



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



Yüksek Lisans Tezi

**DİNAMİK SİSTEMLER TEORİSİNİN $f(R)$ GRAVİTASYONDAKİ
UYGULAMALARI**

Gizem Dilara AÇAN YILDIZ

Fizik Anabilim Dalı

Matematiksel Fizik Programı

**DANIŞMAN
Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ**

Kasım, 2021

İSTANBUL

Bu çalışma, 12.11.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı, Matematiksel Fizik Programında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ(Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Mustafa SARISAMAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Arzu ÇİLLİ
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen Fakültesi



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

Bu tez, İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin numaralı projesi ile desteklenmiştir.

Bu tez, numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanma sürecinde yardımlarını benden esirgemeyen, bilgi birikimiyle bana her zaman yol gösteren ve destek olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ'ye sonsuz teşekkür ederim.

Eğitimim boyunca emeklerini esirgemeyen, başta Prof. Dr. Haşim MUTUŞ olmak üzere, tüm diğer hocalarıma da ayrı ayrı teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hayatımın her anında olduğu gibi, bu çalışma süresince de hep yanımda olup, bana destek verdikleri için eşime ve aileme teşekkür ederim.

Kasım 2021

Gizem Dilara AÇAN YILDIZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
ŞEKİL LİSTESİ	viii
TABLO LİSTESİ.....	x
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	xi
ÖZET	xiv
SUMMARY	xvi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR.....	5
2.1 TENSÖRLER.....	5
2.2. KOVARYANT TÜREV	6
2.3 VARYASYON HESABI	9
2.4 DİNAMİK SİSTEMLER TEORİSİ	14
2.5.1 Diferansiyel Denklemler ve Akıları	15
2.5.1a Otonom Diferansiyel Denklemler ve Faz Uzayı	15
2.5.1b Temel Teoremler	17
2.5.1c Bir Diferansiyel Denklemin Akısı	18
2.5.2 Yörüngeler ve İnvaryant Setler	19
2.5.2a Yörüngelerin Sınıflandırılması	19
2.5.2b İnvaryant Kümeler	20
2.5.2c Monoton Fonksiyonlar	21
2.5.2d Dulac Fonksiyonları	22
2.5.3 Denge Noktaları Civarındaki Durum	22
2.5.3a R^n 'de Lineer Diferansiyel Denklemler.....	22
2.5.3b Lineerleştirme ve Hartman-Grobman Teoremi	23
2.5.3c Durağan, Durağan Olmayan ve Merkezi Manifoldlar	24
2.5.4 Asimptotik Davranış.....	25
2.5.5 Daha Yüksek Boyutlarda Asimptotik Davranış	25
2.6 GRAVİTASYON TEORİLERİ	26
2.6.1 Einstein Genel Rölativite Teorisi	26

2.6.2 Enerji Momentum Tensörü.....	27
2.6.3 FLRW Modelleri	30
2.6.4 Brans-Dicke Teorisi.....	33
2.6.5 Bianchi Modelleri.....	35
2.6.6 Standart Kozmoloji Modeli	40
2.8 $f(R)$ TEORİLERİ.....	41
2.8.1a Genel Skaler Fonksiyonlar İçin Aksiyon	41
2.8.1b Enerji Momentum Tensörünün Ayırışması	42
3. MALZEME VE YÖNTEM.....	44
3.1 UZAY ZAMANIN 1+3 KOVARYANT AYRIŞIMI.....	44
3.1.1 Uzay Zaman Ayırışım Yönteminin Matematiksel Temelleri	44
3.1.1a Zaman Cinsinden Kongrüanslar.....	44
3.1.1b İzdeşim Tensörleri	45
3.1.1c 1-Tensör ve 2-Tensörlerin 1+3 Ayırışımı	45
3.1.1d 1+3 Kovaryant Zaman ve Uzay Türevleri.....	48
3.1.1e Akışkanın Kinematik Büyüklükleri.....	49
3.2 1+3 UZAY—ZAMAN AYRIŞIM TEKNİĞİNİN $f(R)$ GRAVİTASYONUN ALAN DENKLEMLERİNE UYGULANMASI	52
3.2.1 Efektif Madde-Enerji Yoğunluğu.....	55
3.2.2 Evrim ve Bağ Denklemleri.....	56
4. BULGULAR.....	60
4.1 METRİK YAKLAŞIMIYLA $f(R)$ GRAVİTASYON.....	60
4.1.1 Düz FLRW Evreninde Alan Denklemleri	60
4.2 ENFLASYON.....	65
4.2.1 Skaler Alanda Enflasyon	65
4.2.1 $f(R)$ Gravitasyonda Enflasyon: Genel Durum	71
4.2.3 Starobinsky Enflasyonu.....	73
4.3 METRİK YAKLAŞIMIYLA $f(R)$ GRAVİTASYONDA KARANLIK ENERJİNİN AÇIKLANMASI.....	75
4.3.1 Durumun Efektif Parametresi.....	76
4.3.2 $f(R)$ Gravitasyonda Dinamik Sistem Kullanarak Karanlık Enerjinin Açıklanması	79
4.4 HOMOJEN, ANİZOTROPİK BİANCHİ-I KOZMOLOJİSİNİN PALATİNİ FORMALİZMİNDE $f(R)$ GRAVİTASYONDAKİ DİNAMİKLERİ.....	82
4.4.1 Palatini Formalizminde $f(R)$ Teori	82
4.4.2 Bianchi-I Metrikte $f(R)$ Gravitasyon	82

4.4.3 Dinamik Sistem Yaklaşımı.....	84
4.4.4 $f(R) = R - \beta/R^n$ İçin Kozmolojik Dinamikler	85
4.5 VAKUM $f(R)$ GRAVİTASYONDA OTONOM DİNAMİK SİSTEM	88
4.5.1 Vakum $f(R)$ Gravitasyon Faz Uzayında Çalışma	90
4.5.1a De Sitter Enflasyonist Çekiciler ve Onların Kararlılıkları.....	92
4.5.1b De Sitter Çekicilerinin Yakınındaki $f(R)$ Gravitasyonlarının Yaklaşık Formu.....	98
4.5.1c R^2 Gravitasyonu ve Enflasyondan Zarif Çıkış.....	100
4.5.1d Diğer Olası Çekiciler ve Kararlılıkları	102
4.5.2 Vakumsuz $f(R)$ Gravitasyon Özerk Dinamik Sistemi: De Sitter Çekici Durumu	106
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	111
KAYNAKLAR.....	113
EKLER	116
EK 1. $f(R)$ Gravitasyon.....	116
EK 2. $f(R)$ Gravitasyonun Alan Denklemlerinin Çıkarılışı	116
EK 3. Metrik Formalizmdeki $f(R)$ Aksiyonunun Değişimi.....	116
EK 4. $f(R)$ Gravitasyon Metriğinin Alan Denklemleri	119
ÖZGEÇMİŞ	121

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

- Şekil 1:** Dinamik sistem ve $m \cong 0$ için $x_1(0) = -8$, $x_2(0) = -5$ ve $x_3(0) = 2.6$ başlangıç koşulları ile $x_1(N)$, $x_2(N)$ ve $x_3(N)$ nümerik çözümleri.....95
- Şekil 2:** Dinamik sistem için $x_1 - x_3$ düzleminde $N = (0,60)$ ve $m \cong 0$ için parametrik grafik.....96
- Şekil 3:** Dinamik sistem ve $m \cong 0$ için üç bileşenli akış.....96
- Şekil 4:** Dinamik sistem ve $m \cong 0$ için vektör alan akışı (solda) ve $x_1 - x_2$ düzlemindeki yörüngeler (sağda).....97
- Şekil 5:** $H_0 = 10^{13} s^{-1}$ ve $H_i = 10^{20} s^{-2}$ için $x_1(N)$, $x_2(N)$ ve $x_3(N)$ 'in davranışı. Kırmızı çizgi $x_3(N)$ 'i, siyah çizgi $x_2(N)$ 'i ve kesikli mavi çizgi ise $x_1(N)$ 'i temsil etmektedir.....101
- Şekil 6:** $m = -9/2$ için çözümlerin $x_1(0) = -3$, $x_2(0) = 1$ ve $x_3(0) = 0.5$ (solda) ile $x_1(0) = -3$, $x_2(0) = 1$ ve $x_3(0) = 0.501$ (sağda) başlangıç koşullarında davranışları.....104
- Şekil 7:** $x_1 - x_2$ düzleminde $x_3 = \frac{1}{2}$ için vektör alan akışı (solda) ve $m = -\frac{9}{2}$ için yörüngeler (sağda).....105
- Şekil 8:** $m = -9/2$ için üç boyutlu akış.....105

Şekil 9: Dinamik sistem ve $m \cong 0$ için $x_i(N)$ $i = 1, \dots, 5$ değişkenlerinin

$N = (0,60)$ için $x_1(0) = -10$, $x_2(0) = 5$, $x_3(0) = 2.6$, $x_4(0) = 0.1$ ve

$x_5(0) = 1$ başlangıç koşullarındaki davranışları.....106

Şekil 10: Dinamik sistem ve $m \cong 0$ için, farklı başlangıç koşulları için x_1 - x_3

düzlemindeki (sol), x_2 - x_3 düzlemindeki (sağ) ve x_2 - x_5 düzlemindeki (alt)

yörüngeleri.....108

Şekil 11: $(x_2, x_3)=(0,-2)$ için (x_1, x_4, x_5) değişkenlerince kapsanan uzayda üç

boyutlu faz diyagramı.....109

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1: γ Parametresinin Değerleri	29
Tablo 2: Bianchi Uzayları İçin İnvaryant Tabanlar.....	36
Tablo 3: Bianchi ve Kantowski-Sachs Uzayları İçin Standart Metrikler.....	37
Tablo 4: $f(R) = R - \beta/R^n$ 'nin Denge Noktaları ile İlişkili Durum Denklemleri, Yavaşlama Parametresi, Ölçek Çarpanı, Kayma (shear) ve Özdeğerler İçin Denge Noktaları ve Çözümler.....	85
Tablo 5: $f(R) = R - \beta/R^n$ İçin n Durumuna Göre Kararlılıkları.....	86

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
.	: Zamana Göre Türev
$\square$	: D'alembert Operatörü
∇	: Kovaryant Türev
$\otimes$	: Tensör Çarpımı
δ	: Varyasyon
R	: Ricci Eğrilik Skaleri
R_{ab}	: Ricci Tensörü
R^a_{bcd}	: Riemann-Christoffel Eğrilik Tensörü
${}^3R_{ab}$	: Ricci Eğrilik Skaleri
3R	: Uzaysal Skaler Eğrilik
g_{ab}	: Metrik Tensör
T_{ab}	: Enerji Momentum Tensörü
Λ	: Kozmolojik Sabit
$V(\phi)$	: Skaler Potansiyel
ϕ	: Skaler Alan
u^a	: 4-lü Hız Vektörü
ρ	: Rölativistik Enerji Yoğunluğu
p	: Eş Yönlü Basınç
ds	: Yay Elemanı
$I(t)$	: FLRW Modeli Ölçek Faktörü
H	: Hubble Parametresi
q	: Yavaşlama Parametresi
ξ^a	: Killing Vektörleri
Γ^a_{bc}	: Christoffel Sembolleri
η_{ab}	: Minkowski Metriği
G_{ab}	: Einstein Tensörü
L	: Lagrange Yoğunluk Fonksiyonu
G	: Newton Kütleçekim Sabiti
κ^2	: Einstein Kuplaj Sabiti

H_0	: Hubble Sabiti
c	: Işık Hızı
h_{ab}	: İzdüşüm Tensörü
μ	: Toplam Enerji Yoğunluğu
π_{ab}	: Eşyönsüz Basınç
q_a	: Enerji Akısı ya da Momentum Yoğunluğu
θ	: Genişleme Parametresi
θ_{ab}	: Genişleme Tensörü
σ_{ab}	: Kayma (shear) Tensörü
ω_{ab}	: Girdap Tensörü
C_{abcd}	: Weyl Tensörü

Kısaltmalar	Açıklama
BD	: Brans-Dicke
CDM	: Soğuk Karanlık Madde
CMB	: Kozmik Mikrodalga Arkaplan
DE	: Diferansiyel Denklem
DS	: Dinamik Sistem
DST	: Dinamik Sistemler Teorisi
EAD	: Einstein Alan Denklemleri
FLRW	: Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker
FRW	: Friedmann-Robertson-Walker
GR	: Genel Rölativite
GRT	: Genel Rölativite Teorisi
HOTG	: Yüksek Dereceli Gravitasyon Kuramları
KE	: Karanlık Enerji
LCDM	: Lambda Soğuk Karanlık Madde
LRS	: Yerel Dönme Simetrisi
LSB	: Düşük Yüzey Parlaklığındaki Galaksiler
RW	: Robertson-Walker
SBP	: Standart Büyük Patlama
STG	: Skaler Tensör Gravitasyon
TeVES	: Tensör-Vektör-Skaler Teorisi

WMAP : Wilkinson Mikrodalga Anizotropi Radarı



ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİNAMİK SİSTEMLER TEORİSİNİN $f(R)$ GRAVİTASYONDAKİ UYGULAMALARI

Gizem Dilara AÇAN YILDIZ

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ

DİNAMİK SİSTEMLER TEORİSİNİN $f(R)$ GRAVİTASYONDAKİ UYGULAMALARI

Bu çalışmada, yapacağımız hesaplar sonucunda karanlık enerji içeren hiçbir bileşen vermeden, evrenin hızlanarak genişlemesini açıklamak üzere Genel Rölativite Teorisi (GRT) dışında ileri sürülen ve değişikliğe uğratılmış gravitasyon teorisi olarak adlandırılan $f(R)$ gravitasyon teorisini ele alacağız.

Amacımız, değiştirilmiş gravitasyon teorilerinden $f(R)$ gravitasyon teorisinin kozmolojik evriminin, Genel Rölativite Teorisinin standart kozmolojisine göre ne tür değişiklikler ve farklılıklar getirdiğinin belirlenmesidir.

Çalışmamızı 1+3 uzay-zaman kovaryant yöntemini kullanarak, dik ve tek bileşenli akışkan içeren RW (Robertson Walker) modelinde gerekli matematiksel ve fiziksel kavramları tanıtarak evrim ve bağ denklemlerini kendi işaret ve sembol kabullerimiz çerçevesinde sistematik ve

ayrıntılı bir çıkarımını gravitasyon teorisinde tesis edip sunacağız. Ayrıca evrim denklemlerinin 1.mertebeden ve boyutsuz değişkenler cinsinden adi diferansiyel denklemlerden oluşan bir denklem sistemi olabileceğini göstereceğiz.

Bu tip teoriler geçtiğimiz son on sene içerisinde Genel Rölativite Teorisi (GRT)'nin standart kozmolojideki eksiklerinin giderilmesi için çok ilgi çekmiştir. Ancak alan denklemlerine yüksek mertebeden eğrilik düzeltmeleri eklemek çok daha karmaşık ve daha yüksek non-lineer denklemlere yol açmakta, dolayısıyla da bunlar tam analitik çözümleri bulmayı zorlaştırmaktadır. Biz burada çeşitli bilim dallarında kullanılan (iktisat, biyoloji vb..) dinamik sistem teorisini kullanarak, nitel analiz yaparak belirlemek istiyoruz.

Kasım 2021, 138 sayfa.

Anahtar kelimeler: Kozmoloji, Değiştirilmiş Gravitasyon Teorileri, $f(R)$ Gravitasyonu, Dinamik Sistem Analizi.

SUMMARY

M.Sc. THESIS

APPLICATIONS OF THE THEORY OF DYNAMICAL SYSTEMS IN $f(R)$ GRAVITATION

Gizem Dilara AÇAN YILDIZ

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Physics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ertan GÜDEKLİ

Academic Title

APPLICATIONS OF THE THEORY OF DYNAMICAL SYSTEMS IN $f(R)$ GRAVITATION

In this study, we will consider the $f(R)$ theory of gravity, which is called the modified gravity theory, which is put forward outside the General Theory of Relativity (GRT) to explain the accelerating expansion of the universe without giving any components containing dark energy as a result of the calculations we will make.

Our aim is to determine the cosmological evolution of the $f(R)$ theory of gravity, which is one of the modified gravitational theories, and what kind of changes and differences it brings with respect to the standard cosmology of the General Theory of Relativity.

By using the 1+3 space-time covariant method, we will introduce the necessary mathematical and physical concepts in the RW (Robertson Walker) model, which includes an orthogonal and one-component fluid, and will establish and present a systematic and detailed inference of the evolution and bond equations within the framework of our own sign and symbol assumptions in the theory of gravity. We will also show that evolutionary equations can be a system of equations consisting of ordinary differential equations in terms of first-order and dimensionless variables.

These types of theories have attracted a lot of attention over the past decade to fill the deficiencies of the General Theory of Relativity (GRT) in standard cosmology. However, adding higher order curvature corrections to field equations leads to much more complex and higher non-linear equations, thus making it difficult to find exact analytical solutions. Here, we want to determine by using the dynamic system theory used in various branches of science (economics, biology, etc.) by making qualitative analysis.

November 2021, 138 pages.

Keywords: Cosmology, Modified Gravitation Theories, $f(R)$ Gravitation, Dynamic System Analysis

1. GİRİŞ

Modern kozmoloji, Einstein'ın Genel Rölativite Teorisi ortaya çıkmadan asla güçlü bir bilim olamazdı. 1915'te Einstein Genel Rölativite Kuramı'nı ortaya koydu ve bu teori fizikçilerin olayları Güneş Sisteminin ölçeğinde açıklamalarını sağlamakla kalmadı, aynı zamanda onları tüm evrenin kökenlerine ve evrimine yönlendiren basamak taşı oldu. Genel Rölativite Teorisi (GR) ortaya atıldığı dönemden itibaren araştırmacıların odak merkezi haline geldi. Hem Güneş Sistemi ölçeğinde hem de kozmolojik ölçekteki gözlemlere uzun süre uyum gösterdi.

Genel Rölativite Teorisi (GRT)'nin öne sürüldüğü dönemlerde, evrenin durağan ve sonlu olduğu yaygın kabulü, teori için birtakım sıkıntılar ortaya çıkarmaktaydı. Çünkü teori, durağan değil dinamik bir evreni öngörüyordu. Oysa Einstein, o günkü gözlemler çerçevesinde evrenin durağan olması gerektiğini düşünüyordu. Einstein, denklemlerin kozmolojik kabuller altında kararlı ve sabit bir evren vermediği kanısından hareketle o zamanın kozmolojik kabullerine uygun olarak denklemlere bir kozmolojik sabit (Λ parametresi) eklemiştir [14]. Bu haliyle denklemler artık sabit ve kararlı bir evren öngörmektedir. Daha sonra Hubble'ın 1929 gözlemleri sonucunda ortaya çıkan, evrenin genişlemesi olgusu bu sabitin gereksiz olduğunu göstermiş ve Einstein'ın kariyerinin en büyük hatası olarak gördüğü bu genel göreliliğin ilk modifikasyonu, başarısızlık daha doğrusu gereksizlikle sonuçlanmıştır. Çok sonraları bu sabiti canlandıracak gözlemsel motivasyon, 1999'da yapılan Tip Ia Süpernova (Tip Ia SN) gözlem sonuçlarından gelmiştir. Buna göre $z \sim 0.5$ mertebesindeki SN'ler beklenenden 0.25 kadar daha sönük gözlenmiştir [36]. Bu ise yaklaşık 6 milyar ışık yılı uzaktaki süpernovaların beklediğimizden daha az kırmızıya kaydığını yani 6 milyar yıl önce evrenin daha yavaş genişlediği, sonradan artan hızlarla genişlemekte olduğu sonucunu doğurmuştur. Bu sonuç Λ parametresinin gerekliliğini tekrar ortaya koymuştur ve bu sabit, evrenin genişlemesinin izahı olarak bir kez daha denklemdeki yerini almıştır [33-35].

Gördüğümüz üzere Einstein'ın Genel Göreliliğini değiştirmek yeni bir durum değildir. GR'nin biraz değiştirilmiş yeni bir versiyonunu öneren ilk kişi Einstein'ın kendisiydi. Birkaç yıl sonra bilim adamlarından, teoriye farklı bir yaklaşım için yapılan diğer girişimler geldi. 1919 ve 1923'te Weyl ve Eddington ilk olarak, aksiyona daha yüksek mertebeden invaryant terimler ekleyerek teori değişikliklerini ele aldılar [22]. Tabi bu teorileri motive eden teorinin deneysel

veya teorik bir başarısızlığı değildir. Daha ziyade yeni önerilen teori hakkında daha iyi bir fikir edinme iradesidir [30].

Friedmann 1922 ve 1924'teki çalışmalarıyla Robertson-Walker (RW) metriği üzerine kurulu, genişleyebilen evren modelleri ortaya koymuştur. Bugün Friedmann-Robertson-Walker (FRW) Modelleri olarak bilinen bu model, Standart Büyük Patlama (SBP) evren modelinin temelini oluşturur. SBP modeli Hubble genişleme yasasını, evrende gözlemlenen hafif element bolluklarını ve kozmik mikrodalga arkaplan fon (CMB) ışınlamını açıklayarak oldukça başarılı olmuştur [19]. Ancak bir süre sonra SBP modelinin bazı önemli sorunlar barındırdığı fark edilmiştir. Bu sorunların çözümü için de Sitter'in 1917'deki iki çalışmasında (de Sitter, 1917a; 1917b) Λ sabitinin de dahil olduğu, üstel olarak genişleyen evren modeline benzer bir evreden geçmesinin gerekliliği görülmüştür. Bu çözüm, evrenin erken dönemlerinde Λ gibi davranan enerji kaynaklarının kullanılmasıyla elde edilen enflasyon modellerinin temelini atmıştır. Bu enflasyon (şişme) modelleri, CMB ışınlamı gözlemlerinden evrenin kozmolojik parametrelerinin belirlenebilmesinin de önünü açmıştır [5-43].

Bugünkü kozmolojik veriler erken evrenin bir enflasyon döneminden geçtiğini, daha sonra SBP modellerine uygun olarak evrimleştiği ve günümüz evreninin Λ gibi davranan bir enerji kaynağının (karanlık enerji) etkisiyle hızlandığını ve hemen hemen uzaysal olarak düz bir geometriye sahip olduğunu göstermektedir [6]. Gözlemler, evrenin fiziksel bileşenlerinin oranlarını da büyük duyarlılıkla verebilmektedir. Son verilere göre, standart Λ CDM (burada CDM soğuk karanlık maddenin kısaltmasıdır) çerçevesinde, evrenin enerji yoğunluğunun yaklaşık %5'i baryonik madde, %22'si CDM ve %73'i yapısı hala çok iyi anlaşılmamış olan karanlık enerji biçimindedir [31].

Tüm bunları dikkate alarak, evrenin evrim ve madde-enerji içeriği için, gözlemlenenle uyumlu bir teoriden bir resim elde etmenin en azından zor olduğu açıktır. Şu anda önerilen kozmolojik model, genellikle skaler bölgeye dayanan bir enflasyon fazı ile desteklenmiş Λ CDM (Λ -Soğuk Karanlık Madde) modeli veya uyumlu modeldir. Bu modelde Karanlık Enerji, vakumun enerjisi ile aynı kabul edilir, negatif gravitasyon basıncına sahiptir ve etkisi kozmolojik sabit Λ ile eşdeğerdir [25]. Bununla birlikte, bu model, gözlemlenen evrenin açık bir sonuç olduğu temel bir teori yerine, verilere fenomenolojik bir uyum sağlayan bir teori olmuştur. Bu nedenle, enflasyonun kökenini veya Karanlık Maddenin doğasını açıklamaz, kozmolojik sabit problemi ve tesadüf problemiyle miras alınır. Bunlardan ilki, kozmolojik sabitin gözlenen değerinin,

madde alanlarının vakum enerjisine kıyasla küçük olduğu (yaklaşık 120 kat daha küçük), büyüklük problemi ile ilgilidir. Daha sonraki problem, kozmolojik sabitin enerji yoğunluğunun maddeninki ile karşılaştırılabilir olduğu son derece küçük zaman periyodunun, garip tesadüfı ile ilgilidir.

Bu bulmacaların çözümü henüz standart Genel Rölativite bağlamında elde edilmediği sürece, değiştirilmiş bir gravitasyon teorisi denemek makul olur. Dolayısıyla bu tezde, $f(R)$ modifikasyonunun yukarıda belirtilen bazı sorunlara nasıl cevap vermeyi başardığını incelemek istiyoruz.

Bu tezde, Dinamik Sistemler Teorisi'nin (DST) Kozmoloji'de nasıl bir kullanım alanı bulduğunu ele alıyoruz. Bu iki disiplinin buluşmasını göstermek üzere, amaçladığımız işlerden biri, önce DST hakkında anlaşılabilir, öz ve yeterli bir bilgi derlemesi sunmak ve sonra da kozmolojik evrim ve bağ denklemlerinin bir Dinamik Sistem (DS) hâline getirilişlerini aşama aşama göstermek olacaktır. Kozmolojik denklemlerin, tüm geometrik ve dinamik tanımları ile hareket noktalarının belirtilip sistematik bir biçimde çıkarımları ve sonra da bunların uzayca homojen modellere özelleştirilmeleri ayrıntılarıyla gösterilecektir. Kinematik ve dinamik değişkenlerin boyutsuzlaştırma, normlama, parametrikleştirme gibi Dinamik Sistem işlemlerini uzayca homojen modellerin bir alt sınıfını oluşturan Robertson-Walker (uzayca homojen ve eşyönlü) Modeli ile sınırlı tutmaktayız. Ayrıca da kozmik akışkanımız tek bileşenli ve dik olacaktır. Dolayısıyla homojen ve eşyönsüz modellerden olan Kantowski-Sachs Modelleri ile eğik akışkan ve skaler alan modelleri bu tezimizin kapsamına girmeyecektir. Tezimizde, yapacağımız hesaplar sonucunda karanlık enerji içeren hiçbir bileşen vermeden, evrenin hızlanarak genişlemesini açıklamak üzere Genel Rölativite Teorisi (GRT) dışında ileri sürülen ve değişikliğe uğratılmış gravitasyon teorisi olarak adlandırılan $f(R)$ gravitasyon teorisini dinamik sistem yöntemiyle ele alacağız.

Amacımız, değiştirilmiş gravitasyon teorilerinden $f(R)$ gravitasyon teorisinin kozmolojik evriminin, Genel Rölativite Teorisi'nin standart kozmolojisine göre ne tür değişiklikler ve farklılıklar getirdiğinin belirlenmesidir.

Tezimizde 1+3 uzay-zaman kovaryant yöntemini kullanarak dik ve tek bileşenli akışkan içeren RW (Robertson Walker) modelinde gerekli matematiksel ve fiziksel kavramlarını değiştirilmiş $f(R)$ gravitasyon yönetmini tanıtarak evrim ve bağ denklemlerinin kendi işaret ve sembol

kabullerimiz çerçevesinde sistematik ve ayrıntılı bir çıkarımını tesis edip sunacağız. Ayrıca evrim denklemlerinin 1.mertebeden ve boyutsuz değişkenler cinsinden düz diferansiyel denklemlerden oluşan bir denklem sistemi olabileceğini göstereceğiz.

Tezimizin çalışma planı şöyle olacaktır:

Genel Kısımlar Bölümü'nde, DST'nin tarihçesinden ayrıntılı olarak bahsettikten sonra, Genel Rölativite Teorisini tanıtıyoruz.

Tezin 3. Bölümü olan Malzeme ve Yöntem Bölümü'nde, önce, DST'ye ilişkin kavram, tanım ve teoremleri genel hatlarıyla öz olarak tanıtıyoruz. Bu derlemeyi tezimizde kullanacağımız kadarıyla sınırlı tutmaktayız. Daha sonra da Kozmoloji'ye geçerek 1+3 Kovaryant uzay-zaman ayrışımını geniş bir biçimde tanıtp evrim ve bağ denklemlerini ayrıntılı bir biçimde en genel hâliyle $f(R)$ gravitasyon için çıkarımlıyoruz.

Bulgular bölümünde önce, evrim ve bağ denklemlerini homojen modellerin genel denklemlerinden özelleştirip yazmak mümkünse de biz, 1+3 Kovaryant ayrışım formalizminin bağıntılarını örneklemek amacıyla bunları metriktan doğrudan doğruya tesis etmeyi tercih ettik. $f(R)$ gravitasyon teorisinde metrik yaklaşımıyla, enflasyon (skaler alanda enflasyon, $f(R)$ gravitasyonda enflasyon...) ve $f(R)$ gravitasyonda karanlık enerji durumunu açıklamaya çalıştık; homojen, anizotropik Bianchi-I tip modelinde Palatini Formalizmi'nde $f(R)$ gravitasyondaki dinamikleri ve de vakum $f(R)$ gravitasyonda otonom dinamik sistemini ele aldık.

Tartışma ve Sonuç Bölümü ise yapılanların kısa bir tartışmasına ve değerlendirmesine ayrılmıştır. Ek 1 de $f(R)$ gravitasyon, Ek 2'de $f(R)$ gravitasyonun alan denklemleri çıkarılışı, Ek 3'de metrik formalizmdeki $f(R)$ aksiyonun değişimi ele alınarak Ek 4'de $f(R)$ gravitasyon metriğinin alan denklemleri hakkında kısa bilgileri çıkarım yaparak sunduk.

2. GENEL KISIMLAR

2.1 TENSÖRLER

Herhangi bir fiziksel nicelik, örneğin bir parçacığın hızı gibi koordinat sistemine bağlı olan bir dizi sayısal değer, bileşenleri tarafından belirlenir. Bu değerlerin nasıl değiştiğini koordinat sistemi ile incelemek tensör kavramına yol açar. Tensörler, bileşenlerin koordinat dönüşümü altında invaryant kalarak dönüşmesini sağlayan niceliklerdir. Böylece her koordinat sisteminde aynı forma sahip tensör denklemleri ile fiziksel yasaları ifade edebiliriz. Herhangi bir x^a koordinat sisteminden x'^a koordinat sistemine geçmek için,

$$x'^b = x'^b(x^a), \quad dx'^b = \frac{\partial x'^b}{\partial x^a} dx^a \quad (2.1)$$

denklem sistemi kullanılır [18]. x^a koordinatındaki bir noktada tanımlı, birinci dereceden T^a kontravaryant tensör bileşeninin dönüşümü;

$$T'^b = \frac{\partial x'^b}{\partial x^a} T^a \quad (2.2)$$

ve T_a kovaryant tensörün dönüşümü ise

$$T'_b = \frac{\partial x^a}{\partial x'^b} T_a \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\partial x'^b / \partial x^a$ ifadesi dönüşüm, $\partial x^a / \partial x'^b$ ifadesi ters dönüşüm matrisini (Jakobiyen) ifade etmektedir. İkinci mertebeden T^{ab} kontravaryant ve T_{ab} kovaryant tensör bileşenlerinin dönüşümleri ise;

$$T'^{cd} = \frac{\partial x'^c}{\partial x^a} \frac{\partial x'^d}{\partial x^b} T^{ab}, \quad T'_{cd} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^c} \frac{\partial x^b}{\partial x'^d} T_{ab} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır.

Hem kovaryant hem de kontravaryant bileşenlere sahip yüksek mertebeden karma bir tensörün dönüşümü ise,

$$T'_{a...b}{}^{c...d} = \frac{\partial x'^c}{\partial x^e} \cdots \frac{\partial x'^d}{\partial x^f} \frac{\partial x^g}{\partial x'^a} \cdots \frac{\partial x^h}{\partial x'^b} T_{g...h}{}^{e...f} \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilir. Sıfırıncı mertebeden tensörler skaler, birinci mertebeden tensörler ise vektör olarak isimlendirilir. Dört boyutlu bir koordinatta tanımlı birinci mertebeden tensörün 4, ikinci mertebeden tensörün ise 16 bileşeni bulunur.

2.2. KOVARYANT TÜREV

Öklid uzayından farklı olarak, genel rölativitede uzay geometrisinin eğri olması ve zamanın da 4. boyut olarak uzayın bileşenlerine dahil edilmesi ile birçok matematiksel niceliğin bu uzaya uygun olarak ifade edilme ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Türev kavramı da bu niceliklerden bir tanesidir. Tensörel büyüklüklerin bu eğri uzay-zamanda tanımlanan türev bağıntısına Kovaryant Türev denilmektedir. Her U vektörüne bağlanan ∇_U (U vektörüne göre kovaryant türev) şu özellikler ile tanımlanır:

1) ∇_U , bir tensör alanına uygulandığında aynı tipten bir tensör versin ve U 'ya göre lineer olsun

$$\nabla_{(fU+gV)}(T) = f\nabla_U(T) + g\nabla_V(T) \quad (2.6)$$

2) Uygulandığı vektör alanına göre de lineer olsun

$$\nabla_U(fV + gW) = f\nabla_U(V) + g\nabla_U(W) \quad (2.7)$$

3) Bir fonksiyona uygulandığında

$$\nabla_U(f) = Uf \quad (2.8)$$

olsun.

4) Tensör çarpımlarına uygulandığında türev operatörü özelliği gösterebilir

$$\nabla_U(S \otimes T) = \nabla_U(S) \otimes T + S \otimes \nabla_U(T) \quad (2.9)$$

Şimdi, $\{E_a, \omega_a\}$ genel tabanında taban vektörlerinin taban vektörlerine göre kovaryant türevlerini ele alalım.

$$\nabla_{E_a}(E_b) = \Gamma^c_{ba} E_c \quad (2.10)$$

Burada Γ^c_{ba} katsayısı Christoffel sembolüdür ve tensör değildir. (2.6) ve (2.7) denklemleri kullanılarak aşağıdaki hesapların yapılması mümkündür:

$V = V^a E_a, U = U^b E_b, \omega = \omega^a \omega_a$ olsun. $\nabla_U(V)$ 'nin hesabı şöyledir:

$$\begin{aligned}\nabla_U(V) &= \nabla_U(V^a E_a) = V^a \nabla_U(E_a) + (UV^a)E_a = U^b V^a \nabla_{E_b}(E_a) + (U^b E_b V^a)E_a \\ &= U^b (E_b V^c + \Gamma^c_{ab} V^a) E_c\end{aligned}\quad (2.11)$$

Burada $E_b V^c \equiv \partial_b V^c$ ve $\partial_b V^c + \Gamma^c_{ab} V^a \equiv \nabla_b V^c$ olarak yazılırsa,

$$\nabla_U(V) = U^b \nabla_b V^c E_c \quad (2.12)$$

bulunur. $U = U^b E_b$ özel durumu için,

$$\nabla_{E_b}(V) = \nabla_b V^c E_c \quad (2.13)$$

ifadesine indirgenir. $\nabla_U(\omega)$ 'nin hesabı:

$$\nabla_U(\omega(V)) = \nabla_U(\omega)(V) + \omega(\nabla_U(V)) \quad (2.14)$$

$$\omega(V) \equiv \langle \omega, V \rangle = \omega_a V^a \quad (2.15)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\nabla_U(\omega_a V^a) &= (\nabla_U \omega)_a V^a + \omega_c (\nabla_U V^c) = (\nabla_U \omega)_a V^a + \omega_c (U^b E_b V^c + U^b V^a \Gamma^c_{ab}) \\ (\nabla_U \omega_a) V^a + \omega_a (\nabla_U V^a) &= (\nabla_U \omega)_a V^a + \omega_c (UV^c) + \omega_c U^b V^a \Gamma^c_{ab}\end{aligned}\quad (2.16)$$

olur. Buradan da

$$(\nabla_U(\omega))_a = U \omega_a - U^b \omega_c \Gamma^c_{ab} \quad (2.17)$$

veya

$$\nabla_U(\omega) = U^b (E_b \omega_a - \omega_c \Gamma^c_{ab}) \omega^a = U^b \partial_b \omega_a \omega^a \quad (2.18)$$

ifadesi elde edilir. Özel olarak $\omega = \omega^d$ ve $U \equiv E_b$ olması durumunda

$$\nabla_{E_b}(\omega^d) = -\Gamma^c_{ab} \omega^a \quad (2.19)$$

olduğu görülür.

$\{\partial_d, dx^d\}$ koordinatsal tabanda (2.12) ve (2.18) ifadeleri alışılmış kısmi türev ve kovaryant türev ifadelerine indirgenir.

Bu hesaplamalar daha yüksek mertebeden türevlere de uygulanabilir. Örneğin, ikinci mertebeden kovaryant g tensörü için,

$$\nabla_{E_b}(g_{de}\omega^d \otimes \omega^e) = (E_f g_{de} - \Gamma^c_{ef} g_{dc} \Gamma^c_{df} g_{ce})\omega^d \otimes \omega^e \quad (2.20)$$

bulunur.

5) Ek bir varsayım olarak, $\nabla_U(g) = 0$ alırsak (2.20)'den

$$E_f g_{de}\omega^f = (\Gamma^c_{ef} g_{dc} - \Gamma^c_{df} g_{ce})\omega^f \quad (2.21)$$

ifadesi elde edilir. Sol taraf $\{E_d, \omega^d\}$ tabanında dg_{de} (dış türev)'nin ifadesidir. Burada,

$$\omega^c_e \equiv \Gamma^c_{ef}\omega^f \quad (2.22)$$

alınırsa, (2.21) ifadesi

$$dg_{de} = g_{de}\omega^c_e + g_{ce}\omega^c_d \quad (2.23)$$

halini alır ya da

$$\omega_{de} \equiv g_{dc}\omega^c_e \quad (2.24)$$

yazarak,

$$dg_{de} = \omega_{de} + \omega_{ed} \quad (2.25)$$

ifadesi elde edilir. ω^c_e veya ω_{de} 'lere bağlantı 1-formları denir. Bunların ω^d tabanındaki bileşenlerine bağlantı katsayıları denildiği gibi Ricci dönme katsayıları da denir. Bu iki katsayı (2.22) ve (2.24)'den faydalanılarak yazabileceğimiz,

$$\omega_{de} = g_{dc}\Gamma^c_{ef}\omega^f \quad (2.26)$$

bağıntısında

$$\Gamma_{def} = g_{dc}\Gamma^c_{ef} \quad (2.27)$$

olarak tanımlanırsa,

$$\omega_{de} = \Gamma_{def} \omega^f \quad (2.28)$$

ifadesi elde edilir.

2.3 VARYASYON HESABI

x 'e bağlı bir $y(x)$ fonksiyonu için yazılan,

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx f[y(x), y'(x), x] \quad (2.29)$$

fonksiyoneli ele alalım. Burada $y'(x) = dy/dx$ olup $f, y(x), y'(x)$ ve x 'in rastgele fonksiyonlarıdır. Bu şekilde (2.29) integralini maksimum ya da minimum yapacak $y(x)$ fonksiyonu tespit edilir.

I fonksiyoneli, $\mathcal{E}$ gibi bir eğri parametresine bağlı olarak ($I = I(\mathcal{E})$) yazılırsa,

$$\frac{dI}{d\mathcal{E}} = 0 \quad (2.30)$$

durumunda I için ekstremum değeri elde edilir.

Öyleyse, bu $y(x)$ çözümünden sapacak ve $\mathcal{E}$ ile parametrize edilmiş bir $Y(x, \mathcal{E})$ biçiminde eğri ailesi ele alalım. Burada, Y eğrileri $\mathcal{E}$ 'un sürekli bir fonksiyonudur ve $\mathcal{E}$ 'un her bir değeri için farklı eğriler elde edilmektedir; $\mathcal{E} = 0$ durumunda, $y(x)$ ekstremum eğrisi (çözümü) elde edilir [$Y(x, 0) = y(x)$].

Ayrıca; bütün $Y(x, \mathcal{E})$ eğri aileleri, $y(x)$ ile aynı noktalarda (burada, x_1 ve x_2) sonlanmalıdır, yani;

$$Y(x_1, \mathcal{E}) = y(x_1) = y_1, \quad Y(x_2, \mathcal{E}) = y(x_2) = y_2 \quad (2.31)$$

yazılır.

Şimdi (2.29) ifadesi,

$$I(\mathcal{E}) = \int_{x_1}^{x_2} dx f[Y(x, \mathcal{E}), Y'(x, \mathcal{E}), x] \quad (2.32)$$

biçiminde yeniden ifade edilir ve böylelikle, (2.30) koşulu,

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_1}^{x_2} dx f[Y(x, \varepsilon), Y'(x, \varepsilon), x] = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{df[Y(x, \varepsilon), Y'(x, \varepsilon), x]}{d\varepsilon} \quad (2.33)$$

olur ve sonrasında,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\varepsilon} &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} \right] = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right) \right] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right) - \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

şeklini alır. Burada,

$$\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right) \quad (2.35)$$

olarak alınmıştır. Şimdi, $\varepsilon = 0$ olduğunda hem x 'e göre kısmi türev $\partial/\partial x \rightarrow d/dx$ şeklinde adi türeве dönüşür hem de,

$$Y(x, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = Y(x, 0) = y(x), \quad \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \neq 0, \quad (2.36)$$

olur. Böylelikle (2.30) ifadesi;

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= 0 = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial Y} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \Big|_{\varepsilon=0} \right) \right] \\ &= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.37)$$

şeklini alır.

(2.31) ifadesinin sonucu olarak, x_1 ve x_2 sınır noktalarında;

$$\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0, x=x_i} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2.38)$$

elde edilir. Dahası, $Y(x, \varepsilon)$ fonksiyonunun ε etrafındaki Taylor serisi,

$$Y(x, \varepsilon) \approx y(x) + \varepsilon \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + Q(\varepsilon^2) \quad (2.39)$$

ve x_i ($i = 1, 2$) sınır noktalarında,

$$y_i \approx y_i + \varepsilon \left. \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0, x=x_i} \Rightarrow \left. \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0, x=x_i} = 0 \quad (2.40)$$

biçiminde olduğu göz önünde bulundurulduğunda (ε 'a birinci dereceden bağlı), (2.37) ifadesi,

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \left. \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] = 0 \quad (2.41)$$

biçimini alır ve bu ifade her $\partial Y / \partial \varepsilon|_{\varepsilon=0}$ için sağlanmalıdır. Böylelikle

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (2.42)$$

sonucu elde edilir ve bu diferansiyel denklemin çözümü ile (2.29) integralini ekstremum yapacak $y(x)$ fonksiyonu bulunabilir.

(2.29) integralinin içindeki birinci dereceden türeve sahip f fonksiyonu yerine daha yüksek mertebeden türevlere bağlı bir L fonksiyonu alınsın. Bu fonksiyona Lagrangian denir ve genel olarak,

$$I = \int dx L, \quad L = L(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), x) \quad (2.43)$$

şeklinde verilir. Burada $y^{(n)}(x)$, $y(x)$ fonksiyonunun x 'e göre n -inci mertebeden türevini ifade etmektedir $[y^{(n)}(x) \equiv d^n y(x)/dx^n]$. Ayrıca; $(n-1)$ 'inci mertebeye kadar bütün türevleri ve δy varyasyonları sınır değerlerinde sıfırdır; yani,

$$\delta y|_{x_i} = 0 = \delta y'|_{x_i} = \dots = \delta y^{(n-1)}|_{x_i} \quad (2.44)$$

şeklindedir ($i = 1, 2$). (2.43) integralinin

$$\delta I = \delta \int dx L(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), x) = 0 \quad (2.45)$$

varyasyonu için,

$$\delta L = L(y + \delta y, y' + \delta y', \dots, y^{(n)} + \delta y^{(n)}, x) - L(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), x) \quad (2.46)$$

ve

$$L(y + \delta y, y' + \delta y', \dots, y^{(n)} + \delta y^{(n)}, x) \quad (2.47)$$

ifadesinin,

$$L(y + \delta y, y' + \delta y', \dots, y^{(n)} + \delta y^{(n)}, x) \approx L(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), x) + \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' + \dots + \frac{\partial L}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \quad (2.48)$$

biçimindeki Taylor serisi göz önünde bulundurulduğunda elde edilecek,

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' + \dots + \frac{\partial L}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \quad (2.49)$$

Lagrangian'ın varyasyonu ile (2.45) ifadesi,

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int dx L(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), x) \\ &= \int dx \delta L = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' + \dots + \frac{\partial L}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

şeklini alır. Eşitliğin sağ tarafındaki parantez içinde y 'nin ve türevlerinin varyasyonunu içeren terimler,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \delta y \right) - \delta y \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] = \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \delta y \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &\quad - \int_{x_1}^{x_2} dx \delta y \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] = - \int_{x_1}^{x_2} dx \delta y \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.51)$$

ve

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial L}{\partial y''} \delta y'' &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \delta y' \right) - \delta y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right] = \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \delta y' \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &\quad - \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{d}{dx} \left(\delta y \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y''} \right) - \delta y \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right] = \left[\delta y \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right] \Big|_{x_1}^{x_2} + \\ &\quad \int_{x_1}^{x_2} dx \delta y \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right] = \int_{x_1}^{x_2} dx \delta y \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.52)$$

şeklinde düzenlenir. Burada görülüyor ki; δy (ve türevlerin varyasyonu) üzerine etkiyen türevler artık, y' 'ye (ve x 'e göre türevlerine) göre türevli L Lagrangianı'nın üzerine etkimektedir.

Bu düzenlemeler, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ olmak üzere k -ıncı türevi içeren her bir $\partial L / \partial y^{(k)}$ terimi için integral,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \delta y^{(k)} &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{d}{dx} \left(\delta y^{(k-1)} \frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \right) - \delta y^{(k-1)} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \right) \right] \\ &= \left(\delta y^{(k-1)} \frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \delta y^{(k-1)} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \right) \right] \\ &= \dots = (-1)^k \int_{x_1}^{x_2} dx \delta y \left[\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

biçiminde genelleştirilir. Böylelikle (2.50) varyasyonu,

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int dx L(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), x) \\ &= (-1)^k \int_{x_1}^{x_2} dx \delta y \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

olur ve buradan (2.42) ifadesinin genel hali,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \right) = 0 \quad (2.55)$$

biçiminde bulunur.

Eğer $V(q)$ potansiyeli içinde hareket eden m kütleli noktasal bir parçacık ele alınırsa ($q = q(t)$ genelleştirilmiş koordinatlar, t zaman) sistemin Lagrangianı basitçe,

$$L(q, \dot{q}) = T - V = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \quad (2.56)$$

şeklinde verilir ve (2.45) ifadesi gereği,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \delta L(q, \dot{q}) = 0 \quad (2.57)$$

yazılır.

Lagrangian'ın varyasyonu için,

$$\delta L(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \delta q \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \quad (2.58)$$

yazıldığında (2.57) ifadesi (t_1 ve t_2 'de $\delta q = 0$),

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \delta q \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \delta q \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \delta q \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \quad (2.59)$$

biçiminde ifade edilir. t_1, t_2 rastgele değerlerdir ve herhangi bir δq varyasyonu için,

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (2.60)$$

elde edilir ve bu Euler-Lagrange Diferansiyel Denklemleri olarak isimlendirilir.

2.4 DİNAMİK SİSTEMLER TEORİSİ

Dinamik sistem, bir sistemin zamansal evrimini tanımlayan bir model olarak düşünülebilir. Dinamik sistemler teorisi, diferansiyel denklemleri ve yinelenen eşlemeleri analiz etme yöntemlerini içerir. Dinamik sistem orjinini Newton mekaniğinden alır. Doğa yasaları ilk defa Newton tarafından diferansiyel denklem olarak ifade edilmiştir. Diferansiyel denklemler teorisinin gelişmesinde Gök Mekaniği oldukça etkili olmuştur. 18. ve 19. yüzyıllarda Gök Mekaniği'nin en büyük problemlerinden biri “n-cisim problemi”dir. Bu, Newtonsal Gravitasyon etkisi altında n maddesel cismin hareketini belirlemek anlamına gelir [47]. Yani,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.61)$$

diferansiyel denklem sisteminin, verilmiş başlangıç koşulları altında çözümünü bulmak demektir. (2.61) denklemi, otonom (f_1 fonksiyonlarının zamana açıkça bağlı olmaması) olmasının yanı sıra, gravitasyonun korunumlu olması nedeniyle, bir de

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \quad , \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (2.62)$$

biçiminde Hamiltonyen formda yazılma gibi bir özellik taşımaktadır. Problem, belirli bir anda, parçacıkların koordinatları ve hızları bilindiğinde, bunların gelecekte ne olacağı ya da geçmişte ne olduğudur. Problem $n = 2$ için tamamen analitik olarak integre edilebilmektedir. Fakat $n = 3$ için durum oldukça karmaşık hale gelmektedir. (2.62) sistemi analitik olarak integre edilebilmiş olsa bile, bu analitik ifadenin kullanılamayacak derecede karmaşık olmayacağının bir garantisi bulunmamaktadır. Nitekim, Güneş tutulması probleminde (2.62) denkleminin yakınsak çözümü elde edilmiş ancak yeterli yakınsamayı sağlamak için göz önüne alınması gereken terim sayısının “Einstein evreninin elektron sayısı” kadar olduğu görülmüştür. Diğer yandan sayısal yöntemler de tatminkar değildir. Bunlar, bağımsız değişkenin sonlu bir aralığı için özel çözümler vermekte; değişkenin sonsuz değerleri için çözümün ne olacağını söylememektedir.

Diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerine en doğru yaklaşım 1879’da Poincaré tarafından bulunmuştur. Pek çok kişi dinamik sistemlerin kurucusu olarak Henry Poincaré’i görür. Poincaré, en basit sistem olan

$$\dot{x} = P(x, y) \quad , \quad \dot{y} = Q(x, y) \quad (2.63)$$

den hareketle Nitel Analiz’in genel formalizminin temellerini atmıştır. Poincaré’in çalışmaları Bendixson tarafınan tamamlanmış, Birkoff tarafından da sağlam temellere oturtulmuştur. Tüm bu çalışmalar Gök Mekaniği kapsamında gelişmiştir. Ancak, 20.yüzyılın başlarında, mekanik, optik, akustik gibi alanlarda periyodik süreçli olayların keşfi ve teknolojiadaki uygulamaları nonlineer denklem sistemlerinin Nitel Analiz Teorisi’ne ilgiyi daha da arttırmıştır. Nitel Analiz ya da Dinamik Sistemler Teorisi olarak adlandırılan bu yöntem günümüzde: Fizik, Biyoloji, Matematik, Meteoroloji gibi hemen hemen her disiplinde uygulama alanı bulmakla birlikte henüz ham bir teori olarak görülmekte ve yoğun bir araştırma alanı oluşturmaktadır.

2.5.1 Diferansiyel Denklemler ve Akıları

2.5.1a Otonom Diferansiyel Denklemler ve Faz Uzayı

Bir t zamanında durumu bilinen fiziksel sistemlerin çalışılmasında kullanılan dinamik sistemler teorisi X faz uzayının bir x elemanı ile tanımlanabilir ve bunun evrimi X üzerindeki bir otonom diferansiyel denklem ile belirlenir. Bu denklem,

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2.64)$$

dir. Burada $f: X \rightarrow X$. Bu bölümde $X = R^n$, $X = (X_1, \dots, X_n)$ durumuyla ilgileneceğiz. Bu durumda (2.64)'e kısaca R^n 'de bir diferansiyel denklem (DE) diyeceğiz ve

$$x' = f(x) \quad , \quad x \in R^n \quad (2.65)$$

şeklinde göstereceğiz. f fonksiyonu $f: R^n \rightarrow R^n$, R^n üzerinde bir vektör olarak tanımlanabilir.

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

f 'in R^n üzerinde C^1 sınıfından olduğunu varsayacağız. Uygulamalarda DE'nin belli özel tipleri oldukça önemlidir.

Lineer DE: Eğer f bir lineer fonksiyonsa, yani $f(x) = Ax$; Burada A , $n \times n$ boyutunda bir reel matris olmak üzere (2.65) diferansiyel denklemi lineerdir.

$$x' = Ax \quad (2.66)$$

Gradyent DE: Eğer f , bir C^2 skaler alan $Z: R^n \rightarrow R$ 'nin gradyenti ise yani $f(x) = -\nabla Z(x)$ ise, (2.65) diferansiyel denklemi gradyent DE'dir.

$$x' = -\nabla Z(x) \quad (2.67)$$

Hamiltonyen DE: Eğer $x = (q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n) \in R^{2n}$ ve $f(x) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_a}, -\frac{\partial H}{\partial q^a} \right)$, burada $H: R^{2n} \rightarrow R$ Hamiltonyen olarak adlandırılan bir C^1 fonksiyonu ise, (2.65) Hamiltonyen diferansiyel denklemdir.

$$\frac{\partial q^a}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_a} \quad , \quad \frac{\partial p_a}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \quad (2.68)$$

Burada $a = 1, \dots, n$. Korunumlu mekanik sistemlerin evrimi $H(q^a, p_a) = \frac{1}{2} g^{ab}(q^c) p_a p_b + V(q^c)$ formunda H fonksiyonuna sahip Hamiltonyen diferansiyel denklemi ile tanımlanır. Burada g^{ab} simetrik ($g^{ab} = g^{ba}$) ve $H(q^a, p_a)$ bağıntısında birinci terim kinetik enerji ve $V(q^c)$ de potansiyel enerjiyi temsil etmektedir [13].

2.5.1b Temel Teoremler

R^n üzerindeki $x' = f(x)$ diferansiyel denkleminin bir çözümü $\psi: R \rightarrow R^n$ 'e bir fonksiyondur ve bütün $t \in R$ değerleri için $\psi'(t) = f(\psi(t))$ bağıntısını sağlar. R^n 'de bu çözümün bir imajı DE'nin bir yörüngesi olarak adlandırılır. İlgili fiziksel sistemin zamanla evrimi, DE'nin bir yörüngesi boyunca, $x \in R^n$ durum vektörünün hareketiyle tanımlanır. DE, $f(x)$ vektör alanının yörüngesinin tanjantı olmasını sağlar ve bu faz uzayında hareket eden noktanın hızı olarak düşünülebilir (fiziksel parçacığın hızı ile karıştırılmamalıdır.)

Öncelikle R^n üzerindeki bir DE'nin başlangıç değer problemi için standart varlık-tekillik teoremi ile başlayalım.

Teorem 2.1: Varlık-Tekillik

$$x' = f(x) , x(0) = a \in R^n$$

Başlangıç değer problemini düşünelim. Eğer $f: R^n \rightarrow R^n$ fonksiyonu $C^1(R^n)$ sınıfından ise, bütün $a \in R^n$ değerleri için bir $(-\delta, \delta)$ aralığı ve bir $\psi_a: (-\delta, \delta) \rightarrow R^n$ tekil fonksiyonu vardır ve

$$\psi'_a(t) = f(\psi_a(t)) , \psi_a(0) = a$$

olur.

Varlık-tekillik teoremi bir yerel sonuçtur. Merkezi $t = 0$ da olan $(-\delta, \delta)$ aralığında çözümün varlığını garantiler. Teoremin tekrar ardışık uygulamalarıyla $\psi_a(t)$ çözümünün tanımlı olduğu aralığı genişletebiliriz ve bu yolla $\psi_a(t)$ çözümünün (t_{min}, t_{max}) ifadesiyle gösterilen bir “maksimal tanım aralığı” elde ederiz.

Bir sonraki teorem, çözümün belli bir sonlu zamana ayrılmaksızın çözümlerin belirsizce genişletilebileceğini gösterir. Burada ve geri kalan kısımda $\| \cdot \|$, R^n 'de standart formu gösterecek.

Teorem 2.2: Maksimum Olma Durumu

$\psi_a(t)$ fonksiyonu $x' = f(x)$ diferansiyel denkleminin tekil çözümü olsun. Burada $f \in C'(R^n)$ ve $\psi_a(0) = a$ durumunu sağlar. (t_{min}, t_{max}) da $\psi_a(t)$ 'nin tanımlı olduğu maksimal aralığı gösterebilir. Eğer t_{max} sonlu ise,

$$\lim_{t \rightarrow t_{max}} \|\psi_a(t)\| = +\infty$$

dur. Bu sonuç soldan limit için de geçerlidir.

Sonuç 2.1: $x' = f(x)$, $f \in C'(R^n)$ diferansiyel denklemini düşünelim. $D \subset R^n$ bir kompakt set olsun. Eğer bir maksimal genişletilmiş $\psi_a(t)$ çözümü D 'de geçerliyse çözüm bütün $t \in R$ değerleri için tanımlıdır.

Teorem 2.3: Genişletilebilirlik

Eğer $f: R^n \rightarrow R^n$ sürekli ise ve $\|f(x)\| \leq M \|x\|$ sağlayan bütün $x \in R^n$ değerleri için bir M sabiti varsa $x' = f(x)$ diferansiyel denkleminin herhangi bir çözümü bütün $t \in R$ değerleri için tanımlıdır.

Sonuç 2.2: Eğer $f: R^n \rightarrow R^n$, $C^1(R^n)$ ise ve $\lambda: R^n \rightarrow R$, C^1 ve pozitif ise $x' = f(x)$ ve $x' = \lambda(x)f(x)$ aynı yörüngelere sahiptir ve 2. diferansiyel denklemin bütün çözümleri, bütün $t \in R$ değerleri için tanımlı olduğundan λ seçilebilir.

2.5.1c Bir Diferansiyel Denklemin Akısı

Eğer $x' = f(x)$ diferansiyel denkleminin çözümleri bütün zamanlar için genişletilebilirse diferansiyel denklemin akısı tanımlanabilir.

Tanım 2.1: $x' = f(x)$, $x \in R^n$ diferansiyel denklemini düşünelim. Burada f , $C^1(R^n)$ sınıfındandır. Denklemin çözümleri bütün $t \in R$ değerleri için tanımlıdır. $\psi_a(t)$ fonksiyonu da $\psi_a(0) = a$ değerlerini sağlayan tekil maksimal çözüm olsun. Diferansiyel denklemin akısı, R^n 'in kendisine $\{\phi_t\}_{t \in R}$ eşlemelerinin bir parametrelili ailesi olarak tanımlanır. Öyle ki, bütün $a \in R^n$ için

$$\phi_t(a) = \psi_a(t) \tag{2.69}$$

dir.

Teorem 2.4: (Akının Grup Özellikleri)

$x' = f(x)$ diferansiyel denkleminin akısı $\{\phi_t\}$ olsun.

$$\phi_0 = I, \text{ (birim eşleme)}$$

$$\phi_{t_1+t_2} = \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} \text{ bütün } t_1, t_2 \in R \text{ için (birleşme özelliği)}$$

$$\phi_{-t} = (\phi_t)^{-1} \text{ bütün } t \in R \text{ için (ters eşleme özelliği)}$$

Teorem 2.5: Akının Düzlüğü

Eğer $f \in C'(R^n)$ ise $x' = f(x)$ diferansiyel denkleminin akısı $\{\phi_t\}$, C^1 eşlemelerini içerir.

Şu anda “dinamik sistemler” teriminin kullanılmasını önermek uygun olacaktır. Bir taraftan bu terim, zamanla evrimleşen bir fiziksel sistemin bazı tiplerini ifade etmek için informal bir yolla kullanılırken, diğer taraftan matematik yaklaşımda şu iki yolla kullanılır:

(1) Sürekli dinamik sistemler: R^n üzerindeki bir diferansiyel denklemin $\{\phi_t\}_{t \in R}$ akısına denir. Daha genel olarak, bir akı $\phi_t: X \rightarrow X$, $t \in R$ tersi alınabilir eşliklerinin bir parametrelili ailesi olarak tanımlanabilir. Burada X , bir metrik uzayıdır.

(2) Diskret dinamik sistem: $g: X \rightarrow X$ tersi alınabilir bir eşlemenin temsiliyle doğurulan $\{g^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ eşlemelerin bir parametrelili ailesini temsil eder. (yani $g^2 = g \circ g$ ve g^{-1} ters eşleme vs.) Eğer g tersi alınamaz ise eşlemeler ailesi $m \geq 0$ ile sınırlanmış olur. X kümesi genelde R^n ’in bir belli alt kümesidir.

2.5.2 Yörüngeler ve İnvaryant Setler

2.5.2a Yörüngelerin Sınıflandırılması

Tanım 2.2: Verilen bir diferansiyel denklem ve ilgili ϕ_t akısı, $\gamma(x_0)$ ile gösterilen x_0 boyunca yörünge şu şekilde tanımlanır:

$$\gamma(x_0) = \{x \in R^n | x = \phi_t(x_0), t \in R\} \quad (2.70)$$

verilen bir $\emptyset_t$ akısı için faz uzayındaki noktalar ikiye ayrılır :

i) Denge noktaları

ii) Sıradan noktalar

Tanım 2.3: $x' = f(x)$ diferansiyel denkleminin bir x_0 denge noktası $f(x_0) = 0$ koşulunu sağlar veya eşit olarak $\emptyset_t(x_0) = x_0$ 'dır (bütün $t \in R$ için). Burada $\emptyset_t$ diferansiyel denklemin ilgili akısıdır.

Tanım 2.4: x_0 sıradan bir nokta olsun. Yörünge $\gamma(x_0)$ periyodiktir, $\emptyset_T(x_0) = x_0$ olacak şekilde bir $T > 0$ olduğu anlamına gelir.

Tanım 2.5: x_0 sıradan bir nokta olsun ki $\gamma(x_0)$ periyodik olmayan bir yörünge olsun. $\gamma(x_0)$ tekrarlayan yörüngedir ve bu da tüm $N(x_0)$ komşulukları ve tüm $T \in R$ 'ler için $\emptyset_t(x_0) \in N(x_0)$ olacak şekilde bir $t > T$ vardır anlamına gelir.

Bir $\emptyset_t$ akısının periyodik bir T periyodu yörüngesine sahip olması durumunda, karşılık gelen fiziksel sistem T periyodunun salınım davranışını gösterebilirken, $\emptyset_t$ tekrarlayan bir yörüngeye sahipse, karşılık gelen fiziksel sistem keyfi olarak daha önceki bir duruma dönebilir.

Bir akının faz tanımlarının düzenlenmesinde aşağıdaki yörünge türleri de önemlidir.

Tanım 2.6: Farklı denge noktalarını birleştiren bir yörünge, heteroklinik bir yörünge olarak adlandırılır. Denge noktasını kendisine bağlayan bir yörünge, homoklinik yörünge olarak adlandırılır.

2.5.2b İnvaryant Kümeler

İnvaryant bir küme kavramı, dinamik sistemler teorisindeki en önemli kavramlardan biridir ve bu çalışmada önemli bir rol oynamaktadır.

Tanım 2.7: $S \subset R^n$ seti R^n üzerindeki $\emptyset_t$ akısının bir invaryant kümesi (veya ilgili $x' = f(x)$ diferansiyel denkleminin) olmasının anlamı bütün $x \in S$ 'ler ve $t \in R$ 'ler için $\emptyset_t(x) \in S$ olmasıdır.

İnvaryant Küme Örnekleri

- i) Tekil yörüngeler, denge noktaları ve periyodik yörüngeler gibi
- ii) Durağan, durağan olmayan ve merkezi manifoldlar
- iii) α_- ve ω_- limit kümeleri
- iv) Çekiciler
- v) Heteroklinik sonuçlar ve daireler.

İnvaryant kümelerin oluşmasında basit bir yol vardır. R^n 'de verilen bir (2.65) diferansiyel denklemi ve C^1 fonksiyonu $Z: R^n \rightarrow R$ için, (2.65)'nin çözümleri boyunca Z 'nin türevi şu şekilde verilir:

$$Z' = \nabla Z \cdot f(x) \quad (2.71)$$

Burada $\bullet$, R^n 'de standart iç çarpımı gösterir.

2.5.2c Monoton Fonksiyonlar

Tanım 2.8: $\emptyset_t$, R^n üzerinde bir akı; $S, \emptyset_t$ 'nin bir invaryant kümesi ve $Z: S \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon olsun. S üzerindeki akı için Z 'nin monoton azalan (artan) fonksiyon olması, bütün $x \in S$ 'ler için $Z(\emptyset_t(x))$ 'in t 'nin monoton azalan (artan) fonksiyonu olmasıdır.

(2.65) diferansiyel denklemini ve bunun olası $\emptyset_t$ 'sini düşünelim ve Z 'nin C^1 sınıfından olduğunu varsayalım. Eğer S üzerinde

$$Z' \equiv \nabla Z \cdot f < 0 \quad (2.72)$$

ise Z, S üzerinde monoton azalandır. Diğer taraftan (2.72) daha zayıf bir koşulla yer değiştirildiğinde, S üzerinde

$$Z' \equiv \nabla Z \cdot f \leq 0 \quad (2.73)$$

oluyorsa ve eşitliğin geçerli olduğu küme hiçbir yörünge içermiyorsa, Z 'nin S üzerinde monoton olmasının nasıl ispatlandığını gösterir.

Örnek: $\emptyset_t$, (2.67) gradyent diferansiyel denklemi ile belirlenen bir akı olsun. (2.71)'den (2.67)'deki potansiyel fonksiyonunun $Z' = -\|\nabla Z\|^2$ 'ni sağladığı görülür ki bu ifade herhangi bir denge noktası içermeyen herhangi bir invaryant küme üzerinde Z 'nin, $\emptyset_t$ 'nin monoton azalan fonksiyon olduğunu gösterir.

Şimdiki önerme bir S invaryant kümesi üzerinde bir monoton fonksiyonun varlığının S 'nin yörüngelerini belirli ölçüde kolaylaştırdığını gösterir.

2.5.2d Dulac Fonksiyonları

Uzayda bir diferansiyel denklem için periyodik yörüngeleri içermesinde bir başka metod Klasik Dulac teoremi tarafından sağlanan bir Dulac fonksiyonu bulunmasını gerektirir.

Teorem 2.6: (Dulac) R^2 'de bir $x' = f(x)$ diferansiyel denklemini düşünelim. Eğer basit-birleşik açık kümesi $S \subset R^2$ 'de $\nabla \cdot (\lambda f) > 0$ (veya < 0) koşulunu sağlayan C^1 sınıfından bir $\lambda: R^2 \rightarrow R$ fonksiyonu varsa, S 'de hiçbir periyodik nokta yoktur.

2.5.3 Denge Noktaları Civarındaki Durum

R^n 'de bir $x' = f(x)$ diferansiyel denkleminin çözümleri hakkında kalitatif bilgi elde etmenin ilk adımı, denge noktalarının komşularında yerel akı niceliklerini incelemektir (yani onların durağanlıklarını incelemek). Denge noktalarının her birinde diferansiyel denklemi lineerleştirmek ve lineer diferansiyel denklemin sonuçlarının davranışı ile verilen lineer olmayan denklem arasında ilişki kurmayı sağlayan aşağıdaki Hartman-Grobman teoremini kullanmak gereklidir. Dolayısıyla R^n 'deki lineer diferansiyel denklemle ilgili temel bazı sonuçları hatırlayarak başlayacağız.

2.5.3a R^n 'de Lineer Diferansiyel Denklemler

R^n 'de verilen bir $x' = A(x)$ lineer diferansiyel denklemi için A 'nın özdeğerlerini (genelde kompleksdir ama öyle olması gerekmez) ve assosiyе genelleştirilmiş öz vektörlerini düşünelim. R^n 'de 3 alt uzay tanımlarız:

-Durağan alt uzay (kararlı) $E^s = \text{açıklık}(S_1, \dots, S_{n_s})$

-Durağan olmayan alt uzay (kararsız) $E^u = \text{açıklık}(u_1, \dots, u_{n_u})$

-Merkezi alt uzay $E^c = \text{açıklık}(c_1, \dots, c_{n_c})$

Burada; $s_1, \dots, s_{n_s}$ özdeğerleri negatif reel kısma sahip genelleştirilmiş özvektörler; $u_1, \dots, u_{n_u}$ özdeğerleri pozitif reel kısma sahip özvektörler; $c_1, \dots, c_{n_c}$ özdeğerleri ve sıfır reel kısma sahip özvektörlerdir.

$$E^s \otimes E^u \otimes E^c = R^n$$

ve

$$x \in E^s \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{At}x = 0$$

$$x \in E^u \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{At}x = 0$$

durumlarını sağlar.

Bu durumlar asimptotik davranışı belirler. Durağan alt uzaydaki bütün başlangıç durumları sıfır denge noktasına çekilir. Durağan olmayan alt uzaydaki bütün başlangıç durumları sıfırdan uzaklaşır. Özel olarak eğer $\lim E^s = n$ ise bütün başlangıç durumları sıfıra çekilir ve buna lineer kaynak denir. Eğer $\lim E^u = n$ ise bütün başlangıç durumları sıfırdan uzaklaşır ve buna lineer olmayan kaynak denir [37].

2.5.3b Lineerleştirme ve Hartman-Grobman Teoremi

f 'in C^1 sınıfından olduğu bir $x' = f(x)$ diferansiyel denklemini düşünelim. Eğer a bir denge noktası ise $(f(a)) = 0$, f 'in a 'daki lineer yaklaşıklığı

$$f(x) \approx Df(a)(x - a)$$

olur. Burada $Df(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{x=a}$. Verilen $x' = f(x)$ diferansiyel denklemi ile lineer diferansiyel denklem sistemi oluşturulur.

$$u' = Df(a)u \tag{2.74}$$

Burada $u = x - a$ 'dır ve $(Df(a))$ 'ya “ a denge noktası civarında diferansiyel denklemin lineerleştirilmesi” denir.

(2.69) denkleminin çözümlerinin, denge noktasının hiperbolik olmasını sağlayan kalitatif durum, a 'nın denge noktası civarında lineer olmayan diferansiyel denklemin çözümlerine yaklaşacağı durumdur (Topolojik eşitlik kavramı).

Tanım 2.9: R^n 'de verilen bir $x' = f(x)$ diferansiyel denkleminin $x = a$ denge noktasında hiperbolik olması, diferansiyel denklemin bütün özdeğerlerinin sıfırdan farklı reel kısma sahip olması demektir.

Tanım 2.10: R^n üzerindeki Φ_t ve $\tilde{\Phi}_t$ akılarının topolojik olarak eşit olması, Φ_t 'nin yörüngelerini, $\tilde{\Phi}_t$ 'nin yörüngelerine doğrultularını koruyarak eşleştiren bir $h: R^n \rightarrow R^n$ in var olmasıdır.

Teorem 2.7: (Hartman-Grobman) R^n 'de $x' = f(x)$ diferansiyel denklemini düşünelim. Burada f, Φ_t akılı C^1 sınıfından bir fonksiyondur. Eğer a , diferansiyel denklemin bir hiperbolik denge noktası ise a 'nın civarında, üzerinde Φ_t 'nin a 'daki diferansiyel denklemin lineerleştirme akısına eşit olduğu, bir N vardır.

Tanım 2.11: R^n 'de bir $x' = f(x)$ diferansiyel denkleminin bir a denge noktası, $Df(a)$ türev matrisinin özdeğerleri $i = 1, \dots, n$ için $Re(\lambda_i) < 0$ ($Re(\lambda_i) > 0$) koşulunu sağladığında yerel kaynak olur. Ne yerel kaynak ne de yerel kaynak olmayan hiperbolik denge noktasına eyer noktası denir.

2.5.3c Durağan, Durağan Olmayan ve Merkezi Manifoldlar

R^n üzerinde bir $x' = f(x)$ diferansiyel denkleminin denge noktası a ise $t \rightarrow \infty$ giderken hangi yörüngelerin a 'ya çekildiğini ve hangi yörüngelerin a 'dan uzaklaştığını bilmek faydalı olacaktır. 2.5.3a'daki lineer diferansiyel denklem için tanımlı durağan, durağan olmayan ve merkezi alt uzayların kavramı genelleştirilebilir. Özel olarak bir a denge noktasının durağan manifoldu W^s , a da E^s alt uzayına tanjant olan bir diferansiyellenebilir manifolddur ve öyle ki W^s 'deki tüm yörüngeler $t \rightarrow +\infty$ iken a 'ya asimptotiktir. Benzer şekilde a denge noktasının durağan olmayan W^u manifoldu, a 'da E^u durağan olmayan alt uzaya tanjant olan bir diferansiyellenebilir manifolddur ve W^u 'daki bütün yörüngeler $t \rightarrow -\infty$ iken a 'ya

asimptotiktir. Son olarak, a denge noktasının merkezi manifoldu W^c , a da E^c merkezi alt uzaya tanjant olan diferansiyellenebilir manifolddur. Merkezi bir manifold asimptotik davranışları lineerleştirmeyeyle belirlenemeyen yörüngeler içerir. Durağan, durağan olmayan ve merkezi manifoldların boyutları bunların alt uzaylarının boyutlarına eşittir.

2.5.4 Asimptotik Davranış:

Teorem 2.10: (Genelleştirilmiş Poincaré-Bendixson)

R^2 'de, $f \in C^2$ sınıflı bir $x' = f(x)$ diferansiyel denklemi düşünelim ve en fazla sonlu sayıda denge noktalarının olduğunu varsayalım. Herhangi bir kompakt limit kümesi aşağıdakilerden biridir:

- i) Bir denge noktası
- ii) Bir periyodik yörünge
- iii) Denge noktalarının birleşimi ve heteroklinik veya homoklinik yörüngeler.

R^2 'nin kesin bir alt kümesinde, diferansiyel denklemin yörüngelerinin kalitatif analizini vermede ilk teşebbüs; denge noktalarını bulmak, yerel durağanlıklarını analiz etmek ve bir yerel kaynak olup olmadığını belirlemektir. Eğer nümerik deneyimler hiçbir periyodik yörünge olmadığını söylese, periyodik yörüngelerin var olmadığını ispat etmek için bir Dulac fonksiyonu veya bir monoton fonksiyon bulmaya çalışılmalıdır. Daha sonra eyer noktaları içeren heteroklinik yörüngeler ve sınırları gösteren, yörüngeleri içeren bir iskelet kurulmalıdır. Bu bilgilerle α - ve ω -limit kümelerini bulmak ve geçmiş ve gelecek çekicileri belirlemek için genelleştirilmiş Poincaré-Bendixson teoremi kullanılabilir. Elbette bu adımların herhangi birinde başarısız olunabilir, bu durumda nümerik hesaplara başvurulabilir.

2.5.5 Daha Yüksek Boyutlarda Asimptotik Davranış

$n > 2$ olmak üzere R^n 'de bir akı için, kalitatif analizin verilmesi için prosedür bozulmaya uğrar. Çünkü Genelleştirilmiş Poincaré-Bendixson Teoremi geçerli değildir. Gerçekten iyi bilindiği gibi daha yüksek boyutlu dinamik davranış rekürans, kaos gibi fenomenleri içererek oldukça karmaşık olabilir. Dolayısıyla analitik bir bakıştan verilen $n > 2$ 'li R^n 'de bir otonom diferansiyel denklem için, nümerik hesaplar kullanmadan önce, denge noktalarının analizi ve var olabilen belli herhangi iki boyutlu invaryant alt uzayların analizinden daha fazlasının

yapılabileceği umulmaz. Ancak kozmolojide ortaya çıkan birçok diferansiyel denklem, dinamiği dramatik olarak basitleştiren monoton fonksiyonlarının bir çeşidini kabul ederek ve gelişmelerin analitik olarak akla yatkın yapılmasını sağlayarak bulunabilir. Özellikle, α - ve ω -limit setleri ve geçmiş ve gelecek çekicileri hakkında bilgi elde etmek için, bu fonksiyonlar La Salle İnvaryans Yasası ve Monotonluk Yasası ile birlikte kullanılabilir.

Teorem 2.11: (La Salle İnvaryans İlkesi)

R^n 'de ϕ_t akıllı bir $x' = f(x)$ diferansiyel denklemi düşünelim. S, ϕ_t 'nin pozitif invaryant, kapalı, sınırlı bir bölgesi ve Z, C^1 sınıfından bir monoton fonksiyon olsun. Bütün $x_0 \in S$ için

$$\omega(x_0) \subseteq \{x \in S \mid Z' = 0\}$$

dır. Burada $Z' = \nabla Z \cdot f$ 'dir.

Teorem 2.12: (Monotonluk İlkesi) S invaryant setine sahip R^n 'de bir ϕ_t akımı olsun. $Z: S \rightarrow R$ fonksiyonu (a, b) aralığında değişen C^1 sınıfından bir fonksiyon olsun. Burada $a \in R \cup \{-\infty\}$ ve $b \in R \cup \{+\infty\}$ ve $a < b$. Eğer Z, S 'nin yörüngeleri üzerinde azalıyorsa, bütün $x \in S$ 'ler için

$$\omega(x) \subseteq \left\{s \in \bar{S} \setminus S \mid \lim_{y \rightarrow s} Z(y) \neq b\right\}$$

$$\alpha(x) \subseteq \left\{s \in \bar{S} \setminus S \mid \lim_{y \rightarrow s} Z(y) \neq a\right\}$$

dir.

2.6 GRAVİTASYON TEORİLERİ

2.6.1 Einstein Genel Rölativite Teorisi

1905'te Einstein, Rölativite Teorisi'ni ortaya koydu. Bütün hareketlerin göreliliğini savunan bu teori, sabit hızla hareket eden sistemler için geçerliydi. 1915 yılında ortaya koyduğu Genel Rölativite Teorisi ile ivmeli referans sistemlerindeki göreliliğe de tam olarak bir açıklama getirmiştir. Genel Rölativite Kuramı denklemleri üzerinde çalıştıkça, Einstein kütleli nesnelerin uzay-zamanda bir çarpıtmaya yol açtığının farkına vardı ve bunun kütleçekim olarak algılandığını ortaya koydu. Bunu yaparak, Newton'dan farklı bir yaklaşımla kütleçekime geometrik bir yorum getirmiştir.

Einstein'ın Rölative Teorisi üç temel ilkeye dayanmaktadır. Bunlardan birincisi Genel Kovaryanslık ilkesidir ve bu ilke şunu söyler: Fizik kanunları, birinden diğerine Jakobyeni sıfırdan farklı, sürekli ve türetilbilir koordinat dönüşümleriyle geçilebilen bütün referans sistemlerinde aynı şekli muhafaza edecek biçimde ifade edilmelidir. İkincisi, serbest bir parçacığın ivmelenmesinin nedeninin, eylemsizlik kuvvetinden mi yoksa gravitasyonel alandan mı etkilenmesinden dolayı ileri geldiğinin yerel olarak ayırt edilemeyeceğini söyleyen Eşdeğerlilik İlkesidir. Bu ilkenin, doğanın gözlenen yasalarının gravitasyonel potansiyelin mutlak değerine bağlı olmadığını söyleyen Güçlü Eşdeğerlilik İlkesi ile kapalı bir sistemde yerel olarak eylemsizlik kütlesi ve gravitasyon kütlesini eşdeğer kılan Zayıf Eşdeğerlilik İlkesi olmak üzere iki alt grubu bulunmaktadır. Üçüncü temel ilke ise Mach İlkesidir. Bir cismin eylemsizliğinin evrendeki bütün cisimlerin fonksiyonu olarak belirlenmekte olduğunu ifade eden ilkeye Mach İlkesi adı verilir.

Einstein, Genel Rölative Teorisi'nin (GRT) matematiksel temellerini Riemann geometrisine dayandırmıştır [12]. Burada yay elemanı g_{ab} metriği cinsinden şu şekilde tanımlanır:

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b, \quad a, b = 1, 2, 3, 4 \quad (2.75)$$

g_{ab} simetrik tensörünün bileşenleri gravitasyonel potansiyeli ifade eder. 4-boyutlu eğrisel uzay-zamanda, madde ve enerjinin geometri ile yerel etkileşmesini genelleştirilmiş alan denklemleriyle ifade etmiştir.

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab} \quad (2.76)$$

Burada; G_{ab} Einstein tensörünü, R_{ab} Ricci eğrilik tensörünü, R Ricci eğrilik skalerini, Λ kozmolojik sabiti, $\kappa^2 \left(\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4} \right)$ Einstein eşleşim (kuplaj) sabitini, c ışık hızını ve T_{ab} madde-enerji momentum tensörünü ifade etmektedir. (2.76)'de verilen alan denklemlerindeki Einstein tensörü (G_{ab}), uzay-zaman geometrisini, T_{ab} enerji-momentum tensörü aracılığı ile ifade edilen madde-enerji dağılımına yerel olarak bağlamaktadır [1].

2.6.2 Enerji Momentum Tensörü

Genişletilmiş gravitasyon teorilerinde efektif bir enerji-momentum tensörü T_{ab} tanımlamakta fayda vardır. Alan denklemlerinin sağındaki T_{ab} enerji momentum tensörü, gravitasyona kaynaklık eden madde-enerji içeriği yani; akışkan ya da akışkanların karışımı, kinetik teoriyle

tanımlanan bireysel tanecikler topluluğu, bir $V(\emptyset)$ skaler potansiyelinden türeyen bir $\emptyset$ skaler alanı, Maxwell denklemleriyle tasvir edilen elektromanyetik alanlar gibi pek çok unsurun toplam etkisi olarak tasvir edilmektedir. Bir akışkan şeması için T_{ab} 'nin ayrıcalıklı zaman cinsinden bir 4-lü vektöre göre ayrışımı

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + q_a u_b + u_a q_b + p h_{ab} + \pi_{ab} \quad (2.77)$$

$$q_a u_a = 0, \quad \pi_a^a = 0, \quad \pi_{ab} = \pi_{(ab)}, \quad \pi_{ab} u^b = 0$$

biçimindedir [9]. Burada

$$\begin{aligned} \mu &= (T_{ab} u^a u^b) && u^a \text{'ya göre rölativistik enerji yoğunluğu,} \\ q_a &= T_{bc} u^b h^c_a && u^a \text{'ya göre enerji akısı,} \\ p &= \frac{1}{3} (T_{ab} h^{ab}) && \text{izotropik basınç,} \\ \pi_{ab} &= T_{cd} h^c_a h^d_b && \text{izsiz anizotropik basınç (stress)'tır.} \end{aligned} \quad (2.78)$$

Rölativist kozmolojinin uygulamalarında, (2.77)'nin

$$q_a = \pi_{ab} = 0 \Rightarrow T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} \quad (2.79)$$

olarak kısıtlanmış hali yaygın olarak kullanılmaktadır. Buna mükemmel akışkan denir ve hal denklemi olarak da, sabit entropi ve sıcaklıktan bağımsız olma özelliklerinin bir sonucu olan

$$p = p(\mu) = (\gamma - 1)\mu \quad (2.80)$$

ifadesi alınır. (2.80) ifadesi barotropik hal denklemi diye adlandırılır. Burada γ bir sabit olup, tanım aralığını sesin $v_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \mu} \right)_{\text{sabit entropi}}$ bağıntısı aracılığıyla tanımlanan v_s hızı belirler.

Buna göre

$$|v_s^2| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \gamma \leq 2 \quad (2.81)$$

olur. γ parametresinin kullanılan bazı değerleri şunlardır:

γ	p	v_s	
$0 \leq \gamma < 1$	$p = (\gamma - 1)\mu < 0$	$0 < v_s \leq 1$	Negatif basınç, fiziksel olmamakla birlikte Şişme (Enflasyon) Teorisi'nde önem taşır.
$\gamma = 0$	$p = -\mu < 0$	$v_s = c$	Üstel şişmeli model, $\gamma = 0$ değeri efektif olarak Λ kozmolojik sabitine karşılık gelir.
$0 < \gamma < \frac{2}{3}$	$p = (\gamma - 1)\mu < 0$	$v_s > \frac{1}{\sqrt{3}}$	Kuvvet kanunlu şişmeli model
$\gamma = \frac{2}{3}$	$p = -\frac{1}{3}\mu < 0$	$v_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$	Kozmik sicimler
$1 \leq \gamma < 2$	$p = (\gamma - 1)\mu > 0$	$0 \leq v_s < 1$	Kabul edilebilir fiziksel durumu tasvir eder.
$\gamma = 1$	$p = 0$	$v_s = 0$	Basıncsız akışkan (toz ya da soğuk karanlık madde (SKM) olarak da anılır)
$\gamma = \frac{4}{3}$	$p = \frac{1}{3}\mu$	$v_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$	Radyasyon akışkanı (rölativist gaz)
$\gamma = 2$	$p = \mu$	$v_s = 1$	Katı akışkan (ses hızı ışık hızına eşit)

Tablo1: γ Parametresinin Değerleri

Enerji momentum tensörü T_{ab} 'nin fiziksellliğini yalnızca hal denklemi değil, enerji koşulları denilen şu kısıtlamalar da belirler [38-26]:

$$\text{Zayıf enerji koşulu: } T_{ab}u^a u^b \geq 0 \quad \mu \geq 0 \quad (2.82)$$

Mükemmel akışkan için bu koşul, $\mu + p \geq 0$ olursa sağlanır.

$$\text{Egemen enerji koşulu: } |T^{ab}u_a| \leq 0 \Rightarrow T^{00} \geq |T^{ab}| \quad (2.83)$$

$$\text{Kuvvetli enerji koşulu: } R_{ab}u^a u^b \geq 0 \implies T_{ab}u^a u^b \geq -\frac{1}{2}T^a_a \quad (2.84)$$

2.6.3 FLRW Modelleri

1916'da Einstein, Λ kozmolojik sabitini barındıran ve madde içeren kapalı ve statik bir evren modeli önermiştir. Einstein evreni olarak anılan bu evren modelinin önerilmesinden yaklaşık bir yıl sonra, 1917'de, de Sitter, Einstein alan denklemleri (EAD)'nin yine Λ kozmolojik sabitini barındıran fakat madde içermeyen bir evren modeli çözümünü bulmuştur. De Sitter evreni olarak anılan bu modelde, boş olan evren genişlemekte ve dinamik özellik göstermektedir. 1922'de Friedmann EAD için Λ 'sız fakat madde içeren çözümler ortaya koymuştur. Friedmann çözümleri, evrenin herhangi bir noktasına göre homojen ve eşyönlü olduğu varsayımına dayanmaktadır. Hubble tarafından 1926 yılında galaksimiz dışındaki diğer galaksilerin varlığı gözlemlenmiş ve bunların birbirinden uzaklaşma hızları tespit edilmiştir. Sonrasında Lemaître tarafından Λ kozmolojik sabitinin önemi bir kez daha vurgulanmış ve evrenin başlangıcı için büyük patlama fikri ortaya çıkmıştır [45]. Tüm bu gelişmelerle birlikte kozmolojiye olan ilgi artmış ve bu yöndeki çalışmalar hız kazanmıştır. 1932'de Robertson ve 1933'te de Robertson ve Walker, Friedmann tarafından öngörülen homojenlik ve eşyönlülük varsayımını kesin bir matematiksel çerçeveye oturtmuşlardır. Buna göre: uzay-zamanın uzaysal kısmının her bir noktaya göre homojen ve eşyönlü olması, uzaysal kısmın 6 parametrelili G_6 eş ölçüm grubu altında invariant kalması anlamına gelir. Bu koşul, uzay-zaman metriğinin bir $k = -1, 0, 1$ parametresine bağlı olarak, bir $\{t, r, \theta, \varphi\}$ eşhareketli koordinat sistemi gösteriminde

$$ds^2 = -dt^2 + I^2(t)[dr^2 + f_k^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] \quad (2.85)$$

biçiminde ifade edilmesini sağlar. Burada t koordinatı $u = \frac{\partial}{\partial t}$ teğet vektörlü evren çizgileri boyunca ölçülen öz-zaman ve $f_k(r)$ de:

$$f_k(r) = \begin{cases} \sin r & k = +1 \text{ için} \\ r & k = 0 \text{ için} \\ \sinh r & k = -1 \text{ için} \end{cases} \quad (2.86)$$

biçiminde tanımlı bir skaler fonksiyondur.

$$d\Omega^2 = dr^2 + f_k^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.87)$$

metriği, t =sabit hiperyüzlerinin metriği olup, sabit uzaysal eğriliğe sahip, yani

$${}^3R = \frac{6k}{I^2(t)} \quad (2.88)$$

olan 3-geometriyi tasvir eder. k parametresinin $-1,0,1$ değerlerini almasına göre bu uzaysal 3-geometrinin sırasıyla: açık, düz ve kapalı olduğu söylenir. $I(t)$ 'ye uzunluk ölçeği fonksiyonu ya da ölçek çarpanı denir. (2.85) metriği, uzayca homojen ve eşyönlü uzay-zaman Robertson-Walker (kısaca FLRW) Evren Modelleri olarak adlandırılır [24].

Metrikten hareketle, θ genişleme skaleri için

$$\theta(t) = \theta_{11} + \theta_{22} + \theta_{33} = 3 \frac{\dot{I}}{I(t)} \quad (2.89)$$

olduğu görülür. Kozmolojik uygulamalarda genellikle θ yerine,

$$H = \frac{1}{3} \theta \quad (2.90)$$

ile tanımlı H parametresi kullanılmaktadır. H 'a Hubble parametresi denir. Dolayısıyla

$$H(t) = \frac{\dot{I}}{I(t)} \quad (2.91)$$

dir. $H > 0$ değeri genişleyen bir evreni; $H < 0$ ise büzülen bir evreni ifade eder. Öte yandan, genişlemenin hızlanması ya da yavaşlamasını da

$$q = -\frac{\ddot{I}}{\dot{I}^2} = -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{I}}{\dot{I}} \quad (2.92)$$

biçiminde tanımlı ve yavaşlama parametresi denilen boyutsuz bir q parametresi belirler. (2.91) ve (2.92)'den

$$\dot{H} = -(1 + q)H^2 \quad (2.93)$$

bağıntısına varılır. t sabit uzaysal kesitlerin $n = \frac{\partial}{\partial t}$ birim normalleri doğrultusunda hareket eden bir akışkanın ($u = n$ için), metriğin simetrisinden dolayı zorunlu olarak bir mükemmel akışkan şemasına uyması gerekmektedir; yani enerji momentum tensörü

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p(g_{ab} + u_a u_b), \quad q_a = 0, \quad \pi_{ab} = 0 \quad (2.94)$$

olmalıdır. Burada μ ve p dinamik parametreleri uzaysal koordinatlardan bağımsız olup, t sabit hiperyüzeyler üzerinde invaryanttır, yani $\mu = \mu(t)$ ve $p = p(t)$ 'dir. Bu bağıntılar μ ve p 'nin homojenliğini ifade eder ve $\tilde{\nabla}_a \mu = 0$ ve $\tilde{\nabla}_a p = 0$ bağıntılarına denktir. Dik akış ($u \equiv n$) söz konusu olduğundan, $\dot{u}_a = 0 = \omega_a$ 'dır. Ayrıca, metriktен ya da evrim ve bağ denklemlerinden $\sigma_{ab} = 0$ ve $E_{ab} = 0 = H_{ab}$ eşitliklerine ulaşılabilir. FLRW modeli aşağıda yazılmış şu bağıntılarla tanımlanır:

$$\text{Dinamik: } \tilde{\nabla}_a \mu = 0 = \tilde{\nabla}_a p \quad (\mu = \mu(t) \text{ ve } p = p(t)) \quad , \quad q_a = 0 = \pi_{ab}$$

$$\text{Kinematik: } \tilde{\nabla}_a \theta = 3\tilde{\nabla}_a H = 0 \quad (H = H(t)), \quad \dot{u}_a = 0 = \dot{\omega}_a, \quad \sigma_{ab} = 0$$

$$\text{Gravito elektrik veya manyetik alan (Serbest alanlar): } E_{ab} = 0 = H_{ab} \quad (2.95)$$

Homojenlik ve eşyönlülüğün bir sonucu olan bu kısıtlamalar, evrim ve bağ denklemlerini çok büyük ölçüde sadeleştirir ve sonuçta

$${}^3R = 2(\mu + \Lambda) - 6H^2 \quad (\text{Friedmann denklemi}) \quad (2.96)$$

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{1}{6}(\mu + p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (\text{Raychaudhuri denklemi}) \quad (2.97)$$

$$\dot{\mu} = -3H(\mu + p) \quad (\text{Enerji korunum denklemi}) \quad (2.98)$$

denklemleri kalır. Eğer bir de, hal denklemi olarak

$$p = (\gamma - 1)\mu \quad (2.99)$$

alınırsa, FLRW modelleri aşağıda gösterilen sistemin çözümü olurlar.

$$H(t) = \frac{i}{t} \quad (2.100)$$

$$\dot{H} = -(1 + q)H^2 \quad (2.101)$$

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{1}{6}(3\gamma - 2) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.102)$$

$$\dot{\mu} = -3H\gamma\mu \quad (2.103)$$

$${}^3R = 2(\mu + \Lambda) - 6H^2 \quad (2.104)$$

$${}^3R = \frac{6k}{I^2} \quad (2.105)$$

Tek bileşenli bir mükemmel akışkan için yazılmış bu denklem sisteminin $k = 0, \pm 1$ ve $\Lambda > 0$, $\Lambda < 0$ ve $\Lambda = 0$ değerlerine göre çözümlerinin tesisi herhangi bir standard kozmoloji kitabında bulunabilir. Bu nedenle biz yalnızca ileride referans vereceğimiz ve de incelemelerimizde önemli rol oynayacak bazı özel modelleri aşağıda gösteriyoruz.

Milne Modeli:

$$\Lambda = 0, \quad k = -1, \quad \mu = 0, \quad I(t) \sim t^{-1}, \quad q = 0 \quad (2.106)$$

de Sitter Modeli:

$$\Lambda > 0, \quad k = 0, \quad \mu = 0, \quad I(t) \sim e^{Ht}, \quad H(t) = \text{sabit} = \frac{\Lambda}{3}, \quad q = -1 \quad (2.107)$$

Einstein-de Sitter Modeli:

$$\Lambda > 0, \quad k = 0, \quad \mu(t) \sim \frac{4}{3\gamma^2} t^{-2}, \quad I(t) \sim t^{\frac{2}{3\gamma}}, \quad H(t) \sim \frac{2}{3\gamma} t^{-1}, \quad q = \frac{3\gamma-2}{2} \quad (2.108)$$

Einstein Modeli:

$$\Lambda > 0, \quad k = +1, \quad \mu = \text{sabit}, \quad I = \text{sabit}, \quad H = 0 \quad (2.109)$$

2.6.4 Brans-Dicke Teorisi

Einstein'ın GRT'yi, bir cismin eylemsizliğinin evrendeki toplam kütle dağılımının bir fonksiyonu olarak ifade edilebileceğini söyleyen Mach İlkesi'ne dayandırmış olduğunu söylemiştik. Fakat Einstein, bu eylemsizliği oluşturan test parçacığı ile diğer bütün kütleler arasındaki etkileşimi belirgin bir şekilde teorisine dahil edememiştir. Mach İlkesi'ni içerecek genişletilmiş bir GRT önerisi Brans-Dicke Teorisi ismiyle öne sürülmüştür. Bu model, ele alınan bir parçacığın eylemsizlik kütlelerinin, o parçacık ile bütün madde formlarıyla (yük hariç) eşit bir şekilde etkileşen uzak erimli evrensel bir $\emptyset$ skaler alanının etkileşmesinin bir ölçüsü olduğunu söyleyen skaler-tensörel bir teoridir. Bu, temel parçacık eylemsizlik kütlelerinin sabit olmadığı, $\emptyset$ skaler alanına bağlı oldukları anlamına gelmektedir. Fakat, temel parçacık kütleleri $G m/R^2$ şeklinde gravitasyonel ivmenin ölçülmesiyle belirlendiğinden dolayı, artık G (Newton

gravitasyon) sabiti de bu $\emptyset$ skaler alanın ortalama değerine bağlı sabit olmayan bir nicelik olacaktır.

Sicim teorisi ele alındığında evrenin bütün kütesinin R yarıçaplı küresel bir kabukta toplanan M kütesine göre ivmeli hareket eden m kütleli bir test parçacığı üzerine etki eden eylemsizlik kuvvetinin,

$$\frac{GM}{R}m, \quad (c = 1) \quad (2.110)$$

ile ifade edileceği ve,

$$\frac{GM}{R} \sim 1 \quad (2.111)$$

alındığında da parçacık eylemsizlik kütlesi m ile orantılı olacağı görülmektedir. (2.111) bağıntısı,

$$\frac{1}{G} \sim \frac{M}{R} \quad (2.112)$$

şeklinde $1/G$ 'nin, evrenin kütle yoğunluğunu kaynak kabul eden,

$$\nabla^2 \emptyset \sim P \quad (2.113)$$

biçiminde madde yoğunluğu ile ilişkilendirilmiş $\emptyset$ skaler alanla özdeş alınabileceğini gösterir. ($\emptyset \sim M/R$, $\langle \emptyset \rangle \cong 1/G$). (3.38) ifadesi 4-boyutlu uzay-zamana genelleştirilir ise,

$$\square^2 \emptyset = 4\pi\lambda T_{Ma}^a \quad (2.114)$$

biçiminde $\emptyset$ skaler alanının, evrenin enerji-momentum tensörü ile ifade edilen kovaryant denklemi elde edilir. Burada $\square^2$: d'Alembert operatörü, λ çiftlenim sabiti, T_{Ma}^a evrendeki toplam maddenin enerji-momentum tensörüdür.

C.H. Brans ve R.H. Dicke GRT'nin alan denklemlerini Mach İlkesi'ni de içeren,

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \frac{8\pi}{\emptyset}(T_{ab} + \Phi_{ab}) \quad (2.115)$$

genişletilmiş hali ile, G 'nin $\emptyset^{-1}$ olduğu ve gravitasyon alan kaynağı skaler alanı için Φ_{ab} enerji-momentum tensörünü de içeren şekliyle ifade etmişlerdir [10].

(2.114) ve (2.115) denklemleri, λ 'ya bağılı,

$$\omega = \frac{1}{\lambda} - \frac{3}{2}, \quad \lambda = \frac{2}{(2\omega+3)} \quad (2.116)$$

biçiminde yeni bir çiftlenim sabiti alındığında,

$$\begin{aligned} \square^2 \phi &= \frac{8\pi}{(2\omega+3)} T_{Ma}^a \\ R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R &= -\frac{8\pi}{\phi} T_{ab} - \frac{\omega}{\phi^2} \left(\partial_a \partial_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} \partial_c \phi \partial^c \phi \right) - \frac{1}{\phi} (\partial_a \partial_b \phi - g_{ab} \square^2 \phi) \end{aligned} \quad (2.117)$$

biçimine dönüşür. Burada $\omega \rightarrow 0$ alındığında bu alan denklemleri,

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -8\pi G T_{ab} \quad (2.118)$$

bilindik Einstein alan denklemlerine indirgenebilmektedir.

2.6.5 Bianchi Modelleri

Yüksek çözünürlüklü WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) verileri açıklandıktan sonra çeşitli çalışma grupları CMB sıcaklık haritalarının, standart Λ CDM modelleri çerçevesinde değerlendirildiğinde bazı anomaliler gösterdiğini duyurdu. Bunlardan en iyi bilineni 60 derecelik açıdan daha büyük ölçeklerdeki CMB ışıınım dalgalanmalarının genliğinin standart Λ CDM modellerinden beklenenden daha küçük değerlerde olmasıdır. Diğer anomaliler ise daha çok eksensel simetrinin ihlal edildiğini işaret eder türdendir. CMB ışıınımı dalgalanmalarının istatistiksel rastgele (Gaussian) ve izotropik olması en basit enflasyon modellerinin bile en temel öngörülerinden biridir. Bu yüzden, CMB ışıınımında istatistiksel izotropiden herhangi bir sapma, enflasyon senaryoları ve Λ CDM modelleri için ciddi bir sorun oluşturur.

Bu anomalilerin gerçekten var olup olmadığı üzerine tartışmalar devam etmektedir. Eğer anomalilerin varlığı kesinleşirse, evrenin daha yüksek doğrulukla betimlenebilmesi için öncelikle standart Λ CDM modelinin üzerine kurulu olduğu Robertson-Walker (RW) metriklerinin uzaysal olarak anizotropiye sahip metriklerle genelleştirilmesi gerekecektir. Uzaysal olarak homojen fakat anizotropik Bianchi uzay-zamanları bu genelleştirmeye,

anizotropik enerji kaynaklarının çalışılmasına ve dolayısıyla daha gerçekçi evren modellerinin kurulmasına imkan sağlar. Bu nedenle kozmoloji dünyasında Bianchi uzay-zamanlarına olan ilgi giderek artmaktadır.

Homojen fakat anizotropik bu metriklerin çok büyük bir kısmı Luigi Bianchi (1898,1918) tarafından sınıflandırılmıştır. Bianchi'nin sınıflaması farklı eğrilik durumlarına göre dokuz tip anizotropik uzay içerir. Bianchi tarafından verilen bu listeye çok özel bir durum olan Kantowski-Sachs metriği (Kantowski and Sach, 1966) de ilave edildiğinde olası tüm homojen ve anizotrop uzaylar elde edilmiş olur. Modern kozmolojide Bianchi'nin orjinal sınıflaması Ellis ve MacCallum (1969) tarafından yeniden düzenlenmiştir [23].

Uzay-zamanı tasvir eden metrik zamansal (dt^2) ve uzaysal (dl^2) olmak üzere iki parçaya ayrılabilir,

$$ds^2 = dt^2 - dl^2, \quad (2.119)$$

burada $dl^2 = \gamma_{ab}(t)dx^a dx^b$ 'dir. γ_{ab} sadece zamanın bir fonksiyonudur ve dokuz adet Bianchi tipini karakterize etmek üzere ω^a invaryant tabanları kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$dl^2 = \gamma_{ab}\omega^a\omega^b, \quad \gamma_{ab} = \gamma_{ba} \quad (2.120)$$

(2.120) denkleminde $\gamma_{ab} = \delta_{ab}$ alınarak herhangi bir Bianchi tipi uzay, aşağıdaki standart metrikle ifade edilebilir

$$d\lambda^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 \quad (2.121)$$

Bianchi tipleri için invaryant tabanlar Tablo 2'de verilmiştir.

Tip	ω^1	ω^2	ω^3
BI	dx	dy	dz
BII	$dx - zdy$	dy	dz
BIII	dx	dy	$e^x dz$
BIV	dx	$e^x dy$	$e^x dz + e^x xdy$

BV	dx	$e^x dy$	$e^x dz$
BVI	dx	$e^{(m-1)x} dy$	$e^{(m-1)x} dz$
BVII	dx	$e^{mx} \cos x dy - e^{mx} \sin x dz$	$e^{mx} \sin x dy + e^{mx} \cos x dz$
BVIII	$\cosh y \cos z dx - \sin z dy$	$\cosh y \sin z dx + \cos z dy$	$dz + \sinh y dx$
BIX	$\cos y \cos z dx - \sin z dy$	$\cos y \sin z dx + \cos z dy$	$dz - \sin y dx$

Tablo 2: Bianchi Uzayları İçin İnvaryant Tabanlar

Tablo 2 ve (2.121) denkleminde yararlanılarak, tüm Bianchi tipleri için standart metriklerin listesi Tablo 3'te verilmiştir ve tabloya Kantowski-Sachs metriği de dahil edilmiştir. Tablo 3'te verilen her bir eksen için sadece zamanın fonksiyonu olan ayrı bir ölçek çarpanının yazılmasıyla, homojen fakat anizotrop olası tüm dört boyutlu uzay-zamanlar elde edilebilir.

Tip	λ^2	RW Özel Durumu
BI	$dx^2 + dy^2 + dz^2$	$k = 0$
BII	$(dx - zdy)^2 + dy^2 + dz^2$	-
BIII	$dx^2 + dy^2 + e^{2x} dz^2$	-
BIV	$dx^2 + e^{2x} dy^2 + e^{2x} (dz + xdy)^2$	-
BV	$dx^2 + e^{2x} dy^2 + e^{2x} dz^2$	$k = -1$
BVI(m) $0 \leq m \leq 1$	$dx^2 + e^{2(m-1)x} dy^2 + e^{2(m+1)x} dz^2$	-
BVII(m) $0 \leq m \leq 1$	$dx^2 + e^{2mx} dy^2 + e^{2mx} dz^2$	$k = -1$
BVIII	$\cosh^2 y dx^2 + dy^2 (dz + \sinh y dx)^2$	-
BIX	$\cos^2 y dx^2 + dy^2 + (dz - \sin y dx)^2$	$k = 1$

KS	$dx^2 + dy^2 + \sin^2 y dz^2$	-
----	-------------------------------	---

Tablo 3: Bianchi ve Kantowski-Sachs Uzayları İçin Standart Metrikler

Bu metriklerin her bir yöndeki ölçek çarpanının evrimi Einstein alan denklemleri kullanılarak belirlenebilir ve Einstein alan denklemlerini çözmek için bu metriklerden biri seçilebilir [40].

Bianchi metrikleri uzayın üç ekseninde de ayrı hızlarla hareket edip evrimleşmesine izin verdiği için, RW metriği bağlamında tanımlanan kozmolojik parametrelerin genelleştirilmesi ve farklı eksenlerin farklı hızlarla genişlemesinden doğan yeni büyüklüklerin tanımlanması gerekir. Hubble parametresi üç eksen için de ayrı ayrı genişleme hızlarını ifade edecek şekilde genelleştirilerek; x, y ve z yönleri için aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$H_1 \equiv \frac{\dot{A}}{A}, \quad H_2 \equiv \frac{\dot{B}}{B}, \quad H_3 \equiv \frac{\dot{C}}{C} \quad (2.122)$$

Bianchi uzay-zamanlarında Hubble parametresinin RW metriği çerçevesindeki tanımı, evrenin hacimsel genişleme hızını belirleyen ortalama Hubble parametresine karşılık gelir ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$H = \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 H_i \quad (2.123)$$

Burada $V = ABC$ hacimsel ölçek çarpanıdır ve

$$S = V^{\frac{1}{3}} = ABC^{\frac{1}{3}} \quad (2.124)$$

şeklinde verilir. Evrenin hacimsel genişleme hızını belirten genişleme skaleri aşağıdaki gibidir:

$$\theta = 3H = \frac{\dot{V}}{V} \quad (2.125)$$

Friedmann modellerinde kullanılan ivmelenme parametresi, anizotropik modeller için “ortalama ivmelenme parametresi” olarak yeniden tanımlanabilir:

$$q \equiv \frac{\ddot{S}}{\dot{S}^2} = 3 - 3 \frac{\ddot{V}V}{\dot{V}^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) - 1 \quad (2.126)$$

Bu tanıma göre ortalama ivmelenme parametresi evrenin hacimsel genişlemesinin bir ölçüsüdür. Uzaysal olarak anizotropik modellerde genişleme hızının farklı yönlerde farklı olmasının ölçüsü shear (kayma) skaleri ile gösterilebilir:

$$\sigma^2 = \sigma_{ij}\sigma^{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3(H_i - H)^2 \quad (2.127)$$

Bu ifadeye göre, kayma skaleri evrenin ortalama genişleme hızından sapmasının bir ölçüsüdür. Genişleme anizotropisi, evrenin genişleme hızındaki anizotropinin büyüklüğünün bir ölçüsünü verir ve şu şekilde tanımlanır:

$$\Delta \equiv \frac{1}{3}\sum_{i=1}^3\left(\frac{H_i - H}{H}\right)^2 \quad (2.128)$$

$\Delta = 0$ izotropik genişlemeye karşılık gelir.

Evrenin farklı yönlerde farklı hızla genişlemesinden doğan kayma skaleri FRW modellerinde verilen her iki Friedmann denklemlerine de ek bir terim olarak girer. Ayrıca Bianchi uzay-zamanları anizotropik basınç kaynaklarına izin verdiğinden ikinci Friedmann denklemlerine dahil olan basıncın her yön için ayrı ayrı yazılması gerekir. Buna göre, Bianchi uzay-zamanları için geliştirilmiş Friedmann denklemleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$3H^2 = \rho + \sigma^2 + \frac{{}^3R}{2} \quad (2.129)$$

$$\frac{\dot{s}}{s} = \frac{1}{6}(\rho + p_1 + p_2 + p_3) - \frac{2}{3}\sigma^2 \quad (2.130)$$

Burada 3R Ricci skaleridir ve sol üstte bulunan 3 indisi dört boyutlu Riemann uzay-zamanlarının yalnızca üç boyutlu uzaysal kesitlerinin dikkate alındığını belirtir. Genelleştirilmiş Friedmann denklemleri evrenin hacimsel dinamikleri hakkında bilgi içermektedir.

Bianchi tipi bir kozmolojik modelde evrenin ve akışkanın dinamiklerinin her bir eksen için ayrı ayrı incelenmesi gerekir. Dolayısıyla, Bianchi modelleri matematiksel olarak FRW modellerine göre daha karmaşıktır. Diğer yandan, bu da daha karmaşık dinamiklerin olanaklılığını işaret etmektedir.

2.6.6 Standart Kozmoloji Modeli

Einstein'ın Genel Rölativite (GR) Teorisi'ne dayanan Standart Kozmoloji Modeli, modern teorik fiziğin büyük başarı öykülerinden biridir. Bu model büyük ölçeklerde izotropik ve homojen bir evreni tanımlamaktadır; Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) Modeli. Evreni, bugünkü maddeye egemen olan dönemin (~13 milyar yıl) büyük patlamasından yaklaşık bir saniye sonra tanımlamaktadır. Bu çok uzun tarih boyunca, evren dramatik bir şekilde değişmiştir. Büyük patlamadan yaklaşık üç dakika sonra nükleosentez gerçekleşti, yani proton ve nötronlardan oluşan hidrojen ve helyum çekirdekleri meydana geldi. Sonraki 10^5 yıl boyunca evren, madde ve radyasyonun Thompson saçılması yoluyla birleştiği, radyasyon baskın bir fazdaydı. 10^5 yıl sonra sıcaklık 3000 K civarında soğudu, bu da protonların ve elektronların yeniden birleşmesine izin vererek nötr hidrojen oluşumuna yol açtı. Fotonlar maddeden ayrıldı ve günümüze kadar neredeyse hiç engellenmeden seyahat edebildi, evren genişlemeye devam ettikçe enerji kaybedildi. Bu fotonlara bağlı Cosmic Microwave Background (Kozmik Mikrodalga Arkaplan)-(CMB) radyasyonu olarak bilinen radyasyon 2,73 K sıcaklıkta gözlemlenmektedir. Ayrılmadan sonra, radyasyon artık kütleçekimsel dengesizlikleri önleyemediği için yoğunluk dalgalanmaları büyüdü ve böylece evren, kendimizi şu anda bulduğumuz madde baskın fazına girdi.

Standart modelin başarısının sebebi, tahminlerinin birçoğunun gözlemlerle doğrulanmış olmasıdır. Örneğin, evrende gözlemlenen diğer hafif elementlere göre helyum bolluğu, bu modelin öngörülerine iyi uymaktadır. Ayrıma (recombination) dönemi, muhtemelen standart modeli destekleyen en güçlü kanıt olan CMB tarafından desteklenmektedir. Bununla birlikte, standart model ile ilgili bir a  sorun vardır.

Evren, çok özel başlangıç koşulları gerektiren, homojen, izotropik ve (neredeyse) düz gibi görünmektedir. Ayrıca, büyük ölçekli yapının oluşumunun, başlangıçtaki yoğunluk dalgalanmalarından kaynaklandığına inanılmaktadır. Bugün gözlemlediğimiz yapıyı üretmek için bu dalgalanmaların çok özel bir spektruma sahip olması gerekir. Bu sorunlara olası bir cevap, erken evrenin kısa bir hızlı genişleme veya enflasyon (şişme) sürecinden geçmesidir. Bu enflasyona neden olan enflasyonist evre, tüm homojensizlikleri düzeltebilir ve evreni neredeyse düz olacak şekilde şişirebilir. Ayrıca, yapı oluşumu için ihtiyaç duyduğumuz başlangıç yoğunluk dalgalanmalarını da sağlayabilir. Ancak, enflasyonun henüz gözlenmemiş olan hafif veya kütlesiz bir skaler alandan kaynaklandığına inanılmaktadır.

Günümüzde gözlemlenen evren, standart model için de bazı sorunlara sahiptir. Galaktik rotasyon eğrilerinin davranışı ve galaktik kümelerdeki kütle tutarsızlığı, genellikle karanlık madde olarak bilinen baryonik olmayan maddenin varlığını düşündürmektedir. Kökeni hala belirsiz olan bu karanlık madde, baryonik madde veya nötrinolarla etkileşime girmez. Ayrıca ihmal edilebilir bir hız dağılımına sahiptir ve bu nedenle genellikle Soğuk Karanlık Madde (Cold Dark Matter-CDM) olarak adlandırılır. Mevcut tahminler, evrenin toplam enerji içeriğinin yüzde yirmisinden fazlasının karanlık maddeden oluştuğunu göstermektedir. Standart model için ikinci ve hatta daha endişe verici bir problem, evrenin hızlanan bir genişleme aşamasına girdiğini gösteren, Tip-Ia süpernovaları ve CMB'yi kullanan mevcut gözlemlerle ortaya çıkan problemdir. Bu hızlanan davranış, karanlık enerji olarak adlandırılan bilinmeyen bir enerji kaynağı gerektirir. Karanlık enerji, evrenin enerji içeriğinin %70'inden biraz fazlasını oluşturur. Aslında standart madde sadece yüzde beşi oluşturuyor gibi görünüyor, bu yüzden evren içeriğinin çoğunun doğası bizim için tamamen bilinmiyor.

2.8 $f(R)$ TEORİLERİ

2.8.1a Genel Skaler Fonksiyonlar İçin Aksiyon

Skaler eğrilik $f(R)$ 'ın genel bir fonksiyonundan oluşan lineer olmayan bir Lagrangian için genel formla başlıyoruz

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}f(R). \quad (2.131)$$

Gravitasyonel etkileşimleri tanımlayan aksiyon şu şekildedir [39-44],

$$\mathcal{A} = \int dx^4 \sqrt{-g}f(R). \quad (2.132)$$

(2.132) denkleminde dördüncü dereceden alan denklemlerini elde ederiz

$$T_{ab} = f'R_{ab} - \frac{1}{2}f'g_{ab} + S_{cd}(g^{cd}g_{ab} - g_a^c g_b^d). \quad (2.133)$$

Burada $(')$ R'ye göre birinci türevleri belirtir ve

$$\begin{aligned} S_{ab} &= \nabla_a \nabla_b f'R \\ &= f''\nabla_a \nabla_b R + f'''\nabla_a R \nabla_b R - f''R(\nabla_b R u_a + \nabla_a R u_b) - f''(\nabla_a R u_b \\ &\quad + u^c \nabla_c (\nabla_b R) u_a) + f''R^2 u_a u_b + f''(R u_a u_b - R(\nabla_a u_b + u_a u_b)). \end{aligned} \quad (2.134)$$

D'Alembertian daha sonra

$$\begin{aligned} S &= \square f'(R) = g^{ab} \nabla_a \nabla_b f'(R) \\ &= f'' \nabla_c D_c R + f''' \nabla^c R \nabla_c R + f'' \dot{u}^c \nabla_c R - f''(R + R\theta) - f''' R^2. \end{aligned} \quad (2.135)$$

tarafından verilir. Alan denklemi (2.133) yeniden yazılabilir:

$$R_{ab} = f'^{-1} [T_{ab} + {}^1_2 f g_{ab} + S_{cd} (g_c^a g_b^d - g^{cd} g_{ab})]. \quad (2.136)$$

Daha yüksek mertebeden alan denklemi, aşağıdaki terimleri vermesi için Einstein durumundaki gibi bölünebilir:

$$R = f'^{-1} [3p - \mu + 2f - 3S], \quad (2.137)$$

$$R_{ab} u^a u^b = f'^{-1} [\mu - \frac{1}{2} f + h^{ab} S_{ab}], \quad (2.138)$$

$$R_{ab} u^a h_c^b = f'^{-1} [-q_c + S_{ab} u^a h_c^b], \quad (2.139)$$

$$R_{ab} h_c^a h_d^b = f'^{-1} [\pi_{cd} - (p + \frac{1}{2} f + S) h_{cd} + S_{ab} h_c^a h_d^b]. \quad (2.140)$$

2.8.1b Enerji Momentum Tensörünün Ayrışması

Alan denklemi (2.136):

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = f'^{-1} T_{ab} + f'^{-1} \left[\frac{1}{2} (f - f' R) g_{ab} + S_{cd} (g_c^a g_b^d - g^{cd} g_{ab}) \right] \quad (2.141)$$

ve daha sonra bu alan denklemi standart formda yazılabilir

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \tilde{T}_{ab} = \frac{T_{ab}}{f'} + T_{ab}^R,$$

Burada T_{ab} standart madde enerji-momentum tensörüdür ve

$$T_{ab}^R = \frac{1}{f'} \left[\frac{1}{2} (f - f' R) g_{ab} + S_{cd} (g_c^a g_b^d - g^{cd} g_{ab}) \right] \quad (2.142)$$

ise T_{ab}^R , eğrilik enerji momentum tensörüdür. Böylece, alan denklemi karmaşık bir yapıya sahip olan bir modelden, gravitasyon alanının standart GR formunu aldığı, ancak kaynağın iki kaynaktan oluştuğu bir modele geçtik. Bu dönüşüm sadece $f(R)$ gravitasyon ile sınırlı değildir.

Daha genel HOTG (Yüksek Dereceli Gravitasyon Kuramları) ve STG (Skaler Tensör Gravitasyon) için de kullanılabilir. Burada Bianchi özdeşlikleri şu şekilde yazılabilir:

$$0 = \nabla^b \tilde{T}_{ab} = \nabla^c T_{ab}^R - \frac{f''}{f'^2} \partial^b R T_{ab} + \frac{1}{f'} \nabla^b T_{ab}. \quad (2.143)$$

Alan denklemlerini ve Riemann tensörünün tanımını kullanarak, sağ taraftaki ilk iki terim birbirini yok eder ve böylece $\nabla^b \tilde{T}_{ab} \propto \nabla^b T_{ab}$ görülebilir. Aslında, Eddington ve daha sonra diğerleri, gravitasyon aksiyonu için, ilk varyasyonun Lagrange için seçtiğimiz herhangi bir invariant formu için ıraksamasız olduğunu gösterdi. Böylece, geniş bir gravitasyon teorisi için efektif gerilim enerji momentum tensörü T_{ab} ne kadar karmaşık olursa olsun, $\nabla^b T_{ab} = 0$ ise her zaman ıraksamasızdır [42].

Eğrilik stres-enerji momentum tensörünün çeşitli bileşenlerine ayrıştırılması aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \mu^R &= T_{ab}^R u^a u^b = f'^{-1} \left[-\frac{1}{2} (f - f'R) + S_{ab} h^{ab} \right], \\ p^R &= \frac{1}{3} T_{ab}^R h^{ab} = f'^{-1} \left[\frac{1}{2} (f - f'R) - S + \frac{1}{3} S_{ab} h^{ab} \right], \\ q_c^R &= -T_{ab}^R u^a h_c^b = -f'^{-1} [S_{ab} u^a h_c^b], \\ \pi_{ab}^R &= T_{cd}^R h_{(a}^c h_{b)}^d = f'^{-1} \left[h_a^c h_b^d - \frac{1}{3} h_{ab} h^{cd} \right] S_{cd}. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Bu nedenle, kinematik miktarları aşağıdaki gibi yeniden tanımlayarak:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \frac{\mu}{f'} + \mu^R, \\ \tilde{p} &= \frac{p}{f'} + p^R, \\ \tilde{q}_c &= \frac{q_c}{f'} + q_c^R, \\ \tilde{\pi}_{ab} &= \frac{\pi_{ab}}{f'} + \pi_{ab}^R \end{aligned} \quad (2.145)$$

elde edilir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1 UZAY ZAMANIN 1+3 KOVARYANT AYRIŞIMI

3.1.1 Uzay Zaman Ayrışım Yönteminin Matematiksel Temelleri

3.1.1a Zaman Cinsinden Kongrüanslar

Kozmolojik model, Einstein Gravitasyon Teorisi çerçevesinde uzay ve zamanın geometrisini, maddenin dağılımını ve doğasını tanımlayan evrenin matematiksel bir gösterimidir. Bizim de bu çalışmamızda Einstein'ın Genel Rölativite Teorisi'ne dayanan bazı modeller ele alınacaktır. Uzay-zaman geometrisinin 4-boyutlu bir V_4 varyetesi üzerinde tanımlanmış, $(-1,1,1,1)$ Riemansal metrik ile gösterildiği ve bu uzay-zamanın madde-enerji ile karşılıklı etkileşmesinin de Einstein'ın

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = T_{ab} \quad (3.1)$$

gravitasyon alan denklemleriyle tasvir edildiği varsayılacaktır. Burada: g_{ab} uzay-zamanın metriği (metrik bileşenleri), R_{ab} Ricci Tensörü, R uzay-zamanın skaler eğriliği, T_{ab} enerji momentum tensörü, Λ kozmolojik sabit ve G_{ab} Einstein tensörüdür. Rölativist Kozmoloji olarak anılan bu tasvirde, evrendeki madde-enerji kaynaklarının çok büyük boyutlardaki dağılımı, bir sürekli akışkan gibi tasarlanmaktadır. Böyle bir tasarım, (V_4, g) uzay-zaman varyetesinin her bir noktasında zaman cinsinden (geleceğe yönelik) tek bir vektör alanı tanımlanabilmesine olanak sağlamaktadır. Genel olarak u ile gösterilen ve

$$u^a u_a = -1 \quad (3.2)$$

koşulunu sağlayan (zaman cinsinden ve normlanmış) bu vektör alanı, yerel olarak akışkanı oluşturan tüm kısımlarının ortalama 4-lü hız vektörü olarak düşünülebileceği gibi gözlemcilerin 4-lü hız vektörü olarak da düşünülebilir. Gözlemci eğer akışkan elemanı ile hareket ediyorsa, ikisi de aynı 4-lü hıza sahiptir. Ancak gözlemci uzaysal 3-yüzeyler üzerinde kalacak şekilde hareket ediyorsa, bu taktirde 4-lü hız vektörü uzaysal 3-hiperyüzeylerin zaman cinsinden birim normalleri olur. Her koşulda özel olarak seçilmiş ayrıcalıklı bir zaman cinsinden 4-lü vektör alanının varlığı, uzay-zamanı, bu vektör alanını teğet kabul eden 3-boyutlu zaman eğrileriyle doldurulmuş gibi tasarlanmasına olanak sağlar. Bu eğrilere akışkan elemanlarının ya da

gözlemcilerin evren çizgileri ve bunların topluluğuna da zaman cinsinden eğri ailesi ya da kongrüansı denir. Ayrıcalıklı bir 4-lü vektör alanının varlığı varsayımı, birazdan göreceğimiz üzere (V_4, g) varyetesine ek bir yapı kazandıracaktır. Bu durum, (V_4, g, u) biçiminde gösterilir ve uzay-zamanın “1+3 ipliklenmesi (threading)” olarak anılır [26].

3.1.1b İzdüşüm Tensörleri

u vektörü (V_4, g, u) üzerinde

$$U_{ab} = -u_a u_b \quad (3.3a)$$

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b \quad (3.3b)$$

olmak üzere iki tensör tanımlar. İzdüşüm tensörleri denilen bu tensörlerden U_{ab} , u^a 4-vektörüne paralel izdüşümü; h_{ab} de u^a 4-vektörüne dik izdüşümü gerçekleştirir. Daha açık biçimde söylersek: h_{ab}, u^a 4-vektörüyle hareket eden bir gözlemcinin anlık durgunluk uzaylarının -ki bunlar u 'ya diktir- metrik özelliklerini belirler. Tanımlarından bu tensörlerin

$$U^a_b U^b_c = U^a_c, \quad U^a_b u^b = u^a, \quad U^a_a = 1 \quad (3.4a)$$

$$h^a_b h^b_c = h^a_c, \quad h^a_b u^b = u^a, \quad h^a_a = 3 \quad (3.4b)$$

bağıntılarını gerçekledikleri gösterilir.

Uzay-zamanın yapısına eklenen bu zaman cinsinden ayrıcalıklı u doğrultusu, fiziksel öneme sahip tüm büyüklüklerin U_{ab} ve h_{ab} (ya da $U^a_b, U^{ab}, h^a_b, h^{ab}$) tensörleri aracılığıyla kovaryant 1+3 tensör ayrışımının yapılmasına olanak sağlar. Bu yaklaşım ilk defa 1950-1960'larda Raychaudhuri, Schuten, Ehlers, Sachs ve Trumper tarafından ortaya atılmış ve geliştirilmiştir.

3.1.1c 1-Tensör ve 2-Tensörlerin 1+3 Ayrışımı

Herhangi bir fiziksel alan ya da bir geometrik büyüklük, U^a_b ve h^a_b izdüşüm tensörleri kullanılarak, 4-lü u vektörüyle hareket eden bir gözlemcinin bunları ölçme yoluna bağlı olacak şekilde, “zaman” ve “uzay” kısımlarına ayrılabilir.

V_a uzay-zaman vektörü, B_a uzaysal bir vektör olmak üzere ($B_a u^a = 0$), indirgenemez bir biçimde

$$V_a = A u_a + B_a \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafı u^a ile çarpılıp (3.2) bağıntısı kullanılırsa $A = -u^b V_b$ elde edilir ve bu da yerine yerleştirilirse $B_a = h^b_a V_b$ bulunur.

Buradan,

$$V^a = U^a_b V^b + h^a_b V^b \quad (3.6)$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki terim V^a 'nın “zaman kısmı”nı, ikinci terim ise “uzay kısmı”nı göstermektedir.

V_{ab} uzay-zaman 2-tensörü, B_a, C_a ve D_{ab} uzaysal tensörler ($B_a u^a = 0, C_a u^a = 0, D_{ab} u^b = D_{ab} u^a = 0$) olmak üzere

$$V_{ab} = A u_a u_b + B_a u_b + u_a C_b + D_{ab} \quad (3.7)$$

biçiminde indirgenemez kısımlara ayrılabilir. Yukarıda yapılan benzer tarzda işlemler yapılırsa

$$V_{ab} = -U^c_a U^d_b V_{cd} + U^c_a V_{cb} + U^c_b V_{ac} + h^c_a h^d_b V_{cd} \quad (3.8)$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki ilk terim c ile d indislerini birlikte, ikinci terim a indisini ve üçüncü terim de b indisini u 'ya paralel izdüşürmektedir. Son terim ise V_{ab} tensörünün her iki indisini de u 'ya izdüşürmekte olup V_{ab} 'nin uzaysal kısmını oluşturmaktadır. Bu son terimi $\tilde{V}_{ab}$ ile gösterelim

$$\tilde{V}_{ab} = h^c_a h^d_b V_{cd} \quad , \quad (\tilde{V}_{ab} u^a = \tilde{V}_{ab} u^b = 0 \text{dır}). \quad (3.9)$$

Bu uzaysal tensör, simetrik ve antisimetrik kısımları cinsinden

$$\tilde{V}_{ab} = \tilde{V}_{(ab)} + \tilde{V}_{[ab]} \quad (3.10)$$

biçiminde yazılabilir. Simetrik kısım ise; biri izsiz, diğeri izli kısım olmak üzere iki kısım olarak ifade edilebilir. İzsiz simetrik kısım için açılı parantez kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{\langle ab \rangle} &= \tilde{V}_{(ab)} - (\dot{I}z\tilde{V}_{(ab)})h_{ab} \\
&= \tilde{V}_{(ab)} - (\dot{I}z\tilde{V}_{ab})h_{ab} & (\dot{I}z\tilde{V}_{[ab]} = 0 \text{ olduğundan}) \\
&= \tilde{V}_{(ab)} - \frac{1}{3}h^{cd}\tilde{V}_{cd}h_{ab}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

olacağından, (3.10) bağıntısı

$$\tilde{V}_{ab} = \tilde{V}_{\langle ab \rangle} + \frac{1}{3}h^{cd}V_{cd}h_{ab} + \tilde{V}_{[ab]} \tag{3.12}$$

biçiminde ifade edilir.

Tanımlardan hareketle aşağıdaki şu özellikler yazılır:

$$\tilde{V}_{(ab)} = \frac{1}{2}(\tilde{V}_{ab} + \tilde{V}_{ba}) = h^c_{(a}h^d_{b)}V_{cd} = h^c_a h^d_b V_{(cd)} \tag{3.13}$$

$$\tilde{V}_{[ab]} = \frac{1}{2}(\tilde{V}_{ab} - \tilde{V}_{ba}) = h^c_{[a}h^d_{b]}V_{cd} = h^c_a h^d_b V_{[cd]} \tag{3.14}$$

Yani, bir uzay-zaman tensörünün uzaysal izdüşümünün simetrik (antisimetrik) kısmı, uzay-zaman tensörünün simetrik kısmının izdüşümüdür. Başka bir deyişle uzaysal izdüşüm ile simetrikleştirme (antisimetrikleştirme) yer değiştiricidir.

Benzer şekilde,

$$\dot{I}z\tilde{V}_{ab} = g^{ab}\tilde{V}_{ab} = h^{ab}\tilde{V}_{ab} = \dot{I}z\tilde{V}_{(ab)} = h^{ab}V_{ab} \tag{3.15}$$

yani uzaysal kısmın izi, simetrik kısmın izidir. Uzaysal kısmın izsiz simetrik kısmı için aşağıdaki birbirine eşdeğer ifadeler kullanılabilir:

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{\langle ab \rangle} &= \tilde{V}_{(ab)} - \frac{1}{3}(\dot{I}z\tilde{V}_{(ab)})h_{ab} \\
&= \left[h^c_{(a}h^d_{b)} - \frac{1}{3}h^{cd}h_{ab} \right] V_{cd} \\
&= \left[h^c_a h^d_b - \frac{1}{3}h^{cd}h_{ab} \right] V_{(cd)} \\
&= h^c_a h^d_b V_{cd} - \frac{1}{3}h^{ef}V_{ef}h_{cd}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

3.1.1d 1+3 Kovaryant Zaman ve Uzay Türevleri

V_a vektörünü, özel olarak bir f skaler fonksiyonunun kovaryant türevi olarak düşünelim, yani $V_a \equiv \nabla_a f$ olsun. Böylece (3.6)'dan

$$\nabla_a f = -u_a u^b \nabla_b f + h^b_a \nabla_b f \quad (3.17)$$

ifadesini elde ederiz. Eşitliğin sağındaki birinci terim için şu hatırlatmayı yapalım: GRT'de üzerine sadece gravitasyon ve eylemsizlik kuvveti etkileyen bir test taneciğinin hareket denklemi

$$u^e \nabla_e u^a = 0$$

biçiminde yazılan jeodezik denklemdir. Eğer tanecik üzerine etki eden gravitasyonel olmayan kuvvetlerin de etkisi göz önüne alınırsa, hareket denklemi

$$u^e \nabla_e u^a = F_a \quad (3.18)$$

olur. Dolayısıyla soldaki ifadenin, Newtonsal benzerlikten ötürü, bir ivmeyi gösterdiği anlaşılmaktadır. Bileşenler cinsinden yazılmış olan bu ifadenin vektör gösterimi $\nabla_{\vec{u}} \vec{u}$ 'dur ve bu da 4-lü u vektörünün evren çizgileri boyunca, u teğet doğrultusunda doğrultu türevi anlamına gelmektedir (Anlık durgunluk sisteminde bu $\frac{du^a}{d\tau}$ 'ya eşittir.). $\nabla_{\vec{u}}$ ya da $u^e \nabla_e$ zamana göre türevi gösterdiğinden, u doğrultusundaki kovaryant zaman türevi olarak anılırlar ve genellikle “•” ile gösterilirler.

$$\text{Bir skaler fonksiyon için : } \dot{f} = u^e \nabla_e f \quad (3.19a)$$

$$\text{Bir } V_a \text{ vektörü için : } \dot{V}_a = u^e \nabla_e V_a \quad (3.19b)$$

$$\text{Herhangi bir tensör için : } \dot{V}^{a...}_{b...} = u^e \nabla_e V^{a...}_{b...} \quad (3.19c)$$

Diğer yandan (3.19)'daki ikinci terim $\nabla_b f$ kovaryant türevinin u^a 'ya dik hiperdüzleme izdüşümünü göstermektedir. Buna kovaryant uzaysal türev veya tamamen dik izdüşürülmüş kovaryant türev denir. $\tilde{\nabla}_a \equiv {}^3\nabla_a \equiv D_a$ sembollerinden biriyle ifade edilir.

$$\text{Bir skaler fonksiyon için: } \tilde{\nabla}_e f = h^d_e \nabla_d f \quad (3.20a)$$

$$\text{Bir vektör için : } \tilde{\nabla}_e V_a = h^b_a h^f_e \nabla_f V_b \quad (3.20b)$$

$$\text{Herhangi bir tensör için : } \tilde{\nabla}_e V^{a...}_{b...} = h^a_c \dots h^d_b h_e \nabla_f V^{c...}_{d...} \quad (3.20c)$$

Bu ifadeler doğrultusunda (3.19)

$$\nabla_a f = -u_a \dot{f} + \tilde{\nabla}_a f \quad (3.21)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Açılı parantez kullanarak yazdığımız ifadeler yalnızca vektörlerin izdüşümlerini ve 2-tensörlerin düz izdüşürülmüş izsiz-simetrik kısımlarını ifade etmekle kalmaz, aynı zamanda zaman türevlerinin de söz konusu izdüşümlerini temsil eder.

$$V^{(a)} = h^a_b V^b \quad (3.22a)$$

$$V^{(ab)} = \left[h^{(a}_c h^{b)}_d - \frac{1}{3} h^{ab} h_{cd} \right] V^{cd} \quad (3.22b)$$

$$\dot{V}^{(a)} = h^a_b \dot{V}^b \quad (3.22c)$$

$$\dot{V}^{(ab)} = \left[h^{(a}_c h^{b)}_d - \frac{1}{3} h^{ab} h_{cd} \right] \dot{V}^{cd} \quad (3.22d)$$

Tamamen izdüşürülmüş kovaryant $\tilde{\nabla}$ türevi de indirgenemez 1+3 kovaryant uzaysal diverjansa ve rotasyonele ayrılabilir.

$$\text{Bir vektör için : } \text{div} V \equiv \tilde{\nabla}^a V_a, \quad (\text{rot} V)_a = \eta_{abc} \tilde{\nabla}^b V^c \quad (3.23a)$$

$$\text{Bir 2-tensör için : } (\text{div} V)_a = \tilde{\nabla}^b V_{ab}, \quad (\text{rot} V)_{ab} = \eta_{cd(a} \tilde{\nabla}^c V^d_{b)} \quad (3.23b)$$

3.1.1e Akışkanın Kinematik Büyüklükleri

V_{ab} 2-tensörü, u_b 'nin u^a doğrultusundaki kovaryant türevi olarak alınırsa, yani $V_{ab} \equiv \nabla_a u_b$ olsun. (3.8)'den

$$\nabla_a u_b = -U^c_a U^d_b \nabla_c u_d + U^c_a \nabla_c u_b + U^c_b \nabla_a u_c + h^c_a h^d_b \nabla_c u_d \quad (3.24)$$

elde edilir ve (3.2)'nin kullanılmasıyla

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + \tilde{\nabla}^a u_b \quad (3.25)$$

ifadesine indirgenir. $\tilde{\nabla}^a u_b$ uzaysal kısım, simetrik ve antisimetrik kısımlarının toplamı olarak ifade edilir ve bunlar sırasıyla

$$\theta_{ab} = \tilde{\nabla}_{(a} u_{b)} \quad , \quad \theta_{ab} = \theta_{ba} \quad , \quad \theta_{ab} u^a = \theta_{ab} u^b = 0 \quad (3.26)$$

$$\omega_{ab} = \tilde{\nabla}_{[a} u_{b]} \quad , \quad \omega_{ab} = -\omega_{ba} \quad , \quad \omega_{ab} u^a = \omega_{ab} u^b = 0 \quad \omega^a{}_a = 0$$

biçiminde gösterilirlerse

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + \theta_{ab} + \omega_{ab} \quad (3.27)$$

olur. θ_{ab} simetrik kısım, $\text{İz}\theta_{ab} \equiv \theta$ ile gösterilmek üzere

$$\sigma_{ab} = \theta_{ab} - \frac{1}{3}\theta h_{ab} \quad (3.28)$$

ile tanımlı izsiz simetrik kısım aracılığıyla

$$\theta_{ab} = \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\theta h_{ab} \quad (3.29)$$

şeklinde yazılabilir. Öte yandan ω_{ab} antisimetrik bir tensör olduğundan

$$\omega_a = \frac{1}{2}\eta_{abcd}\omega^{bc}u^d \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{ab} = \eta_{abcd}\omega^c u^d \quad (3.30)$$

veya

$$\eta_{abcd}u^d = \eta_{abc}$$

şeklinde yazılarak

$$\omega_a = \frac{1}{2}\eta_{abc}\omega^{bc} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{ab} = \eta_{abc}\omega^c \quad (3.31)$$

biçiminde tanımlı bir vektör ile gösterilebilir.

Burada

$$\begin{aligned} \theta_{ab} &= \theta_{ba} \quad , \quad \theta_{ab} u^a = \theta_{ab} u^b = 0 \quad , \quad \theta^a{}_a = \theta_a{}^a = 0 \\ \sigma_{ab} &= \sigma_{ba} \quad , \quad \sigma_{ab} u^a = \sigma_{ab} u^b \quad , \quad \sigma^a{}_a = \sigma_a{}^a = 0 \\ \omega_{ab} &= -\omega_{ba} \quad , \quad \omega_{ab} u^a = \omega_{ab} u^b \quad , \quad \omega^a{}_a = \omega_a{}^a = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

dir.

θ_{ab} 'ye "genişleme tensörü" ve bunun izi olan θ 'ya "genişleme skaleri" ya da kısaca "genişleme" denir. Genişleme tensörü, u^a 'ya yerel olarak dik 3-uzayın hacimce genişlemesini tasvir eder.

σ_{ab} 'ye "kayma (shear) tensörü" denir ve u^a 'ya dik uzay elemanlarının biçim değişikliğini tasvir eder.

ω_{ab} tensörüne "girdap tensörü" ve ω_a 'ya da "girdap vektörü" denir. Bu, yerel durgunluk sisteminin bir eylemsizlik sistemine göre dönmesinin bir ölçüsünü yansıtır.

Yukarıdaki tensörlere bir de

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ab} \sigma^{ab} \quad (3.33a)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{ab} \omega^{ab} = \omega_a \omega^a \quad (3.33b)$$

bağıntılarıyla tanımlı skaler büyüklükler bağlanmaktadır ve bunlar da

$$\sigma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ab} = 0 \quad (3.34a)$$

$$\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{ab} = 0 \quad \text{veya} \quad \omega_a = 0 \quad (3.34b)$$

özelliklerini taşırlar.

4-lü bir u alanı verildiğinde, akışkanın kinematik büyüklüklerin hesaplanmasını sağlayacak bağıntılar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \theta_{ab} &= \tilde{\nabla}_{(a} u_{b)} \\ &= h^c_{(a} h^d_{b)} \nabla_c u_d \end{aligned} \quad (3.35a)$$

$$\begin{aligned} &= h^c_a h^d_b \nabla_{(c} u_{d)} \\ &= \nabla_{(a} u_{b)} + u_{(a} \dot{u}_{b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \dot{z} \theta_{ab} \\ &= h^{ab} \nabla_a u_b \end{aligned} \quad (3.35b)$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{\nabla}_a u^a \\
&= \nabla_a u^a = \theta^a{}_a \\
\sigma_{ab} &= \tilde{\nabla}_{(a} u_{b)} = \tilde{\nabla}_{(a} u_{b)} - \frac{1}{3} (h^{cd} \nabla_c u_d) h_{ab} \\
&= \left[h^c{}_{(a} h^d{}_{b)} - \frac{1}{3} h^{cd} h_{ab} \right] \nabla_c u_d \\
&= h^c{}_a h^d{}_b \nabla_{(c} u_{d)} - \frac{1}{3} \theta h_{ab} \\
&= \nabla_{(a} u_{b)} + u_{(a} \dot{u}_{b)} - \frac{1}{3} \theta h_{ab}
\end{aligned} \tag{3.35c}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{ab} &= \tilde{\nabla}_{[a} u_{b]} \\
&= h^c{}_{[a} h^d{}_{b]} \nabla_c u_d \\
&= h^c{}_a h^d{}_b \nabla_{[c} u_{d]} \\
&= \nabla_{[a} u_{b]} + u_{[a} \dot{u}_{b]}
\end{aligned} \tag{3.35d}$$

$$\begin{aligned}
\omega_a &= \frac{1}{2} \eta_{abcd} \omega^{bc} u^a \\
&= \eta_{abc} \omega^c u^d
\end{aligned} \tag{3.35e}$$

3.2 1+3 UZAY—ZAMAN AYRIŞIM TEKNİĞİNİN $f(R)$ GRAVİTASYONUN ALAN DENKLEMLERİNE UYGULANMASI

Önce verilen $f(R)$ gravitasyonun alan denklemlerini sol tarafta $f R_{ab}$ terimi kalacak şekilde yazalım:

$$f_R R_{ab} = \kappa^2 T_{ab} + \nabla_a \nabla_b f_R - g_{ab} \square f_R + \frac{1}{2} g_{ab} f \tag{3.36}$$

sol tarafta $G_b \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$ Einstein tensörünü ortaya çıkarmak için, eşitliğin her iki yanına $-\frac{1}{2} g_{ab} R f_R$ terimi eklenirse

$$f_R \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) = \kappa^2 T_{ab} + \nabla_a \nabla_b f_R - g_{ab} \square f_R + \frac{1}{2} g_{ab} f - \frac{1}{2} g_{ab} R f_R$$

olur ve bu ifade de EAD formuna benzeyecek şekilde düzenlenirse,

$$G_{ab} = \kappa^2 \left\{ \frac{T_{ab}^m}{f_R} + \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left[\frac{1}{2} g_{ab} (f - R f_R) + \nabla_a \nabla_b f_R - g_{ab} \square f_R \right] \right\} \quad (3.37)$$

elde edilir. Bu denklemler, $\square$ ve $\nabla_a \nabla_b$ operatörlerinden dolayı, genel olarak metriğe göre dördüncü mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerdir. Şimdi literatürde pek sık kullanılan efektif enerji-momentum tensörü yaklaşımını uygulayalım. Bunun için

$$T_{ab}^M = \frac{1}{f_R} T_{ab}^m \quad (3.38)$$

$$T_{ab}^R = \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left[\frac{1}{2} g_{ab} (f - R f_R) + \nabla_a \nabla_b f_R - g_{ab} \square f_R \right] \quad (3.39)$$

olarak tanımlanırsa (3.17) denklemi

$$G_{ab} = \kappa^2 (T_{ab}^M + T_{ab}^R) = \kappa^2 T_{ab}^t \quad (3.40)$$

halini alır ve standart EAD formunda yazılmış olur. Burada T_{ab}^M , bilinen T_{ab}^m madde enerji-momentum tensörüne bağlanan bir efektif madde enerji-momentum tensörünü ve T_{ab}^R 'de $f(R)$ 'dan kaynaklanan bir efektif madde geometrik enerji-momentum tensörünü göstermektedir. Bunun “eğrilik akışkanı” olarak da adlandırılabilen matematiksel bir akışkanı temsil ettiği düşünülebilir. T_{ab}^t ise

$$T_{ab}^t = T_{ab}^M + T_{ab}^R \quad (3.41)$$

olup, toplam efektif enerji-momentum tensörünü göstermektedir. (3.37) ve (3.40)'dan

$$2f - R f_R - 3 \square f_R = -\kappa^2 T^m \quad (3.42)$$

ve

$$R = -\kappa^2 (T^M + T^R) = -\kappa^2 T^t \quad (3.43)$$

iz denklemleri yazılabilir. Amacımız, yukarıda tanımlanan efektif enerji-momentum tensörlerini izdüşürme bağıntısında kullanıp, akışkanın dinamik büyüklüklerinin ifadesini $f(R)$ teorisi kapsamında ifade etmek olacaktır. Bu iş için öncelikle gerekli matematiksel çerçeveyi hazırlayalım.

$$\emptyset(R) = f_R, \quad S_{ab} = \nabla_a \nabla_b \emptyset, \quad S = \nabla^a \nabla_a \emptyset = \square \emptyset \quad (3.44)$$

tanımları yapılsın. Bu büyüklükler cinsinden T_{ab}^R 'nin ifadesi

$$T_{ab}^R = \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left[\frac{1}{2} g_{ab} (f - R f_R) + S_{ab} - g_{ab} S \right] \quad (3.45)$$

olur.

$$\begin{aligned} S_{ab} = & u_a u_b (\ddot{\emptyset} - \dot{u}^c D_c \emptyset) - u_a [D_b \dot{\emptyset} - v_b^c D_c \emptyset] - u_b [D_a \dot{\emptyset} - v_a^c D_c \emptyset] \\ & + D_a D_b \emptyset - v_{ab} \dot{\emptyset} \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$S \equiv \square \emptyset = -\ddot{\emptyset} - \theta \dot{\emptyset} - \dot{u}^a D_a \emptyset + D^a D_a \emptyset \quad (3.47)$$

ifadesi elde edilebilir. Öte yandan, R_{ab} 'yi 4-lü hız vektörüne göre,

$$R_{ab} = \Delta u_a u_b + \mathcal{E} h_{ab} + 2u_{(a} \gamma_{b)} + \Sigma_{ab} \quad (3.48)$$

biçiminde araştıralım. Burada $\Delta, \mathcal{E}, \gamma_b$ ve Σ_{ab} parametreleri

$$\Delta = R_{ab} u^a u^c \quad (3.49a)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{3} R_{ab} h^{ab} \quad (3.49b)$$

$$\gamma_c = -R_{ab} h_c^a u^b \quad (3.49c)$$

$$\Sigma_{ab} = \left(h_{(a}^c h_{b)}^d - \frac{1}{3} h^{cd} h_{ab} \right) R_{cd} \quad (3.49d)$$

biçiminde tanımlanmış olup

$$\gamma_c u^c = 0, \quad \Sigma_{ab} = \Sigma_{ba}, \quad \Sigma_{ab} u^a = \Sigma_{ab} u^b = 0, \quad \Sigma_a^a = 0$$

özelliklerini taşır.

$$\Delta = \frac{\kappa^2}{2} (\mu^t + 3p^t) \quad : \quad \mu^t = \frac{1}{2\kappa^2} (\Delta + 3\mathcal{E}) \quad (3.50a)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\kappa^2}{2} (\mu^t - p^t) \quad : \quad p^t = \frac{1}{2\kappa^2} (\Delta - \mathcal{E}) \quad (3.50b)$$

$$\gamma_a = \kappa^2 q_a \quad : \quad q_a{}^t = \frac{1}{\kappa^2} \gamma_a \quad (3.50c)$$

$$\Sigma_{ab} = \kappa^2 \pi_{ab}{}^t \quad : \quad \pi_{ab}{}^t = \frac{1}{\kappa^2} \Sigma_{ab} \quad (3.50d)$$

Bunların toplam efektif büyüklüklere bağlı oldukları görülür.

Uzun bir hesaptan sonra, eğrilik akışkanının efektif dinamik büyüklüklerini aşağıdaki gibi bulmaktayız.

3.2.1 Efektif Madde-Enerji Yoğunluğu

$$\mu^R = \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left\{ -\frac{1}{2} (f - R f_R) + f_{RR} (-\theta \dot{R} + D^a D_a R) + f_{RR} (D^a R D_a R) \right\} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} p^R = \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left\{ \frac{1}{2} (f - R f_R) + f_{RR} \left[\ddot{R} - \dot{u}^a D_a R - \frac{2}{3} (-\theta \dot{R} + D^a D_a R) \right] \right. \\ \left. + f_{RRR} \left[\dot{R}^2 - \frac{2}{3} D^a R D_a R \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$q_a{}^R = \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left\{ f_{RR} [- (D_a \dot{R} - v_a{}^b D_b R)] + f_{RRR} (-\dot{R} D_a R) \right\} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \pi_{ab}{}^R = \frac{1}{\kappa^2 f_R} \left\{ f_{RR} \left[-v_{ab} \dot{R} + D_a D_b R - \frac{1}{3} h_{ab} (\theta \dot{R} + D^f D_f R) \right] \right. \\ \left. + f_{RRR} \left[D_a R D_b R - \frac{1}{3} h_{ab} D^f R D_f R \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Şimdi, $T_{ab}{}^t$, $T_{ab}{}^m$ ve $T_{ab}{}^R$ tensörlerinin T_{ab} 'ye benzer tarzda,

$$T_{ab}{}^t = \mu^t u_a u_b + p^t h_{ab} + 2q_{(a}{}^t u_{b)} + \pi_{ab}{}^t \quad (3.55a)$$

$$T_{ab}{}^m = \frac{T_{ab}{}^m}{f_R} = \frac{1}{f_R} (\mu^m u_a u_b + p^m h_{ab} + 2q_{(a}{}^m u_{b)} + \pi_{ab}{}^m) \quad (3.55b)$$

$$T_{ab}{}^R = \mu^R u_a u_b + p^R h_{ab} + 2q_{(a}{}^R u_{b)} + \pi_{ab}{}^R \quad (3.55c)$$

ayrışımalarını göz önüne alarak, bunların her birine bağlanan değişkenleri tanımlayalım. (3.55a) eşitliğinden dolayı bu dinamik değişkenler birbirlerine

$$\mu^t = \frac{1}{f_R} \mu^M + \mu^R \quad (3.56)$$

$$p^t = \frac{1}{f_R} p^M + p^R \quad (3.57)$$

$$q_a{}^t = \frac{1}{f_R} q_a{}^M + q_a{}^R \quad (3.58)$$

$$\pi_{ab}{}^t = \frac{1}{f_R} \pi_{ab}{}^M + \pi_{ab}{}^R \quad (3.59)$$

bağıntılarıyla bağlı olurlar. (3.55a) denkleminin tanımı göz önüne alınırsa bu dört bağıntının alan denklemlerinin yerini tuttuğu, başka bir ifadeyle, alan denklemlerinin artık bu bağıntılara eşdeğer olduğu kolayca anlaşılır. Bu ifadeler ilerideki incelemelerimizin temelini oluşturacaklardır.

Evrim ve bağ denklemlerini $f(R)$ gravitasyona genelleştirmek için rölativist kozmolojinin evrim ve bağ denklemlerini μ, p, q_a ve π_{ab} yerine (3.56)-(3.57)-(3.58)-(3.59) bağıntılarıyla tanımlanan $\mu^t, p^t, q_a{}^t$ ve $\pi_{ab}{}^t$ efektif toplam ifadeleri ile yazmak yeterli olacaktır. Ancak, standart kozmolojinin $\nabla^a T_{ab} = 0$ enerji-momentum tensörünün korunumundan elde edilen korunum denklemlerine ek olarak $f(R)$ gravitasyonda $\nabla^a T_{ab}^m$ korunumundan kaynaklanan iki korunum denklemi daha yazmak gerekecektir. Bu söylenenleri dikkate alarak $f(R)$ gravitasyonun kovaryant evrim ve bağ denklemlerini aşağıda listeliyoruz.

3.2.2 Evrim ve Bağ Denklemleri

EVRİM DENKLEMLERİ

$$\begin{aligned} (E_1) \quad \dot{\theta} &= D_a \dot{u}^a - \frac{1}{3} \theta^2 + \dot{u}_a \dot{u}^a - 2\sigma^2 + 2\omega^2 - \frac{1}{2}(\mu^t + 3p^t) \\ (E_2) \quad \dot{\omega}^a &= \frac{1}{2} \mu^{abc} D_b \dot{u}_c - \frac{2}{3} \theta \omega^a + \sigma_b^a \omega^b + u^a \dot{u}_b \omega^b \\ (E_3)_{ab} \quad \dot{\sigma}_{ab} &= (u_a \sigma_{bc} + u_b \sigma_{ac}) \dot{u}^c + \frac{1}{2} (D_a \dot{u}_b + D_b \dot{u}_a) \\ &\quad - \sigma_{ac} \sigma_b^c - \frac{2}{3} \theta \sigma_{ab} + \dot{u}_a \dot{u}_b - \omega_a \omega_b \\ &\quad - \frac{1}{3} (D_c \dot{u}^c + \dot{u}_c \dot{u}^c - 2\sigma^2 - \frac{\omega^2}{h_{ab}} - (E_{ab} - \frac{1}{2} \pi_{ab}{}^t)) \end{aligned} \quad (3.60)$$

$\nabla^a T_{ab}{}^{RG} = 0$ 'dan elde edilenler ise:

$$\dot{\mu}^{RG} = -D_a q^{aRG} - (\mu^{RG} + p^{RG})\theta - 2q^{aRG}\dot{u}_a - \pi^{abRG}\sigma_{ab} \quad (3.61)$$

ve

$$\begin{aligned} \dot{q}_a^{RG} = & -D_a p^{RG} - D^b \pi_{ab}^{RG} - (\mu^{RG} + p^{RG})\dot{u}_a - \sigma_a^b q_b^{RG} \\ & - \frac{4}{3}\theta q_a^{RG} + u_a \dot{u}^b q_b^{RG} - \pi_{ab}^{RG} \dot{u}^b + \eta_a^{bc} q_b^{RG} \omega_c \end{aligned} \quad (3.62)$$

dir.

$$\begin{aligned} 0 = (C_4)_a = & D_b \left(E^b_a + \frac{1}{2} \pi^b_a{}^{(el)} \right) - \frac{1}{3} D_a \mu^{(el)} \\ & - \frac{1}{2} \sigma^a_b q_b^{(el)} + \frac{1}{3} \theta q_a^{(el)} - \eta_{ac}{}^f \left(\sigma^{cb} H_{fb} - \frac{3}{2} \omega^c q_f^{(el)} \right) - 3H^b_a \omega_b \\ 0 = (C_5)_a = & D_b H^b_a + \frac{1}{2} \eta_{ac}{}^f D^c q_f^{(el)} \\ & + (\mu^{(el)} + p^{(el)})\omega_a + 3 \left(E_{ab} - \frac{1}{6} \pi_{ab}^{(el)} \right) \omega^b + \eta_{ac}{}^f \sigma^{cb} (E_{fb} + \frac{1}{2} \pi_{fb}^{(el)}) \end{aligned}$$

Yukarıda yazılan evrim ve bağ denklemleri standart rölativist kozmolojideki denklemlerle aynı formda olmasına karşın; $f(R, G)$ Gravitasyon Teorisi, T_{ab}^m ve T_{ab}^{RG} nin korunum denklemlerinden, iki takım denklem daha vermektedir. Bunlar $\nabla^a T_{ab}^m = 0$ 'den elde edilen:

$$\dot{\mu}^m = -D_a q^{am} - (\mu^m + p^m)\theta - 2q^{am}\dot{u}_a - \pi^{abm}\sigma_{ab} \quad (3.63)$$

ve

$$\begin{aligned} \dot{q}_a^m = & -D_a p^m - D^b \pi_{ab}^m - (\mu^m + p^m)\dot{u}_a - \sigma_a^b q_b^m \\ & - \frac{4}{3}\theta q_a^m + u_a \dot{u}^b q_b^m - \pi_{ab}^m \dot{u}^b + \eta_a^{bc} q_b^m \omega_c \end{aligned} \quad (3.64)$$

dir.

$$\dot{\mu}^{el} + \nabla^a q_a^{(el)} = (\mu^{(el)} + p^{(el)})\theta - 2q_a^{(el)}\dot{u}^a - \pi_{ab}^{(el)}\sigma^{ab} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_a^{(el)} + D_a p^{(el)} + D^b \pi_{ab}^{(el)} = & -(\mu^{(el)} + p^{(el)})\dot{u}_a - \sigma_a^b q_b^{(el)} \\ & - \frac{4}{3}\theta q_a^{(el)} + u_a \dot{u}^b q_b^{(el)} - \pi_{ab}^{(el)} \dot{u}^b + \eta^{abc} q_b^{(el)} \omega_c \end{aligned} \quad (3.66)$$

BAĞ DENKLEMLERİ

$$0 = (C_1)_a = D_b \sigma_a^b - \frac{2}{3} D_a \theta + \eta_a^{bc} D_b \omega_c + 2 \eta_a^{bc} \dot{u}_b \omega_c + q_a^{(el)}$$

$$0 = (C_2) = D_a \omega^a - \dot{u}_a \omega^a$$

$$0 = (C_3)_{ab} = H_{ab} + (\omega_a \dot{u}_b + \omega_b \dot{u}_a) - \omega^e \dot{u}_e h_{ab}$$

$$- \frac{1}{2} (\eta_{aef} D^f \sigma^f_b + \eta_{bef} D^e \sigma^f_a) + \frac{1}{2} (D_a \omega_b + D_b \omega_a)$$

$$\begin{aligned} & \dot{\sigma}_{ab} - (u_a \sigma_{bc} + u_b \sigma_{ac}) \dot{u}^c - \frac{1}{2} (D_a \dot{u}_b + D_b \dot{u}_a) + \sigma_{ac} \sigma^c_b + \frac{2}{3} \theta \sigma_{ab} - \dot{u}_a \dot{u}_b \\ & + \omega_a \omega_b + \frac{1}{3} (D_c \dot{u}^c + \dot{u}_c \dot{u}^c - 2\sigma^2 - \omega^2) h_{ab} = - \left(E_{ab} - \frac{1}{2} \pi_{ab}^{(el)} \right) \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} & \left(\dot{E}_{ab} + \frac{1}{2} \dot{\pi}_{ab}^{(el)} \right) - \left(E_{ac} + \frac{1}{2} \pi_{ac}^{(el)} \right) \dot{u}^c u_b - \left(E_{bc} + \frac{1}{2} \pi_{bc}^{(el)} \right) \dot{u}^c u_a \\ & - \frac{1}{2} (\eta_{aef} D^e H^f_b + \eta_{bef} D^e H^f_a) + \frac{1}{4} (D_a q_b^{(el)} + D_b q_a^{(el)}) - \frac{1}{6} h_{ab} D^e q_e^{(el)} \\ & = - \frac{1}{2} (\mu^{(el)} + p^{(el)}) \sigma_{ab} - \frac{1}{2} (q_a^{(el)} \dot{u}_b + q_b^{(el)} \dot{u}_a) + \frac{1}{3} h_{ab} q_e^{(el)} \dot{u}^e \\ & - \theta \left(E_{ab} + \frac{1}{6} \pi_{ab}^{(el)} \right) + \frac{3}{2} \sigma^e_c \left(E_{bc} - \frac{1}{6} \pi_{be}^{(el)} \right) + \frac{3}{2} \sigma^e_b \left(E_{ae} - \frac{1}{6} \pi_{ae}^{(el)} \right) \\ & - h_{ab} \sigma^{ef} \left(E_{fe} - \frac{1}{6} \pi_{fe}^{(el)} \right) - \frac{1}{2} \eta_{aef} \left[\left(E^e_b + \frac{1}{2} \pi^e_b{}^{(el)} \right) \omega^f + 2 H^e_b \dot{u}^f \right] \\ & - \frac{1}{2} \eta_{bef} \left[\left(E^e_a + \frac{1}{2} \pi^e_a{}^{(el)} \right) \omega^f + 2 H^e_a \dot{u}^f \right] \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\dot{H}_{ab} - (u_a H_{bc} + u_b H_{ac}) \dot{u}^c + \frac{1}{2} \eta_{aef} D^e \left(E^f_b - \frac{1}{2} \pi^f_b{}^{(el)} \right) +$$

$$\frac{1}{2} \eta_{bef} D^e \left(E^f_a - \frac{1}{2} \pi^f_a{}^{(el)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\theta H_{ab} + \frac{3}{2}(H_{ac}\sigma^c{}_b + H_{bc}\sigma^c{}_a) \\
&\quad - H_{ef}\sigma^{ef}h_{ab} + \frac{3}{4}(\omega_a q_b^{(el)} + \omega_b q_a^{(el)}) - \frac{1}{2}\omega^c q_c^{(el)}h_{ab} \\
&\quad + (\eta_{aef}E^e{}_b + \eta_{bef}E^e{}_a)\dot{u}^f \\
&\quad - \frac{1}{2}(\eta_{aef}H^e{}_b + \eta_{bef}H^e{}_a)\omega^f \\
&\quad + \frac{1}{4}(\eta_{ae}{}^f\sigma^e{}_b + \eta_{be}{}^f\sigma^e{}_a)q_f^{(el)}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

4. BULGULAR

4.1 METRİK YAKLAŞIMIYLA $f(R)$ GRAVİTASYON

Bu bölümde, Standart Kozmolojik Model'in $f(R)$ gravitasyon bağlamında bazı temel özelliklerini açıklamakla ilgileniyoruz. Bunun için metrik $f(R)$ gravitasyon üzerine odaklanacağız ve alan denklemlerinin Friedmann denklemlerinin eşdeğerine nasıl yol açtığını göreceğiz. Bunu takiben enflasyon ve geç zaman ivmelenmesinin nasıl sağlandığını göstereceğiz.

4.1.1 Düz FLRW Evreninde Alan Denklemleri

Concordance (uyum) modeli düz, homojen ve izotropik olan bir evreni kabul eden kozmolojik modeldir. Bu evren, yüzey geometrisine sahip FLRW (Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker) metrik tensörü tarafından tanımlanmıştır.

$$dS^2 = g_{ab}dx^a dx^b = -dt + a^2(t)dx^2$$

Metriğin sıfır olmayan katsayıları

$$g_{00} = -1$$

$$g_{ii} = a^2(t),$$

$$g^{ii} = \frac{1}{a^2(t)} \text{ 'dir.} \quad (4.1)$$

Determinant g için kolaylıkla şöyle yazılabilir:

$$g = -a^6(t) \Rightarrow \sqrt{-g} = a^3(t) \quad (4.2)$$

Böylece, bu metriği alan denklemlerine dahil ederek, değiştirilmiş gravitasyon teorimiz için eşdeğer Friedmann denklemlerini elde edeceğiz [16]. Bunu yapmak için, ilk olarak Christoffel sembolleri aracılığıyla Ricci tensörünün bileşenlerini hesaplamamız gerekir.

$$\Gamma_{ab}^c = -\frac{1}{2}g^{cd}(g_{bd,a} + g_{ad,b} - g_{ab,d}).$$

Düz (FLRW) geometri örneğimizde, sıfırdan farklı olan Christoffel sembolleri sadece şunlardır:

$$\Gamma_{ii}^0 = a\dot{a} \quad (4.3)$$

$$\Gamma_{0i}^i = \frac{\dot{a}}{a} \quad (4.4)$$

Riemann tensörünün tanımından yola çıkarak Ricci tensör bağıntısı

$$R_{ab} = \Gamma_{ab,c}^c - \Gamma_{ac,b}^c + \Gamma_{dc}^c \Gamma_{ab}^d - \Gamma_{bd}^c \Gamma_{ac}^d$$

olarak yazılır. Ricci tensörünün (00) bileşeni

$$\begin{aligned} R_{00} &= \Gamma_{00,c}^c - \Gamma_{0c,0}^c + \Gamma_{dc}^c \Gamma_{00}^d - \Gamma_{0d}^c \Gamma_{0c}^d \\ &= -3\Gamma_{01,0}^1 - 3(\Gamma_{01}^1)^2 \\ &= -3\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \\ &= -3\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \\ &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ &= -3[\dot{H} + H^2] \end{aligned} \quad (4.5)$$

ve (ii) bileşeni

$$\begin{aligned} R_{ii} &= \Gamma_{ii,c}^c - \Gamma_{ic,i}^c + \Gamma_{dc}^c \Gamma_{ii}^d - \Gamma_{id}^c \Gamma_{ic}^d \\ &= \Gamma_{ii,c}^c + \Gamma_{0c}^c \Gamma_{ii}^0 - \Gamma_{ii}^0 \Gamma_{i0}^i - \Gamma_{i0}^i \Gamma_{ii}^0 \\ &= \Gamma_{ii,c}^c + 3\Gamma_{01}^1 \Gamma_{ii}^0 - 2\Gamma_{ii}^0 \Gamma_{i0}^i \\ &= \Gamma_{ii,c}^c + \Gamma_{0i}^i \Gamma_{ii}^0 \\ &= \Gamma_{ii,0}^0 + \Gamma_{0i}^i \Gamma_{ii}^0 \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\dot{a}a) + \frac{\dot{a}}{a}\dot{a}a \\ &= \dot{a}^2 + a\ddot{a} + \dot{a}^2 \end{aligned}$$

$$= 2\dot{a}^2 + a\ddot{a} \quad (4.6)$$

Ricci tensörünün iki indisi arasındaki bir büzülme olan Ricci skaleri,

$$\begin{aligned} R &= g^{ab}R_{ab} = g^{00}R_{00} + 3g^{ii}R_{ii} \\ &= (-1)\left(-3\frac{\ddot{a}}{a}\right) + 3\frac{1}{a^2}(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \\ &= 6\left[\frac{a\ddot{a} + \dot{a}^2}{a^2}\right] \\ &= 6\left[\frac{a\ddot{a} + \dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right] \\ &= 6[\dot{H} + 2H^2] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Bunu kullanarak Ricci tensörünün (00) bileşenini şu şekilde yeniden yazabiliriz:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3[\dot{H} + H^2] \\ &= -\frac{1}{2}6[\dot{H} + 2H^2 - H^2] \\ &= -\frac{1}{2}R + 3H^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Friedmann denklemlerini elde etmek için enerji-momentum tensörünün ifadesini yazalım. Evrenin enerji momentum tensörüne sahip mükemmel bir akışkanla dolu olduğunu varsayarak,

$$T_b^a = \text{diag}(-\rho_M, P_M, P_M, P_M) \quad (4.9)$$

$$T_{ab} = g_{ca}T_b^c \quad (4.10)$$

bunları alan denklemlerine eklemeyen önce, enerji momentum tensör denkleminin korunumunun sıfır bileşeni,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_a T_0^a \\ 0 &= \partial_a T_0^a + \Gamma_{ab}^a T_0^b - \Gamma_{a0}^b T_b^a \\ 0 &= -\partial_0 \rho - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) \end{aligned} \quad (4.11)$$

süreklilik denklemini verir [2].

Alan denkleminin (00) bileşeni,

$$F(R)R_{00} - \frac{1}{2}f(R)g_{00} - \nabla_0 \nabla_0 F(R) + g_{00} \square F(R) = \kappa^2 g_{00} T_0^0 \quad (4.12)$$

elde edilir ve denklemin sol tarafının dördüncü terimini açıkça yazarsak,

$$\begin{aligned} g_{00} \square F(R) &= (-1) \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \right) \partial_0 (\sqrt{-g} g^{00} \partial_0 F) \\ &= -\frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} \left(-a^3 \frac{\partial}{\partial t} F \right) \\ &= \frac{1}{a^3} 3a^2 \dot{a} \dot{F} + \frac{a^3}{a^3} \ddot{F} \\ &= 3H\dot{F} + \ddot{F} \end{aligned} \quad (4.13)$$

olur. Kovaryant türevli üçüncü terim, $F(R)$ skaler bir büyüklük olduğu için $-\partial_0 \partial_0 F$ olacaktır ve bu nedenle son ifadeden gelen $\ddot{F}$ terimini etkisiz kılacaktır. Böylece denklem

$$F \left(3H^2 - \frac{1}{2} R \right) + \frac{1}{2} f + 3H\dot{F} = \kappa^2 \rho_M$$

halini alır ve ilk değiştirilmiş Friedmann denklemleri

$$3FH^2 = (FR - f)/2 - 3H\dot{F} + \kappa^2 \rho_M \quad (4.14)$$

olarak elde edilir [3-4]. Alan denkleminin (ii) bileşeni aşağıdaki gibidir:

$$F(R)R_{ii} - \frac{1}{2}f(R)g_{ii} - \nabla_i \nabla_i F(R) + g_{ii} \square F(R) = \kappa^2 g_{ii} T_i^i \quad (4.15)$$

Denklemin sol tarafının son terimi

$$\begin{aligned} g_{ii} \square F(R) &= (a^2) \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \right) \partial_a (\sqrt{-g} g^{ab} \partial_b F) \\ &= (a^2) \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \right) \partial_0 (\sqrt{-g} g^{00} \partial_0 F) + (a^2) \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \right) \partial_i (\sqrt{-g} g^{ii} \partial_i F) \\ &= -3a^2 H\dot{F} - a^2 \ddot{F} + a^2 H\dot{F} + \nabla_i \nabla_i F \end{aligned}$$

$$= -2a^2 H\dot{F} - a^2 \ddot{F} + \nabla_i \nabla_i F \quad (4.16)$$

dir. Düz FLRW metrikteki $(\partial t / \partial x)^2 = a^2$ bağıntısını kullandık. Şimdi $\nabla_i \nabla_i$ 'nin alan denkleminde $-\nabla_i \nabla_i F(R)$ terimini etkisiz kılması durumunu kullanarak, denklemini yeniden yazalım:

$$(2\dot{a}^2 + a\ddot{a})F - \frac{a^2}{2}f - 2a^2 H\dot{F} - a^2 \ddot{F} = \kappa^2 a^2 P_M$$

$$\left(\frac{2\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{a^2}\right) - \frac{1}{2}f - 2H\dot{F} - \ddot{F} = \kappa^2 P_M$$

$$\left(\frac{2\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{a^2} + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)F - \frac{1}{2}f - 2H\dot{F} - \ddot{F} = \kappa^2 P_M$$

Şimdi denklemin son tarafının dördüncü terimini yerine koyalım

$$-f/2 = 3FH^2 - \frac{1}{2}FR + 3H\dot{F} - \kappa^2 \rho_M.$$

Bunun sonucunda

$$\dot{H}F + 3H^2F + 3H^2F - \frac{1}{2}FR + 3H\dot{F} - 2H\dot{F} - \ddot{F} = \kappa^2(\rho_M + P_M)$$

denklemini elde edilir ve düzenleyerek ikinci değiştirilmiş Friedmann denklemini elde ederiz

$$-2H\dot{F} = \ddot{F} - H\dot{F} + \kappa^2(\rho_M + P_M) \quad (4.17)$$

Bu denklem ile birlikte

$$3FH^2 = (FR - f)/2 - 3H\dot{F} + \kappa^2 \rho_M \quad (4.18)$$

bir $f(R)$ gravitasyon modeli tarafından yönetilen düz bir FLRW evreninin arka plan dinamikleri belirlenir. Karşılaştırma için, Concordance (uyum) modelinde evrenin evrimini belirleyen standart Friedmann denklemleri, (00) ve (ii) bileşenlerini alınarak Einstein denklemlerinden $G_{ab} = \kappa^2 T_{ab}$ türetilir [20]. Sonuç olarak elde edilen denklemler

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \rho \quad (4.19)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6} (\rho + 3P) \quad (4.20)$$

olur ve her iki durumda da süreklilik denklemi (4.11)

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (4.21)$$

ile ifade edilir.

4.2 ENFLASYON

Modern kozmolojide enflasyon (şişme), ufuk problemi, düzlük problemi ve ilkel yoğunluk dalgalanmalarının kökeni gibi bir dizi kozmolojik problemi çözmek için kullanılır. Concordance (uyumlu) modelde enflasyon, bir skaler alan tarafından üretilir. Bu alanın enerji yoğunluğu, elektrozayıf kuvvetin simetri kırılmasından bir süre sonra, erken evrenin baskın bileşenidir. Enflasyon durumu, alanın potansiyelinin minimum değerine yavaş yavaş yuvarlandığını varsaymak için slow roll (yavaş dönme) yaklaşımını kullanıyoruz. Bu durumda enflasyonun enerji yoğunluğu neredeyse sabit kalır ve basıncı $p \cong -\rho$ 'ya eşittir, bu da güçlü (kuvvetli) enerji durumunu ihlal eder, yani $\rho + 3p < 0$ olur ve evrenin genişlemesi hızlanır [34]. Ancak bu tablo çeşitli tutarsızlıklara sahiptir. Örneğin, belirli topolojik kusurların üretimine yol açar ve ince ayar gerektirir. Enflasyonun başlaması için alanın başlangıç değeri dikkatle seçilmelidir. Biz de bu niceliklere alternatif olarak şişmenin $f(R)$ gravitasyonda nasıl gerçekleştirilebileceğini inceleyeceğiz.

4.2.1 Skaler Alanda Enflasyon

$f(R)$ örneğine bakmadan önce, LCDM modeline genel bir bakış sunacağız. Standart kozmolojik model, Big Bang teorisinin işaret ettiği erken evrenin çeşitli dönemlerinin bir tasvirini verir. İnflaton adı verilen tek bir skaler alan ϕ tarafından üretilen enflasyona neden olan dönem, evrenin 10^{-36} sn. 'den ve temel kuvvetlerin $SU(3) \times SU(2) \times SU(1)$ simetrisinin kırılmasından sonra, 10^{-32} 'nci saniyeye kadar devam eder. Bu dönemde evrenin enerji yoğunluğuna, kozmik zamanın bu küçük bölümünde enflasyonu yönlendiren ve evrenin hacmini 10^{78} kat artıran inflaton hakimdir [29].

Hızlanarak genişleme (yani $\ddot{a} > 0$) ve enflasyon için (4.20) 'den kuvvetli enerji koşulunun ihlal edilmesi gerektiğini görebiliriz, bunun yerine

$$(\rho + 3p) < 0 \quad (4.22)$$

durumuna sahip olmalıyız.

Mükemmel akışkan yaklaşımında, evrenin olası her bir bileşeni için ω^2 durum parametresi ile belirlenen durum denklemi $p = \omega\rho$ olur [21]. Böylece ivme koşulları

$$\rho(1 + 3\omega) < 0 \Rightarrow \omega < -1/3 \quad (4.23)$$

haline gelir. Aşağıda enflasyon durumunda üstel genişlemenin nasıl ele alınacağını inceleyeceğiz.

Skaler alanın Lagrangian potansiyel $V(\phi)$ ile

$$L = \frac{1}{2} g_{ab} \partial^a \phi \partial^b \phi - V(\phi) \quad (4.24)$$

Genel koordinat çerçevesi altında $x^a \rightarrow x^a + \alpha^a$ Lagrange sabit kalır $\delta L = 0$ ve Noether Teoremi dolayısıyla akım korunumludur.

$$\begin{aligned} T^{ab} &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_a \phi)} \partial^b \phi - g^{ab} L \\ &= \partial^a \phi \partial^b \phi - g^{ab} \left[\frac{1}{2} g^{cd} \partial_c \phi \partial_d \phi - V(\phi) \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

Bu denklem, enflasyon alanı için enerji momentum tensörünü tanımlar. Bunu mükemmel bir akışkan için enerji-momentum tensörü ile eşitlemek, ϕ homojen olduğu ve böylece gradyentleri $(\nabla\phi)$ etkisiz kıldığı varsayımıyla, bize enflasyon için enerji yoğunluğu ve basıncı verecektir [11].

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (4.26)$$

$$p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (4.27)$$

Yukarıdakileri (4.21)'de yerine yazarak inflaton hareket denklemini elde edebiliriz. Bunun için ρ 'nun zamana göre türevini hesaplayalım,

$$\dot{\rho} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) = \dot{\phi} \ddot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} \dot{\phi}$$

ve p ile ρ toplamını şu şekilde elde edelim,

$$\rho + p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = \dot{\phi}^2.$$

Böylece enerji korunumu denklemi (4.21) şu ifadeyi verir

$$\ddot{\phi} + \frac{dV}{d\phi}\dot{\phi} + \dot{\phi}^2 = 0$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (4.28)$$

Bu denklem, enflasyon sırasında skaler alanın evrimini belirler. Ayrıca, şu formu alan iki Friedmann denklemi vardır,

$$H^2 = \frac{1}{3\bar{m}_p^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (4.29)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{1}{3\bar{m}_p^2} \left(\dot{\phi}^2 - V(\phi) \right). \quad (4.30)$$

daha sonraki bahsimizde kolaylık sağlaması için, $\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a}$ ve $\bar{m}_p^2 = \frac{1}{\kappa^2}$ eşitliklerini kullanarak bu şekilde yazdık.

Şimdi (4.22) 'den hızlanan genişleme için birincil koşulun, skaler alanın kinetik enerjisinin potansiyel enerjiden daha az olması olduğunu görebiliriz $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 < V(\phi)$. Bu nedenle, potansiyelin şekli ve kinetik terim üzerindeki hakimiyeti, enflasyonun sürdürülmesinde önemlidir.

Tam olarak buna dayanan enflasyon üzerine çok yararlı bir yaklaşım; alanın evrimi, potansiyelin kinetik enerjiye baskın olduğu kademedede ise ve ϕ 'nin ikinci türevi, bu durumu yeterli bir süre için koruyacak kadar küçükse, enflasyonun meydana geldiği slow roll yaklaşımıdır [8]. Yani biz şu durumların sağlanmasını istiyoruz:

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$$

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|, |V'(\phi)|.$$

Bu koşulların yerine getirilmesi, slow roll parametreleri olarak bilinen iki boyutsuz niceliğin küçüklüğünü gerektirir.

$$\epsilon = \frac{1}{2} \bar{m}_p^2 \left(\frac{v'}{v} \right)^2 \quad (4.31)$$

$$\eta = \bar{m}_p^2 \frac{v''}{v} \quad (4.32)$$

Böylece $\epsilon, \eta \ll 1$ olduğunda, alan yavaş dönme şansına sahip olduğunda enflasyon meydana gelebilir. Bu koşullar yeterli değildir, çünkü biri slow roll (yavaş dönme) uygulanamayacak kadar büyük olan $|1/2 \dot{\phi}^2|$ 'li başlangıç koşullarını seçebilir. Fakat slow roll parametreleri küçükse, başlangıç koşullarının çoğu bir enflasyon fazına çekilir.

Bu yaklaşımın yararı $1/2 \dot{\phi}^2$ ve $\ddot{\phi}$ terimlerini ihmal edebilmemizdir. Böylece Friedmann denklemi ile birlikte inflatonun basınç yoğunluğu ve hareket denklemi sırasıyla:

$$\rho \cong V(\phi) \quad (4.33)$$

$$p \cong -V(\phi) \quad (4.34)$$

$$3H\dot{\phi} \cong -V'(\phi) \quad (4.35)$$

$$H^2 \cong \frac{1}{3\bar{m}_p^2} V(\phi) \quad (4.36)$$

olur.

ϵ ve η 'nin küçüklüğü, “slow roll”ın uygulanabilmesi için yeterli bir koşul olmamasına rağmen, $\epsilon \ll 1$ koşulunun hızlanan genişleme üretmek için yeterli olduğunu gösterebiliriz. Yani $\ddot{a}/a$ ya da

$$\dot{H} + H^2 > 0 \Rightarrow -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1 \quad (4.37)$$

Bu eşitsizliğin $\epsilon \ll 1$ ile eşdeğer olduğunu görmek için işleme (4.36)'yı ve (4.35)'i kullanarak ve $V \cong 3\bar{m}_p^2 V(\phi) H^2$ alarak başlarız;

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3\bar{m}_p^2} \dot{\phi} V'(\phi) \quad (4.38)$$

$$2H\dot{H} = -\frac{1}{3\bar{m}_p^2} \frac{v'}{3H} V'. \quad (4.39)$$

Bu iki niceliğin eşitliği, $\epsilon \ll 1$ 'in hızlanan genişlemeye eşdeğer olduğunu gösterir. Basit bir örnek olarak, etkileşimsiz bir skaler alanın potansiyelini m kütlesi ile kullanabiliriz.

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (4.40)$$

Bu durumda iki slow roll parametresinin aynı olduğunu göstermek kolaydır.

$$\epsilon = \eta = \frac{2\bar{m}_p^2}{\phi^2} \quad (4.41)$$

Dolayısıyla, yalnızca alanın başlangıç değerini belirleyen geçerli bir slow roll için bir koşulumuz vardır.

$$\epsilon \ll 1 \Rightarrow \bar{m}_p^2 \ll \phi/2. \quad (4.42)$$

Bu şartlar altında yaklaşık olarak hareket ve Friedmann denklemleri (4.35), (4.36)

$$3H\dot{\phi} = -m^2\phi \quad (4.43)$$

$$H^2 = \frac{1}{6\bar{m}_p^2}m^2\phi^2 \quad (4.44)$$

halini alır. Bu, enflasyon sırasında alanın ve ölçek faktörünün evrimini çözebileceğimiz ve hesaplayabildiğimiz iki farklı denklem sistemidir.

Hubble parametresini $H = \frac{m\phi}{\sqrt{6}\bar{m}_p}$ olarak yazarak ve hareket denkleminde yerine koyarak inflatonun evrimini elde ederiz.

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\sqrt{6}\bar{m}_p}{3m} \\ \phi &= \phi_i - \frac{\sqrt{6}\bar{m}_p}{3m}t \end{aligned} \quad (4.45)$$

Bunu, bulduğumuz Hubble parametresinin ifadesine ekleyerek

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}}{a} &= \frac{m}{\sqrt{6}\bar{m}_p} \left(\phi_i - \frac{\sqrt{6}\bar{m}_p}{3m}t \right) \\ a &= a_i \exp \left[\frac{m}{\sqrt{6}\bar{m}_p} \left(\phi_i t - \frac{\sqrt{6}\bar{m}_p}{3m}t^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

denklemlerine ulaşırız. Bu denklemler, enflasyon sırasında ölçek faktörünün katlanarak büyüdüğünü gösterir. Slow roll durumu artık karşılanmadığında, yani $\epsilon \sim 1$ olduğunda enflasyon durur.

Son olarak, ölçek faktörü (a)'nın artmasıyla enflasyon miktarını hesaplamak mümkündür. Enflasyon sırasında bunun üstel bir büyümesi olduğu gerçeğini kullanarak

$$a(t) = a_i \exp(Ht) \Rightarrow \ln\left(\frac{a(t)}{a_i}\right) = Ht \quad (4.47)$$

bağıntısı elde edilir. Enflasyon miktarının bir ölçüsü olarak, enflasyon döneminin başından sonuna kadar logaritmik zamanı (N) kullanırız, yani bizim durumumuzda

$$N \equiv \int \ln\left(\frac{a(t_f)}{a(t_i)}\right) da = \int_{t_i}^{t_f} H dt \quad (4.48)$$

olur. Bunu ϕ 'nin başlangıç ve son değerleri cinsinden yazabiliriz

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H \frac{dt}{d\phi} d\phi = \int_{t_i}^{t_f} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi = -\frac{1}{\bar{m}_p^2} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'} d\phi. \quad (4.49)$$

H oranı için (4.36)'yı (4.35)'e böleriz. Her durumda slow roll altında

$$N \cong \frac{1}{\bar{m}_p^2} \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V}{V'} d\phi \quad (4.50)$$

dir. $V = 1/2 m^2 \phi^2$ örneğimiz için bu,

$$N = \frac{1}{\bar{m}_p^2} \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{\phi}{2} = \frac{1}{2\bar{m}_p^2} (\phi_i^2 - \phi_f^2) \quad (4.51)$$

ifadesini verir ve $\epsilon = 2\bar{m}_p^2/\phi^2$ düzeni içindeyken enflasyon durduğundan yaklaşık olarak inflaton alanının son değerinin şöyle olduğunu söyleyebiliriz:

$$N \cong \frac{1}{2\bar{m}_p^2} \phi_i^2 - 1. \quad (4.52)$$

Bir enflasyon modelinin, büyük patlama modelinin ufuk, düzlük ve teklik problemlerini çözme açısından başarılı olması için, $N \gtrsim 70$ olması gereklidir ve bu gereksinimden, alanın başlangıç değeri için bir alt sınır belirleyebiliriz.

4.2.1 $f(R)$ Gravitasyonda Enflasyon: Genel Durum

Enflasyona yol açan bir skaler alanın önceki tablosunun aksine, bu durumda enflasyon, modelin bir sonucu olarak ortaya çıkar.

$$f(R) = R + bR^n \quad (b > 0, n > 0) \quad (4.53)$$

ve bu durumda f 'in R 'ye göre türevi

$$F = \frac{\partial}{\partial R} f(R) \quad (4.54)$$

$$= \frac{\partial}{\partial R} (R + bR^n) \quad (4.55)$$

$$= 1 + nbR^{n-1} \quad (4.56)$$

dir. Alan denkleminin nasıl bir form aldığını görmek için aşağıdaki çarpıma ihtiyacımız var:

$$FR = (R + nbR^n) \cdot \quad (4.57)$$

F 'in zamana göre türevi ile birlikte

$$\dot{F} = \frac{\partial}{\partial t} F = \frac{\partial}{\partial t} (1 + nbR^{n-1}) = n(n-1)bR^{n-2}\dot{R} \quad (4.58)$$

ifadesini (4.14)'de yerine koyarsak, ilk değiştirilmiş Friedmann denklemi şu formu alır [46-48]:

$$\begin{aligned} 3(1 + nbR^{n-1})H^2 &= \frac{1}{2}(R + nbR^n - R - bR^n) - 3Hn(n-1)1 + nbR^{n-1} \\ 3(1 + nbR^{n-1})H^2 &= \frac{1}{2}(n-1)bR^n - 3Hn(n-1)1 + nbR^{n-1} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Kozmik ivmelenme $F = 1 + nbR^{n-1}$ sisteminde gerçekleştirilebilir. Böylece $F \cong nbR^{n-1}$ yaklaşımı altında (4.59)'u $3nbR^{n-1}$ ile bölersek şu ifadeyi verir:

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{6} \left[\frac{(n-1)bR^n}{nbR^{n-1}} \right] - 3H \frac{n(n-1)bR^{n-2}\dot{R}}{3nbR^{n-1}} \\ &= \frac{1}{6} \frac{n-1}{n} R - H \frac{\dot{R}}{R} \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$= \frac{n-1}{6n} \left(R - 6nH \frac{\dot{R}}{R} \right). \quad (4.61)$$

(4.7) 'den R'nin zamana göre türevi

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{\partial}{\partial t} [6(2H^2 + \dot{H})] \\ &= 6(4H\dot{H} + \ddot{H}) \end{aligned} \quad (4.62)$$

olur. Böylece aşağıdaki ifadeyi elde ederiz,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{R}}{R} &= \frac{6(4H\dot{H} + \ddot{H})}{6(2H^2 + \dot{H})} \\ &= \frac{H\dot{H} \left(4 + \frac{\ddot{H}}{H\dot{H}} \right)}{H^2 \left(2 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right)} \\ &= \frac{4H\dot{H}}{2H^2} = 2 \frac{\dot{H}}{H}. \end{aligned}$$

Burada, Hubble parametresinin yavaşça geliştiği enflasyon sırasında geçerli olan $\left| \frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1 \right|$ ve $\left| \frac{\ddot{H}}{H\dot{H}} \ll 1 \right|$ yaklaşıklıklarını kullandık. Sonuçta (4.14) şu formda yazılır:

$$H^2 = \frac{n-1}{6n} \left(6(2H^2 + \dot{H}) - 6nH^2 \frac{\dot{H}}{H} \right)$$

$$H^2 = \frac{n-1}{6n} (6(2H^2 + \dot{H}) 2n\dot{H})$$

$$H^2 = \frac{n-1}{n} \left[2 - (2n-1) \frac{\dot{H}}{H^2} \right]$$

$$\frac{n}{n-1} = 2 - (2n-1) \frac{\dot{H}}{H^2}$$

$$2 - \frac{n}{n-1} = (2n-1) \frac{\dot{H}}{H^2}$$

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{2(n-1)-n}{(n-1)(2n-1)}.$$

Diğer bir deyişle

$$\frac{\dot{H}}{H^2} \cong -\epsilon \quad (4.63)$$

dir. Burada $\epsilon = \frac{2-n}{(n-1)(2n-1)}$, $f(R)$ modelimiz için eşdeğer slow roll parametresidir. Pozitif ϵ için integrasyon

$$\frac{dH}{H^2} = -\epsilon \Rightarrow \frac{dH}{H^2} = -\epsilon dt \Rightarrow \frac{1}{H} = \epsilon t \Rightarrow H = \frac{1}{\epsilon t} \quad (4.64)$$

olur. Yani ölçek faktörü şu şekilde gelişir:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{\epsilon t} \Rightarrow \frac{da}{a} = \frac{1}{\epsilon t} dt \Rightarrow \ln a = \frac{1}{\epsilon} \ln t = \ln t^{\frac{1}{\epsilon}} \Rightarrow a \propto t^{\frac{1}{\epsilon}} \quad (4.65)$$

Enflasyon, evrenin küçük bir kozmolojik periyodunda hızlı bir şekilde genişlemesine eşdeğerdir. Böylece önceki sonuca göre $\epsilon < 1$ olduğunda enflasyon meydana gelir, yani

$$\frac{2-n}{(n-1)(2n-1)} < 1 \quad (4.66)$$

$n = 2$ için $\epsilon = 0$ olur, böylece Hubble parametresi $\dot{H} \gg 1$ sisteminde sabittir. $n > 2$ olan modeller $\dot{H} > 0$ iken süper enflasyona yol açar. Böylece, $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) < n < 2$ olan modellerde, H 'nin azalmasıyla standart enflasyon elde edilebilir.

4.2.3 Starobinsky Enflasyonu

Basit bir örnek olarak Starobinsky modelini inceleyeceğiz. Dediğimiz gibi bu, olağan skaler alan seçeneğinden farklı bir enflasyon kaynağı olarak kullanılan ilk değiştirilmiş gravitasyon modeliydi. Model şu fonksiyon tarafından belirlenir

$$f(R) = R + \frac{R^2}{6M^2} . \quad (4.67)$$

($n = 2$ ve $b = \frac{1}{6M^2}$ olarak alınmaktadır.) Burada M kütle boyutlarına sahip bir sabittir.

$$R^n = R^2 = [6(2H^2 + \dot{H})]^2 = 36(4H^4 + \dot{H}^2 + 4H^2\dot{H}) \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [6(2H^2 + \dot{H})] = 6(4H\dot{H} + \ddot{H}) \quad (4.69)$$

(4.59)'da yerine koyarsak

$$3 \left(1 + 2 \frac{1}{6M^2} R \right) H^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{6M^2} R^2 - 6 \frac{1}{6M^2} H \dot{R}$$

$$3M^2 H^2 + 6H\ddot{H} + 18H^2 \dot{H} - 3\dot{H}^2 = 0$$

Son satırı $6H$ ile bölerek

$$\ddot{H} + \frac{1}{2} M^2 H + 3H\dot{H} - \frac{1}{2} \frac{\dot{H}^2}{H} = 0$$

$$\ddot{H} + \frac{1}{2} M^2 H - \frac{1}{2} \frac{\dot{H}^2}{H} = -3H\dot{H} \quad (4.70)$$

elde edilir.

Enflasyon sırasında Hubble parametresi çok yavaş gelişir, yani (4.70) 'deki ilk iki terim ihmal edilebilir, bu da $\dot{H} \cong -M^2/6$ yazmamıza izin verir, bunu çözersek

$$\int_{H_i}^H dH \cong - \int_i^t (M^2/6) dt$$

$$H \cong H_i - (M^2/6)(t - t_i) \quad (4.71)$$

$$\int_{a_i}^a \frac{da}{a} \cong \int_{t_i}^t H_i dt - \int_0^{t-t_i} (M^2/6)(t - t_i) d(t - t_i)$$

$$a \cong a_i \exp[H_i(t - t_i) - (M^2/12)(t - t_i)^2] \quad (4.72)$$

elde ederiz. H_i ve a_i Hubble parametresi ve enflasyonun başlangıcındaki ($t = t_i$) ölçek faktörüdür ve

$$R \cong 12H^2 - M^2 \quad (4.73)$$

dir. Slow roll koşulu sağlandığı sürece enflasyon devam eder

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \cong \frac{M^2}{6H^2} \lesssim 1 \implies H^2 \gtrsim M^2 \quad (4.74)$$

($t = t_f$) anında $\epsilon \cong 1$ 'dir ve enflasyon durur. Böylece enflasyonun sonunda (4.63)'den şunu görürüz

$$\frac{\dot{H}_f}{H^2} \cong 1 \Rightarrow H_f \cong M/\sqrt{6} . \quad (4.75)$$

Bu ifadeyi (4.71)'ye eklediğimizde

$$\begin{aligned} M/\sqrt{6} &\cong H_i - (M^2/6)(t_f - t_i) \\ (M^2/6)t_f &\cong H_i + (M^2/6)t_i - M\sqrt{6} \\ t_f &\cong \frac{6H_i}{M^2} + t_i \end{aligned} \quad (4.76)$$

olur. Burada, WMAP'tan yapılan son ölçümler kütle ölçeğini çok küçük $M \cong 13GeV$ olarak kısıtladığından, $\sqrt{6}/M$ terimini atabiliriz. Bu durumda Ricci skaleri $R \cong M^2$ ye indirgenir. (4.76) 'dan gelen sonuç kullanılarak modelimizdeki logaritmik zaman (N) aşağıdaki ifadeye eşit olur.

$$N \cong H_i \frac{6H_i}{M^2} - \frac{M^2}{12} \left(\frac{6H_i}{M^2} \right)^2 \cong \frac{3H_i^2}{M^2} \cong \frac{1}{2\epsilon(t_f)} \quad (4.77)$$

Son eşitlikte $\epsilon \cong M^2/6H^2$ 'yi kullandık. Ufuk ve tek kutup problemlerini çözmek için en azından $N > 70$ olması gerektiğini söylemiştik. Bu demektir ki $\epsilon(t_f) \lesssim 7 \times 10^{-3}$ olmalı.

4.3 METRİK YAKLAŞIMIYLA $f(R)$ GRAVİTASYONDA KARANLIK ENERJİNİN AÇIKLANMASI

Evrende Karanlık Enerji'nin varlığının, en önemli modern kozmolojik gözlemsel olgulardan ikisi tarafından desteklendiğinden daha önce bahsetmiştik. Bunlardan ilki, Karanlık Enerji'nin toplam enerji yoğunluğunun %72'sini oluşturduğunu gösteren evrenin yapısıdır. İkincisi, evrenin şu anda hızlanan bir genişleme aşaması geçirmekte olduğunu gösteren Tip-Ia Süpernova (SN Ia) gözlemlerinden gelen güçlü göstergelerdir.

Hızlanan genişlemeyi (yani $\ddot{a} > 0$) elde etmek için klasik GR'nin ikinci Friedmann denkleminde yola çıkıyoruz.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (4.78)$$

Güçlü enerji durumunu ihlal edecek, ω parametresi ile belirlenen bir durum denkleminde sahip, mükemmel (ideal) akışkan olan bir tür madde-enerji yaklaşıklığına ihtiyacımız var.

Karanlık Enerji için en basit aday, parçacık fiziğinin vakum enerjisine eşdeğer olduğu düşünülen Kozmolojik Sabit Λ 'dır. Bunun nedeni, durum denkleminin, tam olarak yukarıdaki denklemi ihlal eden ve ölçek faktörünün hızlanan büyümesine yol açan, $\omega = -1$ olmasıdır. Ancak, bu tabloya bağlı olarak coincidence (denk gelme) ve ince ayar problemi ortaya çıkıyor. Kozmolojik sabitin kaynağı bir vakum enerjisiyse o zaman ince ayar problemi için bugünkü vakumun hesaplanan enerji ölçeği ile Karanlık Enerji yoğunluğu arasındaki karşılaştırmada büyük bir uyumsuzluk ortaya çıkar. Frekansı ω olan kütle M alanlarının sıfır noktası enerjisi E tarafından verilir. Bu alanın sıfır noktası enerjilerini bir kesme ölçeğinde $k_{\max}(>> m)$ 'ye kadar toplayarak, vakum enerji yoğunluğunu elde ederiz.

$$\rho_{vac} = \int_0^{k_{\max}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + m^2} \quad (4.79)$$

İntegrale büyük $k \gg m$ olduğundan, şöyle buluruz

$$\rho_{vac} \approx \int_0^{k_{\max}} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} k = \frac{k_{\max}^4}{16\pi^2} . \quad (4.80)$$

Kesme ölçeği $k_{\max}$ 'ı Planck kütlesi m_{pl} olarak alarak, vakum enerji yoğunluğu $\rho_{vac} \cong 10^{74} GeV$ olarak tahmin edilebilir. Bu, gözlemlenen $\rho_{DE}^{(0)} \cong 10^{-47} GeV$ değerinden yaklaşık 10^{121} kat daha büyüktür. Buna ince ayar problemi denir. Bu durum Karanlık Enerjinin kökeni ile ilgili diğer açıklamaları araştırmayı güçlü bir şekilde teşvik etmiştir.

4.3.1 Durumun Efektif Parametresi

$f(R)$ modellerinde Karanlık Enerji'yi gerçekleştirmenin yolu, efektif bir durum parametresi tanımlamak ve ortaya çıkan $\omega_{efektif}$ 'i sağlayan (4.23) model türlerini araştırmaktır.

$$\omega_{efektif} < -\frac{1}{3}$$

İlk olarak, metrik alan denklemlerini Einstein tensörü ile daha standart bir biçimde yazabiliriz:

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - 1/2 g_{ab} R = \kappa^2 (T_{ab}^{(M)} + T_{ab}^{(eğrilik)}) \quad (4.81)$$

Burada $G_{ab} \equiv R_{ab} - 1/2 g_{ab}R$ ve

$$\kappa^2 T_{ab}^{(eğrilik)} = g_{ab} (f - R)/2 + \nabla_a \nabla_b F - g_{ab} \square F + (1 - F)R_{ab} \quad (4.82)$$

$\nabla^a G_{ab} = 0$ ve $\nabla^a T_{ab}^{(M)} = 0$ olduğundan,

$$\nabla^a T_{ab}^{(eğrilik)} = 0 \quad (4.83)$$

olur. Böylece, süreklilik denklemi bu efektif enerji momentum tensörü $T_{ab}^{(eğrilik)}$ için tamamen eşit tutulur. Bu şekilde yaptığımız, madde aksiyonunun varyasyonundan gelen olağan madde tensörünü, esasen her $f(R)$ model tarafından belirlenen ek bir eğrilik kaynağı olan ve evrendeki karanlık enerji varlığını tanımlamak için kullanılabilen efektif bir enerji tensörü olarak ele aldığımız diğer alan denklemlerinden ayırmaktır. Diğer kaynaklarımız için mükemmel akışkan yaklaşımı kullandığımızdan, bu eğrilik kaynağı için aynısını yapabiliriz, yani $T_{ab}^{(eğrilik)} = \text{diag}(-\rho_{eğrilik}, P_{eğrilik}, P_{eğrilik})$. O zaman efektif durum parametresini şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$\omega_{efektif} = \frac{P_{eğrilik}}{\rho_{eğrilik}} \quad (4.84)$$

Bu durumda süreklilik denklemi

$$\dot{\rho}_{eğrilik} + 3H(\rho_{eğrilik} + 3p_{eğrilik}) = 0 \quad (4.85)$$

olur.

Geometrik akışkan için efektif durum denklemini ekleyerek şunu elde ederiz

$$\frac{\dot{\rho}_{eğrilik}}{\rho_{eğrilik}} = -3H(1 + \omega_{eğrilik}) \quad (4.86)$$

Efektif enerji yoğunluğunu, (4.82) ile veya ilk değiştirilmiş Friedmann denkleminde (4.14)'ü şu şekilde yeniden yazdıktan sonra çıkarabiliriz:

$$H^2 = \frac{1}{3f'} [\kappa^2 \rho_M + (f'R - f)/2 - 3H\dot{F}] \quad (4.87)$$

Eğer bunu (4.19) ile karşılaştırsak şu şekilde olduğunu görürüz

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3f'} \rho_M + \frac{\kappa^2}{3} \rho_{efektif} .$$

Burada efektif enerji yoğunluğu

$$\begin{aligned} \rho_{efektif} &= \frac{1}{f'} [(f'R - f)/2 - 3H\dot{f}] \\ &= \frac{1}{f'} [(f'R - f)/2 - 3Hf''\dot{R}] \end{aligned} \quad (4.88)$$

dir. Efektif durum parametresini elde etmenin iki yolu vardır. İlki, $\omega_{efektif} = \rho_{eğrilik}/P_{eğrilik}$ durum denkleminde $p_{eğrilik}$ 'i bulmak için (4.82)'yi kullanmaktır veya (4.86)'yı kullanabiliriz.

$$\omega_{efektif} = -1 - \frac{1}{3H} \frac{\dot{\rho}_{eğrilik}}{\rho_{eğrilik}} \quad (4.89)$$

İkinci yol ise $\rho_{eğrilik}$ 'in zamana göre türevini almalıyız

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{eğrilik} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{f'} [(f'R - f)/2 - 3Hf''\dot{R}] \right] \\ &= -\frac{1}{f'^2} (6H^2 f''\dot{R} - 3Hf'''\dot{R}^2 - 3Hf''\ddot{R}) \end{aligned} \quad (4.90)$$

Sonucu $3H$ ile bölersek

$$\dot{\rho}_{eğrilik} = \frac{1}{f'^2} (\ddot{R}f'' + \dot{R}(f'''\dot{R} - 2Hf'')) \quad (4.91)$$

Bu sonucu (4.89)'da yerine koyduktan sonra efektif durum parametresinin

$$\omega_{efektif} = -1 + \frac{1}{f'} \frac{\ddot{R}f'' + \dot{R}(f'''\dot{R} - 2Hf'')}{(f'R - f)/2 - 3Hf''\dot{R}} \quad (4.92)$$

olduğunu görürüz.

(4.23)'deki koşulu karşılayan bir $\omega_{efektif}$ veren ve geç zaman hızlanan genişlemesini üreten bir dizi $f(R)$ modeli vardır. $f(R) = f_0 R^n$ olan modeller bu modellere bir örnektir, burada n reel bir sayıdır. Ölçek faktörünün genel bir kuvvet kanunu (power law) $a = a_0(t/t_0)^\alpha$ olarak büyüdüğünü varsayarsak, n 'in bir fonksiyonu olarak $\omega_{efektif}$

$$\omega = -\frac{6n^2-7n-1}{6n^2-9n+3} \quad (4.93)$$

$n \neq 1$ için, n cinsinden α parametresi şöyle verilir

$$\alpha = \frac{-2n^2+3n-1}{n-2} . \quad (4.94)$$

Açıkça istenen değeri veren birçok n değeri vardır. Örneğin, önceki bölümde incelenen şişme için Starobinsky modeli olan $n = 2$, beklendiği gibi $\omega_{efektif} = -1$ ve $\alpha = \infty$ değerlerini verir. $a(t)$ için kuvvet kanunu çözümleri, SNeIa verilerine tatmin edici bir uyum sağlayan ve evrenin tahmini yaşı ile $1.366 < n < 1.376$ aralığında iyi bir uyum sağlayan bu model ailesinde bulunabilir. Ek bir örnek, $f(R) = R - \mu^{2(n+1)}/R^n$ formundaki modellerdir, burada μ , uygun bir parametredir [41]. Yine ölçek faktörü için kuvvet kanunu çözümlerini varsayarsak, bu durumda efektif durum parametresi

$$\omega_{efektif} = -1 + \frac{2(n+2)}{3(2n+1)(n+1)} \quad (4.95)$$

olur. Bunların en tipik modeli $n = 1$ için $\omega_{efektif} = -2/3$ olduğu durumda $f(R) = R - \mu^4/R$ 'dir.

Bu iki örnek arasındaki fark, daha sonra R^n durumunun aksine pozitif n için R ile ters orantılı terimler olduğudur. Bu önemlidir, çünkü geç hızlanmada, ekstra eğrilik teriminin erken zamanlarda ihmal edilebilir olmasını ve kozmik evrimin geç aşamalarında hakim olmasını istiyoruz. Sonuç olarak, $1/R^n$ terimli modeller Karanlık Enerji için daha uygundur, çünkü bu terimler eğrilik daha büyük olduğunda erken evrende R 'ye göre önemsizdir ve geç zamanlarda $R \rightarrow 0$ olduğunda önemli hale gelmektedir.

4.3.2 $f(R)$ Gravitasyonda Dinamik Sistem Kullanarak Karanlık Enerjinin Açıklanması

Enerji yoğunluğu ρ_m ve ρ_r 'ye karşılık gelen, rölativistik olmayan madde ve radyasyon göz önüne alındığında

$$\dot{\rho}_m + 3\rho_m = 0 \quad (4.96)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0 \quad (4.97)$$

elde edilir. Bu yöntemin başlangıç noktası, iki değiştirilmiş Friedmann denklemi (4.14) ve (4.17) 'dir.

$$3FH^2 = (FR - f)/2 - 3H\dot{F} + \kappa^2(\rho_M + \rho_r) \quad (4.98)$$

$$-2\dot{H}F = \ddot{F} - H\dot{F} + \kappa^2(\rho_M + 4/3 \rho_r) \quad (4.99)$$

Genel bir $f(R)$ modeli için aşağıdaki boyutsuz dinamik değişkenleri sunuyoruz

$$x_1 \equiv -\frac{\dot{F}}{HF}, \quad x_2 \equiv -\frac{1}{6FH^2}, \quad x_3 \equiv \frac{R}{6H^2}, \quad x_4 \equiv \frac{\kappa^2 \rho_r}{3FH^2}.$$

Ayrıca burada yoğunluk parametresi

$$\Omega_M \equiv \frac{\kappa^2 X}{3FH^2}. \quad (4.100)$$

dir ve $X = m, rad$ veya karanlık enerji (KE) durumlarını ifade edecektir.

(4.98)'den açıkça görülür ki

$$\Omega_M \equiv \frac{\kappa^2 X}{3FH^2} = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \quad (4.101)$$

dir. Radyasyon ve Karanlık enerji için yoğunluk parametreleri ile birlikte

$$\Omega_r \equiv x_4, \quad \Omega_{KE} \equiv x_1 + x_2 + x_3$$

olur [17]. Hareket denklemlerini ve yukarıdaki yoğunluk parametrelerini kullanarak, önceden tanımlanmış boyutsuz dinamik parametrelere ilişkin aşağıdaki denklem sistemini türetiriz.

$$\frac{dx_1}{dN} = -1 - x_3 - 3x_2 + x_1^2 - x_1x_3 + x_4$$

$$\frac{dx_2}{dN} = \frac{x_1x_3}{m} - x_2(2x_3 - 4 - x_1)$$

$$\frac{dx_3}{dN} = \frac{x_1x_3}{m} - 2x_3(x_3 - 2)$$

$$\frac{dx_4}{dN} = -2x_3x_4 + x_1x_4$$

Burada $N = \ln a$ logaritmik zaman ve

$$m \equiv \frac{d \ln F}{d \ln R} = \frac{R f''(R)}{f'(R)}$$

dir. Ayrıca, bu durumda aşağıdaki gibi tanımlanmış bir durum denklemi elde ederiz

$$\omega_{\text{efektif}} \equiv -1 - 2\dot{H}^2/(3H^2) = -(2x_3 - 1)/3 \quad . \quad (4.102)$$

Şimdi bu modele bağlı olarak x_1, x_2, x_3 ve x_4 değişkenlerinin değerlerini bulmak mümkündür.

Sistemin denge noktaları, farklı özelliklere sahip evrenleri tanımlayan $f(R)$ gravitasyon modellerine karşılık gelir ve bunların bazıları içinde yaşadığımız gerçek evrenle eşleşen, efektif bir durum denklemi gibi özelliklere sahiptir. Yani, radyasyon yokluğunda ($x_4 = 0$) yukarıdaki dinamik sistemin denge noktaları şunlardır:

$p1: (x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 2)$	$\Omega_m = 0$	$\omega_{\text{efektif}} = -1$
$p2: (x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 0)$	$\Omega_m = 2$	$\omega_{\text{efektif}} = 1/3$
$p3: (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$	$\Omega_m = 0$	$\omega_{\text{efektif}} = 1/3$
$p4: (x_1, x_2, x_3) = (-4, 5, 0)$	$\Omega_m = 0$	$\omega_{\text{efektif}} = 1/3$
$p5: (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3m}{1+m}, -\frac{1+4m}{2(1+m)^2}, \frac{1+4m}{2(1+m)}\right)$	$\Omega_m = 1 - \frac{m(7+10m)}{2(1+m)^2}$	$\omega_{\text{efektif}} = -\frac{m}{1+m}$
$p6: (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2(1-m)}{1+2m}, \frac{1-4m}{m(1+2m)}, -\frac{(1-4m)(1+m)}{m(1+2m)}\right)$	$\Omega_m = 0$	$\omega_{\text{efektif}} = \frac{2-5m-6m^2}{3m(1+2m)}$

- Maddenin baskın olduğu dönem ($\Omega_m \cong 1$ ve $\omega_{\text{efektif}} < 0$) 0'a yakın m için sadece p5 noktası ile gerçekleştirilebilir.

- p1 veya p6 noktası, geç-zamanlı kozmik hızlanmadan sorumlu olabilir. Birincisi, $R = -2$ olan de Sitter noktasıdır ($\omega_{\text{efektif}} = -1$).

- p6 noktası, $m > (\sqrt{3} - 1)/2$, $-1/2 < m < 0$ veya $m < -(1 + \sqrt{3})/2$ olması koşuluyla hızlanan genişlemeye ($\omega_{\text{efektif}} < -1/3$) neden olabilir.

4.4 HOMOJEN, ANİZOTROPİK BİANCHİ-I KOZMOLOJİSİNİN PALATİNİ FORMALİZMİNDE $f(R)$ GRAVİTASYONDAKİ DİNAMİKLERİ

4.4.1 Palatini Formalizminde $f(R)$ Teori

$f(R)$ gravitasyon teorisinin aksiyonunu aşağıdaki gibi ele alalım.

$$A = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} f(R) + L_m + L_r \right] \quad (4.103)$$

Burada $f(R)$, Ricci skalerinin bir fonksiyonudur, L_m ve L_r sırasıyla maddenin Lagrangian'ını ve radyasyonu temsil eder, g metrik tensör g_{ab} 'nün belirleyicisidir, $\kappa = 8\pi G$ kuplaj sabiti ve G gravitasyon sabitidir. Burada, metrik ve afin bağ ifadesini iki bağımsız değişken olarak alan, aksiyonun Palatini varyasyonunu ele alıyoruz.

(4.104) aksiyonunu g_{ab} metriğine göre değiştirerek alan denklemi şu şekilde elde edilir:

$$f'(R)g_{ab} - \frac{1}{2}f(R)g_{ab} = \kappa T_{ab} \quad (4.104)$$

Enerji momentum tensörü T_{ab} ,

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(L_m + L_r)}{\delta g_{ab}} \quad (4.105)$$

şekinde ifade edilir. Γ_{ab} bağlantısına göre (4.103) aksiyonundan alan denklemini

$$\nabla(\sqrt{-g}f'(R)g^{ab}) = 0 \quad (4.106)$$

olarak elde ederiz.

4.4.2 Bianchi-I Metrikte $f(R)$ Gravitasyon

Yerel dönme simetrisi (LRS) Bianchi I metriğinin homojen ve anizotropik olan yay elemanı:

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(t)dr^2 + B^2(t)[d\theta^2 + \theta^2 d\varphi^2] \quad (4.107)$$

$A(t)$ ve $B(t)$ ölçek çarpanlarıdır. $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ genel koordinatlardır ve t kozmolojik zamandır. Bu metrik için genelleştirilmiş Friedmann denklemi

$$\frac{2}{3}f' \left[\theta + \frac{3}{2} \frac{\dot{f}'}{f'} \right]^2 - 2f' \sigma^2 - f = \kappa(\rho_m + \rho_r) \quad (4.108)$$

ve

$$\theta = 3H = \frac{\dot{A}}{A} + 2 \frac{\dot{B}}{B}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{3} \left[\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right]^2 \quad (4.109)$$

Burada, θ ve σ sırasıyla hacimsel genişleme skaleri ve shear (kayma) skaleridir. Hubble parametresi H , $H = \frac{\dot{a}}{a}$ olarak tanımlanır, a ölçek faktörüdür ve nokta, zamana göre türevi temsil eder. ρ_m ve ρ_r , sırasıyla madde ve radyasyonun enerji yoğunluklarıdır ve korunum denklemlerini sağlar.

$$\dot{\rho}_m + \theta \rho_m = 0, \quad \dot{\rho}_r + \frac{4}{3} \theta \rho_r = 0. \quad (4.110)$$

Yerel dönme simetrisi (LRS) için, $f(R)$ gravitasyonda izsiz Gauss-Codazzi denklemi şu şekilde ifade edilir:

$$\dot{\sigma} = - \left[\theta + \frac{f'' \dot{R}}{f'} \right] \sigma. \quad (4.111)$$

Denklem (4.104)'ün izini alarak ve radyasyon (ışınım) akışkanının izinin sıfır olduğunu düşünerek şunu elde ederiz:

$$f' R - 2f = -\kappa \rho_m. \quad (4.112)$$

Denklem (4.108) ve (4.112)'yi kullanarak

$$\dot{R} = \kappa \frac{\theta \rho_m}{f'' R - f'} = -\theta \frac{f' R - 2f}{f'' R - f'} \quad (4.113)$$

ifadesine ulaşırız. Denklem (4.108) ve (4.113) kullanılarak

$$\theta^2 = \frac{6\kappa(\rho_m + \rho_r) + 3(f' R - f) - 6f' \sigma^2}{2f' \xi} \quad (4.114)$$

olduğu görülür. Burada,

$$\xi = \left[1 - \frac{3}{2} \frac{f''(f' R - 2f)}{f'(f'' R - 2f')} \right]^2. \quad (4.115)$$

olarak ele aldık.

4.4.3 Dinamik Sistem Yaklaşımı

Aşağıdaki boyutsuz değişkenler,

$$x = \frac{3(f'R-f)}{2f'\xi\theta^2}, \quad \Sigma = \frac{3\sigma^2}{\xi\theta^2}, \quad \Omega_r = \frac{3\kappa\rho_r}{f'\xi\theta^2}, \quad \Omega_m = \frac{3\kappa\rho_m}{f'\xi\theta^2}. \quad (4.116)$$

ve bağ denklemleri şu şekilde yazılabilir:

$$1 = x + \Sigma + \Omega_r + \Omega_m. \quad (4.117)$$

(4.114) denkleminin türevini alıp, (4.108) ve (4.115) denklemlerini kullanarak

$$2\frac{\dot{\theta}}{\theta^2} = 3H = -1 + x - \frac{1}{3}\Omega_r - \Sigma - \frac{f''\dot{R}}{f'\theta}\Sigma - \frac{f''\dot{R}}{f'\theta} - \frac{\dot{\xi}}{\xi\theta} + \frac{3f''R\dot{R}}{2f'\xi\theta^3} \quad (4.118)$$

ifadesini elde ederiz. Denklem (4.116) 'deki değişkenler (4.117) ve (4.118) denklemleri ile birlikte kullanılarak, evrim denklemleri şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{dx}{dN} = x[3 - 3x + 3\Sigma + 3C(R)(1 - x) + 3D(R)\Sigma], \quad (4.119)$$

$$\frac{d\Sigma}{dN} = \Sigma[-3 - 3x + 3\Sigma - 3C(R) + 3D(R)(\Sigma - 1)], \quad (4.120)$$

$$\frac{d\Omega_r}{dN} = \Omega_r[-1 - 3x + 3\Sigma - 3C(R) + 3D(R)\Sigma] \quad (4.121)$$

Burada $N \equiv \ln a$ 'dır ve $C(R)$, $D(R)$ değişkenleri şu şekilde yazılabilir:

$$C(R) = \frac{R\dot{f}'}{\theta(f'R-f)}, \quad D(R) = \frac{f''\dot{R}}{\theta f'}. \quad (4.122)$$

Efektif durum denklemleri ω_{efektif} ve yavaşlama parametresi q , hacim genişleme skaleri θ ile ilişkilidir.

$$\omega_{\text{efektif}} = -x + \Sigma + \frac{1}{3}\Omega_r - \frac{f''\dot{R}}{f'\theta}\Sigma - \frac{f''\dot{R}}{f'\theta} + \frac{\dot{\xi}}{\xi\theta} + \frac{3f''R\dot{R}}{2f'\xi\theta^3} \quad (4.123)$$

$$q = -1 + \frac{3}{2} \left[-1 + x - \frac{1}{3}\Omega_r - \Sigma - \frac{f''\dot{R}}{f'\theta}\Sigma - \frac{f''\dot{R}}{f'\theta} - \frac{\dot{\xi}}{\xi\theta} + \frac{3f''R\dot{R}}{2f'\xi\theta^3} \right] \quad (4.124)$$

(4.123) ve (4.124) denklemlerini kullanarak, herhangi sabit bir noktada f ve q 'yu bulabiliriz.

4.4.4 $f(R) = R - \beta/R^n$ için Kozmolojik Dinamikler

Bu durumda $C(R)$, $D(R)$ ve R şu şekilde ifade edilebilir:

$$C(R) = n \frac{R^{(1+n)} - (n+2)\beta}{R^{(1+n)} + n(n+2)\beta}, \quad (4.125)$$

$$D(R) = - \frac{[R^{(1+n)} - (n+2)\beta][n(n+2)\beta]}{[R^{(1+n)} + n(n+2)\beta][R^{(1+n)} + n\beta]}, \quad (4.126)$$

$$R^{(1+n)} = \beta \frac{3x + n(x - \Sigma - \Omega_r + 1) - \Sigma - \Omega_r + 1}{2x}. \quad (4.127)$$

Bir sistemin denge noktaları, (4.119) ve (4.121) denklemleri sıfıra eşitlenerek belirlenir. Bu tür $f(R)$ sistemi için denge noktaları şu şekilde elde edildi [1]:

Noktalar	Ω_m	EOS ($\omega_{efektif}$)	Yavaşlama Parametresi (q)	Ölçek Çarpanı (a)	Kayma (σ)	Özdeğerler [$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$]
P_{r1}	0	$\frac{1}{3}$	1	$a_0 t ^{\frac{1}{2}}$	0	$[4 + 3n, 1, -2]$
P_{r2}	0	$-\frac{2}{3} - \frac{1}{n}$	$-\frac{1}{2} - \frac{3}{2n}$	$a_0 t ^{\frac{2n}{n-3}}$	0	$[1, 1, (1 + \frac{3}{n})]$
P_m	1	0	$\frac{1}{2}$	$a_0 t ^{\frac{2}{3}}$	0	$[3(1 + n), -1, -3]$
P_d	0	-1	-1	$a_0 e^{\frac{1}{3}\theta_0 t}$	0	$[-3, -4, -6]$
P_{s1}	0	1	2	$a_0 t ^{\frac{1}{3}}$	$\sigma_0 a_0^{-3} t ^{\frac{2}{3}}$	$[3(2 + n), 3, 2]$

P_{s2}	0	$-1 - \frac{2}{n}$	$-1 - \frac{3}{n}$	$a_0 t ^{-\frac{n}{3}}$	$\sigma_0 a_0^{\frac{3}{n}} t ^{\frac{2}{3}}$	$\left[-\frac{3}{n}, \frac{3}{n}, \left(-1 - \frac{3}{n}\right)\right]$
----------	---	--------------------	--------------------	--------------------------	--	---

Tablo 4: $f(R) = R - \beta/R^n$ 'nin Denge Noktaları ile İlişkili Durum Denklemleri, Yavaşlama Parametresi, Ölçek Çarpanı, Kayma ve Özdeğerler İçin Denge Noktaları ve Çözümler.

Aralık	P_{r1}	P_{r2}	P_m	P_d	P_{s1}	P_{s2}
$n < -3$	2 boyutlu kararlı manifold için eyer noktası	kararsız	kararlı	—	2 boyutlu kararsız manifold için eyer noktası	
$n = -3$	2 boyutlu kararlı manifold için eyer noktası	Non-hiperbolik 2boyutlu kararsız manifold	kararlı	—	2 boyutlu kararsız manifold için eyer noktası	
$-3 < n < -2$	2 boyutlu kararlı manifold için eyer noktası	2 boyutlu kararsız manifold için eyer noktası	kararlı	—	2 boyutlu kararsız manifold için eyer noktası	Kararsız
$n = -2$	2 boyutlu kararlı manifold için eyer noktası	2 boyutlu kararsız manifold için eyer noktası	kararlı	—	Non-hiperbolik 2boyutlu kararsız manifold	Kararsız
$-2 < n < -\frac{4}{3}$	2 boyutlu kararlı manifold için eyer noktası	2 boyutlu kararsız manifold için eyer noktası	kararlı	Kararlı	kararsız	Kararsız
$n = -\frac{4}{3}$	Non-hiperbolik eyer noktası	2 boyutlu kararsız manifold için eyer noktası	kararlı	Kararlı	kararsız	Kararsız

$-\frac{4}{3} < n < -1$	2 boyutlu kararsız manifold için eyer noktası	2 boyutlu kararsız manifold için eyer noktası	kararlı	Kararlı	kararsız	Kararsız
$-1 < n < 0$	2 boyutlu kararsız manifold için eyer noktası	2 boyutlu kararsız manifold için eyer noktası	2 boyutlu kararsız manifold için eyer noktası	Kararlı	kararsız	Kararsız
$n > 0$	Kararsız manifold için eyer noktası	kararsız	2 boyutlu kararlı manifold için eyer noktası	Kararlı	kararsız	Kararlı

Tablo 5: $f(R) = R - \beta/R^n$ için n Durumuna Göre Kararlılıkları

1. $P_r: (x, \Sigma, \Omega_r) = (0,0,1)$

Bu durumda denklem (4.127)'nin payı ve paydası sıfır olma eğilimindedir. Bu nedenle analizi aşağıdaki bölümlere ayırıyoruz:

A. $P_{r1}: \beta/R^n \ll 1$

B. $P_{r2}: \beta/R^n \gg 1$

2. $P_m: (x, \Sigma, \Omega_r) = (0,0,0)$

3. $P_m: (x, \Sigma, \Omega_r) = (1,0,0)$

4. $P_m: (x, \Sigma, \Omega_r) = (0,1,0)$

Analizi tekrar aşağıdaki bölümlere ayırıyoruz:

A. $P_{s1}: \beta/R^n \ll 1$

B. $P_{s2}: \beta/R^n \gg 1$

Bu denge noktalarının bir özeti ve bunlarla ilgili çözümler Tablo 4'de listelenmiştir. Denge noktalarının kararlılığını bulmak için (4.119)-(4.121) denklem sistemini lineerleştirmek zorundayız.

Bu tezde, homojen ve anizotropik Bianchi I metriği durumunda Palatini formalizminde Dinamik Sistem Analizi kullanarak, $f(R) = R - \beta/R^n$ tipi teorilere dayanan kozmolojik modellerin dinamiklerini araştırdık. Bu model için kesin çözümleri bularak, davranışlarını ve kararlılığını n parametresinin değerleri açısından inceledik. De Sitter genişlemesiyle ilişkili izotropik denge noktası P_d 'nin, evrenin hızlanan genişlemesine karşılık gelen $n > 2$ için kararlı olduğunu bulduk. Radyasyonun hakim olduğu dönemi tanımlayan P_{r1} , $n < -4/3$ için kararlı, P_{r2} , n 'nin tüm değerleri için kararsız bulunurken, maddenin hakim olduğu dönemi tanımlayan P_m noktası da $n > -1$ için kararlı olarak bulunmuştur. Anizotropik denge noktası P_{s1} , herhangi bir n değeri için kararsızdır ve başka bir anizotropik denge noktası P_{s2} , $n < 0$ için kararsızdır ve kayma bu iki anizotropik denge noktasına karşılık gelen zamanla ters yönde gelişir.

4.5 VAKUM $f(R)$ GRAVİTASYONDA OTONOM DİNAMİK SİSTEM

Bu bölümde vakum $f(R)$ gravitasyonun genel yapısını sunacağız ve bunu otonom bir sistem haline getirebilecek durumları tartışacağız. Vakum $f(R)$ gravitasyon aksiyonu

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) \quad (4.128)$$

burada $\kappa^2 = 8\pi G = \frac{1}{M_p^2}$ ve ayrıca M_p , Planck kütle ölçeğidir. Metrik formalizmi bağlamında hareket denklemleri, gravitasyon aksiyonunun (4.128) metrik tensör g_{ab} 'ye göre değiştirilmesiyle elde edilir.

$$F(R)R_{ab}(g) - \frac{1}{2}f(R)g_{ab} - \nabla_a \nabla_b f(R) + g_{ab} \square F(R) = 0 \quad (4.129)$$

Ricci skalerinin birinci dereceden türevini içeren ifade aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \frac{\kappa^2}{F(R)} \left(T_{ab} + \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{f(R) - Rf(R)}{2} g_{ab} + \nabla_a \nabla_b F(R) - g_{ab} \square F(R) \right) \right) \quad (4.130)$$

FRW metriği için, kozmolojik hareket denklemleri

$$0 = -\frac{f(R)}{2} + 3(H^2 + \dot{H})F(R) - 18(4H^2\dot{H} + H\ddot{H})F'(R) \quad (4.131)$$

$$0 = \frac{f(R)}{2} - (3H^2 + \dot{H})F(R) + 6(8H^2\dot{H} + 4\dot{H}^2 + 6H\ddot{H} + \ddot{H})F'(R)$$

$$+36(4H\dot{H} + \ddot{H})^2 F'(R) \quad (4.132)$$

halini alır. Burada $F(R) = \frac{\partial f}{\partial R}$, $F'(R) = \frac{\partial F}{\partial R}$ ve $F''(R) = \frac{\partial^2 F}{\partial R^2}$. Hareket denklemleri (4.131) ile tanımlanan kozmolojik dinamik sistemin otonom yapısını ortaya çıkarmak için boyutsuz değişkenleri aşağıdaki gibi tanımladık:

$$x_1 = -\frac{\dot{F}(R)}{F(R)H}, \quad x_2 = -\frac{f(R)}{6F(R)H^2}, \quad x_3 = \frac{R}{6H^2} \quad (4.133)$$

Aşağıda kozmik zaman yerine logaritmik zaman N 'yi kullanacağız, dolayısıyla logaritmik zamana göre türev aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{d}{dN} = \frac{1}{H} \frac{d}{dt} \quad (4.134)$$

Böylece, (4.133)'teki değişkenleri ve (4.131) hareket denklemlerini kullanarak, aşağıdaki dinamik sistemi elde ederiz.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dN} &= -4 - 3x_1 + 2x_3 - x_1x_3 + x_1^2, \\ \frac{dx_2}{dN} &= 8 + m - 4x_3 + x_2x_1 - 2x_2x_3 + 4x_2, \\ \frac{dx_3}{dN} &= -8 - m + 8x_3 - 2x_3^2, \end{aligned} \quad (4.135)$$

Burada m parametresi

$$m = \frac{\ddot{H}}{H^3}. \quad (4.136)$$

Dinamik sisteme (4.135) bakıldığında, N bağımlılığının (veya zamana bağımlılığın) sadece m parametresinde yer aldığı görülür. Ayrıca m 'yi de N 'nin bir fonksiyonu olarak ifade etmedik çünkü bu parametrenin sabit değerler alacağını varsayacağız. Dolayısıyla, m parametresi bir sabit ise, dinamik sistem, içinde açık bir zaman bağımlılığı bulunmadığından otonom hale gelir.

Genel bir $f(R)$ gravitasyon teorisi için efektif durum denklemi (EoS) şu şekildedir:

$$\omega_{efektif} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} \quad (4.137)$$

ve x_3 değişkeni cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\omega_{efektif} = -\frac{1}{3}(2x_3 - 1) \quad (4.138)$$

4.5.1 Vakum $f(R)$ Gravitasyon Faz Uzayında Çalışma

Non lineer dinamik sistemde (4.135) görünen m parametresi, dinamik sistemdeki zamana bağımlılığın tek kaynağı olduğu için önemli bir rol oynamaktadır. Şimdi belirli kozmolojik evrimler için bu parametrenin sabit olduğunu belirtelim. Örneğin, de Sitter benzeri evrimde ölçek faktörü

$$a(t) = e^{H_0 t - H_i t^2} \quad (4.139)$$

olur. Burada m sıfıra eşittir. De Sitter evriminde de durum aynıdır. Ancak bu bölümde, genel olarak $m \cong 0$ ve $m = -\frac{9}{2}$ durumlarını inceleyeceğiz. Göreceğimiz gibi, bu iki durum özel fiziksel öneme sahiptir. $m \cong 0$ durumunda $\frac{\ddot{H}}{H^3} = 0$ diferansiyel denklemini çözersek şu çözümü verir,

$$H(t) = H_0 - H_i t \quad (4.140)$$

Bu, evrim için yaklaşık çözümün de Sitter benzeri evrim olduğu kozmolojilere odaklandığımız anlamına gelir. Bu, Hubble oranının kesinlikle de Sitter benzeri evrimi olduğu anlamına gelmez, ancak evrimi yönlendiren $f(R)$ gravitasyon, yaklaşık olarak de Sitter benzeri evrime yol açar. İlginçtir ki, de Sitter benzeri evrim (4.140) için aşağıdaki koşullar geçerlidir:

$$H\dot{H} \gg \ddot{H} \quad , \quad \dot{H} \ll H^2 \quad (4.141)$$

Dolayısıyla $m \cong 0$ durumu, enflasyonist dönemdeki “slow roll (yavaş dönme)” koşuluyla ilgilidir. $m \cong 0$ ve $m = -\frac{9}{2}$ durumlarının ayrıntılarını tartışmadan önce, denge noktalarının sınıflandırılmasına yönelik klasik yaklaşımı kısaca sunalım. Klasik yaklaşıma göre, denge noktası hiperbolik ise lineerleştirme prosedürü uygulanır. Ayrıca dinamik sistemler için kararlılık teorisinin bazı temel özelliklerinden kısaca bahsedelim.

Dinamik sistemlerin kararlılık teorisi ile temel olarak çözümlerin ve dinamik sistemlerin yörüngelerinin kararlılığı ortaya çıkar. Çözümlerin ve yörüngelerin kararlılığı, eğer başlangıç

koşullarında küçük bozulmalar yapılırsa, bu durumdaki davranışı ele alır. Ayrıca, dinamik bir sistemin çözümlerinin ve yörüngelerinin asimptotik davranışının, uzun bir süre sonra asimptotik anlamı olan sağlam bir kavrayışına sahip olmak önemlidir. Bu uzun sürenin süresi ve tespiti genellikle teorideki fiziksel ölçekler tarafından belirlenir. Bu tezin amaçları doğrultusunda, biz enflasyonist dinamiklerle ilgilendiğimiz için, asimptotik davranış yaklaşık olarak $N \approx 60$ logaritmik zamana karşılık gelir. Çözümlerin ve yörüngelerin en basit ve en değerli davranışı, eldeki dinamik sistemin denge noktaları ve ayrıca periyodik yörüngeler tarafından sergilenir. Her durumda, yörüngeler veya çözümler denge noktasının civarında nasıl davranır? Bunlar denge noktasına mı yaklaşıyor? Veya alternatif olarak, yörüngeler denge noktası tarafından mı çekiliyor, yoksa bunlar ondan itiliyor mu? Ayrıca, alternatif başlangıç koşulları kullanarak yörüngeyi bozarsak, bu bozulmalar yörüngelerin denge noktalarına yakın davranışını nasıl etkiler? Yörünge her zaman bir denge noktası tarafından çekiliyorsa, bu denge noktasına yörüngelerin çekicisi denir. Ayrıca, bozuk yörüngeler belirli bir yörüngeye asimptotik olarak eğilimliyse, bu yörüngeye kararlı yörünge denir. Denge noktaları, dinamik sistemin yapısal kararlılığının karakteristik bir resmini sağlar. Denge noktasının kararlılığı, bu noktaya yakın yörüngelerin davranışını ifade eder. Yörüngeler ona çekilirse buna kararlı (çekici) denir ve bunlar ona asimptotik olarak çekilirse buna asimptotik olarak kararlı (asimptotik çekici) denir. Yörüngelerin ondan itilmesi durumunda, denge noktası kararsız bir denge noktasıdır. Bir denge noktasının kararlılığını ortaya çıkarmanın nicel bir yolu, otonom lineer olmayan dinamik sistemi lineerleştirerek Hartman-Grobman teoremini uygulamaktır. Lineerleştirme matrisinin öz değerleri negatif reel sayılar, hatta negatif reel kısımlı karmaşık sayılar ise, o zaman denge noktası kararlıdır (çekici). Özdeğerlerin hiçbirisi tamamen sanal değilse veya sıfıra eşitse, denge noktası bir çekici veya itici olabilir ve bu, kararlı ve kararsız manifoldların davranışına tabidir. Unutulmaması gereken önemli nokta, Hartman-Grobman teoreminin yalnızca hiperbolik denge noktaları üzerinde geçerli olduğudur. Bu da, yalnızca lineerleştirme matrisinin özdeğerlerinin sıfırdan farklı reel parçalara sahip olması durumunda Hartman-Grobman teoreminin uygulanabileceği anlamına gelir.

Bilindiği gibi, Hartman-Grobman lineerleştirme teoremi, hiperbolik denge noktaları dikkate alındığında, faz uzayının kararlılığını ve yapısını belirler. Aşağıdaki akışın çözümü $\phi(t) \in R^n$ olsun:

$$\frac{d\phi}{dt} = g(\phi(t)) \quad (4.142)$$

$g(\emptyset(t))$ yerel olarak $g: R^n \rightarrow R^n$ ile tanımlıdır. Dinamik sistemin (4.142) tüm denge noktalarını ϕ_* ile gösterelim ve Jacobian matrisine karşılık gelen $J(g)$ 'yi şu denklem ile ifade edelim

$$J = \sum_i \sum_j \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \quad (4.143)$$

Jacobian denge noktalarında hesaplanmalı ve e_i özdeğerleri $Re(e_i) \neq 0$ 'ı sağlamalıdır. $\sigma(A)$, A 'nın özdeğerlerinin spektrumunu gösterebilir, böylece hiperbolik sabit bir nokta $Re(\sigma(J)) \neq 0$ 'ı sağlar. Hartman teoremi, $\mathcal{F}(\phi_*)$ durumunda U 'nun ϕ_* 'nin açık bir komşusu olduğu bir $\mathcal{F}: U \rightarrow R^n$ homeomorfizminin varlığını sağlar. Homeomorfizm,

$$\frac{dh(u)}{dt} = Jh(u) \quad (4.144)$$

şeklinde bir akış üretir ve bu akış, denklem (4.142)'ye topolojik olarak eşlenik bir akıştır. Hartman Teoremi'nin doğrudan bir anlamı, denklem (4.142)'nin dinamik sisteminin aşağıdaki gibi yazılabileceğidir.

$$\frac{d\phi}{dt} = J(g)(\phi)|_{\phi=\phi_*}(\phi - \phi_*) + \mathcal{S}(\phi_*, t) \quad (4.145)$$

Burada $\mathcal{S}(\phi, t)$, $[0, \infty) \times R^n$ durumu için uygun bir ifadedir. Eğer Jacobian $J(g)$, $\mathcal{R}(\sigma(J(g))) < 0$ 'ı sağlıyorsa ve aynı zamanda

$$\lim_{\phi \rightarrow \phi_*} \frac{|\mathcal{S}(\phi, t)|}{|\phi - \phi_*|} \rightarrow 0 \quad (4.146)$$

ise dinamik akış $\frac{d\phi}{dt} = J(g)(\phi)|_{\phi=\phi_*}(\phi - \phi_*)$ 'ye karşılık gelen denge noktası ϕ_* , denklem (4.145)'deki akışın bir denge noktasıdır ve asimptotik olarak kararlıdır.

4.5.1a De Sitter Enflasyonist Çekiciler ve Onların Kararlılıkları

De Sitter benzeri evrimi tanımlayan $m \simeq 0$ durumuyla başlıyoruz; ancak Hubble oranını belirtmeden $m \simeq 0$ için sistemin (4.135) dinamiklerini analiz edeceğiz.

(4.135) denklemindeki dinamik sistem durumunda, $J = \sum_i \sum_j \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$ matrisi şuna eşittir:

$$J = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 + 3 & 0 & 2 - x_1 \\ x_2 & x_1 - 2x_3 + 4 & -2x_2 - 4 \\ 0 & 0 & 8 - 4x_3 \end{pmatrix} \quad (4.147)$$

Burada f_i fonksiyonu

$$f_1 = -4 - 3x_1 + 2x_3 - x_1x_3 + x_1^2$$

$$f_2 = 8 - 4x_3 + x_2x_1 - 2x_2x_3 + 4x_2$$

$$f_3 = 8x_3 - 2x_3^2 - 8 \quad (4.148)$$

şeklindedir. Genel m için dinamik sistemin (4.135) denge noktaları aşağıdaki gibidir:

$$\phi_*^1 = \left(\frac{1}{4} \left(-\sqrt{-2m} - \sqrt{-2m + 20\sqrt{2}\sqrt{-m} + 4} - 2 \right), \frac{1}{4} \left(3\sqrt{2}\sqrt{-m} + \sqrt{-2m + 20\sqrt{-2m} + 4} - 2 \right), \frac{1}{2} (4 - \sqrt{-2m}) \right)$$

$$\phi_*^2 = \left(\frac{1}{4} \left(-\sqrt{-2m} + \sqrt{-2m + 20\sqrt{-2m} + 4} - 2 \right), \frac{1}{4} \left(3\sqrt{-2m} - \sqrt{-2m + 20\sqrt{-2m} + 4} - 2 \right), \frac{1}{2} (4 - \sqrt{-2m}) \right)$$

$$\phi_*^3 = \left(\frac{1}{4} \left(\sqrt{-2m} - \sqrt{-2m - 20\sqrt{-2m} + 4} - 2 \right), \frac{1}{4} \left(-3\sqrt{-2m} + \sqrt{-2m - 20\sqrt{-2m} + 4} - 2 \right), \frac{1}{2} (\sqrt{-2m} + 4) \right)$$

$$\phi_*^4 = \left(\frac{1}{4} \left(\sqrt{-2m} + \sqrt{-2m - 20\sqrt{-2m} + 4} - 2 \right), \frac{1}{4} \left(-\sqrt{2}\sqrt{-m} - 10\sqrt{-2m} + 2 - 3\sqrt{-2m} - 2 \right), \frac{1}{2} (\sqrt{2}\sqrt{-m} + 4) \right) \quad (4.149)$$

$m \cong 0$ durumunda, denge noktaları:

$$\phi_*^1 = (-1, 0, 2), \quad \phi_*^2 = (0, -1, 2) \quad (4.150)$$

Denge noktası ϕ_*^1 için özdeğerler $(-1, -1, 0)$ iken, denge noktası ϕ_*^2 için bunlar $(1, 0, 0)$ 'dır. Dolayısıyla her iki denge de nonhiperboliktir. Ancak gösterdiğimiz gibi denge noktası ϕ_*^1 kararlıdır ve ϕ_*^2 kararsızdır.

Her iki dengede de (4.150) $x_3 = 2$ olduğunu gözlenir. Denklem (4.138)'de $x_3 = 2$ 'yi yerine koyarak, $\omega_{efektif} = -1$ elde ederiz, böylece efektif bir şekilde iki de Sitter dengesine sahip oluruz.

Dinamik sistemin (4.135) üçüncü denklemini ayrıştırılır ve çözümü şöyledir:

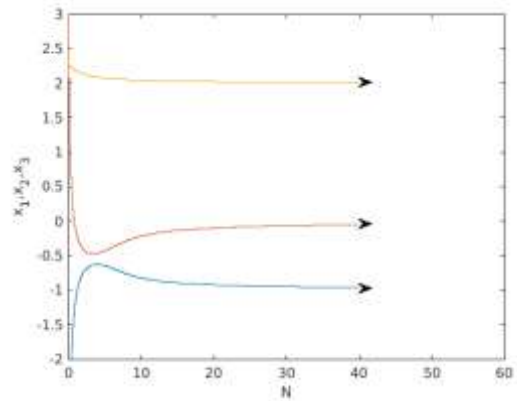
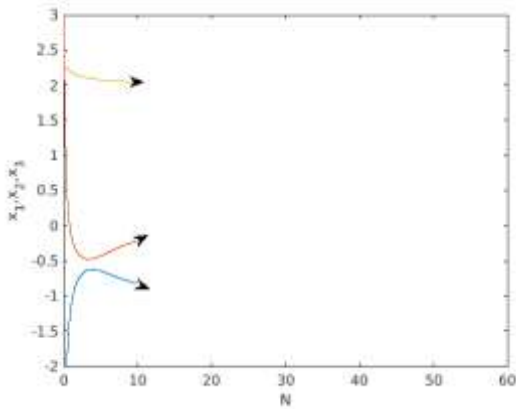
$$x_3(N) = \frac{4N-2w+1}{2N-w} \quad (4.151)$$

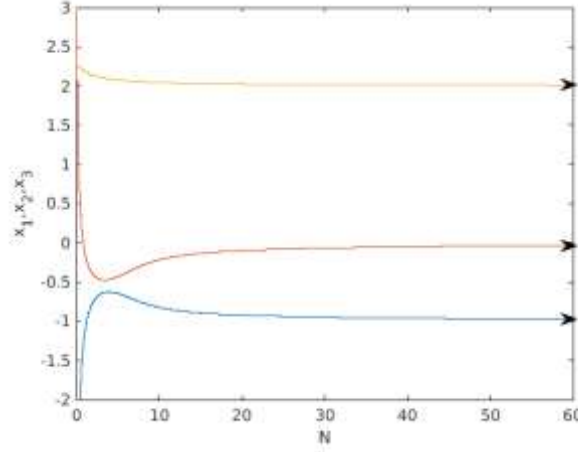
Burada w başlangıç koşulları tarafından sabitlenebilen bir integrasyon sabitidir. Çözümün (4.151) asimptotik davranışı, tam olarak daha önce belirttiğimiz (N için $x_3 \rightarrow 2$) davranıştır. Ayrıca, (4.151) çözümünü kullanarak ve onu dinamik sistemin (4.135) ilk iki birleştirilmiş diferansiyel denkleminde yerine koyarak, $x_1(N)$ ve $x_2(N)$ çözümlerinin analitik formunu elde edebiliriz.

$$x_2(N) = c_1 - \frac{(-c_1-2)c_2 U\left(1-\frac{-c_1-2}{c_1}, 2, Nc_1-\frac{wc_1}{2}\right) - c_1 L_{\frac{c_1-2}{c_1}-1}^1\left(c_1 N-\frac{c_1 w}{2}\right)}{c_2 U\left(-\frac{-c_1-2}{c_1}, 1, Nc_1-\frac{wc_1}{2}\right) + L_{\frac{-c_1-2}{c_1}}\left(c_1 N-\frac{c_1 w}{2}\right)}$$

$$x_1(N) = -\frac{(-c_1-2)c_2 U\left(1-\frac{-c_1-2}{c_1}, 2, Nc_1-\frac{wc_1}{2}\right) - c_1 L_{\frac{c_1-2}{c_1}-1}^1\left(c_1 N-\frac{c_1 w}{2}\right)}{c_2 U\left(-\frac{-c_1-2}{c_1}, 1, Nc_1-\frac{wc_1}{2}\right) + L_{\frac{-c_1-2}{c_1}}\left(c_1 N-\frac{c_1 w}{2}\right)} \quad (4.152)$$

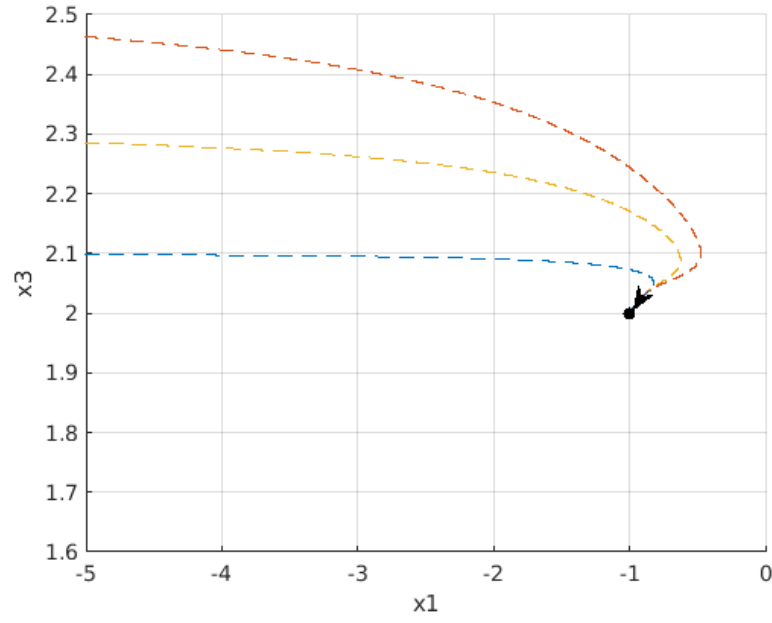
Burada c_1 ve c_2 integrasyon sabitleridir ve ayrıca $U(a, b, z)$ ve $L_n^a(x)$ sırasıyla birleşik hipergeometrik fonksiyon ve genelleştirilmiş Laguerre polinomudur. Başlangıç koşulları üzerinde doğrudan bir komuta sahip olmak için doğrudan sayısal analize geçeceğiz. İntegrasyon sabitleri uygun şekilde seçilirse sayısal ve analitik sonuçların çakışabileceği gösterilebilir.



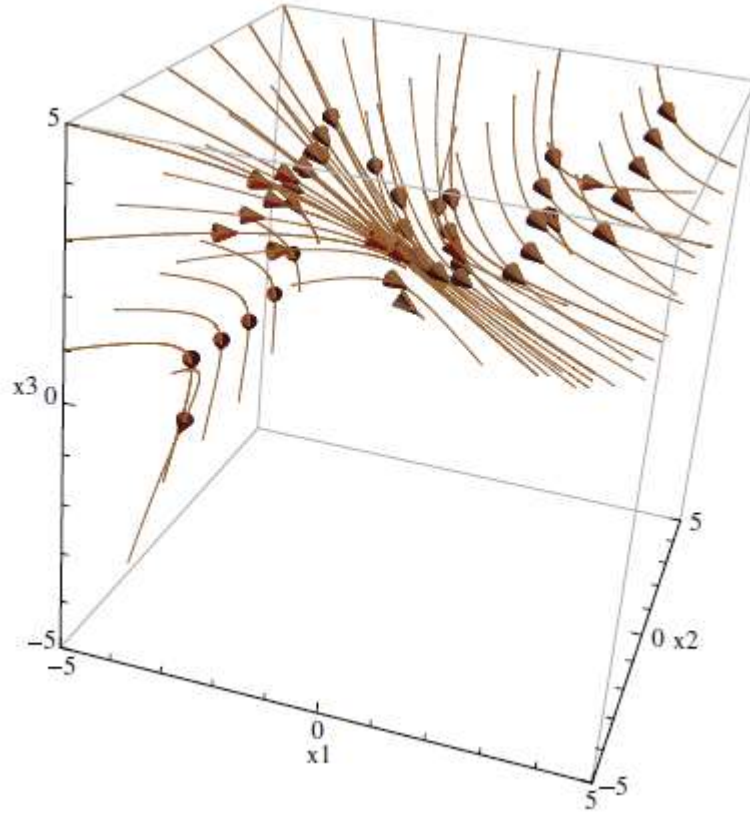


Şekil 1: Dinamik sistem ve $m \cong 0$ için $x_1(0) = -8$, $x_2(0) = -5$ ve $x_3(0) = 2.6$ başlangıç koşulları ile $x_1(N)$, $x_2(N)$ ve $x_3(N)$ nümerik çözümleri

Şimdi kozmolojik sistemin dinamiklerini analiz edelim ve dinamik sistemi (4.135) çeşitli başlangıç koşulları ve $N = (0,60)$ aralığına ait logaritmik zaman ile sayısal olarak çözelim. Şekil 1'de, $x_1(0) = -8$, $x_2(0) = 5$ ve $x_3(0) = 2,6$ başlangıç koşullarında dinamik sistem (4.135) için sayısal çözümler sunuyoruz. Şekil 1'in sol üst grafiği için, logaritmik zaman $N = (0,10)$ aralığında seçilir ve görüldüğü gibi, $\phi_*^1 = (x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 2)$ dengesine henüz ulaşılmamıştır ve aynı durum Şekil 1'deki sağ üst grafik için de geçerlidir. $N = (0,40)$ aralığında durum biraz daha iyi olsa da Şekil 1'in üçüncü grafiğinde, logaritmik zaman $N = (0,60)$ aralığında seçilir, dolayısıyla $N \sim 60$ ile denge ϕ_*^1 'e ulaşılır. Aynısı, çeşitli başlangıç koşulları için $x_1 - x_3$ 'ü çizdiğimiz Şekil 2'de de görülebilir. Şekil 1 ve 2'den, ϕ_*^1 denge noktasının kararlı bir de Sitter çekicisi olduğu zaten görülmektedir. Daha fazla sayısal analiz kullanarak gösterdiğimiz gibi, aslında bu de Sitter dengesi, faz uzayının son çekicisidir. Şekil 3'de, üç boyutlu akışı çiziyoruz ve çeşitli başlangıç koşulları için ϕ_*^1 'in global çekici davranışı görülüyor. Ayrıca ϕ_*^1 çekicisinin kararlılığı, $x_3 = 2$ için indirgenmiş dinamik sistemde görülebilir. Aslında, x_3 denklemi, (4.135)'deki denklemlerin geri kalanından ayrıldığı için doğrudan çözülebilir. $x_3 = 2$ için indirgenmiş sistemin dinamikleri, çeşitli başlangıç koşulları için vektör alan akışını (solda) ve $x_1 - x_2$ düzlemindeki (sağda) yörüngeleri çizdiğimiz Şekil 4'te sunulmaktadır. De Sitter denge noktası ϕ_*^1 'in çekici davranışının, indirgenmiş sistemdeki bu akışlar tarafından daha da desteklendiği açıktır. Sonuç olarak, dinamik sistem (4.135) için $m \cong 0$ durumu, kararlı bir de Sitter çekicisi ve ayrıca kararsız bir de Sitter denge noktası ile sonuçlanır.



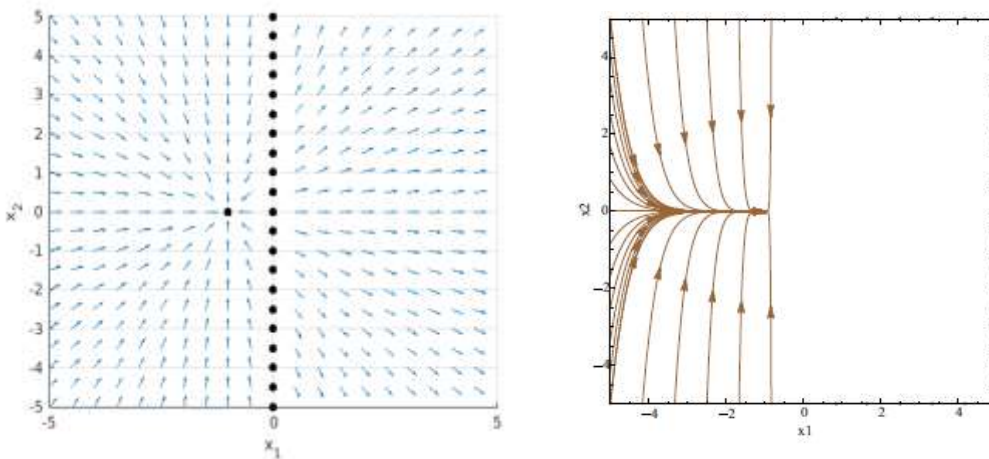
Şekil 2: Dinamik sistem için $x_1 - x_3$ düzleminde $N = (0,60)$ ve $m \cong 0$ için parametrik grafik



Şekil 3: Dinamik sistem ve $m \cong 0$ için üç bileşenli akış

Bu sonuç özellikle ilginçtir, çünkü $m \cong 0$ 'ı karşılayan Hubble oranına sahip genel bir $f(R)$ gravitasyon teorisinin, Şekil 1'de görülebileceği gibi $N \sim 50 - 60$ 'da ulaşılan asimptotik kararlı bir de Sitter çekicisi ile sonuçlandığını belirtir. Örneğin, ölçek faktörünün de Sitter benzeri, yani $a(t) \sim e^{H_0 t - H_1 t^2}$ olduğu varsayılırsa ve teorisinin enflasyonist bir yorumu düşünülürse, bu oldukça çekicidir. Sitter benzeri durumda çekici özelliği, $f(R)$ gravitasyonun faz uzayının sabit olan ve açıkça enflasyonist bir evrime sahip olmasıyla yorumlanabilecek bir asimptotik de Sitter çekicisine sahip olduğunu ortaya koymaktadır. Ancak, yalnızca bir de Sitter benzeri kozmolojisi $m \cong 0$ ile sonuçlanmaz; örneğin, simetrik sıçrama kozmolojisini düşünün. Bu durumda ölçek faktörü $\lambda > 0$ iken $a(t) = e^{\lambda t^2}$ 'dir. Simetrik sıçramada, m parametresi de sıfırdır, ancak bu durumda de Sitter çekicisinin fiziksel yorumu farklıdır. Çünkü bir son zaman de Sitter çekicisi olabilir. Bu, tutarsızlıklardan kaçınmak için farklı başlangıç koşulları ve belki de dinamik sistemin (4.135) kozmik zaman açısından yeniden parametrelendirilmesini gerektirir.

Ayrıca kararsız bir de Sitter denge noktası olduğunu, yani $\phi_*^2 = (0, -1, 2)$ olduğunu unutmayalım. Dolayısıyla, dinamik sistemi doğrudan kararsız de Sitter çekicisine yönlendirebilecek $f(R)$ gravitasyonunun olması mümkün olabilir. Bu, Şekil 3'ün üç boyutlu akışında görülebilir, çünkü kararlı de Sitter çekicisi ϕ_*^1 'den uzaklaşan yörüngeler vardır.



Şekil 4: Dinamik sistem ve $m \cong 0$ için vektör alan akışı (solda) ve $x_1 - x_2$ düzlemindeki yörüngeler (sağda)

4.5.1b De Sitter Çekicilerinin Yakınındaki $f(R)$ Gravitasyonlarının Yaklaşık Formu

Bu bölümde, önceki bölümde sunduğumuz dinamiklerin fiziksel etkilerini analiz edeceğiz. Gösterdiğimiz gibi, $m \cong 0$ olan m değeri için, biri kararlı $\phi_*^1 = (-1, 0, 2)$ ve biri kararsız $\phi_*^2 = (0, -1, 2)$ olan iki de Sitter denge noktası vardır. Şimdi $f(R)$ gravitasyonun davranışını denge noktalarına yakın ve $m \cong 0$ için inceleyeceğiz. Denklem (4.141)'de incelediğimiz gibi, $m \cong 0$ durumunun slow roll yaklaşımına eşdeğer olduğunu biliyoruz. Bu nedenle denge noktalarına yakın ve slow roll yaklaşımının geçerli olduğu $f(R)$ gravitasyonlarının davranışını araştırıyoruz. İlk denge noktası ile, yani $\phi_*^1 = (-1, 0, 2)$ ile başlayalım. Aşağıdaki diferansiyel denklemler, $x_1 \cong -1$ ve $x_2 \cong 0$ koşullarından kaynaklı olarak, denge noktasında aynı anda doğru olmalıdır:

$$-\frac{d^2 R}{df^2} \frac{\dot{R}}{H \frac{df}{dR}} \cong -1, \quad \frac{f}{H^2 \frac{df}{dR}} \cong 0 \quad (4.153)$$

$m \cong 0$ olduğundan soldaki diferansiyel denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$-24H_i \frac{d^2 R}{df^2} - \frac{df}{dR} = 0 \quad (4.154)$$

Bu kolayca çözülebilir ve şu ifadeyi verir:

$$f(R) \cong \Lambda_1 - 24\Lambda_2 e^{-\frac{R}{24H_i}} \quad (4.155)$$

$f(R)$ gravitasyon çözümü (4.155), denklem (4.140)'ın de Sitter benzeri evrimini oluşturan veya eşdeğeri olarak, $m \cong 0$ veren büyük eğrilik çağındaki $f(R)$ gravitasyonun yaklaşık biçiminden başka bir şey değildir. Büyük eğrilik dönemiyle ilgilendiğimiz için, üstel terim subdominanttır (alt baskındır), bu nedenle kozmolojik sabit Λ_1 kararlı de Sitter çekicisi $\phi_*^1 = (-1, 0, 2)$ 'e yol açar. (4.155) çözümünü kullanarak, denklem (4.153)'teki ikinci koşulun aşağıdaki gibi yazılabileceğini gösterelim:

$$\frac{H_i \Lambda_1 e^{\frac{H_0^2}{2H_i}}}{6H_0^2 \Lambda_2} \cong 0 \quad (4.156)$$

Yukarıdaki ifadenin doğru olması için $H_0^2 \gg 1$ ve $H_0^2 \Lambda_2 \gg H_i \Lambda_1 e^{\frac{H_0^2}{2H_i}}$ koşullarına sahip olunması gerekir. Bu durumda $f(R)$ gravitasyon

$$f(R) = R - 2\Lambda \left(1 - e^{-2\frac{R}{R_0}}\right) \quad (4.157)$$

şeklinde ifade edilir. Şimdi ikinci de Sitter denge noktasının durumunu yani $\phi_*^2 = (0, -1, 2)$ 'yi ele alalım ve $x_1 = 0$ ve $x_2 = -1$ koşullarında

$$-\frac{d^2 R}{df^2} \frac{\dot{R}}{H \frac{df}{dR}} \cong 0, \quad -\frac{f}{H^2 \frac{df}{dR}^6} \cong 1 \quad (4.158)$$

$R \cong 12H^2$ ifadesi kullanarak, de Sitter benzeri evrimi dikkate alındığında, ikinci diferansiyel denklem şu şekilde yazılabilir:

$$f \cong \frac{df}{dR} \frac{R}{2} \quad (4.159)$$

ve çözüldüğünde şu ifadeyi verir

$$f(R) \cong \alpha R^2 \quad (4.160)$$

Çözüm (4.160), kozmolojik sistemi denge noktasına götüren $f(R)$ gravitasyonun tam şekli değildir ancak duruma tekabül eden denge noktası ϕ_*^1 yakınındaki $f(R)$ gravitasyonun $m \cong 0$ durumundaki yaklaşık şeklidir. (4.160)'ın yaklaşık $f(R)$ gravitasyonu R^2 modeline çok benzer. Son olarak, (4.160) biçiminde olan $f(R)$ gravitasyon için (4.158)'deki ilk koşul $H_0^2 \gg H_i$ durumunda,

$$\frac{H_i}{H_0^2} \cong 0 \quad (4.161)$$

halini alır. Dolayısıyla, bu bölümde incelediğimiz $f(R)$ gravitasyonlarının ortaya çıkan formlarını hesaba katarak, Sitter benzeri çözümlerle ilgili R^2 terimleri her zaman kararsız bir de Sitter sabit çekicisine yol açarken, kozmolojik sabitleri ve üstelleri içeren terimlerin kararlı bir de Sitter çekicisine yol açtığı sonucuna ulaşabiliriz. Bu sonuç ilginçtir, çünkü geçerli $f(R)$ gravitasyonlarına yönelik R^2 düzeltmelerinin her zaman enflasyondan zarif bir çıkışı tetiklediği iyi bilinmektedir. Dolayısıyla, bir R^2 teriminin varlığı, enflasyon döneminden zarif çıkışın bir göstergesi olarak görülebilecek istikrarsızlığa yol açar. Aşağıdaki bölümde R^2 gravitasyon durumunu ayrıntılı olarak analiz edeceğiz ve önceki bölümlerde bulduğumuz öngörülen davranışın bu durumda doğru olup olmadığını araştıracağız.

4.5.1c R^2 Gravitasyonu ve Enflasyondan Zarif Çıkış

Bir önceki bölümde bahsettiğimiz bir örnek, son kararsız de Sitter denge noktası ile ilgili olarak R^2 gravitasyonu için gerçekleşir. Göstereceğimiz gibi, bu $f(R)$ gravitasyonu dinamik değişkenlerin kararsız de Sitter denge noktasında olmasını sağlar. R^2 gravitasyonunun fonksiyonel formu,

$$f(R) = R + \frac{R^2}{36H_i} \quad (4.162)$$

Bu bölümün geri kalanında vakum $f(R)$ gravitasyon durumuna odaklanacağız. Dinamik değişkenlerin (4.133) davranışını araştırmak için Hubble oranının tam işlevsel biçimine ihtiyacımız olacak ve ayrıca bu teknik, yalnızca özgül Hubble oranı $m \simeq 0$ verirse geçerli olacaktır. Önceki bölümlerde tanımladığımız dinamik değişkenlerin davranışı, $f(R)$ gravitasyonun tam biçimini belirtmeden, $m \simeq 0$ veren tüm kozmolojiler için geçerlidir; ancak sonuç bize $f(R)$ gravitasyonun olduğunu gösteriyor. Aslında (4.155)'deki $m \simeq 0$ olan bir Hubble oranı ve x_1, x_2, x_3 değişkenleri, ϕ^1 denge noktasına karşılık gelen $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 2)$ değerlerine yaklaşır. Ayrıca, (4.160)'da olduğu gibi denge noktasının yakınında yaklaşık olarak tahmin edilebilen, kararsız bir de Sitter denge noktasına yol açan $f(R)$ gravitasyonları vardır. Bununla birlikte, genel bir $f(R)$ gravitasyon fonksiyonel formu için Hubble oranını bulmak oldukça zorlu bir iştir. Bununla birlikte, R^2 gravitasyonu (4.162) için slow roll yaklaşımı kullanıldığında bu kolaydır. Bir FRW arka plan metriğindeki R^2 gravitasyonu için kozmolojik denklemler şunlardır [27-28]:

$$\ddot{H} - \frac{\dot{H}^2}{2H} + 3H_i \dot{H} = -3H\ddot{H}, \quad \ddot{R} + 3H\dot{R} + 6H_i R = 0 \quad (4.163)$$

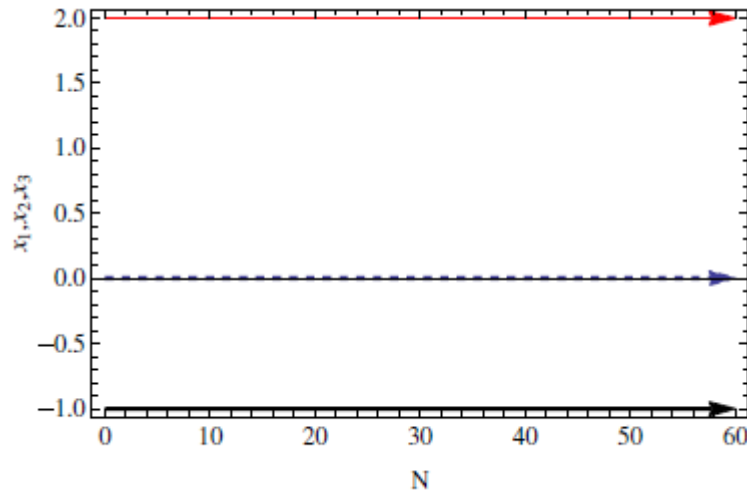
yani slow roll durumunda, $\ddot{H} \ll H\dot{H}$ ve $\ddot{R} \ll H\dot{R}$ olduğundan, Denklem (4.163)'nin ikinci denklemi aşağıdaki Hubble oranını verecek şekilde çözülebilir:

$$H(t) \cong H_0 - H_i(t - t_k) \quad (4.164)$$

ki bu bir de Sitter benzeri evrimdir. Hubble oranı (4.164) $m = 0$ sonucunu verir. Hubble oranını ve R^2 gravitasyonunun (4.161) fonksiyonel formunu kullanarak ve ayrıca kozmik zamanı, logaritmik zaman N 'nin bir fonksiyonu olarak ifade ederek ($N = \ln a$ olduğunu biliyoruz), dinamik değişkenleri (4.133) yine N 'nin bir fonksiyonu şeklinde yazarsak:

$$\begin{aligned}
x_1(N) &= \frac{2H_i}{H_0^2 - 2H_iN + H_i} \\
x_2(N) &= -\frac{(2H_0^2 + H_i(5-4N))(2H_0^2 - H_i(4N+1))}{4(H_0^2 - 2H_iN)(H_0^2 - 2H_iN + H_i)} \\
x_3(N) &= \frac{2H_0^2 - 4H_iN - H_i}{H_0^2 - 2H_iN}
\end{aligned} \tag{4.165}$$

$H_0 = 10^{13} s^{-1}$ ve $H_i = 10^{20} s^{-1}$ seçenekleri için, uygun bir enflasyon kozmolojisi üretilebilir. Bu nedenle yukarıda belirtilen değerleri kullanarak, Şekil 5'te değişkenlerin (4.165) davranışını logaritmik zamanın bir fonksiyonu olarak çiziyoruz. Kırmızı eğri $x_3(N)$ 'e, siyah eğri $x_2(N)$ 'ye ve son olarak mavi kesikli eğri $x_1(N)$ değişkenine karşılık gelir. Görülebileceği gibi, $x_1(N)$, $x_2(N)$ ve $x_3(N)$ değişkenleri, $(x_1, x_2, x_3) = (0 - 1, 2)$ denge noktası değerlerine oldukça hızlı bir şekilde yaklaşır ve bu nedenle R^2 gravitasyonu, kararsız bir de Sitter denge noktasına yol açan bir $f(R)$ gravitasyon örneğidir. Aslında bu oldukça ilgi çekicidir çünkü R^2 gravitasyonu için kararlı de Sitter noktası değil, kararsız de Sitter denge noktasına ulaşılır. Bu özellik, R^2 gravitasyonu için enflasyondan zarif çıkışın gerçekleştiğinin bir göstergesi olarak görülebilir. Prensipte, zarif çıkış sorunu, yalnızca x_i ($i = 1, 2, 3$) değişkenleri incelenerek ele alınamaz, çünkü bu, eğrilik bozulmalarından dolayı meydana gelebilir, dolayısıyla daha yüksek eğrilik derecelerinde görülebilen bir etkidir. Bununla birlikte, R^2 gravitasyonu istisnai bir davranış gösterir, çünkü bu durumda kararsız de Sitter denge noktasına ulaşılır ve bu tesadüfi değildir, çünkü daha önce tartıştığımız gibi R^2 terimleri her zaman enflasyondan zarif çıkışla ilgilidir.



Şekil 5: $H_0 = 10^{13} s^{-1}$ ve $H_i = 10^{20} s^{-1}$ için $x_1(N)$, $x_2(N)$ ve $x_3(N)$ 'in davranışı. Kırmızı çizgi $x_3(N)$ 'i, siyah çizgi $x_2(N)$ 'i ve kesikli mavi çizgi ise $x_1(N)$ 'i temsil etmektedir.

Zarif çıkış ile R^2 gravitsyonunu birbirine bağlayan iddiamızı kısaca tartışalım. Daha derin bir analiz yapıldığında, enflasyondan zarif çıkış, teorinin kararsız bir de Sitter çözümü etrafında artan eğrilik pertürbasyonları tarafından tetiklenebilir. Bu durumda, de Sitter çözümü teorinin nihai çekicisi olmaktan çıkar ve böylece de Sitter çözümü teorinin nihai çekicisi olmadığından enflasyon bunun bir sonucu olarak sona erer. Eğriliğin pertürbasyonlarını araştırmak için de Sitter $H = H_0$ çözümünü aşağıdaki gibi pertürbe ederiz:

$$H(t) = H_0 + \Delta H \quad (4.166)$$

ve pertürbasyonu (4.163)'ün birinci hareket denkleminde yerleştiririz ve ΔH 'ın türevlerinin lineer terimlerini koruyarak aşağıdaki diferansiyel denklemi elde ederiz:

$$3H_0H_i + H_0\Delta\ddot{H}(t) + 3H_0\Delta\dot{H}(t) + 3H_i\Delta H(t) + \frac{\Delta\dot{H}(t)}{2} = 0 \quad (4.167)$$

Denklem analitik olarak çözülebilir ve çözüm:

$$\begin{aligned} \Delta H(t) = c_1 \exp\left(\frac{t\left(-\sqrt{36H_0^2 - 48H_0H_i + 12H_0 + 1 - 6H_0 - 1}\right)}{4H_0}\right) \\ + c_2 \exp\left(\frac{t\left(\sqrt{36H_0^2 - 48H_0H_i + 12H_0 + 1 - 6H_0 - 1}\right)}{4H_0}\right) - H_0 \end{aligned} \quad (4.168)$$

dır. Burada c_1 ve c_2 integrasyon sabitleridir. Denklem (4.168)'nin çözümünden görülebileceği gibi, c_2 ile orantılı terim kozmik zamanın bir fonksiyonu olarak katlanarak büyüyor. Dolayısıyla bu, daha önce denge noktası analizini kullanarak gösterdiğimiz, R^2 gravitasyonunun de Sitter noktasının kararsız olduğu iddiamızı desteklemektedir. Temel olarak, bu kararsız de Sitter noktası $(x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 2)$ denge noktasıdır. Zarif bir çıkışın eğrilik pertürbasyonları tarafından tetiklendiğini vurgulamamız gerekiyor fakat bu gösterge enflasyondan zarif bir çıkışın kanıtı olarak değerlendirilemez.

4.5.1d Diğer Olası Çekiciler ve Kararlılıkları

Şimdi maddenin egemen olduğu bir evrene tekabül eden $m = -\frac{9}{2}$ durumundan kısaca bahsedelim. Bu durumda, J matrisi şöyledir,

$$J = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 + 3 & 0 & 2 - x_1 \\ x_2 & x_1 - 2x_3 + 4 & -2x_2 - 4 \\ 0 & 0 & 8 - 4x_3 \end{pmatrix} \quad (4.169)$$

Burada f_i fonksiyonu

$$f_1 = x_1^2 - x_1x_3 + 3x_1 + 2x_3 - 4$$

$$f_2 = -\frac{9}{2} + x_1x_2 - 2x_2x_3 + 4x_2 - 4x_3 + 8$$

$$f_3 = \frac{9}{2} - 2x_3^2 + 8x_3 - 8 \quad (4.170)$$

Bu durumda denge noktaları şu şekildedir:

$$\phi_*^1 = \left(\frac{1}{4}(-5 - \sqrt{73}), \frac{1}{4}(7 + \sqrt{73}), \frac{1}{2} \right)$$

$$\phi_*^2 = \left(\frac{1}{4}(\sqrt{73} - 5), \frac{1}{4}(7 - \sqrt{73}), \frac{1}{2} \right). \quad (4.171)$$

Birinci denge noktası ϕ_*^1 için özdeğerler $(6, -4.272, -0.386001)$, ikinci denge noktası ϕ_*^2 için bunlar $(6, 4.272, 3.886)$ 'dir. Her iki denge nonhiperboliktir ve ilki kararlı görünmektedir. Ancak, gösterdiğimiz gibi, eğer x_3 değişkeni üzerindeki başlangıç koşulları, $x_3 = \frac{1}{2}$ denge değerinden saparsa, dinamik sistem çözümleri çöker.

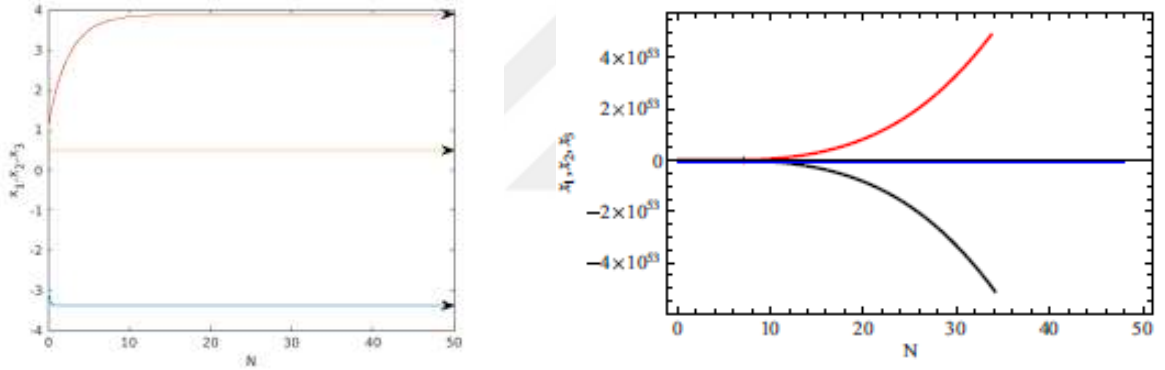
De Sitter durumunda olduğu gibi, dinamik sistemi analitik olarak çözmek mümkündür ve bu durumda x_3 için çözüm şudur:

$$x_3(N) = \frac{7e^{6N} - w}{2(e^{6N} - w)} \quad (4.172)$$

burada w yine bir integrasyon sabitidir. x_2 ve x_3 için çözümler analitik olarak da bulunabilir, ancak genel çözümler bu noktada onları dahil etmek için özellikle karmaşık ve uzundur. (4.172) çözümünden, asimptotik olarak $x_3 \cong 7/2$ 'nin, x_3 'ün maddenin hakim olduğu dönem değerine karşılık gelmediği açıktır. Aslında bu, aşağıda ele alacağımız ek bir denge noktasına karşılık gelir ancak hayali bir evrime tekabül ettiği için fiziksel bir önemi yoktur.

Şimdi dinamik sistem analizine geçiyoruz ve şimdi görüldüğü gibi x_3 üzerindeki başlangıç koşulları denge değerinden saparsa, çözümler sonsuza gitme eğilimindedir. Şekil 6'da, $x_1(0) =$

-3 , $x_2(0) = 1$ ve $x_3(0) = 0.5$ (soldaki çizim) ve $x_1(0) = -3$, $x_2(0) = 1$ ve $x_3(0) = 0.501$ (sağdaki çizim) olmak üzere başlangıç koşulları için çözümlerin davranışını çizdik. Şekil 6'da görüldüğü gibi x_3 değişkeni denge değerinden saptığında denge noktası sabit bir çekici değildir ve bu durumda çözümler çöker, Bu nedenle, sistemin kararlılığı yalnızca $x_3 = \frac{1}{2}$ ise ve yalnızca $\omega = 0$ durumu için sağlanır. Şimdi bunu fiziksel olarak yorumlamamız gerekiyor ve yorum basittir, çünkü dinamik sistemin davranışı x_3 denge değeri $x_3 = \frac{1}{2}$ 'den saptığında -ki bu, $\omega_{\text{efektif}} \neq 0$ olduğu duruma denktir- o zaman vakum $f(R)$ gravitasyonun ilk denge noktası ϕ_*^1 'e yaklaşmadığını gösterir. Aslında bu mantıklıdır, çünkü görünen o ki vakum $f(R)$ gravitasyon, $\omega_{\text{efektif}} = 0$ olmadıkça maddenin egemen olduğu bir dönemi tanımlamada başarısız olur. Bize göre madde egemen çekiciye ancak $x_3 = \frac{1}{2}$ ise ulaşılır ve bu koşul sağlanmazsa kararsızlık oluşur ve sistem madde egemen bir dönem tanımlamayı bırakır.



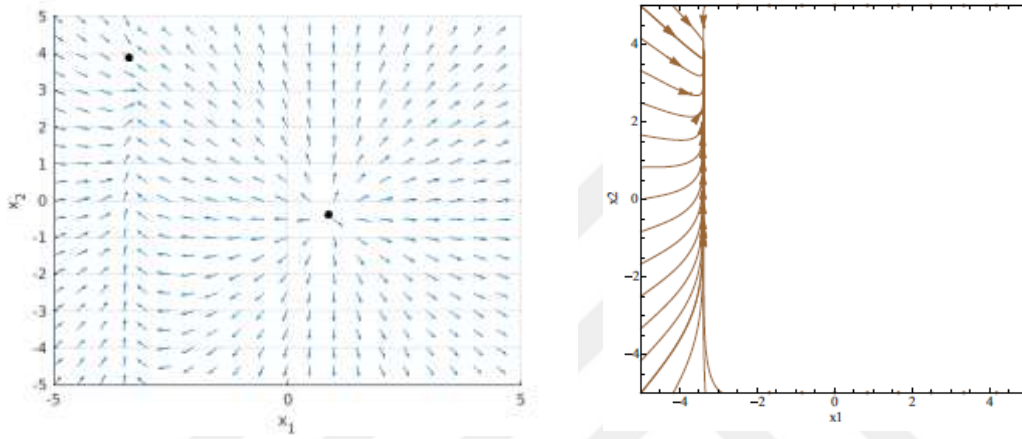
Şekil 6: $m = -9/2$ için çözümlerin $x_1(0) = -3$, $x_2(0) = 1$ ve $x_3(0) = 0.5$ (solda) ile $x_1(0) = -3$, $x_2(0) = 1$ ve $x_3(0) = 0.501$ (sağda) başlangıç koşullarında davranışları

Şimdi $x_3 = \frac{1}{2}$ 'yi sabitleyerek indirgenmiş dinamik sistemin gerçekten kararlı olduğunu gösterelim. Şekil 7'de $x_3 = \frac{1}{2}$ 'yi (sol grafik) ve $x_1 - x_2$ düzlemindeki çeşitli yörüngeleri sabitleyerek $x_1 - x_2$ düzlemindeki vektör alanı akışını çiziyoruz. Her iki grafikte de görüldüğü gibi ϕ_*^1 denge noktasına asimptotik olarak ulaşılır. Ek olarak üç boyutlu vektör akışı Şekil 8'de görülebilir. Son olarak, üç boyutlu sistemin güçlü x_3 bağımlılığı Şekil 9'daki sol ve sağ grafiklerde görülebilir. Görüldüğü gibi, başlangıç koşullarına bağlı olarak, kararlı denge noktası ϕ_*^1 'e ulaşılabilir veya ulaşılamayabilir.

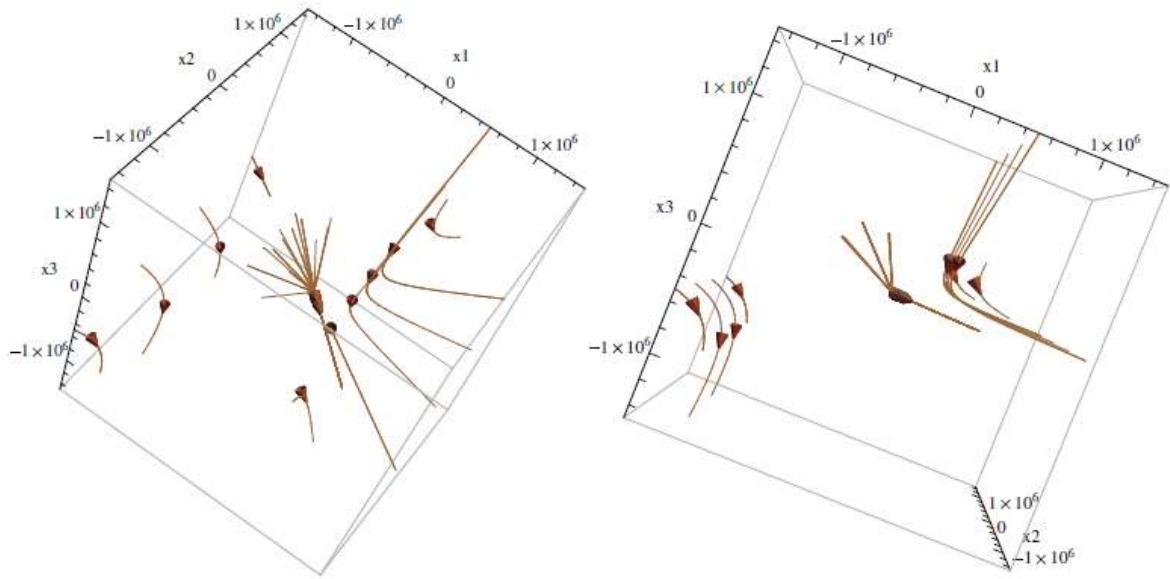
$m = -\frac{9}{2}$ için dinamik sistemin (4.135) iki denge noktasının daha varlığıyla ilgili olan başka bir ilginç noktadan bahsetmemiz gerekiyor.

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{4}(1 - i\sqrt{47}), \frac{1}{4}(-11 + i\sqrt{47}), \frac{7}{2}\right)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{4}(1 + i\sqrt{47}), \frac{1}{4}(-11 - i\sqrt{47}), \frac{7}{2}\right) \quad (4.173)$$



Şekil 7: $x_1 - x_2$ düzleminde $x_3 = \frac{1}{2}$ için vektör alan akışı (solda) ve $m = -\frac{9}{2}$ için yörüngeler (sağda)

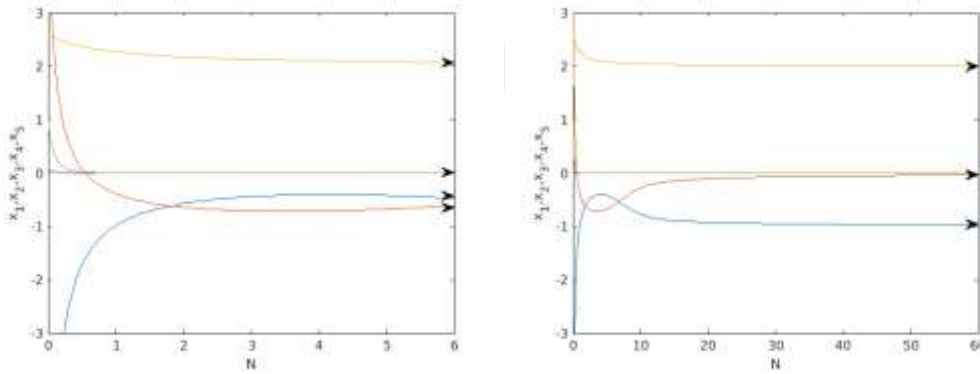


Şekil 8: $m = -9/2$ için üç boyutlu akış

x_1 ve x_2 değişkenleri karmaşık değerler aldığından, yeni denge noktalarının biçimi onları fiziksel olarak çekici kılmaz. Aslında bu, $f(R)$ gravitasyonun karmaşık olduğu anlamına gelir. Karmaşık $f(R)$ gravitasyon genellikle büyük bir yırtılma tekilliği geliştiren bir hayalet skaler teori ile bağlantılıdır ve hayalet skaler teorisinin ezici tip büyük yırtılmayı geliştirdiği bölgeye karşılık gelir. Bu tesadüfi olamaz, çünkü aşağıda $x_3 = \frac{7}{2}$ için (4.172)'den daha önce bahsettiğimiz gibi, EoS $\omega_{efektif} = -2$ olur, bu da açıkça bir hayalet evrimi tanımlar [7].

4.5.2 Vakumsuz $f(R)$ Gravitasyon Özerk Dinamik Sistemi: De Sitter Çekici Durumu

Önceki bölümlerde vakum $f(R)$ gravitasyonu durumundan bahsetmiştik ve bu bölümde çalışmayı tamamlamak için madde ve radyasyon mükemmel akışkanlarını dahil edeceğiz. Diğer durumlar kolaylıkla çalışılabileceği için $m \cong 0$ durumuna odaklanacağız. O halde $m \cong 0$ durumu için faz uzayının davranışını analiz edelim.



Şekil 9: Dinamik sistem ve $m \cong 0$ için $x_i(N)$ $i = 1, \dots, 5$ değişkenlerinin $N = (0, 60)$ için $x_1(0) = -10$, $x_2(0) = 5$, $x_3(0) = 2.6$, $x_4(0) = 0.1$ ve $x_5(0) = 1$ başlangıç koşullarındaki davranışları

Madde ve radyasyon mükemmel akışkanlar göz önüne alındığında, önce dinamik sistemi oluşturalım. Bu durumda hareket denklemleri

$$0 = -\frac{f(R)}{2} + 3(H^2 + \dot{H})F(R) - 18(4H^2\dot{H} + H\ddot{H})F'(R) + \kappa^2 \rho_{madde} \quad (4.174)$$

$$0 = \frac{f(R)}{2} - (\dot{H} + 3H^2)F(R) + 6(8H^2\dot{H} + 4\dot{H}^2 + 6H\ddot{H} + \ddot{H})F'(R) + 36(4H\dot{H} + \ddot{H})^2 F'(R) + \kappa^2 p_{madde} \quad (4.175)$$

burada ρ_{madde} ve p_{madde} toplam efektif enerji yoğunluğu ile radyasyon ve madde mükemmel akışkanlarının efektif basıncıdır. $f(R)$ gravitasyon kozmolojik sisteminin özerk yapısını ortaya çıkarmak için aşağıdaki değişkenleri tanıtlıyoruz:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{\dot{F}(R)}{F(R)H}, & x_2 &= -\frac{f(R)}{6F(R)H^2}, & x_3 &= \frac{R}{6H^2} \\ x_4 &= \frac{\kappa^2 \rho_r}{3FH^2}, & x_5 &= \frac{\kappa^2 \rho_m}{3FH^2} \end{aligned} \quad (4.176)$$

ρ_r ve ρ_m radyasyon ve madde enerji yoğunluklarıdır. Bu durumda N 'ye bağlı dinamik sistem

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dN} &= -4 - 3x_1 + 2x_3 - x_1x_3 + x_1^2 + 3x_5 + 4x_4 \\ \frac{dx_2}{dN} &= 8 + m - 4x_3 + x_2x_1 - 2x_2x_3 + 4x_2 \\ \frac{dx_3}{dN} &= -8 - m + 8x_3 - 2x_3^2 \\ \frac{dx_4}{dN} &= x_4x_1 - 2x_4x_3 \\ \frac{dx_5}{dN} &= x_5 + x_5x_1 - 2x_5x_3 \end{aligned} \quad (4.177)$$

m parametresi yine (4.136)'da görüldüğü gibidir. Bu durumda J matrisi şu şekli alır,

$$J = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 + 3 & 0 & 2 - x_1 & 4 & 3 \\ x_2 & x_1 - 2x_3 - 4 & -2x_2 - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 - 4x_3 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & -2x_4 & x_1 - 2x_3 & 0 \\ x_5 & 0 & -2x_5 & 0 & x_1 - 2x_3 + 1 \end{pmatrix} \quad (4.178)$$

Bu durumda $m \cong 0$ için f_i fonksiyonu:

$$f_1 = -4 - 3x_1 + 2x_3 - x_1x_3 + x_1^2 + 3x_5 + 4x_4$$

$$f_2 = 8 - 4x_3 + x_2x_1 - 2x_2x_3 + 4x_2$$

$$f_3 = 8x_3 - 2x_3^2 - 8$$

$$f_4 = x_4x_1 - 2x_4x_3$$

$$f_5 = x_5 + x_5 x_1 - 2x_5 x_3 \quad (4.179)$$

olur. Dinamik sistemin denge noktaları $m \cong 0$ için şöyledir,

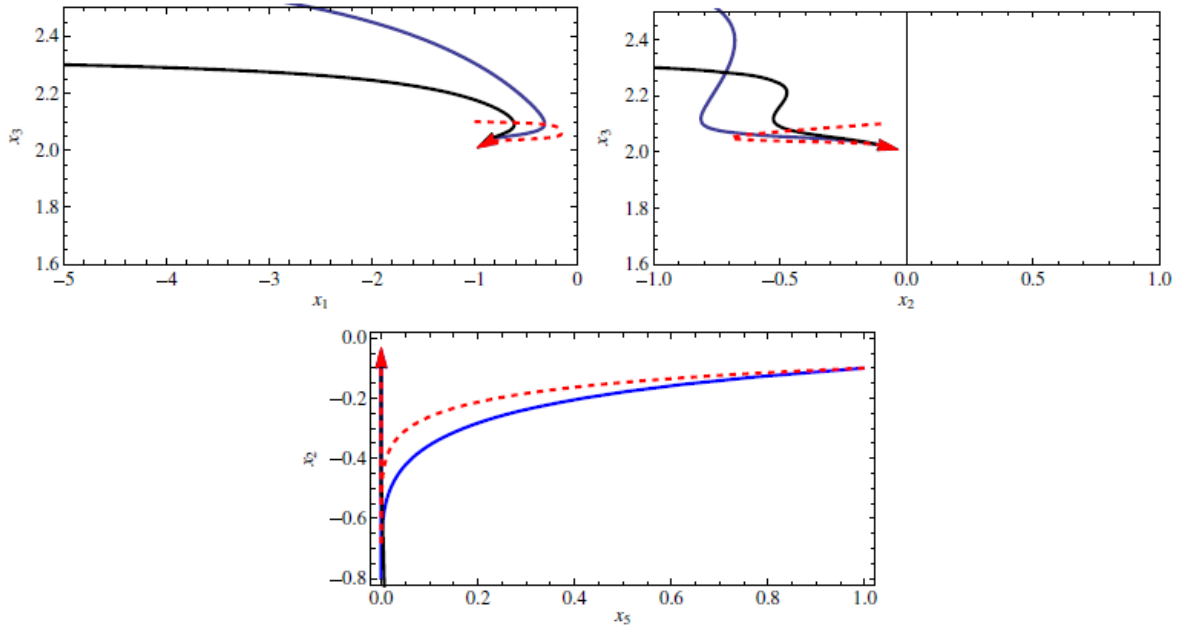
$$\phi_*^1 = (-1, 0, 2, 0, 0)$$

$$\phi_*^2 = (3, 0, 2, 0, -4)$$

$$\phi_*^3 = (4, 0, 2, -5, 0) \quad (4.180)$$

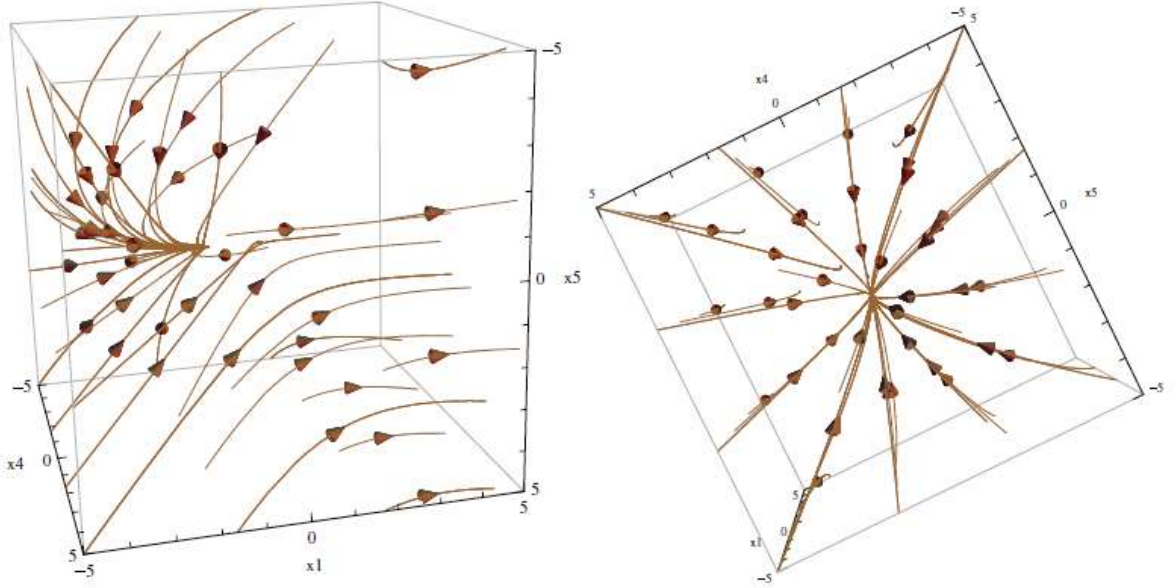
ϕ_*^1 denge noktası için karşılık gelen özdeğerler $(-5, -4, -1, -1, 0)$ iken, ϕ_*^2 denge noktası için bunlar $(4, 3, 3, -1, 0)$ 'tür ve son olarak denge noktası ϕ_*^3 için özdeğerler $(5, 4, 4, 1, 0)$ 'dır. Tüm dengeler nonhiperboliktir ve şimdi gösterdiğimiz gibi yalnızca ϕ_*^1 karardır. Bu, kullanılan başlangıç koşullarından bağımsız olarak yörüngelerin ϕ_*^1 denge noktasına çekildiği anlamına gelir. Tüm dengeler için $x_3 = 2$ olduğunda, önceki bölümde incelediğimiz durumlarda olduğu gibi $\omega_{\text{efektif}} = -1$ olduğundan bunların de Sitter dengesi olduğunu gösterir. Şimdi x_i ($i = 1, \dots, 5$) değişkenlerinin kapsadığı konfigürasyon uzayının dinamiklerine odaklanalım.

Bu durumda analitik çalışma oldukça karmaşıktır ve analitik olarak sadece $x_3(N)$ için çözüm bulunabilir ve bu (4.151)'de verilmiştir.



Şekil 10: Dinamik sistem ve $m \cong 0$ için, farklı başlangıç koşulları için x_1 - x_3 düzlemindeki (sol), x_2 - x_3 düzlemindeki (sağ) ve x_2 - x_5 düzlemindeki (alt) yörüngeleri

Böylece nümerik olarak ilerliyoruz ve Şekil 1'deki çeşitli başlangıç koşulları için dinamik sistemi (4.177) nümerik olarak çözdükten sonra, $x_1(0) = -10, x_2(0) = 5, x_3(0) = 2.6, x_4(0) = 0.1$ ve $x_5(0) = 1$ başlangıç koşullarını kullanarak $N = (0,60)$ için $x_i(N)$ ($i = 1, \dots, 5$) değişkenlerinin çizimlerini sunuyoruz. Şekil 9'da, her iki grafikte de kırmızı eğri $x_1 - N$ grafiğidir, siyah eğri $x_2 - N$, mavi eğri $x_3 - N$, yeşil eğri $x_4 - N$ ve son olarak mor eğri $x_5 - N$ 'dir. Soldaki grafikte $N, N = (0,7)$ aralığına aittir, dolayısıyla ϕ_*^1 dengesine ulaşılmamıştır; ancak, büyük N için, yani $N \sim 50 - 60$ için, denge denge noktasına ϕ_*^1 nihayet ulaşılır. Dolayısıyla, kullandığımız başlangıç koşullarından bağımsız olarak aynı davranış meydana geldiğinden, bu kısmen kararlılığı kanıtlar. Şekil 10'da ϕ_*^1 denge noktasının kararlılığını daha da desteklemek için, dinamik sistemin yörüngelerini $x_1 - x_3$ düzleminde (soldaki çizim), $x_3 - x_2$ düzleminde (sağdaki çizim) ve $x_2 - x_5$ düzleminde (alt çizim) çeşitli başlangıç koşulları için çizdik. Şekil 10'daki tüm grafiklerde görülebileceği gibi, dinamik sistem asimptotik olarak ϕ_*^1 denge noktasına yaklaşmaktadır.



Şekil 11: $(x_2, x_3) = (0, -2)$ için ϕ_*^1 denge noktasında x_2 ve x_3 değerlerinin sabitlenmesiyle, (x_1, x_4, x_5) değişkenlerinin uzaya yayılmış yörüngelerinin üç boyutlu modellenmesi

Bu nedenle, madde radyasyonu $f(R)$ gravitasyonun global bir de Sitter çekicisine sahip olduğu görülmektedir. Çekici ϕ_*^1 'in global kararlılığını daha fazla ortaya çıkarmak için, Şekil 11'de, (x_1, x_4, x_5) değişkenlerinin kapsadığı uzaydaki yörüngelerin 2 tane üç boyutlu grafiğini (x_2, x_3) 'ü ϕ_*^1 'deki değerlerine, yani $(x_2, x_3) = (0, -2)$ 'ye sabitleyerek sunuyoruz. Soldaki

izimde grleebileceği gibi ve ayrıca farklı bir açıdan bakıldığında sağdaki çizimde daha net görüldüğü üzere (x_1, x_4, x_5) konfigürasyon uzayındaki son çekici nokta $(x_1, x_4, x_5) = (-1, 0, 0)$ noktasıdır.

Sonuç olarak, $f(R)$ gravitasyona madde ve radyasyon mükemmel akışkanları eklendiğinde bile -tam olarak vakum durumunda olduğu gibi- her zaman $m \cong 0$ 'ı sağlayan tüm kozmolojilerin global kararlı bir de Sitter ekicisi vardır. Bu açıkça, $N \sim 50 - 60$ için asimptotik olarak ulaşılan enflasyonist bir çekicidir. Ayrıca denge noktasının $(x_4, x_5) = (0, 0)$ noktasında olduğuna dikkat etmeliyiz. Bu fiziksel olarak doğrudur çünkü bir de Sitter noktasında, evrime ne kütle ne de radyasyon mükemmel akışkanları hakimdir.



5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezimizde, evrim ve bağ denklemlerini homojen modellerin genel denklemlerinden özelleştirip yazmak mümkünse de biz, 1+3 Kovaryant ayrışım formalizminin bağıntılarını örneklemek amacıyla bunları metrikten doğrudan doğruya tesis etmeyi tercih ettik. $f(R)$ gravitasyon teorisinde metrik yaklaşımıyla, enflasyon (skaler alanda enflasyon, $f(R)$ gravitasyonda enflasyon...) ve $f(R)$ gravitasyonda karanlık enerji durumunu açıklamaya çalıştık, homojen, anizotropik Bianchi-I tip modelinde palatini formalizminde $f(R)$ gravitasyondaki dinamikleri ve de vakum $f(R)$ gravitasyonda otonom dinamik sistemini ele aldık.

Dinamik sistem yaklaşımı kullanarak $f(R)$ gravitasyonun faz uzayının detaylı bir analizini gerçekleştirdik ve dinamik sistemin tüm zaman bağımlılığını yalnızca Hubble hızına bağlı olan tek bir değişkende tutarak bu parametrenin belirli değerleri için denge noktalarının varlığını ve kararlılığını araştırdık. Esas olarak $m \cong 0$ durumuna odaklandık ve ayrıca $m = -9/2$ durumunu da kısaca tartıştık. Analiz için iki tür $f(R)$ gravitasyon kullandık, ilki vakum $f(R)$ gravitasyonu ve ikinci olarak madde ve radyasyon mükemmel akışkanların mevcut olduğu $f(R)$ gravitasyon. Vakum $f(R)$ gravitasyon durumunda, $m \cong 0$ durumu kararlı bir de Sitter son çekici ile sonuçlanır. Çeşitli başlangıç koşulları kullanarak kararlılık problemini inceledik. Yaptığımız sayısal analiz, asimptotik bir de Sitter çekicisinin varlığı hakkındaki iddiamızı doğrulamaktadır. Aslında çekici, gösterdiğimiz gibi enflasyonisttir ve $N \sim 50-60$ 'daki dinamik sistem tarafından ulaşılır. Aynı davranış, madde ve radyasyon mükemmel akışkanların varlığından $f(R)$ gravitasyonu için de meydana gelir. Tezimizde gösterdiğimiz gibi, dinamik sistem, $(x_4, x_5) = (0,0)$ olan bir asimptotik kararlı de Sitter çekicisine çekilir. Dolayısıyla de Sitter çekicisi yalnızca $f(R)$ gravitasyonundan kaynaklanmaktadır. Vakum $f(R)$ gravitasyonun durumunun ilginç bir sonucu, kararlı ve kararsız bir de Sitter çekicisinin varlığıdır. Aslında, gösterdiğimiz gibi, kararsız de Sitter denge noktalarına götüren $f(R)$ gravitasyonun yaklaşık biçimi $\sim R^2$ 'dir, kararlıya götüren ise bir üstel ile bir kozmolojik sabittir. Tartıştığımız, R^2 terimi her zaman, sonunda enflasyondan zarif bir çıkışa neden olabilecek artan eğrilik bozulmaları ile ilgilidir. Prensipde dinamik sistem seviyesinde, $f(R)$ gravitasyonu host(hayalet) kararsızlıklardan arınmış olduğundan ve ayrıca Ostrogradsky kararsızlığını içermediğinden zarif bir çıkış olasılığını bile görmek mümkün değildir. Aynısı bir skaler şişme teorisinde olur ve de Sitter son çekicisi dinamik sistem analizi düzeyinde sabittir; ancak, yavaş dönüş parametreleri birinci sıraya geldiğinde zarif çıkış gerçekleşir. Gerçekte, zarif çıkış, tedirgin edici bir genişleme olan yavaş dönüş genişlemesinin bozulmasıyla tetiklenir. Bir anlamda, enflasyondan zarif çıkışın dinamikleri konfigürasyon alanında görülemez, bu nedenle ekstra yüksek dereceli parametreler tanıtılır. Pertürbatif düzeyde dinamik evrimi araştırır.

Bununla birlikte, kararsız bir de Sitter denge noktasına yol açabilecek bir $f(R)$ gravitasyonun varlığı, zarif çıkışın saf $f(R)$ gravitasyonda bile meydana gelebileceğine dair ipuçları sağlayabilir. Ancak bu sonuç, yalnızca ipuçları sağladığı, ancak kanıt sağlamadığı için kesinlikle kesin değildir. Hayaletler içeren değiştirilmiş gravitasyonda, kararsızlık dinamik sistem seviyesinde, hatta konfigürasyon alanında bile görülebilir. Aslında mimetik bir $f(R)$ kütleçekimi bağlamında, kararlı bir de Sitter noktası etrafında katlanan kararsız manifoldlar vardır. Kararsız manifoldların varlığı, kararlı bir son çekicinin dinamiklerini tamamen değiştirir. Bulgular kısmında tartıştığımız R^2 gravitasyonu için dinamik değişkenlerin kararsız de Sitter denge noktasına eğilimli olması, faz uzayında global olarak kararsız bir manifoldun varlığını gösterir. Daha ileriki çalışmalarımızda bunları diğer metrikler için de ele almayı planlamaktayız.



KAYNAKLAR

- [1] Abdelwahab, M., Carloni, S., Dunsby, P.K.S., 2008, Cosmological Dynamics of Exponential Gravity, *Class. Quant. Grav.*, 25, 135002.
- [2] Açan Yıldız, G. D., Güdekli, E., 2021, Dynamics of $f(R)$ Cosmologies Containing Einstein Static Models for Bianchi Type-I, Turkish Physical Society 37nd International Physics Congress, 2021, Muğla, Turkey.
- [3] Açan Yıldız, G. D., Güdekli, E., Sofuoğlu, D., 2019, Bianchi Type-V Cosmology With Gamma Law EoS in $f(R,T)$ Gravity, Turkish Physical Society 35nd International Physics Congress, 2019, Mula, Turkey.
- [4] Aan Yıldız, G. D., Güdekli, E., 2018, Conformal Invariance in Myrzakulov Gravity, Turkish Physical Society 34nd International Physics Congress, 2018, Mula, Turkey.
- [5] Ade, P.A.R., et al., 2016, Planck 2015 results. XIII. Cosmological Parameters, *Astron. Astrophys.*, 594, A13
- [6] Amendola, L., Tsujikawa, S., 2010, Dark Energy: Theory and Observations, (Cambridge University Press, Cambridge
- [7] Bamba, K., Geng, C.-Q., Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2010, Crossing of Phantom Divide in $F(R)$ gravity, *Mod. Phys. Lett. A* 25, 900
- [8] Bamba, K. and Odintsov, S., 2014, Universe Acceleration in Modified Gravities: $f(R)$ and $f(T)$ Cases, *arXiv:1402.7114*.
- [9] Bamba, K., İlyas M., Bhatti, M.Z., Yousaf, Z., 2017, Energy Conditions in Modified $f(G)$ Gravity, *Gen. Relativ. Gravit.* 49, 112
- [10] Brans, C. and Dicke, R., 1961, Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation *Phys. Rev.* 124 925.
- [11] Capozziello, S., Francaviglia, M., 2008, Extended Theories of Gravity and Their Cosmological and Astrophysical Applications, *Gen. Relativ. Gravit.*, 40, 357.
- [12] Capozziello, S., Faraoni, V., 2011, Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics, Springer, London
- [13] Carloni, S., Troisi, A., Dunsby, P.K.S., 2008, Some Remarks on the Dynamical Systems Approach to Fourth Order Gravity, *Gen. Rel. Grav.*, 41, 1757.
- [14] Carroll, S.M., 2001, The Cosmological Constant, doi:10.12942/lrr-2001-1
- [15] Carroll, S. M., 2004, Spacetime and Geometry: An introduction to General Relativity, Sec. 4.6, Addison-Wesley, ISBN 0-8053-8732-3.
- [16] Clifton, T., Ferreira, P.G., Padilla, A., Skordis, C., 2012, Modified Gravity and Cosmology, *Phys. Rep.*, 513, 1.

- [17] Copeland, E.J., Sami, M., Tsujikawa, S., 2006, Dynamics of Dark Energy, Int. J. Mod. Phys. D, 15, 1753-1936
- [18] Dalarsson, M. and Dalarsson, N., 2015, *Tensors, Relativity, and Cosmology*, Academic Press, ISBN: 978-0-12-803397-5.
- [19] De Bernardis, P., et al., 2000, A Flat Universe From High-Resolution Maps of the Cosmic Microwave Background Radiation, Nature, 404, 955-959.
- [20] Demir, E., 2019, Mimetic $f(R)$ Gravitasyon, Yüksek Lisans, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [21] De Felice, A., Gérard, J.M, Suyama, T., 2010, Cosmological Perturbation in $f(R,G)$ Theories With A Perfect Fluid, Phys. Rev. D 82, 063526
- [22] Eddington, A.S., 1923, The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge University Press, Cambridge.
- [23] Ellis, G.F.R., 2006a, The Bianchi models: Then and Now, General Relativity and Gravitation, 38(6):1003-1015.
- [24] Ellis, G.F.R., Maartens, R., MacCallum, M. A. H., 2012, Relativistic Cosmology, Sec. 16.3, Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-38115-4.
- [25] Friedmann, J.A., Turner, M.S., Huterer, D., 2008, Dark Energy and the Accelerating Universe, Ann.Rev.Astron.Astrophys., 46:385.
- [26] Güdekli, E., Eylül 2004, Bianchi Tip Çözümlerde Ufuk-Eşyönlüleşme Meseleleri, Doktora, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [27] Harko, T. and Lobo, F. and Nojiri, S. and Odintsov, S., 2011, $f(R,T)$ Gravity, arXiv:1104.2669.
- [28] Li, B., Barrow, J.D., 2007, The Cosmology of $f(R)$ Gravity in the Metric Variational Approach, Phys. Rev. D, 75, 084010
- [29] Nojiri, S., Odintsov, S., D., 2003, Modified Gravity With Negative and Positive Powers of Curvature: Unification of Inflation and Cosmic Acceleration, Phys. Rev. D, 68, 123512.
- [30] Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2007, Introduction to Modified Gravity and Gravitational Alternative For Dark Energy, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., 4, 115.
- [31] Nojiri, S., Odintsov, S.D., 2008, Modified $f(R)$ Gravity Unifying R^m Inflation With Λ CDM Epoch, Phys. Rev. D, 77, 026007
- [32] Odintsov, S. and Sez-Gmez, D., 2013 $f(R, T, R_{\mu\nu}, T_{\mu\nu})$ Gravity Phenomenology and Λ CDM Universe, arXiv:1304.5411.
- [33] Peebles, P.J.E., Ratra, B. 2003, The Cosmological Constant and Dark Energy, Rev. Mod. Phys., 75, 559-606.

- [34] Peiris, H.V., et al., 2003, First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications For Inflation, *Astrophys. J. Suppl.* 148, 213.
- [35] Perlmutter, S., et al., 1999, Measurements of Ω and Λ From 42 High-Redshift Supernovae, *Astrophys. J.*, 517, 565-586.
- [36] Riess, A.G., et al., 2007, New Hubble Space Telescope Discoveries of Type-Ia Supernovae at $z > 1$: Narrowing Constraints on The Early Behaviour of Dark Energy, *Astrophys. J.*, 659, 98.
- [37] Rippl, S., van Elst, H., Tavakol, R., Taylor, D., 1996, Kinematics and Dynamics of $f(R)$ Theories of Gravity, *Gen. Rel. Grav.*, 28, 193
- [38] Santos, J., Alcaniz, J.S., Rebouças, M.J., Carvalho, F.C., 2007, Energy Conditions in $f(R)$ Gravity, *Phys. Rev. D.*, 76, 083513
- [39] Sawicki, I., Hu, W., 2007, Stability of Cosmological Solutions in $f(R)$ Models of Gravity, *Phys. Rev. D*, 75, 127502.
- [40] Shamir, F.M., 2010, Some Bianchi Type Cosmological Models in $f(R)$ Gravity, DOI 10.1007/s10509-010-0371-5
- [41] Sharif, M., Zubair, M., 2012, Energy Conditions Constraints and Stability of Power Law Solutions in $f(R,T)$ Gravity, *J. Phys. Soc. Jpn.* 82, 014002.
- [42] Sharif, M., Zubair, M. 2013, Energy Conditions in $f(R, T, R_{\mu\nu}, T_{\mu\nu})$ Gravity, *JHEP*, 12, 079.
- [43] S.M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden and M.S. Turner, 2004, Is Cosmic Speed Up Due to New Gravitational Physics? *Phys. Rev. D* 70, 043528
- [44] Sotiriou, T. and Faraoni, V., 2010, $f(R)$ Theories of Gravity 5 Jun 2010 arXiv: 0805.1726v4.
- [45] Starobinsky, A.A., 2007, Disappearing Cosmological Constant in $f(R)$ Gravity, *JETP Lett.*, 86, 157.
- [46] Turner, M.S., Huterer, D., 2007, Cosmic Acceleration, Dark Energy and Fundamental Physics, *J.Phys.Soc.Jap.*, 76:111015
- [47] Wainwright, J. and Ellis, G., 1997, *Dynamical Systems in Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [48] Zaregonbadi, R., Farhoudi, M., 2016, Cosmic Acceleration From Matter-Curvature Coupling, *Gen. Rel. Gravit.*, 48, 142.

EKLER

EK 1. $f(R)$ Gravitasyon

$f(R)$ gravitasyon, Lagrange'ı sadece Ricci skaleri $S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} R$ olan Einstein-Hilbert aksiyonunun Ricci skalerlerinin rastgele bir $f(R)$ fonksiyonu ile değiştirildiği bir genellemesidir.

Formalizme bağlı olarak $f(R)$ gravitasyonun üç versiyonu vardır, yani alan denklemlerini elde etmek için aksiyona uyguladığımız varyasyon prensibi. Standart yollardan biri $f(R)$ gravitasyonu veren metriğe göre aksiyonu değiştirmektir. İkinci yol, madde aksiyonunun bağlantıya bağlı olmadığını varsayarak, bağlantıyı metrikten bağımsız ele almak ve hem metriğe hem de Palatini $f(R)$ gravitasyonu sağlayan bağlantıya göre eylemi değiştiren Palatini yaklaşımını kullanmaktır.

EK 2. $f(R)$ Gravitasyonun Alan Denklemlerinin Çıkarılışı

$f(R)$ gravitasyon alan denklemlerini elde etmek için (Ek 2) aksiyonunu g_{ab} metriğine göre değiştirmeliyiz.

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M(g_{ab}, \psi) \quad (\text{Ek 1})$$

Bir madde aksiyonu ekledik. Ayrıca burada $\kappa^2 = 8\pi G$ 'dir ve ψ topluca tüm madde alanlarını ifade eder.

EK 3. Metrik Formalizmdeki $f(R)$ Aksiyonunun Değişimi

Ters metriği değiştiren alan denklemlerini türeteceğiz

$$g^{ab} \rightarrow g^{ab} + \delta g^{ab} \quad (\text{Ek 2})$$

Aksiyon (Ek 1) üzerindeki varyasyon daha sonra

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g} f(R)) \\ \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} \delta(f(R)) + \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) f(R) \end{aligned} \quad (\text{Ek 3})$$

olur.

$\sqrt{-g}$ 'nin varyasyonunu hesaplamamız gerekir. Bunu yapmak için M 'nin tersi alınabilir bir matris olduğu ve $\ln M$ 'nin $\exp(\ln M) = M$ ile tanımlandığı $Tr(\ln M) = \ln(det M)$ özdeşliğini kullanıyoruz. Bu özdeşliği değiştirerek ve izin döngüsel özelliğini kullanarak verim

$$Tr(M^{-1}\delta M) = \frac{1}{det M} \delta(det M) \quad (\text{Ek 4})$$

şeklinde elde edilir. Bunu ters metrik $M = g^{ab}$ ve $det M = g^{-1} = det g^{ab}$,ye uygulayarak

$$Tr(g_{ab}\delta g^{ab}) = g\delta(g^{-1})$$

$$\delta(g^{-1}) = \frac{1}{g} g_{ab}\delta g^{ab}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $\sqrt{-g}$ 'nin varyasyonu

$$\delta\sqrt{-g} = \delta(-g^{-1})^{-3/2}\delta(-g) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}\delta g^{ab} \quad (\text{Ek 5})$$

olur. $f(R)$ varyasyonunun eşitliği:

$$\delta f(R) = \frac{\partial f}{\partial R} \delta R = \frac{\partial f}{\partial R} (\delta g^{ab}) R_{ab} + \frac{\partial f}{\partial R} g^{ab} \delta R_{ab}$$

dir. Aksiyonun varyasyonu üç bölümden oluşur

$$\delta S = (\delta S1) + (\delta S2) + (\delta S3) \quad (\text{Ek 6})$$

ve

$$(\delta S1) = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\partial f}{\partial R} R_{ab} \right] \delta g^{ab} \quad (\text{Ek 7})$$

$$(\delta S2) = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\partial f}{\partial R} g^{ab} \right] \delta R_{ab} \quad (\text{Ek 8})$$

$$(\delta S3) = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{ab} f(R) \right] \delta g^{ab} \quad (\text{Ek 9})$$

Burada $(\delta S1)$ ve $(\delta S3)$ terimleri δg^{ab} ile çarpım olarak istenen formdadır. İkinci terimi aynı şekilde elde etmek için Palatini denklemi tarafından verilen Ricci tensörünün varyasyonuna ihtiyacımız var.

$$\delta R_{ab} = \nabla_c \delta T_{ab}^c - \nabla_b \delta T_{ac}^c \quad (\text{Ek 10})$$

Böylece aksiyonun varyasyonundaki ikinci terim

$$\begin{aligned} (\delta S2) &= \int d^4x \sqrt{-g} F(R) g^{ab} [\nabla_c \delta T_{ab}^c - \nabla_b \delta T_{ac}^c] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} F(R) [\nabla_c g^{ab} \delta T_{ab}^c - \nabla_b g^{ab} \delta T_{ac}^c] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} F(R) [\nabla_a g^{ab} \delta T_{ab}^d - \nabla_a g^{ad} \delta T_{ac}^c] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} F(R) \nabla_a [g^{ab} \delta T_{ab}^d - g^{ad} \delta T_{ac}^c] \end{aligned} \quad (\text{Ek 11})$$

olur. Şimdi δT_{ab}^d 'nin varyasyonunu δg^{ab} cinsinden yazabiliriz:

$$\delta T_{ab}^d = -\frac{1}{2} [g_{ca} \nabla_b (\delta g^{cd}) + g_{ca} \nabla_a (\delta g^{cd}) - g_{ae} g_{bf} \nabla^d (\delta g^{ef})] \quad (\text{Ek 12})$$

(Ek 11)'i kullanarak

$$\begin{aligned} (\delta S2) &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} F(R) \right) \nabla_a [\delta_b^c \nabla_b (\delta g^{cd}) + \delta_b^c \nabla_a (\delta g^{cd}) - g_{ef} \nabla^d (\delta g^{ef}) - \\ &\quad \delta_h^d \nabla_b (\delta g^{ch}) - g^{ad} g_{hc} \nabla_a (\delta g^{ch}) + \delta_f^d g_{ce} \nabla^c (\delta g^{ef})] \\ (\delta S2) &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} F(R) \right) \nabla_a [\nabla_c (\delta g^{cd}) - \nabla_c (\delta g^{cd}) - \nabla_a (\delta g^{ad}) - \\ &\quad g_{ef} \nabla^d (\delta g^{ef}) - g^{ad} g_{hc} \nabla_a (\delta g^{ch}) + g_{ce} \nabla^c (\delta g^{ed})] \\ (\delta S2) &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} F(R) \right) \nabla_a [\nabla_a (\delta g^{ad}) + \nabla_e (\delta g^{ed}) - g_{ef} \nabla^d (\delta g^{ef}) - \\ &\quad g_{hc} \nabla^d (\delta g^{ch})] \\ (\delta S2) &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} F(R) \right) \nabla_a [\nabla_a (\delta g^{ad}) + \nabla_a (\delta g^{ad}) - g_{ab} \nabla^d (\delta g^{ab}) - \\ &\quad g_{ab} \nabla^d (\delta g^{ab})] \\ (\delta S2) &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} F(R) \right) \nabla_a [g_{ab} \nabla^d (\delta g^{ab}) - \nabla_a (\delta g^{ad})] \end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz. Bunu bulduktan sonra, eylemin toplam varyasyonu şu şekilde olur:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial R} R_{ab} \right] \delta g^{ab} + \left(-\frac{1}{2} F(R) \right) \nabla_a [g_{ab} \nabla^d (\delta g^{ab}) - \nabla_a (\delta g^{ad})] + \left[-\frac{1}{2} g_{ab} f(R) \right] \right\}. \quad (\text{Ek 13})$$

EK 4. $f(R)$ Gravitasyon Metriğinin Alan Denklemleri

Denklem (Ek 13)'den eylemin (Ek 1) metriğe göre değişimi aşağıdaki alan denklemlerini vermektedir.

$$\frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = F(R) R_{ab} - \frac{1}{2} f(R) g_{ab} - \nabla_a \nabla_b F(R) + g_{ab} \square F(R) = \kappa^2 T_{ab} \quad (\text{Ek 14})$$

Burada $\square F = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a (\sqrt{-g} g^{ab} \partial_b)$ 'dir ve enerji momentum tensörü de şu şekilde bulunur:

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} \quad (\text{Ek 15})$$

Süreklilik denklemi de:

$$\nabla^a T_{ab} = 0 \quad (\text{Ek 16})$$

olur. (Ek 14) 'ün izini bulmak için g_{ab} ile çarpınız

$$F(R) R_a^a - \frac{1}{2} f(R) \delta_a^a - \nabla^a \nabla_a F(R) + \delta_a^a \square F(R) = \kappa^2 T_a^a$$

denklemini elde ederiz. $\delta_a^a = 4$ ve $\nabla^a \nabla_a \equiv \square$ bağıntıları kullanılarak alan denkleminin izi şu şekilde yazılabilir

$$F(R) R + 3 \square F(R) - 2f(R) = \kappa^2 T. \quad (\text{Ek 17})$$

$f(R) = R$ ve $F(R) = 1$ için Einstein alan denklemlerini ve bunların $R = \kappa^2 T$ olan izlerini alınız ve bu durumda Ricci skaler R , madde tarafından belirlenmiş olur.

İki durumu karşılaştırdığımızda, $f(R)$ gravitasyonda, $F(R)$ teriminin ortadan kalkmadığını ve “skalaron” adı verilen ekstra yayılım serbestlik derecesi $\emptyset = F(R)$ 'ın varlığını görüyoruz. Bu dinamikler denklem (Ek 17)'nin izi ile elde edilir.

Hızlanan bir genişleme geçiren bir evren, Ricci skalerinin sabit olduğu, yani $\square F(R) = 0$ olduğu denklemlerin vakum çözümüne karşılık gelen “de Sitter” çözümü aracılığıyla gerçekleşir. Dolayısıyla, bir $f(R)$ modelinin de Sitter benzeri bir çözüm vermesi için

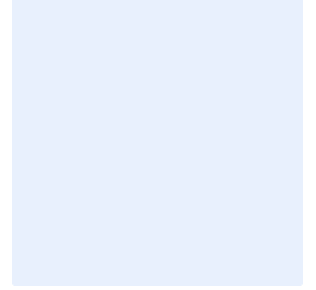
$$F(R)R - 2f(R) = 0 \quad (\text{Ek 18})$$

denklemini karşılaması gerekir.

$f(R) = aR^2$ değerine sahip bir model koşulları sağlar ve kesin bir de Sitter çözümü doğurur. Şişen evren için ilk model Starobinsky tarafından $f(R) = R + aR^2$ ile önerilmiştir. Bu modelde, aR^2 terimi R 'den küçük olduğunda hızlanan genişleme durur.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Gizem Dilara AÇAN YILDIZ
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☐ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Web Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Fizik Bölümü
Mezuniyet Yılı	12.01.2016

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Fizik Anabilim Dalı
Programı	Matematiksel Fizik Programı

Makale ve Bildiriler	
Açan Yıldız, G. D., Güdekli, E., 2021, Dynamics of $f(R)$ Cosmologies Containing Einstein Static Models for Bianchi Type-I, Turkish Physical Society 37nd International Physics Congress, 2021, Muğla, Turkey.	
Açan Yıldız, G. D., Güdekli, E., Sofuoğlu, D., 2019, Bianchi Type-V Cosmology With Gamma Law EoS in $f(R,T)$ Gravity, Turkish Physical Society 35nd International Physics Congress, 2019, Muğla, Turkey.	
Açan Yıldız, G. D., Güdekli, E., 2018, Conformal Invariance in Myrzakulov Gravity, Turkish Physical Society 34nd International Physics Congress, 2018, Muğla, Turkey.	