



**DİNAMİK SİSTEMLERDE BAZI
TOPOLOJİK GEÇİŞKENLİK TÜRLERİ
VE ARALARINDAKİ İLİŞKİLER**

Yüksek Lisans Tezi

İsmail Alper GÜVEY

Eskişehir 2023

DİNAMİK SİSTEMLERDE BAZI TOPOLOJİK GEÇİŞKENLİK
TÜRLERİ VE ARALARINDAKİ İLİŞKİLER

İSMAİL ALPER GÜVEY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Aralık 2023

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

İsmail Alper GÜVEY' in “Dinamik Sistemlerde Bazı Topolojik Geçişkenlik Türleri ve Aralarındaki İlişkiler” başlıklı tezi 14/12/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek “Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği” nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvanı Adı-Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ	
Üye	: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK	
Üye	: Doç. Dr. Mustafa SALTAN	

Prof. Dr. Semra KURAMA
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

DANIşMAN ONAYI

Danişmanlığını yürüttüğüm yüksek lisans ęrencisi İsmail Alper GÜVEY “Dinamik Sistemlerde Bazı Topolojik Geçişkenlik Türleri ve Aralarındaki İlişkiler” başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımca incelenmiş ve öğrencinin tez savunması sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Tez Daniřmanı
Prof. Dr. Nedim DEğİRMENCİ

ÖZET

DİNAMİK SİSTEMLERDE BAZI TOPOLOJİK GEÇİŞKENLİK TÜRLERİ VE ARALARINDAKİ İLİŞKİLER

İsmail Alper GÜVEY

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Aralık 2023

Danışman: Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ

Bu tez çalışması dört ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, tez boyunca kullanılan kavramlar tanımlanmış, bazı özelliklerden bahsedilmiş ve shift (kaydırma) dönüşümlerinin kaotik davranışları incelenmiştir. Tezin ikinci bölümünde, topolojik geçişkenliği gerektiren durumlar ve bu durumlar arasındaki gerektirmeler ele alınmıştır. Ayrıca topolojik geçişkenliğin denk kavramları ve topolojik geçişkenliğin zayıf geçişkenlik ile olan ilişkisi incelenmiştir. Tezin üçüncü bölümünde, bir önceki bölümde incelenen durumlar için karşıt örnekler verilmiştir. Tezin son bölümünde, tek taraflı shift dönüşümü çarpım uzaylarında incelenmiş ve tez kapsamında ele alınan dizi uzaylarında farklı kaotik özelliklere sahip olan dönüşümler oluşturulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Kaotik Dinamik Sistemler, Topolojik Geçişkenlik, Topolojik Karıştırma, Zayıf Karıştırma.

ABSTRACT

SOME TYPES OF TOPOLOGICAL TRANSITIVITY AND THE RELATIONSHIPS BETWEEN THEM IN DYNAMICAL SYSTEMS

İsmail Alper GÜVEY

Department of Mathematics

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, December 2023

Supervisor: Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENÇİ

This thesis consists of four main sections. In the first section, the concepts used throughout the thesis are defined, some features are mentioned, and the chaotic behaviors of shift maps are examined. In the second section of the thesis, situations indicating topological transitivity and the implications of these situations are addressed. Also, the equivalent concepts of topological transitivity and the relationship between topological transitivity and weak transitivity have been examined. In the third section of the thesis, counterexamples are provided for the situations examined in the previous section. In the last section of the thesis, one-sided shift map have been examined in product spaces, and maps with different chaotic properties have been constructed in the sequence spaces covered within the scope of the thesis.

Keywords: Chaotic Dynamical Systems, Topological Transitivity, Topologically Mixing, Weakly Mixing.

TEŐEKKÖR

Hayatımın her anında desteklerini hiç eksik etmeyen çok kıymetli anneme ve biricik kardeşime sonsuz teşekkürlerimi sunar, rahmetli babamı saygıyla anarım.

Yüksek lisans eğitimin boyunca 2210–A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında verdiği desteklerden ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığına teşekkür ederim.

İsmail Alper GÜVEY



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

İsmail Alper GÜVEY

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	I
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	II
DANIŞMAN ONAYI.....	III
ÖZET	IV
ABSTRACT.....	V
TEŞEKKÜR.....	VI
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XI
1. TEMEL KAVRAMLAR	1
1.1. Kaotik Dinamik Sistemler	1
1.2. Topolojik Eşleniklik	3
1.3. Touhey Özelliği	5
1.4. Dizi Uzayları	6
1.4.1. Σ_2^1 tek taraflı dizi uzayı	6
1.4.2. Σ_2^2 iki taraflı dizi uzayı	9
2. DİNAMİK SİSTEMLERDEKİ BAZI KAVRAMLARIN BİRBİRLERİYLE OLAN İLİŞKİLERİ	19
2.1. Topolojik Geçişkenliğin Denk Tanımları	19
2.2. Topolojik Geçişkenlik ve Zayıf Geçişkenlik İlişkisi	20
2.3. Leo Özelliği Üzerine	21
2.4. Topolojik Karıştırma ve Zayıf Karıştırma İlişkisi	22
2.5. Zayıf Karıştırma ve Total Geçişkenlik İlişkisi	23
2.6. Kaotik Bir Fonksiyonun Bileşkeleri	27
2.7. Zayıf Karıştırmanın Denk Kavramları	28
3. KARŞIT ÖRNEKLER.....	31

3.1. Zayıf Geçişken Olan Topolojik Geçişken veya Yoğun Yörüngesi Olmayan Fonksiyonlar	31
3.2. Topolojik Karıştırma Olan Leo Olmayan Fonksiyon	32
3.3. Zayıf Karıştırma Olan Topolojik Karıştırma Olmayan Fonksiyon	33
3.4. Total Geçişken Olan Zayıf Karıştırma Olmayan Fonksiyon ...	34
3.5. Topolojik Geçişken Olan Total Geçişken Olmayan Fonksiyon.	38
4. DİZİ UZAYLARINDA YENİ KAOTİK DİNAMİK SİSTEMLERİN OLUŞTURULMASI	42
4.1. $\Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1$ Çarpım Dizi Uzayı	42
4.2. Dizi Uzayları Arasındaki İlişkiler	44
KAYNAKÇA	49
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1. Cantor kümesinin oluşturulması	7
Şekil 1.2. Henon dönüşümünün atraktörü	18
Şekil 2.1. $N(U'_1, V'_1) \subset N(U_2, V_2)$	24
Şekil 2.2. $N(V'_1, U'_1) \subset N(V_2, U_2)$	25
Şekil 2.3. Furstenberg Teoreminin ispatı için bir gösterim	26
Şekil 3.1. f fonksiyonunun grafiği	38
Şekil 3.2. f^2 fonksiyonunun grafiği	38
Şekil 3.3. Tent dönüşümünün grafiği	39
Şekil 3.4. T^2 fonksiyonunun grafiği	39
Şekil 3.5. r fonksiyonunun grafiği	39
Şekil 3.6. r^2 fonksiyonunun grafiği	40
Şekil 4.1. F fonksiyonunun oluşturulması	46
Şekil 4.2. G fonksiyonunun oluşturulması	47
Şekil 4.3. K fonksiyonunun oluşturulması	47
Şekil 4.4. L fonksiyonunun oluşturulması	48

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

(X, f)	: Kesikli dinamik sistem
f^n	: f fonksiyonunun kendisiyle n defa bileşkesi
$Orb_f(x_0)$	: x_0 noktasının f fonksiyonu altındaki yörüngesi
$Per_n(f)$	: f fonksiyonunun periyodu n olan noktalarının kümesi
$Per(f)$	: f fonksiyonunun tüm periyodik noktalarının kümesi
$N(A, B)$	: A kümesinden B kümesine adım kümesi
$f^{\times n}$	: f fonksiyonunun kendisiyle n defa kartezyen çarpımı olan fonksiyon
C	: Cantor kümesi
$C \times C$	: Cantor toz bulutu
Σ_2^1	: Tek taraflı dizi uzayı
S	: Tek taraflı shift dönüşümü
Σ_2^2	: İki taraflı dizi uzayı
σ	: İki taraflı shift dönüşümü
T_λ	: Çemberde öteleme dönüşümü

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez boyunca kullanacağımız ve kesikli dinamik sistemler teorisinde sıklıkla kullanılan çeşitli kavramların tanımına yer verilmiştir. Detaylı bilgi için Bkz. [12, 15–17].

1.1. Kaotik Dinamik Sistemler

Tanım 1.1.1. X topolojik uzay ve $f : X \rightarrow X$ fonksiyonundan oluşan (X, f) ikili-sine kesikli dinamik sistem denir [12].

Uyarı 1.1.2. Bu bölümdeki tanımlarda aksi belirtilmedikçe bir (X, f) kesikli dinamik sistemi kullanılmıştır.

Tanım 1.1.3. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere f fonksiyonunun n defa kendisiyle bileşkesi

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-tane}}$$

şeklinde gösterilir [12].

Tanım 1.1.4. $x_0 \in X$ noktasının f fonksiyonu altındaki yörüngesi veya bir diğer adıyla orbiti

$$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\} \subset X$$

kümesi olup bu küme $Orb_f(x_0)$ ile gösterilir [12].

Tanım 1.1.5. $x_0 \in X$ noktası için $f(x_0) = x_0$ oluyorsa, x_0 noktasına f fonksiyonunun sabit noktası denir [12].

Tanım 1.1.6. Bir $x_0 \in X$ için $f^n(x_0) = x_0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa bu x_0 noktasına f fonksiyonunun periyodu n olan periyodik noktası veya kısaca n periyotlu noktası denir. Buna göre $Orb_f(x_0)$ sonlu bir küme olup

$$Orb_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$$

şeklinde olacaktır [12].

$f^n(x_0) = x_0$ olacak şekildeki en küçük n doğal sayısına x_0 noktasının asal periyodu adı verilir [12].

Tanım 1.1.7. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere f fonksiyonunun periyodu n olan noktalarının kümesi

$$Per_n(f) = \{x \in X : f^n(x) = x\}$$

şeklindedir. Buna göre f fonksiyonunun tüm periyodik noktalarının kümesi

$$Per(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Per_n(f) = \{x \in X : f^n(x) = x, n \in \mathbb{N}\}$$

olarak tanımlanır [12].

Tanım 1.1.8. Boş kümeden farklı her $U, V \subset X$ açık alt kümeleri için,

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa f fonksiyonuna X üzerinde topolojik geçişkendir denir [12].

Tanım 1.1.9. (X, d) bir metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. $\epsilon > 0$ sayısı, her $x \in X$ noktasının keyfi bir N komşuluğu için

$$d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon$$

olacak şekilde $y \in N$ noktası ve $n \in \mathbb{N}$ sayısı mevcut olacak şekilde varsa f fonksiyonuna X üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır denir [12].

Tanım 1.1.10. X bir metrik uzay olmak üzere $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu fonksiyona X üzerinde (Devaney anlamında) kaotik fonksiyon, (X, f) ikilisine kaotik dinamik sistem denir [12].

1. f fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesi X 'de yoğundur.
2. f , X üzerinde topolojik geçişkendir.
3. f , X üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.

Teorem 1.1.11. (X, d) sonsuz elemanlı metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyon olsun. Eğer f ; topolojik geçişken ve $Per(f)$, X uzayında yoğunsa f başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır [6].

Uyarı 1.1.12. Bu tez çalışması boyunca bir (X, f) kesikli dinamik sisteminde aksi belirtilmediği sürece X sonsuz elemanlı ve f sürekli fonksiyon olarak ele alınacaktır. Bu nedenle tez çalışması boyunca kaotik bir fonksiyon, periyodik noktalarının kümesi yoğun olan ve topolojik geçişken bir fonksiyon olarak düşünülmesi gerekmektedir.

Teorem 1.1.13. $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere $f : I \rightarrow I$ sürekli fonksiyonu verilsin. Eğer f topolojik geçişkense $Per(f)$ kümesi I aralığında yoğundur, yani f fonksiyonu kaotiktir [25].

Tanım 1.1.14. $U \subset X$ boş olmayan herhangi iki açık küme olmak üzere her $n \geq n_0$ için $f^n(U) = X$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, f fonksiyonuna *leo özelliğine sahiptir* denir [2].

Tanım 1.1.15. $U, V \subset X$ boş olmayan herhangi iki açık küme olmak üzere her $n \geq n_0$ için $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa f fonksiyonuna *topolojik karıştırma* denir [16].

Tanım 1.1.16. $f \times f : X \times X \rightarrow X \times X$ fonksiyonu *topolojik geçişken* ise f fonksiyonuna *zayıf karıştırma* denir [16].

Tanım 1.1.17. Her $n \in \mathbb{N}$ için f^n fonksiyonu *topolojik geçişken* ise f fonksiyonuna *total geçişken* denir [16].

Uyarı 1.1.18. $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu *leo, topolojik karıştırma, zayıf karıştırma veya total karıştırma özelliklerinden birine sahipse topolojik geçişkendir.*

Tanım 1.1.19. (X, d) metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyon olmak üzere her $x, y \in X$, $\epsilon > 0$ ve $M \in \mathbb{N}$ için

$$d(f^m(x), f^k(z)) < \epsilon \quad \text{ve} \quad d(f^n(y), f^l(z)) < \epsilon$$

olacak şekilde $z \in X$ noktası ve $l - k > M$ özelliğinde $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ doğal sayıları varsa f fonksiyonuna *zayıf geçişken* denir [26].

Tanım 1.1.20. (X, f) kesikli dinamik sistemi ve $A, B \subset X$ alt kümeleri verilsin.

$$N(A, B) = \{n \in \mathbb{N} : f^n(A) \cap B \neq \emptyset\}$$

kümesine A 'dan B 'ye adım kümesi denir. Eğer özel olarak fonksiyon belirtilmek istenirse bu küme $N_f(A, B)$ olarak gösterilir [16].

1.2. Topolojik Eşleniklik

İki kesikli dinamik sistem verildiğinde bu sistemlerin denk olup olmadığı topolojik eşleniklik kavramı ile açıklanır. Böylece topolojik eşlenik olan dönüşümler dinamikleri açısından denk olurlar. Ayrıca topolojik eşleniklikten faydalananarak yeni kesikli dinamik sistemler oluşturmak mümkündür.

Tanım 1.2.1. (X, f) ve (Y, g) kesikli dinamik sistemleri verilsin. $h : X \rightarrow Y$ sürekli, örten fonksiyonu

$$g \circ h = h \circ f$$

olacak şekilde varsa bu dinamik sistemlere topolojik yarı denk dinamik sistemler, f ve g fonksiyonlarına ise topolojik yarı eşlenik fonksiyonlar denir [12].

Eğer h fonksiyonu bir homeomorfizm ise bu durumda bu dinamik sistemlere topolojik denk dinamik sistemler, f ve g fonksiyonlarına ise topolojik eşlenik fonksiyonlar denir. Bu durumda

$$g = h \circ f \circ h^{-1} \quad \text{veya} \quad f = h^{-1} \circ g \circ h$$

olarak yazılabilir [12].

Önerme 1.2.2. (X, f) ve (Y, g) kesikli dinamik sistemleri bir h fonksiyonu yardımıyla topolojik yarı denk dinamik sistemler olsun. Bu durumda $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $g^n \circ h = h \circ f^n$ olur [12].

Teorem 1.2.3 ([12, 15–17, 19, 26]). X, Y sonsuz elemanlı metrik uzaylar olmak üzere $f : X \rightarrow X$ ve $g : Y \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonları ve (X, f) , (Y, g) topolojik yarı denk dinamik sistemleri verilsin. Buna göre

- (i) $a \in X$, f 'nin n periyotlu noktası ise $h(a) = b \in Y$ noktası da g 'nin n periyotlu noktası olup dolayısıyla $Per(f) \subset X$ yoğun ise $Per(g) \subset Y$ yoğundur.
- (ii) f topolojik geçişken ise g de topolojik geçişkendir.
- (iii) f leo ise g de leodur.
- (iv) f topolojik karıştırma ise g de topolojik karıştırmadır.
- (v) f zayıf karıştırma ise g de zayıf karıştırmadır.
- (vi) f total geçişken ise g de total geçişkendir.
- (vii) f zayıf geçişken ise g de zayıf geçişkendir.
- (viii) f kaotik ise g de kaotiktir.

Uyarı 1.2.4. Dinamik sistemlerin topolojik denk olması durumunda bu teorem geçerliliğini korumaktadır.

1.3. Touhey Özelliği

Tanım 1.3.1. (X, d) sonsuz elemanlı metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyon ve $U, V \subset X$ boş olmayan keyfi açık küme olsun. Eğer $f^m(p) \in V$ olacak şekilde en az bir $p \in U$ periyodik noktası ve en az bir $m \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa f fonksiyonuna Touhey özelliğine sahiptir denir [24].

Yani, Touhey özelliğine sahip fonksiyonda boştan farklı keyfi iki açık küme verildiğinde her ikisine de değen bir periyodik yörünge vardır.

Teorem 1.3.2. X sonsuz elemanlı metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyon olsun. f fonksiyonunun Touhey özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun kaotik olmasıdır [24].

İspat. $(\Rightarrow)$ f Touhey özelliğine sahip olduğundan boştan farklı her açık kümede bir periyodik nokta vardır, yani f fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesi X içinde yoğundur. Bu periyodik nokta bir başka açık kümenin de elemanı olacağından f topolojik geçişken olur. Teorem 1.1.11 gereği f fonksiyonu kaotiktir.

$(\Leftarrow)$ Boştan farklı ve açık $U, V \subset X$ alt kümeleri verilsin. f kaotik olduğundan topolojik geçişkendir. Bu nedenle bir $m \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ olup f sürekli olduğundan $U' = U \cap f^{-m}(V)$ açık kümedir. $\overline{Per(f)} = X$ olduğundan $p \in U'$ olacak şekilde bir p periyodik noktası vardır. Bu durumda $f^m(p) \in V$ olup f fonksiyonunun Touhey özelliğine sahip olduğu görülür. $\square$

Touhey özelliği sayesinde kaotik dinamik sistemlerde ilginç bir örnek verilebilir. Bu örnek her noktası periyodik nokta olan kaotik fonksiyon örneğidir. Bunun için verilen herhangi bir kaotik fonksiyondan yararlanılır.

Örnek 1.3.3. $f : X \rightarrow X$ kaotik bir fonksiyon olsun. O halde f Touhey özelliğine sahip olup boştan farklı her $U, V \subset X$ açık kümeleri için $f^m(p) \in V$ olacak şekilde en az bir $p \in U$ periyodik noktası ve $m \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. f fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesine kısıtlanmış olan

$$f|_{Per(f)} : Per(f) \rightarrow Per(f)$$

fonksiyonu ele alınsın. $U' = Per(f) \cap U$ ve $V' = Per(f) \cap V$ alt uzayın boştan farklı açık kümeleri olacağından $p \in U'$ ve $f^m(p) \in V'$ olup kısıtlanmış fonksiyon

$Per(f)$ 'de Touhey özelliğine sahiptir. Bu durumda her noktası periyodik nokta olan kaotik fonksiyon elde edilir.

1.4. Dizi Uzayları

Sembolik dinamik ve dizi uzayları kavramı ilk olarak Morse ve Hedlund tarafından literatüre girmiştir [21]. Fakat zaman geçtikçe dizi uzayları ve bu uzaylarda tanımlı shift (kaydırma) dönüşümleri özellikle kaotik dinamik sistemlerin incelenmesi için sıklıkla başvurulmuş bir yöntem haline gelmiştir [12, 15]. Bu sayede dinamiğinin anlaşılması güç olan fonksiyonlar dizi uzaylarındaki shift dönüşümleri ile topolojik eşlenik kılınarak daha kolay bir şekilde yorumlanabilmektedir. İlk olarak tek taraflı dizi uzayı ve tek taraflı shift dönüşümünü, ardından iki taraflı dizi uzayı ve iki taraflı shift dönüşümü incelenecektir.

1.4.1. Σ_2^1 tek taraflı dizi uzayı

Tanım 1.4.1.

$$\Sigma_2^1 = \{x = x_0x_1x_2 \cdots : x_i \in \{0, 1\}, i = 0, 1, 2, \dots\}$$

kümesine tek taraflı dizi (sembol) uzayı denir. $x = x_0x_1 \cdots \in \Sigma_2^1$ ve $y = y_0y_1 \cdots \in \Sigma_2^1$ olmak üzere $d_1 : \Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d_1(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

şeklinde tanımlanan d_1 fonksiyonu Σ_2^1 üzerinde metriktir [12].

Teorem 1.4.2 (Yakınlık Teoremi-I [12]). $x = x_0x_1 \cdots \in \Sigma_2^1$ ve $y = y_0y_1 \cdots \in \Sigma_2^1$ olsun. Buna göre $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

1. $i = 0, 1, \dots, n$ iken $x_i = y_i$ ise $d_1(x, y) \leq \frac{1}{2^n}$ 'dir.
2. $d_1(x, y) < \frac{1}{2^n}$ ise $i = 0, 1, \dots, n$ için $x_i = y_i$ olur.

Önerme 1.4.3. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu birebir, örten ve sürekli olsun. Eğer X kompakt ve Y Hausdorff ise f homeomorfizmdir [22].

Tanım 1.4.4 (Cantor Kümesi). $C_0 = [0, 1]$ olmak üzere C_0 aralığını 3 eşit parçaya bölüp ortadaki $(1/3, 2/3)$ aralığını atarak $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ kümesini elde edelim. Burada $I_0 = [0, 1/3]$ ve $I_1 = [2/3, 1]$ denirse $C_1 = I_0 \cup I_1$ olarak ifade edilebilir. Benzer şekilde I_0 ve I_1 aralıklarının her birini önce 3 eşit parçaya bölüp sonra

ortadaki üçte birlik açık aralıkları atalım. Böylece $I_{00} = [0, 1/9]$, $I_{01} = [2/9, 1/3]$, $I_{10} = [2/3, 7/9]$ ve $I_{11} = [8/9, 1]$ olup $C_2 = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11}$ şeklinde olacaktır. Bu şekilde devam edilerek $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n . adımda 2^n tane aralığın birleşimi olarak elde edilen küme C_n şeklinde gösterilebilir. C Cantor kümesi ise

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

olarak tanımlanır (Bkz. Şekil 1.1).



Şekil 1.1. Cantor kümesinin oluşturulması

Teorem 1.4.5. Σ_2^1 dizi uzayı C Cantor kümesine homeomorftur [12].

Cantor kümesinden bir nokta alındığında bu noktanın bulunduğu C_n kümesinin sağındaki veya solundaki aralığa ait oluşuna göre 0 veya 1 olarak kodlanabilir. Burada sağ aralıktaysa 1, sol aralıktaysa 0 olarak düşünülebilir. Mesela $x \in C$ noktası sırasıyla $I_0, I_{00}, I_{001}, I_{0010}, I_{00101}$ aralıklarına ait ise bu x noktasının kod temsilinin ilk 5 terimi $x = 00101$ şeklinde ifade edilebilir. Fakat Cantor kümesinin elemanlarının kod temsili sonsuz uzunluktadır. Bu durumda $h : C \rightarrow \Sigma_2^1$,

$$h(x) = a_0a_1a_2a_3a_4 \cdots, a_i \in \{0, 1\}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayabiliriz. Gerçekten Cantor kümesindeki herhangi farklı iki eleman belli bir adıma kadar aynı alt aralıkta olsa dahi bu adımdan sonra ayrı aralıklara düşeceklerinden bu noktaların görüntüleri de farklı olacaktır. Üstelik dizi uzayındaki her bir elemana karşılık gelecek şekilde Cantor kümesinde bir nokta bulunabilir. Birbirlerine yakın olan noktalar ise belli bir indise kadar aynı aralıkta bulunacağından h fonksiyonu altındaki görüntüleri de Yakınlık Teoremi yardımıyla birbirlerine yakın olur. C Cantor kümesi kompakt ve Σ_2^1 tek taraflı dizi uzayı metrik uzay olduğundan h fonksiyonu Önerme 1.4.3 koşullarını sağlar. Böylece h fonksiyonu bir homeomorfizm olup Σ_2^1 dizi uzayı ile C Cantor kümesi homeomorftur.

Tanım 1.4.6. $S : \Sigma_2^1 \rightarrow \Sigma_2^1$, $S(x_0x_1x_2x_3 \cdots) = x_1x_2x_3x_4 \cdots$ fonksiyonuna tek taraflı shift dönüşümü adı verilir [12].

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir $x = x_0x_1x_2x_3 \cdots \in \Sigma_2^1$ noktasının S dönüşümü altında n . iterasyonu

$$S^n(x) = x_nx_{n+1}x_{n+2}x_{n+3} \cdots$$

şeklindedir.

Teorem 1.4.7. S tek taraflı shift dönüşümü süreklidir [12].

İspat. Keyfi $\epsilon > 0$ ve $x \in \Sigma_2^1$ verilsin. Bu durumda $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. Bu takdirde $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$ seçmek yeterli olacaktır. Gerçekten, $y \in B(x, \delta)$ ise $d_1(x, y) < \delta = \frac{1}{2^{n+1}}$ olacağından Teorem 1.4.2'den

$$\begin{aligned} x &= x_0x_1x_2 \cdots x_{n+1}x_{n+2} \cdots \\ y &= x_0x_1x_2 \cdots x_{n+1}y_{n+2} \cdots \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} S(x) &= x_1x_2x_3 \cdots x_{n+1}x_{n+2} \cdots \\ S(y) &= x_1x_2x_3 \cdots x_{n+1}y_{n+2} \cdots \end{aligned}$$

olup Teorem 1.4.2'den

$$d_1(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$$

olacağından S tek taraflı shift dönüşümü süreklidir. $\square$

Teorem 1.4.8. S tek taraflı shift dönüşümü Touhey özelliğine sahiptir.

İspat. n bir doğal sayı olmak üzere S dönüşümünün n periyotlu noktalarının kümesi

$$Per_n(S) = \{\overline{x_0x_1 \cdots x_{n-1}} : x_i \in \{0, 1\}, i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$$

şeklindedir. Boştan farklı $U, V \subset \Sigma_2^1$ açık kümelerini alalım. $x \in U$ ve $y \in V$ keyfi iki nokta olmak üzere

$$B(x, \epsilon) \subset U \quad \text{ve} \quad B(y, \epsilon) \subset V$$

olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ sayısı ve buna karşılık $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ bulunabilir. Özel olarak

$$p = x_0x_1 \cdots x_ny_0y_1 \cdots y_nx_0x_1 \cdots x_ny_0y_1 \cdots = \overline{x_0x_1 \cdots x_ny_0y_1 \cdots y_n}$$

noktasını alalım. Bu durumda Teorem 1.4.2'den

$$d_1(p, x) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$$

olup $p \in U$ olur. Dikkat edilirse $S^{2n+2}(p) = p$ olduğundan p bir periyodik noktadır. Ayrıca

$$S^{n+1}(p) = y_0 y_1 \cdots y_n x_0 x_1 \cdots x_n y_0 y_1 \cdots y_n x_0 x_1 \cdots$$

olduğundan ve Teorem 1.4.2'den

$$d_1(S^{n+1}(p), y) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$$

olup $S^{n+1}(p) \in V$ olur. Bu ise S tek taraflı shift dönüşümünün Touhey özelliğine sahip olduğunu gösterir. $\square$

Sonuç 1.4.9. S tek taraflı shift dönüşümü kaotiktir.

Teorem 1.4.10. S tek taraflı shift dönüşümü leo özelliğine sahiptir.

İspat. $U \neq \emptyset$, $U \subset \Sigma_2^1$ açık kümesi verilsin. $x \in U$ alalım. U açık olduğundan $B(x, \epsilon) \subset U$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ ve bu ϵ sayısı için $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. $a \in \Sigma_2^1$ keyfi bir nokta olsun.

$$x^* = x_0 x_1 x_2 \cdots x_n a_0 a_1 a_2 \cdots$$

noktası için Teorem 1.4.2'den $d_1(x, x^*) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$ olup $x^* \in B(x, \epsilon) \subset U$ olur. $k = n + 1$ için

$$S^k(x^*) = a_0 a_1 a_2 \cdots = a$$

ve a keyfi bir nokta olduğundan $S^k(U) = \Sigma_2^1$ olur. $\square$

Örnek 1.4.11. S tek taraflı shift dönüşümünden yararlanarak leo olan ancak kaotik olmayan bir fonksiyon örneği verelim. Σ_2^1 uzayından S dönüşümünün periyodik noktalarının ve akıbeti periyodik noktalarının çıkarılmasıyla elde edilen kümeye X diyelim. Bu durumda S dönüşümünün X kümesine kısıtlanmış fonksiyonu kaotik değildir. Çünkü kısıtlanmış fonksiyonun periyodik noktalarının kümesi X kümesinde yoğun değildir. S dönüşümünün leo olduğu Teorem 1.4.10'un ispatına benzer şekilde gösterilebilir.

1.4.2. Σ_2^2 iki taraflı dizi uzayı

Tanım 1.4.12.

$$\Sigma_2^2 = \{x = \cdots x_{-3} x_{-2} x_{-1} \cdot x_0 x_1 x_2 \cdots : x_i \in \{0, 1\}, i \in \mathbb{Z}\}$$

kümesine iki taraflı dizi (sembol) uzayı denir [12].

Önerme 1.4.13.

$$x = \cdots x_{-3}x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \cdots \in \Sigma_2^2$$

ve

$$y = \cdots y_{-3}y_{-2}y_{-1} \cdot y_0y_1y_2 \cdots \in \Sigma_2^2$$

olmak üzere $d : \Sigma_2^2 \times \Sigma_2^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu Σ_2^2 kümesi üzerinde bir metriktir [12].

İspat. Öncelikle d fonksiyonunun sınırlı olduğunu gösterelim. $x, y \in \Sigma_2^2$ için

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}} = \sum_{i=-\infty}^0 \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x_{-j} - y_{-j}|}{2^j} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Şimdi d 'nin metrik olduğunu gösterelim. Her $x, y, z \in \Sigma_2^2$ için,

1.

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{Z} \text{ için } |x_i - y_i| = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{Z} \text{ için } x_i = y_i \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

2.

$$d(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|y_i - x_i|}{2^{|i|}} = d(y, x)$$

3. Her $i \in \mathbb{Z}$ için $|x_i - y_i| = |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$ olduğundan

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - z_i + z_i - y_i|}{2^{|i|}} \\ &\leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - z_i|}{2^{|i|}} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|z_i - y_i|}{2^{|i|}} \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Dolayısıyla (Σ_2^2, d) ikilisi bir metrik uzaydır. □

Teorem 1.4.14 (Yakınlık Teoremi-II [15]).

$$x = \cdots x_{-n}x_{-n+1} \cdots x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \cdots x_{n-1}x_n \cdots \in \Sigma_2^2$$

ve

$$y = \cdots y_{-n}y_{-n+1} \cdots y_{-2}y_{-1} \cdot y_0y_1y_2 \cdots y_{n-1}y_n \cdots \in \Sigma_2^2$$

noktaları verilsin. Bu durumda

(i) Eğer $|i| \leq n$ için $x_i = y_i$ ise $d(x, y) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ olur.

(ii) Eğer $d(x, y) < \frac{1}{2^n}$ ise $|i| \leq n$ için $x_i = y_i$ olur.

İspat. (i)

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}} = \sum_{i=-\infty}^{-n-1} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}} + \sum_{i=-n}^n \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}} \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|x_{-j} - y_{-j}|}{2^j} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

(ii) Varsayalım ki en az bir i_0 için $(-n \leq i_0 \leq n)$ $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ olsun. Buna göre eğer $-n \leq i_0 < 0$ ise $0 < |i_0| \leq n$ olur. Üstelik

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}} = \dots + \frac{|x_{i_0} - y_{i_0}|}{2^{|i_0|}} + \dots + \frac{|x_0 - y_0|}{2^0} + \dots \\
&\geq \frac{|x_{i_0} - y_{i_0}|}{2^{|i_0|}} \\
&= \frac{1}{2^{|i_0|}} \\
&\geq \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

olduğundan bu ise $d(x, y) < \frac{1}{2^n}$ oluşu ile çelişir. Böylece varsayalım hatalı olup $-n \leq i < 0$ için $x_i = y_i$ olmalıdır. Eğer $0 \leq i_0 \leq n$ ise

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}} = \dots + \frac{|x_0 - y_0|}{2^0} + \dots + \frac{|x_{i_0} - y_{i_0}|}{2^{|i_0|}} + \dots \\
&\geq \frac{|x_{i_0} - y_{i_0}|}{2^{i_0}} \\
&= \frac{1}{2^{i_0}} \\
&\geq \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

olup bu durum $d(x, y) < \frac{1}{2^n}$ oluşuyla çelişir. Dolayısıyla sonuç olarak $|i| \leq n$ için $x_i = y_i$ olur. $\square$

Tanım 1.4.15. $\sigma : \Sigma_2^2 \rightarrow \Sigma_2^2$,

$$\sigma(\dots x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \dots) = \dots x_{-2}x_{-1}x_0 \cdot x_1x_2x_3 \dots$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *iki taraflı shift (kaydırma) dönüşümü* adı verilir [12].

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir $x = \dots x_{-3}x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \dots \in \Sigma_2^2$ noktasının σ dönüşümü altında n . iterasyonu

$$\sigma^n(x) = \dots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1} \cdot x_nx_{n+1}x_{n+2} \dots$$

şeklindedir.

Örnek 1.4.16. σ *iki taraflı shift dönüşümünün sabit noktalarını, 2 periyotlu noktalarını, 3 periyotlu noktalarını, 4 periyotlu noktalarını ve bu dönüşümün periyodik noktalarının en genel halini araştıralım. Sabit noktaları bulmak için*

$$\sigma(\dots x_{-3}x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \dots) = \dots x_{-3}x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \dots$$

ifadesinden

$$\dots x_{-3}x_{-2}x_{-1}x_0 \cdot x_1x_2x_3 \dots = \dots x_{-3}x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \dots$$

elde edilir. Bu durumda

$$\cdots, x_{-3} = x_{-2}, x_{-2} = x_{-1}, x_{-1} = x_0, x_0 = x_1, x_1 = x_2, x_2 = x_3, \cdots$$

olacağından iki taraflı shift dönüşümünün sabit noktaları

$$\overline{x_0} \cdot \overline{x_0} = \cdots x_0 x_0 x_0 x_0 \cdot x_0 x_0 x_0 x_0 \cdots$$

formunda olup sabit noktalar

$$\overline{0} \cdot \overline{0} = \cdots 0000 \cdot 0000 \cdots \quad \text{ve} \quad \overline{1} \cdot \overline{1} = \cdots 1111 \cdot 1111 \cdots$$

olur. σ 'nın iki periyotlu noktaları

$$\sigma^2(\cdots x_{-3} x_{-2} x_{-1} \cdot x_0 x_1 x_2 \cdots) = \cdots x_{-4} x_{-3} x_{-2} x_{-1} \cdot x_0 x_1 x_2 x_3 \cdots$$

denkleminde

$$\cdots x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 \cdot x_2 x_3 x_4 x_5 \cdots = \cdots x_{-4} x_{-3} x_{-2} x_{-1} \cdot x_0 x_1 x_2 x_3 \cdots$$

olup bu noktalar

$$\overline{x_0 x_1} \cdot \overline{x_0 x_1} = \cdots x_0 x_1 x_0 x_1 x_0 x_1 \cdot x_0 x_1 x_0 x_1 x_0 x_1 \cdots$$

şeklinde dir. Bu durumda asal periyodu 2 olan noktalar

$$\overline{01} \cdot \overline{01} = \cdots 010101 \cdot 010101 \cdots \quad \text{ve} \quad \overline{10} \cdot \overline{10} = \cdots 101010 \cdot 101010 \cdots$$

olur. $\sigma^3(x) = x$ denkleminde asal periyodu 3 olan noktalar

$$\overline{x_0 x_1 x_2} \cdot \overline{x_0 x_1 x_2} = \cdots x_0 x_1 x_2 x_0 x_1 x_2 \cdot x_0 x_1 x_2 x_0 x_1 x_2 \cdots$$

formunda olup açık olarak

$$\overline{001} \cdot \overline{001} = \cdots 001001001 \cdot 001001001 \cdots$$

$$\overline{010} \cdot \overline{010} = \cdots 010010010 \cdot 010010010 \cdots$$

$$\overline{011} \cdot \overline{011} = \cdots 011011011 \cdot 011011011 \cdots$$

$$\overline{100} \cdot \overline{100} = \cdots 100100100 \cdot 100100100 \cdots$$

$$\overline{110} \cdot \overline{110} = \cdots 110110110 \cdot 110110110 \cdots$$

$$\overline{101} \cdot \overline{101} = \cdots 101101101 \cdot 101101101 \cdots$$

noktalarıdır. $\sigma^4(x) = x$ denkleminde asal periyodu 4 olan noktalar

$$\overline{x_0 x_1 x_2 x_3} \cdot \overline{x_0 x_1 x_2 x_3} = \cdots x_0 x_1 x_2 x_3 x_0 x_1 x_2 x_3 \cdot x_0 x_1 x_2 x_3 x_0 x_1 x_2 x_3 \cdots$$

formunda olup bu noktalar aşağıda belirtildiği gibidir:

$$\begin{aligned}
\overline{0001} \cdot \overline{0001} &= \dots 00010001 \cdot 00010001 \dots \\
\overline{0011} \cdot \overline{0011} &= \dots 00110011 \cdot 00110011 \dots \\
\overline{0111} \cdot \overline{0111} &= \dots 01110111 \cdot 01110111 \dots \\
\overline{0010} \cdot \overline{0010} &= \dots 00100010 \cdot 00100010 \dots \\
\overline{0100} \cdot \overline{0100} &= \dots 01000100 \cdot 01000100 \dots \\
\overline{0110} \cdot \overline{0110} &= \dots 01100110 \cdot 01100110 \dots \\
\overline{1000} \cdot \overline{1000} &= \dots 10001000 \cdot 10001000 \dots \\
\overline{1100} \cdot \overline{1100} &= \dots 11001100 \cdot 11001100 \dots \\
\overline{1001} \cdot \overline{1001} &= \dots 10011001 \cdot 10011001 \dots \\
\overline{1011} \cdot \overline{1011} &= \dots 10111011 \cdot 10111011 \dots \\
\overline{1101} \cdot \overline{1101} &= \dots 11011101 \cdot 11011101 \dots \\
\overline{1110} \cdot \overline{1110} &= \dots 11101110 \cdot 11101110 \dots
\end{aligned}$$

Genel olarak n bir doğal sayı olmak üzere $\sigma^n(x) = x$ denkleminde σ iki taraflı shift dönüşümünün n periyotlu noktaları elde edilir. Bu noktaların genel formu

$$\overline{x_0 x_1 \dots x_{n-1}} \cdot \overline{x_0 x_1 \dots x_{n-1}} = \dots x_0 x_1 \dots x_{n-1} \cdot x_0 x_1 \dots x_{n-1} \dots$$

şeklinde olacaktır. Buna göre iki taraflı shift dönüşümünün periyodu n olan noktalarının kümesi

$$Per_n(\sigma) = \{\overline{x_0 x_1 \dots x_{n-1}} \cdot \overline{x_0 x_1 \dots x_{n-1}} : x_i \in \{0, 1\}, i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$$

şeklindedir.

Teorem 1.4.17. σ iki taraflı shift dönüşümü Σ_2^2 üzerinde bir homeomorfizmdir.

İspat. σ dönüşümünün birebir olduğunu gösterelim. $x, y \in \Sigma_2^2$ için $\sigma(x) = \sigma(y)$ olsun. Yani

$$\begin{aligned}
\sigma(\dots x_{-2} x_{-1} \cdot x_0 x_1 \dots) &= \dots x_{-2} x_{-1} x_0 \cdot x_1 x_2 x_3 \dots \\
\sigma(\dots y_{-2} y_{-1} \cdot y_0 y_1 \dots) &= \dots y_{-2} y_{-1} y_0 \cdot y_1 y_2 y_3 \dots
\end{aligned}$$

olup buradan

$$\dots x_{-2} x_{-1} x_0 \cdot x_1 x_2 x_3 \dots = \dots y_{-2} y_{-1} y_0 \cdot y_1 y_2 y_3 \dots$$

olur. O halde her $i \in \mathbb{Z}$ için $x_i = y_i$ olup $x = y$ 'dir.

σ dönüşümünün örten olduğunu gösterelim.

$$x = \cdots x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1 \cdots \in \Sigma_2^2$$

olsun.

$$\sigma(\cdots x_{-3}x_{-2} \cdot x_{-1}x_0x_1 \cdots) = x$$

olduğundan $x \in \sigma(\Sigma_2^2)$ olup σ dönüşümü örtendir.

σ dönüşümünün herhangi bir $a \in \Sigma_2^2$ noktasında sürekli olduğu gösterilsin. Her $\epsilon > 0$ için $\frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$ olacak şekilde en az bir $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. Bu durumda

$$\delta = \frac{1}{2^n}$$

seçmek yeterlidir. $x \in B(a, \delta)$ ise $d(a, x) < \delta = \frac{1}{2^n}$ olduğundan Teorem 1.4.14'den $|i| \leq n$ için $x_i = a_i$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} a &= \cdots a_{-n-1}a_{-n} \cdots a_{-2}a_{-1} \cdot a_0a_1 \cdots a_na_{n+1} \cdots \\ x &= \cdots x_{-n-1}a_{-n} \cdots a_{-2}a_{-1} \cdot a_0a_1 \cdots a_nx_{n+1} \cdots \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} \sigma(a) &= \cdots a_{-n-1}a_{-n} \cdots a_{-2}a_{-1}a_0 \cdot a_1a_2 \cdots a_na_{n+1} \cdots \\ \sigma(x) &= \cdots x_{-n-1}a_{-n} \cdots a_{-2}a_{-1}a_0 \cdot a_1a_2 \cdots a_nx_{n+1} \cdots \end{aligned}$$

olup Teorem 1.4.14'den

$$d(\sigma(a), \sigma(x)) \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$$

olduğundan shift dönüşümü Σ_2^2 üzerinde sürekli bir fonksiyondur. Benzer şekilde $\sigma^{-1} : \Sigma_2^2 \rightarrow \Sigma_2^2$,

$$\sigma^{-1}(\cdots x_{-3}x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \cdots) = \cdots x_{-3}x_{-2} \cdot x_{-1}x_0x_1x_2 \cdots$$

fonksiyonunun sürekli olduğu gösterilir. Sonuç olarak σ shift dönüşümü Σ_2^2 üzerinde bir homeomorfizmdir. $\square$

Teorem 1.4.18. σ iki taraflı shift dönüşümü Touhey özelliğine sahiptir.

İspat. $U, V \subset \Sigma_2^2$ boştan farklı açık kümeler ve $x \in U$, $y \in V$ olsun. Bu durumda $B(x, \epsilon) \subset U$ ve $B(y, \epsilon) \subset V$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ sayısı vardır. Ayrıca $\frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabilir. Özel olarak

$$p = \cdots x_{-n} \cdots x_n y_{-n} \cdots y_n x_{-n} \cdots x_{-1} \cdot x_0 \cdots x_n y_{-n} \cdots y_n x_{-n} \cdots x_n \cdots$$

noktası alınsın. Dikkat edilirse p noktası periyodu $2(2n+1)$ olan bir periyodik noktadır. Ayrıca Teorem 1.4.14'den

$$d(x, p) \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$$

olup $p \in B(x, \epsilon)$ olduğu görülmektedir. Benzer olarak $m = 2n+1$ için

$$\sigma^m(p) = \cdots y_{-n} \cdots y_n x_{-n} \cdots x_n y_{-n} \cdots y_{-1} \cdot y_0 \cdots y_n x_{-n} \cdots x_n y_{-n} \cdots y_n \cdots$$

olup

$$d(y, \sigma^m(p)) \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$$

olduğundan $\sigma^m(p) \in B(y, \epsilon)$ olduğu görülür. Böylece $p \in U$ periyodik noktası için $\sigma^m(p) \in V$ olup bu ise σ iki taraflı shift dönüşümünün Touhey özelliğine sahip olduğunu gösterir. $\square$

Sonuç 1.4.19. σ iki taraflı shift dönüşümü kaotiktir.

Teorem 1.4.20. $f : X \rightarrow X$ homeomorfizmi kaotik ise $f^{-1} : X \rightarrow X$ fonksiyonu da kaotiktir.

İspat. Önce topolojik geçişkenliği gösterelim. Boştan farklı $U, V \subset X$ açık kümeleri verilsin. f kaotik olduğundan $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. f sürekli ve V açık küme olduğundan $f^{-k}(V)$ açıktır. Buna göre

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset \Rightarrow U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$$

ve $f^{-k} = (f^{-1})^k$ olduğundan, f^{-1} fonksiyonu topolojik geçişkendir.

Şimdi periyodik noktalar kümesinin yoğunluğunu gösterelim. Boş kümeden farklı herhangi bir $U \subset X$ açık kümesini alalım. $\overline{Per(f)} = X$ olduğundan $f^p(x) = x$ olacak şekilde bir $p \in \mathbb{N}$ doğal sayısı ve $x \in U$ periyodik noktası vardır. f homeomorfizm olduğundan $x = f^{-p}(x)$ olup $\overline{Per(f^{-1})} = X$ olduğu görülür. Dolayısıyla f^{-1} fonksiyonu kaotiktir. $\square$

Sonuç 1.4.21. $\sigma^{-1} : \Sigma_2^2 \rightarrow \Sigma_2^2$,

$$\sigma^{-1}(\cdots x_{-3}x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \cdots) = \cdots x_{-4}x_{-3}x_{-2} \cdot x_{-1}x_0x_1x_2 \cdots$$

fonksiyonu da kaotiktir.

Örnek 1.4.22. $a, b \in \mathbb{R}$ verilsin, $T_1, T_2, T_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$T_1(x, y) = (x, 1 - ax^2 + y)$$

$$T_2(x, y) = (bx, y)$$

$$T_3(x, y) = (y, x)$$

olmak üzere $T_{ab} = T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(x, y) = T_3 \circ T_2 \circ T_1(x, y)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonuna "Henon Dönüşümü" adı verilir [18]. Ayrıca Henon dönüşümünün bir homeomorfizmdir. Bu fonksiyon T_{ab} veya herhangi bir karışıklık yaratmayacaksa T şeklinde gösterilir. Henon dönüşümü daha açık olarak

$$T(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx)$$

şeklinde ifade edilebilir. $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$E(x, y) = \left(ax, \frac{a}{b}y\right)$$

olsun. $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$H(x, y) = (a + by - x^2, x)$$

olmak üzere

$$E \circ T = H \circ E$$

olduğu gösterilsin. Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

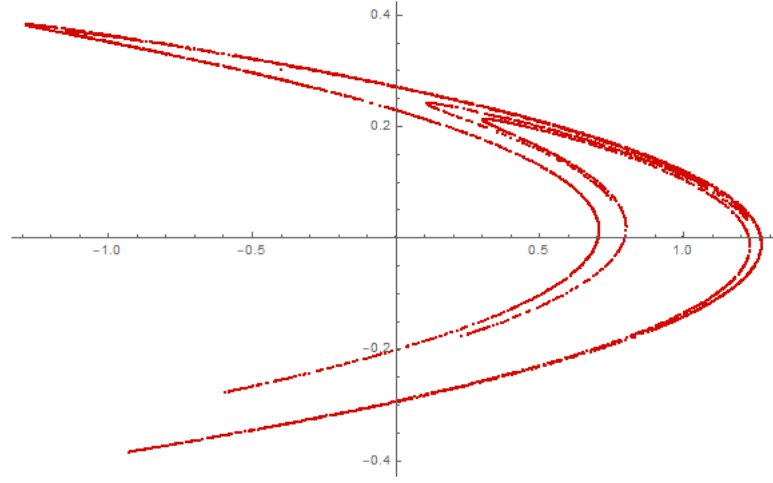
$$E \circ T(x, y) = E(T(x, y)) = E(1 - ax^2 + y, bx) = (a - a^2x^2 + ay, ax)$$

ve

$$H \circ E(x, y) = H(E(x, y)) = H\left(ax, \frac{a}{b}y\right) = (a + ay - a^2x^2, ax)$$

olup T ile H dönüşümleri E dönüşümü yardımıyla topolojik eşleniktir. Devaney ve Nitecki, Henon dönüşümünün iki taraflı shift dönüşümü ile topolojik eşlenik olduğunu ispatlamıştır [13]. Böylece Henon dönüşümünün belirli parametre değerleri için kaotik olduğu sonucuna varılmıştır. Özel olarak $a = 1.4$ ve $b = 0.3$ parametre değerleri için Henon dönüşümünün atraktörü Şekil 1.2'de gösterilmiştir. Henon dönüşümü ile ilgili detaylı bilgi için Bkz. [13, 18]. Ayrıca Henon dönüşümünün tersi olan fonksiyon

$$H^{-1}(x, y) = \left(y, \frac{x + y^2 - a}{b}\right)$$



Şekil 1.2. Henon dönüşümünün atraktörü

Teorem 1.4.20 gereğince kaotiktir.

2. DİNAMİK SİSTEMLERDEKİ BAZI KAVRAMLARIN BİRBİRLE- RİYLE OLAN İLİŞKİLERİ

Kesikli dinamik sistemler teorisinde topolojik geçişkenlik çok sık kullanılan bir kavramdır. Özellikle kaotik bir dinamik sistemin topolojik geçişkenlik özelliğine sahip olması bunun bir sebebidir. Bu nedenle topolojik geçişkenlik bir fonksiyonunun dinamiği açısından oldukça önemlidir. Topolojik geçişkenliğe alternatif olacak şekilde bazı yeni kavramlar tanımlanmış ve bu kavramların detaylı incelemeleri çeşitli çalışmalarda yer almıştır, Bkz. [1, 2, 5, 8, 10, 19, 20, 23, 26]. Bu bölümün amacı kesikli dinamik sistem teorisindeki bazı kavramların hem kendileriyle hem de diğer kavramlarla olan ilişkilerini incelemektir.

2.1. Topolojik Geçişkenliğin Denk Tanımları

Topolojik geçişkenlik kavramına denk olan üç adet özellik verilecektir. Bunların ilki adım kümelerinden yararlanılarak verilecektir. Bir diğer özellik Değirmenci ve Koçak tarafından incelenen yoğun yörünge ve topolojik geçişkenlik arasındaki ilişkiden meydana gelmektedir, Bkz. [10]. Son verilecek olan özellik ise bir topolojinin tabanıyla ilgilidir.

Teorem 2.1.1 ([16]). $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda boştan farklı her $U, V \subset X$ açık kümeleri için aşağıdakiler denktir:

(i) f topolojik geçişkendir.

(ii) $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

(iii) $N(U, V) \neq \emptyset$ dir.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) f fonksiyonu topolojik geçişken olduğundan $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda bir $x \in U$ için $f^n(x) \in V$ olup $x \in f^{-n}(V)$ olduğundan istenilen görülür.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Bir $n \in \mathbb{N}$ için $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda bir $x \in U \cap f^{-n}(V)$ için $f^n(x) \in f^n(U)$ ve $f^n(x) \in V$ olacağından $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olup $N(U, V) \neq \emptyset$ olur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Eğer $N(U, V) \neq \emptyset$ ise

$$N(U, V) = \{n \in \mathbb{N} : f^n(U) \cap V \neq \emptyset\} \neq \emptyset$$

olup f fonksiyonunun topolojik geçişken olduğu görülmektedir. $\square$

Tanım 2.1.2. X topolojik uzayının herhangi bir $U \subset X$ boştan farklı açık kümesinin hiçbir sonlu alt kümesi U içinde yoğun olmuyorsa X uzayına *thick uzay* adı verilir [10].

Önerme 2.1.3. X *thick uzay* olmak üzere $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu yoğun yörüngeye sahipse f fonksiyonu topolojik geçişkendir [10].

Önerme 2.1.4. X tam metrik uzayının sayılabilir bir tabanı mevcut olmak üzere $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu topolojik geçişken olsun. Bu durumda X uzayında yörüngesi yoğun olan bir nokta vardır [10].

Önerme 2.1.5. X sayılabilir tabanlı, *thick*, tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun topolojik geçişken olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun yoğun yörüngeye sahip olmasıdır [10].

Teorem 2.1.6. $f : X \rightarrow X$ bir fonksiyon ve $\mathcal{B}$ ailesi X üzerindeki topolojinin bir tabanı olsun. f fonksiyonunun topolojik geçişken olması için gerek ve yeter koşul her $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için $f^n(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısının olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ Taban elemanları açık küme olduğundan istenilen görülmektedir.

$(\Leftarrow)$ Boştan farklı $U, V \subset X$ açık kümeleri verilsin. $\mathcal{B}$ ailesi X üzerindeki topolojinin bir tabanı olduğundan, $B_i \subset U$ ve $B_j \subset V$ olacak şekilde $B_i, B_j \in \mathcal{B}$ vardır. Hipotez gereği $f^n(B_i) \cap B_j \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olup f fonksiyonu topolojik geçişkendir. $\square$

2.2. Topolojik Geçişkenlik ve Zayıf Geçişkenlik İlişkisi

Topolojik geçişkenlik özelliği bazı fonksiyonlar için kuvvetli bir özellik olabilir. Mesela $\mathbb{R}$ üzerinde standart metrik uzay dikkate alındığında $I \subset \mathbb{R}$ aralığından kendine tanımlı sürekli bir f fonksiyonu topolojik geçişkense hem başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır hem de periyodik noktaları yoğundur (Bkz. [25]). Wang, Yin ve Yan [26]'da topolojik geçişkenliğin daha zayıflatılmış bir versiyonu olan zayıf geçişkenlik tanımını vermiştir. Her ne kadar topolojik geçişkenliğin zayıf geçişkenliği gerektirdiği ifade edilmiş olsa da bu tezde bu durum bir teorem olarak verilecek ve ispat edilecektir.

Teorem 2.2.1. (X, d) sayılabilir tabanlı, *thick*, tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyon olmak üzere, f topolojik geçişkense zayıf geçişkendir.

İspat. Keyfi $x, y \in X$, $\epsilon > 0$ ve $M \in \mathbb{N}$ verilsin. Önerme 2.1.5'den $\overline{Orb_f(z)} = X$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Bu durumda $m = n = 1$ olmak üzere $d(f(x), f^k(z)) < \epsilon$ ve $d(f(y), f^l(z)) < \epsilon$ olacak şekilde $k, l \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $l - k > M$ ise ispat biter. $l - k \leq M$ olsun. X thick metrik uzay olduğundan, X uzayında boş olmayan açık bir kümeden sonlu nokta çıkarılması durumunda oluşan küme boştan farklı ve açıktır. Buna göre $B_1 = B(f(y), \epsilon) - \{f^l(z)\}$ boştan farklı açık küme olup z noktasının yörüngesi uzayda yoğun olduğundan $f^{l_1}(z) \in B_1$ olacak şekilde bir $l_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $l_1 - k > M$ ise ispat biter. Aksi halde benzer şekilde $B_2 = B_1 - \{f^{l_1}(z)\}$ kümesi için $f^{l_2}(z) \in B_2$ olacak şekilde $l_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $l_2 - k > M$ durumunda ispat biter. Aksi halde bu yöntemle devam edilirse yeterince büyük bir $l_r \in \mathbb{N}$ doğal sayısı $d(f(y), f^{l_r}(z)) < \epsilon$ ve $l_r - k > M$ olacak şekilde bulunabilir. Dolayısıyla f fonksiyonu zayıf geçişkendir. $\square$

Block ve Coppel [7]'de (s. 155) kompakt metrik uzaylarda topolojik geçişkenliğin yoğun yörüngenin varlığına denk olduğunu göstermiştir. Buradan aşağıdaki sonuç çıkmaktadır.

Sonuç 2.2.2. (X, d) thick, kompakt metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyon olmak üzere, f topolojik geçişkense zayıf geçişkendir.

2.3. Leo Özelliği Üzerine

Teorem 2.3.1. $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu leo ise topolojik karıştırmadır.

İspat. $U, V \subset X$, $U, V \neq \emptyset$ açık olsun. f leo olduğundan her $n \geq n_0$ için $f^n(U) = X$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. O halde her $n \geq n_0$ için $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olup f topolojik karıştırmadır. $\square$

Uyarı 2.3.2. X bir metrik uzay olsun. Eğer $f : X \rightarrow X$ homeomorfizm ise f leo özelliğine sahip olamaz, gösterelim. Varsayalım ki f leo özelliğine sahip olsun. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ alalım. X metrik uzay olduğundan

$$x \in U_1, y \in U_2 \text{ ve } U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

olacak şekilde $U_1, U_2 \subset X$ açık kümeleri vardır. f leo olduğundan öyle n_1 ve n_2 doğal sayıları vardır ki $k \geq n_1$ ve $m \geq n_2$ iken $f^k(U_1) = X$ ve $f^m(U_2) = X$ olur. $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ seçilirse $n \geq n_0$ için $f^n(U_1) = f^n(U_2) = X$ olacaktır. Bu durumda

keyfi bir $z \in X$ için

$$f^n(x') = f^n(y') = z$$

olacak şekilde $x' \in U_1$ ve $y' \in U_2$ vardır. f homeomorfizm olduğundan $x' = y'$ olmalıdır. Fakat bu $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ olması ile çeliştiğinden f fonksiyonu leo özelliğine sahip olamaz.

Sonuç 2.3.3. σ iki taraflı shift dönüşümü Teorem 1.4.17'den dolayı homeomorfizm olduğu için leo özelliğine sahip değildir. Yani σ dönüşümü leo olmayan kaotik bir fonksiyondur. Benzer durum Henon dönüşümü için de geçerlidir.

2.4. Topolojik Karıştırma ve Zayıf Karıştırma İlişkisi

Teorem 2.4.1. $f : X \rightarrow X$ fonksiyonunun zayıf karıştırma olması için gerek ve yeter koşul boştan farklı her $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ açık kümesi için

$$N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$$

olmasıdır [16].

İspat. Boştan farklı ve açık herhangi iki $U, V \subset X \times X$ alt kümeleri için, $U_1 \times U_2 \subset U$ ve $V_1 \times V_2 \subset V$ olacak şekilde $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ açık alt kümeleri vardır. $f \times f$ fonksiyonunun topolojik geçişken olduğundan

$$(f \times f)^k(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir k doğal sayısı vardır. Bu durumda

$$(f \times f)^k(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) = (f^k(U_1) \cap V_1) \times (f^k(U_2) \cap V_2) \neq \emptyset$$

olup, $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ ve $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ dır. Dolayısıyla $k \in N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$ olup istenilen görülür.

Tersine $k \in N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$ ise bu durumda (2.1) kolayca görülür. Böylece $f \times f$ topolojik geçişken olup f zayıf karıştırmadır. $\square$

Teorem 2.4.2. $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu topolojik karıştırma ise zayıf karıştırmadır.

İspat. $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ boştan farklı ve açık alt kümeleri verilsin. f topolojik karıştırma olduğundan öyle bir n_1 doğal sayısı için $n \geq n_1$ iken $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ olur. Benzer şekilde bir n_2 doğal sayısı için $n \geq n_2$ iken $f^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ olur. $k = \max\{n_1, n_2\}$ dersek $f^k(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ ve $f^k(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $k \in N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$ olup Teorem 2.4.1'den istenilen görülür. $\square$

2.5. Zayıf Karıştırma ve Total Geçişkenlik İlişkisi

Zayıf karıştırma özelliği total geçişkenliği gerektiren bir durumdur. Ancak bunu görmek o kadar açık değildir. Bu nedenle önce 4-Açık Özelliği ve Furstenberg Teoremi verilecektir. Bu teoremlerin sonucu olarak zayıf karıştırma ve total geçişkenlik ilişkisi belirtilecektir. Bu ilişki bir sonraki bölümde görüleceği üzere kaotik fonksiyonlar için oldukça önemlidir.

Teorem 2.5.1 (4-Açık Özelliği [16]). $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu verilsin, $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ boş olmayan keyfi açık alt kümeler olsun.

(a) Eğer f ile değişmeli bir $g : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu için

$$g(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad g(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$$

ise

$$N(U'_1, V'_1) \subset N(U_2, V_2) \quad \text{ve} \quad N(V'_1, U'_1) \subset N(V_2, U_2)$$

olacak şekilde boştan farklı ve açık $U'_1 \subset U_1$ ve $V'_1 \subset V_1$ alt kümeleri vardır.

(b) f topolojik geçişken ve $N(U_1, U_2) \cap N(V_1, V_2) \neq \emptyset$ ise $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$ dir.

İspat. (a) g sürekli fonksiyon olduğundan, $g^{-1}(U_2)$ ve $g^{-1}(V_2)$ açık küme olup hipotezden $U_1 \cap g^{-1}(U_2) \neq \emptyset$ ve $V_1 \cap g^{-1}(V_2) \neq \emptyset$ açık kümelerdir. O halde

$$U'_1 \subset U_1 \cap g^{-1}(U_2)$$

olcak şekilde U'_1 açık kümesi vardır. Benzer şekilde

$$V'_1 \subset V_1 \cap g^{-1}(V_2)$$

olacak şekilde bir V'_1 açık kümesi de vardır. Bu durumda

$$U'_1 \subset U_1 \quad \text{ve} \quad g(U'_1) \subset U_2$$

ve

$$V'_1 \subset V_1 \quad \text{ve} \quad g(V'_1) \subset V_2$$

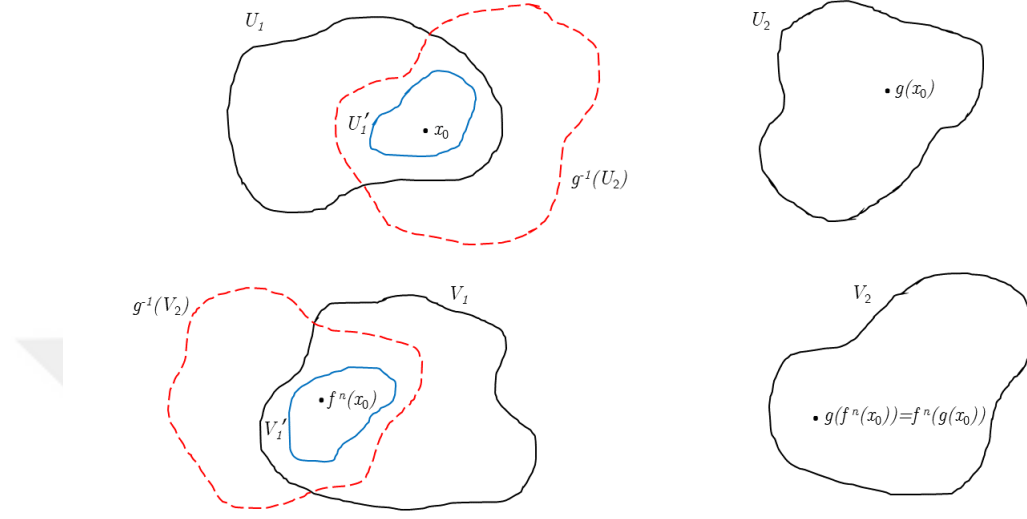
dir. $n \in N(U'_1, V'_1)$ ise $f^n(x_0) \in V'_1$ olacak şekilde bir $x_0 \in U'_1$ vardır. $g(U'_1) \subset U_2$ olduğundan $x_0 \in U'_1$ için $g(x_0) \in U_2$ olur. $g(V'_1) \subset V_2$ olduğundan $g(f^n(x_0)) \in V_2$ olup hipotez gereği

$$f^n(g(x_0)) = g(f^n(x_0)).$$

Böylece $f^n(g(x_0)) \in V_2$ elde edilip $n \in N(U_2, V_2)$ olur. Dolayısıyla

$$N(U'_1, V'_1) \subset N(U_2, V_2)$$

elde edilir (Bkz. Şekil 2.1).



Şekil 2.1. $N(U'_1, V'_1) \subset N(U_2, V_2)$

Benzer şekilde $k \in N(V'_1, U'_1)$ ise $f^k(y_0) \in U'_1$ olacak şekilde bir $y_0 \in V'_1$ vardır. $g(V'_1) \subset V_2$ olduğundan $y_0 \in V'_1$ için $g(y_0) \in V_2$ dir. $g(U'_1) \subset U_2$ olduğundan $g(f^k(y_0)) \in U_2$ olup hipotezden

$$f^k(g(y_0)) = g(f^k(y_0))$$

olduğundan $f^k(g(y_0)) \in U_2$ olur. Yani $k \in N(V_2, U_2)$ olacağından

$$N(V'_1, U'_1) \subset N(V_2, U_2)$$

olduğu görülür (Bkz. Şekil 2.2).

(b) f topolojik geçişken ve $N(U_1, U_2) \cap N(V_1, V_2) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda bir

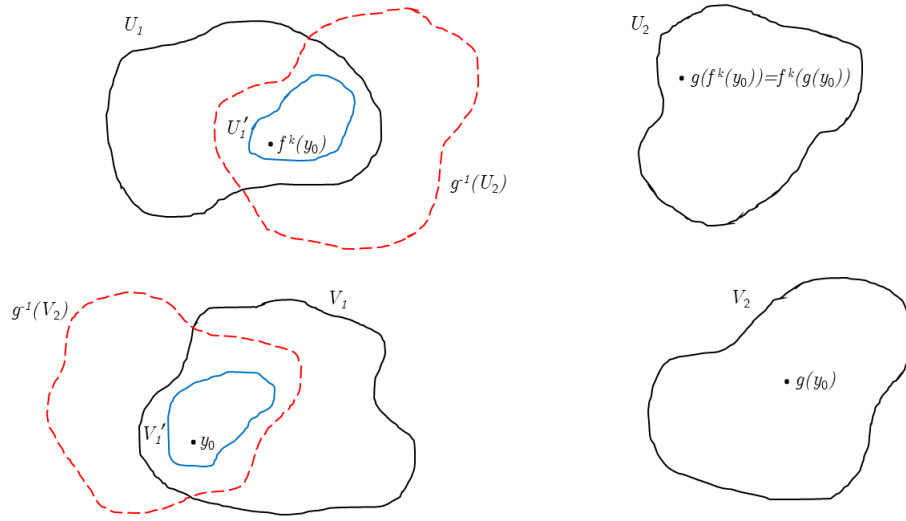
$$n \in N(U_1, U_2) \cap N(V_1, V_2)$$

için (a)'dan $g = f^n$ olarak tanımlanırsa istenilen görülür. $\square$

Teorem 2.5.2 (Furstenberg [16]). $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu zayıf karıştırma ise her $n > 1$ doğal sayısı için

$$f^{\times n} = f \times \cdots \times f : X^n \rightarrow X^n$$

fonksiyonu topolojik geçişkendir. Yani zayıf karıştırma olan sürekli bir fonksiyonun kendisiyle n defa kartezyen çarpımı olan fonksiyon topolojik geçişkendir.



Şekil 2.2. $N(V'_1, U'_1) \subset N(V_2, U_2)$

İspat. $n = 2$ için zayıf karıştırma tanımı gereği $f \times f$ topolojik geçişkendir.

$$f^{\times n} = f \times \cdots \times f$$

fonksiyonu topolojik geçişken olsun. $f^{\times(n+1)} = f \times \cdots \times f \times f$ fonksiyonunun topolojik geçişken olduğunu görmek için Teorem 2.1.1'den $i = 1, 2, \dots, n+1$ olmak üzere boştan farklı ve açık olan her $U_i, V_i \subset X$ için

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} N(U_i, V_i) \neq \emptyset \quad (2.2)$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. f zayıf karıştırma olduğundan

$$f^m(U_n) \cap U_{n+1} \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad f^m(V_n) \cap V_{n+1} \neq \emptyset$$

olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. f sürekli ve her i için U_i, V_i açık küme olduğundan $f^{-m}(U_{n+1})$ ve $f^{-m}(V_{n+1})$ açık kümedir. Bu durumda

$$U'_n \subset U_n \cap f^{-m}(U_{n+1}) \quad \text{ve} \quad V'_n \subset V_n \cap f^{-m}(V_{n+1})$$

olacak şekildeki U'_n, V'_n açık kümelerini alalım. $f^{\times n}$ topolojik geçişken olduğundan

$$k \in \bigcap_{i=1}^{n-1} N(U_i, V_i) \cap N(U'_n, V'_n)$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu ise aslında

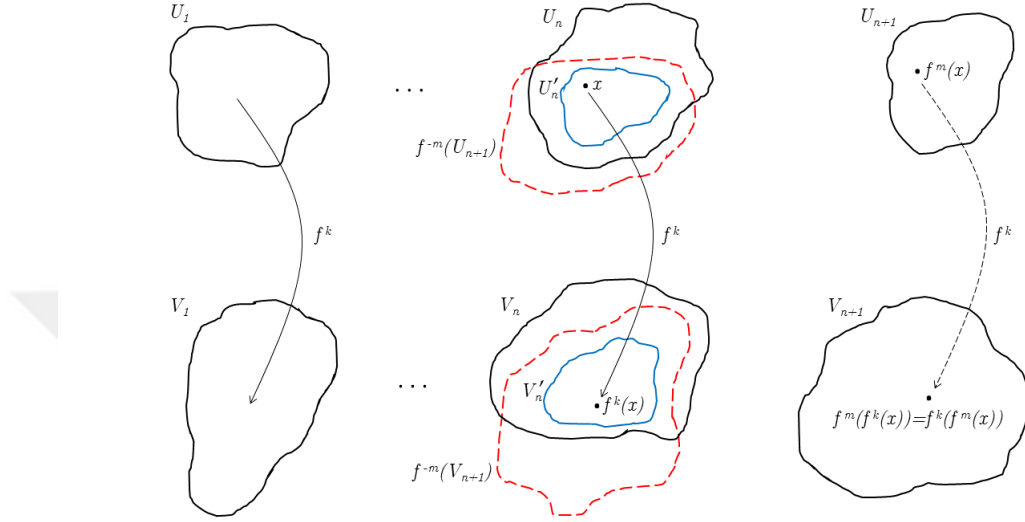
$$k \in \bigcap_{i=1}^n N(U_i, V_i)$$

anlamına gelmektedir. Amacımız ise $k \in N(U_{n+1}, V_{n+1})$ olduğunu gösterip (2.2)'yi elde etmektir. Teorem 2.5.1'den bir $x \in U'_n$ için $f^k(x) \in V'_n$ ve $V'_n \subset f^{-m}(V_{n+1})$

olduğundan $f^m(f^k(x)) \in V_{n+1}$ olur. Üstelik $x \in U'_n$ için $f^m(x) \in U_{n+1}$ olup

$$f^k(f^m(x)) = f^m(f^k(x))$$

olduğundan $k \in N(U_{n+1}, V_{n+1})$ olduğu görülür (Bkz. Şekil 2.3). Böylece istenilen sonuca varılır. $\square$



Şekil 2.3. Furstenberg Teoreminin ispatı için bir gösterim

Sonuç 2.5.3. $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu zayıf karıştırma ise her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{\times n} = f \times \cdots \times f : X^n \rightarrow X^n$$

fonksiyonu zayıf karıştırmaz. Yani zayıf karıştırma olan her sürekli fonksiyonun kendisiyle n defa kartezyen çarpımı olan fonksiyon da zayıf karıştırma olur.

Teorem 2.5.4. $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu zayıf karıştırma ise her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n : X \rightarrow X$ fonksiyonu da zayıf karıştırmaz [16].

İspat. Boştan farklı $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ açık alt kümeler ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. f^n fonksiyonunun zayıf karıştırma olduğunu gösterelim. Bunun için

$$f^{nq}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad f^{nq}(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$$

olacak şekilde bir $q \in \mathbb{N}$ bulunmalıdır. Teorem 2.5.2'den $f^{\times 2n}$ topolojik geçişkendir. Buna göre

$$\begin{aligned} U &= U_1 \times f^{-1}(U_1) \times \cdots \times f^{-n+1}(U_1) \times U_2 \times f^{-1}(U_2) \times \cdots \times f^{-n+1}(U_2) \\ V &= V_1 \times V_1 \times \cdots \times V_1 \times V_2 \times V_2 \times \cdots \times V_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

olacak şekilde $U, V \subset X^{2n}$ açık kümelerini alalım. $f^{\times 2n}$ topolojik geçişken olduğundan

$$(f^{\times 2n})^k(U) \cap V \neq \emptyset \quad (2.4)$$

olacak şekilde bir k doğal sayısı mevcuttur. Bir $q > 0$ ve $0 \leq r \leq n-1$ için $k = nq + r$ olarak yazılabilir. (2.3) ve (2.4)'den

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq (f^{\times 2n})^k(U) \cap V \\ &= (f^{\times 2n})^k(U_1 \times f^{-1}(U_1) \times \cdots \times f^{-n+1}(U_1) \times U_2 \times f^{-1}(U_2) \times \cdots \times f^{-n+1}(U_2)) \\ &\quad \cap (V_1 \times V_1 \times \cdots \times V_1 \times V_2 \times V_2 \times \cdots \times V_2) \\ &= (f^k(U_1) \cap V_1) \times (f^{k-1}(U_1) \cap V_1) \times \cdots \times (f^{k-n+1}(U_1) \cap V_1) \times \\ &\quad (f^k(U_2) \cap V_2) \times (f^{k-1}(U_2) \cap V_2) \times \cdots \times (f^{k-n+1}(U_2) \cap V_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $r = 0, 1, \dots, n-1$ olmak üzere $f^{k-r}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ ve $f^{k-r}(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ olur. Üstelik her r için $f^{k-r}(U_1) = f^{nq}(U_1)$ ve $f^{k-r}(U_2) = f^{nq}(U_2)$ olduğundan,

$$f^{nq}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad f^{nq}(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$$

olduğu görülür. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için f^n fonksiyonunun zayıf karıştırma olduğu sonucuna varılır. $\square$

Sonuç 2.5.5. $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu zayıf karıştırma ise f total geçişkendir. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için f^n topolojik geçişkendir.

2.6. Kaotik Bir Fonksiyonun Bileşkeleri

Bir f fonksiyonu kaotik ise her $n \in \mathbb{N}$ için f^n fonksiyonu kaotik olur mu sorusu akla gelen bir sorudur. Ancak bu durum genelde doğru değildir. Bu sorunun cevabı için zayıf karıştırma kavramı önemlidir. Zayıf karıştırmanın gerektirdiği bazı durumlardan yararlanarak zayıf karıştırma olan her sürekli f kaotik fonksiyonu için f^n fonksiyonunun kaotik olduğu sonucuna varılmıştır. Bu soru Elaydi tarafından (Bkz. [15]) sorulmuş ve bu tez çalışmasında genel bir ispat yapılmaya çalışılmıştır. Bu durumun tersi ise daha kolay bir şekilde gösterilmektedir.

Teorem 2.6.1. X sonsuz elemanlı bir metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu kaotik ve zayıf karıştırma olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için f^n fonksiyonu da kaotiktir.

İspat. f zayıf karıştırma olduğundan Sonuç 2.5.5 gereği f fonksiyonu total geçişkendir. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için f^n fonksiyonu topolojik geçişkendir. Şimdi periyodik noktaların yoğunluğunu gösterelim. Boş kümeden farklı keyfi bir $U \subset X$ açık kümesini alalım. f kaotik olduğundan f fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesi X 'de yoğun olup $f^k(p) = p$ olacak şekilde bir $p \in U$, $k \in \mathbb{N}$ vardır. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(f^n)^k(p) = (f^k)^n(p) = f^k \circ \dots \circ f^k(p) = p$$

olduğundan p noktası f^n fonksiyonunda k periyotlu noktası olacağından f^n fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesi X içinde yoğundur. Dolayısıyla Teorem 1.1.11'den her $n \in \mathbb{N}$ için f^n fonksiyonu kaotiktir. $\square$

Teorem 2.6.2. X sonsuz elemanlı bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu verilsin. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f^n : X \rightarrow X$ fonksiyonu kaotik ise f fonksiyonu da kaotiktir.

İspat. f^n topolojik geçişken olduğundan boştan farklı her $U, V \subset X$ açık kümeleri için $(f^n)^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $f^{nk}(U) \cap V \neq \emptyset$ olacağından f fonksiyonu topolojik geçişkendir. $p \in X$ noktası f^n fonksiyonunun m periyotlu noktası ise bu p noktası aynı zamanda f fonksiyonunun mn periyotlu noktasıdır. f^n fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesi X uzayında yoğun olduğundan f fonksiyonunun da periyodik noktalarının kümesi X uzayında yoğun olacaktır. Dolayısıyla Teorem 1.1.11'den f kaotik bir fonksiyondur. $\square$

2.7. Zayıf Karıştırmanın Denk Kavramları

Zayıf karıştırma özelliğine denk bir kavram Teorem 2.4.1 ile 4 açık kümeyle ilişkilendirilerek sunulmuştur. Şimdi sırasıyla inceleyeceğimiz iki teorem ile zayıf karıştırmanın denkliğini önce 3 sonra 2 açık küme yardımıyla ifade edeceğiz. Bunun sonucu olarak bir fonksiyonun total geçişken ve kaotik olması durumunda zayıf karıştırma olması için yeterli olduğunu gösteren yeni bir teorem ortaya konulacaktır.

Teorem 2.7.1. $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyonunun zayıf karıştırma olması için gerek ve yeter koşul boştan farklı her $U, V_1, V_2 \subset X$ açık kümesi için

$$N(U, V_1) \cap N(U, V_2) \neq \emptyset$$

olmasıdır [16].

İspat. $U \times U, V_1 \times V_2 \subset X \times X$ boştan farklı keyfi açıkları için $N(U, V_1) \cap N(U, V_2) \neq \emptyset$ olduğu kolayca görülür.

Tersine, f fonksiyonunun zayıf karıştırma olduğunu göstermek için Teorem 2.4.1 kullanılır. Yani boş olmayan herhangi $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ açık kümeleri verildiğinde $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$ olduğunu göstermek yeterlidir. Varsayımdan

$$N(U_1, U_2) \cap N(U_1, V_2) \neq \emptyset$$

olup $n \in N(U_1, U_2) \cap N(U_1, V_2)$ alalım. f sürekli ve U_i, V_i açık kümeler olduğundan $U_1 \cap f^{-n}(U_2)$ açık küme olup bu kümeye U diyelim. Hipotez tekrar kullanılırsa

$$N(U, V_1) \cap N(U, f^{-n}(V_2)) \neq \emptyset$$

olur. $m \in N(U, V_1) \cap N(U, f^{-n}(V_2))$ ise en az bir $x \in U$ için $f^m(x) \in f^{-n}(V_2)$ olup

$$f^m(f^n(x)) \in V_2 \quad (2.5)$$

dir. Üstelik $x \in U$ noktası için $f^n(x) \in U_2$ olup (2.5)'den $m \in N(U_2, V_2)$ olduğu görülür. Benzer şekilde en az bir $y \in U$ için $f^m(y) \in V_1$ olup $U = U_1 \cap f^{-n}(U_2)$ olduğundan $m \in N(U_1, V_1)$ elde edilir. Böylece $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$ olup Teorem 2.4.1 gereği f fonksiyonunun zayıf karıştırma olduğu gösterilmiştir. $\square$

Teorem 2.7.2. $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyonunun zayıf karıştırma olması için gerek ve yeter koşul boştan farklı her $U, V \subset X$ açık kümesi için

$$N(U, U) \cap N(U, V) \neq \emptyset$$

olmasıdır [16].

İspat. Gerek koşul kolayca görülür. Yeter koşul için Teorem 2.7.1. kullanılır. Boş kümeden farklı $U, V_1, V_2 \subset X$ açık kümeleri verilsin. Hipotezden $N(U, U) \cap N(U, V_1) \neq \emptyset$ olup $f^n(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $n \in N(U, U) \cap N(U, V_1)$ vardır. f sürekli ve V_1, V_2 açık küme olduğundan $f^{-n}(V_1), f^{-n}(V_2)$ açık küme olup

$$U_1 = U \cap f^{-n}(V_1)$$

olsun. Hipotez tekrar uygulanırsa

$$N(U_1, U_1) \cap N(U_1, f^{-n}(V_2)) \neq \emptyset$$

olur. $m \in N(U_1, U_1) \cap N(U_1, f^{-n}(V_2))$ alalım. Bu durumda

$$x \in U_1 \Rightarrow f^m(x) \in U_1 \Rightarrow f^m(x) \in f^{-n}(V_1) \Rightarrow f^{m+n}(x) \in V_1$$

olacak şekilde bir $x \in U_1$ noktası vardır. Böylece

$$m + n \in N(U, V_1) \quad (2.6)$$

olur. Benzer şekilde

$$y \in U_1 \Rightarrow f^m(y) \in f^{-n}(V_2) \Rightarrow f^{m+n}(y) \in V_2$$

olacak şekilde bir $y \in U_1$ noktası mevcut olduğundan

$$m + n \in N(U, V_2) \quad (2.7)$$

olup (2.6) ve (2.7) bize $N(U, V_1) \cap N(U, V_2) \neq \emptyset$ sonucunu verir. Bu ise f fonksiyonunun zayıf karıştırma olması için yeterlidir. $\square$

Teorem 2.7.3. $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu kaotik ve total geçişken ise f zayıf karıştırmadır.

İspat. $U, V \subset X$ boştan farklı herhangi iki açık küme olsun. f fonksiyonu kaotik olduğundan f fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesi X içinde yoğundur. Bu durumda $f^k(p) = p$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ doğal sayısı ve $p \in U$ periyodik noktası vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için

$$f^{kn}(p) = (f^k)^n(p) = f^k \circ \dots \circ f^k(p) = p$$

olup $kn \in N(U, U)$ olur. f total geçişken olduğundan f^k fonksiyonu topolojik geçişkendir. Buna göre en az bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{kn}(U) \cap V \neq \emptyset$$

olacağından $kn \in N(U, V)$ elde edilir. Böylece $N(U, U) \cap N(U, V) \neq \emptyset$ olup Teorem 2.7.2'den f fonksiyonunun zayıf karıştırma olduğu görülür. $\square$

Sonuç 2.7.4. $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu kaotik ve total geçişken ise her $n \in \mathbb{N}$ için f^n zayıf karıştırmadır.

3. KARŞIT ÖRNEKLER

Bu bölümde, bir önceki bölümde elde edilen sonuçlara karşıt örnekler oluşturulmuş ve sırayla incelenmiştir.

3.1. Zayıf Geçişken Olan Topolojik Geçişken veya Yoğun Yörüngesi Olmayan Fonksiyonlar

İlk önce zayıf geçişken olup topolojik geçişken olmayan, sonra zayıf geçişken olup yoğun yörüngeye sahip olmayan fonksiyon örnekleri verilecektir.

Örnek 3.1.1. $X = [0, \infty)$ üzerinde standart metrik göz önüne alınsın. $f : X \rightarrow X$, $f(x) = \frac{x}{2}$ fonksiyonu zayıf geçişkendir, gösterelim. $x, y \in X$, $\epsilon > 0$ ve $M \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$0 < f^m(x) = \frac{x}{2^m} < \epsilon \quad \text{ve} \quad 0 < f^n(y) = \frac{y}{2^n} < \epsilon$$

olacak şekilde $m, n \in \mathbb{N}$ vardır. Bir $z \in X$ için

$$0 < f^k(z) = \frac{z}{2^k} < \epsilon$$

olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $|f^m(x) - f^k(z)| < \epsilon$ olur. $l > M + k$ olacak şekilde bir l doğal sayısı için

$$f^l(z) = \frac{z}{2^l} < \frac{z}{2^{M+k}} = \frac{1}{2^M} \cdot \frac{z}{2^k} \leq \frac{z}{2^k} < \epsilon$$

olup $|f^n(y) - f^l(z)| < \epsilon$ olur. Dolayısıyla f fonksiyonu zayıf geçişkendir. Ancak $U = (1, 2)$ ve $V = (3, 4)$ için $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ doğal sayısı yoktur. Bu nedenle fonksiyonu topolojik geçişken değildir.

Örnek 3.1.2. $f : S^1 \rightarrow S^1$, $f(\theta) = 2\theta$ dönüşümü iyi bilinen kaotik bir fonksiyondur [12, 15]. $X = \text{Per}(f)$ olmak üzere Örnek 1.3.3'den $f|_X : X \rightarrow X$ fonksiyonu da kaotik olup topolojik geçişkendir. Şimdi f fonksiyonunun zayıf geçişken olduğunu gösterelim. Keyfi $x, y \in X$, $\epsilon > 0$ ve $M \in \mathbb{N}$ verilsin. $m = n = 1$ alalım. Bu durumda f dönüşümü Touhey özelliğine sahip olduğundan bir $w \in B(f(x), \epsilon)$ periyodik noktası için $f^l(w) \in B(f(y), \epsilon)$ olacak şekilde $l \in \mathbb{N}$ vardır. w periyodik nokta olduğundan $f^k(z) = w$ olacak şekilde bir $z \in X$ periyodik noktası ve $k \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. Bu durumda $f^k(z) \in B(f(x), \epsilon)$ ve $f^{k+l}(z) \in B(f(y), \epsilon)$ olup

$$d(f(x), f^k(z)) < \epsilon \quad \text{ve} \quad d(f(y), f^{k+l}(z)) < \epsilon$$

olur. Böylece $l > M$ ise f fonksiyonunun zayıf geçişken olduğu görülür. Aksi halde z

noktasının periyodu p olarak düşünülürse yeterince büyük bir $r \in \mathbb{N}$ için $l + rp > M$ ve $f^{k+l+rp}(z) = f^{k+l}(f^{rp}(z)) = f^{k+l}(z)$ olup istenilen görülür.

S^1 üzerinde indirgenen metrik benzer şekilde $X = \text{Per}(f)$ için de bir metrik olduğundan bu uzayda sonlu nokta kümeleri kapalı olup kapanışları kendileridir. Bu durumda her $\theta \in X$ için $\text{Orb}_f(\theta)$ sonlu olup $\overline{\text{Orb}_f(\theta)} = \text{Orb}_f(\theta) \neq X$ olur. Böylece f fonksiyonu X uzayına kısıtlandığında hiçbir noktanın yörüngesi uzayda yoğun olamaz.

3.2. Topolojik Karıştırma Olan Leo Olmayan Fonksiyon

Teorem 3.2.1. σ iki taraflı shift dönüşümü topolojik karıştırmadır.

İspat. Σ_2^2 uzayında boştan farklı ve açık U, V alt kümeleri verilsin. $x \in U, y \in V$ noktalarını alalım. Bu noktalar için

$$B\left(x, \frac{1}{2^{n-1}}\right) \subset U \quad \text{ve} \quad B\left(y, \frac{1}{2^{n-1}}\right) \subset V$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Teorem 1.4.14'den yararlanarak $B\left(x, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ yuvarında olan ve belli adım sonra $B\left(y, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ yuvarına giren noktalar oluşturacağız. Bu noktaların ilki

$$\alpha^1 = \cdots \alpha_{-n-2} x_{-n-1} \cdots x_{-1} \cdot x_0 \cdots x_{n+1} y_{-n-1} \cdots y_{n+1} \alpha_{3n+6} \cdots$$

olsun. Dikkat edilirse $d(\alpha^1, x) \leq \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}$ olup $\alpha^1 \in U$ olur. Ayrıca

$$\sigma^{2n+3}(\alpha^1) = \cdots x_{n+1} y_{-n-1} \cdots y_{-1} \cdot y_0 \cdots y_{n+1} \alpha_{3n+6} \cdots$$

olduğundan $d(\sigma^{2n+3}(\alpha^1), y) \leq \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}$ olup $\sigma^{2n+3}(\alpha^1) \in V$ olur. Benzer şekilde

$$\alpha^2 = \cdots \alpha_{-n-3} x_{-n-2} x_{-n-1} \cdots x_{-1} \cdot x_0 \cdots x_{n+1} x_{n+2} y_{-n-1} \cdots y_{n+1} \alpha_{3n+7} \cdots$$

noktası için $d(\alpha^2, x) \leq \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$ olup $\alpha^2 \in U$ olur.

$$\sigma^{2n+4}(\alpha^2) = \cdots x_{n+2} y_{-n-1} \cdots y_{-1} \cdot y_0 \cdots y_{n+1} \alpha_{3n+7} \cdots$$

olduğundan $d(\sigma^{2n+4}(\alpha^2), y) \leq \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}$ olup $\sigma^{2n+4}(\alpha^2) \in V$ olur. Böyle devam ederek her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha^k = \cdots \alpha_{-(n+k+1)} x_{-(n+k)} \cdots x_{-1} \cdot x_0 \cdots x_{n+k} y_{-n-1} \cdots y_{n+1} \alpha_{3n+4+k} \cdots$$

noktası oluşturulur. Üstelik her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma^{2n+2+k}(\alpha^k) = \cdots x_{n+k} y_{-n-1} \cdots y_{-1} \cdot y_0 \cdots y_{n+1} \alpha_{3n+4+k} \cdots$$

olur. Böylece

$$\{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \dots\} \subset U$$

ve

$$\{\sigma^{2n+3}(\alpha^1), \sigma^{2n+4}(\alpha^2), \sigma^{2n+5}(\alpha^3), \dots\} \subset V$$

olur. Dolayısıyla $n_0 = 2n + 3$ olmak üzere her $N \geq n_0$ için

$$\sigma^N(U) \cap V \neq \emptyset$$

olduğundan iki taraflı shift dönüşümü topolojik karıştırma.

□

Sonuç 3.2.2. σ iki taraflı shift dönüşümü topolojik karıştırma olduğundan zayıf karıştırma, total geçişken ve topolojik geçişkendir. Benzer durum Henon dönüşümü için de geçerlidir.

Sonuç 3.2.3. S tek taraflı shift dönüşümü leon olduğundan topolojik karıştırma, zayıf karıştırma, total geçişken ve topolojik geçişkendir.

Sonuç 3.2.4. σ iki taraflı shift dönüşümü kaotik ve zayıf karıştırma olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için σ^n dönüşümü kaotik ve zayıf karıştırmaz. Benzer durum Henon dönüşümü için de geçerlidir.

Sonuç 3.2.5. S tek taraflı shift dönüşümü kaotik ve zayıf karıştırma olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için S^n dönüşümü kaotik ve zayıf karıştırmaz.

3.3. Zayıf Karıştırma Olan Topolojik Karıştırma Olmayan Fonksiyon

Örnek 3.3.1. Zayıf karıştırma olan ancak topolojik karıştırma olmayan bir fonksiyon örneğini inceleyelim. Burada kendi oluşturduğumuz topolojik uzay üzerinde bir fonksiyondan bahsedeceğiz.

$X = \{a, b, c, d\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$ olmak üzere

$$f : X \rightarrow X$$

$$a \mapsto f(a) = c$$

$$b \mapsto f(b) = d$$

$$c \mapsto f(c) = b$$

$$d \mapsto f(d) = a$$

olsun. Dikkat edilirse her $U \in \tau$ için $f^4(U) = U$ olur.

$$\mathcal{B} = \{U \times V : U, V \in \tau\}$$

sınıfı $X \times X$ üzerindeki çarpım topolojisi için bir tabandır. Açık olarak $\mathcal{B}$ nin elemanlarını yazalım:

$$\mathcal{B} = \{X \times \emptyset, X \times X, X \times \{b\}, X \times \{a, b\}, X \times \{a, b, d\},$$

$$\{b\} \times \emptyset, \{b\} \times X, \{b\} \times \{b\}, \{b\} \times \{a, b\}, \{b\} \times \{a, b, d\},$$

$$\{a, b\} \times \emptyset, \{a, b\} \times X, \{a, b\} \times \{b\}, \{a, b\} \times \{a, b\}, \{a, b\} \times \{a, b, d\},$$

$$\{a, b, d\} \times \emptyset, \{a, b, d\} \times X, \{a, b, d\} \times \{b\}, \{a, b, d\} \times \{a, b\}, \{a, b, d\} \times \{a, b, d\}\}.$$

Her $B \in \mathcal{B}$ için $B = U \times V$ olacak şekilde $U, V \in \tau$ vardır. Bu durumda

$$(f \times f)^4(B) = (f \times f)^4(U \times V) = (f^4(U)) \times (f^4(V)) = U \times V$$

olur. Üstelik dikkat edilirse her $B \in \mathcal{B}$ için $(b, b) \in B$ dir. Buna göre her $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için

$$(f \times f)^4(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$$

olup Teorem 2.1.6'dan $f \times f$ fonksiyonu topolojik geçişken, yani f fonksiyonu zayıf karıştırıcıdır.

Şimdi f fonksiyonunun topolojik karıştırma olmadığını gösterelim. $U = \{a, b, d\}$ ve $V = \{b\}$ olsun. $f^2(U) \cap V \neq \emptyset$, $f^3(U) \cap V \neq \emptyset$ ve $f^4(U) \cap V \neq \emptyset$ olur. Fakat $f^5(U) \cap V = \emptyset$ dir. O halde $n_0 = 2$ seçilirse $n \geq n_0$ olan her n için $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olamaz. Böylece f fonksiyonu topolojik karıştırma değildir.

3.4. Total Geçişken Olan Zayıf Karıştırma Olmayan Fonksiyon

Total geçişken olup zayıf karıştırma olmayan fonksiyon örneği için S^1 birim çemberindeki öteleme dönüşümünden faydalanacağız. $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$T_\lambda : S^1 \rightarrow S^1$$

$$\theta \mapsto T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona çemberde öteleme dönüşü denir [12]. λ değerinin rasyonel sayı olup olmamasına göre T_λ dönüşümünün dinamiği değişkenlik gösterir. Bu durum daha sonra Jacobi Teoremi olarak ele alınacaktır. Şimdi T_λ dönüşümü hakkında bazı bilgiler verelim.

$\theta, \omega \in S^1$ keyfi noktalar olmak üzere

$$d(T_\lambda(\theta), T_\lambda(\omega)) = |T_\lambda(\theta) - T_\lambda(\omega)| = |\theta + 2\pi\lambda - \omega - 2\pi\lambda| = |\theta - \omega| = d(\theta, \omega)$$

olduğundan T_λ dönüşümü bir izometridir, yani uzaklık koruyan bir fonksiyondur.

$\theta \in S^1$ noktası verilsin. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T_\lambda(\theta) &= \theta + 2\pi\lambda \\ T_\lambda^2(\theta) &= \theta + 4\pi\lambda \\ T_\lambda^3(\theta) &= \theta + 6\pi\lambda \\ &\vdots \\ T_\lambda^n(\theta) &= \theta + 2n\pi\lambda \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 3.4.1 (Jacobi [12]). $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_\lambda : S^1 \rightarrow S^1$, $T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda$ dönüşümü verilsin. Bu durumda

- (i) $\lambda \in \mathbb{Q}$ ise S^1 birim çemberindeki her nokta periyodik noktadır.
- (ii) $\lambda \notin \mathbb{Q}$ ise S^1 birim çemberindeki her noktanın yörüngesi yoğundur.

İspat. (i) $\lambda \in \mathbb{Q}$ ise $\lambda = \frac{n}{m}$ olacak şekilde $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ vardır. Keyfi $\theta \in S^1$ için

$$T_\lambda^m(\theta) = \theta + 2m\pi\lambda = \theta + 2m\pi\frac{n}{m} = \theta + 2n\pi$$

olup $n \in \mathbb{Z}$ olduğundan $\theta + 2n\pi = \theta$ olur. Dolayısıyla $T_\lambda^m(\theta) = \theta$ olup birim çemberde bulunan her nokta periyodiktir.

(ii) Önce hiçbir $\theta \in S^1$ noktasının periyodik nokta olmadığını göstereyim. Eğer θ periyodik olsaydı bir $q \in \mathbb{N}$ için $T_\lambda^q(\theta) = \theta$ olurdu. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\theta = \theta + 2n\pi$ olduğundan

$$T_\lambda^q(\theta) = \theta \Rightarrow \theta + 2q\pi\lambda = \theta + 2n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n}{q}$$

olup bu ise $\lambda \notin \mathbb{Q}$ oluşu ile çelişir. Bu durumda birim çemberde hiçbir nokta periyodik nokta olmayıp her $\theta \in S^1$ için $Orb_{T_\lambda}(\theta)$ sonsuz elemanlıdır. S^1 kompakt ve $Orb_{T_\lambda}(\theta)$ sonsuz elemanlı bir küme olduğundan $Orb_{T_\lambda}(\theta)$ kümesinin en az bir limit noktası vardır (Bkz. [22]). $\epsilon > 0$ verilsin. $\omega \in S^1$ noktası $Orb_{T_\lambda}(\theta)$ kümesinin bir limit noktası olsun. Bu durumda her $n > n_0$ için

$$|T_\lambda^n(\theta) - \omega| < \frac{\epsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $k > m > n_0$ olmak üzere

$$|T_\lambda^k(\theta) - T_\lambda^m(\theta)| \leq |T_\lambda^k(\theta) - \omega| + |T_\lambda^m(\theta) - \omega| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

olur. Buradan $p = k - m$ dersek

$$|T_\lambda^p(\theta) - \theta| = |T_\lambda^{k-m}(\theta) - \theta| = |T_\lambda^k(\theta) - T_\lambda^m(\theta)| < \epsilon$$

olur. T_λ izometri olduğundan T_λ^p de izometridir. Yani bu durumda

$$|T_\lambda^{2p}(\theta) - T_\lambda^p(\theta)| < \epsilon, |T_\lambda^{3p}(\theta) - T_\lambda^{2p}(\theta)| < \epsilon, \dots$$

olacağından

$$(\theta, T_\lambda^p(\theta)), (T_\lambda^p(\theta), T_\lambda^{2p}(\theta)), (T_\lambda^{2p}(\theta), T_\lambda^{3p}(\theta)), \dots$$

yay parçalarının uzunlukları ϵ dan küçük olur. ϵ keyfi olduğundan birim çemberdeki her açık kümenin içerisinde en az bir tane $Orb_{T_\lambda}(\theta)$ kümesinin elemanı bulunur. Bu ise $Orb_{T_\lambda}(\theta)$ kümesinin S^1 de yoğun olduğunu ve θ keyfi olduğundan S^1 deki her noktanın yörüngesinin yoğun olduğunu gösterir. Üstelik Önerme 2.1.5'den T_λ irrasyonel öteleme dönüşümü topolojik geçişkendir. $\square$

Teorem 3.4.2. $\lambda \notin \mathbb{Q}$ olmak üzere T_λ dönüşümünün total geçişkendir.

İspat. Her $\theta \in S^1$ için $\lambda \notin \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$T_\lambda^n(\theta) = T_{n\lambda}(\theta) = \theta + 2\pi n\lambda$$

olup $n\lambda$ irrasyonel bir sayıdır. $T_{n\lambda}(\theta) = \omega$ dersek, Teorem 3.4.1'den $\overline{Orb_{T_\lambda}(\omega)} = S^1$ olur. Bu ise T_λ dönüşümünün total geçişken olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 3.4.3. $\mathbb{R}^2$ 'de verilen bir $y = ax + b$ doğrusunun $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2 \cong S^1 \times S^1$ toru üzerinde kapanması için gerek ve yeter koşul $a \in \mathbb{Q}$ olmasıdır [9].

İspat. $(\Rightarrow)$ $y = ax + b$ doğrusu üzerinde bulunan noktaların kümesini

$$D = \{(x, y) \mid y = ax + b\}$$

ile gösterirsek $(x_0, y_0) \in D$ ise hipotezden $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1)$ olacak şekilde bir $(x_1, y_1) \in D$ vardır. O halde

$$y_0 = ax_0 + b \quad \text{ve} \quad y_1 = ax_1 + b$$

olup Buradan

$$y_0 - y_1 = a(x_0 - x_1)$$

elde edilir. $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1)$ olduğundan $x_0 - x_1 \in \mathbb{Z}$ ve $y_0 - y_1 \in \mathbb{Z}$ olup

$$a = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

olacağından $a \in \mathbb{Q}$ olduğu görülür.

($\Leftarrow$) $a \in \mathbb{Q}$ ise $a = \frac{n}{m}$ olacak şekilde $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ vardır.

$$D = \{(x, y) \mid y = \frac{n}{m}x + b\}$$

olmak üzere $(x_0, y_0) \in D$ için $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1)$ olacak şekilde bir $(x_1, y_1) \in D$ noktası bulunmalıdır.

$$y_1 = y_0 - n \quad \text{ve} \quad x_1 = x_0 - m$$

seçilirse $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1)$ olur. Üstelik $(x_1, y_1) \in D$ 'dir, çünkü

$$\begin{aligned} y_1 = \frac{n}{m}x_1 + b &\Rightarrow y_0 - n = \frac{n}{m}(x_0 - m) + b \\ &\Rightarrow y_0 - n = \frac{n}{m}x_0 - n + b \\ &\Rightarrow y_0 = \frac{n}{m}x_0 + b \end{aligned}$$

olur. □

Örnek 3.4.4. *Birim çember üzerindeki irrasyonel öteleme dönüşümünün total geçişken olduğunu göstermiştik. $\lambda \notin \mathbb{Q}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} T_\lambda \times T_\lambda : \mathbb{T}^2 &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ (\theta_1, \theta_2) &\mapsto (T_\lambda \times T_\lambda)(\theta_1, \theta_2) = (T_\lambda(\theta_1), T_\lambda(\theta_2)) \end{aligned}$$

dönüşümünü ele alalım. Bu durumda

$$\text{Orb}_{T_\lambda \times T_\lambda}((\theta_1, \theta_2)) = \{(\theta_1 + 2n\pi\lambda, \theta_2 + 2n\pi\lambda) : n = 0, 1, 2, \dots\}$$

şeklinde olup

$$x = \theta_1 + 2n\pi\lambda \quad , \quad y = \theta_2 + 2n\pi\lambda$$

dersek buradan

$$y = x + \theta_2 - \theta_1$$

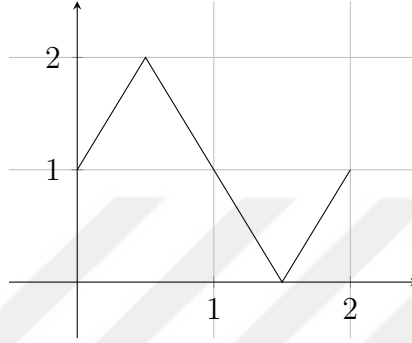
olur. Bu doğrunun eğimi 1 olup rasyoneldir. Dolayısıyla Teorem 3.4.3 gereğince bu doğru tor üzerinde kapanıp $\text{Orb}_{T_\lambda \times T_\lambda}((\theta_1, \theta_2))$ kümesi $\mathbb{T}^2$ torunda yoğun olamaz. Sonuç olarak $T_\lambda \times T_\lambda$ dönüşümü $\mathbb{T}^2$ torunda topolojik geçişken olmayıp T_λ dönüşümü zayıf karıştırma değildir.

3.5. Topolojik Geçişken Olan Total Geçişken Olmayan Fonksiyon

Örnek 3.5.1. $f : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$,

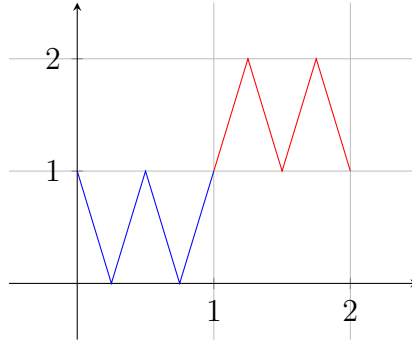
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ -2x + 3 & , \quad 1/2 \leq x \leq 3/2 \\ 2x - 3 & , \quad 3/2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

olsun. Bu fonksiyonun grafiği Şekil 3.1'de görülmektedir. f fonksiyonunun topolojik



Şekil 3.1. f fonksiyonunun grafiği

geçişken olduğunu göstermek için f^2 fonksiyonu (grafiği için Bkz. Şekil 3.2) ve tent (çadır) dönüşümünden faydalanacağız. Tent dönüşümü üzerine çalışmalar detaylı

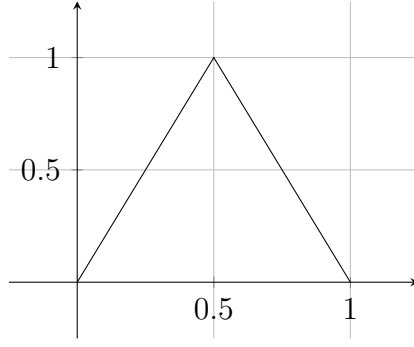


Şekil 3.2. f^2 fonksiyonunun grafiği

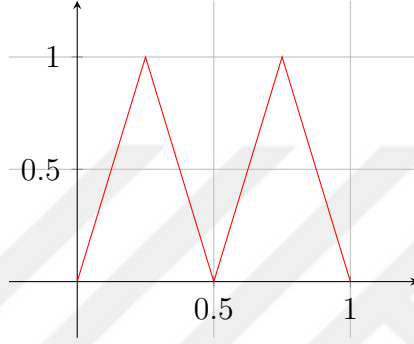
bir şekilde [4, 12, 15, 17]'de incelenmiştir. Bilinen tent dönüşümü $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$T(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2 - 2x & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (grafiği için Bkz. Şekil 3.3). Bu dönüşüm literatürde iyi bilinen kaotik fonksiyon örneklerinden biridir ve üstelik bu dönüşüm leo özelliğine sahiptir [4, 12, 15, 17]. Bu nedenle T^2 dönüşümü topolojik geçişkendir. T^2 fonksiyonunun grafiği Şekil 3.4'deki gibidir.



Şekil 3.3. Tent dönüşümünün grafiği

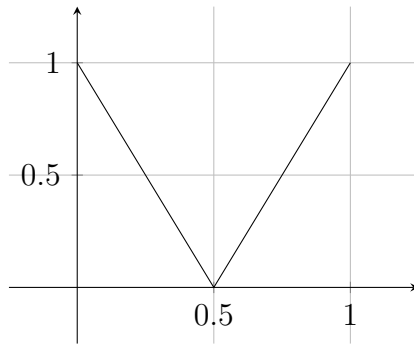


Şekil 3.4. T^2 fonksiyonunun grafiği

$$r : [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

$$r(x) = \begin{cases} -2x + 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x - 1 & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun tent dönüşümüne topolojik eşlenik olduğunu gösterelim (grafığı için Bkz. Şekil 3.5). $h[0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $h(x) = 1 - x$ olmak üzere



Şekil 3.5. r fonksiyonunun grafiği

$x \in [0, 1/2]$ için

$$T \circ h(x) = T(h(x)) = T(1 - x) = 2x$$

ve

$$h \circ r(x) = h(r(x)) = h(-2x + 1) = 2x$$

olur. Ayrıca $x \in [1/2, 1]$ için

$$T \circ h(x) = T(h(x)) = T(1 - x) = 2 - 2x$$

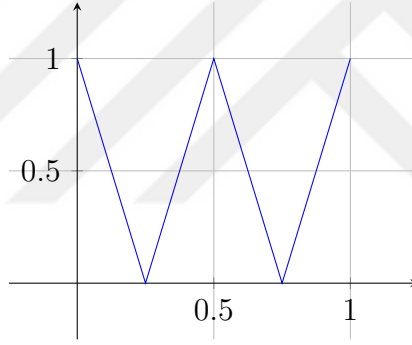
ve

$$h \circ r(x) = h(r(x)) = h(2x - 1) = 2 - 2x$$

olur. Böylece her $x \in [0, 1]$ için

$$T \circ h(x) = h \circ r(x)$$

olup tent dönüşümü ile r dönüşümü topolojik eşlenik dinamik sistemlerdir. Dolayısıyla r dönüşümü de $[0, 1]$ aralığında kaotik ve leo özelliğine sahiptir. Bu durumda r^2 topolojik geçişken olup r^2 fonksiyonunun grafiği Şekil 3.6'daki gibidir.



Şekil 3.6. r^2 fonksiyonunun grafiği

f^2 fonksiyonuna geri dönersek, $g_1 = f^2|_{[0,1]}$ ve $g_2 = f^2|_{[1,2]}$ olarak ele alalım. Dikkat edilirse g_2 dönüşümü T^2 dönüşümünün bir ötelemesi olup topolojik geçişkendir. Benzer şekilde $g_1 = r^2$ olduğundan g_1 dönüşümü de topolojik geçişken olur. Şimdi f fonksiyonunun topolojik geçişken olduğunu gösterelim. $U, V \subset [0, 2]$ boş olmayan açık kümeleri verilsin. Bu durumda 4 farklı durum incelenir:

- (i) $U, V \subset [0, 1]$ olsun. g_1 topolojik geçişken olduğundan $g_1^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. Bu durumda

$$f^{2n}(U) \cap V \neq \emptyset$$

olur.

- (ii) $U, V \subset [1, 2]$ olsun. g_2 topolojik geçişken olduğundan $g_2^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak

şekilde bir k doğal sayısı vardır. Bu durumda

$$f^{2k}(U) \cap V \neq \emptyset$$

olur.

(iii) $U \subset [0, 1]$ ve $V \subset [1, 2]$ olsun. f sürekli olduğundan $f^{-1}(V) \subset [0, 1]$ açık olup (i)'den $f^{2n}(U) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. Bu durumda

$$f^{2n+1}(U) \cap V \neq \emptyset$$

olur.

(iv) $U \subset [1, 2]$ ve $V \subset [0, 1]$ olsun. f sürekli olduğundan $f^{-1}(V) \subset [1, 2]$ açık olup (ii)'den $f^{2k}(U) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir k doğal sayısı vardır. Bu durumda

$$f^{2k+1}(U) \cap V \neq \emptyset$$

olur.

Böylece f fonksiyonunun topolojik geçişken olduğu gösterilir. Teorem 1.1.13'den f fonksiyonu kaotiktir. Şimdi ise f fonksiyonunun total geçişken olmadığını görelim. $U \subset [0, 1]$ ve $V \subset [1, 2]$ boştan farklı açık kümeler olsun. Şekil 3.2'den görüldüğü üzere her $k \in \mathbb{N}$ için $(f^2)^k(U) \subset [0, 1]$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $(f^2)^k(U) \cap V = \emptyset$ olup f^2 fonksiyonu topolojik geçişken değildir. Bu nedenle f fonksiyonu total geçişken değildir.

Uyarı 3.5.2. Elaydi [15]'de (s. 143) şöyle bir iddiada bulunmuştur: “Bir X metrik uzayında (veya bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığında) $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu kaotik olsun. Bu durumda X bağlantılı ise her $m \in \mathbb{N}$ için f^m fonksiyonu da kaotiktir.” Ancak bu varsayım doğru değildir. Örnek 3.5.1'den görüldüğü üzere f fonksiyonu $[0, 2]$ aralığında sürekli ve kaotik olmasına rağmen f^2 fonksiyonu $[0, 2]$ aralığında topolojik geçişken olmadığı için kaotik değildir.

4. DİZİ UZAYLARINDA YENİ KAOTİK DİNAMİK SİSTEMLERİN OLUŞTURULMASI

Bu bölümde daha önce incelediğimiz tek taraflı dizi uzayı ve üzerinde tanımlı olan shift dönüşümü çarpım uzaylarına taşınacaktır. Ardından tez kapsamında ele alınan tüm dizi uzaylarının birbirleri ile homeomorf olduğu ispat edilip topolojik eşleniklik kavramından yararlanarak dizi uzaylarında farklı kaotik davranışlara sahip yeni dönüşümler oluşturulacaktır.

4.1. $\Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1$ Çarpım Dizi Uzayı

Kaos koşullarının çarpım uzaylarına taşınması Değirmenci ve Koçak tarafından detaylı bir şekilde ele alınmıştır (Bkz. [11]). Bu çalışmadan özet olarak çarpım uzaylarında kaotik dinamik sistemlerle ilgili olarak şunlar söylenebilir:

1. (X, f) ve (Y, g) kesikli dinamik sistemlerinin periyodik noktalarının kümesinin yoğun olması için gerek ve yeter koşul $(X \times Y, f \times g)$ kesikli dinamik sisteminin periyodik noktalarının kümesinin yoğun olmasıdır.
2. (X, f) veya (Y, g) kesikli dinamik sistemlerinden birinin başlangıç şartlarına hassas bağımlı olması için gerek ve yeter koşul $(X \times Y, f \times g)$ kesikli dinamik sistemi başlangıç şartlarına hassas bağımlı olmasıdır.
3. $(X \times Y, f \times g)$ kesikli dinamik sistemi topolojik geçişken ise (X, f) ve (Y, g) kesikli dinamik sistemleri topolojik geçişkendir.
4. $f : X \rightarrow X$ Touhey özelliğine sahip fonksiyon ve $g : Y \rightarrow Y$ topolojik karıştırma özelliğine sahip kaotik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $(X \times Y, f \times g)$ kesikli dinamik sistemi kaotik bir dinamik sistemdir.

Burada (X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzay, $X \times Y$ üzerinde $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y')$$

metriği ve $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ fonksiyonları için

$$f \times g : X \times Y \rightarrow X \times Y$$

$$(x, y) \mapsto (f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$$

fonksiyonu ele alınmıştır.

Uyarı 4.1.1. Bu bilgiler ışığında (Σ_2^1, S) dinamik sistemini çarpım uzaylarına taşı-
nabilir. Burada Teorem 1.4.5 yardımıyla $\Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1$ uzayının $C \times C$ Cantor toz bulutu
kümesine homeomorf olduğunu not edelim. Sonuç 1.4.9 ve Teorem 1.4.10'dan S tek
tarafli shift dönüşümü le özelliğine sahip kaotik bir dönüşümdür. Bu durumda $S \times S$
dönüşümünün $\Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1$ üzerinde kaotik olduğu görülmektedir.

Dizi uzaylarında herhangi iki noktanın ne kadar birbirine yakın olduğunu ifade
eden yakınlık teoremini $\Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1$ çarpım uzayına uyarlayabiliriz.

$$x = (x_0x_1x_2 \cdots, x'_0x'_1x'_2 \cdots), y = (y_0y_1y_2 \cdots, y'_0y'_1y'_2 \cdots) \in \Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1$$

noktaları verilsin. $i = 0, 1, \dots, n$ için $x_i = y_i$ ve $x'_i = y'_i$ olsun. Yakınlık Teoremi-I'den

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d_1(x_0x_1x_2 \cdots, y_0y_1y_2 \cdots) + d_1(x'_0x'_1x'_2 \cdots, y'_0y'_1y'_2 \cdots) \\ &\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

olur. Aksine

$$d(x, y) = d_1(x_0x_1x_2 \cdots, y_0y_1y_2 \cdots) + d_1(x'_0x'_1x'_2 \cdots, y'_0y'_1y'_2 \cdots) < \frac{1}{2^n} \quad (4.1)$$

olsun. En az bir i_0 ve j_0 için $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ ve $x'_{j_0} \neq y'_{j_0}$ olsaydı

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d_1(x_0x_1x_2 \cdots, y_0y_1y_2 \cdots) + d_1(x'_0x'_1x'_2 \cdots, y'_0y'_1y'_2 \cdots) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i - y_i}{2^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x'_i - y'_i}{2^i} \\ &\geq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \\ &\geq \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

olup bu (4.1) ile çelişir. O halde $i = 0, 1, \dots, n$ için $x_i = y_i$ ve $x'_i = y'_i$ olmalıdır. Bu
yapılanlar bir teorem ile ifade edilebilir.

Teorem 4.1.2.

$$x = (x_0x_1 \cdots, x'_0x'_1 \cdots), y = (y_0y_1 \cdots, y'_0y'_1 \cdots) \in \Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1$$

noktaları verilsin. Bu durumda

(i) Eğer $i = 0, 1, \dots, n$ için $x_i = y_i$ ve $x'_i = y'_i$ ise $d(x, y) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ dir.

(ii) Eğer $d(x, y) < \frac{1}{2^n}$ ise $i = 0, 1, \dots, n$ için $x_i = y_i$ ve $x'_i = y'_i$ olur.

4.2. Dizi Uzayları Arasındaki İlişkiler

Teorem 4.2.1. Σ_2^1 ve Σ_2^2 uzayları homeomorftur.

İspat. $\phi : \Sigma_2^1 \rightarrow \Sigma_2^2$,

$$\phi(x_0x_1x_2x_3x_4\cdots) = \cdots x_5x_3x_1 \cdot x_0x_2x_4\cdots$$

fonksiyonunun bir homeomorfizm olduğunu gösterelim. $x, y \in \Sigma_2^1$ olmak üzere $x \neq y$ olsun. Bu durumda $\exists j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_j \neq y_j$ olacağından $\phi(x) \neq \phi(y)$ olup ϕ birebirdir. Herhangi bir

$$y = \cdots y_{-3}y_{-2}y_{-1} \cdot y_0y_1y_2\cdots \in \Sigma_2^2$$

noktası için

$$y' = y_0y_{-1}y_1y_{-2}y_2y_{-3}\cdots \in \Sigma_2^1$$

olmak üzere $\phi(y') = y$ olacağından ϕ örtendir. ϕ 'nin sürekli olduğunu görelim. Keyfi $\epsilon > 0$ ve $a = a_0a_1a_2a_3\cdots \in \Sigma_2^1$ verilsin. Buna göre $\frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. $\delta = \frac{1}{2^{2n}}$ için Teorem 1.4.2'den $x \in B(a, \delta)$ ise $d_1(x, a) < \delta = \frac{1}{2^{2n}}$ olup $i = 0, 1, \dots, 2n$ için $x_i = a_i$ olur. Bu durumda

$$a = a_0a_1a_2\cdots a_{2n}a_{2n+1}\cdots$$

$$x = a_0a_1a_2\cdots a_{2n}x_{2n+1}\cdots$$

olur. Buradan $d(\phi(x), \phi(a)) \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$ olup, ϕ fonksiyonu süreklidir. Sonuç olarak Önerme 1.4.3 yardımıyla Σ_2^1 ile Σ_2^2 uzaylarının homeomorf olduğu görülür.

□

Teorem 4.2.2. Σ_2^2 ile $\Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1$ uzayları homeomorftur.

İspat. $\psi : \Sigma_2^2 \rightarrow \Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1$,

$$\psi(\cdots x_{-3}x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2\cdots) = (x_0x_1x_2\cdots, x_{-1}x_{-2}x_{-3}\cdots)$$

olarak tanımlanan ψ fonksiyonunun homeomorfizm olduğunu gösterelim. $x, y \in \Sigma_2^2$ olmak üzere $x \neq y$ olsun. Bu durumda $\exists j \in \mathbb{Z}$ için $x_j \neq y_j$ olacağından $\psi(x) \neq \psi(y)$ olup ψ birebirdir. Herhangi bir

$$x = (x_0x_1x_2\cdots, y_0y_1y_2\cdots) \in \Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1$$

noktası için

$$x' = \cdots y_2y_1y_0 \cdot x_0x_1x_2\cdots \in \Sigma_2^2$$

olmak üzere $\psi(x') = x$ olacağından ψ fonksiyonu örtendir. Şimdi ψ fonksiyonunun herhangi bir $a \in \Sigma_2^2$ noktasında sürekli olduğunu görelim. Her $\epsilon > 0$ için yeterince büyük bir n_0 doğal sayısı $\frac{3}{2^{n_0}} < \epsilon$ olacak şekilde vardır. $\delta = \frac{1}{2^{n_0}}$ seçilirse $x \in B(a, \delta)$ ise $d(x, a) < \delta = \frac{1}{2^{n_0}}$ olup Teorem 1.4.14'den $|i| \leq n_0$ için $x_i = a_i$ olur. Bu noktaları

$$\begin{aligned} x &= \cdots x_{-n_0-1} x_{-n_0} \cdots x_{-2} x_{-1} \cdot x_0 x_1 \cdots x_{n_0} x_{n_0+1} \cdots \\ a &= \cdots a_{-n_0-1} x_{-n_0} \cdots x_{-2} x_{-1} \cdot x_0 x_1 \cdots x_{n_0} a_{n_0+1} \cdots \end{aligned}$$

olarak yazalım. Buna göre

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (x_0 x_1 \cdots x_{n_0} x_{n_0+1} \cdots, x_{-1} x_{-2} \cdots x_{-n_0} x_{-n_0-1} \cdots) \\ \psi(a) &= (x_0 x_1 \cdots x_{n_0} a_{n_0+1} \cdots, x_{-1} x_{-2} \cdots x_{-n_0} a_{-n_0-1} \cdots) \end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} d(\psi(x), \psi(a)) &= d_1(x_0 x_1 \cdots x_{n_0} x_{n_0+1} \cdots, x_0 x_1 \cdots x_{n_0} a_{n_0+1} \cdots) \\ &\quad + d_1(x_{-1} x_{-2} \cdots x_{-n_0} x_{-n_0-1} \cdots, x_{-1} x_{-2} \cdots x_{-n_0} a_{-n_0-1} \cdots) \\ &\leq \frac{1}{2^{n_0}} + \frac{1}{2^{n_0-1}} \\ &= \frac{3}{2^{n_0}} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece ψ fonksiyonu Σ_2^2 üzerinde süreklidir. Sonuç olarak Önerme 1.4.3 yardımıyla Σ_2^2 ile $\Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1$ uzaylarının homeomorf olduğu görülür. $\square$

Uyarı 4.2.3. İki topolojik uzayın homeomorf olma bağıntısı bir denklik bağıntısı olduğundan Σ_2^1 , Σ_2^2 ve $\Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1$ uzayları birbirleriyle ve Teorem 1.4.5'den bilindiği üzere Cantor kümesine homeomorf uzaylardır. Ayrıca Uyarı 4.1.1'den Σ_2^1 , Σ_2^2 ve $\Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1$ uzaylarının Cantor toz bulutuna homemorf olduğu ve dolayısıyla C Cantor kümesi ile $C \times C$ Cantor toz bulutunun homeomorf olduğu sonucuna varılır.

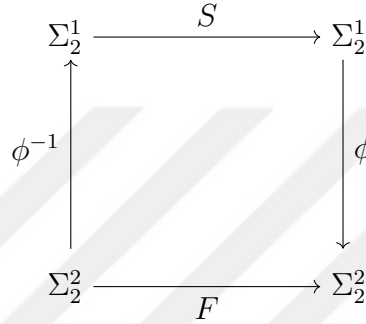
Örnek 4.2.4. ϕ homeomorfizminden ve (Σ_2^1, S) , (Σ_2^2, σ) kaotik dinamik sistemlerinden yararlanarak sırasıyla Σ_2^2 ve Σ_2^1 uzayları üzerinde yeni kaotik fonksiyonlar oluşturalım. $F : \Sigma_2^2 \rightarrow \Sigma_2^2$,

$$F = \phi \circ S \circ \phi^{-1}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
F(\cdots x_{-3}x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \cdots) &= \phi \circ S \circ \phi^{-1}(\cdots x_{-3}x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \cdots) \\
&= \phi \circ S(x_0x_{-1}x_1x_{-2}x_2x_{-3}x_3 \cdots) \\
&= \phi(x_{-1}x_1x_{-2}x_2x_{-3}x_3 \cdots) \\
&= \cdots x_3x_2x_1 \cdot x_{-1}x_{-2}x_{-3} \cdots
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonu Σ_2^2 üzerinde kaotik bir fonksiyondur (Teorem 1.2.3, Sonuç 1.4.9, Bkz. Şekil 4.1).



Şekil 4.1. F fonksiyonunun oluşturulması

Üstelik S dönüşümü leo özelliğine sahip olup topolojik eşleniklik sayesinde F dönüşümü, σ dönüşümünün aksine, Σ_2^2 uzayında leo özelliğine sahiptir.

Örnek 4.2.5. Benzer şekilde Σ_2^1 uzayı üzerinde yeni bir kaotik fonksiyon elde edebiliriz. $G : \Sigma_2^1 \rightarrow \Sigma_2^1$,

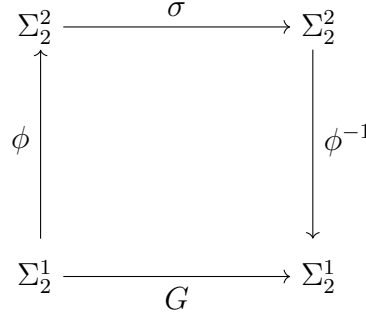
$$G = \phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
G(x_0x_1x_2x_3 \cdots) &= \phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi(x_0x_1x_2x_3 \cdots) \\
&= \phi^{-1} \circ \sigma(\cdots x_5x_3x_1 \cdot x_0x_2x_4 \cdots) \\
&= \phi^{-1}(\cdots x_5x_3x_1x_0 \cdot x_2x_4x_6x_8 \cdots) \\
&= x_2x_0x_4x_1x_6x_3x_8x_5 \cdots
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan G fonksiyonu Σ_2^1 üzerinde kaotik bir homeomorfizmdir (Teorem 1.2.3, Sonuç 1.4.19, Bkz. Şekil 4.2).

Üstelik σ iki taraflı shift dönüşümü topolojik karıştırma olan ama leo olmayan bir homeomorfizm olduğundan G fonksiyonu da Σ_2^1 üzerinde topolojik karıştırma olan ancak leo olmayan bir homeomorfizm olur.



Şekil 4.2. G fonksiyonunun oluşturulması

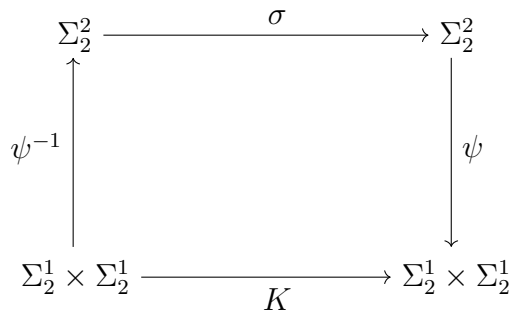
Örnek 4.2.6. ψ homeomorfizmi ve (Σ_2^2, σ) , $(\Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1, S \times S)$ kaotik dinamik sistemlerinden yararlanarak sırasıyla $\Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1$ ve Σ_2^2 uzayları üzerinde yeni kaotik fonksiyonlar oluşturulalım. $K : \Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1 \rightarrow \Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1$,

$$K = \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} K(x_0x_1x_2 \cdots, y_0y_1y_2 \cdots) &= \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}(x_0x_1x_2 \cdots, y_0y_1y_2 \cdots) \\ &= \psi \circ \sigma(\cdots y_2y_1y_0 \cdot x_0x_1x_2 \cdots) \\ &= \psi(\cdots y_2y_1y_0x_0 \cdot x_1x_2x_3 \cdots) \\ &= (x_1x_2x_3 \cdots, x_0y_0y_1y_2 \cdots) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan K fonksiyonu $\Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1$ üzerinde kaotik bir homeomorfizmdir (Teorem 1.2.3, Sonuç 1.4.19, Bkz. Şekil 4.3).



Şekil 4.3. K fonksiyonunun oluşturulması

Üstelik σ iki taraflı shift dönüşümü topolojik karıştırma olan ama leo olmayan bir homeomorfizm olduğundan K fonksiyonu da $\Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1$ üzerinde topolojik karıştırma olan ancak leo olmayan bir homeomorfizm olur.

Örnek 4.2.7. Örnek 4.2.4'da Σ_2^1 ile Σ_2^2 arasındaki homeomorfizmden yararlanıp bir

$F : \Sigma_2^2 \rightarrow \Sigma_2^2$ kaotik fonksiyonu elde edilmişti. Şimdi yine Σ_2^2 üzerinde tanımlı ve aynı dinamik özelliklere sahip farklı bir $L : \Sigma_2^2 \rightarrow \Sigma_2^2$ kaotik fonksiyonu oluşturulabilir (Bkz. Şekil 4.4). Bu fonksiyon $L : \Sigma_2^2 \rightarrow \Sigma_2^2$,

$$L = \psi^{-1} \circ (S \times S) \circ \psi$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} L(\cdots x_{-3}x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \cdots) &= \psi^{-1} \circ (S \times S) \circ \psi(\cdots x_{-3}x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \cdots) \\ &= \psi^{-1} \circ (S \times S)(x_0x_1x_2 \cdots, x_{-1}x_{-2}x_{-3} \cdots) \\ &= \psi^{-1}(x_1x_2x_3 \cdots, x_{-2}x_{-3}x_{-4} \cdots) \\ &= \cdots x_{-4}x_{-3}x_{-2} \cdot x_1x_2x_3 \cdots \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1 & \xrightarrow{S \times S} & \Sigma_2^1 \times \Sigma_2^1 \\ \uparrow \psi & & \downarrow \psi^{-1} \\ \Sigma_2^2 & \xrightarrow{L} & \Sigma_2^2 \end{array}$$

Şekil 4.4. L fonksiyonunun oluşturulması

KAYNAKÇA

- [1] Akin, E. and Carlson, J.D. (2012). Conceptions of Topological Transitivity. *Topology and its Applications*, 159, 2815–2830.
- [2] Akin, E., Auslander, J. and Nagar, A. (2016). Variations on the Concept of Topological Transitivity. *Studia Mathematica*, 235, 3, 225–249.
- [3] Armstrong, M.A. (1983). *Basic Topology*. Springer-Verlag.
- [4] Aydoğdu, D. (2022). *Deforme Çadır Dönüşümleri Üzerindeki Dinamik sistemlerin İncelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir: Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü.
- [5] Banks, J. (1997). Regular Periodic Decompositions for Topologically Transitive Maps. *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, 17, 505–529.
- [6] Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G., Stacey, P. (1992). On Devaney’s Definition of Chaos. *The American Mathematical Monthly*, 99, 4, 332–334.
- [7] Block, L.S. and Coppel, W.A. (1992). *Dynamics in One Dimension*. Springer-Verlag.
- [8] Crannell, A. (1995). The Role of Transitivity in Devaney’s Definition of Chaos. *The American Mathematical Monthly*, 102(9), 788–793.
- [9] Değirmenci, N. (1992). *Kaos Koşullarının İrdelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [10] Değirmenci, N. and Koçak, Ş. (2003). Existence of A Dense Orbit and Topological Transitivity: When Are They Equivalent? *Acta Math.Hungar.*, 99(3), 185–187.
- [11] Değirmenci, N. and Koçak, Ş. (2010). Chaos in Product Maps. *Turkish Journal of Mathematics*, 34, 593–600.
- [12] Devaney, R.L. (2022). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. (3rd Edition). CRC Press.
- [13] Devaney, R.L. and Nitecki, Z. (1979). Shift Automorphisms in the Henon Mapping. *Communications in Mathematical Physics*, 67, 137–146.
- [14] Dixmier, J. (1984). *General Topology*. Springer-Verlag.
- [15] Elaydi, S.N. (2007). *Discrete Chaos*. (2nd Edition). Chapman and Hall/CRC.
- [16] Erdmann, K.G. and Manguillot, A.P. (2011). *Linear Chaos*. Springer-Verlag.
- [17] Gulick, D. (2012). *Encounters with Chaos and Fractals*. (2nd Edition). New York: Chapman and Hall/CRC Press.
- [18] Hénon, M. (1976). A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 50, 69–77.

- [19] Kolyada, S. and Snoha, L. (1997). Some Aspects of Topological Transitivity. *Grazer Math. Ber.*, 334, 3–35.
- [20] Liu, G., Lu, T., Yang, X., Waseem, A. (2020). Further Discussion About Transitivity and Mixing of Continuous Maps on Compact Metric Spaces. *J. Math. Phys.*, 61, 112701.
- [21] Morse, M. and Hedlund, G.A. (1938). Symbolic Dyanmics. *American Journal of Mathematics*, 60(4), 815–866.
- [22] Munkres, J. (2014). *Topology*. (2nd Edition). Pearson.
- [23] Nagar, A. (2022). Revisiting Variations in Topological Transitivity. *European Journal of Mathematics*, 8, 369–387.
- [24] Touhey, P. (1997). Yet Another Definition of Chaos. *The American Mathematical Monthly*, 104(5), 411-414.
- [25] Vellekoop, M. and Berglund, R. (1994) On Intervals, Transitivity = Chaos. *The American Mathematical Monthly*, 101, 4, 353–355.
- [26] Wang, T., Yin, J.D. and Yan, Q. (2016). Several Transitive Properties and Devaney’s Chaos. *Acta Mathematica Sinica English Series*, 32(3), 373–383.

ÖZGEÇMİŞ

ORCID ID : 0009-0008-6165-643X
Adı-Soyadı : İsmail Alper GÜVEY
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2017 – 2021, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.
- 2021 – 2023, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Topoloji, Yüksek Lisans.
- 2023 – , Araştırma Görevlisi, Aksaray Üniversitesi Matematik Bölümü.