapısı, ücretsiz olması ve GeoGebra'nın resmi internet sitesinde ücretsiz olarak materyaller paylaşılması sayesinde eğitimin her kademesinde dinamik olarak rahatlıkla kullanım alanı sağlamaktadır. Şekil 14'te araştırmanın etkinlik sürecinde kullanılan GeoGebra 5.0 sürümünün kullanıcı arayüzü, Şekil 15'te GeoGebra dinamik geometri yazılımının güncel sürümü olan GeoGebra 6.0 kullanıcı arayüzü gösterilmiştir.



Şekil 14. GeoGebra 5.0 Kullanıcı Arayüzü



Şekil 15. GeoGebra 6.0 Kullanıcı Arayüzü

Şekil 14 ve Şekil 15’te gösterilen GeoGebra dinamik geometri yazılımlarında cebir ve grafik penceresi otomatik olarak açılmaktadır. Aynı anda bir nesnenin farklı gösterimleri bu ekranlarda gösterilebilir. Yapılan her değişiklik otomatik olarak her görünüm penceresinde güncellenmektedir (Doğan ve Karakırık, 2009).

GeoGebra Dinamik Geometri Yazılımı ile Yapılan Çalışmalar

Matematik eğitiminde GeoGebra dinamik geometri yazılımı ile yapılan pek çok çalışma bulunmaktadır (Aktümen, Yıldız, Horzum ve Ceylan, 2011; Balcı Şeker ve Erdoğan, 2017; Çiftçi ve Tatar, 2014; Genç ve Öksüz, 2016; Hohenwarter ve diğerleri, 2008; Hohenwarter ve Jones, 2007; Kabaca, Çontay ve İymen, 2011; Kepceoğlu ve Yavuz, 2017b; Kutluca ve Zengin, 2011; Ogan ve İbibo, 2018; Tatar, Akkaya ve Kağızmanlı, 2014; Yıldız, Baltacı ve Aktümen, 2012; Zengin, Kağızmanlı, Tatar ve İşleyen, 2013; Zengin ve Tatar, 2014). Çalışmalarda genellikle matematik öğretiminde GeoGebra dinamik geometri yazılımının kullanımına yönelik görüşler ile bazı matematik konularının (çember, çokgenler, parabol, limit ve süreklilik, türev, fonksiyon gibi) GeoGebra dinamik geometri yazılımıyla öğretiminde başarıya olan etkisi incelenmiştir.

Hohenwarter ve diğerleri (2008) yaptıkları çalışmada lise ve üniversite düzeyinde matematik öğretimi için GeoGebra gibi ücretsiz ve kullanımı kolay yazılımların teknoloji entegrasyonu adına olan çıkarımlarını incelemişlerdir. Çalışmada GeoGebra dinamik geometri yazılımı kullanılarak görselleştirilebilen örnekler ele alınmıştır. Çalışmadaki örneklerin fonksiyonun teğet doğrusu, $\sin(x)$ 'in eğim fonksiyonu, türev kök, ekstremum noktalar, dinamik Taylor Polionu, alt ve üst toplamalar olduğu görülmüştür. Ayrıca çalışmada GeoGebra gibi dinamik matematik yazılımlarının sunduğu çeşitli fırsatlara ve GeoGebra yazılımının sınıf ortamında nasıl uygulanacağına dair örneklerle yer verilmiştir.

Hohenwarter ve Jones (2007) yaptıkları çalışmada öğrencilerin geometri ve cebir arasında daha güçlü bağlar kurmasını sağlayarak matematik öğretimini geliştirmenin yollarını incelemiştir. Çalışmada matematiksel fikirleri temelden üniversite düzeyine kadar görselleştirmek için çok yönlü araç sağlayan GeoGebra yazılımını kullanmanın gerekliliği ve avantajları açıklanmıştır. Çalışma GeoGebra gibi teknolojik gelişmelerin matematik öğretmenleri için hizmet öncesi ve hizmet içi mesleki gelişimleri üzerine etkileri incelenerek sonlandırılmıştır.

Ogan ve İbibo (2018) yaptıkları çalışmada, Calculus kavramlarını oluşturma pratik yollarını göstermiştir. Bu çalışmada, matematik öğretmenlerinin matematik öğretme kalitesini artırmak için GeoGebra ve diğer teknolojik araçları kullanmaya teşvik edilmesi önerilmiştir. Ayrıca öğrencilerin matematik dünyasını daha geniş bakış açısıyla keşfetmelerini ve daha yaratıcı düşüncelerini sağlamak için GeoGebra'nın Matematik eğitimcilerine tanıtılması gerektiği belirtilmiştir.

Yıldız ve diğerleri (2012) yaptıkları çalışmada üç boyutlu cisim problemlerinde ilköğretim matematik öğretmen adaylarının GeoGebra yazılımını kullanarak yaptıkları çözümleri süreç olarak incelemiştir. Araştırma sonunda öğretmen adaylarına sorulan problemde öğretmen adaylarının açı değerini bulabilmek için çeşitli problem çözme süreçlerinden geçtikleri ve açının yaklaşık değerini bulabildikleri görülmüştür. Ayrıca görselleştirme ile sürecin yürütüldüğü tespit edilmiştir. Bu yazılım sayesinde öğretmen adaylarının kendi öğrenmelerini yeniden yapılandırabildikleri görülmüştür.

Tatar ve diğerleri (2014) yaptıkları çalışmada GeoGebra ile çember konusunun analitik olarak incelenerek öğretmen adaylarının başarılarına etkisini incelemiş ve öğretmen adaylarının görüşlerini almıştır. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının

başarılarının olumlu çıktığı görülmüştür. Öğretmen adayları GeoGebra ile öğretimin kalıcı öğrenme sağladığını, görselleştirme ve somutlaştırma anlamında program için olumlu görüşler belirttikleri tespit edilmiştir. Çember konusunda yapılan bir başka çalışma Balcı Şeker ve Erdoğan'ın (2017) çalışmasıdır. Bu çalışmada GeoGebra ile çember konusunun lisede öğretiminin başarıya ve öz yeterliğe etkisi incelenmiştir. Araştırma sonucuna göre uygulanan yöntemin ders başarısını ve öz yeterliği artırdığı tespit edilmiştir.

Genç ve Öksüz (2016) yaptıkları çalışmada GeoGebra yazılımının 5. sınıfta çokgenler ve dörtgenler konusunda öğrenci başarısı üzerine etkisini ve kalıcılığını incelemiştir. Programı kullanan deney grubunun lehine istatistik anlamda anlamlı farklılık ve kalıcılık bulunmuştur. Kabaca ve diğerleri (2011) yaptıkları çalışmada 11.sınıf öğrencilerine GeoGebra ile Parabol kavramının geometrik ve cebirsel temsilleri arasındaki ilişkinin yapılandırılmasını incelemiştir. Araştırma sonucuna göre öğrencilerden alınan geri dönütlerle GeoGebra'nın uygulanabilir olduğu tespit edilmiştir.

Kepceoğlu ve Yavuz'un (2017b) çalışmasında GeoGebra'nın limit ve süreklilik konusunun öğretiminde öğretmen adaylarının başarılarına olan etkisini incelemeyi amaçlamıştır. Araştırma sonucuna göre GeoGebra eğitimi verilen deney grubunun test sonuçlarında daha başarılı oldukları tespit edilmiş ve limit konusuna ilişkin görüşler olumluyken süreklilik için aynı sonuç bulunamamıştır. Zengin ve Tatar'ın (2014) çalışmasında GeoGebra'nın türev konusunda öğrenci başarılarına olumlu katkı sağladığı tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının görüşlerine göre programı kullanmanın türev konusunda özellikle ortalama değer, maksimum-minimum problemleri gibi görselleştirme anlamında büyük katkılar sağladığı görülmüştür.

Çiftçi ve Tatar (2014) yaptıkları çalışmada somut araç olan pergeli-cetveli ve dinamik yazılım olan GeoGebra ile öğretmen adaylarının başarılarını ölçmeyi ve görüşlerini almayı amaçlamıştır. Dinamik yazılım kullanılan grup ile pergeli-cetveli kullanan grup arasında başarı açısından anlamlı fark bulunmamıştır. Ancak hem pergeli-cetveli hem dinamik yazılım kullanımının başarıyı artırdığı belirtilmiştir. Pergeli-cetveli kullanan grubun öğretim için eğlenceli geçtiğini, kalıcı ve kolay öğrenme sağladığını belirttikleri görülmüştür. Dinamik yazılım kullanan grubun ise süre olarak programın

ekonomik olduğunu ve karmaşık çizimlerde kullanılmasının faydalı olacağını belirttikleri görülmüştür.

Aktümen ve diğerleri (2011) yaptıkları çalışmada GeoGebra yazılımının derslerde uygulanabilirliği konusunda ilköğretim matematik öğretmenlerinin görüşlerini tespit etmeyi amaçlamıştır. Öğretmenlerin görüşlerine göre bu programın matematik öğretim-öğrenim sürecine olumlu katkılar sağladığı ve matematiğe karşı inançlarda değişiklik sağladığı tespit edilmiştir. Kutluca ve Zengin (2011) yaptıkları çalışmada GeoGebra kullanımına dair öğrenci görüşlerini incelemiştir. 10. sınıf öğrencilerine fonksiyon grafikleriyle ilgili etkinliklerle seminerler verilmiştir. Öğrenci görüşlerine göre GeoGebra kullanımının öğrenciler için eğlenceli, zevkli, ilgi çekici ve kalıcı olduğu belirtilmiştir. Bu sebeple çalışmada GeoGebra ile işlenen dersin yapılandırmacı öğrenme kuramına uygun olduğu tespit edilmiştir.

Zengin ve diğerleri (2013) yaptıkları çalışmada matematik öğretmen adaylarının “Bilgisayar Destekli Matematik Öğretimi” dersinde dinamik yazılım olan GeoGebra kullanımıyla ilgili görüşlerini incelemiştir. Araştırma sonucuna göre dinamik yazılım kullanmanın görselleştirme, somutlaştırma, kalıcılık gibi olumlu özellikleri olduğu aynı zamanda bu yazılımın süre konusunda sıkıntı yaratabileceği belirtilmiştir.

Literatürde yer alan çalışmalar genel olarak değerlendirildiğinde çalışmaların hem nicel hem nitel olarak tasarlandığı, katılımcıların ilköğretimden yükseköğretime kadar olan sınıf seviyelerinde öğrenciden ve öğretmenden oluştuğu görülmüştür. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde genellikle matematik konularında GeoGebra dinamik geometri yazılımı kullanımının başarıya olumlu etkilediği ve GeoGebra dinamik geometri yazılımı hakkında katılımcıların olumlu görüşler belirttiği görülmüştür.

Matematiksel İspatlarda Dinamik Yazılımların Kullanılması

Son yıllarda ispatların dinamik ortamlarda (GeoGebra gibi) yaygınca kullanıldığı görülmektedir (Şadan ve Uğurel, 2020). Dinamik geometri yazılımları sayesinde test etme, doğrulama, yanlışlama, akıl yürütme, keşfetme, varsayımlara ulaşma gibi beceriler kazanılmaktadır ve bu beceriler ispat yapma sürecinin bir parçasıdır (Demir, 2011; Hanna, 2000; Stupel, Sigler ve Jahangiri, 2019; Şadan ve Uğurel, 2020). Dinamik geometri yazılımları ayrıca tümevarımsal ve tümdengelimsel çıkarımlar yaparak genelleme yapabilmeyi, soyut kavramları somutlaştırarak görselleştirme yapabilmeyi sağladığı için sınıflarda matematiksel ispatın doğası

değişmiştir (Baydaş, 2010; Güven, 2002; Tutkun ve diğerleri, 2011). Öğrenciler, dinamik geometri yazılımları sayesinde karmaşık şekilleri bile kolayca çizebilecek hale gelerek şekillerin analizini rahatça yapabilirler (Güven, 2002).

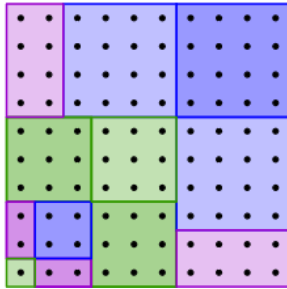
GeoGebra dinamik geometri yazılımında hazır olan veya önceden yapılmış ispatların bulunduğu “GeoGebraTube” sayfası vardır. Bu sayfadaki ispatlar sayesinde öğrenciler sürgü yardımıyla değişiklikleri izleyebilir, varsayım yapabilmeleri için yönlendirilebilir ve teoremlerin öğrenciler tarafından görsel açıdan doğrulanması sağlanabilir. Böylelikle öğrenciler farklı geometrik yapılar için farklı durumları izleme imkanı bulur (Yiğit Koyunkaya, 2020).

Günümüzde GeoGebra dinamik geometri yazılımında cebirsel ispatların yanında sözsüz ispatların da kullanılmaya başlandığı görülmüştür. Aşağıdaki Şekil 16’da 1’den n’e kadar olan sayıların küplerinin toplamını gösteren dinamik görsel ispat örneği verilmiştir (Şadan ve Uğurel, 2020).

$$\begin{aligned}
 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= 1 \times 1^2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 3^2 + \dots + n \times n^2 \\
 &= (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 \\
 &= 100
 \end{aligned}$$

n = 4

☒ Show Odd Terms
☒ Show Even Terms



Şekil 16. GeoGebra’da Yapılan 1’den n’e Kadar Olan Sayıların Küpleri Toplamı (<https://www.geogebra.org/m/JEVPd3K3>).

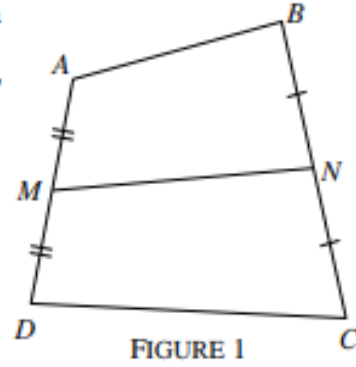
Şekil 17’de Stupel, Sigler ve Jahangırı’nın (2019) çalışmasında ele aldığı geometrik problem görülmektedir. Şekil 19’da ise bu problemde verilen özelliğin GeoGebra dinamik geometri programında yapılan sözsüz ispatı verilmiştir.

Problem 1

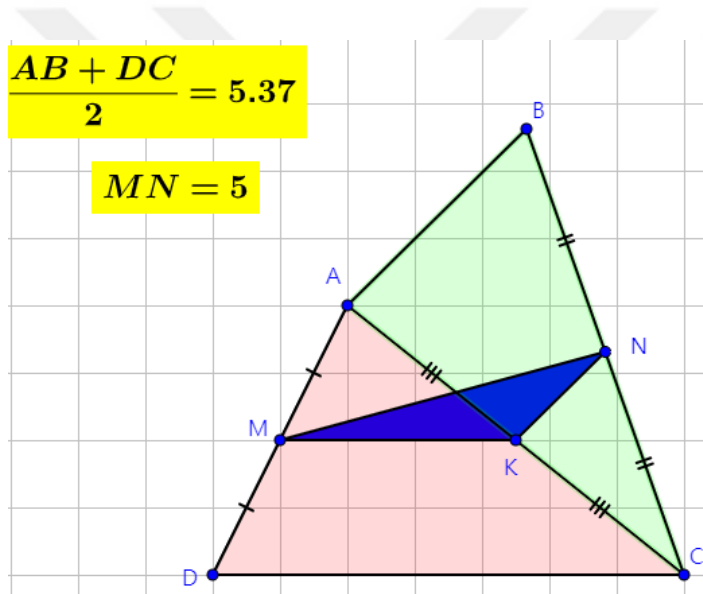
$ABCD$ is a convex quadrilateral other than a trapezium.

MN is the bisector of the sides AD and BC (Figure 1).

Prove that $\frac{AB + DC}{2} > MN$.



Şekil 17. Geometrik Problem
(Stupel, Sigler ve Jahangırı, 2019).



Şekil 18. Geometrik Problemin GeoGebra Yazılımında Yapılan Sözsüz İspatı
(<https://www.geogebra.org/m/g6uTHHuR>).

Şekil 18’de GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan ispatta K noktası AC kenarının orta noktasıdır. $AK = KC$ olur. O halde ADC üçgeni için MK kenarı orta taban olur ve $MK = \frac{1}{2} DC$ ’dir. ABC üçgeni için KN kenarı orta tabandır ve $KN = \frac{1}{2} AB$ ’dir. $MN < MK + KN$ olduğu için problemde verilen $MN < \frac{1}{2} DC + \frac{1}{2} AB$ özelliğine ulaşılır (Stupel, Sigler ve Jahangırı 2019). GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan bu ispatta $ABCD$ yamuğu için köşelerinden herhangi birinde program üzerinde sürüklemeye yapılırsa da MN uzunluğunun AB ve DC kenarları toplamının yarısından küçük olduğu şekilde anlaşılmaktadır.

Matematiksel İspatlarda Dinamik Yazılımların Kullanılması ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Dinamik geometri yazılımlarının matematiksel ispatta kullanılması ile ilgili (Ceylan, 2012; Hanna, 2000; İpek, 2010) ve dinamik geometri yazılımlarının sözsüz ispatta kullanılması ile ilgili (Štrausová ve Hašek, 2013; Stupel, Sigler ve Jahangiri, 2019; Şadan ve Uğurel, 2020) çalışmalar bulunmaktadır.

Hanna (2000) çalışmasında matematik eğitiminde ispatın rolünü araştırmayı ve ispatın müfredattaki önemi için gerekçe sağlanmayı amaçlanmıştır. Çalışmada dinamik geometri yazılımlarının keşif ve görselleştirme uygulamalarının ispat öğretiminde değerli olduğunun açıklandığı görülmüştür. Çalışma sonucuna göre dinamik geometri yazılımlarından olan Sketcpad ve Cabri öğrenciler için kendi uygulamalarını yapmaya olanak sağlayan yazılımlar olduğu görülmüştür. Böylece öğrencilerin bu yazılımlarla geometrik yapıların özelliklerini keşfederek varsayım yapabildikleri tespit edilmiştir. Çalışmada dinamik geometri yazılımlarının kullanımı üzerine çalışma yapmış dört makale de tanıtılmıştır.

İpek (2010) yüksek lisans tez çalışmasında dinamik geometri yazılımlarından olan Geometer's Sketchpad, GeoGebra, Cabri 3D ve Cabri Geometry 2 kullanılarak ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ve cebirsel ispat yapma süreçlerinin incelenmesini, görüşlerinin alınmasını amaçlamıştır. Nitel bir çalışma olan bu araştırmada öğretmen adaylarının, ispat problemlerini çözmede istedikleri dinamik geometri yazılımını seçtikleri görülmüştür. Çalışma boyunca gözlem notları, öğretmen adaylarının eğitim sürecinde oluşturdukları raporlar ve görüşmelerle veriler toplanmıştır. Çalışma sonucuna göre öğretmen adaylarının görsel ve cebirsel ispat problemlerini çözerken dinamik geometri yazılımları ile farklı ispat yöntemleri kullanarak görsel ürünler ortaya çıkardıkları görülmüştür. Öğrencilerle yapılan görüşmeler sonucunda ispatın öğretiminde dinamik geometri yazılımlarının etkili olduğu tespit edilmiştir.

Ceylan'ın (2012) yüksek lisans tez çalışmasında dinamik geometri yazılımlarından biri olan GeoGebra yazılımı yardımıyla ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerinin ve ispat biçimlerinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerini ortaya çıkarmak için öğretmen adaylarının GeoGebra yazılımıyla ispat problemlerini çözmeleri istenmiştir.

Veriler Wink programı ve ses kayıt cihazıyla kaydedilerek yazılı hale getirilmiştir. Çalışmada ispat biçimlerini ortaya çıkarmak için görüşmeler yapılmıştır. Araştırma sonucuna göre öğretmen adaylarının GeoGebra yazılımındaki birçok araçtan faydalandıkları tespit edilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarında varsayım yapma, akıl yürütme becerilerinde gelişme, genelleme yapma ve farklı gerekçelendirme biçimlerine geçiş yapma gibi olumlu özellikler görülmüştür. Ancak öğretmen adaylarında ispat yaparken ispatları örneklerle yapmaya çalışmak ve ispatların bazılarını sonuçlandıramamak gibi olumsuz özellikler de görülmüştür.

Sözsüz ispat yöntemini dinamik ortama aktaran çalışmalardan biri Štrausová ve Hašek'in (2013) çalışmasıdır. Bu çalışmada ortaokul matematik öğretiminde ve matematik öğretmeni yetiştirme programlarında kullanılan ve dinamik geometri yazılımı tarafından oluşturulan dinamik görsel ispat materyallerinden seçilmiş örnekler ele alınmıştır. Bu çalışmada aynı zamanda dinamik görsel ispatların klasik ispatlarla karşılaştırılması yapılmıştır.

Şadan ve Uğurel (2020) çalışmasında GeoGebra açık sitesinden aldıkları sözsüz ispat örneklerine yer vermiştir. Çalışmada bu ispatlara “dinamik görsel ispatlar” olarak ele alınmışlardır. Bu ispatların dinamik yazılımlarda yapılmasının sağladığı faydalardan bahsedilmiştir. Dinamik yazılımın renklendirme, sayısal doğrulama ve deneme yapabilmeyi olanak sağladığı açıklanmıştır. Dinamik görsel ispatların, statik görsel ispatlardan üstünlüğü belirtilmiştir.

Stupel, Sigler ve Jahangiri (2019) çalışmalarında sözsüz ispatların dinamik geometri yazılımlarında kullanılmasını ele almışlardır. Çalışmada geometri problemlerinin sözsüz ispatları ve GeoGebra yazılımında yapılan sözsüz ispatları incelenmiştir. Çalışmada bu ispatların dinamik yazılımlarda yapılmasının sağladığı faydalardan bahsedilmiştir. GeoGebra yazılımı gibi dinamik yazılımların genelleme ve çıkarım yaparak varsayımlarda bulunmayı sağladığı, sürüklemeye yaparak çeşitli durumlarda oluşan değişimlerin görsel olarak ele alındığı belirtilmiştir.

Çalışmaların sonuçları incelendiğinde ispatın öğretiminde dinamik geometri yazılımlarının etkili olduğu; keşfetme, genelleme yapma, varsayımda bulunma, akıl yürütme, farklı gerekçelendirmeler yapabilme gibi olumlu özellikler kazandırdığı tespit edilmiştir. Ayrıca dinamik görsel ispatların statik görsel ispatlardan üstün olduğu, yazılım üzerinde sürüklemeye yöntemi gibi çeşitli durumlarda denemeler yaparak

değişimlerin görsel olarak ele alınmasını sağladığı görülmüştür. Literatür incelendiğinde sözsüz ispat yöntemini dinamik ortama aktaran çalışmalara oldukça az rastlanmaktadır. Yürütülmüş olan mevcut çalışmada, Bu çalışmanın alan yazındaki boşluğu dolduracağı ve sonraki çalışmalara katkı sağlayacağı düşünülmektedir.



BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın modeli, çalışma grubu, veri toplama araçları, veri toplama süreci ve verilerin analizine ilişkin bilgilere yer verilmiştir.

Araştırma Modeli

Bu çalışmada, çeşitli veri toplama araçları bir arada kullanıldığı için karma araştırma yöntemlerinden sıralı açıklayıcı yöntem kullanılmıştır. Sıralı açıklayıcı yöntemde önce nicel veriler toplanıp analiz edilir, sonra nicel sonuçlara göre nitel veriler toplanarak analiz edilir. Elde edilen iki veri analizi tartışma bölümünde birleştirilir ve derinlemesine incelenir (Baki ve Gökçek, 2012). Bu çalışmada, GeoGebra eğitim sürecinin katılımcıların sözsüz ispat yapma becerileri üzerindeki değişimin ve katılımcıların süreç hakkındaki görüşlerinin derinlemesine incelenmesi amaçlandığı için çalışmanın nitel boyutuna ağırlık verilmiştir. Bu çalışmanın nitel verilerinde, nitel araştırma desenlerinden biri olan örnek olay incelemesi (case study) kullanılmıştır. Örnek olay incelemesinde bir olay hakkında veri toplama, kaydetme ve raporlaştırma yapılır ve olayların kontrol edilmesi mümkün değildir (Köklü, 1994).

Nitel araştırmalarda farklı veri toplama teknikleri kullanılarak veri üçgenlemesi yapılabilmektedir. Üçgenleme (Triangulation), aynı konuyla ilgili farklı türdeki verilerin toplanması ile çoklu bakış açısı sağlanarak çalışmaların doğruluğunu artırma metotlarından biridir (Jick, 1979). Bu çalışmada nicel olarak elde edilen bulguların nitel olarak elde edilen bulgularla desteklenmesinin sonuçları anlamlandırmada daha etkili olacağı düşünüldüğü için üçgenleme metodu kullanılmıştır.

Çalışma Grubu

Çalışma grubu nitel araştırma örnekleme yöntemlerinden olan ölçüt örnekleme ile belirlenmiştir. Bu örnekleme yönteminde önceden belirlenen kriterleri sağlayan durumlar derinlemesine belirlenir (Baltacı, 2018). Bu çalışmada matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarıyla çalışılmış, GeoGebra eğitim süreci sonunda katılımcıların sözsüz ispat becerilerinde meydana gelen değişimlerin incelenmesi amaçlanmıştır. Çalışmada matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının deneysel olarak müdahale edilerek karşılaştırılmasından ziyade sözsüz ispat becerilerinde ortaya çıkan fark,

verilen GeoGebra eğitim sürecinin öncesi ve sonrasında uygulanan ön-test ve son-test puanları karşılaştırılarak istatistiksel olarak tespit edilmiştir. Çalışmanın katılımcıları belirlenirken ana kriter katılımcıların GeoGebra dinamik geometri yazılımını kullanabiliyor olmalarıdır. Bunun için katılımcılar tez danışmanı tarafından verilen “Teknoloji ve Bilgisayar Destekli Matematik Eğitimi” dersini almaları gereklidir. İspat yapma, üst düzey düşünme becerileri arasında yer almaktadır ve araştırmanın derinlemesine incelenebilmesi için çalışma grubunun seçiminde, ön-teste göre son-testte yüksek puan alma ve gönüllü olma etkili olmuştur. Ayrıca katılımcıların ispat beceri testlerinde verilen cevapların niteliği bakımından dikkat çekici cevaplar verilmesi, araştırmacı ile iyi bir iletişim kurulması ve düşünme süreçlerini derste öğrenilen bilgilerle açıklayabiliyor olması etkili olmuştur. Çalışmada 2019-2020 eğitim öğretim yılı Orta Karadeniz Bölgesinde bir ilin devlet üniversitesinde İlköğretim Matematik Öğretmenliğinde öğrenim gören üçüncü sınıf 35 matematik öğretmen adayı ve Matematik Eğitiminde yüksek lisans yapan 6 matematik öğretmeni olmak üzere 41 aday ile beş haftalık GeoGebra ile sözsüz ispat becerilerini geliştirme eğitimi yapılmıştır. Çalışma grubuna 9 kişi seçilmiş ve bu kişilerin 5’i öğretmen adayı, 4’ü öğretmendir. Öğretmen adaylarına $\ddot{O}A_1$, $\ddot{O}A_2$, $\ddot{O}A_3$, $\ddot{O}A_4$ ve $\ddot{O}A_5$ şeklinde; öğretmenlere ise $\ddot{O}_1$, $\ddot{O}_2$, $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$ şeklinde kodlar verilmiştir. Çalışma grubunun ispat beceri testlerinden aldığı puanlar Tablo 1’de verilmiştir.

Tablo 1. Çalışma Grubunun İspat Beceri Testlerinden Aldığı Puanlar

Katılımcı Kodu	Ön-Test Puanı	Son-Test Puanı
$\ddot{O}A_1$	14	17
$\ddot{O}A_2$	13	18
$\ddot{O}A_3$	18	27
$\ddot{O}A_4$	12	17
$\ddot{O}A_5$	9	21
$\ddot{O}_1$	15	35
$\ddot{O}_2$	6	26
$\ddot{O}_3$	12	32
$\ddot{O}_4$	9	30

Tablo 1'e göre ön-testte çalışma grubuna seçilen öğretmen adaylarının en düşük 9, en yüksek 18 puan; öğretmenlerin ise en düşük 6, en yüksek 15 puan aldıkları görülmektedir. Son-teste göre çalışma grubuna seçilen öğretmen adaylarının en düşük 17, en yüksek 27; öğretmenlerin ise en düşük 26, en yüksek 35 puan aldıkları görülmektedir.

Veri Toplama Araçları

Araştırmanın verileri ön-test ve son-test olarak uygulanan ispat beceri testi, ders işlenişi sırasında alınan kamera kayıtları, değerlendirme formları ve ses kayıtları alınarak yapılan görüşmeler ile toplanmıştır. Testlerde ve görüşme formundaki sorular uzman görüşü alınarak yeniden düzenlenmiş ve son hali ile katılımcılara uygulanmıştır.

Etik Kurul İzni

Çalışmayı, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Eğitim Fakültesinde uygulamak üzere üniversitenin Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne 27/12/2019 Tarihli, 70035 sayılı “Etik Kurul İzni” başvurusu yapılmıştır. Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dekanlığının 19/02/2020 Tarihli, 11354 sayılı yazısında çalışma izni verilmiştir (bkz. Ek 1).

İspat Beceri Testi

Kaplan ve diğerleri (2016) çalışmasında matematik öğretmenlerinin matematiksel iddiaları değerlendirebilen ve sorgulayabilen öğrenciler yetiştirmesi gerektiğini ama ilk olarak öğretmenin kendisinin bu tarz becerilere sahip olması gerektiğini belirtmişlerdir. Ayrıca öğretmenlerin lisans dönemindeyken bu tarz sorgulama becerilerini geliştiren ispatlama aktivitelerini öğrenmesi ve değer vermesi gerektiğini açıklamışlardır. Bu sebeple çalışmamızda uygulanan GeoGebra eğitimiyle matematik öğretmeni ile öğretmen adaylarının sözsüz ispat yapma becerilerine etkisini belirleyebilmek ve gruplar arasında karşılaştırma yapabilmek için ispat beceri testi kullanılmıştır. Literatürde ispat beceri testinin geliştirildiği (Öztürk ve Kaplan, 2017) ve ispat testlerine yönelik öğretim uygulamalarının (Aylar, 2014; İnam ve Uğurel, 2016; Polat, 2018) yapıldığı çalışmalar bulunmaktadır.

GeoGebra ile sözsüz ispat becerilerini geliştirme eğitiminden önce ön-test olarak uygulanan ispat beceri testleri ile matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının ispat ile

ilgili ön bilgileri belirlenmiştir. GeoGebra ile sözsüz ispat becerilerini geliştirme eğitiminden sonra son-test olarak uygulanan ispat beceri testleri ile GeoGebra dinamik geometri yazılımının sözsüz ispat becerilerine etkisi belirlenmiştir. İspat beceri testleri çalışmaya katılan 41 adaya uygulanmıştır. Bu testin genel taslağı araştırmacı tarafından oluşturulmuş, tez danışmanı tarafından uzman görüşü de alınarak gerekli düzeltmeler yapılmış ve son şekli verilmiştir. İspat beceri testinde on tane açık uçlu soru bulunmaktadır (bkz. Ek 3). Ön-test ve son-testteki sorular aynıdır.

İspat beceri testlerinde öncelikle ispat becerilerini geliştirmeye yönelik alınan dersler ve içerikler sorulmuştur. Bu testlerde cebirsel ve sözsüz ispatlara yer verilmiştir. Testin ilk sorusunda ispat ile görsel ispat tanımları sorulmuş ve adayların ispat ile görsel ispat kavramlarına ilişkin ön bilgilerini tespit etmek amaçlanmıştır. İkinci soruda “Bir dik üçgende hipotenüsün uzunluğu, hipotenüse ait kenarortay uzunluğunun iki katıdır.” olarak verilen ifadenin ispatının yapılması istenmiştir. Altıncı soruda “Dış Açortay Teoreminin” üçgen üzerinde gösterilmesi ve bu teoremin ispatının yapılması istenmiştir. İspat beceri testinde yer alan 2 ve 6 numaralı sorular ispat becerisini ortaya çıkaran cebirsel ispat sorularıdır ve Sıtkı (2017)’nin kitabından alınmıştır.

Üçüncü soruda “ $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4.a.b$ ” olarak verilen matematiksel ifadenin sözsüz ispatının yapılması istenmiştir. Dördüncü ve beşinci soruda Pisagor Teoreminin farklı şekilde gösterilen sözsüz ispatları soruda verilmiş ve hangi teoreme ait olduğunun tespit edilmesi istenmiştir. Yedinci soruda 1’den n’e kadar olan ilk n pozitif tamsayı toplamının sözsüz ispatı verilmiş ve hangi matematiksel ifadeye ait olduğunun tespit edilmesi istenmiştir. Sekizinci soruda verilen şekillerden sözsüz ispat olan şeklin tespit edilmesi istenmiş ve sözsüz ispat olup olmama durumunun nedenleri sorulmuştur. Dokuzuncu soruda tek tamsayıların toplamının sözsüz ispatı, onuncu soruda sonsuz geometrik seri toplamının sözsüz ispatı verilmiş ve verilen sözsüz ispatların hangi matematiksel ifadeye ait olduğunun tespit edilmesi istenmiştir. Sözsüz ispatlarla alakalı soruların sorulma amaçları özetlenirse, 3 numaralı soruda verilen matematiksel ifadenin görsel ispatının yapılması istenmiş, 8 numaralı soruda sözsüz ispat olma şartının tespiti istenmiştir. 4, 5, 7, 9 ve 10 numaralı sorularda ise verilen sözsüz ispatların hangi matematiksel ifadeye/teoreme ait olduğunun tespit edilmesi ve sözsüz ispatın nasıl yapıldığının açıklanması istenmiştir. Verilen sözsüz ispat soruları, sözsüz ispatların yer aldığı çeşitli kaynaklardan seçilmiştir (Miller, 2012; Nelsen, 1993; Nelsen, 2000).

Değerlendirme Formu

Değerlendirme Formu ile 41 adayın teknoloji, GeoGebra dinamik geometri yazılımı, ispat, sözsüz ispat ve GeoGebra yazılımında yapılan sözsüz ispat etkinlikleri hakkında genel değerlendirmeler yapmaları istenmiştir. Değerlendirme formunun genel taslağı araştırmacı tarafından oluşturulmuş, tez danışmanı tarafından uzman görüşü de alınarak gerekli düzeltmeler yapılmış ve son şekli verilmiştir. Değerlendirme formunda on dört tane soru bulunmaktadır (bkz. Ek 4).

Yarı Yapılandırılmış Görüşmeler

GeoGebra ile sözsüz ispat becerilerini geliştirme eğitim süreci hakkında gönüllü olarak seçilen 5'i öğretmen adayı ve 4'ü öğretmen olmak üzere 9 katılımcının görüşleri alınmıştır. Görüşmelerden önce doğru ya da yanlış tüm fikirlerin önemli olduğu söylenmiş, görüşmelerin gizlilik çerçevesinde yapılacağı ve not ile değerlendirilmeyeceği belirtilmiştir. Çalışma grubundaki kişilerden randevu alınarak uygun oldukları zamanlarda görüşmelerin yapılması planlanmıştır. Araştırmacı tarafından görüşme formunun taslağı oluşturulmuş, tez danışmanı tarafından uzman görüşü alınarak gerekli düzeltmeler yapılmış ve görüşme formunun son şekli verilmiştir. Görüşme Formunda dokuz tane soru bulunmaktadır (bkz. Ek 5). Katılımcıların görüşleri hem ses kayıtları ile hem yazılı bir şekilde alınmıştır. Covid- 19 salgın süreci nedeniyle görüşmeler online olarak "Skype" bağlantısı üzerinden yapılmıştır. Görüşme esnasında gerekli görülen yerlerde verilen cevaplar doğrultusunda ek sorular da sorulmuş ve daha etkili veriler elde edilmeye çalışılmıştır. Yapılan görüşmelerdeki amaçlar aşağıda verilmiştir.

- Sınıfta yapılan GeoGebra etkinliklerinin hangi amaçla yapıldığını bulmaları,
- Yapılan aşamaları matematiksel olarak açıklamaları,
- Etkinliklerin sözsüz ispat olarak kabul edilip edilmeyeceğini nedenleriyle açıklamaları,
- Etkinliklerin ispat yapma becerilerine etkisinin olup olmadığını belirlemeleri,
- Etkinlikleri derslerde kullanmayı tercih edip etmeme nedenleri, derste kullanmanın faydalarını açıklamaları,
- Etkinlikleri değerlendirip uygun olup olmayan noktaları açıklamaları amaçlanmıştır.

Veri Toplama Süreci

Araştırmada veriler toplanmadan önce gerekli yasal izinler alınmıştır. Gerekli izinler çıktıktan sonra araştırmanın başında matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarına kendi istekleri doğrultusunda çalışmaya katıldıklarına dair “Gönüllü Katılım Formunu” doldurmaları istenmiştir (bkz. Ek 2).

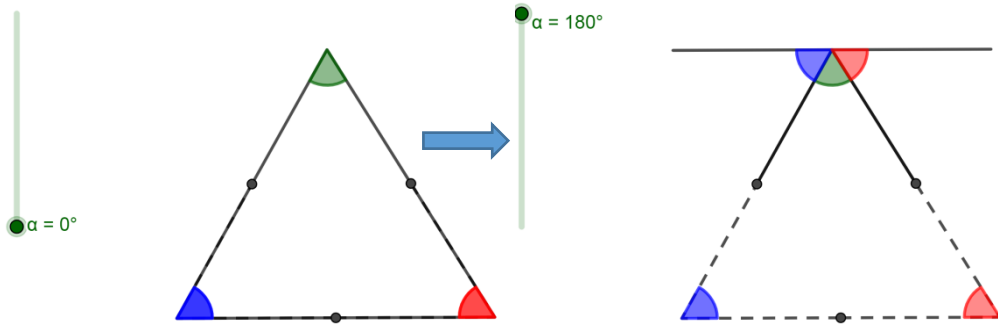
Bu çalışmada, veri toplama ve veri analizi sürecinin tüm aşamalarını araştırmacı bizzat kendisi yürütmüştür. Çalışmada ilk olarak öğretmen ve öğretmen adaylarının ispat becerileri konusunda ön bilgilerini ortaya çıkarmak amacıyla ön-test uygulanmıştır. Bu test, araştırmacı ile tez danışmanı tarafından uygulanmıştır. Ön test yapıldıktan sonraki hafta GeoGebra ile sözsüz ispat becerilerini geliştirme eğitim sürecine geçilmiştir. Bu çalışmada GeoGebra ile sözsüz ispat becerilerini geliştirme eğitim süreci, “GeoGebra eğitim süreci” olarak ele alınacaktır.

GeoGebra eğitim süreci, üniversitenin bilgisayar laboratuvarında GeoGebra dinamik geometri yazılımında sözsüz ispat etkinliklerinin uygulanması ile yürütülmüştür. Araştırmacı, çalışmayı bizzat kendisi yürütmüş ve tez danışmanı tarafından alınan kamera kayıtları ile eğitim süreci desteklenmiştir. GeoGebra eğitim süreci haftada 2 ders saati olacak şekilde beş hafta sürmüştür. Etkinlik uygulamaları öğretmen adayları için tez danışmanının “Teknoloji Destekli Matematik Eğitimi” dersinde, matematik öğretmenleri için tez danışmanının “Bilgisayar Destekli Matematik Eğitimi” dersinde yapılmıştır. Araştırmada GeoGebra dinamik geometri yazılımı kullanılmıştır. İlk derste çalışmanın amaçlarından bahsedilmiş, çalışma süreci ve çalışma aşamaları hakkında bilgilendirmeler yapılmıştır. Ders süreci araştırmacının önceden hazırlamış olduğu GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan sözsüz ispat etkinlikleri ile devam etmiştir. Araştırmacı etkinlikleri adım adım göstererek yapmış, aynı anda öğretmen ve öğretmen adaylarının bireysel olarak kullandıkları bilgisayarlarda etkinlikleri aşama aşama yapmaları istenmiştir. Öğretmen ve öğretmen adayları uygulama yaparken yaşayabilecekleri sıkıntılar araştırmacı tarafından çözülmüştür. GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan sözsüz ispat etkinlikleri sekiz uygulamadan oluşmaktadır (bkz. Ek. 6). GeoGebra eğitim süreci Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2. GeoGebra ile Sözsüz İspat Becerilerini Geliştirme Eğitim Süreci

Etkinlik Haftası	GeoGebra Yazılımında Yapılan Etkinlikler
1. hafta	Üçgenin iç açıları toplamına ilişkin birinci etkinlik Üçgenin iç açıları toplamına ilişkin ikinci etkinlik
2. hafta	Dörtgenin iç açıları toplamına ilişkin etkinlik
3. hafta	Pisagor Teoremi etkinliği Viviani Teoremi etkinliği
4. hafta	Eşkenar dörtgen alanını dikdörtgen yardımıyla bulma etkinliği Aritmetik ile geometrik ortalama arasındaki ilişkiyi gösteren etkinlik
5. hafta	Silindir ile koni hacmi arasındaki ilişkiyi gösteren etkinlik

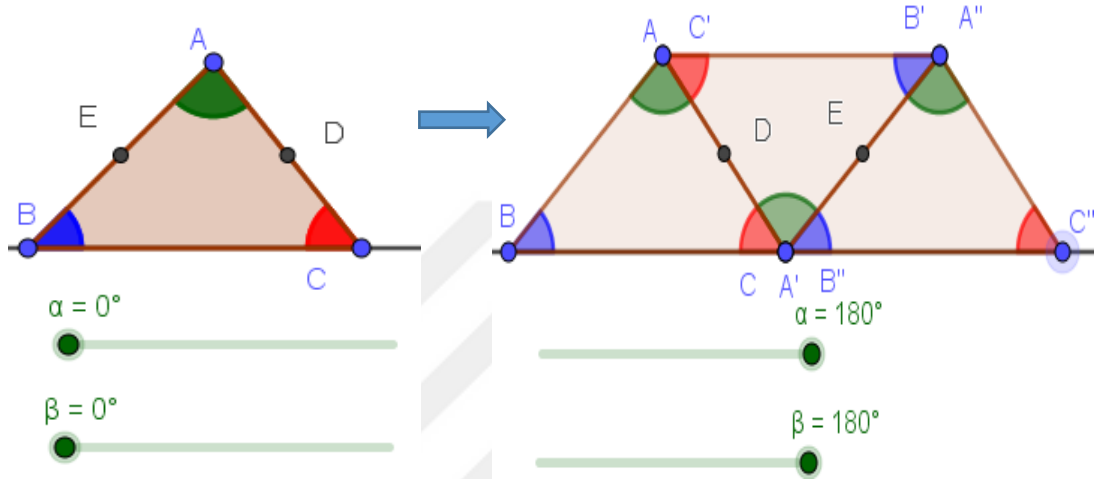
GeoGebra eğitim sürecindeki ilk haftada iki etkinlik yapılmıştır. Bu iki etkinlikte “Üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir” amacına ulaşılması hedeflenmiştir. İlk etkinlikte öncelikle dinamik bir üçgen oluşturulmuştur. Bunun için “Orta Nokta veya Merkez” aracı seçilerek üçgenin köşeleri ve orta noktaları oluşturulmuş ardından “Çoklu Doğru” aracı seçilerek üçgenin kenarları oluşturulmuştur. Bir açı sürgüsü oluşturularak bu sürgüye bağlı “Döndür” aracı ile üçgenin sağ ve sol orta noktalarından çoklu doğruların hareketliliği sağlanmıştır. Üçgenin iç açıları farklı renklerle renklendirilmiştir. Etkinlikte sürgü değiştirildiği zaman programın dinamikliği sayesinde oluşan doğrusal açı ile üçgenin iç açıları toplamının 180 derece olduğu görülmektedir. Bu etkinlik Şekil 19’da gösterilmiştir.



Şekil 19. Üçgenin İç Açıları Toplamına İlişkin Birinci Etkinlik

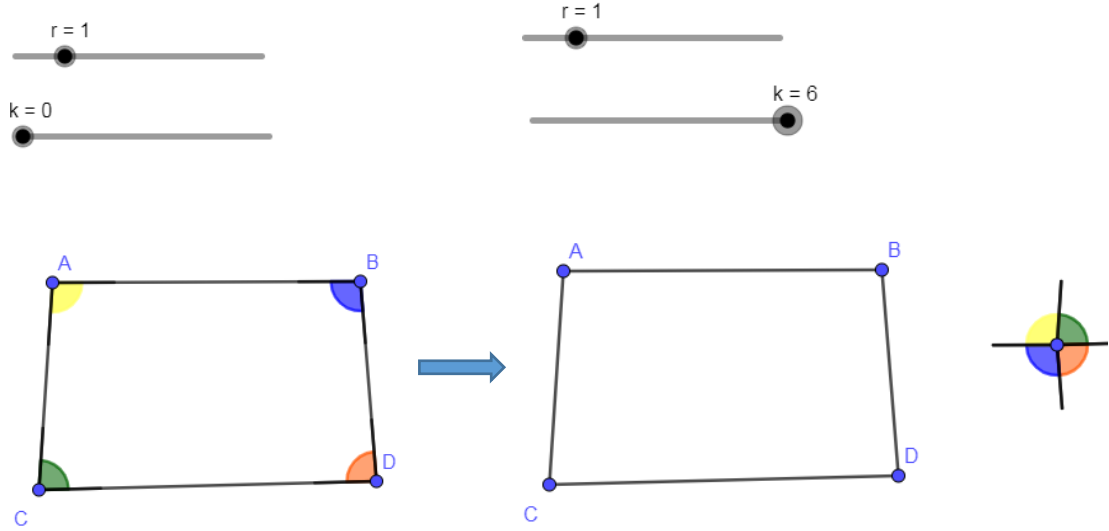
İlk haftada uygulanan ikinci etkinlikte öncelikle bir nokta ve doğru oluşturulmuştur. Ardından “Çokgen” aracı seçilerek oluşturulan bu nokta ile doğrunun iki noktasından geçen bir üçgen çizilmesi istenmiştir. Üçgenin sağ kenarının orta noktası bulunmuş, açı sürgüsü oluşturularak üçgenin köşe noktaları bu orta nokta etrafında sürgü yardımıyla döndürülmüştür. “Çokgen” aracı seçilerek döndürme işlemi

ile oluşan köşe noktalarından geçen yeni bir üçgen çizilmiştir. Aynı işlemler (üçgenin sağ kenarının orta noktasını bulma ve yeni bir açı sürgüsü oluşturma işlemleri) bu yeni oluşan üçgen için de yapılarak üçüncü bir üçgen elde edilmiştir. İlk üçgende iç açılar farklı renklerle renklendirilmiş ve diğer üçgenlerde aynı köşeden çıkan açılar aynı renkle oluşturulması sağlanmıştır. Etkinlikte sürgüler 180 dereceye getirildiğinde ilk etkinlikte olduğu gibi doğrusal açı yardımıyla üçgenin iç açıları toplamının 180 derece olduğu görülmektedir. Bu etkinlik Şekil 20’de gösterilmiştir.



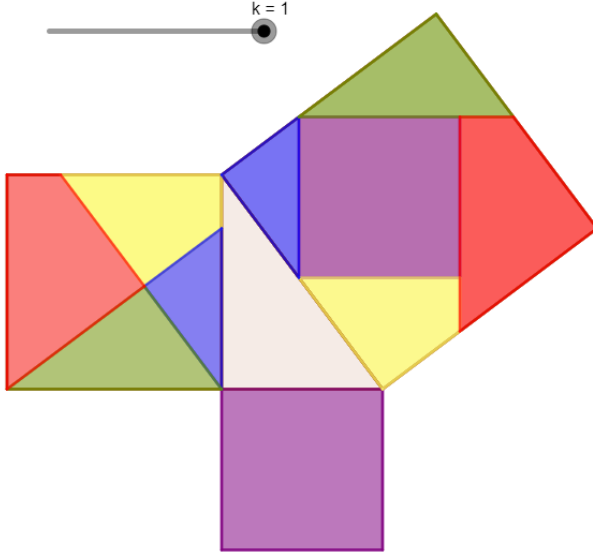
Şekil 20. Üçgenin İç Açıları Toplamına İlişkin İkinci Etkinlik

GeoGebra eğitim sürecindeki ikinci haftada bir etkinlik yapılmıştır. Etkinlikte “Dörtgenin iç açıları toplamı 360 derecedir” amacına ulaşılması hedeflenmiştir. Öncelikle yarıçap sürgüsü (r) ve bu sürgüye bağlı “Çember: Merkez ve Yarıçap” aracı ile dört tane çember oluşturulmuştur. Bu çemberlerin merkez noktaları doğru parçaları ile birleştirilerek dörtgen elde edilmiştir. Doğru parçaları ile çemberlerin kesişim noktaları bulunmuş ve dışarıda bir nokta oluşturulmuştur. Yeni bir sürgü oluşturulmuş, “Eğer” komutu kullanılarak öteleme-döndürme hareketleri ile çemberlerin merkez ve kesişim noktaları dinamik bir şekilde dışarıya taşınmıştır. Yeni oluşan merkez ve kesişim noktaları doğru parçaları ile birleştirilmiştir. Böylece taşınan noktalar ile tam açı elde edilmiştir. Etkinlikte sürgü oynatılarak dörtgenin iç açılarının öteleme ve döndürme hareketleriyle tam açığı oluşturan dört açının çakışması sağlanarak dörtgenin iç açıları toplamının 360 derece olduğu görülmektedir. Bu etkinlik Şekil 21’de gösterilmiştir.



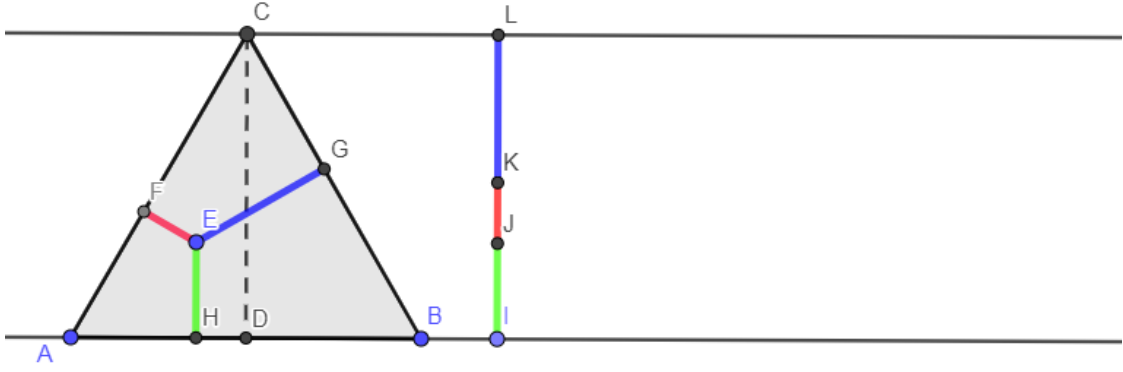
Şekil 21. Dörtgenin İç Açıları Toplamına İlişkin Etkinlik

GeoGebra eğitim sürecindeki üçüncü haftada iki etkinlik yapılmıştır. İlk etkinlikte “Pisagor Teoremi, karelerin alanı yardımıyla bulunmuştur” amacına ulaşılması hedeflenmiştir. Dik kenarlardan oluşturulan karelerin bir tanesinde belirtilen şekilde iki tane paralel doğru çizilmiş ve bu doğrularla oluşan çokgenler farklı renklerle renklendirilmiştir. Ayrıca diğer dik kenardan oluşturulan kare de farklı bir renkle renklendirilmiştir. Sürgü oluşturularak yapılan vektör ve öteleme işlemleriyle karenin bir tanesiyle oluşturulan farklı renkteki çokgenlerin, hipotenüse ait oluşan karenin içine ötelenmesi sağlanmıştır. Dik kenarların diğerinde oluşan karenin, çizilen çember ve vektör-öteleme işlemleriyle hipotenüse ait oluşan karenin ortasına ötelenmesi sağlanmıştır. Böylelikle dik kenarlardan oluşan karelerin alanları ile hipotenüsten çizilen karenin alanı eşit olmuştur. Etkinlikte dik üçgenin kenarları a , b ve c olarak isimlendirilirse $a^2 + b^2 = c^2$ (Pisagor Teoremi) eşitliğine ulaşıldığı görülmektedir. Bu etkinlik Şekil 22’de gösterilmiştir.



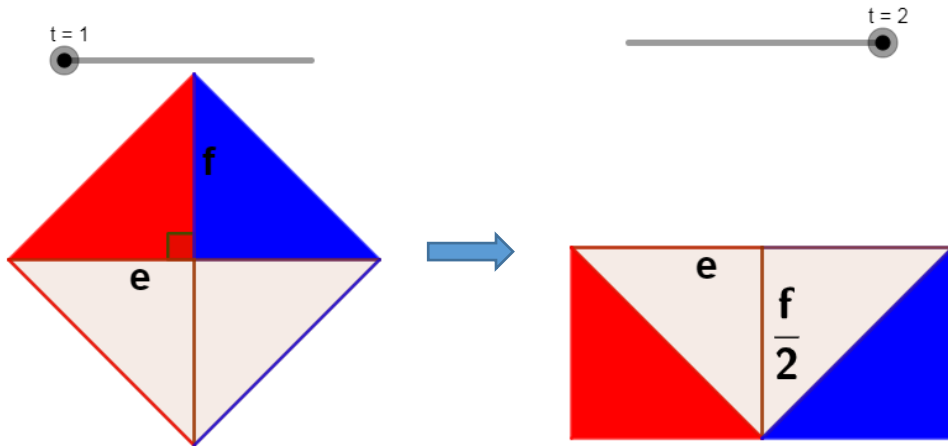
Şekil 22. Pisagor Teoremi Etkinliği

Üçüncü haftada uygulanan ikinci etkinlikte “Viviani Teoremine” ulaşılması hedeflenmiştir. Etkinlikte “Düzgün Çokgen” komutu ile eşkenar üçgen oluşturularak üçgenin alt tabanından üçgenin tepe noktasına dik doğru çizilmiş ve bu doğru kaldırılarak yerine doğru parçası oluşturulmuştur. Üçgenin içinden alınan herhangi bir noktadan üçgenin kenarlarına dik doğrular çizilmiş ve bu doğrular ile üçgenin kesişim noktaları bulunmuştur. Doğrular kaldırılarak üçgenin içinden alınan noktadan kesişim noktalarına doğru parçaları (farklı renklerle) çizilmiştir. Üçgenin alt tabanına doğru çizilmiş, çizilen doğruya paralel olan ve üçgenin içinden alınan noktadan geçen bir paralel doğru oluşturulmuştur. Üçgenin alt tabanına çizilen doğru üzerinden üçgenin dışında olacak şekilde bir nokta alınmıştır. Bu noktadan geçen ve alt taban doğrusuna dik olacak şekilde doğru çizilmiştir. “Pergel” komutu seçilerek oluşturulan çemberlerle eşkenar üçgenin içindeki noktadan oluşturulan farklı renkteki doğru parçalarının bu dik doğru üzerinde oluşturmaları sağlanmıştır. Etkinlikte çember ve doğrular kaldırılınca üçgenin içinden alınan noktanın hareketliliğiyle renkli doğru parçalarının toplamının üçgenin yüksekliğine eşit olduğu görülmektedir. Bu etkinlik Şekil 23’te gösterilmiştir.



Şekil 23. Viviani Teoremi Etkinliği

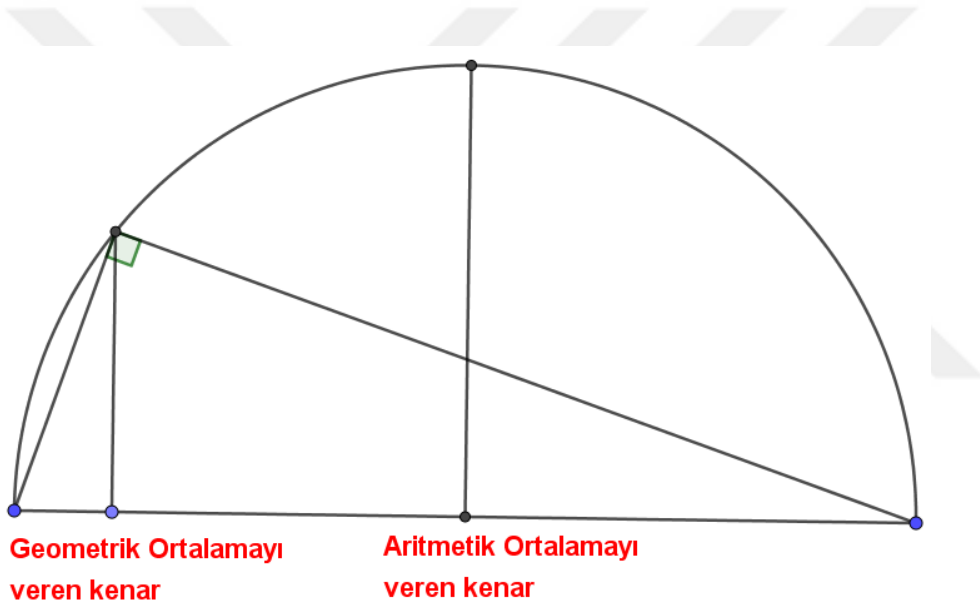
GeoGebra eğitim sürecindeki dördüncü haftada iki etkinlik yapılmıştır. İlk etkinlikte “Eşkenar dörtgenin alanı, dikdörtgenin alanı ile bulunmuştur” amacına ulaşılması hedeflenmiştir. Önce istenilen noktalar sonra “Çokgen” komutu ile bu noktalardan geçen dört eş üçgen oluşturulmuştur. Üstte oluşan iki üçgen farklı renklerle renklendirilmiştir. Bu üçgenlerin belirtilen özelliklerde döndürülmesi ile yeni bir dikdörtgen oluşturulmuştur. Bu döndürme işlemi ile eşkenar dörtgenin aynı alana sahip dikdörtgene dönüştüğü keşfedilmiştir. Etkinlikte dikdörtgenin alanı ile eşkenar dörtgenin alanına ulaşıldığı görülmektedir. Bu etkinlik araştırmacı ve tez danışmanı tarafından geliştirilmiştir ve Şekil 24’te gösterilmiştir.



Şekil 24. Eşkenar Dörtgen Alanını Dikdörtgen Yardımıyla Bulma Etkinliği

Dördüncü haftada uygulanan ikinci etkinlikte “Aritmetik ortalama ile geometrik ortalama arasındaki ilişki” amacına ulaşılması hedeflenmiştir. Öncelikle yarı çember oluşturulmuş ve çizilen çemberin iki uç noktasına doğru parçası çizilerek orta noktası bulunmuştur. Bu orta noktadan doğru parçasına dik doğru çizilerek bu doğruyla yarı çemberin kesim noktası bulunmuştur. Bu doğru kaldırılarak yerine doğru parçası

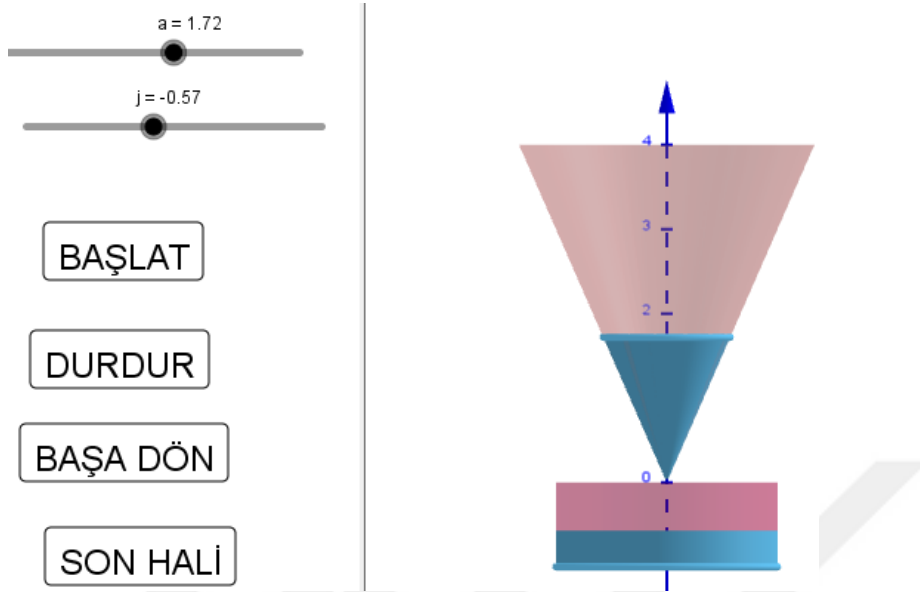
izilmiştir. Yarı çemberin iki uç noktasından çizilen doğru parçası üzerinde bir nokta alınmış ve bu noktadan yarı çemberin iki uç noktasına çizilen doğru parçasına dik doğru oluşturulmuştur. Bu dik doğruyla yarı çemberin kesim noktası bulunarak bu doğru kaldırılmış ve yerine doğru parçası çizilmiştir. Yeni oluşan kesim noktasından yarı çemberin iki uç noktasına doğru parçaları çizilmiştir. Yarı çemberin iki uç noktasının oluşturduğu doğru parçası üzerinde alınan nokta hareket ettirildike bu noktanın oluşturduğu doğru parçasının uzunluğu ile çemberin orta noktasından oluşturulan doğru parçasının uzunluğu arasındaki ilişki ortaya çıkmıştır. Bu uzunluklar aritmetik ve geometrik ortalamaya karşılık gelmektedir. Etkinlikte, noktayı hareket ettikçe geometrik ortalamaya denk olan uzunluğun aritmetik ortalamaya denk olan uzunluktan küçük veya eşit olduğu görülmektedir. Bu etkinlik şekil 25'te gösterilmiştir.



şekil 25. Aritmetik ve Geometrik Ortalama Arasındaki İlişkiyi Gösteren Etkinlik

GeoGebra eğitim sürecindeki beşinci haftada bir etkinlik yapılmıştır. Etkinlikte “Silindir ile koni hacmi arasındaki ilişki” amacına ulaşılması hedeflenmiştir. Öncelikle iki sürgü oluşturulmuştur. Üç nokta belirlenerek bu noktalardan geçen iki tane koni oluşturulmuştur. Aynı şekilde farklı üç nokta belirlenerek bu noktalardan geçen iki tane silindir oluşturulmuştur. Küçük olan silindir ve koninin rengi mavi yapılarak mavi rengin suyu temsil ettiği belirtilmiştir. Mavi renkli silindir ile koninin hacmi bulunmuştur. Dört tane düğme oluşturularak bu düğmelerin mavi renkli silindir ile koniye dinamiklik sağladığı görülmüştür. Etkinlikte düğmeler ile mavi renkli silindirden akan suyun mavi renkli koniye dolduğu ve yüksekliği 3 kat olan mavi renkli silindir ile

koninin hacminin eşit olduğu görülmektedir. Bu etkinlik araştırmacı tarafından geliştirilmiştir ve Şekil 26’da gösterilmiştir.



Şekil 26. Silindir ve Koni Hacmi Arasındaki İlişkiyi Gösteren Etkinlik

GeoGebra eğitim süreci bittikten sonraki hafta 41 adaya son-test uygulanmıştır. Son-test uygulandıktan sonra katılımcılara değerlendirme formunu doldurmaları için bir hafta süre verilmiştir. GeoGebra eğitim sürecinden yaklaşık bir ay sonra çalışma grubuna gönüllü olarak seçilen 9 kişiyle görüşmeler yapılmaya başlanmıştır. Her hafta iki kişiyle olacak şekilde beş hafta boyunca görüşmeler yapılmış ve her bir görüşme 40 dakika ile 80 dakika arasında sürmüştür.

Verilerin Analizi

Çalışmada, nicel ve nitel verilerin bir arada kullanıldığı karma araştırma yöntemi kullanılmıştır. Araştırma sürecinde nicel veri analizi ispat beceri testlerinden alınan puanların istatistiksel olarak incelenmesi ile sağlanmıştır. Nitel veri analizi ise ispat beceri testlerinde verilen cevapların karşılaştırmalı olarak incelenmesi ve görüşmelerden elde edilen verilerin analizi ile sağlanmıştır. Bu kısımda nicel ve nitel verilerin analizinde izlenen adımlar ve bu adımlarda gerçekleştirilen veri çözümlemeleri ile ilgili bilgiler verilmiştir.

İspat Beceri Testinin Analizi

İspat beceri testlerinden alınan puanların istatistik yöntemlerle analiz edilmesi, araştırmanın nicel veri analizini oluşturmaktadır. İspat beceri testlerinde verilen cevapların karşılaştırmalı olarak incelenmesi, araştırmanın nitel veri analizini oluşturmaktadır.

Araştırmanın nicel verileri için öğretmen adaylarının ön-testleri ile son-testleri arasında anlamlı bir fark olup olmadığı ve öğretmenlerin ön-testleri ile son-testleri arasında anlamlı bir fark olup olmadığı istatistiksel yöntemlerle analiz edilmiştir. Ayrıca öğretmen ile öğretmen adaylarının ispat beceri testlerinde aldıkları puanlar karşılaştırılmak istenmiş ve iki grubun puanları arasında anlamlı bir fark olup olmadığı istatistiksel yöntemlerle analiz edilmiştir.

Araştırmada, nicel verilerin analizi SPSS programı ile yapılmıştır. 35 öğretmen adayının ön-testleri ve son-testleri arasında anlamlı bir fark olup olmadığını belirlemek için bağımlı örneklem t-testi kullanılmak istenmiş, ancak verilerin normal dağılmaması nedeniyle bağımlı örneklem t-testinin non-parametrik karşılığı olan Wilcoxon İşaretli Sıralar testi yapılmıştır. Öğretmenlerin sayısının 30'dan küçük olması ve bu öğretmenlerin ön-testleri ile son-testleri arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek için aynı örnekleme ait iki ortalamayı karşılaştıran bağımlı örneklem t-testinin non-parametrik karşılığı olan Wilcoxon İşaretli Sıralar testi yapılmıştır. 35 öğretmen adayı ile 6 öğretmenin ön-test puanları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek amacıyla bağımsız iki örneklem t testinin non-parametrik karşılığı olan Mann Whitney U testi uygulanmıştır. Aynı şekilde 35 öğretmen adayı ile 6 öğretmenin son-test puanları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek amacıyla bağımsız iki örneklem t testinin non-parametrik karşılığı olan Mann Whitney U testi uygulanmıştır.

Araştırmada, nitel verilerin analizi için içerik analizi tekniği kullanılmıştır. Araştırmanın nitel verileri ispat beceri testinde yer alan soruların tamamı yerine ispat-görsel ispat kavramlarının tanımlarının sorulduğu ilk soru ve GeoGebra ile verilen eğitimde kullanılan şekillere paralel olan 4, 7, 8 ve 10 numaralı sorular incelenmiştir. Testteki bu soruların seçilmesindeki amaç GeoGebra ile verilen eğitimin öğretmen ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat becerilerine etkililiği belirleyebilmektir. Çalışma

grubunu oluşturan 9 kişinin, seçilen 4, 7, 8 ve 10 numaralı sorulardan aldıkları puanlar Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3. Çalışma Grubunun Belirlenen Sorularda Aldıkları Puanlar

Öğrenci Kodu	Testler	4. soru	7. soru	8. soru	10. soru
ÖA ₁	Ön-test	2	0	4	3
	Son-test	3	0	4	3
ÖA ₂	Ön-test	3	0	0	0
	Son-test	4	0	4	1
ÖA ₃	Ön-test	2	0	2	3
	Son-test	5	0	3	4
ÖA ₄	Ön-test	0	0	0	2
	Son-test	4	0	0	1
ÖA ₅	Ön-test	2	1	0	0
	Son-test	2	3	1	3
Ö ₁	Ön-test	3	0	0	1
	Son-test	5	4	5	4
Ö ₂	Ön-test	2	0	0	0
	Son-test	2	3	3	5
Ö ₃	Ön-test	2	0	0	0
	Son-test	4	3	5	3
Ö ₄	Ön-test	0	0	0	0
	Son-test	3	4	5	0

İspat yapma testlerinin nesnel olarak değerlendirilmesi, dereceli puanlama anahtarları ile sağlanmaktadır (Öztürk ve Kaplan, 2017). Çalışmada ispat beceri testlerinin analizi için “Dereceli Puanlama Anahtarı” (bkz. Ek 7) oluşturulmuştur. Çalışmada oluşturulan dereceli puanlama anahtarı, Balgalmış ve Ceyhan (2019) ile Öztürk ve Kaplan’ın (2017) çalışmalarındaki derecelendirme aşamalarına uygun olarak uzman görüşü alınarak hazırlanmıştır. Dereceli puanlama anahtarı oluşturulurken yararlanılan Balgalmış ve Ceyhan’ın (2019) çalışmasına göre tamamen yanlış cevaplar 0 puan ve tamamen doğru cevaplar 5 puan olarak değerlendirilmiştir. Arada olan cevaplar doğruluk derecesine göre kısmen doğru (1), yarı doğru (2), doğruya yakın (3) ve ifade eksiklikleri olmasına rağmen doğru (4) olarak değerlendirilip puanlanmıştır. Öztürk ve Kaplan’ın (2017) dereceli puanlama anahtarı, hem geometri hem cebir ispatlarını değerlendirebilecek türdedir ve Tablo 4’te verilmiştir.

Tablo 4. Öztürk ve Kaplan'ın (2017) Dereceli Puanlama Anahtarı

Puan	Açıklama
5	İspatı eksiksiz olarak tamamlar.
4	İspatı tamamlar, ancak sembolik gösterimlerde hata vardır. Tanım kümesini yazmaz veya ispatın son aşamasını yeterince açıklamaz. İspatını tamamlar ancak, işlemlerin gerekçesini (dayandırdığı teoremleri) yazmaz.
3	Ardı ardına birkaç mantıksal çıkarımda bulunarak sembolik ifade kullanır. Ancak sonuca ulaşmak için yeterli değildir. İspatı yapar ancak matematiksel dilden (notasyonlardan) uzaktır. İspatı anlar, doğru strateji seçer; ancak stratejiyi yanlış uygular.
2	İspatı anlamak için gerekli çıkarımları yapar. Ancak sembolik ifade kullanmaz. İspatı anlar; ancak yanlış strateji seçerek, sonuca ulaşır. Örnekler yardımıyla genelleme yapar. İspatın doğruluğunu anlatır (Sezgisel ispat yapar).
1	İspatı anlamaya yönelik farklı işlemler yapar (Doğru şekil çizme gibi). Verilenleri ve istenenleri yazar (Hipotez-Hüküm). İspatı yarım bırakır (Sadece tanımları veya sonucu yazar). Tanım kümesini eksik veya yanlış yazarak ispata başlar ve ispatı tamamlar.
0	Soruyu cevaplamaz. Sadece verilenleri yazar. Önerme ile ilgisiz ifadeler kullanır veya verileri ve işlemleri rasgele kullanır. Önermenin karşınının doğru olduğunu gösterir.

Balgalmış ve Ceyhan (2019) ile Öztürk ve Kaplan'ın (2017) çalışmalarındaki derecelendirme aşamalarına uygun olarak oluşturulan dereceli puanlama anahtarında 0 (tamamen yanlış/boş), 1 (kısmen doğru), 2 (yarı doğru), 3 (doğruya yakın), 4 (ifade eksikliğine rağmen doğru), 5 (tamamen doğru) olmak üzere altı düzey oluşturulmuştur. Boş bırakma, geçersiz açıklama/işlem/şekil kullanma, herhangi açıklama yapmadan doğruluğu kabul etme, verileni aynen yazma gibi durumlarda 0 puan verilmiştir. Yalnız 1 geçerli çıkarım/işlem/açıklama yapma gibi durumlarda 1 puan verilmiştir. Birkaç geçerli çıkarım/işlem/açıklama yapma, ispatı yarım bırakma ve ispatı tamamlamamış olma gibi durumlarda 2 puan verilmiştir. Belli adımlar atlanarak ispat tamamlanmış yani birkaç adımın eksik olduğu durumlarda 3 puan verilmiştir. İspat tamamlanmış ancak ifade eksiklikleri varsa, ispat tamamlanmış ancak ilgili teorem belirtilmemişse veya ispat tamamlanmış ancak sembolik gösterimlerde hata varsa 4 puan verilmiştir. Genel kabul görececek şekilde ispat eksiksiz tamamlanmışsa 5 puan verilmiştir.

Görüşmelerden Elde Edilen Verilerin Analizi

Araştırmanın nitel verileri için çalışma grubuna gönüllü olarak seçilen 9 kişi ile görüşmeler yapılmış ve yapılan görüşmeler araştırmacı tarafından ses kaydına alınmıştır. Kaydedilen görüşmeler birebir araştırmacı tarafından yazıya aktarılıp katılımcılardan yazılı olarak da alınarak analiz edilmiştir. Katılımcı görüşleri, içerik analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. İçerik analizi, tarafsız ve sistematik bilgi sunmayı amaçlar (Koçak ve Arun, 2006). Her bir görüşme araştırmacı tarafından defalarca okunarak anlamlı görülen ifadelerden kategoriler oluşturulmaya çalışılmıştır. Kategorilerin hangi sıklıkta tekrar ettiği belirlenerek tablo haline getirilmiştir. Görüşmelerden elde edilen kategoriler, tez danışmanı ile uzman görüşü alınarak incelenmiş, gerekli düzeltmeler yapılmış ve son haline getirilmiştir. Bulgular bölümünde katılımcıların görüşlerinden doğrudan alıntılara yer verilmiştir.

Araştırmanın Güvenirlik ve Geçerlik Çalışmaları

Çalışmanın geçerlik ve güvenirliliğini sağlamak amacı ile hem öğretmenlerin hem öğretmen adaylarının etkinlik uygulama sürecinde araştırmacının kendisi bulunmuştur. Her iki sınıfta da uygulanan etkinlikler ve veri toplama araçları aynıdır. Bu çalışma sürecinde çalışmaya katılanlar başka bir çalışmaya katılmamışlardır. Ön-test ve son-test uygulanırken kopya çekilmediğinden emin olmak için her iki sınıfa da araştırmacı ve tezin danışmanı sınav gözetmeni olarak bulunmuştur.

Geçerlik

Bu bölümde araştırmanın geçerliğini artırmak için yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Bu yapılan çalışmalar incelendiğinde uygulanan ispat beceri testleri ile GeoGebra eğitim süreci yedi hafta sürmüş, görüşmeler ise ders sürecinden yaklaşık bir ay sonra başlamış ve beş hafta sürmüştür. Böylece çalışma grubuyla uzun süreli etkileşim sağlanmıştır. İspat beceri testi, görüşme formu, değerlendirme formu, kamera kayıtları, ses kayıtları kullanılarak veri toplama araçlarının çeşitliliği sağlanmıştır. Araştırmacı dereceli puanlama anahtarı, kamera kayıtları ve ses kayıtları kullanarak objektif olmaya çalışmıştır. Çalışmada kullanılan formlar hem uygulama öncesi hem uygulama sonrası uzman incelemesine sunulmuş ve son haline getirilmiştir. Çalışmada ispat beceri testinden elde edilen veriler sonrasında gönüllü olarak seçilen katılımcılarla görüşmeler yapılmıştır. Görüşmeler araştırmacı tarafından ilk elden toplanmış ve veriler

ses kaydı alınarak dijital ortamda kaydedilmiştir. Araştırmacı tarafından ses kayıtları bulgulara dönüştürülmüş ve çalışma grubunun yazılı olarak teyidi alınmıştır. Çalışma grubunun verdiği onaydan sonra veri analizine geçilmiştir. Çalışmanın bulgular kısmında çalışma grubunun sözleri doğrudan alıntılar ile belirtilmiştir.

Güvenirlik

Bu bölümde araştırmanın güvenilirliğini artırmak için yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Testlerin puanlanmasında güvenirliliğin sağlanması için Balgalmış ve Ceyhan (2019) ile Öztürk ve Kaplan'ın (2017) çalışmalarındaki derecelendirme aşamalarına uygun olarak uzman görüşü de alınarak dereceli puanlama anahtarı oluşturulmuştur.

Güvenirliliği etkileyen faktörler biri puanlayıcılardır. Puanlayıcı hata kaynağı, iki ya da daha fazla puanlayıcının yaptığı puanlama farkından kaynaklanmaktadır. Bu hatanın olmaması için puanlar arasında anlamlı fark olmamalıdır. Bu sebeple testlerin puanlanmasında güvenirliliği sağlamak için farklı puanlayıcıların verdiği puanların tutarlılığı değerlendirilmelidir (Güler ve Taşdelen Teker, 2015). Ortaöğretimde görev yapan aynı zamanda yüksek lisans eğitiminde ispat becerilerini geliştirmeye yönelik dersler almış ve sözsüz ispat bilgisi olan bir matematik öğretmenine, hazırlanan dereceli puanlama anahtarı ve testler hakkında bilgilendirmeler yapılmıştır. Matematik öğretmeni, araştırmacıdan bağımsız olarak çalışma grubunun test cevaplarını puanlamıştır. Araştırmacı ve matematik öğretmeni testlerin cevaplarını ayrı ayrı puanladıktan sonra bir araya gelerek puanlayıcılar arası güvenirlilik Pearson korelasyon katsayısı yöntemi ile SPSS programında hesaplanmıştır. Hesaplanan korelasyon sonucu puanlar arası 0.90 uyum çıkmıştır. Bu sebeple oluşturulan dereceli puanlama anahtarının ispat becerilerini belirlemede güvenilir bir araç olduğu söylenebilir.

Görüşmelerde katılımcılara yöneltilen sorular benzer yaklaşımlarla sorulmuştur. Çalışmaya katılan 41 kişi cinsiyet ve başarı yönünden karmadır. Testler ve etkinlikler araştırmacı ve tez danışmanı gözetiminde uygulanmıştır.

BÖLÜM IV

BULGULAR

Bu bölümde nicel ve nitel veri analizi bulgularına yer verilmiştir. İlk olarak araştırmanın nicel verileri için 41 adayın ispat becerileri testlerinden aldıkları puanlar SPSS programı ile incelenerek yapılan Wilcoxon İşaretli Sıralar testi ve Mann Whitney U testi analiz sonuçları raporlanmıştır. Araştırmanın nitel verileri için öncelikle çalışma grubuna gönüllü seçilen 9 kişinin ön-test ve son-test olarak uygulanan ispat beceri testine verdikleri cevaplar karşılaştırmalı olarak incelenmiş daha sonra matematik öğretmeni ile öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar karşılaştırmalı olarak incelenerek analiz edilmiştir. Nitel veriler için son olarak GeoGebra eğitim sürecine yönelik katılımcıların düşüncelerini almaya ilişkin yapılan görüşmelerin çözümlemelerine yer verilmiştir.

Öğretmen Adaylarının Ön-Test ile Son-Test Puanlarının Karşılaştırılması

Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının ön-test ve son-test puanları SPSS programına girilmiştir. Yanlış ve eksik girilen veriler tespit edilerek gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Öğretmen adaylarının ön-testleri ile son-testleri arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek için aynı örnekleme ait iki ortalamayı karşılaştıran bağımlı örneklem t-testi uygulanmak istenmiştir. Bu sebeple veri setinin gerekli varsayımları karşılayıp karşılamadığı incelenmiştir.

- Sınavlarda adaylar arasında etkileşim olmamasına dikkat edilmiştir. Her bir veri diğerinden bağımsızdır.
- Bağımlı değişkene ilişkin verilerin dağılımının çarpıklık ve basıklık değerleri +2 ve -2 değerleri arasında olması dağılımın normal olduğunu gösterir. Bu çalışmada öğretmen adaylarından elde edilen ön-testteki verilerin basıklık değeri 2.125 ve son-testteki verilerin basıklık değeri 2.096 olarak belirlenmiştir. Bu sebeple elde edilen verilerin basıklık değerleri -2 ile +2 arasında olmadığı için verilerin normal dağılım göstermediği söylenebilir.
- Çalışmadaki verilerin normal dağılım gösterip göstermediğinden emin olmak için normallik testi ile de incelenmiştir. Öğretmen adaylarının sayısı 50'den az olduğu için normallik testinde Shapiro-Wilk testi sonucu analiz edilmiştir. Shapiro-Wilk test sonuçlarına göre ön-testte elde edilen anlamlılık düzeyi 0.047

ve son-testte elde edilen anlamlılık düzeyi 0.036'dır. Ön-test ve son-test verilerinden elde edilen Shapiro-Wilk testindeki p değeri 0.05'ten küçük olduğundan dolayı bağımlı değişken normal dağılım göstermemektedir.

Öğretmen adaylarının son-test ile ön-test puanlarının normal dağılım göstermemesinden dolayı t-test için gerekli varsayımlar karşılanmaması nedeniyle parametrik bağımlı örneklem t-testinin non-parametrik karşılığı olan Wilcoxon İşaretli Sıralar testi yapılmıştır. Testin analiz sonuçları Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5. Öğretmen Adaylarının Ön-Test ve Son-Test Puanlarına İlişkin Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi Sonuçları

Son test- ön test	N	Sıra ortalaması	Sıralar toplamı	Z	p
Negatif sıralar	4	8.13	32.50	-4.235	.000
Pozitif sıralar	27	17.17	463.50		
Eşit sıralar	4				

Tablo 5'e göre öğretmen adaylarının Wilcoxon İşaretli Sıralar testi sonucunda ön-test ve son-test verilerinden elde edilen p değeri 0.05'ten küçük olduğundan dolayı ön-testleri ile son-test puanları arasında son-test puanlarının lehine istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık tespit edilmiştir ($z = -4.235$; $p < .05$). GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan bu eğitim programının, öğretmen adaylarının sözsüz ispat yapma becerilerine olumlu etkisinin olduğunu söylemek mümkündür.

Matematik Öğretmenlerinin Ön-Test ile Son-Test Puanlarının Karşılaştırılması

Çalışmaya katılan matematik öğretmenlerinin ön-test ve son-test puanları SPSS programına girilmiştir. Yanlış ve eksik girilen veriler tespit edilerek gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Öğretmenlerin sayısının 30'dan küçük olması ve öğretmenlerin ön-testleri ile son-testleri arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek için aynı örnekleme ait iki ortalamayı karşılaştıran bağımlı örneklem t-testinin non-parametrik karşılığı olan Wilcoxon İşaretli Sıralar testi yapılmıştır. Analiz sonuçları Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 6. Matematik Öğretmenlerinin Ön-Test ve Son-Test Puanlarına İlişkin Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi Sonuçları

Son test- ön test	N	Sıra ortalaması	Sıralar toplamı	Z	p
Negatif sıralar	0	.00	.00	-2.226	.026
Pozitif sıralar	6	3.50	21.00		
Eşit sıralar	0				

Tablo 6'ya göre Wilcoxon İşaretli Sıralar testi sonucunda öğretmenlerin ön-test ve son-test verilerinden elde edilen p değeri 0.05'den küçük olduğundan dolayı ön-test ile son-test puanları arasında son-test puanlarının lehine istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık tespit edilmiştir ($z = -2.226$; $p < .05$). GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan bu eğitim programının, matematik öğretmenlerinin sözsüz ispat yapma becerilerine olumlu etkisinin olduğunu söylemek mümkündür.

Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının Ön-test Puanlarının Karşılaştırılması

Çalışmaya katılan öğretmen adayları ile matematik öğretmenlerinin ön-test puanları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek amacıyla bağımsız iki örneklem t testinin non-parametrik karşılığı olan Mann Whitney U testi uygulanmış ve elde edilen sonuç Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 7. Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının Ön-Test Puanlarına İlişkin Mann Whitney U Testi Sonuçları

	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	U	p
Öğretmen Adayları	35	19.67	688.50	58.50	.087
Öğretmenler	6	28.75	172.50		

Tablo 7'ye göre öğretmen ve öğretmen adaylarının Mann Whitney U testi sonucunda ön-test puanlarından elde edilen p değeri 0.05'ten büyük olmasından dolayı öğretmen ve öğretmen adaylarının ön-testlerinde istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık olmadığı tespit edilmiştir ($z = -1.729$; $p > .05$). Elde edilen bu sonuca göre araştırmanın başında öğretmen ve öğretmen adaylarının ön-test puanlarının denk sayılabileceği söylenebilir.

Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının Son-test Puanlarının Karşılaştırılması

Çalışmaya katılan öğretmen adayları ile matematik öğretmenlerinin son-test puanları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek amacıyla bağımsız iki örneklem t testinin non-parametrik karşılığı olan Mann Whitney U testi uygulanmış ve elde edilen sonuç Tablo 8'de verilmiştir.

Tablo 8. Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının Son-Test Puanlarına İlişkin Mann Whitney U Testi Sonuçları

	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	U	p
Öğretmen Adayları	35	18.03	631.00	1.000	.000
Öğretmenler	6	38.33	230.00		

Tablo 8'e göre öğretmen ve öğretmen adaylarının Mann Whitney U testi sonucunda son-test puanlarından elde edilen p değerinin 0.05'ten küçük olmasından dolayı öğretmen ve öğretmen adaylarının son-testlerinde istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık tespit edilmiştir ($z = -3.849$; $p < .05$). Bu sonuca göre farklılık öğretmenlerin lehine gerçekleşmiş ve öğretmenlerin son-test puan ortalamaları anlamlı bir şekilde yüksek çıkmıştır. GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan bu eğitim programının, öğretmenleri daha çok geliştirdiği söylenebilir.

Katılımcıların Ön-Test ve Son-Test Sorularına Verdikleri Cevapların Karşılaştırmalı Olarak İncelenmesi

Bu bölümde ispat beceri testinde yer alan soruların tamamı yerine ispat-görsel ispat kavramlarının tanımlarının sorulduğu ilk soru ve GeoGebra eğitim sürecinde kullanılan şekillere paralel olan 4, 7, 8 ve 10 numaralı sözsüz ispat soruları incelenmiştir. Sözsüz ispat kısaca matematiksel ifadelerin doğruluğunu açıklarken herhangi bir kelime kullanmadan sayı, nokta, sembolik ifadelerle donatılmış olan resim ve diyagramlara dayalı olarak yapılan ispatlardır (Alsina ve Nelsen, 2010; Bardelle, 2009; Gierdien, 2007). Verilen tanımda da belirtildiği gibi seçilen bu sorular kelime kullanılmadan sayı, nokta, sembolik ifadelerle verilmiş olan resimli sözsüz ispat sorularıdır ve katılımcılara GeoGebra eğitim sürecinde kullanılan şekillere paralel oldukları için analizlerde kullanılmasının uygun olduğu düşünülmüştür. Ayrıca katılımcıların seçilen bu sözsüz ispat sorularına veri çeşitliliği sağlayacak şekilde daha ayrıntılı yanıtlar verdikleri tespit edilmiş ve yanıtların derinlemesine incelenmesine olanak sağladığı için özellikle bu sorular seçilmiştir. İspat beceri testinde yer alan ve bölüm boyunca incelenecek olan problem durumları ile ilgili bilgiler aşağıda verilmiştir.

İspat beceri testinde öncelikle adaylara ispat becerilerini geliştirmeye yönelik alınan dersler ve içerikleri sorulmuştur. Adayların genel olarak ispat kavramları ve ispat yöntemlerine dair dersler aldıklarını belirttikleri görülmüştür. İspat yöntemlerinden tümevarım, tümdengelim, doğrudan ispat, aksine örnek verme yöntemi ile ispat,

olmayan ergi yöntemi ile ispat, çelişki yöntemi ile ispat türlerini açıkladıkları görülmüştür.

İspat beceri testinde katılımcılara yöneltilen ilk soru ispat ve görsel ispat nedir tanımlayınız sorusudur. Şekil 27’de ÖA₅ kodlu öğretmen adayının ön-testte ilk soruya verdiği cevap görülmektedir.

1. İspat nedir? Görsel ispat denilince ne anlıyorsunuz? Yorumlayınız.

ispat Bir yöntemle herhangi bir formülün nereden geldiğini gösterme şeklidir.

Görsel şekillerle yapılan ispatlardır.

Şekil 27. ÖA₅ Kodlu Öğretmen Adayının Ön-Testte İlk Soruya Verdiği Cevap

Şekil 27’de ÖA₅ kodlu öğretmen adayının ispat tanımı için “Bir yöntemle herhangi bir formülün nereden geldiğini gösterme şeklidir.” şeklinde cevap verdiği görülmektedir. Öğretmen adayının görsel ispat tanımı için “Görsel şekillerle yapılan ispatlardır.” şeklinde cevap verdiği görülmektedir. Şekil 28’de ÖA₅ kodlu öğretmen adayının son-testte ilk soruya verdiği cevap görülmektedir.

1. İspat nedir? Görsel ispat denilince ne anlıyorsunuz? Yorumlayınız.

Bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu veya yanlışlığını yeterli kanıt göstererek kabul etme çabasıdır.

“Sözel olarak öğrendiğimiz kazanımları görsel bir şekilde gösterme yöntemidir.”

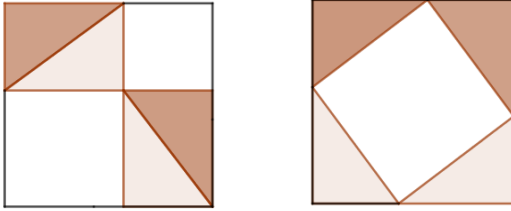
Şekil 28. ÖA₅ Kodlu Öğretmen Adayının Son-Testte İlk Soruya Verdiği Cevap

Şekil 28’de ÖA₅ kodlu öğretmen adayının ispat tanımı için “Bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu veya yanlışlığını yeterli kanıt göstererek kabul etme çabasıdır.” şeklinde cevap verdiği görülmektedir. Öğretmen adayının görsel ispat tanımı için “Sözel olarak öğrendiğimiz kazanımları görsel bir şekilde gösterme yöntemidir.” şeklinde cevap verdiği görülmektedir.

İlk soru için matematik öğretmeni ile öğretmen adaylarının ön-test ve son-testte verdikleri yanıtlar arasında belirgin bir fark olmadığı, genel olarak doğru anlaşıldığı ve GeoGebra eğitimi verilmeden önce de katılımcıların ispat ile görsel ispatın tanımını doğru bildikleri söylenebilir.

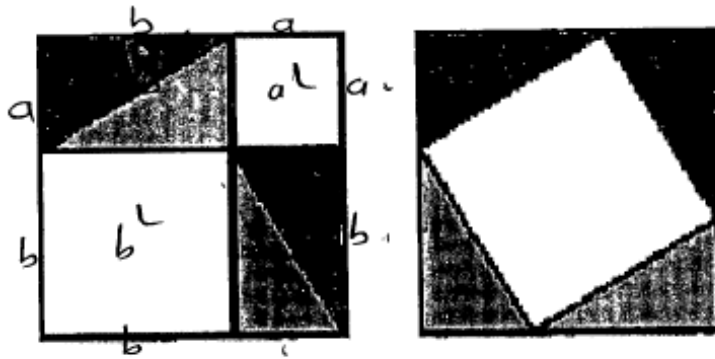
Araştırmada incelenen ispat beceri testinin dördüncü sorusunda sözsüz ispatı verilen şeklin teoreminin bulunması ve sözsüz ispatın nasıl yapıldığının açıklanması istenmiştir. İlgili soru aşağıda verilmiştir.

Dördüncü Soru: Aşağıda bir teoremin sözsüz ispatı verilmiştir. Verilen bu sözsüz ispatın hangi teoreme ait olduğunu ve ispatın nasıl yapıldığını açıklayınız. Aynı renklerde verilen alanlarının eşit olduğunu göz önünde bulundurunuz.



Şekil 29'da Ö₃ kodlu matematik öğretmenin ön-testte 4. soruya verdiği cevap görülmektedir.

4. Aşağıda bir teoremin sözsüz ispatı verilmiştir. Verilen bu sözsüz ispatın hangi teoreme ait olduğunu ve ispatın nasıl yapıldığını tartışınız. Aynı renklerde verilen alanlarının eşit olduğunu göz önünde bulundurunuz.



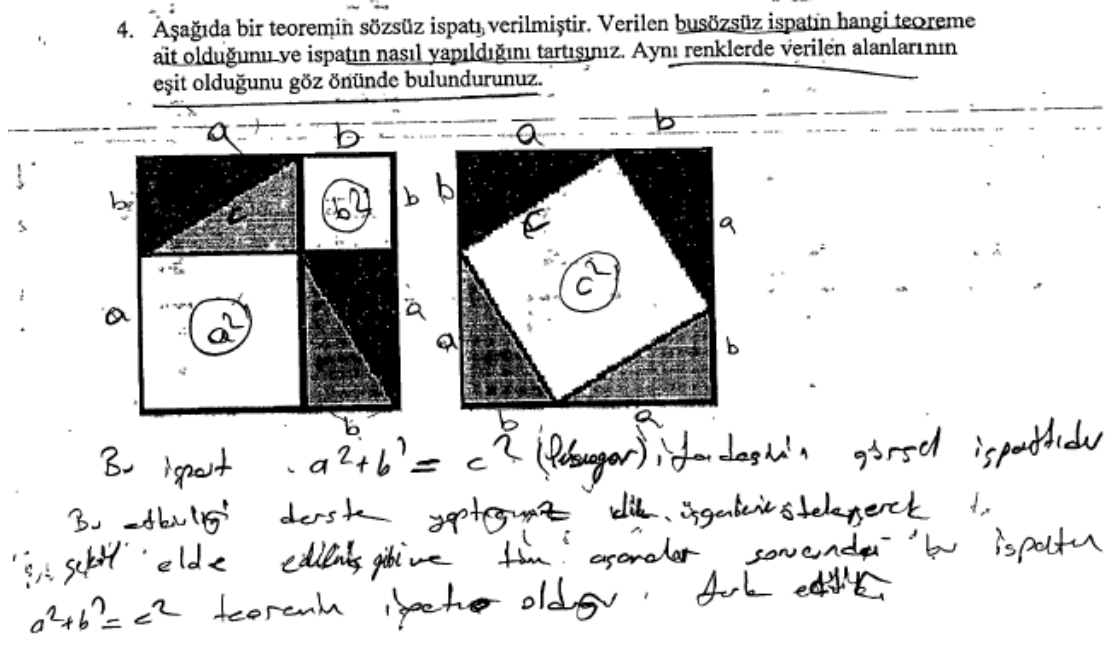
$$\begin{aligned} \text{Tüm alan} &= a^2 + b^2 + 2ab \\ &= (a+b)^2 \end{aligned}$$

Şekil 29. Ö₃ Kodlu Matematik Öğretmenin Ön-Testte 4. Soruya Verdiği Cevap

Şekil 29'da Ö₃ kodlu matematik öğretmenin “Tüm alan = $a^2 + b^2 + 2.a.b = (a + b)^2$ ” şeklinde cevap verdiği görülmektedir. Ö₃ kodlu matematik öğretmeni ilk şekildeki karenin kenarlarını a ve b olarak harflendirerek karenin içindeki şekillerden ilk boyalı olan şeklin alanını a.b, a kenarlı karenin alanını a^2 , b kenarlı karenin alanını b^2 ve ikinci boyalı şeklin alanını a.b olarak belirtmiştir. Matematik öğretmeni ilk şekildeki

tüm alanın $(a^2+b^2+2.a.b)$ 'ye eşit olduğunu ve bu ifadenin de $(a + b)^2$ 'ne eşit olduğunu tespit etmiştir. Ancak matematik öğretmeni sadece ilk şekildeki karenin alanı hakkında açıklamada bulunmuştur. Matematik öğretmenin diğer şekildeki kare hakkında bir cevap vermediği hatta ilk şekildeki kare ile olan bağıntısını kurmadığı görülmektedir.

Şekil 30'da verilen $\ddot{O}_3$ kodlu matematik öğretmenin son-testte 4. soruya verdiği cevap görülmektedir.



Şekil 30. $\ddot{O}_3$ Kodlu Matematik Öğretmenin Son-Testte 4. Soruya Verdiği Cevap

Şekil 30'da $\ddot{O}_3$ kodlu matematik öğretmenin “Bu ispat $a^2+b^2=c^2$ (Pisagor) ifadesinin görsel ispatıdır. Bu etkinliği derste yaptığımız dik üçgenlerin ötelenerek şekil elde edilmiş gibi ve tüm aşamalar sonucunda $a^2+b^2=c^2$ teoremin ispatı olduğu fark edilir.” şeklinde cevap verdiği görülmektedir. $\ddot{O}_3$ kodlu matematik öğretmeni her iki şekildeki karelerde kenarlara a, b ve c olarak harflendirmeler yapmıştır. Matematik öğretmeni ön-testte ikinci şekildeki kare hakkında hiçbir açıklamada bulunmamışken son-testte bu şekil üzerinde harflendirmeler yaparak ilk şekildeki karedeki dik üçgenlerin ötelenmesiyle diğer şeklin elde edildiğini belirterek şekiller arasındaki bağıntıyı açıklamış ve bu ispatın Pisagor Teoremine ($a^2+b^2=c^2$) ait olduğunu belirtmiştir. Matematik öğretmenin ön-testte ispatın nasıl yapıldığına dair bir açıklamada bulunmadığı son-testte ise GeoGebra eğitiminde öğrendiği dik üçgenlerin ötelenmesi bilgisi ile ispatta yapılanları açıkladığı söylenebilir.

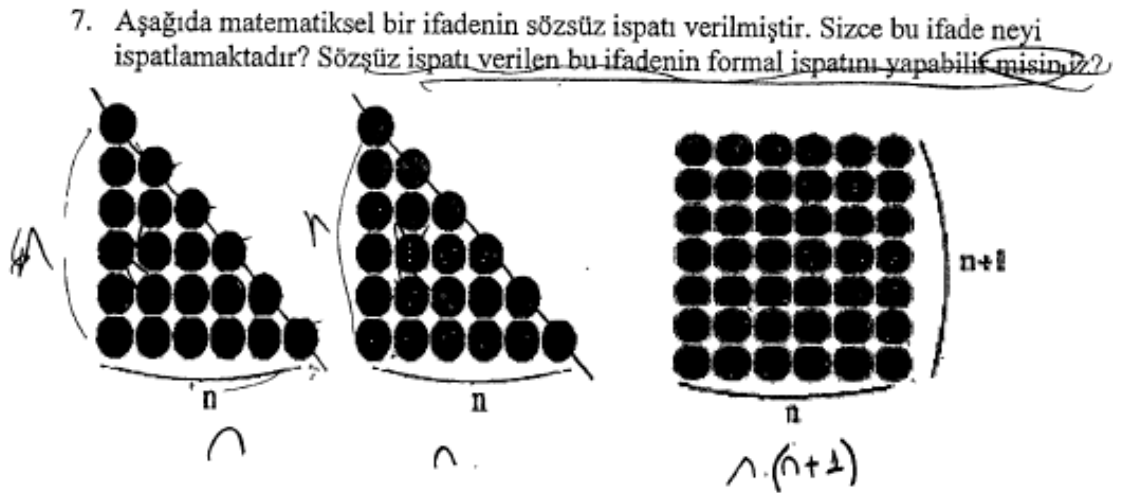
Dördüncü soru için ön-testte katılımcıların tamamına yakınının $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini tespit edemediği, son-testte ise katılımcıların tamamına yakınının $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini tespit ettiği görülmüştür. Ön-testte matematik öğretmeni ile öğretmen adaylarının dördüncü soru için genel olarak eksik veya yanlış cevap verdikleri, son-testte ise matematik öğretmeni ile öğretmen adaylarının genel olarak yeterli ve doğru cevap verdikleri söylenebilir.

İspat beceri testinin yedinci sorusunda sözsüz ispatı verilen şeklin matematiksel ifadesinin bulunması, sözsüz ispatın nasıl yapıldığının açıklanması ve bu ifadenin formal ispatının yapılması istenmiştir. İlgili soru aşağıda verilmiştir.

Yedinci soru: Aşağıdaki şekilde (Nelsen, 2000) matematiksel bir ifadenin sözsüz ispatı verilmiştir. Sizce bu ifade neyi ispatlamaktadır? Sözsüz ispatı verilen bu ifadenin formal ispatını yapınız.



Şekil 31’de $\ddot{O}_1$ kodlu matematik öğretmenin ön-testte 7. soruya verdiği cevap görülmektedir.



Şekil 31. $\ddot{O}_1$ Kodlu Matematik Öğretmenin Ön-Testte 7. Soruya Verdiği Cevap

Şekil 31’de $\ddot{O}_1$ kodlu matematik öğretmenin ilk iki şeklin kenarlarında n olarak harflendirmeler yaparak üçüncü şekil üzerinde $n \cdot (n+1)$ bağıntısını elde ettiği

görülmektedir. Ancak matematik öğretmenin ilk iki şekil ile üçüncü şekil arasında ilişki kurmadığı tespit edilmiştir.

Şekil 32’de Ö₁ kodlu matematik öğretmenin son-testte 7. soruya verdiği cevap görülmektedir.

7. Aşağıda matematiksel bir ifadenin sözsüz ispatı verilmiştir. Sizce bu ifade neyi ispatlamaktadır? Sözsüz ispatı verilen bu ifadenin formal ispatını yapabilir misiniz?

1+2+3+4+5+6=21 1+2+3+4+5+6+7=28 $\frac{n \cdot (n+1)}{2} = 21$

$\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ ← 1’den n’ye kadar olan sayıların toplamı ispat edilmiş

Tümevarım ispatı: 1-n son → $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ 1+2+3+4+5+...+n

1-(n+1) son → $\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$ 1+2+3+...+n+1

$\left(\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} - \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) = \frac{(n+1) \cdot (n+2 - n)}{2} = \frac{(n+1) \cdot 2}{2} = (n+1)$

Şekil 32. Ö₁ Kodlu Matematik Öğretmenin Son-Testte 7. Soruya Verdiği Cevap

Şekil 32’de Ö₁ kodlu matematik öğretmenin 1’den n’e kadar sayıların toplamının ispat edildiğini ve bu toplamın $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ ’ye eşit olduğunu belirttiği görülmektedir. Ayrıca matematik öğretmeni bu toplamın formal ispatını yaparken tümevarım yöntemini kullandığını belirtmiştir. Matematik öğretmenin ispatın tümevarım yoluyla yapılacağını bildiği ancak tümevarım yöntemini kullanırken eksik bilgilerle cevap verdiği görülmüştür. Matematik öğretmeni tümevarım yöntemini kullanırken 1’den (n+1)’e kadar olan toplamdan 1’den n’e kadar olan toplamı çıkarmış ve (n+1) bulmuştur. Aynı şekilde bu toplamların formülleri arasında bir fark ortaya koyarak bu farkı n+1 olarak belirtmiştir. Ancak tümevarım yönteminde n=1 için teorem doğrudur, n= k için $\frac{k \cdot (k+1)}{2}$ doğru olduğu kabul edilir ve n=k+1 için doğru olup olmadığı kontrol edilir. Matematik öğretmenin tümevarım yöntemini uygularken ön bilgilerinin eksik olduğu söylenebilir.

Yedinci soru için ön-testte matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının hiçbirinin ispatı verilen matematiksel ifadeyi 1'den n'e kadar olan ardışık sayıların toplamı olarak tespit edemediği görülmüştür. Hatta katılımcıların çoğunun şekiller hakkında hiçbir açıklamada bulunmadığı gözlenmiştir. Son-testte katılımcıların çoğunun istenilen matematiksel ifadeyi 1'den n'e kadar olan ardışık sayıların toplamı olarak doğru bir şekilde tespit ettiği görülmüştür.

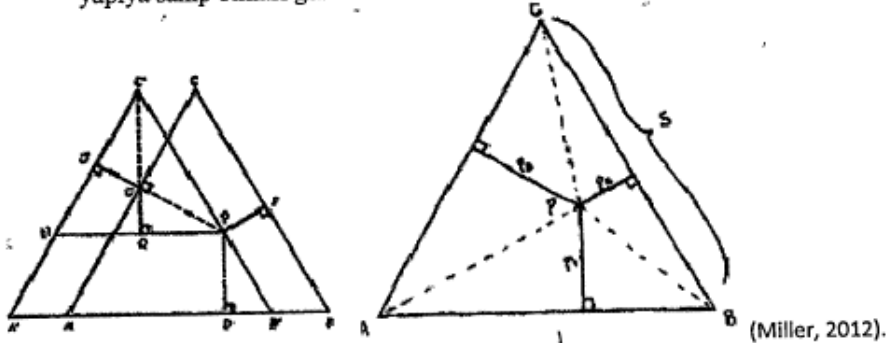
İspat beceri testinin sekizinci sorusunda iki tane şekil verilmiştir. Bu şekillerden hangisinin görsel ispat oluşturduğu ve şekillerin görsel ispat olabilmesi için nasıl bir yapıya sahip olması gerektiği sorulmuştur. Ayrıca görsel ispat oluşturmeyen şekil için görsel ispat olmama nedenlerinin açıklanması istenmiştir. İlgili soru aşağıda verilmiştir.

Sekizinci Soru: Aşağıda verilen şekiller (Miller, 2012) görsel ispat örnekleri oluşturur mu? Görsel ispat olmayanları nedenleriyle açıklayarak yorumlayınız. Görsel ispat olabilmesi için şeklin nasıl bir yapıya sahip olması gerektiğini belirtiniz.



Şekil 33'te ÖA_2 kodlu öğretmen adayının ön-testte verdiği 8. soruya verdiği cevap görülmektedir.

8. Aşağıda verilen şekiller görsel ispat örnekleri oluşturur mu? Görsel ispat olmayanları nedenleriyle açıklayarak yorumlayınız. Görsel ispat olabilmesi için şeklin nasıl bir yapıya sahip olması gerekir?



İlk şekel ispat oluşturur
şekil 'çok karışık.
Anlatık değil.

İspat oluşturur. Ama yanıyla sözel ifade
gerekli. Neyin ispatı yapıldığı belli değil.

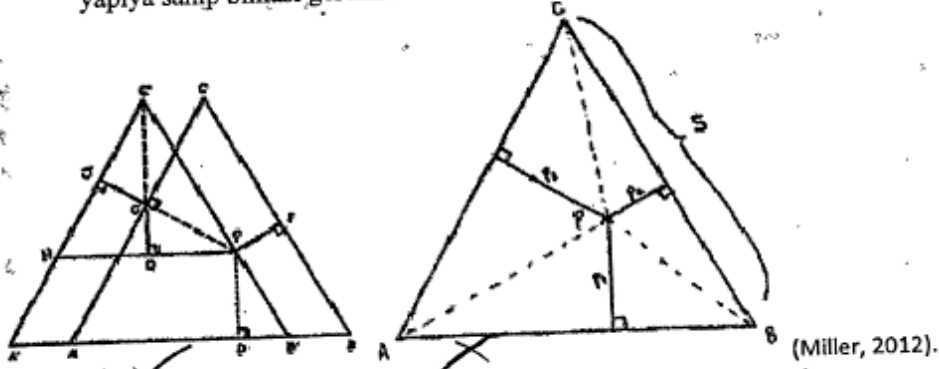
İspat için kullanılan şekil açık ve anlaşılır olmalı.

Şekil 33. ÖA₂ Kodlu Öğretmen Adayının Ön-Testte 8. Soruya Verdiği Cevap

Şekil 33'te ÖA₂ kodlu öğretmen adayının "İlk şekil ispat oluşturmaz. Şekil çok karışık ve anlamlı değil. İkinci şekil ispat oluşturur. Ama yanında sözel ifade gereklidir. Neyin ispatı yapıldığı belli değil. İspat için kullanılan şekil açık ve anlaşılır olmalıdır." şeklinde cevap verdiği görülmektedir. Öğretmen adayının görsel ispat olma şartı için şeklin açık ve anlaşılır olması gerektiğini düşündüğü görülmüştür. Bu açıklamanın bir şeklin görsel ispat olup olmadığını açıklamak için geçerli ve doğru bir yaklaşım olduğu söylenemez.

Şekil 34'te ÖA₂ kodlu öğretmen adayının son-testte 8. soruya verdiği cevap görülmektedir.

8. Aşağıda verilen şekiller görsel ispat örnekleri oluşturur mu? Görsel ispat olmayanları nedenleriyle açıklayarak yorumlayınız. Görsel ispat olabilmesi için şeklin nasıl bir yapıya sahip olması gerekir?



2. şekil görsel ispat olmaz. Şeklin görsel ispat olabilmesi için dinamik olması gerekir.

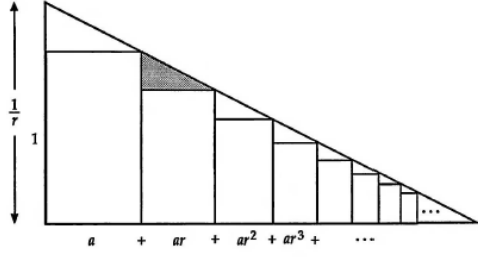
Şekil 34. ÖA₂Kodlu Öğretmen Adayının Son-Testte 8. Soruya Verdiği Cevap

Şekil 34'te ÖA₂ kodlu öğretmen adayının “2. şekil görsel ispat olmaz. Şeklin görsel ispat olabilmesi için dinamik olması gerekir.” şeklinde cevap verdiği görülmektedir. Öğretmen adayının şekillerin görsel ispat olabilmesi için dinamik olması gerektiğini düşündüğü görülmüştür.

Sekizinci soru için ön-testte katılımcıların tamamına yakınının ilk şeklin görsel ispat olup ikinci şeklin görsel ispat olmadığına dair doğru cevap veremediği ya soruyu boş bıraktığı ya da geçersiz/yanlış/eksik açıklamalarda bulunduğu söylenebilir. Son-testte katılımcıların genelinin ilk şeklin görsel ispat olup ikinci şeklin görsel ispat olmadığına dair doğru cevaplar verdikleri görülmüştür.

İspat beceri testinin onuncu sorusunda şekilde sözsüz ispatı verilen teoremi bulmaları ve bu ispat yapılırken hangi işlemlerden yararlandığını anlatmaları istenmiştir. İlgili soru aşağıda verilmiştir.

Onuncu Soru: Aşağıdaki şekilde (Nelsen, 1993) ispatı verilmiş olan teoremin hangi teorem olduğunu bulunuz. İspat yapılırken hangi işlemlerden faydalandığınızı belirtiniz.

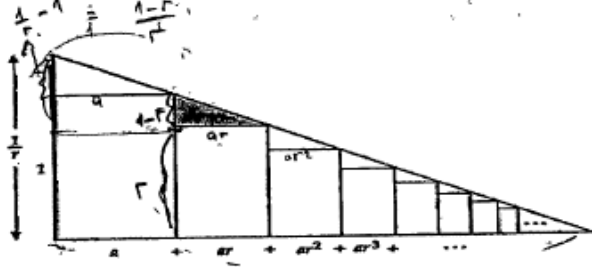


$$\frac{a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots}{1/r} = \frac{ar}{1-r}$$

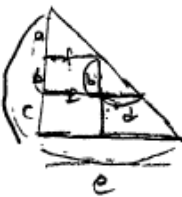
—J. H. Webb

Şekil 35'te Ö₂ kodlu matematik öğretmenin son-testte 10. soruya verdiği cevap görülmektedir. Bu matematik öğretmeni ön-testte soruyu boş bırakmıştır.

10. İspatı verilmiş teoremin hangi teorem olduğunu yazınız. İspat yapılırken hangi işlemlerden faydalandığınızı belirtiniz. Yapılanları özetleyiniz:



$r \rightarrow 1$ den küçük, seriler geometrik



$$\frac{a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots}{1/r} = \frac{ar}{1-r}$$

$$\frac{a+b+c}{e} = \frac{b}{d}$$

bu göre
—J. H. Webb

bazı ile

Şekil 35. Ö₂ Kodlu Matematik Öğretmenin Son-Testte 10. Soruya Verdiği Cevap

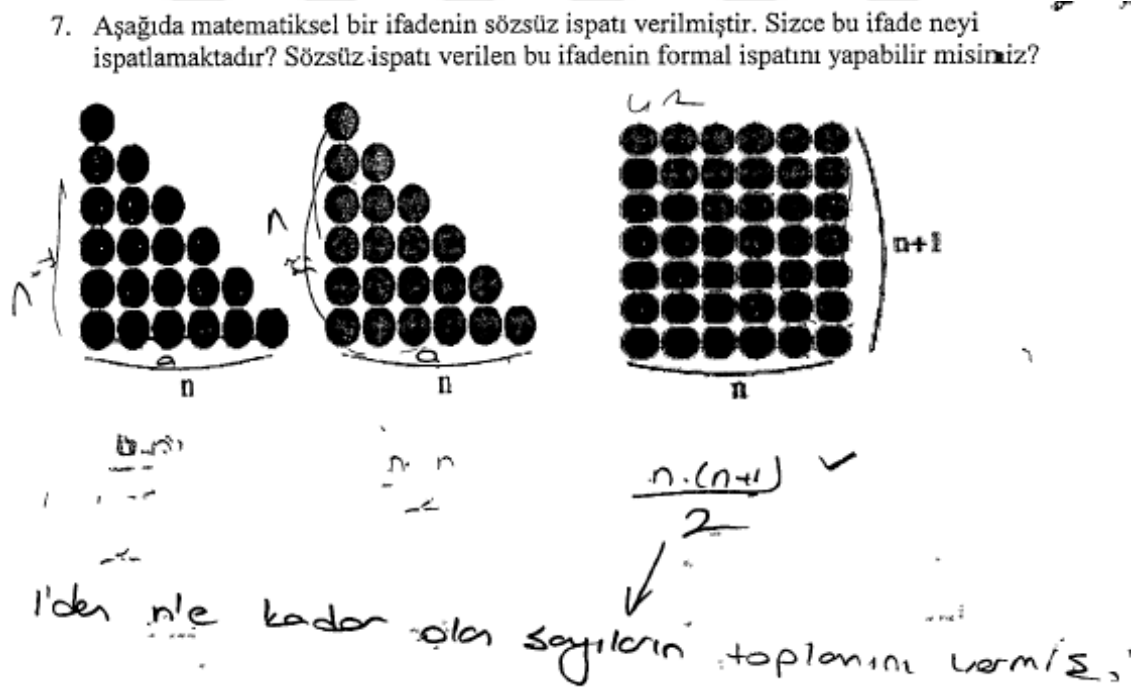
Şekil 35'te Ö₂ kodlu matematik öğretmenin ispatın geometrik seriler için yapıldığını ve verilen şekilde dik üçgenlerin dik kenarlarının üçgen benzerliğinden yararlanılarak oranlandığını belirttiği görülmektedir. Ayrıca matematik öğretmenin soruda verilen eşitliği kendi çizdiği üçgen üzerinden açıkladığı gözlenmiştir.

Onuncu soru için ön-testte katılımcıların tamamına yakınının şekilde verilen ispatın geometrik serilerin toplamının ispatı olduğuna dair doğru cevaplar veremedikleri hatta bazı katılımcıların ispatta yapılanlar hakkında hiçbir açıklamada bulunmadığı görülmüştür. Genel olarak matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının ön-testte ya soruyu boş bıraktığı ya da geçersiz/eksik açıklamalarda bulundukları söylenebilir. Son testte ise matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının genelinin ispatın geometrik seri toplamının ispatı olduğunu belirterek doğru cevap verdikleri görülmüştür.

Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının Son-Testte Verdikleri Cevapların Karşılaştırılmasına İlişkin Bulgular

Bu bölümde öğretmen ve öğretmen adaylarının nitel veri analizi için seçilen sorulardan 7 ve 8 numaralı sözsüz ispat sorularına son-testte verdikleri cevaplar karşılaştırmalı olarak ele alınmıştır.

Yedinci soru için $\ddot{O}A_5$ kodlu öğretmen adayı ile $\ddot{O}_4$ kodlu öğretmenin son-testte verdikleri cevaplar ele alınmıştır. Şekil 36'da $\ddot{O}A_5$ kodlu öğretmen adayının, Şekil 37'de $\ddot{O}_4$ kodlu öğretmenin verdiği cevaplar gösterilmiştir.

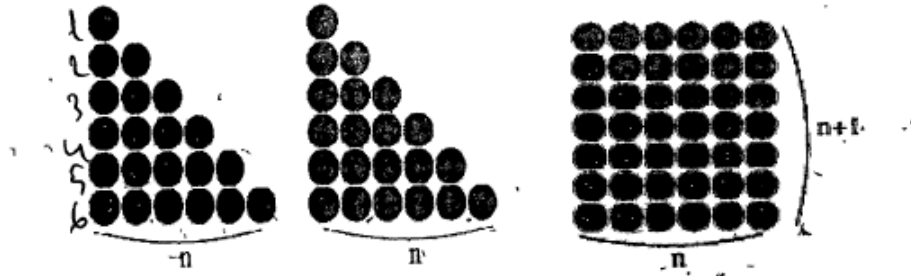


Şekil 36. $\ddot{O}A_5$ Kodlu Öğretmen Adayının Son-Testte Yedinci Soruya Verdiği Cevap

Şekil 36'ya göre $\ddot{O}A_5$ kodlu öğretmen adayının yedinci soruya " $\frac{n(n+1)}{2}$ olarak 1'den n'e kadar olan sayıların toplamını vermiş." şeklinde cevap verdiği görülmektedir.

Öğretmen adayı, şekilde verilen sözsüz ispatın 1’den n’ye kadar olan sayıların toplamını verdiğini ve bu toplamın $\frac{n.(n+1)}{2}$, ye eşit olduğunu belirtmiştir. Bu öğretmen adayı verilen ifadeyi doğru tespit etmiş ancak şekillerde yapılanları ve şekiller arası ilişkiyi tam olarak açıklamamıştır.

7. Aşağıda matematiksel bir ifadenin sözsüz ispatı verilmiştir. Sizce bu ifade neyi ispatlamaktadır? Sözsüz ispatı verilen bu ifadenin formal ispatını yapabilir misiniz?



Burada 1’den n’ye kadar olan sayıların toplamı ile ilgili teorem açıklanmıştır ve görsel bir ispat yapılmıştır. Birinci üçgende A tane ve ikinci üçgende de A tane yuvarlak şekil olduğundan toplamda 2A tane yuvarlak şekil olmuştur. İkinci şekilde ise n.(n+1) tane yuvarlak şekil bulunmaktadır. İkinci şekil bu iki üçgendeki yuvarlak şekillerin toplamı olduğundan $2A = n.(n+1)$ olur ve $A = \frac{n.(n+1)}{2}$ dir. Burada 1’den n’ye kadar olan sayıların toplamının $\frac{n.(n+1)}{2}$ olduğunu görsel ispat yapılmıştır.

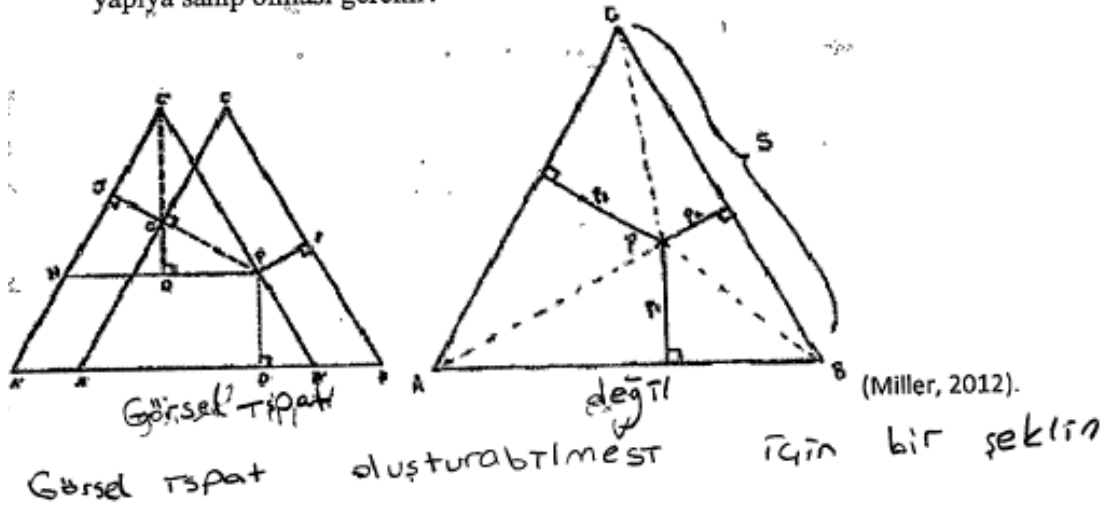
Şekil 37. Ö₄ Kodlu Matematik Öğretmeninin Son-Testte Yedinci Soruya Verdiği Cevap

Şekil 37’ye göre ise Ö₄ kodlu öğretmenin yedinci soruya “Burada 1’den n’ye kadar olan sayıların toplamı ile ilgili teorem açıklanmıştır ve görsel bir ispat yapılmıştır. Birinci üçgende A tane ve ikinci üçgende de A tane yuvarlak şekil olduğundan toplamda 2A tane yuvarlak şekil olmuştur. İkinci şekilde ise n.(n+1) tane yuvarlak şekil vardır ve ikinci şekil bu iki üçgendeki yuvarlak şekillerin toplamı olduğundan $2A = n.(n+1)$ olur ve $A = \frac{n.(n+1)}{2}$, dir. Burada 1’den n’ye kadar olan sayıların toplamının $\frac{n.(n+1)}{2}$ olduğunun görsel ispatı yapılmıştır.” şeklinde cevap verdiği görülmektedir. Öğretmen, ilk iki şekille son şekil arasındaki ilişkiyi doğru tespit etmiş, yuvarlak şekillerin sayısı ile son şeklin alanı arasındaki ilişkiyi ele alarak verilen ifadenin 1’den n’ye kadar olan sayıların toplamı olduğunu belirterek bu toplamın $\frac{n.(n+1)}{2}$, ye eşit olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Yedinci soru için $\ddot{O}A_5$ kodlu öğretmen adayı ile $\ddot{O}_4$ kodlu öğretmenin son-testte verdikleri cevaplar incelendiğinde $\ddot{O}_4$ kodlu öğretmenin, $\ddot{O}A_5$ kodlu öğretmen adayına göre daha açıklayıcı cevaplar verdiği ve şekiller arası ilişkiyi açıklarken yuvarlak şekillerin sayısı ile şekillerin alanı arasında doğru tespitler bulunabildiği görülmüştür.

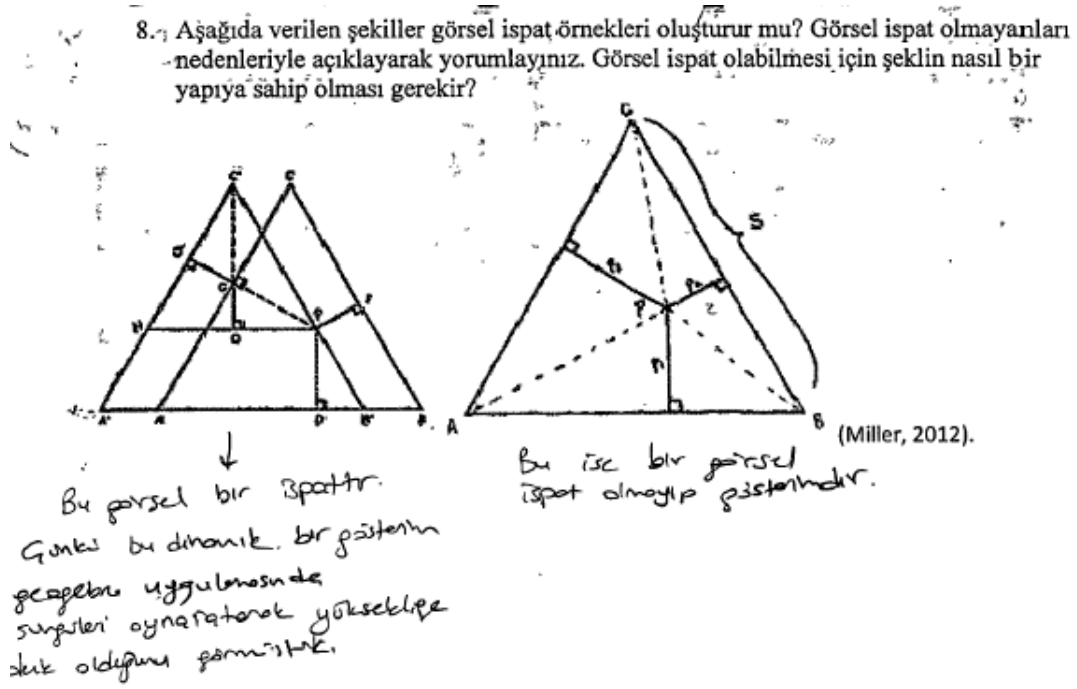
Sekizinci soru için $\ddot{O}A_3$ kodlu öğretmen adayı ile $\ddot{O}_1$ kodlu öğretmenin son-testte verdikleri cevaplar ele alınmıştır. Şekil 38’de $\ddot{O}A_3$ kodlu öğretmen adayının, Şekil 39’da $\ddot{O}_1$ kodlu öğretmenin verdikleri cevaplar gösterilmiştir.

8. Aşağıda verilen şekiller görsel ispat örnekleri oluşturur mu? Görsel ispat olmayanları nedenleriyle açıklayarak yorumlayınız. Görsel ispat olabilmesi için şeklin nasıl bir yapıya sahip olması gerekir?



Şekil 38. $\ddot{O}A_3$ Kodlu Öğretmen Adayının Son-Testte Sekizinci Soruya Verdiği Cevap

Şekil 38’e göre $\ddot{O}A_3$ kodlu öğretmen adayının sekizinci soruya “Görsel ispat oluşturabilmesi için bir şeklin...” şeklinde cevap verdiği görülmektedir. Öğretmen adayı birinci şeklin görsel ispat örneği olduğunu, ikinci şeklin ise görsel ispat örneği olmadığını belirtmiş ancak görsel ispat olma nedenlerini açıklayamamış, açıklamasını yarım bırakmıştır.



Şekil 39. Ö₁ Kodlu Matematik Öğretmeninin Son-Testte Sekizinci Soruya Verdiği Cevap

Şekil 39'a göre Ö₁ kodlu öğretmenin sekizinci soruya "Birinci şekil görsel ispattır. Çünkü bu dinamik bir şekilde gösterilerek GeoGebra uygulamasında sürgüleri oynatarak yüksekliğe denk olduğunu görmüştük. İkinci şekil ise görsel ispat olmayıp bir gösterimdir." şeklinde cevap verdiği görülmektedir. Öğretmen görsel ispat olan şekli doğru tespit etmiş ve görsel ispat olma nedenlerini GeoGebra eğitim sürecinde öğrendiği bilgilerle açıklamaya çalışmıştır.

Sekizinci soru için ÖA₃ kodlu öğretmen adayı ile Ö₁ kodlu öğretmenin son-testte verdikleri cevaplar incelendiğinde ÖA₃ kodlu öğretmen adayının görsel ispat olma nedenlerini açıklayamadığı, Ö₁ kodlu öğretmenin ise GeoGebra eğitim sürecinde öğrendiği bilgilerle açıklamaya çalıştığı görülmüştür.

Çalışmada hem matematik öğretmenlerinin hem öğretmen adaylarının GeoGebra ile verilen eğitim sonucunda ön-teste göre son-testte gelişme gösterdikleri ve son-test ölçümleri sonucunda daha yüksek puanlar aldıkları görülmüştür. Aynı örnekleme ait iki ortalamayı karşılaştıran bağımlı örneklem t-testinin non-parametrik karşılığı olan Wilcoxon İşaretli Sıralar testi sonuçlarına göre hem matematik öğretmenlerinin hem öğretmen adaylarının ön-test ve son-test puanları arasında son-test lehine istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık olması bu durumu desteklemektedir. Çalışmanın başında

uygulanan ön-testte öğretmen ve öğretmen adaylarının puanları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek amacıyla bağımsız iki örneklem t testinin non-parametrik karşılığı olan Mann Whitney U testi uygulanmış, matematik öğretmeni ile öğretmen adaylarının ön-test puanlarının birbirine denk oldukları ve benzer cevaplar verdikleri tespit edilmiştir. Çalışma sonunda uygulanan son-testte öğretmen ve öğretmen adaylarının puanları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek amacıyla bağımsız iki örneklem t testinin non-parametrik karşılığı olan Mann Whitney U testi uygulanmış ve matematik öğretmenlerinin öğretmen adaylarından daha yüksek puan aldıkları tespit edilmiştir. Çalışmadan elde edilen bulgulara göre GeoGebra eğitim sürecinin öğretmenleri daha çok geliştirdiği tespit edilmiştir.

GeoGebra Yazılımı ile Yapılan Etkinliklere Ait Görüşmelerin Bulguları

Bu bölümde GeoGebra eğitimi sürecine ilişkin gönüllü olarak seçilen 9 kişinin düşüncelerini alma amaçlı yapılan görüşme çözümlemelerine yer verilmiştir.

Üçgenin İç Açıları Toplamı 180° 'dir Birinci Etkinliğine İlişkin Bulgular

Bu etkinlik, üçgenlerin iç açıları toplamının 180° olduğunu GeoGebra dinamik geometri yazılımı üzerinde çoklu doğrular sayesinde doğru açı oluşturarak göstermeyi amaçlamaktadır (bkz. Ek 6). Katılımcılara derste yapılan bu etkinliği görüşme esnasında da hatırlamaları için etkinliğin belli aşamaları doküman olarak verilmiştir.

Katılımcılara bu etkinliğin sözsüz ispat olarak değerlendirilip değerlendirilemeyeceği ve verilen üçgen geniş açılı üçgen de olsa aynı amaca ulaşıp ulaşılamayacağı sorulmuştur. Matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının tamamının etkinliğin sözsüz ispat etkinliği olarak kabul ettikleri görülmüştür. Katılımcı görüşleri incelendiğinde hem matematik öğretmenlerinin hem öğretmen adaylarının “Tüm üçgen çeşitlerinde iç açıları toplamının 180° olduğu etkinlikte gözlemlenmektedir” kategorisine uygun olarak görüş bildirdiklerinden dolayı sözsüz ispat olarak değerlendirdikleri ve üçgen geniş açılı da olsa aynı amaca ulaşılabileceğini belirttikleri görülmüştür. Aşağıda katılımcılarla yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılar yapılarak bazı katılımcıların açıklamalarına yer verilmiştir.

ÖA₁ kodlu öğretmen adayı “Sözsüz ispattır. Çünkü üçgenin iç açıları toplamının nerden geldiği ve geniş açılı olursa B ya da D açısının nokta etrafında döndürüldüğünde

toplam değerin değişmeyeceği görülebilir. Bu açılar birleşerek doğru açığı oluşturacağı söyleyebilir. Geniş açılı da olsa iç açılar toplamı 180° şeklinde görüş bildirmiştir.

Ö₁ kodlu matematik öğretmeni “Sözsüz ispattır. Çünkü verilmek istenen özellik açıklanmadan bu durumun tüm değerler için değişmediği yazılımın dinamikliğinden yararlanılarak görülebilir. Ayrıca üçgende bir açı genişlediğinde diğer açılar daralacaktır yine doğru açığı elde edebiliriz.” şeklinde görüş bildirmiştir.

Üçgenin İç Açıları Toplamı 180° ’dir İkinci Etkinliğine İlişkin Bulgular

Bu etkinlik, üçgenlerin iç açıları toplamının 180° olduğunu GeoGebra dinamik geometri yazılımı üzerinde üçgenlerin döndürülme hareketiyle doğru açı oluşturarak göstermeyi amaçlayan ikinci bir etkinliktir (bkz. Ek 6). Katılımcılara derste yapılan bu etkinliği görüşme esnasında da hatırlamaları için etkinliğin belli aşamaları doküman olarak verilmiştir.

Katılımcılara bu etkinliğin sözsüz ispat olarak değerlendirilip değerlendirilemeyeceği sorulduğunda matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının tamamının etkinliğin sözsüz ispat etkinliği olarak kabul ettikleri görülmüştür.

Katılımcılara bu etkinliği derslerinde kullanmak isterlerse hangi amaçla kullanabilecekleri sorulmuştur. Katılımcı görüşleri incelendiğinde etkinliğin derslerde kullanımı “Konu öğretiminde anlamlandırmayı kolaylaştırmak için, Konuyu öğrettikten sonra pekiştirme yapmak için ve Ders sürecine aktif katılımı sağlamak için” olarak kategorilere ayrılmıştır. Tablo 9’da oluşturulan kategoriler görülmektedir.

Tablo 9. Etkinlikleri Derslerde Kullanma Amacı

Kategoriler	Katılımcı sayısı (%)
Konu öğretiminde anlamayı kolaylaştırmak için	3 (% 33)
Konuyu öğrettikten sonra pekiştirme yapmak için	2 (% 22)
Ders sürecine aktif katılımı sağlamak için	4 (% 45)

Tablo 9 incelendiğinde etkinliği derslerinde kullanmayı konu öğretiminde anlamayı kolaylaştırmak için tercih eden katılımcılardan birinin görüşü aşağıda doğrudan alıntı yapılarak verilmiştir.

ÖA₃ kodlu öğretmen adayı “Derslerimde kullanırım. Açıların farklı renklerde olması, sürgü ve döndürme özelliğinin kullanılıp etkinliğin hareketli olması sayesinde

konuyu anlatırken anlamada sorun yaşayan öğrenciler için bu etkinlikten faydalanırım.” şeklinde görüş bildirmiştir.

Etkinliği derslerinde kullanmayı konuyu öğrettikten sonra pekiştirme yapmak için kullanmayı tercih eden katılımcılardan birinin görüşü aşağıda doğrudan alıntı yapılarak verilmiştir.

ÖA₄ kodlu öğretmen adayı “Etkinliği derslerimde konuyu öğrettikten sonra daha iyi konunun kavranması için kullanırım.” şeklinde görüş bildirmiştir.

Etkinliği derslerinde kullanmayı ders sürecine aktif katılımı sağlamak için kullanmayı tercih eden katılımcılardan birinin görüşü aşağıda doğrudan alıntı yapılarak verilmiştir.

ÖA₂ kodlu öğretmen adayı “Evet. Çünkü öğrencilerin matematiğe karşı tutum ve onları da derse dahil ederek aktif katılımı sağlamak için dersimde kullanırım.” şeklinde görüş bildirmiştir.

Pisagor Teoremi Etkinliğine İlişkin Bulgular

Bu etkinlik dik üçgenin kenarlarından oluşturulan kareler yardımı ile teoremin bulunmasını amaçlamaktadır (bkz. Ek 6). Katılımcılarla derste yapılan bu etkinliği görüşme esnasında da hatırlamaları için etkinliğin belli aşamaları doküman olarak verilmiştir.

Katılımcılara GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan bu etkinliğin sözsüz ispat olarak değerlendirilip değerlendirilemeyeceği sorulmuş ve nedenleriyle açıklamaları istenmiştir. Matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının tamamının etkinliğin sözsüz ispat etkinliği olarak kabul ettikleri görülmüştür. Katılımcı görüşleri incelendiğinde Pisagor Teoremi etkinliğinin sözsüz ispat olarak değerlendirilme nedenleri “Kelime kullanılmadan yapılması ve Görsel yollarla yapılması” olarak kategorilere ayrılmıştır. Tablo 10’da oluşturulan kategoriler görülmektedir.

Tablo 10. Pisagor Teoremi Etkinliğinin Sözsüz İspat Olarak Değerlendirilme Nedenleri

Kategoriler	Katılımcı Sayısı (%)
Kelime kullanılmadan yapılması	2 (%22)
Görsel yollarla yapılması	7 (%78)

Tablo 10 incelendiğinde katılımcıların çoğunun etkinliklerin görsel yollarla yapıldığı için sözsüz ispat olduğunu düşündüğü görülmektedir. Katılımcıların akıllarına öncelikle görsel yollara dayalı açıklamalar geldiği anlaşılmaktadır.

GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan Pisagor Teoremi etkinliğinin sözsüz ispat olarak değerlendirilme nedenini kelime kullanılmadan yapılması olarak açıklayan katılımcılardan birinin görüşü aşağıda doğrudan alıntı yapılarak verilmiştir.

Ö₂ kodlu matematik öğretmeni “Evet, sözsüz ispattır. Çünkü kelimelerle açıklamaya gerek duyulmadan ispatlanmaya çalışılmıştır.” şeklinde görüş bildirmiştir.

GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan Pisagor Teoremi etkinliğinin sözsüz ispat olarak değerlendirilme nedenini görsel yollarla yapılması olarak açıklayan katılımcılardan birinin görüşü aşağıda doğrudan alıntı yapılarak verilmiştir.

ÖA₁ kodlu öğretmen adayı “Evet, öğrenciler farklı kenar uzunluğuna sahip kare geometrik şekillerini kullanarak görsel yollar ile ispat edebilirler.” şeklinde görüş bildirmiştir.

Viviani Teoremi Etkinliğine İlişkin Bulgular

Bu etkinlik Viviani Teoremine ilişkin GeoGebra dinamik geometri yazılımı üzerinde çemberler çizerek oluşturulan dikmelerin toplam uzunluğunun eşkenar üçgenin yüksekliğine eşit olduğunu göstermeyi amaçlamaktadır (bkz. Ek 6). Katılımcılara derste yapılan bu etkinliği görüşme esnasında da hatırlamaları için etkinliğin belli aşamaları doküman olarak verilmiştir. Derste yapılan etkinlik dışında Viviani Teoremi ile alakalı başka şekiller de doküman olarak verilmiştir.

Katılımcılara bu etkinliğin sözsüz ispat olarak değerlendirilip değerlendirilemeyeceği sorulduğunda matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının tamamının etkinliğin sözsüz ispat etkinliği olarak kabul ettikleri görülmüştür.

Katılımcılara derste yapılan Viviani Teoremine ilişkin etkinliğin sözsüz ispat yapma becerilerine etkisinin neler olduğu sorulmuştur. Katılımcı görüşleri incelendiğinde Viviani Teoremine ilişkin etkinliğin sözsüz ispat yapma becerilerine etkisi “Bilişsel beceriler ve Duyuşsal beceriler” olarak kategorilere ayrılmıştır. Katılımcıların görüşlerine göre bilişsel beceriler olarak “Farklı bakış açısı, Yaratıcı

düşünme becerisi, Muhakeme becerisi, Üst düzey bilişsel beceriler ve Görselleştirme” olarak belirlenmiştir. Duyuşsal beceriler ise “Severek öğrenme, Eğlenerek öğrenme, Ön yargıyı kırma” olarak belirlenmiştir. Tablo 11’de oluşturulan kategoriler görülmektedir.

Tablo 11. Viviani Teoremi Etkinliğinin Sözsüz İspat Yapma Becerilerine Etkisi

Kategoriler	Katılımcı Sayısı (%)
Bilişsel beceriler	6 (% 67)
Farklı bakış açısı	
Yaratıcı düşünme becerisi	
Muhakeme becerisi	
Üst düzey bilişsel beceriler	
Görselleştirme	
Duyuşsal beceriler	3 (% 33)
Severek öğrenme	
Eğlenerek öğrenme	
Ön yargıyı kırma	

Tablo 11 incelendiğinde verilen katılımcı görüşlerine göre Viviani Teoremi etkinliğinin sözsüz ispat yapma becerilerine etkisi hem bilişsel hem duyuşsal olarak açıklandığı görülmektedir. Ancak katılımcılar Viviani Teoremi etkinliğinin sözsüz ispat yapma becerilerine etkisini genel olarak bilişsel öğrenme açısından açıklamışlardır.

GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan bu etkinlik için sözsüz ispat yapma becerilerine etkisini bilişsel beceriler açısından açıklayan katılımcıların görüşleri aşağıda doğrudan alıntılar yapılarak verilmiştir.

Bilişsel beceriler kategorisinde yer alan farklı bakış açısı, yaratıcı düşünme becerileri ve muhakeme becerileri açısından görüşlerini açıklayan Ö₂ kodlu matematik öğretmeni “Farklı bakış açılarının gelişmesini sağlar. Yaratıcı düşünme becerileri kazanır. Problem çözümüne nasıl yaklaştığına dair muhakemesi artar.” şeklinde görüş bildirmiştir. Üst düzey bilişsel beceriler açısından görüşlerini açıklayan ÖA₂ kodlu öğretmen adayı “Analiz ve sentez beceriler gelişir.” şeklinde görüş bildirmiştir. Görselleştirme açısından görüşlerini açıklayan ÖA₄ kodlu öğretmen adayı “Öğrencilerin konuyu görselleştirerek de iyi kavramalarını sağlar.” şeklinde görüş bildirmiştir.

GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan bu etkinlik için sözsüz ispat yapma becerilerine etkisini duyuşsal beceriler açısından açıklayan katılımcıların görüşleri aşağıda doğrudan alıntılar yapılarak verilmiştir.

Duyuşsal beceri kategorisinde yer alan severek öğrenme açısından görüşlerini açıklayan Ö₁ kodlu matematik öğretmeni “Görsel yolla elde edildikleri için daha akılda

kalıcı ve öğrenmesi de daha kolay ve keyifli geliyor öğrenciye bu yüzden geometriyi severek öğreniyor.” şeklinde görüş bildirmiştir. Eğlenerek öğrenme açısından görüşlerini açıklayan ÖA₃ kodlu öğretmen adayı “Teknoloji ile arası iyi olan öğrenciler için eğlenerek öğrenme ortamı sağlayacağından ispat etme becerilerini olumlu anlamda etkileyecektir.” şeklinde görüş bildirmiştir. Ön yargıyı kırma açısından görüşlerini açıklayan Ö₃ kodlu matematik öğretmeni “Teoremlere karşı ön yargıyı kırar.” şeklinde görüş bildirmiştir.

Eşkenar Dörtgen Alanını Dikdörtgen Yardımıyla Bulma Etkinliğine İlişkin Bulgular

Bu etkinlik eşkenar dörtgen alanının, dikdörtgen alanı yardımı ile bulunmasına amaçlayan etkinliktir (bkz. Ek 6). Katılımcılarla derste yapılan bu etkinliği görüşme esnasında da hatırlamaları için etkinliğin belli aşamaları doküman olarak verilmiştir.

Katılımcılara bu etkinliğin sözsüz ispat olarak değerlendirilip değerlendirilemeyeceği sorulduğunda matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının tamamının etkinliğin sözsüz ispat etkinliği olarak kabul ettikleri görülmüştür.

Katılımcılara derste yapılan bu etkinliğin GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılmasının ispat yapma becerilerine etkilerinin ne olduğu sorulmuştur. Katılımcı görüşleri incelendiğinde verilen etkinliğin GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılmasının ispat yapma becerilerine etkisi “İlişki kurabilme, Akılda kalma, Anlamlandırma, Zihinde canlandırma ve Somutlaştırma” olarak kategorilere ayrılmıştır. Tablo 12’de oluşturulan kategoriler görülmektedir.

Tablo 12. Etkinliğin GeoGebra Yazılımında Yapılmasının İspat Yapma Becerilerine Etkisi

Kategoriler	Katılımcı Sayısı (%)
İlişki kurabilme	4 (%33)
Akılda kalma	3 (%25)
Anlamlandırma	2 (%17)
Zihinde canlandırma	2 (%17)
Somitlaştırma	1 (%8)

Tablo 12 incelendiğinde GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan etkinlik için ispat yapma becerilerine etkisini ilişki kurabilmek olarak açıklayan katılımcılardan birinin görüşü aşağıda doğrudan alıntı yapılarak verilmiştir.

Ö₄ kodlu matematik öğretmeni “Bu etkinlik dörtgenler arasındaki ilişkiyi kavramalarına katkı sağlar.” şeklinde görüş bildirmiştir. .

GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan etkinlik için ispat yapma becerilerine etkisini akılda kalma olarak açıklayan katılımcılardan birinin görüşü aşağıda doğrudan alıntı yapılarak verilmiştir.

ÖA₁ kodlu öğretmen adayı “Öğrencilerin şekillerin dönmesi ile hangi parçanın nereye gittiğini görmesini sağlar ve dörtgenler üzerinde bunların renkli bir şekilde yerleştirmesi ile akıllarında daha kalıcı bir yer edinir.” şeklinde görüş bildirmiştir.

GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan etkinlik için ispat yapma becerilerine etkisini anlamlandırma olarak açıklayan katılımcılardan birinin görüşü aşağıda doğrudan alıntı yapılarak verilmiştir.

Ö₂ kodlu matematik öğretmeni “Kağıt kalemle vakit kaybetmek yerine GeoGebrada hem dikkat çekici hem de pratik bir şekilde yapılmış. Formülün neden doğru olduğu anlaşılmış oluyor. Şekilleri farklı durumlarda yorumlama anlamlandırma kabiliyeti artırabilir.” şeklinde görüş bildirmiştir.

GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan etkinlik için ispat yapma becerilerine etkisini zihinde canlandırma olarak açıklayan katılımcılardan birinin görüşü aşağıda doğrudan alıntı yapılarak verilmiştir.

Ö₁ kodlu matematik öğretmeni “Geometrik şekilleri zihninde daha iyi canlandırarak ispat etmesine olanak sağlar.” şeklinde görüş bildirmiştir.

GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan etkinlik için ispat yapma becerilerine etkisini somutlaştırma olarak açıklayan katılımcının görüşü aşağıda doğrudan alıntı yapılarak verilmiştir.

ÖA₃ kodlu öğretmen adayı “Görsel ve hareketli olması sebebiyle olumlu anlamda beceriler kazandıracaktır. Soyut olan matematiği somutlaştırma becerisi kazandıracaktır.” şeklinde görüş bildirmiştir.

Aritmetik Ortalama ve Geometrik Ortalama Etkinliğine İlişkin Bulgular

Bu etkinlik, Aritmetik Ortalama ve Geometrik Ortalama arasındaki ilişkiyi keşfetmeye yönelik GeoGebra dinamik geometri yazılımı üzerinde çember üzerinde göstermeyi amaçlamaktadır (bkz. Ek 6). Katılımcılara derste yapılan bu etkinliği görüşme esnasında da hatırlamaları için etkinliğin belli aşamaları doküman olarak verilmiştir.

Katılımcılara bu etkinliğin sözsüz ispat olarak değerlendirilip değerlendirilemeyeceği sorulduğunda matematik öğretmenlerinden biri ve öğretmen adaylarından ikisi etkinliğin sözsüz ispat etkinliği olmadığını belirtmiştir. Diğer katılımcılar etkinliğin sözsüz ispat olarak kabul edilebileceğini belirtmiştir.

Katılımcı görüşleri incelendiğinde sözsüz ispat olarak kabul etmeyen katılımcıların “Etkinliğin her durumu sağlamaması ve Anlaşılır olmaması” kategorilerine göre görüş bildirdikleri görülmüştür. Aşağıda katılımcılarla yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılar yapılarak etkinliğin her durumu sağlamamasından dolayı sözsüz ispat olarak kabul edilemeyeceğini belirten katılımcının açıklamasına yer verilmiştir.

ÖA₂ kodlu öğretmen adayı “Aritmetik ortalama ile geometrik ortalama mutlak değerce karşılaştırmak için etkinlik geometrik şekillerle görselleştirmektedir. Fakat her bir durum için sağlandığını gösterir nitelikte olduğunu düşünmüyorum ispatın yetersiz olduğunu düşünüyorum. Görsel ispat değildir.” şeklinde görüş bildirmiştir.

Aşağıda katılımcılarla yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılar yapılarak etkinliğin anlaşılır olmamasından dolayı sözsüz ispat olarak kabul edilemeyeceğini belirten katılımcılardan birinin açıklamasına yer verilmiştir.

ÖA₄ kodlu öğretmen adayı “Etkinlikte EF ile DO bütün değerlerin eşit olması durumunda geometrik ortalama ile aritmetik ortalama eşit diğer durumlarda ise aritmetik ortalamanın geometrik ortalamadan büyük olduğu gösterilmiştir. Bence sözsüz ispat değil bakılınca direkt anlaşılıyor.” şeklinde görüş bildirmiştir.

Etkinliği sözsüz ispat olarak kabul eden katılımcıların ise “Dinamik olduğu için ve Görselleştirmeye dayalı olduğu için” kategorilerine göre görüş bildirdikleri görülmüştür. Aşağıda katılımcılarla yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılar yapılarak

dinamik olduğu için sözsüz ispat olarak kabul eden katılımcılardan birinin açıklamasına yer verilmiştir.

Ö₄ kodlu matematik öğretmeni “Sözsüz ispattır. Çünkü EF kenarının değişimi dinamik olarak görülmektedir.” şeklinde görüş bildirmiştir.

Aşağıda katılımcılarla yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılar yapılarak etkinliğin görselleştirmeye dayalı olduğu için sözsüz ispat olarak kabul eden katılımcılardan birinin açıklamasına yer verilmiştir.

ÖA₃ kodlu öğretmen adayı “Matematiksel ifade görselleştirerek açıklandığı için sözsüz ispattır.” şeklinde görüş bildirmiştir.

Katılımcılara görüşme esnasında bu etkinliği derslerde kullanmanın nasıl bir faydası olduğu sorulmuştur. Katılımcı görüşleri incelendiğinde bu etkinliği derslerde kullanmanın faydaları “Dikkat çekici, Dinamik, Pratik ve Hassas ölçüm/çizimlere uygun” olarak kategorilere ayrılmıştır. Tablo 13’te oluşturulan kategoriler görülmektedir.

Tablo 13. Etkinlikleri Derslerde Kullanmanın Faydaları

Kategoriler	Katılımcı Sayısı (%)
Dikkat çekici	2 (% 22)
Dinamik	3 (% 33)
Pratiklik	2 (% 22)
Hassas ölçüm/çizimlere uygun	2 (% 22)

Tablo 13 incelendiğinde etkinliği derslerde kullanmanın faydalarını dikkat çekici olarak açıklayan katılımcılardan birinin görüşü aşağıda doğrudan alıntı yapılarak verilmiştir.

ÖA₁ kodlu öğretmen adayı “Etkinliği uygularken hiç bu amaçla biteceğini ve geometrik ortalama ve aritmetik ortalama arasında böyle bir görsel ilişkinin olacağını tahmin edememiştim. Öğrencilerimin dikkatini çekmek adına faydalı bir etkinlik olduğunu düşünüyorum.” şeklinde görüş bildirmiştir.

Etkinliği derslerde kullanmanın faydasını dinamik olması olarak açıklayan katılımcılardan birinin görüşü aşağıda doğrudan alıntı yapılarak verilmiştir.

Ö₄ kodlu matematik öğretmeni “Bu etkinlik sayesinde öğrenciler geometrik ortalama ile aritmetik ortalama arasındaki ilişkiyi dinamik olarak fark eder.” şeklinde görüş bildirmiştir.

Etkinliği derslerde kullanmanın faydasını pratik olması olarak açıklayan katılımcılardan birinin görüşü aşağıda doğrudan alıntı yapılarak verilmiştir.

A₅ kodlu ğretmen adayı “Uzunluklar geometrik şekiller yardımıyla açıklanmış. Pratiklik kazanırlar. Kenar ve aı arasındaki bağlantılı değişimi görebilirler.” şeklinde görüş bildirmiştir.

Etkinliği derslerde kullanmanın faydasını hassas ölçüm/çizimlere uygun olarak açıklayan katılımcılardan birinin görüşü aşağıda doğrudan alıntılar yapılarak verilmiştir.

₁ kodlu matematik ğretmeni “Bir döndürme işlemini somut materyallerle gerçekleştirirken ellerinizle sürekli düzeltmeye çalışıyorsunuz ve çizimlerde mesafelerde kaydırmalar yapabiliyorsunuz. Bu yüzden yazılımlar ğrenci açısından daha net geliyor bana.Uzunlukların karşılaştırılması ve bağıntının bu şekilde oluşturulması açısından uygun olmuştur.” şeklinde görüş bildirmiştir.

Silindir ile Koni Hacmi Arasındaki İlişkiyi Gösteren Etkinliğe İlişkin Bulgular

Bu etkinlik GeoGebra dinamik geometri yazılımı üzerinde silindir ile koni hacmi arasındaki ilişkiyi su boşaltma hareketleriyle dinamik olarak göstermeyi amaçlamaktadır (bkz. Ek 6). Katılımcılara derste yapılan bu etkinliği görüşme esnasında da hatırlamaları için etkinliğin belli aşamaları doküman olarak verilmiştir.

Katılımcılara GeoGebra dinamik geometri yazılımı üzerinde yapılan bu etkinlikte ne amaçlandığını sorulmuştur. Katılımcı görüşleri incelendiğinde etkinliğin amacı “Silindir ve koni içerisindeki suyun birbirine boşaltılmasıyla koni-silindir hacim ilişkisi gösterilmiştir” olarak kategoriye ayrılmıştır. Aşağıda katılımcılarla yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılar yapılarak bazı katılımcıların açıklamalarına yer verilmiştir.

A₅ kodlu ğretmen adayı “Yarıçapları eşit olan silindir ve konilerin arasındaki hacim bağıntı problemi görsel bir şekilde gösterilmeye çalışılmıştır. Su dinamikleştirilmiş ve tamamı aktarılmış.” şeklinde görüş bildirmiştir.

₂ kodlu matematik ğretmeni “Yüksekliği a olan Silindir hacmi, yüksekliği 3a olan koni hacmine eşit olduğu ispatlanmış. Koni içindeki suyun tamamının silindiri doldurduğunu görüyoruz.” şeklinde görüş bildirmiştir.

Katılımcılara bu etkinliğin sözsüz ispat olarak değerlendirilip değerlendirilemeyeceği sorulduğunda ğretmen adaylarından bir kişi etkinliğin sözsüz

ispat etkinliği olmadığını belirtmiştir. Diğer katılımcıların tamamı etkinliğin sözsüz ispat olarak kabul edilebileceğini belirtmiştir.

Katılımcı görüşleri incelendiğinde sözsüz ispat olarak kabul etmeyen katılımcının “Etkinliğin gösterim olması” kategorisine göre görüş bildirdiği görölmüştür. Aşağıda katılımcılarla ile yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılar yapılarak etkinliğin gösterim olmasından dolayı sözsüz ispat olarak kabul edilemeyeceğini belirten katılımcının açıklamasına yer verilmiştir.

ÖA₅ kodlu öğretmen adayı “Bu etkinlik görsel bir problemdir görsel ispat değil gösterimdir.” şeklinde görüş bildirmiştir.

Aşağıda etkinliği sözsüz ispat olarak kabul eden katılımcılarla yapılan görüşmelerden doğrudan alıntılar yapılarak katılımcılardan birinin açıklamasına yer verilmiştir.

Ö₂ kodlu matematik öğretmeni “Evet. Görsel şekillerle soyut bir ilişkiyi somutlaştırılmış. Matematiksel bilgiyi doğrulamıştır.” şeklinde görüş bildirmiştir.

BÖLÜM V

TARTIŞMA

Bu çalışma, dinamik geometri yazılımı GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan bir eğitim programının matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat yapma becerileri üzerine etkililiğinin değerlendirilmesi ve katılımcıların bu eğitim süreci hakkındaki görüşlerinin ortaya konulması amacıyla gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın nicel ve nitel verilerinden elde edilen sonuçlar literatürdeki çalışmalar ile karşılaştırılmış, farklı ve benzer yönleri incelenmiştir.

Çalışmanın nicel verileri SPSS programında analiz edilmiştir. Çalışmada matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat yapma becerilerindeki değişimini tespit etmek için bağımlı örneklem t-testinin non-parametrik karşılığı olan Wilcoxon İşaretli Sıralar testi yapılmıştır. Bu analiz sonucunda hem öğretmenlerin ön-testleri ile son-testleri ($z = -4.235$; $p < .05$) hem öğretmen adaylarının ön-testleri ile son-testleri ($z = -2.226$; $p < .05$) arasında son-test lehine anlamlı bir farklılık tespit edilmiştir. Dinamik geometri yazılımı olan GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan eğitim programının matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat becerilerinin gelişimini sağladığı görülmüştür. Literatür incelendiğinde İpek'in (2010) çalışmasında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımları kullanarak geometrik ve cebirsel ispat gerçekleştirme süreçleri incelenmiştir. Mevcut çalışma sonucuna benzer olarak bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımları kullanarak ispat yapma süreçlerinin geliştiği görülmüştür.

Çalışmada ilk olarak matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının ön-test puanları arasında ardından son-test puanları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek amacıyla bağımsız iki örneklem t testinin non-parametrik karşılığı olan Mann Whitney U testi uygulanmıştır. Bu analiz sonucunda öğretmen ve öğretmen adaylarının ön-test puanları arasında ($z = -1.729$; $p > .05$) farklılık bulunmamışken son-test puanları arasında ($z = -3.849$; $p < .05$) öğretmenlerin lehine anlamlı bir farklılık elde edilmiştir. Dinamik geometri yazılımı olan GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan eğitim programının, öğretmenleri

daha çok geliştirdiği görülmüştür. Literatür incelendiğinde iki örnekleme aynı anda kullanan çalışmalara pek rastlanmamıştır.

Çalışmanın nitel verileri için incelenen 4, 7, 8 ve 10 numaralı sorularda katılımcıların ön-testte genel olarak eksik ve yetersiz cevaplar verdikleri görülmüştür. Katılımcıların bu sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde dördüncü ve yedinci soruda verilen şekiller arasında bağlantı kuramayıp şekilleri ayrı ayrı açıklamaya çalıştıkları, sekizinci ve onuncu soruda ise verilen şekillerde ne yapılmaya çalışıldığının anlaşılamamasından kaynaklı olarak soru ile alakasız cevapların verildiği görülmüştür. Katılımcıların ön-testte bu sorularda düşük puan alma nedenlerinin, şekilleri anlayamama ve şekiller arasında bağlantı kuramama olduğu tespit edilmiştir. Literatür incelendiğinde Demircioğlu ve Polat'ın (2016a) çalışmasında ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının sözsüz ispat sürecinde yaşadıkları zorluklarla ilgili görüşleri incelenmiştir. Bu çalışmanın sonucuna göre öğretmen adaylarının sözsüz ispata dair yaşadıkları zorlukların nedenlerinden bazıları, mevcut çalışma sonuçlarına benzer olarak şekilleri algılayamama/anlayamama ve şekiller arası mantık/bağlantı kuramama olarak açıklanmıştır. Ayrıca mevcut çalışmada katılımcıların ön-testte ispat becerilerini geliştirmeye yönelik aldıkları dersler ve içerikleri sorulmuş, katılımcıların doğrudan ispat, olmayana ergi ile ispat, tümevarım ile ispat, çelişki ile ispat yöntemlerinden bahsetmiş oldukları görülmüştür. Sözsüz ispattan hiçbir katılımcının bahsetmediği ve katılımcıların ön-testte sözsüz ispat sorularını yapmakta zorlandıkları görülmüştür. Bu sebeple katılımcıların ön-testte sözsüz ispat sorularını yapamama nedenleri, sözsüz ispatların ispat olarak kabul edilmesinde yaşanan tartışmalardan dolayı çok bilinen bir ispat yöntemi olmayışı ve bazı katılımcıların sözsüz ispatları yeni deneyimlemiş olmaları olarak tespit edilmiştir. Literatür incelendiğinde sözsüz ispatların gerçekten ispat olarak kabul edilip edilemeyeceği konusunda yaşanan tartışmalardan dolayı çok bilinen bir ispat yöntemi olmayışı Alsina ve Nelsen (2010), Gierdien (2007) ve Miller'ın (2012) çalışmalarında, sözsüz ispatların yeni deneyimlenmiş olması ile alakalı yaşanan zorluklar Demircioğlu ve Polat'ın (2016a) çalışmasında görülmüştür. Demircioğlu ve Polat'ın (2016a) çalışmasında ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının sözsüz ispat sürecinde yaşadıkları zorluklarla ilgili katılımcıların görüşleri alınmış ve sözsüz ispatların yeni bir deneyim olmasından dolayı öğretmen adaylarının sözsüz ispatları yaparken başta zorlandıkları bulgusuna ulaşılmıştır. Mevcut çalışmanın ön-testinde son olarak katılımcıların sözsüz ispatlara dair yapılan işlemleri açıklarken

çoğunlukla sayısal değerleri kullandıkları görülmüştür. Literatür incelendiğinde Polat'ın (2018) çalışmasında lise öğrencilerinin ispat yapabilme becerileri incelenmiş ve cebirsel eşitsizliklerin verildiği soruda mevcut çalışma sonucuna benzer olarak öğrencilerin sözsüz ispatı açıklamak için sayısal değerleri kullandıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Katılımcıların, nitel veri analizi için incelenen 4, 7, 8 ve 10 numaralı sorularda ön-teste göre son-testte genel olarak yeterli ve doğru cevap verdikleri görülmüştür. Ayrıca katılımcıların son-testteki bu sorularda, testin cebirsel ispat sorularına göre daha yüksek puan aldıkları görülmüştür. Bu sebeple katılımcıların GeoGebra eğitim süreci sonunda cebirsel ispatı istenen sorulara göre sözsüz ispatı verilen sorularda daha başarılı oldukları tespit edilmiştir. Bu durumun nedeni olarak katılımcıların GeoGebra ile verilen eğitimle sözsüz ispatları cebirsel ispatlara göre daha kolay algılamaları ve yorumlamada daha başarılı oldukları görülmüştür. Literatür incelendiğinde bu sonuçlara benzer olarak Bayer'in (2009) çalışmasında sözsüz ispatların cebirsel ispatlara göre daha kolay anlaşıldığı ve bu yönüyle daha üstün olduğu belirtilmiştir. Tekin ve Konyalıoğlu'nun (2010) çalışmasında trigonometrik fonksiyonların toplam-fark formüllerinin ortaöğretim düzeyinde görselleştirilmesi incelenmiş, cebirsel ispat ile görsel ispatları sırasıyla yapılmış ve ispattaki formüllerin özünü oluşturan ilişkilerin nasıl oluştuğunun sözsüz ispatlarda daha kalıcı olarak gösterilmesinden dolayı sözsüz ispatların cebirsel ispatlardan üstün olduğu tespit edilmiştir.

Katılımcıların ispat beceri testine verdikleri cevaplar incelendiğinde ispatı; teoremlerin doğruluğunu veya yanlışlığını göstermek, belge gösterip olayları mantıksal olarak açıklamak, kabul ettirmek, bilinen teorem/önermelerden yola çıkarak teoremlerin neden doğru olduğunu göstermek olarak literatürde yapılan çalışmalara benzer bir şekilde tanımladıkları tespit edilmiştir. Literatür incelendiğinde ispat kavramını bir ifadenin doğruluğunun ya da yanlışlığının gösterilmesi olarak (Altıparmak ve Öziş, 2005; Dede ve Karakuş, 2014; Kaplan ve diğerleri, 2016), mantıksal açıklama yapmak olarak (Kaplan ve diğerleri, 2016), kabul ettirmek veya ikna edici bir kavram olarak (Doruk ve Kaplan, 2017), tanım/teorem/önermelerden yola çıkılarak teoremlerin neden doğru olduğunun gösterilmesi olarak (Dede ve Karakuş, 2014; Doruk ve Kaplan, 2017) ele alan çalışmalar bulunmuştur. Katılımcıların görsel ispatı; diyagram kullanarak ispat yapmak, geometrik cisimlerle ispat yapmak, resimler kullanarak ispat yapmak, göze hitap eden şekillerle veya formül/kural ihtiyacı olmadan sembollerle ispat yapmak olarak tanımladıkları görülmüştür. Literatürde görsel ispat kavramını diyagramlara

dayalı olarak (Alsina ve Nelsen, 2010; Bardelle, 2009), geometrik cisimlere dayalı olarak (Gierdien, 2007), resimlerle yapılan bir ispat olarak tanımlayan (Alsina ve Nelsen, 2010), hiçbir kelime formül içermeden şekillerle veya sembollerle yapılan ispat olarak (Bardelle, 2009; Gierdien, 2007) ele alan çalışmalar bulunmuştur. Literatürde verilen tanımlar incelendiğinde bu tanımlar ile katılımcıların genel olarak testlerde verdikleri cevapların benzerlik gösterdiği görülmüştür.

Katılımcıların, son-testin dördüncü sorusunda dik üçgenlerin ötelenmesi sonucu diğer şeklin oluştuğunu belirterek şekiller arasındaki ilişkilendirmeyi doğru yaptıkları görülmüştür. Bu ilişkilendirmeler neticesinde katılımcıların, dik üçgenlerin yer değişmesiyle oluşan şekillerde Pisagor Teoreminin ispatının yapıldığını tespit ettikleri görülmüştür. Ayrıca diğer test sorularına göre katılımcıların en fazla dördüncü soruya doğru cevap verdikleri görülmüştür. Bu durumun nedeni, katılımcıların ortaokul müfredatında Pisagor Teoreminin ilk öğretilmesinden itibaren sık sık karşılaşmalarından dolayı küçük yaşlardan beri hatırlamalarının kolay olması olarak tespit edilmiştir. Literatür incelendiğinde Gelişen'in (2017) çalışmasında 9. sınıf öğrencilerinin üçgenler konusu için origami ve sözsüz ispatların kullanılmasıyla ilgili öğretim deneyi gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada öğrencilerin günlüklerinden yansıyan alıntılar ve yapılan görüşmeler sonucunda mevcut çalışma sonucuna benzer olarak yapılan etkinliklerden en çok hatırlanan etkinliğin Pisagor Teoremi olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bardelle'nin (2009) çalışmasında ikinci ve üçüncü sınıf üniversite matematik öğrencilerinin görsel ispatları kullanmada yaşadıkları zorluklar incelenmiş ve öğrencilere Pisagor Teoremi ile geometrik serilerin görsel ispatları verilmiştir. Mevcut çalışma sonucuna benzer olarak bu çalışmada öğrencilerin Pisagor Teoremi ile daha çok karşılaşmalarından dolayı Pisagor Teoreminin daha bilinen bir ispat olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Katılımcıların, son-testin yedinci sorusunda ikizkenar dik üçgen şeklindeki topların dikdörtgen şeklini oluşturduğunu fark etmeleri ile dikdörtgen alanından tamsayılar toplamına ulaştıkları görülmüştür. Literatür incelendiğinde Ülker'in (2018) çalışmasında ortaokul öğrencilerinin gerçekçi öğretim ortamında sözsüz ispat kullanımı incelenmiştir. Mevcut çalışma sonucuna benzer olarak bu çalışmada sözsüz ispatların kullanıldığı öğretim ortamında öğrencilerin tamsayılar toplamına dair yapılan etkinlikte alanlar arası ilişkilendirmeler yaparak tamsayılar toplamına ulaştıkları sonucu bulunmuştur.

Katılımcıların, son-testin sekizinci sorusunda görsel olarak değişimin görüldüğü şekil için sözsüz ispatın varlığından söz edilebileceğini belirtmeleri ile sözsüz ispat olma nedenlerini doğru açıkladıkları görülmüştür. Miller'ın (2012) çalışmasından referans alınan bu şekiller için Miller'ın, sözsüz ispatlarda hiçbir açıklamaya ihtiyaç duyulmadan şekiller üzerinde yapılanların okuyucu tarafından anlaşılabilirliğini belirttiği görülmüş ve bu araştırma mevcut çalışma sonucunu destekleyici nitelikte olduğu görülmüştür.

İspat beceri testindeki dördüncü ve sekizinci soruda verilen sözsüz ispatlar, geometri alanında verilebilecek olan sözsüz ispat örnekleridir. Yedinci ve onuncu soruda verilen sözsüz ispatlar ise tamsayılara dayalı olarak verilen sözsüz ispat örnekleridir. Çalışmada yer alan sözsüz ispat örnekleri daha çok geometri ve tamsayılara dayalı olarak verilen örneklerden oluşmuştur. Literatür incelendiğinde bu sonuca benzer olarak Miller'ın (2012) çalışmasında diğer alanlara göre doğası gereği kolayca sözsüz ispatlara yer verilebilen geometri ile en güzel sözsüz ispatların yapıldığı, sembollerle kolayca temsil edilebilen tamsayı ilişkilerinde verilen sözsüz ispat örneklerinin daha çok olduğu belirtilmiştir.

Yarı yapılandırılmış görüşmeler incelendiğinde katılımcıların GeoGebra ile sözsüz ispat becerilerini geliştirme eğitimi için görüşlerinin genel olarak olumlu olduğu görülmüştür. Yapılan görüşmelerde katılımcıların GeoGebra dinamik geometri programında yapılan etkinliklerin derslerde kullanılmasının dikkat çekici, dinamik, pratik ve hassas ölçüm/çizimlere uygun olduğunu belirttikleri tespit edilmiştir. Literatürde GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan etkinliklerin derslerde kullanılmasının dikkat çekici (Çörekçioğlu, 2019; Demirbilek ve Özkale, 2014; Er ve Sağlam Kaya, 2017; Gökçe, Aydoğan Yenmez ve Özpınar, 2016; İpek, 2010; Kutluca ve Zengin, 2011; Tatar ve diğerleri, 2011, 2014; Tüzer Ünsal ve Akay, 2020; Zengin ve Tatar, 2014), dinamik (Baydaş, 2010; Çetin, Erdoğan ve Yazlık, 2015; Çörekçioğlu, 2019; Gökçe ve diğerleri, 2016; Kabaca ve diğerleri, 2010; Kutluca ve Zengin, 2011; Tatar ve diğerleri, 2014; Zengin, 2017; Zengin ve Tatar, 2014), pratik (Çörekçioğlu, 2019; İpek, 2010; Tatar ve diğerleri, 2011; Tüzer Ünsal ve Akay, 2020) ve hassas ölçüm/karışık çizimlere uygun (Çetin ve diğerleri, 2015; Çiftci ve Tatar, 2014; Kabaca ve diğerleri, 2010; Tatar ve diğerleri, 2011) olduğu sonucuna ulaşan çalışmalar bulunmuştur. Literatürdeki bu araştırmaların, mevcut çalışma sonuçlarını destekleyici nitelikte olduğu görülmüştür. Er ve Sağlam Kaya'nın (2017) çalışmasında ortaöğretim

matematik öğretmen adaylarının GeoGebra ortamında materyal hazırlama hakkındaki görüşleri incelenmiş ve çalışma sonucunda bu materyallerin öğretmen adaylarının dikkatini çektiği vurgulanmıştır. Baydaş'ın (2010) çalışmasında öğretim elemanları ile öğretmen adaylarının matematik öğretiminde GeoGebra kullanımı hakkındaki görüşleri incelenmiş ve bu görüşler doğrultusunda GeoGebra'nın matematik öğretimine katkılarından birinin GeoGebra'nın dinamik yapıda olması bulgusuna ulaşılmıştır. Tatar ve diğerlerinin (2011) çalışmasında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının GeoGebra yazılımıyla oluşturdukları materyaller ile dinamik matematik yazılımı hakkındaki görüşleri incelenmiş ve bu görüşler doğrultusunda GeoGebra yazılımının olumlu özelliklerinden birinin pratiklik sağlamak olduğu belirtilmiştir. Çetin ve diğerlerinin (2015) çalışmasında 5E modeline dayanan GeoGebra yazılımıyla hazırlanmış çalışma yaprakları ile ders kitaplarındaki kâğıt kesme ve materyal destekli etkinlikler yardımı ile sekizinci sınıf öğrencilerinin matematik dersindeki dönüşüm geometrisi konusundaki öğrenmeleri karşılaştırılarak incelenmiştir. Bu çalışmanın sonucunda dönüşüm geometrisi gibi hassas çizim gerektiren konularda öteleme-dönme gibi şekillerin hareketi ve sürüklenmesi ile yeni şeklin oluşturulmasının GeoGebra yazılımı ile daha kolay olduğu görülmüştür. Çiftçi ve Tatar'ın (2014) çalışmasında pergel-cetvel ile dinamik yazılım olan GeoGebra yazılımının kullanımının başarıya etkisi karşılaştırılmak istenmiş ve pergel-cetvel gibi somut materyallere göre dinamik yazılımların karışık çizimlerde avantajlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Yapılan görüşmelerde katılımcıların, GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan etkinliklerde ispatların gözlemlenebildiğini belirtmişlerdir. Literatür incelendiğinde Yıldız, Baltacı ve Aktümen'in (2012) çalışmasında öğretmen adaylarının GeoGebra yazılımını kullanarak üç boyutlu cisim problemlerini nasıl çözdükleri süreç olarak incelenmiş, istenilen açı değeri yaklaşık olarak bulunabilmiş ve GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan değişikliklerin program üzerinde gözlenebildiği sonucuna ulaşılmıştır. Baydaş'ın (2010) çalışmasında öğretim elemanlarının ve öğretmen adaylarının matematik öğretiminde GeoGebra kullanımı üzerine görüşleri incelenmiş ve bu çalışmaya göre GeoGebra yazılımı üzerinde verilen eşitliklerin grafik üzerindeki değişiminin direkt görüldüğü sonucuna ulaşılmıştır. Bu araştırmaların, mevcut çalışma sonucunu destekleyici nitelikte olduğu görülmüştür.

Yapılan görüşmelerde katılımcılar GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan etkinliklerin konu öğretiminde anlamayı kolaylaştırmak, konuyu öğrettikten

sonra pekiştirme yapmak ve öğrencilerin ders sürecine aktif katılımını sağlamak için kullanılabileceğini belirttikleri görülmüştür. Literatür incelendiğinde GeoGebra dinamik geometri yazılımının konu öğretiminde anlamayı kolaylaştırdığı (Aktümen ve diğerleri, 2011; Baydaş, 2010; Çetin, 2018; Çiftci ve Tatar, 2014; Çörekçioğlu, 2019; Er ve Sağlam Kaya, 2017; Tatar ve diğerleri, 2011, 2014; Tüzer Ünsal ve Akay, 2020; Zengin, 2017; Zengin ve diğerleri, 2013; Zengin ve Tatar, 2014), pekiştirme amaçlı kullanılabileceği (Baydaş, 2010; Çetin, 2018) ve aktif katılımı sağladığı (Balcı Şeker ve Erdoğan, 2017; Çetin, 2018; Çetin ve diğerleri, 2015; Er ve Sağlam Kaya, 2017; Tatar ve diğerleri, 2011; Tüzer Ünsal ve Akay, 2020) sonucuna ulaşan çalışmalar bulunmuştur. Literatürdeki bu araştırmaların, çalışmamızın sonuçlarını destekleyici nitelikte olduğu görülmüştür. Tüzer Ünsal ve Akay'ın (2020) çalışmasında matematik derslerinde GeoGebra dinamik yazılımının kullanımının, 10. sınıf öğrencilerinin akademik başarılarını, matematik kaygılarını ve öğretim teknolojilerinin kullanımına yönelik tutumlarını nasıl etkilediği incelenmiş ve GeoGebra dinamik yazılımının kullanıldığı deney grubu öğrencilerinin görüşleri alınmıştır. Bu çalışmaya göre GeoGebra dinamik yazılımın öğrenmeyi kolaylaştırdığı ve aktif öğrenme sağladığı bulgusuna ulaşılmıştır. Çetin'in (2018) çalışmasında ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin dinamik geometri yazılımı GeoGebra ile dönüşüm geometrisi öğrenim süreçleri incelenmiş ve çalışma sonucuna göre öğrencilerin GeoGebra üzerinde yapılan matematiksel işlemlerin kontrol amaçlı kullanılabileceğini, GeoGebra'nın konuları pekiştirmede yardımcı olabileceğini belirttikleri görülmüştür. Çetin, Erdoğan ve Yazlık'ın (2015) çalışmasında GeoGebra ile öğretimin sekizinci sınıf öğrencilerinin dönüşüm geometrisi konusundaki başarılarına etkisi incelenmiş ve programın öğrenciye yaparak yaşayarak öğrenmesine fırsat sunarak öğrencinin aktif olmasına yardımcı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Yapılan görüşmelerde katılımcılar GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan etkinliklerin sözsüz ispat yapma becerilerine bilişsel ve duyuşsal olarak etkisinin olduğunu düşündükleri görülmüştür. Literatür incelendiğinde bu sonuca benzer olarak Tutkun ve diğerlerinin (2011) çalışmasında görselleştirmenin matematik eğitiminde kullanılmasının öğrencilerin bilişsel ve duyuşsal becerilerinin olumlu etkilenmesini sağlayacağı belirtilmiştir. Bilişsel becerilerden farklı bakış açısı (Gökçe ve diğerleri, 2016; Kepçeoğlu ve Yavuz, 2017; Ogan ve İbibo, 2018), yaratıcı düşünme becerisi (Çetin, 2018; Ogan ve İbibo, 2018), muhakeme etme (Tutkun ve diğerleri,

2011) ve görselleştirme (Aktümen ve diğerleri, 2011; Baydaş, 2010; Çörekçioğlu, 2019; Gökçe ve diğerleri, 2016; İpek, 2010; Selçik ve Bilgici, 2011; Tatar ve diğerleri, 2011, 2014; Yıldız ve diğerleri, 2012; Zengin, 2017; Zengin ve diğerleri, 2013; Zengin ve Tatar, 2014) bulgularını destekleyen çalışmalar bulunmaktadır. Duyuşsal becerilerden severek öğrenme (Demirbilek ve Özkale, 2014), eğlenerek öğrenme (Çörekçioğlu, 2019; Demirbilek ve Özkale, 2014; Er ve Sağlam Kaya, 2017; Kutluca ve Zengin, 2011; Tatar ve diğerleri, 2011; Tüzer Ünsal ve Akay, 2020; Zengin ve Tatar, 2014) ve ön yargıyı kırma (Baydaş, 2010) bulgularını destekleyen çalışmalar bulunmuştur. Ogan ve İbibo'nun (2018) çalışmasında GeoGebra yazılımının öğrencilerin matematik dünyasının daha geniş bir pencereden bakarak farklı bakış açılarını oluşturmada ve daha yaratıcı düşüncelerini sağlamada önemli olduğu için matematik alanında yaygınlaştırılması gerektiği belirtilmiştir. Tutkun ve diğerlerinin (2011) çalışmasında matematik öğretiminde matematik yazılımlarının etkililiği incelenmiş ve çalışmanın sonunda matematik yazılımlarının kullanımının bir zorunluk haline geldiği, bu zorunluluğu gerektiren sebeplerden birinin bu yazılımların öğrencinin muhakeme becerisini geliştirmiş olmasının açıklandığı görülmüştür. Selçik ve Bilgici'nin (2011) çalışmasında GeoGebra yazılımının öğrenci başarısına etkisi incelenmiş ve bu sebeple bir sınıfta bilgisayar destekli geometri öğretimi, diğer sınıfta bilgisayar kullanılmadan geometri öğretimi yapılmıştır. Bilgisayar destekli öğretim yapılan sınıfta GeoGebra yazılımı kullanılmış ve bu yazılımın öğrenci açısından soyut kavramları görselleştirdiği için temel kavramların öğrenilmesine yardımcı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Demirbilek ve Özkale'nin (2014) çalışmasında GeoGebra yazılımının ön lisans düzeyindeki öğrencilerin parabol konusundaki başarılarına ve matematik dersine karşı tutumlarına etkisi ile GeoGebra hakkındaki görüşleri incelenmiştir. Bu çalışmaya göre GeoGebra yazılımının kullanıldığı deney grubunda programa karşı pozitif tutumlarda bulunulmuştur. Bu pozitif tutumlardan bazıları, programın matematiği sevdirci olması ve eğlenceli olması olarak belirtilmiştir. Baydaş'ın (2010) çalışmasında incelenen öğretim elemanları ve öğretmen adaylarının GeoGebra kullanımı hakkındaki görüşlerine göre GeoGebra'nın eğlenceli yapısından dolayı matematiğe karşı ön yargıların azalabileceği bulgusuna ulaşılmıştır.

Yapılan görüşmelerde katılımcılar GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan etkinliklerin sözsüz ispat olma nedenlerini etkinliğin kelime kullanılmadan yapılması ve etkinliğin görsel yollarla yapılması olarak açıkladıkları görülmüştür.

Literatürde sözsüz ispatın kelime kullanılmadan yapılmasını (Bardelle, 2009; Bell, 2011; Gierdien, 2007) ve sözsüz ispatın görsel yollarla yapılmasını (Alsina ve Nelsen, 2010; Bardelle, 2009; Gierdien, 2007; Yiğit Koyunkaya, 2020) destekleyen çalışmalar bulunmuştur.

Yapılan görüşmelerde katılımcılar GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan etkinliklerin ilişki kurabilmeyi, akılda kalmayı, anlamlandırma yaparak anlamlı öğrenmeyi, zihinde canlandırma yapmayı ve somutlaştırma yapmayı sağlayarak ispat yapma becerilerine etkisinin olduğunu belirttikleri görülmüştür. Literatürde ilişki kurabilmeyi (Baydaş, 2010; Çetin, 2018; Er ve Sağlam Kaya, 2017; İpek, 2010; Kabaca ve diğerleri, 2010; Zengin, 2017), akılda kalmayı (Çetin, 2018; Çörekçioğlu, 2019; Er ve Sağlam Kaya, 2017; Genç ve Öksüz, 2016; Kutluca ve Zengin, 2011; Selçik ve Bilgici, 2011; Tatar ve diğerleri, 2011, 2014; Zengin, 2017; Zengin ve diğerleri, 2013; Zengin ve Tatar, 2014), anlamlandırma ile anlamlı öğrenmeyi (Çetin, 2018; Çetin ve diğerleri, 2015; Gökçe ve diğerleri, 2016; İpek, 2010; Tüzer Ünsal ve Akay, 2020; Zengin, 2017) ve somutlaştırma yapmayı (Baydaş, 2010; Çörekçioğlu, 2019; İpek, 2010; Tatar ve diğerleri, 2011, 2014; Zengin, 2017; Zengin ve diğerleri, 2013; Zengin ve Tatar, 2014) sonucuna ulaşan çalışmalar bulunmuştur. Literatürdeki bu araştırmaların, mevcut çalışma sonuçlarını destekleyici nitelikte olduğu görülmüştür. Kabaca ve diğerlerinin (2010) çalışmasında matematik öğretmenleri verilen çalıştay kapsamında GeoGebra ile tanıştırılmış ve öğretmenlerin GeoGebra hakkındaki görüşleri alınmıştır. Bu çalışmada matematik öğretmenleri, GeoGebra yazılımının cebir ile geometri arasındaki ilişkileri dinamik olarak kurabildiği için kullanımının tercih edilebileceğini belirttikleri görülmüştür. Genç ve Öksüz'ün (2016) çalışmasında çokgenler ve dörtgenler konusunun GeoGebra yazılımı ile beşinci sınıf öğrencilerine öğretimi sonucunda başarıya ve kalıcılığa etkisi incelenmiştir. Bu çalışmada öğrencilere uygulanan kalıcılık testi sonucunda GeoGebra yazılımının uygulandığı deney grubunun lehine anlamlı bir farklılık elde edildiği ve GeoGebra yazılımı ile öğretilen bilgilen akılda daha kalıcı olduğu görülmüştür. Gökçe ve diğerlerinin (2016) çalışmasında matematik öğretmenlerine GeoGebra kullanılarak uygulanan çalışma yapraklarının uygulanabilirliği ve matematik öğretmenlerinin görüşleri incelenmiştir. Bu çalışmada öğretmenlerin GeoGebra ile çalışma yapraklarının uygulanması sonucunda tahtada ve sözel açıklamakta zorlanılan kavramlarda GeoGebra ile anlamlandırılabilceği sonucuna ulaşıldığı görülmüştür. Tatar ve diğerlerinin (2011) çalışmasında ilköğretim

matematik öğretmeni adaylarının GeoGebra ile oluşturdukları materyaller ve dinamik matematik yazılımı hakkındaki görüşleri incelenmiştir. Bu çalışmaya göre öğretmen adaylarının çoğunun bilgisayar destekli oluşturulan dinamik öğrenme ortamlarının öğrencilerin matematiği öğrenmelerine olumlu katkı sağlayacağını düşündükleri ve bu katkılardan biri somutlaştırma olduğu görülmüştür.



BÖLÜM VI

SONUÇ VE ÖNERİLER

Araştırmadan elde edilen sonuçlar ve bu sonuçlara ilişkin önerilere bu bölümde yer verilmiştir.

Sonuç

Bu çalışmada, dinamik geometri yazılımı GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan bir eğitim programının matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat yapma becerileri üzerine etkililiğinin değerlendirilmesi ve katılımcıların bu eğitim süreci hakkındaki görüşlerinin ortaya konulması amaçlanmıştır. Bu amaçla ilk olarak matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının ispat beceri testine verdikleri cevaplar, oluşturulan dereceli puanlama anahtarına göre puanlanmıştır. Araştırmanın nicel verileri için testlerden elde edilen bu puanlar SPSS programında analiz edilmiştir.

Araştırmanın nicel bulgularına göre ilk olarak yapılan Wilcoxon İşaretli Sıralar testi sonucunda hem matematik öğretmenlerinin ön-testleri ile son-testleri hem öğretmen adaylarının ön-testleri ile son-testleri arasında son-test lehine anlamlı bir farklılık tespit edilmiştir. Bu test sonucunda dinamik geometri yazılımı olan GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan bir eğitim programının matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat becerilerinin gelişimini sağladığı görülmüştür. SPSS programında son olarak yapılan Mann Whitney U testi sonucunda matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının ön-test puanları arasında anlamlı bir farklılık olmadığı, son-test puanları arasında ise matematik öğretmenlerinin lehine anlamlı bir farklılık olduğu tespit edilmiştir. Bu test sonucunda matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının araştırmanın başında ön-test puanlarının denk olduğu, araştırma sonunda ise GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan bu eğitim programının, matematik öğretmenlerini daha çok geliştirdiği görülmüştür.

Araştırmanın nitel bulguları için gönüllü olarak seçilen 5 öğretmen adayı ve 4 matematik öğretmeninden oluşan çalışma grubunun ispat beceri testlerine verdikleri cevaplar karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. İspat beceri testinin tamamı yerine ispat-

sözsüz ispat kavramlarının tanımlarının sorulduğu ilk soru ve GeoGebra eğitiminde kullanılan şekillere paralel olan 4, 7, 8 ve 10 numaralı sorular incelenmiştir. İspat beceri testinin ilk sorusu için katılımcıların ön-test ve son-testte verdikleri yanıtlar arasında belirgin bir fark olmadığı, ön-test ile son-testte birbirine benzer cevaplar verdikleri ve GeoGebra eğitimi verilmeden önce de katılımcıların ispat-görsel ispat tanımlarını doğru bildikleri tespit edilmiştir. Katılımcıların ispatı; teoremlerin doğruluğunu veya yanlışlığını göstermek, olayları mantıksal olarak açıklamak, kabul ettirmek ve bilinen teorem/önergelerden yola çıkarak teoremlerin neden doğru olduğunu göstermek olarak tanımladıkları görülmüştür. Sözsüz ispat ise diyagram kullanarak ispat yapmak, geometrik cisimlerle ispat yapmak, resimler kullanarak ispat yapmak, göze hitap eden şekillerle veya formül/kural ihtiyacı olmadan sembollerle ispat yapmak olarak tanımladıkları görülmüştür.

Katılımcıların ön-testte genel olarak eksik ve yetersiz cevaplar verdikleri görülmüştür. Katılımcıların, veri analizi için incelenen 4, 7, 8 ve 10 numaralı sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde dördüncü ve yedinci soruda verilen şekiller arasında bağlantı kuramayıp şekilleri ayrı ayrı açıklamaya çalıştıkları, sekizinci ve onuncu soruda ise verilen şekillerde ne yapılmaya çalışıldığının anlaşılamamasından kaynaklı olarak soru ile alakasız cevapların verildiği görülmüştür. Ön-testte katılımcıların veri analizi için incelenen bu sorularda düşük puan alma nedenlerinin, şekilleri anlayamama ve şekiller arasında bağlantı kuramama olduğu tespit edilmiştir.

Katılımcıların, nitel veri analizi için incelenen 4, 7, 8 ve 10 numaralı sorularda ön-teste göre son-testte genel olarak yeterli ve doğru cevap verdikleri ayrıca bu sorularda testteki cebirsel ispat sorularına göre daha yüksek puan aldıkları görülmüştür. Bu sonuca göre katılımcıların GeoGebra ile verilen eğitimle sözsüz ispatları cebirsel ispata göre daha kolay algılamaları ve yorumlamada daha başarılı olmaları nedeniyle sözsüz ispatı verilen sorularda daha başarılı oldukları tespit edilmiştir.

Katılımcıların, son-testin dördüncü sorusunda şekiller arasındaki ilişkilendirmeyi doğru yaparak ispatın yapıldığı teoreme ulaşabildikleri ve diğer test sorularına göre katılımcıların en fazla dördüncü soruya doğru cevap verdikleri görülmüştür. Bu duruma sebep, Pisagor Teoreminin ilk olarak ortaokul müfredatında verilerek küçük yaşlarda öğrenilmesi ve müfredat itibarıyla sık sık programlarda karşılaşılmamasından dolayı hatırlamalarının kolay olması olarak tespit edilmiştir. Katılımcıların, son-testin yedinci

sorusunda alanlar yardımıyla tamsayılar toplamına ulaştıkları, son-testin sekizinci sorusunda sözsüz ispat olma nedenlerini doğru açıkladıkları ve son-testin onuncu sorusunda üçgen benzerliğinden yola çıkarak geometrik seri toplamına ulaştıkları görülmüştür.

Araştırmanın nitel bulguları için çalışma grubuyla yapılan görüşmeler incelendiğinde katılımcıların GeoGebra ile sözsüz ispat becerilerini geliştirme eğitimi ile ilgili görüşlerinin olumlu olduğu görülmüştür. Yapılan görüşmelerde katılımcılar GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan etkinliklerde ispatın program üzerinde gözlemlenebildiğini ve bu etkinliklerin dikkat çekici, dinamik, pratik ve hassas ölçümlere uygun özellikleri olduğunu belirttikleri tespit edilmiştir. Katılımcılar GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan etkinliklerin konu öğretiminde anlamayı kolaylaştırmak, konuyu öğrettikten sonra pekiştirme yapmak ve öğrencilerin ders sürecine aktif katılımını sağlamak için kullanılabileceğini belirttikleri tespit edilmiştir. Etkinliklerin sözsüz ispat olma nedenlerini etkinliklerin kelime kullanılmadan yapılması ve görsel yollarla yapılması olarak açıkladıkları görülmüştür. Ayrıca katılımcılar GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan etkinliklerin ispat yapma becerilerine etkisinin ilişki kurabilme, akılda kalma, anlamlandırma, zihinde canlandırma, görselleştirme, somutlaştırma gibi bilişsel beceriler ve severek öğrenme, eğlenerek öğrenme, ön yargıyı kırma gibi duyuşsal beceriler açısından olduğunu vurguladıkları tespit edilmiştir.

Üçgenleme modelinin kullanıldığı bu çalışmada farklı veri toplama araçlarıyla toplanan verilerin sonuçlarının birbirini desteklediği görülmüştür. Dolayısıyla dinamik geometri yazılımı olan GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan eğitim programının matematik öğretmeni ile öğretmen adaylarının sözsüz ispat becerilerini geliştirdiği ve katılımcıların GeoGebra ile sözsüz ispat becerilerini geliştirme eğitimi ile ilgili görüşlerinin olumlu olduğu görülmüştür.

Öneriler

Bu çalışmada GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan eğitim programının sözsüz ispat yapma becerilerinin gelişimini sağladığı görülmüştür. Literatür incelendiğinde GeoGebra dinamik geometri yazılımı ile sözsüz ispat yapma çalışmalarına az rastlanmaktadır. Bu sebeple matematik eğitiminde GeoGebra dinamik geometri yazılımı ile sözsüz ispat yapma çalışmalarının

yaygınlaştırılması gerekmektedir. Bu çalışmada matematik öğretmeni ve öğretmen adayları ile çalışılmıştır. Bu çalışmaya benzer olarak farklı katılımcı grupları için araştırmalar yapılabilir. Ayrıca bu çalışmada uygulanan etkinliklerin konuları genişletilerek daha kapsamlı araştırmalar yapılması önerilebilir.

Bu çalışmada kullanılan etkinlikler, çalışma grubuna hazır olarak verilmiş, çalışma grubunun etkinlik geliştirmesi beklenmemiştir. Araştırma yapılan çalışma grubunun GeoGebra ile sözsüz ispat etkinlikleri geliştirmeleri sağlanabilir.

Bu çalışmada dinamik geometri yazılımlarından GeoGebra yazılımı ile araştırmalar yapılmıştır. Diğer dinamik geometri yazılımları ile sözsüz ispat yapma becerilerini geliştirme eğitimi verilerek araştırmalar yapılması önerilebilir.

Bu çalışmada GeoGebra ile sözsüz ispat becerilerini geliştirme eğitimi verilerek araştırma sonuçları elde edilmiştir. Sözsüz ispat becerileri için GeoGebra ile yapılan eğitimin yanında kağıt kalemle yapılan geleneksel öğretim yapıları aralarındaki farkların incelenmesi önerilebilir. Her iki yöntemin olumlu ve olumsuz yönleri araştırılabilir.

Matematik öğretmenlerinin geometri gibi şekillerin yoğun olarak kullanıldığı derslerde ve matematiğin diğer öğrenme alanlarında sözsüz ispat yöntemini dinamik ortamlara aktarmaları teşvik edilebilir. Bunun için dinamik görsel ispatlara yönelik hizmet içi çalışmaların yapılması, öğretim programlarında sözsüz ispat yöntemlerini dinamik ortama aktaran kazanımların ve ders kitaplarında örneklerin yer alması önerilebilir. Öğretmenlerin etkinlikleri hazır bir şekilde kullanmaları zamandan tasarruf sağlayabilir. Ayrıca öğretmenlerin sözsüz ispat yapma becerilerine uygun olarak GeoGebra dinamik geometri yazılımında kendilerinin etkinlik tasarımları teşvik edilebilir.

Sözsüz ispatların dinamik ortama aktarıldığı derslerde etkinliklerin, öğrencilerin var olan ön bilgileri ve hazırbulunuşluklarına uygun olarak yapılması önerilebilir. Bu sayede öğrencilerin GeoGebra ile sözsüz ispat becerilerini geliştirme eğitiminde etkili ve verimli sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKÇA

- Açıkgül, K. ve Aslaner, R. (2015). Öğretmen adaylarının kâğıt-kalem ve dinamik geometri yazılımı kullanarak geometrik yer problemlerini çözüm süreçlerinin incelenmesi. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, (20), 468-512.
- Akkan, Y., Akkan, P., Öztürk, M. ve Demir, Ü. (2018). Görsel teoremler üzerine matematik öğretmenleriyle nitel bir çalışma. *Journal of Instructional Technologies & Teacher Education*, 7(2), 56–74.
- Aktümen, M., Yıldız, A., Horzum, T. ve Ceylan, T. (2011). İlköğretim matematik öğretmenlerinin GeoGebra yazılımının derslerde uygulanabilirliği hakkındaki görüşleri. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 2(2), 103–120.
- Alsina, C. ve Nelsen, R. (2010). An invitation to proofs without words. *European Journal of Pure And Applied Mathematics*, 3(1), 118–127.
- Altıntaş, E. ve İlgün, Ş. (2020). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerinin belirlenmesi: Kars örnekleme. *Kastamonu Education Journal*, 28(3), 1573-1582. DOI: 10.24106/kefdergi.706125
- Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25–37.
- Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimleri Enstitüsü, Bursa.
- Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Baki, A. (1996). Matematik öğretiminde bilgisayar herşey midir. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12, 135–143.
- Baki, A. (2000). Bilgisayar donanımlı ortamda matematik öğrenme. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 19, 186–193.
- Baki, A. ve Gökçek, T. (2012). Karma yöntem araştırmalarına genel bir bakış.

Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi, 11(42), 1–21.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.

Balacheff, N. (2002). The researcher epistemology: A deadlock for educational research on proof. <http://etnomatematica.org/articulos/Balacheff1.pdf> adresinden alınmıştır.

Balcı Şeker, H. ve Erdoğan, A. (2017). GeoGebra yazılımı ile geometri öğretiminin geometri ders başarısına ve geometri öz-yeterliliğine etkisi. *OPUS Uluslararası Toplum Araştırmaları Dergisi*, 7(12), 82–97.

Balgalmış, E. ve Ceyhan, E. I. (2019). Dörtgenlerin ilişkilendirme becerisinin gelişimine yönelik öğretiminin 7. sınıf öğrencilerinin erişim düzeylerine etkisi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*. 10(1), 130-156. DOI: 10.16949/turkbilmat.393116

Baltacı, A. (2018). Nitel araştırmalarda örnekleme yöntemleri ve örnek hacmi sorunsalı üzerine kavramsal bir inceleme. *Bitlis Eren Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 7(1), 231–274.

Bardelle, C. (2010). Visual proofs: An experiment. V. Durand-Guerrier (Ed.). *Proceedings of CERME 6* içinde (s. 251-260). Lyon, France: INRP

Baydaş, Ö. (2010). *Öğretim elemanlarının ve öğretmen adaylarının görüşleri ışığında matematik öğretiminde GeoGebra kullanımı*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Bayraktar, B., Tapan Broutin, M. S. ve Güneş, H. (2018). Cabri 3D kullanımının öğretmen adaylarının analitik geometri başarılarına etkisinin incelenmesi. *Academy Journal of Educational Sciences*, 2(2), 172-192. DOI: 10.31805/acjes.460636

Bell, C. J. (2011). Proofs without words: A visual application of reasoning and proof, *Mathematics Teacher*, 104(9), 690-695.

Britz, T., Mammoliti, A. ve Sørensen, H. K. (2014). Proof by picture : A selection of nice picture proofs. *Parabola*, 50(3), 1–8.

Cantürk Günhan, B ve Açıkan, H. (2016). Dinamik Geometri yazılımı kullanımının geometri başarısına etkisi: Bir meta-analiz çalışması. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 7(1), 1-23.

- Çetin, İ., Erdoğan, A. ve Yazlık, D. Ö. (2015). GeoGebra ile öğretimin sekizinci sınıf öğrencilerinin dönüşüm geometrisi konusundaki başarılarına etkisi. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2015(4), 84–92.
- Çetin, O. (2018). *Ortaokul 7.sınıf öğrencilerinin dinamik geometri yazılımı GeoGebra ile dönüşüm geometrisi öğrenim süreçlerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Mersin Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Mersin.
- Ceylan, T. (2012). *GeoGebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Çiftci, O. ve Tatar, E. (2014). Pergel-cetvel ve dinamik bir yazılım kullanımının başarı etkilerinin karşılaştırılması. *Bilgisayar ve Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 2(4), 111–133.
- Çörekçioğlu, M. (2019). *Matematik öğretmenlerinin ve öğrencilerin GeoGebra yazılımının kullanılması hakkındaki görüşlerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(2), 47–71. DOI:<http://dx.doi.org/10.17984/adyuebd.52880>
- Demir, F. (2011). *Bir dinamik geometri yazılımının ilköğretim öğrencilerinin geometride ispat becerilerine etkisi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzincan.
- Demirbilek, M. ve Özkale, A. (2014). GeoGebra kullanımının önlisans matematik öğretimine etkinliğinin incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, 8(2), 98–123. DOI:10.17522/nefemed.71261
- Demircioğlu, H. ve Arslantaş İlter, E. (2020). Matematik öğretmenlerinin Pisagor teoremi ile ilgili görselleri tanıma düzeylerinin incelenmesi. *Eğitim Bilim ve Araştırma Dergisi*, 1(1), 16-31.
- Demircioğlu, H. ve Polat, K. (2015). Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının “Sözsüz İspat” yöntemine yönelik görüşleri. *The Journal of Academic Social Science Studies*, (41), 233–254. DOI:<http://dx.doi.org/10.9761/JASSS3171>

- Demircioğlu, H. ve Polat, K. (2016a). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının “Sözsüz İspatlar” ile yaşadıkları zorluklar hakkındaki görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2016(7), 81–99.
- Demircioğlu, H. ve Polat, K. (2016b). Matematik eğitiminde sözsüz ispatlar : Kuramsal bir çalışma. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, (28), 129–140. DOI:<http://dx.doi.org/10.14582/DUZGEF.686>
- Doğan, M. F. (2019). Ortaokul öğretmenlerinin ispatla ilişkili etkinliklere katılımlarının doğasının incelenmesi. *Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 48(1), 100–130. DOI:10.14812/cufej.442893
- Doruk, B. K., Kıymaz, Y., Horzum, T. ve Morkoyunlu, Z. (2014). Sınıf öğretmeni adaylarının ispatla ilgili görüşleri: Formal ispat- temsili ispat. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30, 23-55.
- Doruk, M. ve Kaplan, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi Journal of Research in Education and Teaching*, 2(1), 241-252.
- Doruk, M. ve Kaplan, A. (2017). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanında ürettikleri ispatların özellikleri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, (44), 467–498. DOI:10.21764/maeuefd.305605
- Doruk, M., Özdemir, F. ve Kaplan, A. (2014). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri ile matematiğe karşı öz- yeterlik algıları arasındaki ilişki. *K. Ü. Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23(2), 861–874.
- Doyle, T., Kutler, L., Miller, R. ve Schueller, A. (2014). Proofs without words and beyond - proofs without words 2.0. <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/proofs-without-words-and-beyond-proofs-without-words-20> adresinden alınmıştır.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. basic issues for learning. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf> adresinden alınmıştır.
- Er, S. ve Sağlam Kaya, Y. (2017). Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının Geogebra ortamında materyal hazırlama hakkındaki görüşleri. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 13(1), 228–242.

DOI:<http://dx.doi.org/10.17860/mersinefd.305950>

- Erdener, K. ve Gür, H. (2018). Ortaokul matematik derslerinde dinamik geometri yazılımı Geometer's Sketchpad kullanımı ile ilgili öğrenci görüşleri. *BAUN Fen Bil. Enst. Dergisi*, 21(1), 364-377. DOI: 10.25092/baunfbed.548536
- Erginbaş, Ş. (2009). *Teknoloji destekli matematik öğretiminin sınıf yönetiminin öğrenci özellikleri açısından etkililiği*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta.
- Gelişen, A. (2007). *9. sınıfta üçgenlerin öğretiminde origami ve sözsüz ispatların kullanılması ile ilgili bir öğretim deneyi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Sivas.
- Genç, G. ve Öksüz, C. (2016). Dinamik matematik yazılımı ile 5. sınıf çokgenler ve dörtgenler konularının öğretilmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 24(3), 1551-1566.
- Gierdien, M. F. (2007). From 'proofs without words' to 'proofs that explain' in secondary mathematics. *Pythagoras*, 65, 53-62. DOI:10.4102/pythagoras.v0i65.92
- Gökçe, S., Aydoğan Yenmez, A. ve Özpınar, İ. (2016). Matematik öğretmenlerinin GeoGebra ile hazırlanan çalışma yaprakları üzerine görüşleri. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 7(1), 164. DOI:10.16949/turcomat.21979
- Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi Journal of Research in Education and Teaching*, 1(4), 56-64.
- Gökkurt, B., Deniz, D., Akgün, L. ve Soylu, Y. (2014). Matematik alanında ispat yapma süreci üzerine yapılmış bazı araştırmalardan bir derleme. *Başkent University Journal Of Education*, 1(1), 55-63.
- Güler, G. (2020). Akıl yürütme ve ispat ilişkisi. I. Uğurel (Ed.). *Matematiksel İspat ve Öğretimi. Okul Yıllarında İspat Öğretimini Destekleyen Çok Yönlü Bir Bakış* içinde (s. 89-112). Ankara: Anı Yayıncılık
- Güler, G. ve Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 571-590.
- Güler, G., Özdemir, E. ve Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel

- tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219-236.
- Güler, N. ve Taşdelen Teker, G. (2015). Açık uçlu maddelerde farklı yaklaşımlarla elde edilen puanlayıcılar arası güvenilirliğin değerlendirilmesi. *Journal of Measurement and Evaluation in Education and Psychology*, 6(1), 12-24.
- Güven, B. (2002). *Dinamik geometri yazılımı Cabri ile keşfederek geometri öğrenme*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Güven, B. ve Karataş, I. (2003). Dinamik geometri yazılımı Cabri ile geometri öğrenme: öğrenci görüşleri. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 2(2), 67–78.
- Hacısalıhoğlu Karadeniz, M. ve Akar, Ü. (2014). Dinamik geometri yazılımının açığortay ve kenarortay öğretiminde meslek lisesi öğrencilerinin başarılarına etkisi. *Bilgisayar ve Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 2(4), 74–90.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.
- Hemmi, K. ve Löfwall, C. (2009). Why do we need proof. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:400484/FULLTEXT01.pdf> adresinden alınmıştır.
- Hıdıroğlu, Ç. N. ve Bukova Güzel, E. (2014). Matematiksel modellemede GeoGebra kullanımı: boy-ayak uzunluğu problemi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, (36), 29–44. DOI:10.9779/puje617
- Hohenwarter, M., Hohenwarter, J. ve Lavicza, Z. (2008). Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: the case of GeoGebra. *Jl. of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 1–9.
- Hohenwarter, M. ve Hohenwarter, J. (2009). *Geogebra yardım resmi kullanım kılavuzu* 3.2 (çev. M. Doğan ve E. Karakırık). <http://www.geogebra.org> adresinden alınmıştır.
- Hohenwarter, M. ve Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 126-131.

- Işık, A. ve Konyalıoğlu, A. C. (2005). Matematik eğitiminde görselleştirme yaklaşımı. *Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, (11), 462–471.
- İçel, R. (2011). *Bilgisayar destekli öğretimin matematik başarısına etkisi: GeoGebra örneği*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Selçuk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- İnam, B. ve Uğurel, I. (2016). İspat kavrama testine dayalı bir öğretim uygulamasında karşılaşılan güçlükler ve sürece müdahale yolları. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12(1), 1–21. DOI:10.17860/efd.91329
- İpek, S. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımları kullanarak gerçekleştirdikleri geometrik ve cebirsel ispat süreçlerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.
- Jick, T. D. (1979). Mixing qualitative and quantitative methods: Triangulation in action. *Administrative Science Quarterly*, 24(4), 602-611.
- Kabaca, T., Aktümen, M., Aksoy, Y. ve Bulut, M. (2010). Matematik öğretmenlerinin Avrasya GeoGebra toplantısı kapsamında dinamik matematik yazılımı GeoGebra ile tanıştırılması ve GeoGebra hakkındaki görüşleri. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 1(2), 148–165.
- Kabaca, T., Çontay, E. G. ve İymen, E. (2011). Dinamik matematik yazılımı ile geometrik temsilden cebirsel temsile: parabol kavramı. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, (30), 101-110.
- Kaleli Yılmaz, G., Ertem, E. ve Güven, B. (2010). Dinamik geometri yazılımı Cabri'nin 11.sınıf öğrencilerinin trigonometri konusundaki öğrenmelerine etkisi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 1(2), 200–216. DOI:10.16949/turcomat.67186
- Kaplan, A., Doruk, M., Öztürk, M. ve Duran, M. (2016). Matematik ve matematik eğitimi öğrencilerinin matematiksel ispata yönelik görüşleri arasında fark var mıdır? *Journal of Human Sciences*, 13(3), 6020–6037. DOI:10.14687/jhs.v13i3.4327
- Karakuş, F., Erşen, Z. B. ve Ocak, G. (2017). Matematik ve matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin ispat yapma düzeylerinin incelenmesi. *Uşak Üniversitesi*

Sosyal Bilimler Dergisi/UUSBD, 10(2), 246-266.

- Karataş, I. ve Güven, B. (2015). Dinamik geometri yazılımı Cabri'nin matematik eğitiminde kullanımı: Pisagor bağıntısı ve çokgenlerin dış açıları. *Gazi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 1(1), 15–28.
- Kayagil, S. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ve bu görüşlerin bazı değişkenlere göre incelenmesi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education*, 1(2), 134-141.
- Kepçeoğlu, İ. ve Yavuz, İ. (2017a). Dinamik geometri yazılımlarıyla gerçekleştirilen matematik derslerinin ölçme ve değerlendirme örneği. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 25(1), 373–384.
- Kepçeoğlu, İ. ve Yavuz, İ. (2017b). GeoGebra yazılımıyla limit ve süreklilik öğretiminin öğretmen adaylarının başarısına etkisi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, 11(1), 21–47.
- Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.
- Koçak, A. ve Arun, Ö. (2006). İçerik analizi çalışmalarında örneklem sorunu. *Selçuk İletişim*, 4(3), 21-28.
- Konyalıoğlu, A. C. (2003). *Üniversite düzeyinde vektör uzayları konusundaki kavramların anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımının etkinliğinin incelenmesi*. Yayımlanmamış doktora tezi. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Köklü, N. (1994). Örnek olay çalışma metodları. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 27(2), 771-779.
- Kutluca, T. ve Zengin, Y. (2011). Matematik öğretiminde GeoGebra kullanımı hakkında öğrenci görüşlerinin değerlendirilmesi. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, (17), 160–172.
- Miller, R. L. (2012). On proof without words. <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/Miller.pdf> adresinden alınmıştır.
- Moralı, S., Ugurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen

- adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147–160.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston,VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words: Exercises in visual thinking*. Washington: Mathematical Association of America.
- Ogan, C. ve Ibibo, G. (2018). GeoGebra : A technological soft ware for teaching and learning of calculus in Nigerian Schools. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 6(3), 115–120. DOI:10.12691/ajams-6-3-5
- Özen, D. (2009). *İlköğretim 7.sınıf geometri öğretiminde dinamik geometri yazılımlarının öğrencilerin erişti düzeylerine etkisi ve öğrenci görüşlerinin değerlendirilmesi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Özer, M. N. ve Şan, İ. (2013). Görselleştirmenin özdeşlik konusu erişimine etkisi. *International Journal of Social Science*, 6(1), 1275–1294.
- Öztürk, M. (2011). *Bilgisayar destekli öğretim yönteminin oran orantı konusunun öğretiminde akademik başarıya etkisi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Öztürk, M. ve Kaplan, A. (2017). Matematik öğretmenlerine yönelik ispat yapma teşhis testi ve teste yönelik dereceli puanlama anahtarı geliştirilmesi. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 14(1), 360–381. DOI:http://dx.doi.org/10.23891/efdyu.2017.9
- Polat, K. (2018). *Alternatif bir ispat yöntemi olarak sözsüz ispatlar: lise öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerinin incelenmesi*. Yayımlanmamış doktora tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Polat, K., Oflaz, G. ve Akgün, L. (2019). Görsel ispat becerisi, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal yetenek arasındaki ilişki. *Erciyes Journal of Education*, 3(2), 105–122. DOI:10.32433/eje.604126
- Selçik, N. ve Bilgici, G. (2011). GeoGebra yazılımının öğrenci başarısına etkisi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 19(3), 913–924.

- Sezen Yüksel, N. (2020). Matematik tarihi ve felsefesi çerçevesinde ispat ve ispatlama. I. Uğurel (Ed.). *Matematiksel İspat ve Öğretimi. Okul Yıllarında İspat Öğretimini Destekleyen Çok Yönlü Bir Bakış* içinde (s. 41-68). Ankara: Anı Yayıncılık
- Štrausová, I. ve Hašek, R. (2013) Dynamic visual proofs using DGS. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 7 (1),130-142.
- Stupel, M., Sigler, A. ve Jahangiri, J. (2019). Teaching proofs without words using dynamic geometry. *The Mathematical Gazette*, 103(557), 204-211.
- Şadan, N. ve Uğurel, I. (2020). Görsel (Sözsüz) ispatlar. I. Uğurel (Ed.). *Matematiksel İspat ve Öğretimi. Okul Yıllarında İspat Öğretimini Destekleyen Çok Yönlü Bir Bakış* içinde (s. 243-274). Ankara: Anı Yayıncılık
- Tatar, E., Akkaya, A. ve Kağızmanlı, T. B. (2011). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının GeoGebra ile oluşturdukları materyallerin ve dinamik matematik yazılımı hakkındaki görüşlerinin analizi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 2(3), 181–197.
- Tatar, E., Kağızmanlı, T. B. ve Akkaya, A. (2014). Dinamik bir yazılımın çemberin analitik incelenmesinde başarıya etkisi ve matematik öğretmeni adaylarının görüşleri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 8(1), 153–177. DOI:10.12973/nefmed.2014.8.1.a7
- Tekin, B. ve Konyalıoğlu, A. C. (2010). Trigonometrik fonksiyonların toplam ve fark formüllerinin ortaöğretim düzeyinde görselleştirilmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 5(1–2), 24–37.
- Turğut, M., Yenilmez, K. ve Uygan, C. (2013). Ortaokul ve lise matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 6(13), 228-252.
- Tutkun, Ö. F., Öztürk, B. ve Demirtaş, Z. (2011). Matematik öğretiminde bilgisayar yazılımları ve etkililiği. *Dünya'daki Eğitim ve Öğretim Çalışmaları Dergisi*, 1(1), 133–139.
- Tüzer Ünsal, G. ve Akay, C. (2020). Lise öğrencilerinin matematik başarısı, kaygısı ve öğretim teknolojilerine yönelik tutumları üzerine: GeoGebra dinamik yazılımı. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 28(1), 234–252. DOI:10.24106/kefdergi.3538

- Uğurel, I. ve Morali, S. (2010). Bir ortaöğretim matematik dersindeki ispat yapma etkinliğine yönelik sınıfi tartışma sürecine öğrenci söylemleri çerçevesinde yakından bakış. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 135-154.
- Uğurel, I., Morali, H.S., Karahan, O., & Boz, B. (2016). Mathematically gifted high school students approaches to developing visual proofs (VP) and preliminary ideas about VP. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 4(3), 174-197. DOI:10.18404/ijemst.61686
- Uygur Kabael, T. (2020). İspat ve ispatlamada bazı temel kavramlar. I. Uğurel (Ed.). *Matematiksel İspat ve Öğretimi. Okul Yıllarında İspat Öğretimini Destekleyen Çok Yönlü Bir Bakış* içinde (s. 23-40). Ankara: Anı Yayıncılık
- Uygur Kabael, T. (2020). İspat yapma yöntemleri. I. Uğurel (Ed.). *Matematiksel İspat ve Öğretimi. Okul Yıllarında İspat Öğretimini Destekleyen Çok Yönlü Bir Bakış* içinde (s. 227-242). Ankara: Anı Yayıncılık
- Uysal Koğ, O. (2012). *Görselleştirme yaklaşımı ile yapılan matematik öğretiminin öğrencilerin bilişsel ve duyuşsal gelişimi üzerindeki etkisi*. Yayımlanmamış doktora tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Uysal Koğ, O. ve Başer, N. (2011). Görselleştirme yaklaşımının matematikte öğrenilmiş çaresizliğe ve soyut düşünmeye etkisi. *Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi*, 1(3), 89-108.
- Ülker, E. (2018). *Ortaokulda ispata giriş: gerçekçi matematik eğitimi çerçevesinde sözsüz ispatların kullanımı*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Üzel, D. ve Özdemir, E. (2009). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat ve ispat yapmaya yönelik tutumları. *Education Sciences*, 4(4), 1223-1236.
- Vatansever, S. (2007). *İlköğretim 7. sınıf geometri konularını dinamik geometri yazılımı Geometer's Sketchpad ile öğrenmenin başarıya, kalıcılığa etkisi ve öğrenci görüşleri*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Wayne, N. (2017). Proofs without words in geometry. *Mathematics Teacher*, 110(8), 580-586.

- Yavuz, İ. ve Can, R. (2010). Cabri geometriyle tanıştırılan öğretmen adaylarının teknoloji ile matematik öğretimine yaklaşımlarının incelenmesi. *M.Ü. Atatürk Eğitim Fakültesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, (32), 181-198.
- Yiğit Koyunkaya, M. (2020). İspat öğretiminde teknolojiden yararlanma. I. Uğurel (Ed.). *Matematiksel İspat ve Öğretimi. Okul Yıllarında İspat Öğretimini Destekleyen Çok Yönlü Bir Bakış* içinde (s. 393-426). Ankara: Anı Yayıncılık
- Yıldız, A., Baltacı, S. ve Aktümen, M. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik matematik yazılımı ile üç boyutlu cisim problemlerini çözme süreçleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 591–604.
- Yılmaz, R. ve Argün, Z. (2013). Matematiksel genelleme sürecinde görselleştirme ve önemi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (H. U. Journal of Education)*, 28(2), 564-576.
- Zengin, Y. (2017). GeoGebra yazılımının matematik kaygısı ve matematik öğretme kaygısına etkisinin incelenmesi. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 14(1), 908–939.
- Zengin, Y., Kağızmanlı, T. B., Tatar, E. ve İşleyen, T. (2013). Bilgisayar destekli matematik öğretimi dersinde dinamik matematik yazılımının kullanımı. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 10(23), 167–180.
- Zengin, Y. ve Tatar, E. (2014). Türev uygulamaları konusunu öğretiminde GeoGebra yazılımının kullanımı. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 22(3), 1209–1228.
- Zeybek Şimşek, Z. (2020). İspatın matematik öğretim programları ve uluslar arası standartlardaki yeri ve önemi. I. Uğurel (Ed.). *Matematiksel İspat ve Öğretimi. Okul Yıllarında İspat Öğretimini Destekleyen Çok Yönlü Bir Bakış* içinde (s. 69-88). Ankara: Anı Yayıncılık
- Zeybek Şimşek, Z. (2020). İspat nedir sorusuna farklı pencerelerden bakış. I. Uğurel (Ed.). *Matematiksel İspat ve Öğretimi. Okul Yıllarında İspat Öğretimini Destekleyen Çok Yönlü Bir Bakış* içinde (s. 1-22). Ankara: Anı Yayıncılık
- Zeybek Şimşek, Z. ve Üstün, A. (2019). 7.Sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki ispat seviyelerinin incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 13(1), 196–217. DOI:10.17522/balikesirnef.541576

EKLER

Ek 1. Etik Kurul İzni

Evrak Tarih ve Sayısı: 19/02/2020-E.11354



T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Fakültesi Dekanlığı



Sayı :46052777-044/
Konu :Anket İzni

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ BÖLÜM BAŞKANLIĞINA

Üniversitemiz Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Fatma ÇAKIR'ın, ekli yazıda belirtilen tez çalışmasını Fakültemizde uygulama isteği uygun görülmüş olup ilgilinin başvurusu halinde yardımcı olunması hususunda;
Gereğini bilgilerinize rica ederim.

e-imzalıdır
Dr. Öğr. Üyesi Yasemin ER TUNA
Dekan Yardımcısı

EK :
Yazı (37 sayfa)

DAĞITIM
Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Eğitimi
Bölüm Başkanlığına
Eğitim Bilimleri Bölüm Başkanlığına
Güzel Sanatlar Eğitimi Bölüm Başkanlığına
Türkçe ve Sosyal Bilimler Eğitimi Bölüm
Başkanlığına
Temel Eğitim Bölüm Başkanlığına
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölüm
Başkanlığına

Taşıtlılık Yerleşkesi 60150 Tokat/Türkiye

Tel: 0 (356) 252 16 16 Faks: 0 (356) 252 15 46
E-Posta: egitim@gop.edu.tr Elektronik ağ: http://egitim.gop.edu.tr

Ayrıntılı bilgi için irtibat: A.Doğan Veri Hazırlama ve Kontrol
İşletmeni

Evrak Tarih ve Sayısı: 18/02/2020-E.11029



T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
Öğrenci İşleri Daire Başkanlığı

Sayı :56314351-044/
Konu :Fatma ÇAKIR (Anketler)

EĞİTİM FAKÜLTESİ DEKANLIĞINA

İlgi : Enstitü Sekreterliği; 17/02/2020 Tarihli, 10745 sayılı yazı.

Üniversitemiz Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'nün ilgi yazısı ekte gönderilmekte olup, söz konusu çalışmalar için gerekli iznin verilmesi hususunda gereğini rica ederim.

e-imzalıdır
Prof. Dr. İsa GÖKÇE
Rektör Yardımcısı

EK :
İlgi yazı

Evrak Tarih ve Sayısı: 17/02/2020-E.10745



T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü



Sayı :71584433-044/
Konu :Anketler izin isteği (Fatma
ÇAKIR)

REKTÖRLÜK MAKAMINA
(Öğrenci İşleri Daire Başkanlığı)

İlgi : Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü; 27/12/2019 Tarihli, 70035 sayılı yazı.

Enstitümüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı 189911010 nolu yüksek lisans öğrencisi Fatma ÇAKIR'ın Dr.Öğr.Üyesi Esra YILDIZ danışmanlığında hazırlamış olduğu "**Öğretmen Adaylarının GeoGebra İle Görsel İspat Yapma Becerileri**" konulu tez çalışması kapsamında Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Eğitim Fakültesinde 10.02.2020-28.02.2020 tarihleri arasında uygulama yapabilmesi için izin alınması hususunda;
Gereğini bilgilerinize arz ederim.

e-imzalıdır
Doç. Dr. Kerem KILIÇER
Enstitü Müdürü

Evrak Tarih ve Sayısı: 27/12/2019-E.70035



T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Başkanlığı



Sayı :75987002-100/
Konu :Fatma ÇAKIR

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Anabilim Dalımız Matematik Eğitimi Bilim Dalı 189911010 nolu yüksek lisans öğrencisi Fatma ÇAKIR'ın, Dr.Öğr.Üyesi Esra YILDIZ danışmanlığında hazırlamış olduğu "Öğretmen Adaylarının Geogebra İle Görsel İspat Yapma Becerileri" başlıklı çalışmasının Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırmaları Etik Kurulu tarafından değerlendirilmesi talebine ilişkin başvuru formu ve ekleri yazımız ekinde sunulmuştur.
Gereğini bilgilerinize arz ederim.

e-imzalıdır

Doç. Dr. Adem ŞAHİN
Anabilim Dalı Başkanı

EK :
Başvuru Formu ve Ekleri

Ek 2. Gönüllü Katılım Formu

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ GÖNÜLLÜ KATILIM FORMU

Katılımcı / Gönüllünün Protokol Numarası:

1. Araştırmayla İlgili Bilgiler:

a. Araştırmanın Adı:

Dinamik geometri yazılımı eğitiminin matematik öğretmeni ile öğretmen adaylarının sözsüz ispat yapma becerilerine etkisi ve katılımcıların süreç hakkındaki görüşlerinin değerlendirilmesi

b. Araştırmanın İçeriği:

İspat, öğrencilerin rahat kavrayabilecekleri kadar kolay bir kavram değildir (Doğan, 2019). Öğrencilerin çoğunun ispat yapmadaki başarısızlığı ve görüşlerinin çoğunun olumsuz olması düşüldüğünde öğretmenlere çok iş düşmektedir (Doruk ve diğerleri, 2014). Bu yüzden de matematik öğretmen adaylarının ileri düzeyde ispat yapma becerilerine sahip olması beklenir. Yani matematik öğretmenlerinin öğrencilerinin yeterli bir ispat anlayışı geliştirmelerine yardımcı olabilmeleri için kendilerinin de ispat ile ilgili köklü bilgilere sahip olmaları önemlidir (Doğan, 2019). Alan derslerinin hemen hemen hepsinde ispatla karşılaşmamak mümkün değildir. Bu yüzden lisansın başında ispat konularına yer verilir. Çünkü ispatla karşılaştıklarında hangi yöntemi kullanacaklarını bilmeleri gerekir. Okul hayatında matematik öğretmeni olarak öğrencilerin muhakeme etme ve ispat becerilerini geliştirmek için öğrenme ortamı oluşturmaları gerekir. İspat yapma hem ilköğretim hem ortaöğretim matematik programlarında yer aldığı için öğretmenler ispat yapmayla alakalı etkinlikler geliştirebilecek duruma gelmelidirler. Eğer öğretmenler bu konuda eksik kalırlarsa derslerinde kullanma sıklıklarını etkiler. Öğretmen adaylarının bu yüzden ispat konusunda gördükleri derslerde kendilerini geliştirmelidirler (Moralı ve diğerleri, 2006).

Literatüre bakıldığında ispatın tüm sınıf seviyelerinde matematik eğitiminin merkezinde olması gerektiği fikri öğretmenlerin ispat anlayışıyla çok örtüşmemektedir. Öğretmenler iyi bir ispat anlayışına sahipse öğrencilerin daha iyi bir ispat anlayışına sahip olmalarını sağlarlar. En büyük sıkıntılarından biri öğretmenlerin ispat bilgilerini sınıf içi uygulamalara taşımaktaki zorluktur (Doğan, 2019). Sözsüz ispatla ilgili çok fazla çalışma da yoktur. Genelde kuramsal olarak değinilip uygulamaya yönelik çalışmalarda ise sözsüz ispatı zor buldukları belirtilmiştir (Demircioğlu ve Polat, 2016b). Sözsüz ispatların matematik eğitiminde yeri ve önemine bakıldığında ispat becerilerinin gelişimini sağlaması ve öğrencilerin sözsüz ispat yapmada zorlanmalarından dolayı alternatif yollar aranmıştır. Dinamik geometri yazılımları da bu alternatif yollarından biridir.

Dinamik yazılımların yaygınlaşması ile ispat dinamik ortamlara aktarılmıştır. Ülkemizde GeoGebra ile yapılan araştırmalar vardır. Aynı şekilde sözsüz ispatlarla da yapılan çalışmalara rastlanmaktadır. Ancak sözsüz ispat yöntemini dinamik ortama aktaran çalışmaya pek rastlanmamaktadır. Bu çalışmada GeoGebra yazılımı kullanılarak sözsüz ispat becerileri, süreçleri ve matematik öğretmen adaylarıyla matematik öğretmenlerinin görüşleri alınmıştır. Ayrıca GeoGebra yazılımı ile yapılan etkinliklerin sınıf ortamında uygulanmış olması ile matematik öğretmen adaylarının ve matematik öğretmenlerinin bu etkinliklerin kullanılabilirliğindeki korkularını gidereceği düşünülmektedir. Bu çalışma, dinamik geometri yazılımı olan GeoGebra yazılımının matematikte sözsüz ispat becerilerine olan katkısı ve sınırlılıklarını ortaya çıkarmada önemli rol üstlendiği beklenmektedir. Bu nedenle bu çalışmanın alan yazındaki boşluğu dolduracağı ve sonraki çalışmalara katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

c. Araştırmanın Amacı:

Araştırmanın amacı dinamik bir yazılım olan GeoGebra eğitimiyle matematik öğretmeni ile öğretmen adaylarının sözsüz ispat becerilerine etkisini belirlemek ve belirlenen kriterler doğrultusunda seçilen çalışma grubunun GeoGebra dinamik geometri yazılımı hakkındaki görüşlerini almaktır. Bu amaçlar doğrultusunda çalışma boyunca aşağıdaki alt problemlere yanıt aranacaktır.

- Dinamik geometri yazılımı destekli verilen görsel ispat becerileri eğitiminin matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat yapma becerileri üzerine etkisi nedir?

- Matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımı ile sözsüz ispat yapma konusundaki görüşleri nelerdir?

d. Araştırmanın Nedeni:

() Bilimsel araştırma

(X) Tez çalışması

e. Araştırmanın Öngörülen Süresi:

Bu araştırmada yer almanız için öngörülen süre 1 yıldır.

f. Araştırmaya Katılması Beklenen Katılımcı/Gönüllü Sayısı:

Araştırmada yer alacak gönüllülerin sayısı 41 kişidir.

g. Araştırmada İzlenecek Deneysel İşlemler:

Ön test, GeoGebra etkinliklerinin bilgisayar laboratuvarında yaptırılması, son test, görüşme formu, değerlendirme formu

2. Gönüllünün/Katılımcının Uygulama Sırasında Karşılaşabileceği

Riskler ve Rahatsızlıklar:

Yukarıda açıklanan araştırma sırasında uygulanacak olan işlemlerin herhangi bir risklerinin ve rahatsızlıklarının olmayacağını düşünüyorum.

3. Gönüllüler/Katılımcılar İçin Araştırmadan Beklenen Yarar:

Araştırmadan bir yarar sağlamasının söz konusu olmadığı ancak bu çalışmadan çıkarılan sonuçların başka insanların yararına kullanılabilecek olması, yalnızca araştırma amaçlı olduğu ve doğrudan yarar görülmesi beklenmemektedir.

4. Araştırma Konusundaki Soruların Cevaplandırılması:

Araştırmanın yürütülmesi sırasında olası yan etkiler, riskler ve zararlar ile haklarını konusunda bilgi almak için aşağıda belirtilen kişiyle bağlantı kurmam yeterli olacaktır.

Adı- Soyadı: Fatma ÇAKIR

5. Zararların Karşılanması:

Çalışmadan kaynaklı bir sağlık problemi yaşanması olası değildir.

6. Araştırma Giderleri:

Araştırma kapsamındaki bütün işlemler için benden ya da bağlı bulunduğum sosyal güvenlik kuruluşundan hiçbir ücret istenmeyecektir.

7. Gönüllülük, Çalışmayı Reddetme ve Çalışmadan Çekilme Hakkı, Çalışmadan Çıkarılma:

- a. Araştırmaya hiçbir baskı ve zorlama altında olmaksızın gönüllü olarak katılıyorum.
- b. Araştırmaya katılmayı reddetme hakkına sahip olduğum bana bildirildi.
- c. Sorumlu araştırmacıya haber vermek kaydıyla, hiçbir gerekçe göstermeksizin istediğim anda bu çalışmadan çekilebileceğimin bilincindeyim.
- d. Çalışmanın yürütücüsü olan araştırmacı ya da destekleyen kuruluş, çalışma programının gereklerini yerine getirmedeki ihmali nedeniyle ya da araştırma prosedürüne bağlı olarak onayımı almadan beni çalışma kapsamından çıkarabilir.

8. Gizlilik:

Araştırma verileri hiçbir kurum ya da kuruluşlarla paylaşılmayacaktır.

9. Çalışmaya Katılma Onayı:

Yukarıda yer alan ve araştırmadan önce gönüllüye / katılımcıya verilmesi gereken bilgileri gösteren Aydınlatılmış Onam Formu adlı metni kendi anadilimde okudum ya da bana okunmasını sağladım. Bu bilgilerin içeriği ve anlamı, yazılı ve sözlü olarak açıklandı. Aklıma gelen bütün soruları sorma olanağı tanındı ve sorularıma doyurucu cevaplar aldım. Çalışmaya katılmadığım ya da katıldıktan sonra çekildiğim durumda, hiçbir yasal hakkımdan vazgeçmiş olmayacağım. Bu koşullarla, söz konusu araştırmaya hiçbir baskı ve zorlama olmaksızın gönüllü olarak katılmayı kabul ediyorum.

Bu metnin imzalı bir kopyasını aldım.

Gönüllünün / katılımcının Adı- Soyadı:

Yaş ve Cinsiyeti:

İmzası:

Adresi (varsa telefon ve/veya fax numarası):

Tarih:

Velayet ya da vesayet altında bulunanlar için;

Veli ya da Vasinin Adı- Soyadı:

İmzası:

Adresi (varsa telefon ve/veya fax numarası):

Tarih:

Açıklamaları Yapan Araştırmacının Adı- Soyadı:

İmzası:

Tarih:

Onam alma işlemine başından sonuna kadar tanıklık eden kuruluş görevlisinin

Adı- Soyadı:

İmzası:

Görevi:

Tarih:

Ek 3. İspat Beceri Testi**Ad-Soyad:****Tarih:****No:**

Sevgili katılımcılar,

Bu çalışmanın amacı ispat becerilerinizi geliştirmektir. Öncelikle aşağıdaki soruları cevaplamanız istenmektedir. Vereceğiniz bilgileriniz ve cevaplarınız gizli tutulacak sadece araştırma amaçlı kullanılacak ve toplu olarak değerlendirilecektir. Katkılarınızdan dolayı teşekkür ederim.

Fatma ÇAKIR

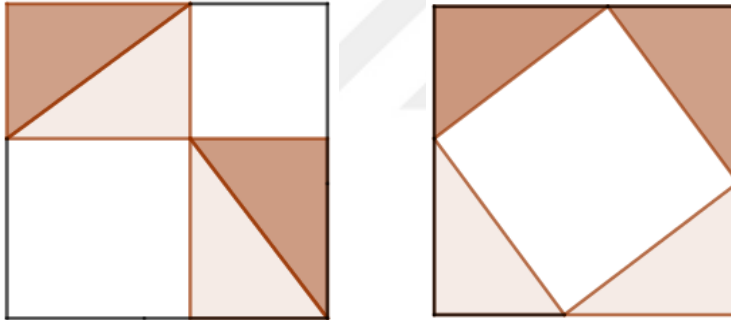
Daha önce ispat becerilerinizi geliştirmeye yönelik olarak ne tür dersler aldınız? İçerikleri nasıldı? Neler öğrendiniz?

1. İspat nedir? Görsel ispat denilince ne anlıyorsunuz? Yorumlayınız.

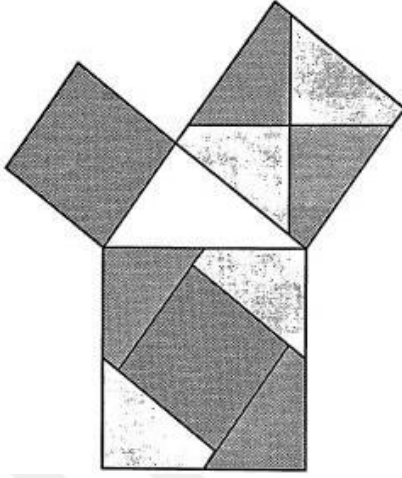
2. “Bir dik üçgende hipotenüsün uzunluğu, hipotenüse ait kenarortay uzunluğunun iki katıdır.” matematiksel ifadenin ispatını yapınız.

3. $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4.a.b$ verilen cebir formülünün görsel ispatını yapınız.

4. Aşağıda bir teoremin sözsüz ispatı verilmiştir. Verilen bu sözsüz ispatın hangi teoreme ait olduğunu ve ispatın nasıl yapıldığını açıklayınız. Aynı renklerde verilen alanlarının eşit olduğunu göz önünde bulundurunuz.

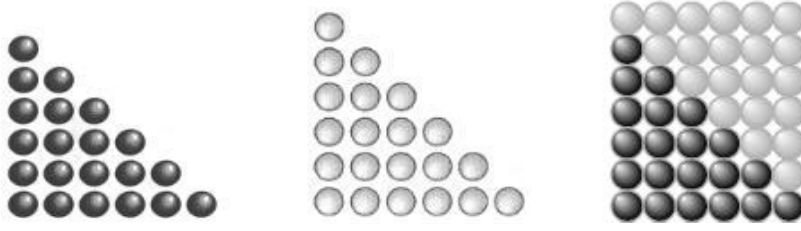


5. Dudeney tarafından yapılan ve Nelsen'in (1993) kitabında yer verilmiş olan aşağıdaki sözsüz ispatta ne yapılmaya çalışılmıştır? Alanlar üzerinden yola çıkarak yorumlayınız.

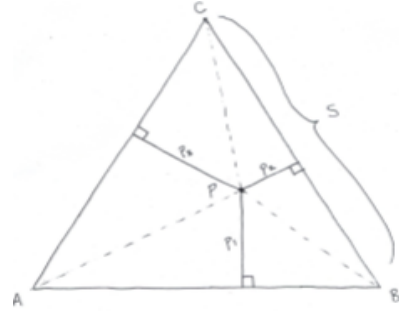
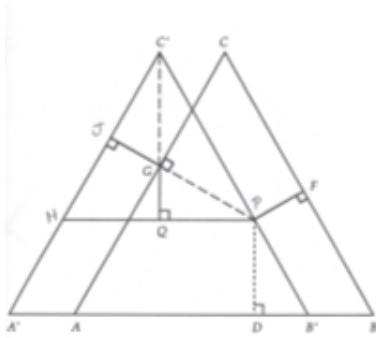


6. Dış açıortay teoremini üçgen üzerinde gösteriniz. Teoremi açıklayarak ispatını yapınız.

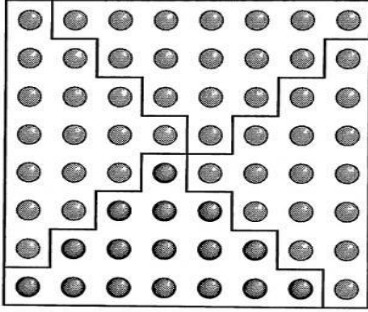
7. Aşağıdaki şekilde (Nelsen, 2000) matematiksel bir ifadenin sözsüz ispatı verilmiştir. Sizce bu ifade neyi ispatlamaktadır? Sözsüz ispatı verilen bu ifadenin formal ispatını yapınız.



8. Aşağıda verilen şekiller (Miller, 2012; Polat, 2018) görsel ispat örnekleri oluşturur mu? Görsel ispat olmayanları nedenleriyle açıklayarak yorumlayınız. Görsel ispat olabilmesi için şeklin nasıl bir yapıya sahip olması gerektiğini belirtiniz.

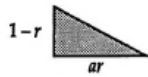
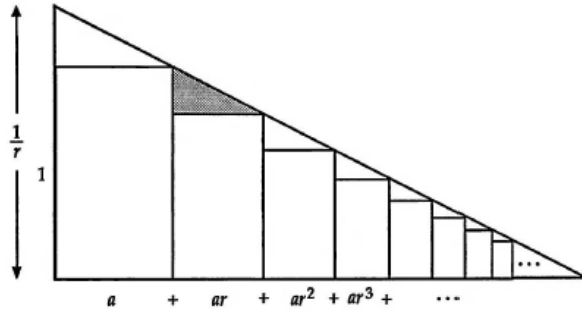


9. Aşağıdaki şekilde (Nelsen, 1993) verilen sözsüz ispat incelendiğinde hangi matematiksel ifade ispatlanmaya çalışılmıştır? Yapılanları açıklayınız.



$$\frac{1}{4}(2n)^2 = n^2$$

10. Aşağıdaki şekilde (Nelsen, 1993) ispatı verilmiş olan teoremin hangi teorem olduğunu bulunuz. İspat yapılırken hangi işlemlerden faydalandığınızı belirtiniz.



$$\frac{a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots}{1/r} = \frac{ar}{1-r}$$

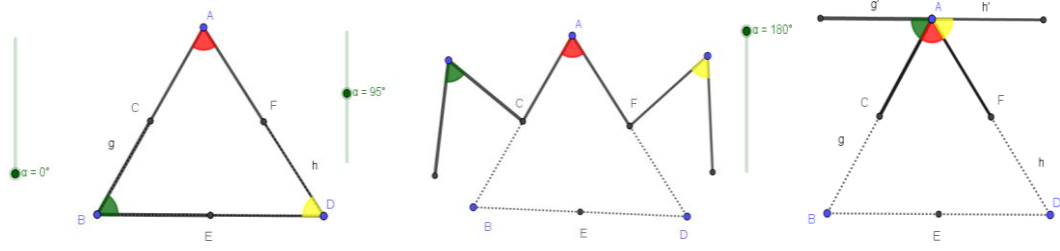
Ek 4. Değerlendirme Formu

Adı Soyadı:

1. Genel olarak teknoloji ile aranız nasıldır? Yeni bir teknoloji ile karşılaştığınızda neler hissedersiniz?
2. Kullandığınız teknolojiler nelerdir ve ne amaçla kullanıyorsunuz açıklayınız. (akıllı telefon, akıllı telefon uygulamaları, laptop, Ipad, sosyal medya, oyunlar, programlar vs.)
3. GeoGebra yazılımı hakkındaki genel düşünceleriniz nelerdir?
4. GeoGebra yazılımının derslerde kullanılabilmesi için nasıl bir ön hazırlık yapılmalıdır?
5. GeoGebra yazılımının ispat yaparken kullanımı hakkındaki düşünceleriniz nelerdir? Açıklayınız?
6. Ortaokul seviyesinde ispat öğretmek mümkün olabilir mi? İspatın programda yeri var mıdır? Düşüncelerinizi açıklayınız?
7. Öğrencilerinizin ispat yapma becerileri hakkında ne düşünüyorsunuz? (Öğretmenler için)
8. Sözsüz ispatların bir ispat yöntemi olarak derslerde kullanılması hakkında ne düşünüyorsunuz?
9. Sözsüz ispatların öğrencilerin ispat yapma becerisine etkisi ne olabilir? Açıklayınız?
10. Siz derslerinizde GeoGebra ve sözsüz ispat etkinliklerini kullanmayı tercih eder misiniz? Nedenini açıklayınız?
11. Derslerde yaptığımız etkinlikleri göz önünde bulundurarak GeoGebra yazılımının sözsüz ispat becerilerinin gelişmesine nasıl bir etkisi olduğunu örneklerle açıklayınız?
12. Etkili olmadığını düşündüğünüz ya da kullanılmasının zor olduğunu düşündüğünüz etkinlikler var mıydı? Varsa etkinlikleri belirterek yaşadığınız zorlukları açıklayınız.
13. GeoGebra yazılımında yapılan sözsüz ispat etkinliklerinde beğendiğiniz ya da öğretmen olduğunuzda kullanmayı tercih edeceğiniz etkinlikler var mıydı? Hangileri?
14. Yapılan etkinlikler ve ders süreci hakkında belirtmek istediğiniz her türlü görüş ve önerileriniz varsa ekleyiniz?

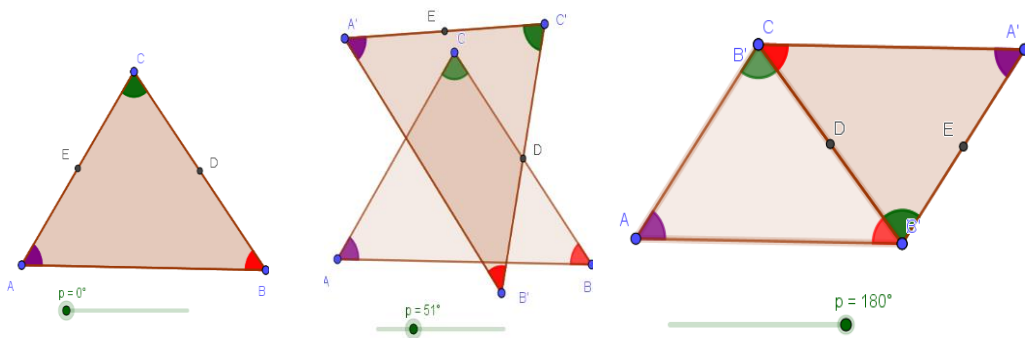
Ek 5. Görüşme Formu

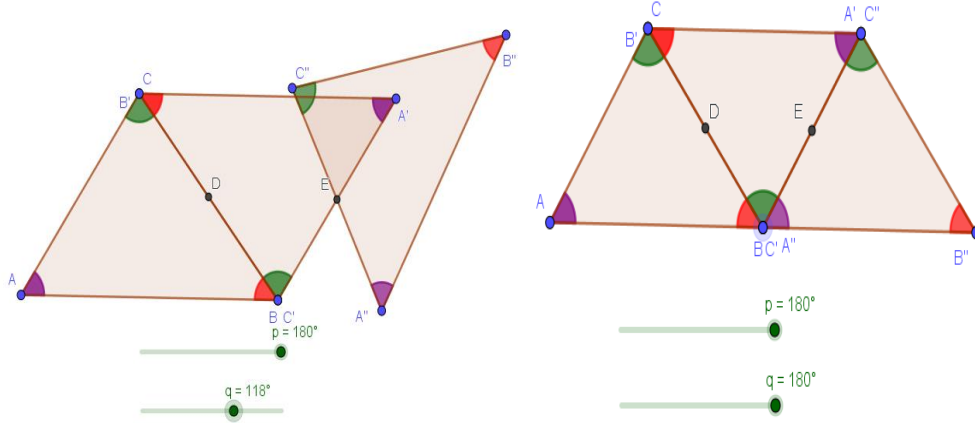
1.



- Derste GeoGebra yazılımında yapılan bu etkinliğin amacı nedir? Yapılan işlemleri özetleyiniz.
- Verilen üçgen geniş açılı üçgen de olsa aynı amaca ulaşır mıyız?
- Yapılan bu etkinliğin sözsüz ispat olup olmadığını nedenleriyle açıklayınız.
- Bu etkinliğin GeoGebra yazılımında yapılmasının öğrencilerin ispat yapma becerilerine etkisi nedir?
- Bu etkinliği derslerinizde kullanmak ister misiniz? Kullanma amacınızı açıklayınız.
- Etkinliği derste kullanmanın faydaları nelerdir?
- Bu etkinliği değerlendiriniz. Uygun olduğunu düşündüğünüz veya uygun olmadığını düşündüğünüz noktalar nelerdir?
- Ders süreci ve bu görüşmeyle ilgili başka görüş ve önerileriniz var mıdır?

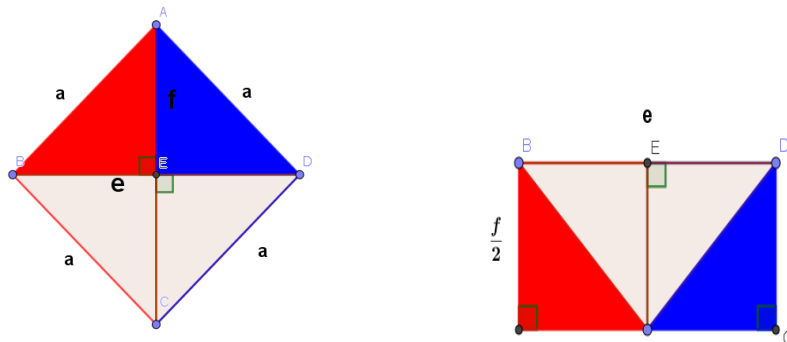
2.





- Derste GeoGebra yazılımında yapılan bu etkinliğin amacı nedir? Yapılan işlemleri özetleyiniz.
- Yapılan bu etkinliğin sözsüz ispat olup olmadığını nedenleriyle açıklayınız.
- Bu etkinliğin GeoGebra yazılımında yapılmasının öğrencilerin ispat yapma becerilerine etkisi nedir?
- Bu etkinliği derslerinizde kullanmayı tercih eder misiniz? Kullanma amacınızı açıklayınız.
- Etkinliği derste kullanmanın faydaları nelerdir?
- Bu etkinliği değerlendiriniz. Uygun olduğunu düşündüğünüz veya uygun olmadığını düşündüğünüz noktalar nelerdir?
- Ders süreci ve bu görüşmeyle ilgili başka görüş ve önerileriniz var mıdır?

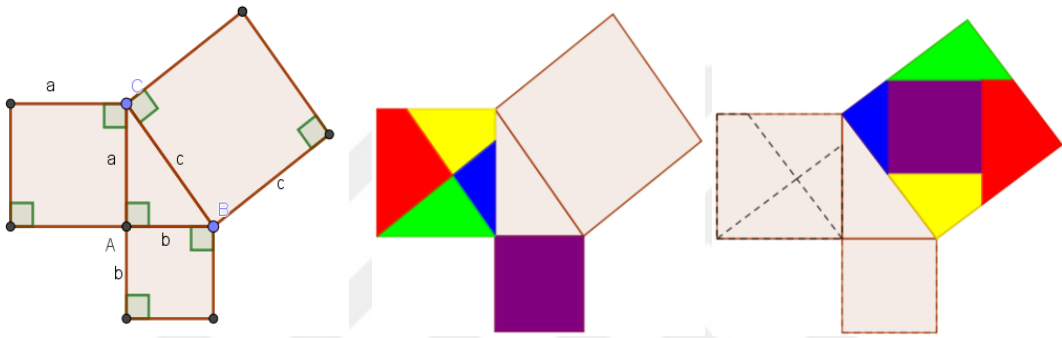
3.



- Derste GeoGebra yazılımında yapılan bu etkinliğin amacı nedir? Yapılan işlemleri özetleyiniz.
- Yapılan bu etkinliğin sözsüz ispat olup olmadığını nedenleriyle açıklayınız.

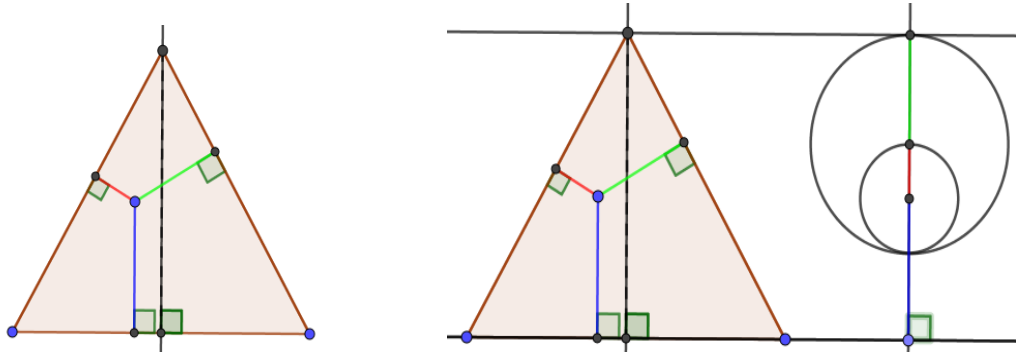
- Bu etkinliğin GeoGebra yazılımında yapılmasının öğrencilerin ispat yapma becerilerine etkisi nedir?
- Bu etkinliği derslerinizde kullanmak ister misiniz? Kullanma amacınızı açıklayınız.
- Etkinliği derste kullanmanın faydaları nelerdir?
- Bu etkinliği değerlendiriniz. Uygun olduğunu düşündüğünüz veya uygun olmadığını düşündüğünüz noktalar nelerdir?
- Ders süreci ve bu görüşmeyle ilgili başka görüş ve önerileriniz var mıdır?

4.



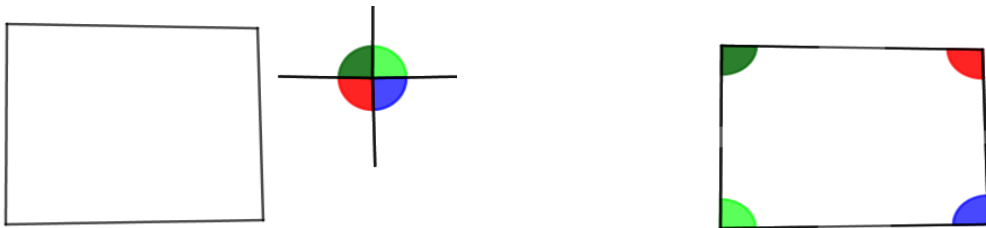
- Derste GeoGebra yazılımında yapılan bu etkinliğin amacı nedir? Yapılan işlemleri özetleyiniz.
- Yapılan bu etkinliğin sözsüz ispat olup olmadığını nedenleriyle açıklayınız.
- Bu etkinliğin GeoGebra yazılımında yapılmasının öğrencilerin ispat yapma becerilerine etkisi nedir?
- Bu etkinliği derslerinizde kullanmak ister misiniz? Kullanma amacınızı açıklayınız.
- Etkinliği derste kullanmanın faydaları nelerdir?
- Bu etkinliği değerlendiriniz. Uygun olduğunu düşündüğünüz veya uygun olmadığını düşündüğünüz noktalar nelerdir?
- Ders süreci ve bu görüşmeyle ilgili başka görüş ve önerileriniz var mıdır?

5.



- Derste GeoGebra yazılımında yapılan bu etkinliğin amacı nedir? Yapılan işlemleri özetleyiniz.
- Yapılan bu etkinliğin sözsüz ispat olup olmadığını nedenleriyle açıklayınız.
- Bu etkinliğin GeoGebra yazılımında yapılmasının öğrencilerin sözsüz ispat yapma becerilerine etkisi nedir?
- Bu etkinliği derslerinizde kullanmak ister misiniz? Kullanma amacınızı açıklayınız.
- Etkinliği derste kullanmanın faydaları nelerdir?
- Bu etkinliği değerlendiriniz. Uygun olduğunu düşündüğünüz veya uygun olmadığını düşündüğünüz noktalar nelerdir?
- Ders süreci ve bu görüşmeyle ilgili başka görüş ve önerileriniz var mıdır?

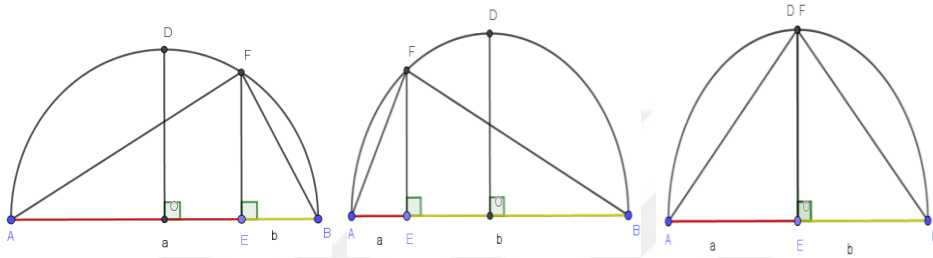
6.



- Derste GeoGebra yazılımında yapılan bu etkinliğin amacı nedir? Yapılan işlemleri özetleyiniz.
- Verilen dörtgen hakkında ne söylenebilir? Herhangi bir dörtgen olabilir mi? Tartışınız.
- Yapılan bu etkinliğin sözsüz ispat olup olmadığını nedenleriyle açıklayınız.
- Bu etkinliğin GeoGebra yazılımında yapılmasının öğrencilerin ispat yapma becerilerine etkisi nedir?

- Bu etkinliği derslerinizde kullanmak ister misiniz? Kullanma amacınızı açıklayınız.
- Etkinliği derste kullanmanın faydaları nelerdir?
- Bu etkinliđi deđerlendiriniz. Uygun olduđunu dűşündüğünüz veya uygun olmadıđını dűşündüğünüz noktalar nelerdir?
- Ders süreci ve bu görüşmeyle ilgili başka görüş ve önerileriniz var mıdır?

7.



- Derste GeoGebra yazılımında yapılan bu etkinliğin amacı nedir? Yapılan işlemleri özetleyiniz.
- Yapılan bu etkinliğin sözsüz ispat olup olmadığını nedenleriyle açıklayınız.
- Bu etkinliğin GeoGebra yazılımında yapılmasının öğrencilerin ispat yapma becerilerine etkisi nedir?
- Bu etkinliği derslerinizde kullanmak ister misiniz? Kullanma amacınızı açıklayınız.
- Etkinliği derste kullanmanın faydaları nelerdir?
- Bu etkinliđi deđerlendiriniz. Uygun olduđunu dűşündüğünüz veya uygun olmadıđını dűşündüğünüz noktalar nelerdir?
- Ders süreci ve bu görüşmeyle ilgili başka görüş ve önerileriniz var mıdır?

8.

yüksekliği 3 br olan konideki su,
eş yarıçaplı silindire boşaltılacaktır.
silindirdeki suyun yüksekliğini bulunuz.

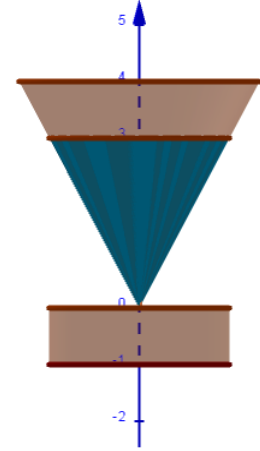


BAŞLAT

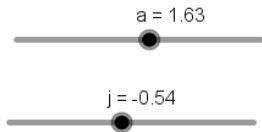
DURDUR

BAŞA DÖN

SON HALİ



yüksekliği 3 br olan konideki su,
eş yarıçaplı silindire boşaltılacaktır.
silindirdeki suyun yüksekliğini bulunuz.

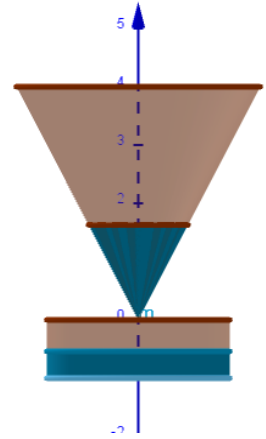


BAŞLAT

DURDUR

BAŞA DÖN

SON HALİ



yüksekliği 3 br olan konideki su,
eş yarıçaplı silindire boşaltılacaktır.
silindirdeki suyun yüksekliğini bulunuz.

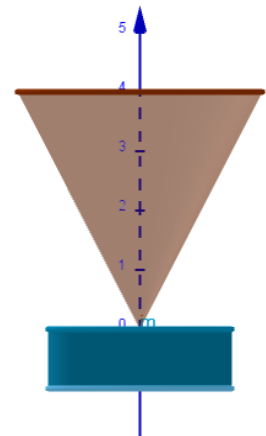


BAŞLAT

DURDUR

BAŞA DÖN

SON HALİ



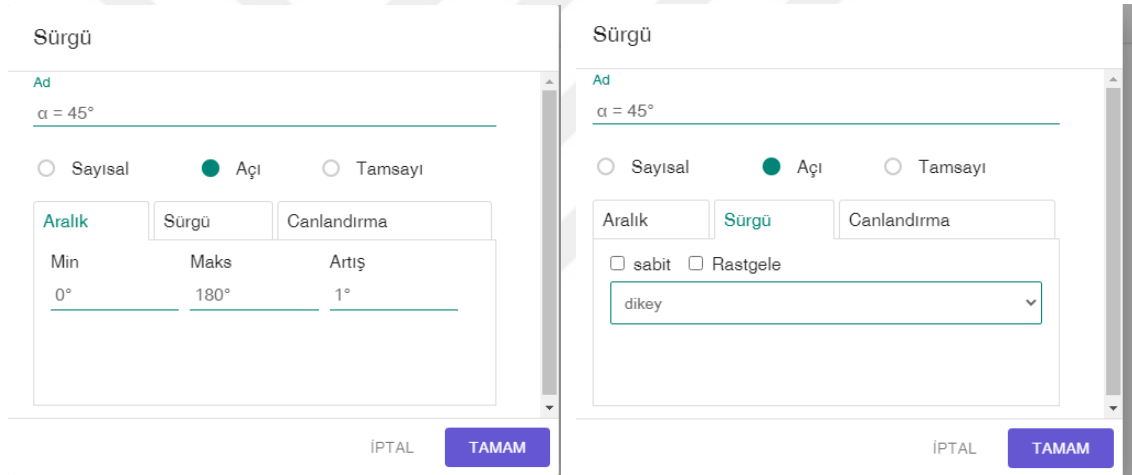
- Derste GeoGebra yazılımında yapılan bu etkinliğin amacı nedir? Yapılan işlemleri özetleyiniz.
- Yapılan bu etkinliğin sözsüz ispat olup olmadığını nedenleriyle açıklayınız.
- Bu etkinliğin GeoGebra yazılımında yapılmasının öğrencilerin ispat yapma becerilerine etkisi nedir?
- Derslerinizde bu etkinliği kullanmak ister miydiniz? Kullanma amacınızı açıklayınız.
- Etkinliği derste kullanmanın faydaları nelerdir?
- Bu etkinliği değerlendiriniz. Uygun olduğunu düşündüğünüz veya uygun olmadığını düşündüğünüz noktalar nelerdir?
- Ders süreci ve bu görüşmeyle ilgili başka görüş ve önerileriniz var mıdır?

Ek 6. Etkinlikler

1. Etkinlik

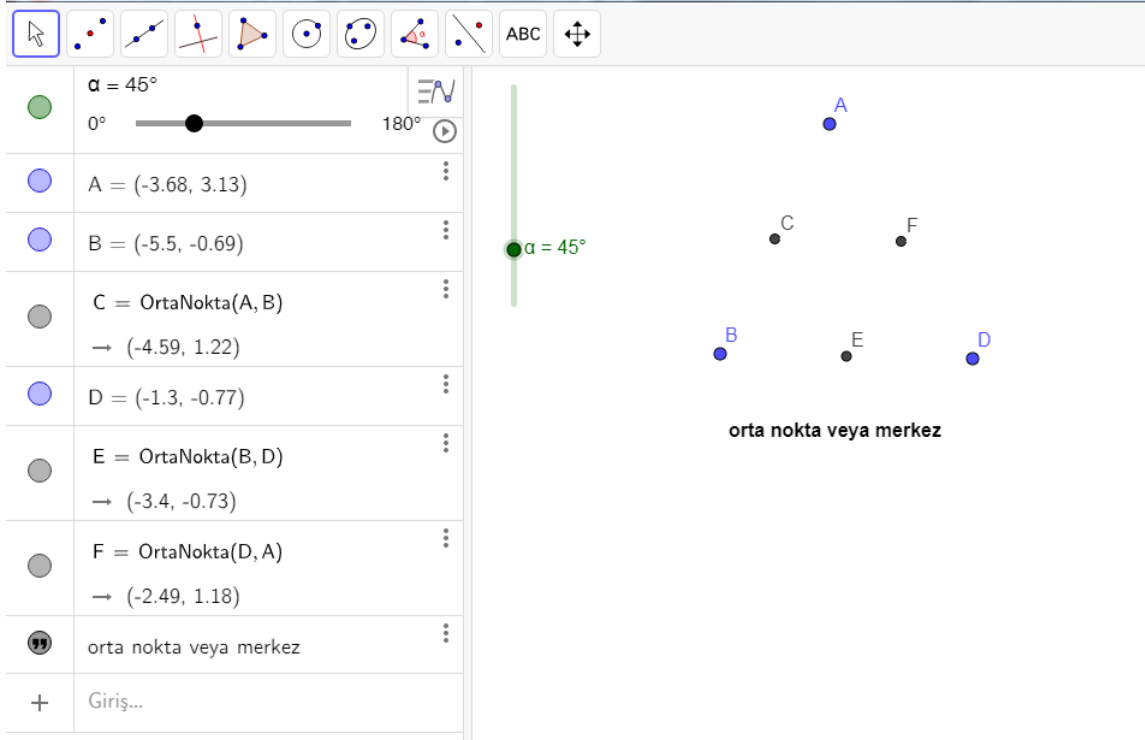
Etkinliğin Adı: Üçgenin İç Açıları Toplamı 180° 'dir Birinci Etkinliği

- Bir GeoGebra dosyası açılır.
- Grafik penceresinde sağ tık yapılarak “Eksenler” ve “Izgara” kaldırılır.
- “Ayarlar” bölümünde Etiketlendirme özelliği “Sadece yeni noktalar” olarak değiştirilir.
- Araç Çubuklarındaki “Sürgü” aracı ile açı sürgüsü (α) oluşturulur. Bu sürgü oluşturulurken min: 0° , maks: 180° , artış: 1° ve sürgü şekli “Dikey” yapılır. Sürgü aracı Şekil 40'ta gösterilmiştir.



Şekil 40. İlk Etkinlikte Oluşturulan Sürgü Aracı

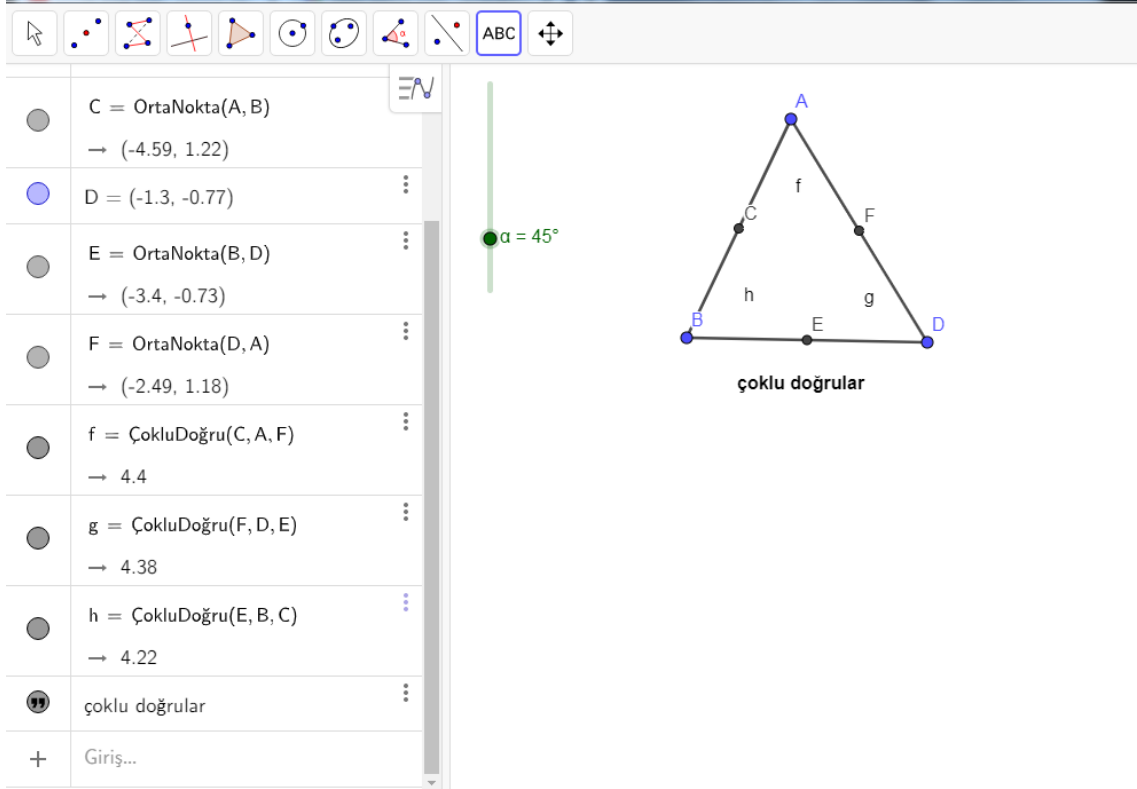
- Dinamik bir üçgen oluşturmak için araç çubuklarındaki “Orta Nokta veya Merkez” seçilerek oluşturulmak istenen üçgenin köşeleri ve orta noktaları oluşturulur. Orta nokta veya merkez aracı ile yapılan işlemler Şekil 41’de gösterilmiştir.



Şekil 41. İlk Etkinlikte Oluşturulan Orta Nokta veya Merkez Aracı ile Yapılan İşlemler

Şekil 41’de belirlenen A, B ve C noktaları oluşturulacak olan üçgenin köşeleridir. C, E ve F noktaları ise üçgenin kenarlarının orta noktalarıdır.

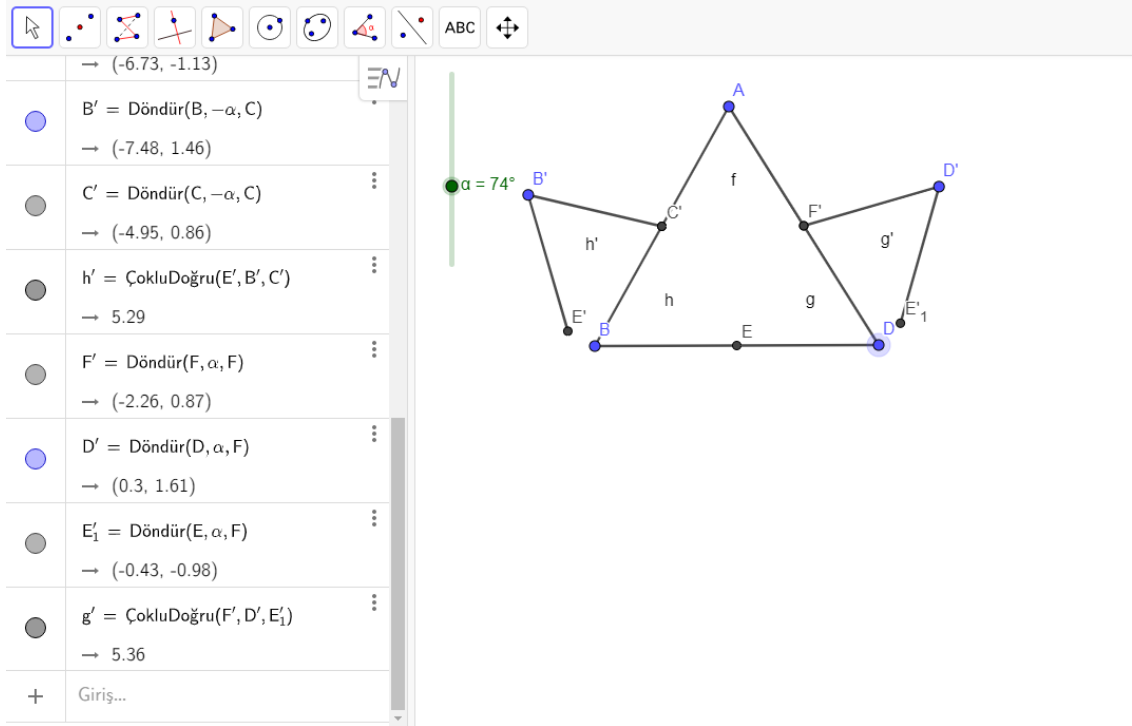
- Üçgenin dinamik olarak kenarlarını oluşturmak için “Çoklu Doğru” aracı seçilir. Çoklu doğrular, üçgenin bir köşesi ve iki orta noktası seçilerek oluşturulur. Saat yönünde önce orta nokta seçilir sonra üçgenin köşesi seçilir. Daha sonra diğer orta nokta ve başta seçilen orta nokta tekrar seçilerek çoklu doğru oluşturulur. Çoklu doğru aracı ile yapılan işlemler Şekil 42’de gösterilmiştir.



Şekil 42. İlk Etkinlikte Oluşturulan Çoklu Doğru Aracı ile Yapılan İşlemler

Şekil 42’de çoklu doğru aracı seçildikten sonra sırasıyla C, A, F ve C noktası seçilerek ilk çoklu doğru (f) oluşturulmuştur. Sırasıyla F, D, E ve F noktaları seçilerek ikinci çoklu doğru (g) oluşturulmuştur. Sırasıyla E, B, C ve E noktaları seçilerek üçüncü çoklu doğru (h) oluşturulmuştur.

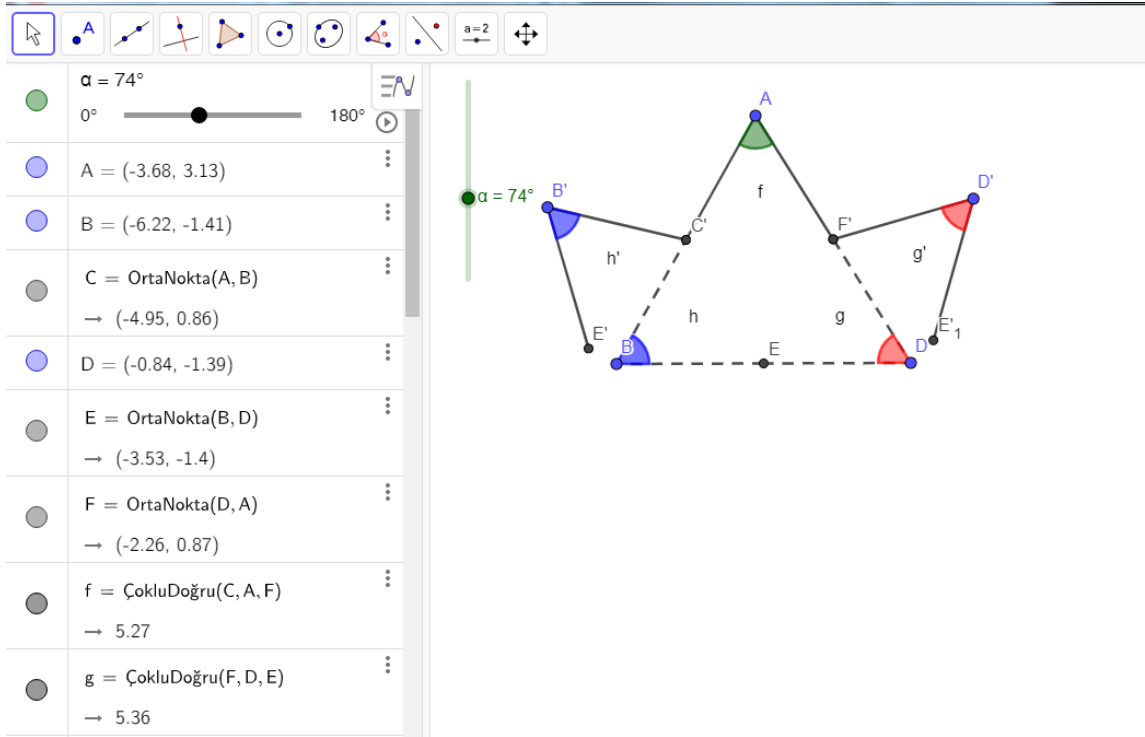
- Sürgüyü değiştirdikçe çoklu doğruların hareketini sağlamak için giriş alanından “Döndür (Nesne, açı, nokta)” komutu seçilir. Önce h çoklu doğrusu için “Döndür (h, $-\alpha$, C)”, ardından g çoklu doğrusu için “Döndür (g, α , F)” yazılarak döndürme işlemleri tamamlanır. Döndür komutu ile yapılan işlemler Şekil 43’te gösterilmiştir.



Şekil 43. İlk Etkinlikte Oluşturulan Döndür Komutu ile Yapılan İşlemler

Şekil 43'te yapılan döndürme işlemleri sonucunda h çoklu doğrusunun C noktası etrafında $-\alpha$ kadar döndürülmesiyle h' , g çoklu doğrusunun F noktası etrafında α kadar döndürülmesiyle g' çoklu doğrusu oluşturulmuştur.

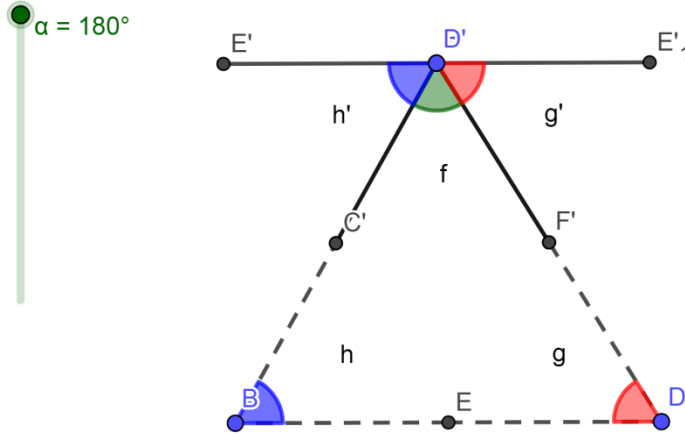
- Araç çubuklarındaki “Açı” aracı ile üçgenin tüm iç açıları bulunur. İç açıları bulunurken saat yönünde olacak şekilde noktalar seçilir. Açılarının üstünde sağ tık yapılarak “Ayarlar” bölümündeki “Renk” seçeneklerinde her bir açı farklı renkle renklendirilerek “Donukluk” 100 yapılır. Sürgü 0° 'den farklı olduğu zaman döndürülerek oluşturulan çoklu doğruların açıları da oluşturuldukları çoklu doğruların açılarıyla aynı renkte oluşturulur. g ve h çoklu doğrularının stilini değiştirmek için çoklu doğruların üstünde sağ tık yapılarak “Ayarlar” bölümünde “Stil” seçeneklerinde Doğru Stili - - - - seçilir. Açılar ve doğru stilleri ile yapılan işlemler Şekil 44'te gösterilmiştir.



Şekil 44. İlk Etkinlikte Açıların Renklendirilmesi ve Doğruların Stili ile Yapılan İşlemler

Şekil 44'te üçgenin iç açıları mavi, kırmızı ve yeşil renk yapılmıştır. Mavi açının bulunduğu çoklu doğrunun (h) döndürülmesiyle oluşan çoklu doğrudaki (h') açı mavi renk, kırmızı açının bulunduğu çoklu doğrunun (g) döndürülmesiyle oluşan çoklu doğrudaki (g') açı kırmızı renk yapılmıştır.

- Sürgü 180° 'ye getirildiğinde h' ve g' çoklu doğruları tepe noktasında doğrusal bir açı oluşturur. Yapılan etkinlik Şekil 45'te gösterilmiştir.

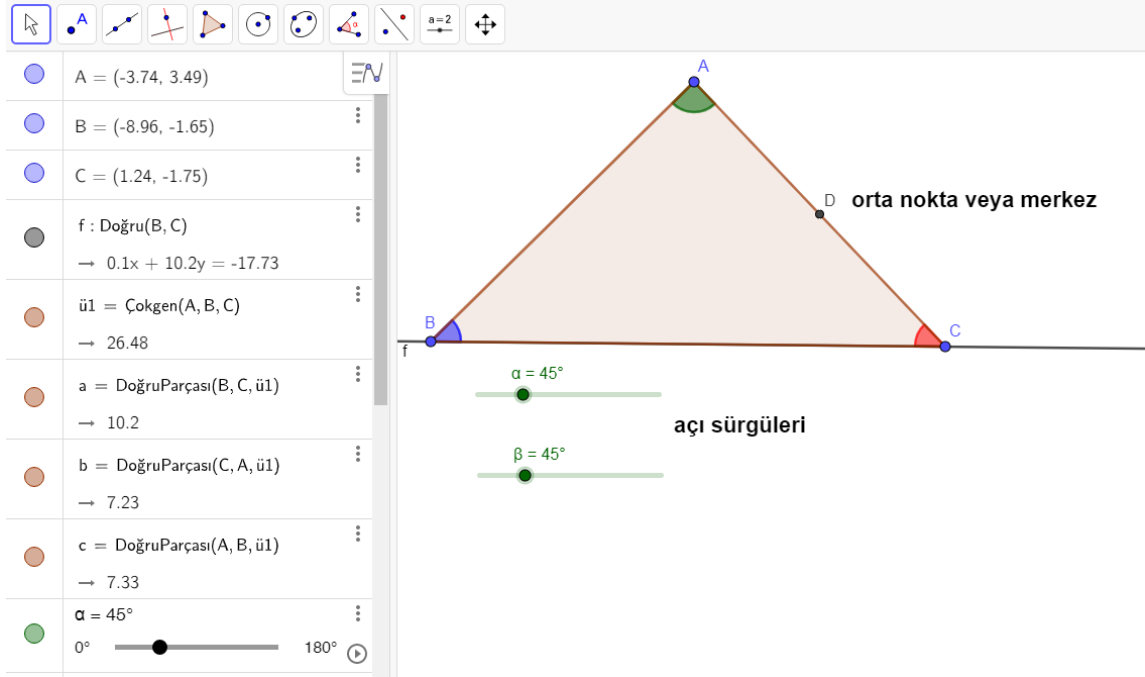


Şekil 45. GeoGebra Yazılımında Yapılan İlk Etkinlik

2. Etkinlik

Etkinliğin Adı: Üçgenin İç Açıları Toplamı 180° 'dir İkinci Etkinliği

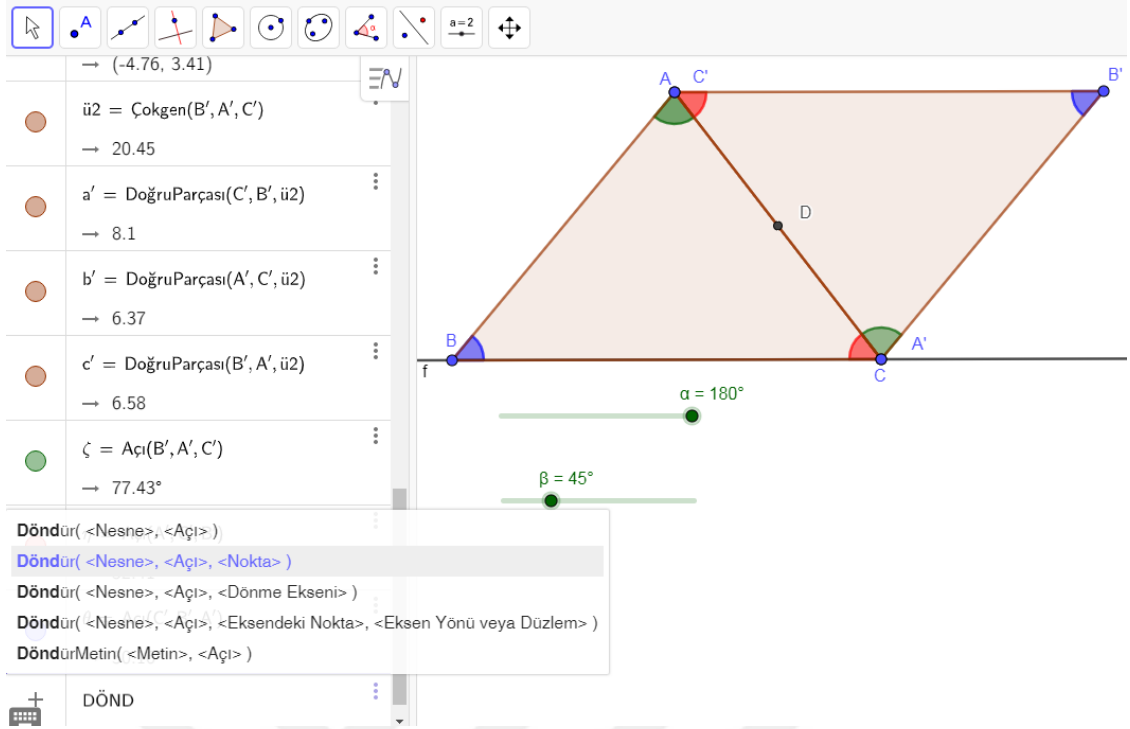
- Bir GeoGebra dosyası açılır.
- Grafik penceresinde sağ tık yapılarak “Eksenler” ve “Izgara” kaldırılır.
- “Ayarlar” bölümünde Etiketlendirme özelliği “Sadece yeni noktalar” olarak değiştirilir.
- Üçgen çizmek için önce grafik penceresinde bir nokta ve bir doğru oluşturulur. Sonra “Çokgen” aracı seçilerek oluşturduğumuz noktadan ve doğrunun iki noktasından geçen bir üçgen çizilir.
- Araç çubuklarındaki “Sürgü” aracı ile iki tane açı sürgüsü (α ve β) oluşturulur. Bu sürgüler oluşturulurken min: 0° , maks: 180° ve artış: 1° yapılır.
- Araç çubuklarındaki “Açı” aracı ile üçgenin tüm iç açıları bulunur. Açılarının üstünde sağ tık yapılarak “Ayarlar” bölümündeki “Renk” seçeneklerinde her bir açı farklı renkle renklendirilerek “Donukluk” 100 yapılır.
- Üçgenin sağ kenarının orta noktası “Orta Nokta veya Merkez” aracı seçilerek bulunur. Oluşturulan üçgen ve yapılan işlemler Şekil 46’da gösterilmiştir.



Şekil 46. İkinci Etkinlikte Oluşturulan Üçgen ve Yapılan İşlemler

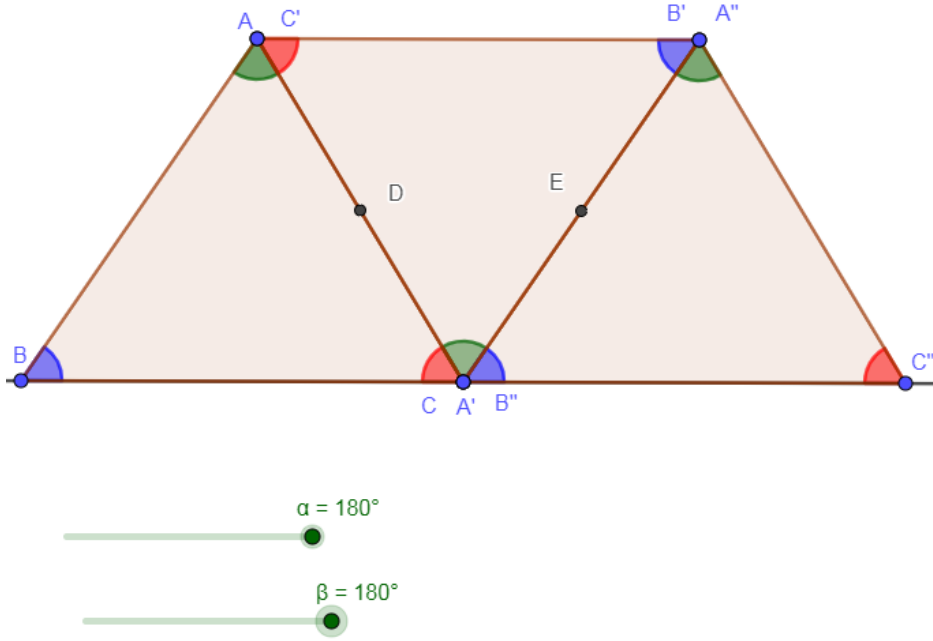
Şekil 46’da oluşturulan A noktası ve f doğrusunun B ve C noktalarından çizilen ABC üçgeninin açıları yeşil, kırmızı ve mavi olarak renklendirilmiş, A noktası ile C noktasının orta noktası D noktası olarak bulunmuştur.

- Üçgenin köşelerini D orta noktasından $-\alpha$ kadar döndürmek için giriş alanında “Döndür (Nesne, Açı, Nokta)” komutu seçilir.
Giriş alanına “Döndür (A, $-\alpha$, D)” yazılarak A' noktası,
Giriş alanına “Döndür (B, $-\alpha$, D)” yazılarak B' noktası,
Giriş alanına “Döndür (C, $-\alpha$, D)” yazılarak C' noktası oluşturulur.
- Oluşan A' , B' ve C' noktalarından “Çokgen” aracı ile üçgen oluşturulur.
- Yeni oluşan üçgenin iç açıları “Açı” aracıyla bulunur ve oluştukları üçgende iç açıların renkleriyle aynı renk yapılır. α sürgüsü 180° ’ye getirildiğinde döndürülerek oluşturulan üçgen ve yapılan işlemler Şekil 47’de gösterilmiştir.



Şekil 47. İkinci Etkinlikte Oluşturulan İkinci Üçgen ve Yapılan İşlemler

- α sürgüsü 0° ve 180° 'den farklı olacak şekilde önce “Orta Nokta veya Merkez” aracı sonra A' , B' noktaları seçilerek $[B'A']$ kenarının orta noktası (E noktası) bulunur.
- Yeni oluşan üçgenin köşelerini E orta noktasından $-\beta$ açısı kadar döndürmek için giriş alanında “Döndür (Nesne, Açık, Nokta)” komutu seçilir.
 Giriş alanına “Döndür (A' , $-\beta$, E)” yazılarak A'' noktası,
 Giriş alanına “Döndür (B' , $-\beta$, E)” yazılarak B'' noktası,
 Giriş alanına “Döndür (C' , $-\beta$, E)” yazılarak C'' noktası oluşturulur.
- Oluşan A'' , B'' ve C'' noktalarından “Çokgen” aracı ile üçgen oluşturulur.
- Yeni oluşan üçgenin iç açıları “Açık” aracıyla bulunur ve oluştukları üçgende iç açıların renkleriyle aynı renk yapılır. β sürgüsü 180° 'ye getirildiğinde oluşturulan üçgen sonucu yapılan etkinlik Şekil 48'de gösterilmiştir.



Şekil 48. GeoGebra Yazılımında Yapılan İkinci Etkinlik

3. Etkinlik

Etkinliğin Adı: Dörtgenin İç Açıları Toplamına İlişkin Etkinlik

- Bir GeoGebra dosyası açılır.
- Grafik penceresinde sağ tık yapılarak “Eksenler” ve “Izgara” kaldırılır.
- “Ayarlar” bölümünde Etiketlendirme özelliği “Sadece yeni noktalar” olarak değiştirilir.
- Araç çubuklarındaki “Sürgü” aracı ile yarıçap sürgüsü (r) oluşturulur. Bu sürgü oluşturulurken min: 0, maks: 5 ve artış: 1 yapılır.
- Araç çubuklarındaki “Çember: Merkez & Yarıçap” aracı seçilerek yarıçapı r sürgüsü kadar olan 4 tane çember çizilir.
- Bu çemberlerin merkezleri araç çubuklarındaki “Doğru Parçaları” ile birleştirilir.
- Doğru parçalarıyla çemberlerin kesişim noktalarını bulmak için önce araç çubuklarındaki “Kesiştir” aracı ardından doğru parçaları ve çemberler seçilir. Ayrıca araç çubuklarındaki “Nokta” aracı seçilerek dışarıda bir nokta oluşturulur.
- Araç çubuklarındaki “Sürgü” aracı seçilerek k sürgüsü oluşturulur. Bu sürgü oluşturulurken min: 0, maks: 6 ve artış: 0.01 yapılır.

- Giriş alanında “Eğer (<Şart>, <Doğruysa>, <Doğru Değilse>)” komutu seçilir. $k_1 = \text{Eğer } (k < 1, k, 1)$ oluşturulur. Ardından “Eğer (<Şart>, <Doğruysa>, <Doğru Değilse>)” yazılırken “<Doğru Değilse>” bölümüne tekrar “Eğer (<Şart>, <Doğruysa>, <Doğru Değilse>)” yazılır. Sırasıyla yapılacak işlemler aşağıda verilmiştir.

$$k_2 = \text{Eğer } (k < 1, 0, \text{Eğer } (k < 2, k - 1, 1))$$

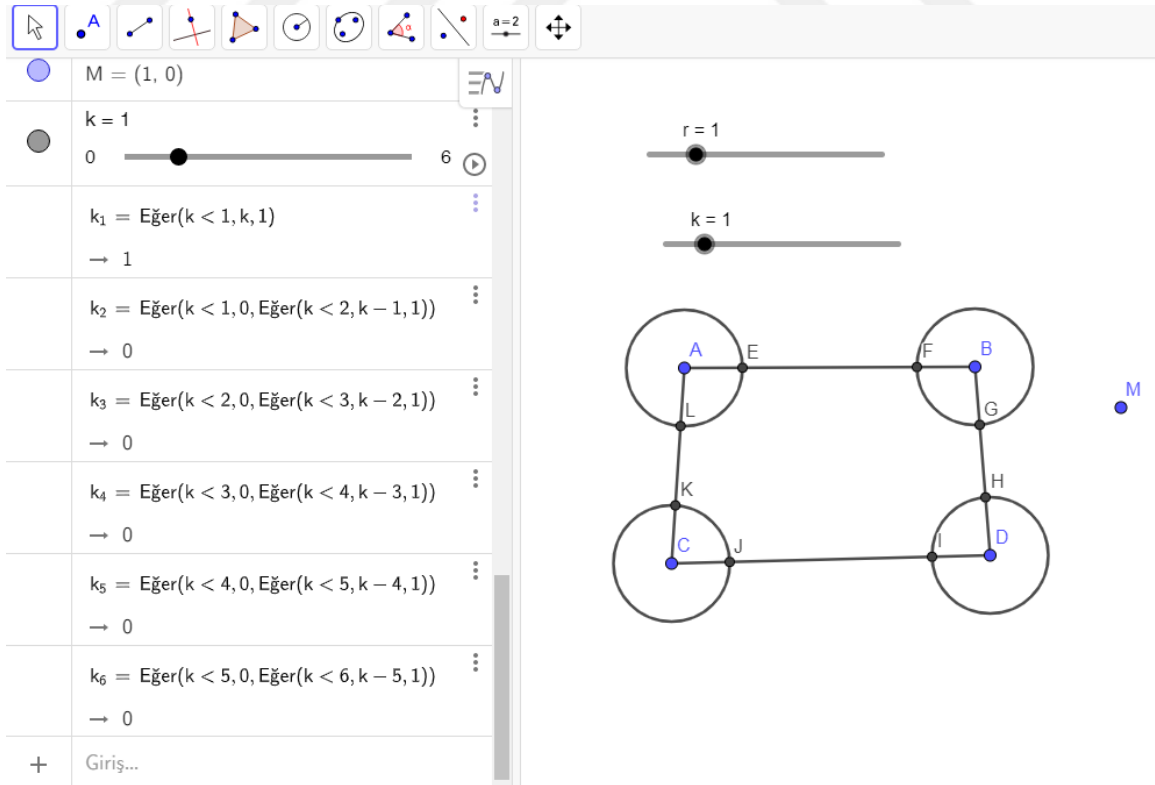
$$k_3 = \text{Eğer } (k < 2, 0, \text{Eğer } (k < 3, k - 2, 1))$$

$$k_4 = \text{Eğer } (k < 3, 0, \text{Eğer } (k < 4, k - 3, 1))$$

$$k_5 = \text{Eğer } (k < 4, 0, \text{Eğer } (k < 5, k - 4, 1))$$

$$k_6 = \text{Eğer } (k < 5, 0, \text{Eğer } (k < 6, k - 5, 1))$$

- Giriş alanında yapılan işlemlerin sağ üst köşesindeki üç nokta bölümünde “Girdiyi Çoğalt” seçilerek işlemler tekrar yazılmadan oluşturulabilir ve değiştirilebilir. Çizilen çemberler ve yapılan işlemler Şekil 49’da verilmiştir.



Şekil 49. Üçüncü Etkinlikte Oluşturulan Çemberler ve Yapılan İşlemler

- Giriş alanında “Ötele (<Nesne>, <Vektör>)” komutu seçilir. Başlangıç noktası C, bitiş noktası M olan vektör kadar C, J ve K noktalarının ötelenmesi için “Ötele (<Nesne>, <Vektör>)” komutunun nesne kısmına C, J ve K noktaları sırasıyla yazılır, ardından vektör kısmına tekrar “Vektör (<Başlangıç>, <Bitiş>)” komutu yazılır. Bu vektörün başlangıç noktasına C, bitiş noktasına M yazılır. Son olarak k_1 yazılarak öteleme hareketi tamamlanır. Yapılan işlemler sırasıyla aşağıda verilmiştir.

Ötele (C, Vektör (Vektör (C, M) k_1))

Ötele (J, Vektör (Vektör (C, M) k_1))

Ötele (K, Vektör (Vektör (C, M) k_1))

Öteleme hareketleri sonucunda sırasıyla C' , J' ve K' noktaları oluşur. C' noktasından J' ve K' noktalarına doğru parçaları oluşturulur.

- Giriş alanında “Döndür (<Nesne>, <Açı>, <Nokta>)” komutu seçilir. Sırasıyla aşağıda verilen işlemler yapılır.

Döndür (H, π k_2 , D)

Döndür (I, π k_2 , D)

Döndürme hareketleri sonucunda sırasıyla H' ve I' noktaları oluşur.

- Giriş alanında “Ötele (<Nesne>, <Vektör>)” komutu seçilir. Başlangıç noktası D, bitiş noktası M olan vektör kadar H' , I' ve D noktalarının ötelenmesi için “Ötele (<Nesne>, <Vektör>)” komutunun nesne kısmına H' , I' ve D noktaları sırasıyla yazılır, ardından vektör kısmına tekrar “Vektör (<Başlangıç>, <Bitiş>)” komutu yazılır. Başlangıç noktasına D, bitiş noktasına M yazılır. Son olarak k_3 yazılarak öteleme hareketi tamamlanır. Yapılan işlemler sırasıyla aşağıda verilmiştir.

Ötele (H' , Vektör (Vektör (D, M) k_3))

Ötele (I' , Vektör (Vektör (D, M) k_3))

Ötele (D, Vektör (Vektör (D, M) k_3))

Öteleme hareketleri sonucunda H'' , I'' ve D' noktaları oluşur.

- Giriş alanında “Ötele (<Nesne>, <Vektör>)” komutu seçilir. Başlangıç noktası B, bitiş noktası M olan vektör kadar B, F ve G noktalarının ötelenmesi için “Ötele (<Nesne>, <Vektör>)” komutunun nesne kısmına B, F ve G noktaları sırasıyla yazılır, ardından vektör kısmına tekrar “Vektör (<Başlangıç>, <Bitiş>)” komutu yazılır. Başlangıç noktasına B, bitiş noktasına M yazılır. Son olarak k_4

yazılarak öteleme hareketi tamamlanır. Yapılan işlemler sırasıyla aşağıda verilmiştir.

Ötele (B, Vektör (Vektör (B, M) k_4))

Ötele (F, Vektör (Vektör (B, M) k_4))

Ötele (G, Vektör (Vektör (B, M) k_4))

Öteleme hareketleri sonucunda B' , F' ve G' noktaları oluşur.

- Giriş alanında “Döndür (<Nesne>, <Açı>, <Nokta>)” komutu seçilir. Sırasıyla aşağıda verilen işlemler yapılır.

Döndür (E, π k_5 , A)

Döndür (L, π k_5 , A)

Döndürme hareketleri sonucunda E' ve L' noktaları oluşur.

- Giriş alanında “Ötele (<Nesne>, <Vektör>)” komutu seçilir. Başlangıç noktası A, bitiş noktası M olan vektör kadar E' , L' ve A noktalarının ötelenmesi için “Ötele (<Nesne>, <Vektör>)” komutunun nesne kısmına E' , L' ve A noktaları sırasıyla yazılır, ardından vektör kısmına tekrar “Vektör (<Başlangıç>, <Bitiş>)” komutu yazılır. Başlangıç noktasına A, bitiş noktasına M yazılır. Son olarak k_6 yazılarak öteleme hareketi tamamlanır. Yapılan işlemler sırasıyla aşağıda verilmiştir.

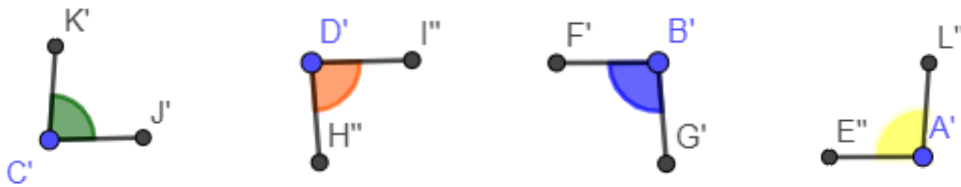
Ötele (E' , Vektör (Vektör (A, M) k_6))

Ötele (L' , Vektör (Vektör (A, M) k_6))

Ötele (A, Vektör (Vektör (A, M) k_6))

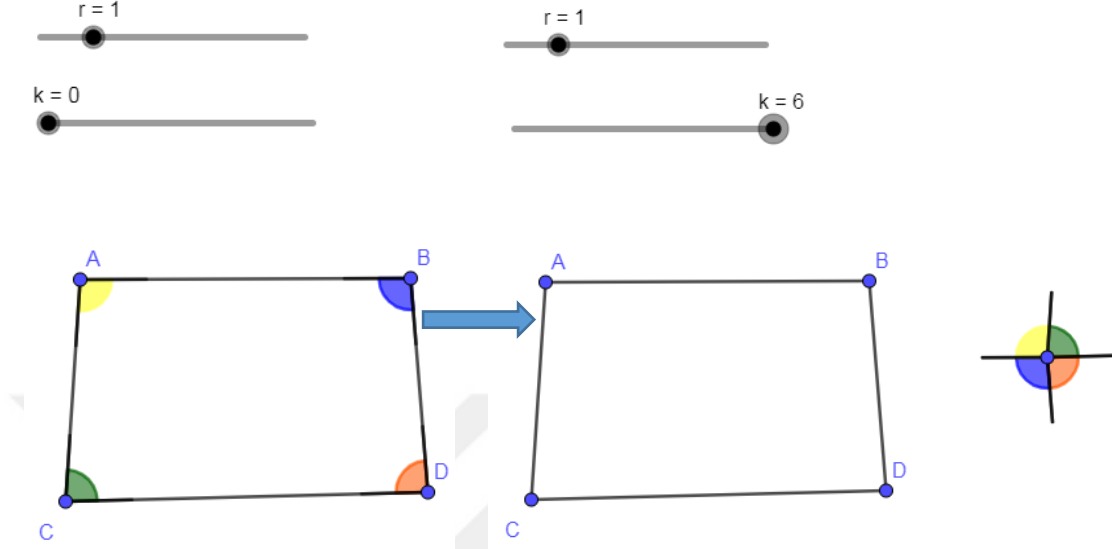
Öteleme hareketleri sonucunda E'' , L'' ve A' noktaları oluşur.

- Öteleme hareketleri sonucunda tam açığı oluşturacak olan açı kolları Şekil 50’de gösterilmiştir.



Şekil 50. Üçüncü Etkinlikte Öteleme Hareketleri Sonucu Oluşan Açı Kolları

- Çember ve noktaların “Nesneyi Göster” den görünümü gizlenerek yalnızca ABCD dörtgeni ve oluşan tam açı bırakılır. GeoGebra programında yapılan üçüncü etkinlik Şekil 51’de gösterilmiştir.

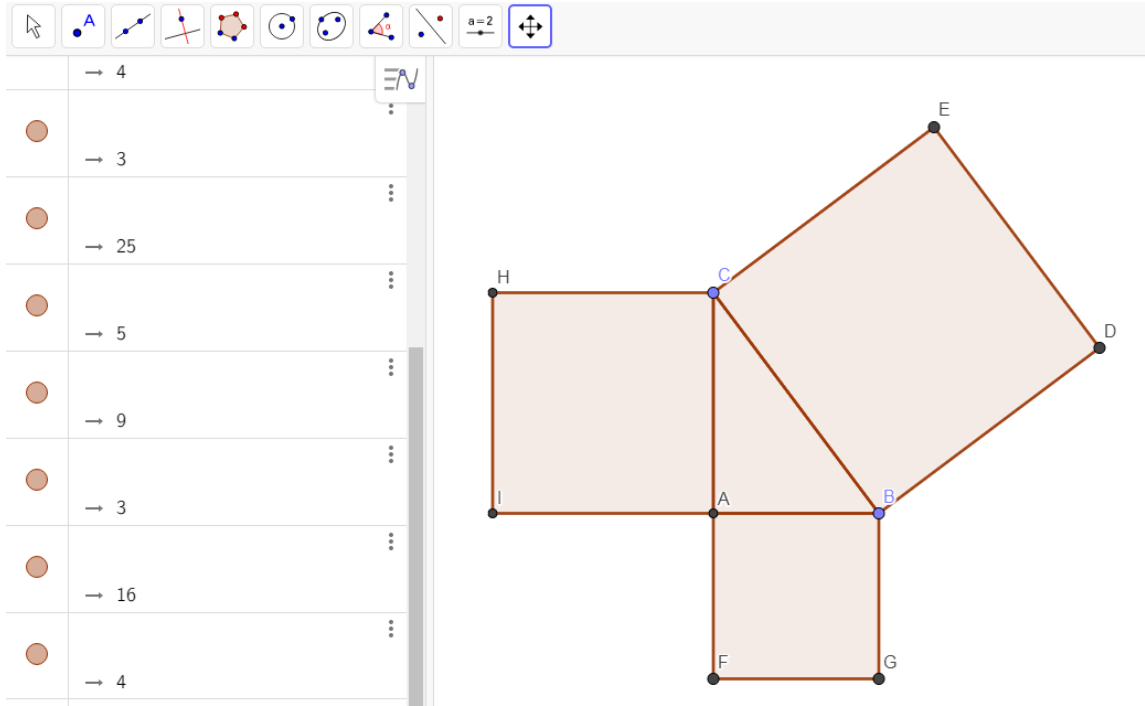


Şekil 51. GeoGebra Yazılımında Yapılan Üçüncü Etkinlik

4. Etkinlik

Etkinliğin Adı: Pisagor Teoremi Etkinliği

- Bir GeoGebra dosyası açılır.
- Grafik penceresinde sağ tık yapılarak “Eksenler” ve “Izgara” kaldırılır.
- “Ayarlar” bölümünde Etiketlendirme özelliği “Sadece yeni noktalar” olarak değiştirilir.
- Araç çubuklarındaki “Nokta” aracı ile (0,0), (3,0) ve (0,4) noktaları oluşturulur.
- Araç çubuklarındaki “Çokgen” aracı ile oluşturulan noktalar seçilerek bu noktalardan geçen bir dik üçgen oluşturulur.
- Bu üçgenin kenarlarından kareler oluşturmak için “Düzgün Çokgen” aracı seçildikten sonra üçgenin köşe noktaları saat yönünde seçilir ve çıkan ekranda noktalar 4 olarak yazılır. Oluşturulan dik üçgen ve kareler Şekil 52’de gösterilmiştir.



Şekil 52. Dördüncü Etkinlikte Oluşturulan Dik Üçgen ve Kareler

Şekil 52’de “Düzgün Çokgen” aracı seçildikten sonra önce C sonra B noktası seçilerek CBDE karesi oluşturulmuştur. Aynı şekilde ABGF karesi için önce B sonra A noktası, AIHC karesi için önce A sonra C noktası seçilmiştir.

- [CE] kenarına paralel ve I noktasından geçen bir doğru oluşturmak için “Paralel Doğru” aracı seçildikten sonra önce [CE] kenarı sonra I noktası seçilir.
- [ED] kenarına paralel A noktasından geçen bir doğru oluşturmak için “Paralel Doğru” aracı seçildikten sonra önce [ED] kenarı sonra A noktası seçilir.
- “Kesişim” aracı seçilerek bu iki paralel doğrunun kesişim noktası bulunur. Ayrıca ilk paralel doğrunun [AC] kenarı ile kesişim noktası, ikinci paralel doğrunun [HC] kenarı ile kesişim noktası bulunur.
- Bulunan kesişim noktaları ile AIHC karesi içerisinde 4 tane çokgen oluşturulacaktır. “Çokgen” aracı ile bu çokgenler oluşturulur. Oluşturulan bu çokgenler farklı renklerle renklendirilir. Bu çokgenlerin oluşturulma işlemleri aşağıda verilmiştir.

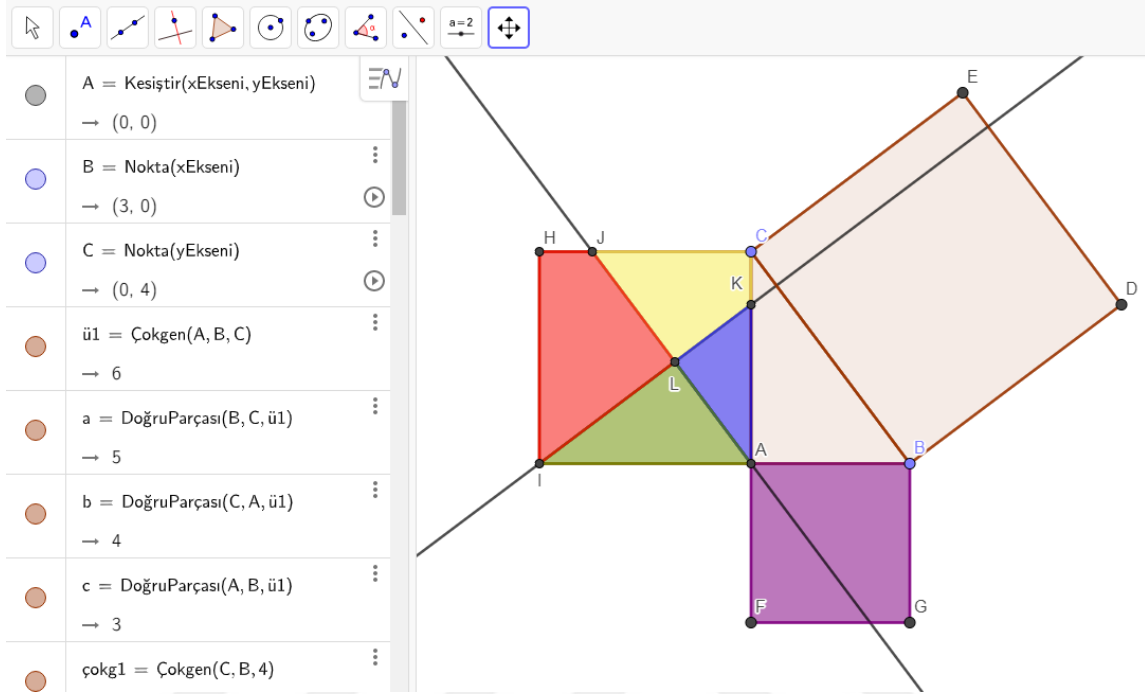
J, C, K ve L noktaları seçilerek oluşturulan çokgen sarı renk,

H, J, L ve I noktaları seçilerek oluşturulan çokgen kırmızı renk,

I, L ve A noktaları seçilerek oluşturulan çokgen yeşil renk,

L, K ve A noktaları seçilerek oluşturulan çokgen mavi renk,
Ayrıca ABGF karesi mor renk yapılır.

- Oluşturulan çokgenlerin renklendirilmesi Şekil 53'te gösterilmiştir.



Şekil 53. Dördüncü Etkinlikte Oluşturulan Çokgenlerin Renklendirilmesi

- Oluşturulan paralel doğruların “Nesneyi Göster” den görünümü gizlenir.
- Araç çubuklarındaki “Sürgü” aracı ile bir k sürgüsü oluşturulur. Sürgü oluşturulurken min. 0, maks.1 ve artış 0. 1 yapılır.
- Giriş alanına “ $L + k(B - L)$ ” yazılır. M noktası oluşturulur.
- Giriş alanında “Vektör (<Başlangıç Noktası>, <Bitiş Noktası>)” komutu seçilir. Bu komuta “Vektör (L, M)” yazılarak başlangıç noktası L, bitiş noktası M olan bir vektörü oluşturulur.
- Giriş alanında “Ötele (<Nesne>, <Vektör>)” komutu seçilir. JCKL dörtgeninin ötelenmesi için yapılan işlemler aşağıda verilmiştir.

“Ötele (J, u)” yazılarak J' noktası,

“Ötele (C, u)” yazılarak C' noktası,

“Ötele (K, u)” yazılarak K' noktası,

“Ötele (L, u)” yazılarak L' noktası oluşturulur.

- J' , C' , K' ve L' noktalarından “Çokgen” aracıyla bir çokgen oluşturulur ve rengi JCKL dörtgeninin rengi olan sarı renk yapılır. Oluşturulan vektör ve noktaların “Nesneyi Göster” den görünümü gizlenir.
- Giriş alanına “ $L + k(C - L)$ ” yazılır. N noktası oluşturulur.
- Giriş alanında “Vektör (<Başlangıç Noktası>, <Bitiş Noktası>)” komutu seçilir. Bu komuta “Vektör (L, N)” yazılarak başlangıç noktası L, bitiş noktası N olan bir v vektörü oluşturulur.
- Giriş alanında “Ötele (<Nesne>, <Vektör>)” komutu seçilir. LKA üçgeninin ötelenmesi için yapılan işlemler aşağıda verilmiştir.

“Ötele (L, v)” yazılarak L_1' noktası,

“Ötele (K, v)” yazılarak K_1' noktası,

“Ötele (A, v)” yazılarak A' noktası oluşturulur.

- L_1' , K_1' ve A' noktalarından “Çokgen” aracıyla bir üçgen oluşturulur ve rengi LKA üçgeninin rengi olan mavi renk yapılır. Oluşturulan vektör ve noktaların “Nesneyi Göster” den görünümü gizlenir.
- Giriş alanına “ $L + k(E - L)$ ” yazılır. O noktası oluşturulur.
- Giriş alanında “Vektör (<Başlangıç Noktası>, <Bitiş Noktası>)” komutu seçilir. Bu komuta “Vektör (L, O)” yazılarak başlangıç noktası L, bitiş noktası O olan bir w vektörü oluşturulur.
- Giriş alanında “Ötele (<Nesne>, <Vektör>)” komutu seçilir. AIL üçgeninin ötelenmesi için yapılan işlemler aşağıda verilmiştir.

“Ötele (A, w)” yazılarak A_1' noktası,

“Ötele (I, w)” yazılarak I' noktası,

“Ötele (L, w)” yazılarak L_2' noktası oluşturulur.

- A_1' , I' ve L_2' noktalarından “Çokgen” aracıyla bir üçgen oluşturulur ve rengi AIL üçgeninin rengi olan yeşil renk yapılır. Oluşturulan vektör ve noktaların “Nesneyi Göster” den görünümü gizlenir.
- Giriş alanına “ $L + k(D - L)$ ” yazılır. P noktası oluşturulur.
- Giriş alanında “Vektör (<Başlangıç Noktası>, <Bitiş Noktası>)” komutu seçilir. Bu komuta “Vektör (L, P)” yazılarak başlangıç noktası L, bitiş noktası P olan bir d vektörü oluşturulur.

- Giriş alanında “Ötele (<Nesne>, <Vektör>)” komutu seçilir. HJLI üçgeninin ötelenmesi için yapılan işlemler aşağıda verilmiştir.

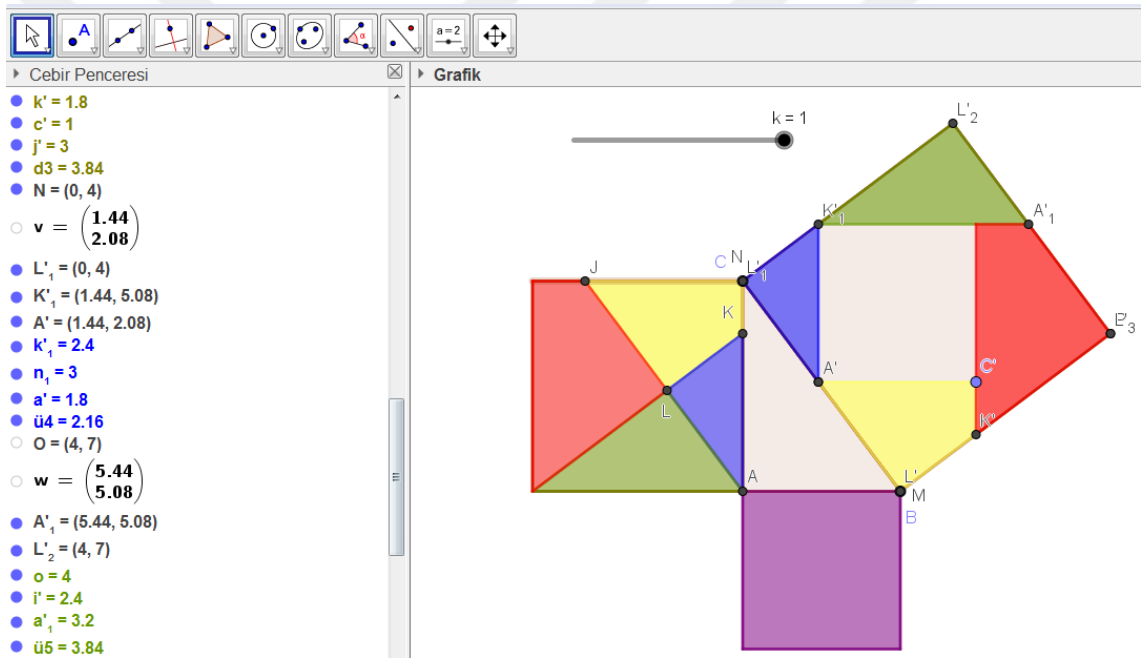
“Ötele (H, d)” yazılarak H' noktası,

“Ötele (J, d)” yazılarak J_1' noktası,

“Ötele (L, d)” yazılarak L_3' noktası,

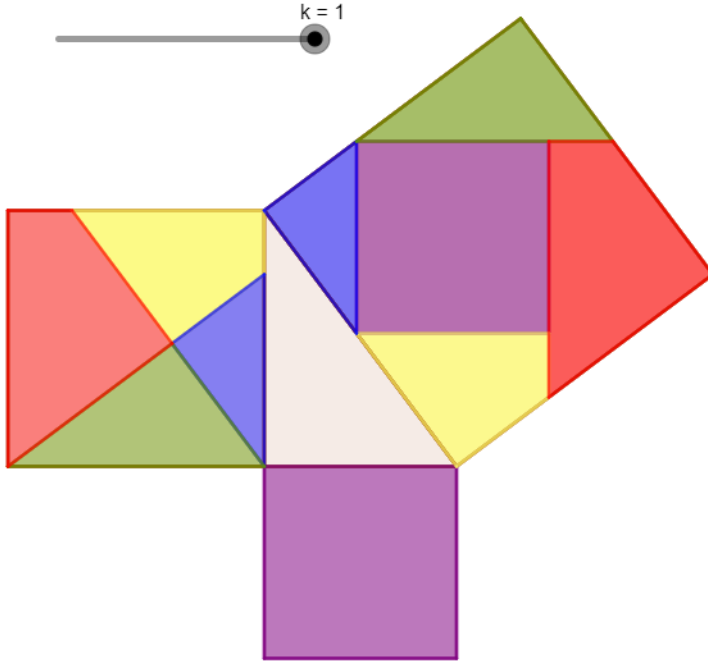
“Ötele (I, d)” yazılarak I_1' noktası oluşturulur.

- H' , J_1' , L_3' ve I_1' noktalarından “Çokgen” aracıyla bir dörtgen oluşturulur ve rengi HJLI dörtgeninin rengi olan kırmızı renk yapılır. Oluşturulan vektör ve noktaların “Nesneyi Göster” den görünümü gizlenir.
- Oluşturulan çokgenlerin ötelenmesi Şekil 54’te gösterilmiştir.



Şekil 54. Dördüncü Etkinlikte Oluşturulan Çokgenlerin Ötelenmesi

- ABFG karesinin ötelenmesi için öncelikle J ve L noktasından geçen doğru parçası çizilir.
- “Çember: Merkez & Yarıçap” aracı seçilerek merkezi B noktası, yarıçapı [JL] kenarı kadar olan çember çizilir.
- “Kesiştir” aracı seçilerek çember ile [CB] doğru parçasının kesişim noktası (Q) bulunur.
- Giriş alanına “F+ k (Q- F)” yazılır. R noktası oluşturulur.



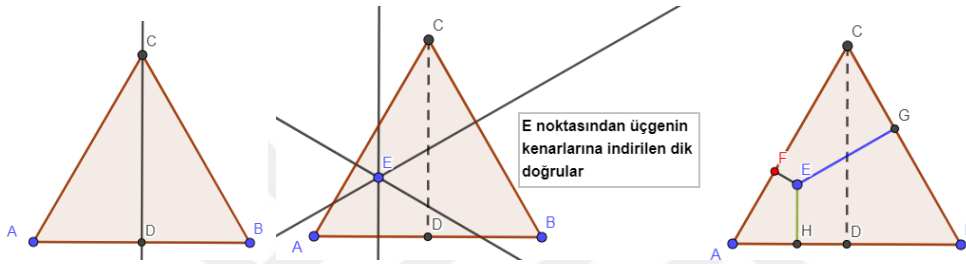
Şekil 56. GeoGebra Yazılımında Yapılan Dördüncü Etkinlik

5. Etkinlik

Etkinliğin Adı: Viviani Teoremi Etkinliği

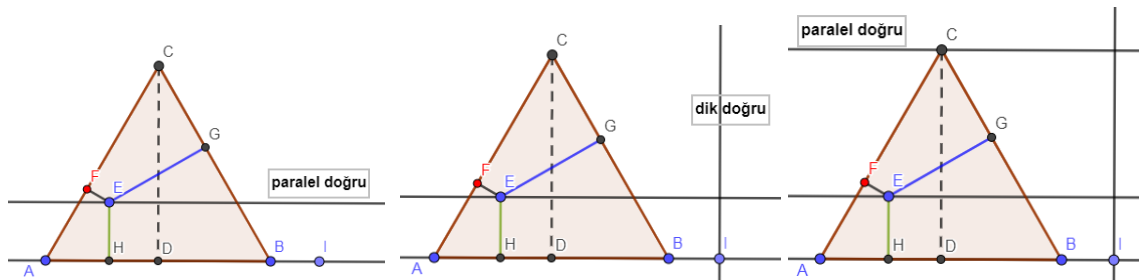
- Bir GeoGebra dosyası açılır.
- Grafik penceresinde sağ tık yapılarak “Eksenler” ve “Izgara” kaldırılır.
- “Ayarlar” bölümünde Etiketlendirme özelliği “Sadece yeni noktalar” olarak değiştirilir.
- Araç çubuklarındaki “Nokta” aracı ile grafik ekranında rastgele A ve B noktaları oluşturulur.
- Araç çubuklarındaki “Düzgün Çokgen” aracı ile A ve B noktalarından geçen eşkenar üçgen oluşturulur.
- Araç çubuklarındaki “Dik Doğru” aracı ile üçgenin tepe noktasından geçen [AB] kenarına dik doğru oluşturulur.
- Araç çubuklarındaki “Kesiştir” aracı ile dik doğru ve [AB] kenarının kesişim noktası bulunur.
- Çizilen dik doğrunun “Nesneyi Göster” den görünümü gizlenir. Araç çubuklarındaki “Doğru Parçası” aracıyla bulunan kesişim noktasından üçgenin tepe noktasına doğru parçası çizilir ve Doğru Stili - - - - - yapılır.

- Üçgenin içerisinde herhangi bir yerinde nokta oluşturulur.
- Araç çubuklarındaki “Dik Doğru” aracıyla içeride alınan noktadan üçgenin kenarlarına dik doğrular çizilir.
- Araç çubuklarındaki “Kesiştir” aracı ile dik doğrular ve üçgenin kenarlarının kesişim noktaları bulunur. Dik doğruların “Nesneyi Göster” den görünümü gizlenir.
- Araç çubuklarındaki “Doğru Parçası” aracı ile oluşturulan kesişim noktalarından üçgenin içerisinde alınan noktaya doğru parçaları çizilir. Doğru parçaları farklı renklerle renklendirilir. Yapılan işlemler Şekil 57’de gösterilmiştir.



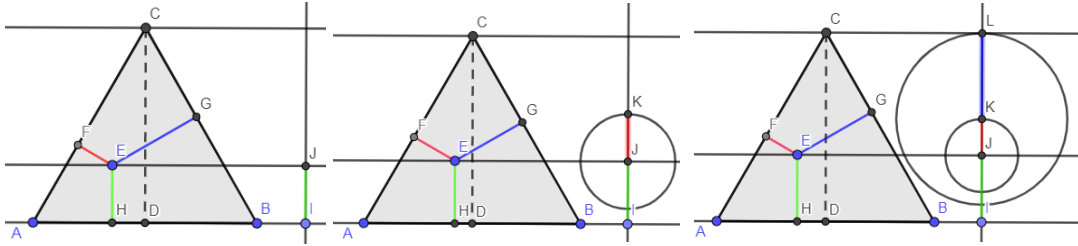
Şekil 57. Beşinci Etkinlikte Oluşturulan Dik Doğrular ve Doğru Parçaları

- “Doğru” aracı ile $[AB]$ kenarından geçen bir doğru çizilir. Bu doğru üzerinde üçgenin dışında bir nokta (I) oluşturulur.
- Araç çubuklarındaki “Paralel Doğru” aracı ile son oluşturulan doğruya paralel ve üçgenin içerisinde oluşturulan noktadan (E) geçen doğru oluşturulur.
- Araç çubuklarındaki “Dik Doğru” aracı ile son oluşturulan paralel doğruya dik ve I noktasından geçen doğru oluşturulur.
- Araç çubuklarındaki “Paralel Doğru” aracı ile üçgenin tepe noktasından geçen $[AB]$ kenarına paralel doğru çizilir.
- Yapılan işlemler Şekil 58’de gösterilmiştir.



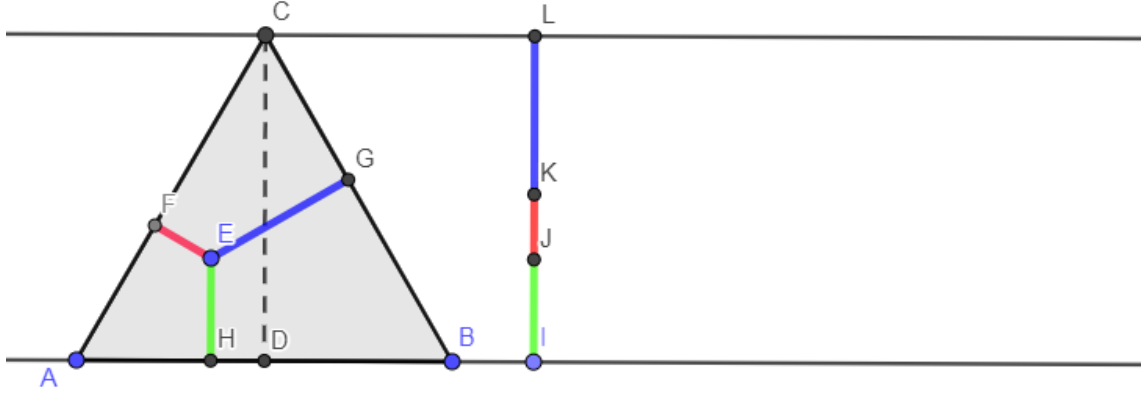
Şekil 58. Beşinci Etkinlikte Oluşturulan Paralel ve Dik Doğrular

- Araç çubuklarındaki “Kesiştir” aracı ile ilk oluşturulan paralel doğru ve dik doğrunun kesişim noktası (J) bulunur.
- Araç çubuklarındaki “Doğru Parçası” aracı ile I noktasından J kesişim noktasına doğru parçası çizilir. Bu doğru parçası [EH] doğru parçasına paralel ve aynı uzunlukta çizildiği için yeşil renk yapılır.
- Araç çubuklarındaki “Pergel” aracı ile önce kırmızı doğru parçası sonra J noktası seçilerek çember oluşturulur.
- Araç çubuklarındaki “Kesiştir” aracı ile oluşturulan çember ve dik doğrunun kesişim noktası (K) bulunur.
- Araç çubuklarındaki “Doğru Parçası” aracı ile K noktasından J noktasına doğru parçası çizilir. Doğru parçası kırmızı renk yapılır.
- Araç çubuklarındaki “Pergel” aracı ile önce mavi doğru parçası sonra K noktası seçilerek çember oluşturulur.
- Araç çubuklarındaki “Kesiştir” aracı ile oluşturulan çember ve dik doğrunun kesişim noktası (L) bulunur.
- Araç çubuklarındaki “Doğru Parçası” aracı ile K noktasından L noktasına doğru parçası çizilir. Doğru parçası mavi renk yapılır.
- Yapılan işlemler Şekil 59’da gösterilmiştir.



Şekil 59. Beşinci Etkinlikte Oluşturulan Doğru Parçaları ve Çemberler

- Oluşturulan çemberler, ortadaki paralel doğru ve dik doğrunun “Nesneyi Göster” den görünümü gizlenir.
- Yapılan etkinlik Şekil 60’da gösterilmiştir.

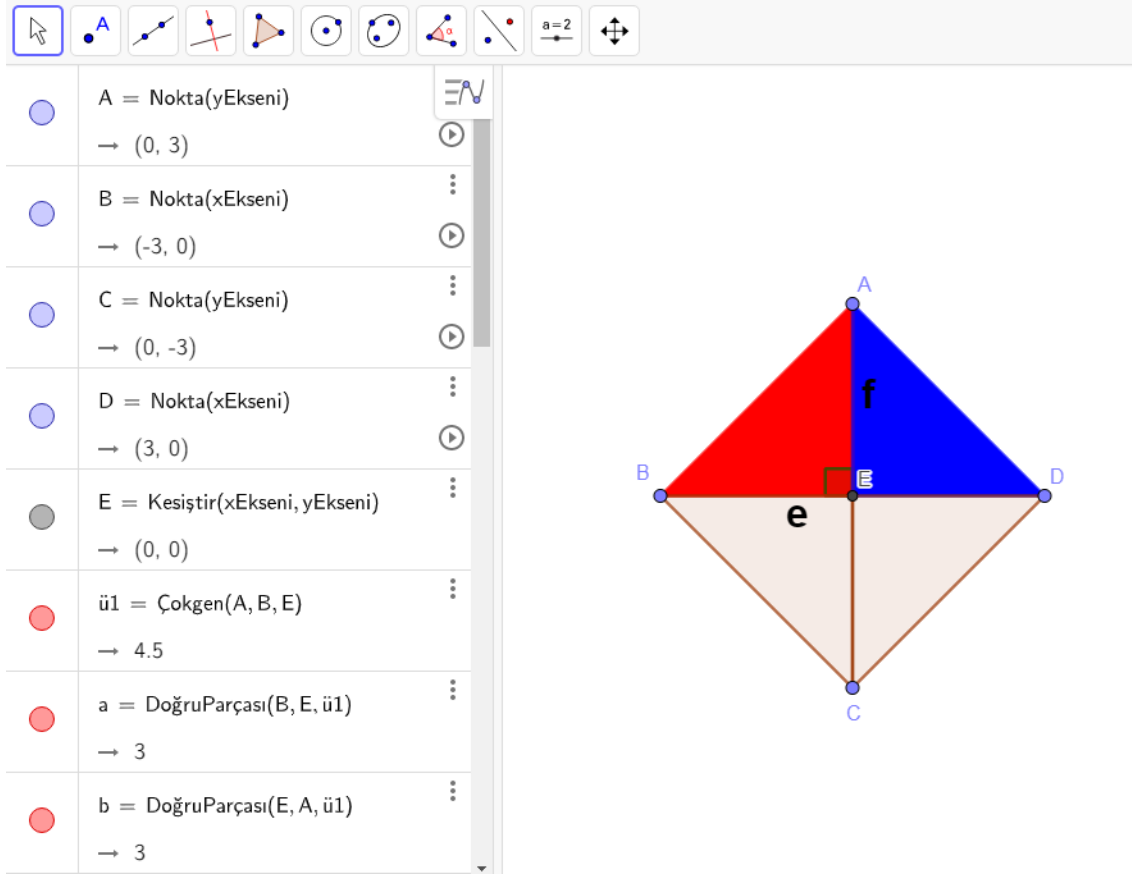


Şekil 60. GeoGebra Yazılımında Yapılan Beşinci Etkinlik

6. Etkinlik

Etkinliğin Adı: Eşkenar Dörtgen Alanını Dikdörtgen Yardımıyla Bulma Etkinliği

- Bir GeoGebra dosyası açılır.
- Grafik penceresinde sağ tık yapılarak “Eksenler” ve “Izgara” kaldırılır.
- “Ayarlar” bölümünde Etiketlendirme özelliği “Sadece yeni noktalar” olarak değiştirilir.
- Araç çubuklarındaki “Nokta” aracı ile $A(0, 3)$, $B(-3, 0)$, $C(0, -3)$, $D(3, 0)$ ve $E(0, 0)$ noktaları oluşturulur.
- Araç çubuklarındaki “Çokgen” aracı ile ABE, AED, BEC ve ECD üçgenleri oluşturulur. ABE üçgeni kırmızı, AED üçgeni mavi renk yapılır.
- Araç çubuklarındaki “Açı” aracı ile AEB açısı bulunur.
- Üçgenlerin oluşturduğu ABCD eşkenar dörtgeninin köşegenleri araç çubuklarındaki “Metin” aracından “e ve f” olacak şekilde yazılır.
- ABCD eşkenar dörtgeni ve yapılan işlemler Şekil 61’de gösterilmiştir.



Şekil 61. Altıncı Etkinlikte Oluşturulan Eşkenar Dörtgen

- Araç çubuklarındaki “Sürgü” aracı ile t sürgüsü oluşturulur. Bu sürgü oluşturulurken min: 1, maks: 2 ve artış: 1 yapılır.
- ABE üçgeni, AED üçgeni, [AB], [AE], [AD] doğru parçaları, oluşturulan dik açı ve metinde oluşturulan “f” köşegeni sağ tık yapılarak “Ayarlar” bölümündeki Gelişmiş özelliklerinde “Nesneyi Gösterme Şartı” t=1 yapılır.
- Giriş alanından “Döndür (<Nesne>, <Açı>, <Nokta>)” komutu seçilerek aşağıda verilen işlemler yapılır.

“Döndür (A, 270°, B)” yazılarak A' noktası,

“Döndür (E, 270°, B)” yazılarak E' noktası,

“Döndür (B, 270°, B)” yazılarak B' noktası oluşturulur.

- Araç çubuklarındaki “Çokgen” aracı ile A' , E' ve B' noktalarından üçgen oluşturulur. Bu üçgen kırmızı renk yapılır.
- $A'E'B'$ üçgeni, $[B'E']$ ve $[A'E']$ kenarları sağ tık yapılarak “Ayarlar” bölümündeki Gelişmiş özelliklerinde “Nesneyi Gösterme Şartı” t=2 yapılır.

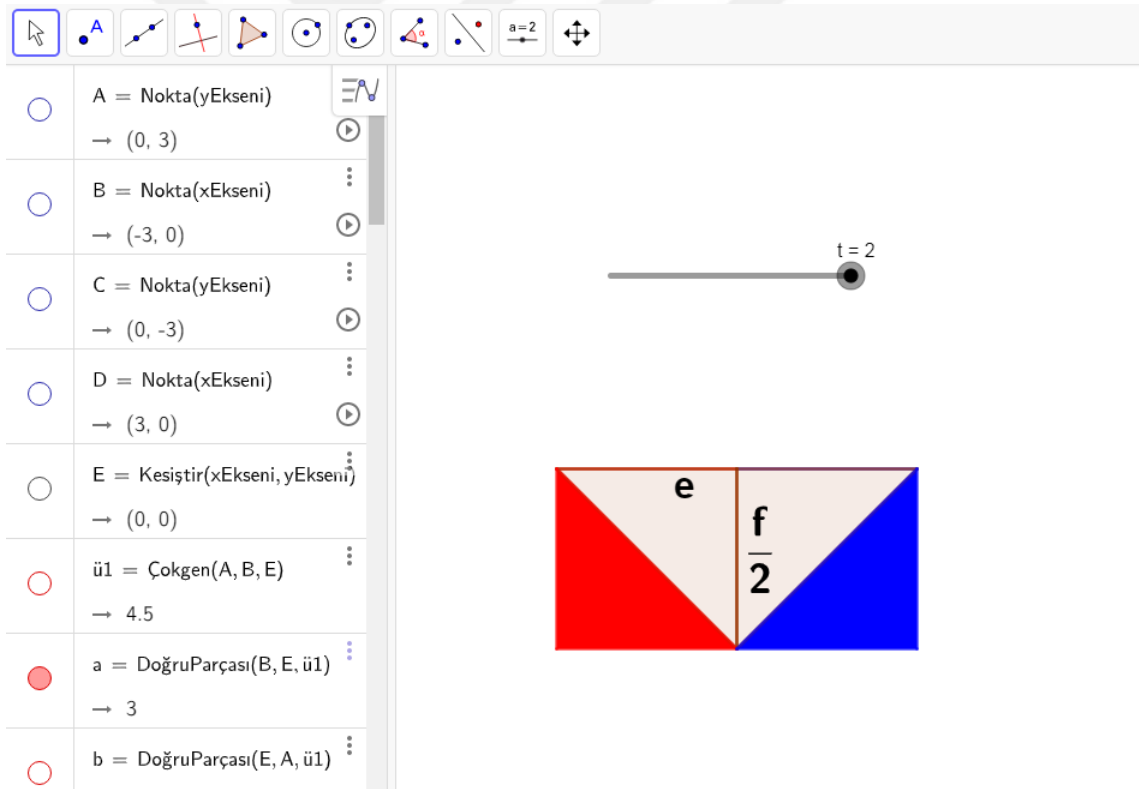
- Giriş alanından “Döndür (<Nesne>, <Açı>, <Nokta>)” komutu seçilerek aşağıda verilen işlemler yapılır.

“Döndür (A, $-(270^\circ)$, D)” yazılarak A_1' noktası,

“Döndür (E, $-(270^\circ)$, D)” yazılarak E_1' noktası,

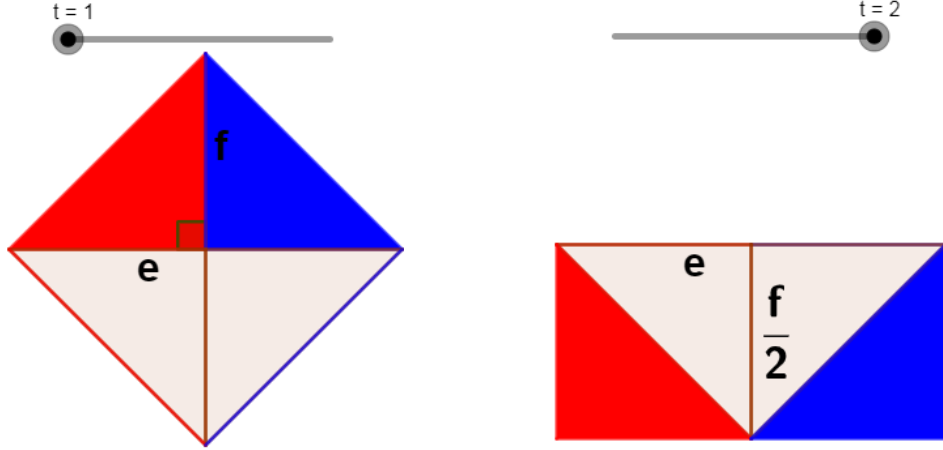
“Döndür (D, $-(270^\circ)$, D)” yazılarak D' noktası oluşturulur.

- Araç çubuklarındaki “Çokgen” aracı ile A_1' , E_1' ve D' noktalarından üçgen oluşturulur. Bu üçgen mavi renk yapılır.
- $A_1'E_1'D'$ üçgeni, $[A_1'E_1']$ ve $[E_1'D']$ kenarları sağ tık yapılarak “Ayarlar” ve “Gelişmiş” bölümünde “Nesneyi Gösterme Şartı” $t=2$ yapılır.
- “Metin” aracından $\frac{f}{2}$ yazılır. Bu metinde sağ tık yapılarak “Ayarlar” ve “Gelişmiş” bölümünde “Nesneyi Gösterme Şartı” $t=2$ yapılır.
- Yapılan işlemler sonucu oluşan dikdörtgen Şekil 62’de gösterilmiştir.



Şekil 62. Altıncı Etkinlikte Oluşturulan Dikdörtgen

- Yapılan işlemler sonucunda eşkenar dörtgenin dikdörtgene dönüşmesi Şekil 63’te gösterilmiştir.



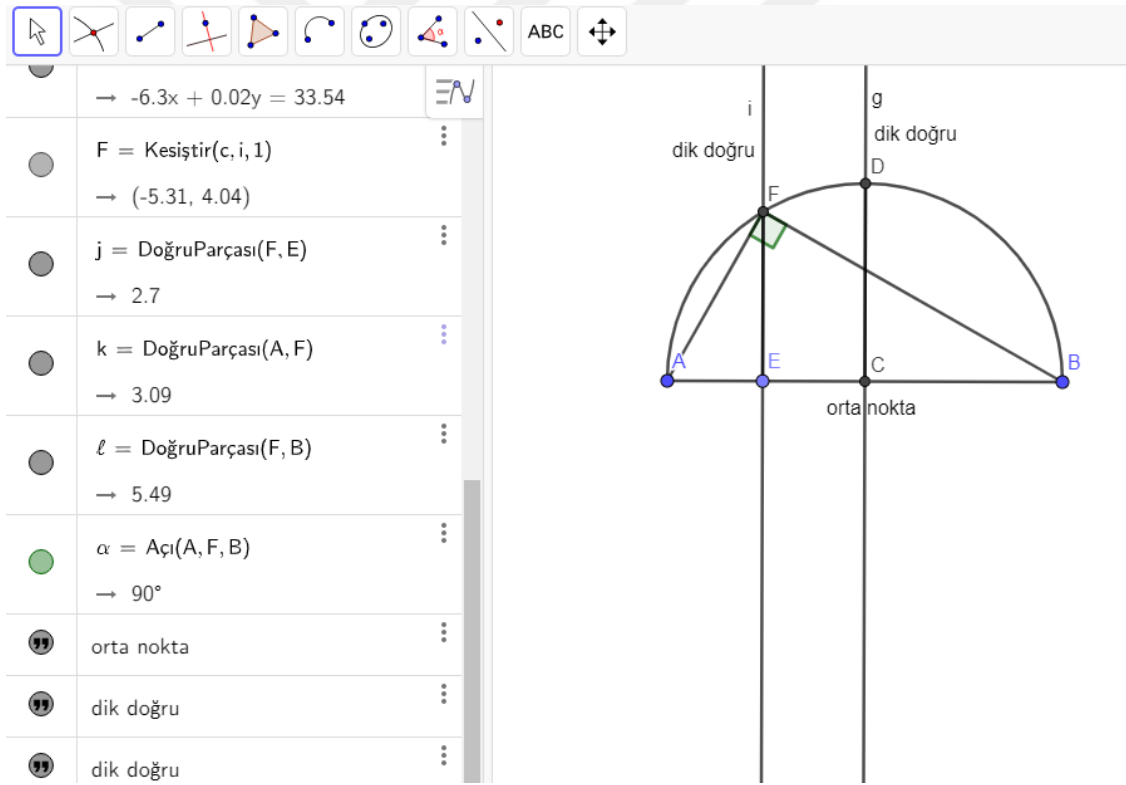
Şekil 63. GeoGebra Yazılımında Yapılan Altıncı Etkinlik

7. Etkinlik

Etkinliğin Adı: Aritmetik ile Geometrik Ortalama Arasındaki İlişkiyi Gösteren Etkinlik

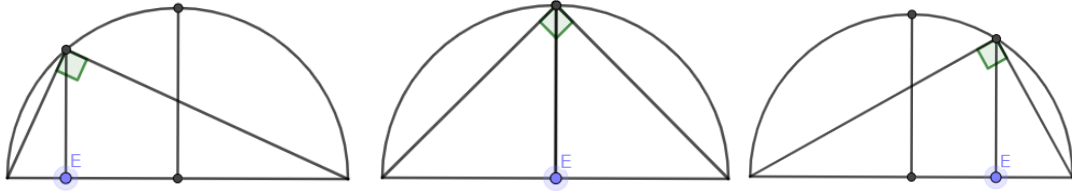
- Bir GeoGebra dosyası açılır.
- Grafik penceresinde sağ tık yapılarak “Eksenler” ve “Izgara” kaldırılır.
- “Ayarlar” bölümünde Etiketlendirme özelliği “Sadece yeni noktalar” olarak değiştirilir.
- Araç çubuklarındaki “Yarı Çember” aracı ile grafik penceresinde yarı çember oluşturulur.
- Araç çubuklarındaki “Doğru Parçası” aracı ile yarı çemberin uç noktalarından (A ve B) doğru parçası oluşturulur.
- Araç çubuklarındaki “Orta Nokta veya Merkez” aracı ile oluşturulan doğru parçasının orta noktası (C) bulunur.
- Araç çubuklarındaki “Dik Doğru” aracı ile C orta noktasından geçen çemberin [AB] kenarına dik doğru (g) çizilir.
- Araç çubuklarındaki “Kesiştir” aracı ile bu dik doğru ve çemberin kesişim noktası (D) bulunur.
- Araç çubuklarındaki “Doğru Parçası” aracı ile C noktasından D noktasına doğru parçası (h) çizilir.
- [AB] doğru parçası üzerinde bir nokta (E) oluşturulur.

- Araç çubuklarındaki “Dik Doğru” aracı ile E noktasından geçen çemberin [AB] kenarına dik doğru (i) çizilir.
- Araç çubuklarındaki “Kesiştir” aracı ile bu dik doğru ve çemberin kesişim noktası (F) bulunur.
- Araç çubuklarındaki “Doğru Parçası” aracı ile F noktasından E noktasına doğru parçası (j) çizilir.
- Araç çubuklarındaki “Doğru Parçası” aracı ile A noktasından F noktasına doğru parçası (k) çizilir.
- Araç çubuklarındaki “Doğru Parçası” aracı ile F noktasından B noktasına doğru parçası (l) çizilir.
- Araç çubuklarındaki “Açı” aracı ile AFB açısı bulunur.
- Yapılan işlemler Şekil 64’te gösterilmiştir.



Şekil 64. Yedinci Etkinlikte Yapılan İşlemler

- Dik doğrular, A ve B noktaları üzerinde sağ tık yapılarak “Nesneyi Göster” den görünümü gizlenir.
- GeoGebra programında yapılan yedinci etkinliğin son hali Şekil 65’te gösterilmiştir.



Şekil 65. GeoGebra Yazılımında Yapılan Yedinci Etkinlik

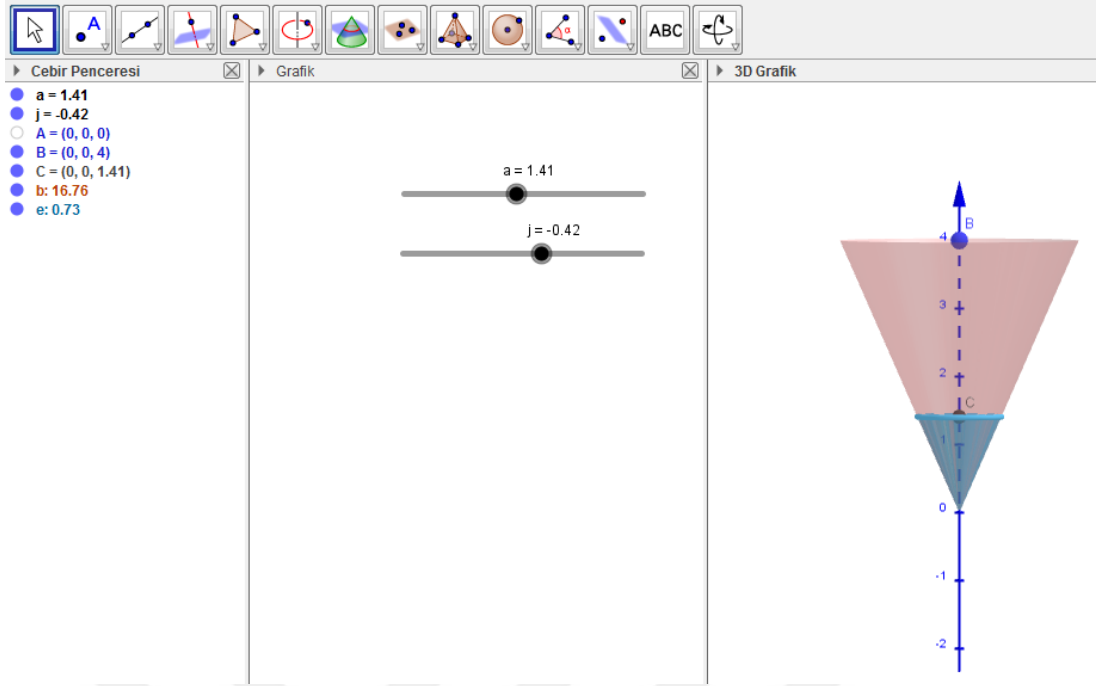
8. Etkinlik

Etkinliğin Adı: Silindir ile Koni Hacmi Arasındaki İlişkiyi Gösteren Etkinlik

- Bir GeoGebra 5.0 dosyası açılır.
- Grafik penceresinde sağ tık yapılarak “Eksenler” ve “Izgara” kaldırılır.
- “Seçenekler” bölümünde Etiketlendirme özelliği “Sadece yeni noktalar” olarak değiştirilir.
- “Görünüm” bölümünden 3D Grafik ekranı açılır. 3D Grafik ekranında sağ tık yapılarak “Düzlemi Göster” seçilir ve düzlemin görünümü gizlenir.
- 3D Grafik ekranında sağ tık yapılarak “Grafik” bölümünde “x Eksenini Göster” ve “y Eksenini Göster” seçilerek x ve y ekseninin görünümü gizlenir.
- Araç çubuklarındaki “Sürgü” aracı ile iki sürgü (a ve j) oluşturulur. a sürgüsünün özellikleri min: 0, maks: 3, artış: 0.01, canlandırmada hız: 0.979 ve tekrar: azalan olarak yapılır. j sürgüsünün özellikleri min: -1, maks: 0, artış: 0.01, canlandırmada hız: 0.98 ve tekrar: azalan olarak yapılır.
- Koniyi oluşturmak için önce koniyi oluşturacak olduğumuz noktalar bulunur. Giriş alanına sırasıyla $A(0, 0, 0)$, $B(0, 0, 4)$ ve $C(0, 0, a)$ noktaları yazılarak bulunur.
- Giriş alanında “Koni (<Nokta>, <Nokta>, <Yarıçap>)” komutu seçilerek aşağıda verilen işlemler yapılır.

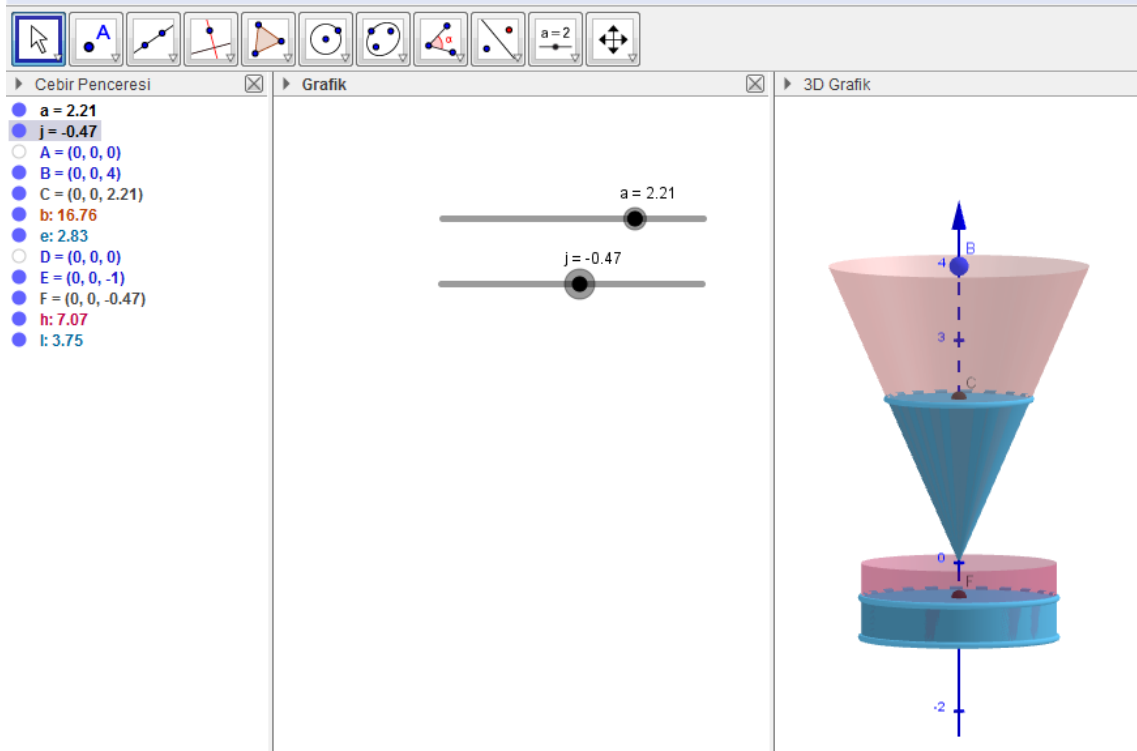
“Koni (B, A, 2)” yazılarak ilk koni,

“Koni (C, A, $\frac{a}{2}$)” yazılarak ikinci koni oluşturulur ve rengi mavi yapılır.
- Oluşturulan koniler Şekil 66’da gösterilmiştir.



Şekil 66. Sekizinci Etkinlikte Oluşturulan Koniler

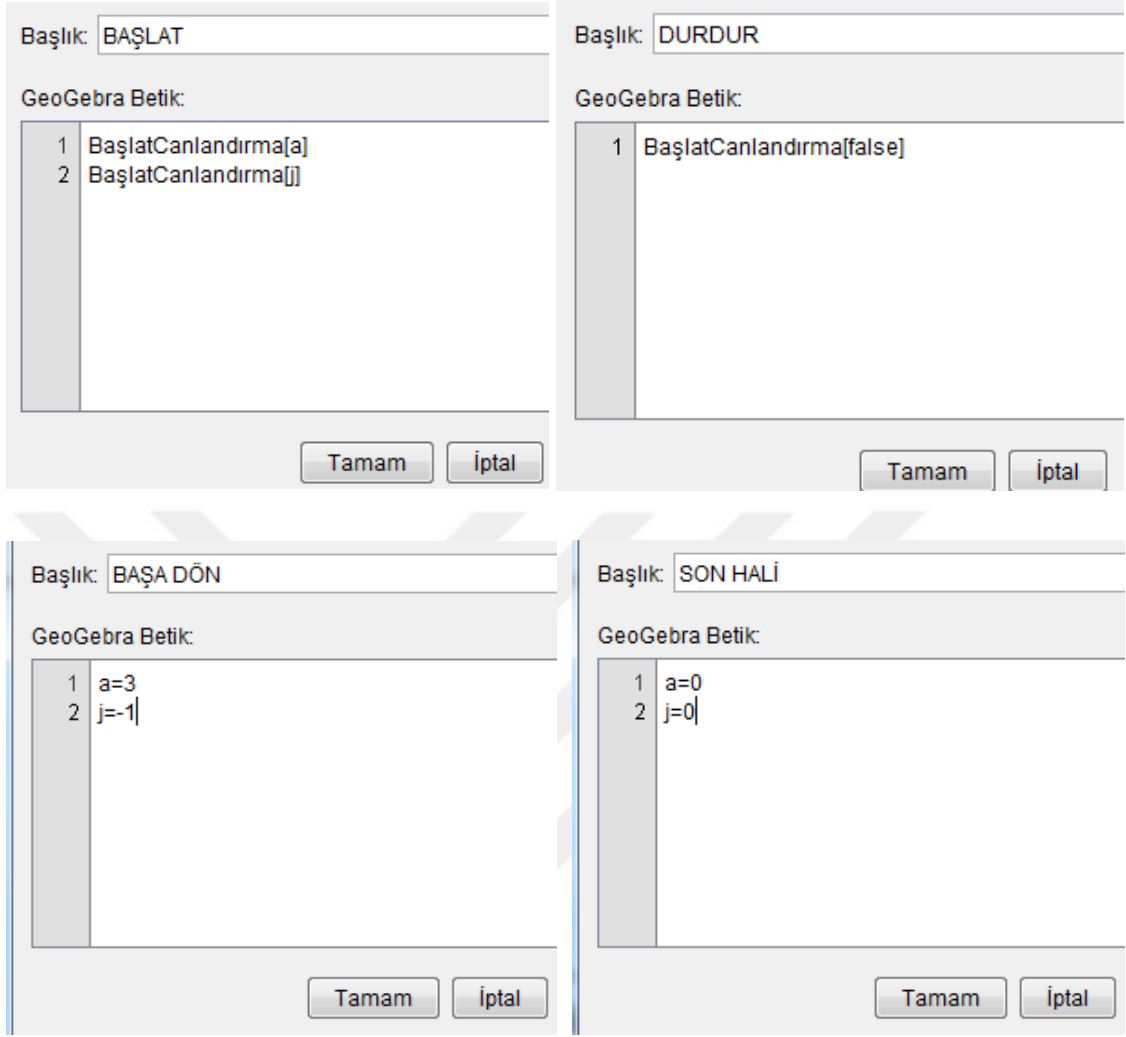
- Silindir oluşturmak için önce silindiri oluşturacak olduğumuz noktalar bulunur. Giriş alanına sırasıyla $D(0, 0, 0)$, $E(0, 0, -1)$ ve $F(0, 0, j)$ noktaları yazılarak bulunur.
- Giriş alanında “Silindir (<Nokta>, <Nokta>, <Yarıçap>)” komutu seçilerek aşağıda verilen işlemler yapılır.
 - “Silindir (D, E, 1. 5)” yazılarak ilk silindir,
 - “Silindir (F, E, 1. 5)” yazılarak ikinci silindir oluşturulur ve rengi mavi yapılır.
- Oluşturulan silindirler Şekil 67’de gösterilmiştir.



Şekil 67. Sekizinci Etkinlikte Oluşturulan Silindirler

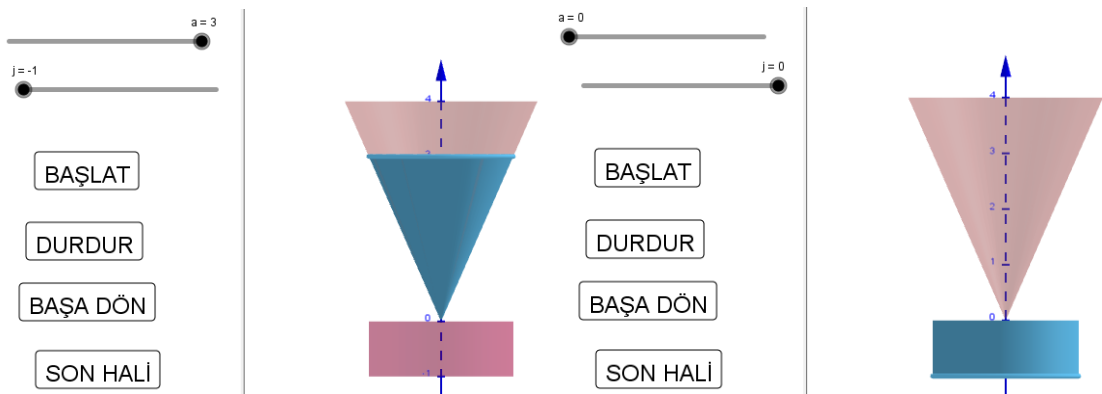
- Araç çubuklarındaki “Düğme” aracı ile 4 tane düğme oluşturulur. “BAŞLAT” düğmesi için GeoGebra Betik kısmına aşağıda verilen komutlar yazılır.
 - BaşlatCanlandırma[a]
 - BaşlatCanlandırma[j]
- “DURDUR” düğmesi için GeoGebra Betik kısmına aşağıda verilen komut yazılır.
 - BaşlatCanlandırma[false]
- “BAŞA DÖN” düğmesi için GeoGebra Betik kısmına aşağıda verilen komut yazılır.
 - $a = 3$
 - $j = -1$
- “SON HALİ” düğmesi için GeoGebra Betik kısmına aşağıda verilen komut yazılır.
 - $a = 0$
 - $j = 0$

- Oluşturulan düğmeler Şekil 68’de gösterilmiştir.



Şekil 68. Sekizinci Etkinlikte Oluşturulan Düğmeler

- GeoGebra yazılımında yapılan etkinlik Şekil 69’da gösterilmiştir.



Şekil 69. GeoGebra Yazılımında Yapılan Sekizinci Etkinlik

Ek 7. Dereceli Puanlama Anahtarı

Düzey	Puan	Açıklamalar
0(tamamen yanlış/boş)	0	Boş bırakma Geçersiz açıklama/ işlem/ şekil kullanma Herhangi açıklama yapmadan doğruluğu kabul etme Verileni aynen yazma
1(kısmen doğru)	1	Yalnız 1 geçerli çıkarım/ işlem/ açıklama yapma (doğru şekil çizme, formül yazma gibi)
2(yarı doğru)	2	Birkaç geçerli çıkarım/ işlem/ açıklama yapma İspat yarım bırakılmış ve tamamlanmamıştır Özel durumlardan yararlanarak genelleme yapma
3(doğruya yakın)	3	Belli adımlar atlanarak ispat tamamlanmıştır. Yani birkaç adım eksiktir
4(ifade eksikliğine rağmen doğru)	4	İspat tamamlanmıştır ancak ifade eksiklikleri vardır İspat tamamlanmış ancak ilgili teorem belirtilmemiştir İspat tamamlanmış ancak sembolik gösterimlerde hata vardır
5(tamamen doğru)	5	Genel kabul görececek şekilde ispat eksiksiz tamamlanmıştır

Ek 8. Özgeçmiş