

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİNAMİK TOPOLOJİK SİSTEMLER ÜZERİNE

Alper ÜLKER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Cihangir ALACA

SİNOP – 2010

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma jürimiz tarafından 18/10/2010 tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

Üye : Prof. Dr. Çiğdem GENCER

Üye : Yrd. Doç. Dr. Cihangir ALACA

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

....../....../200.

Doç. Dr. İsmihan KARAYÜCEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DİNAMİK TOPOLOJİK SİSTEMLER ÜZERİNE

ÖZET

Bu tez çalışmasında, S4 lojiğinin Kripke semantikleri üzerinde durulup, topolojik anlamda tanımlanabilirliği, sağlamlığı ve tamlığı gösterilmiştir. Ayrıca sürekli fonksiyonlar yardımıyla ve temporal modaliteler ile oluşturulan S4C ve S4O lojikleri tanıtarak S4 sisteminin durağan lojiğinden dinamik S4C ve S4O lojiklerinin nasıl oluşturulduğu incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: S4 lojiği, topolojik semantik, modal lojik, topolojiksel dinamikler.

ON DYNAMIC TOPOLOGICAL SYSTEMS

ABSTRACT

In this thesis, definability, soundness and completeness were showed with topological interpretations of $S4$ logic. Moreover $S4C$ and $S4\bigcirc$ logics which are built by continuous functions and temporal modalities has been given. So the statical logic $S4$ has enriched to the dynamic logic $S4C$ and $S4\bigcirc$.

Keywords: $S4$ logic, topological semantic, modal logic, topological dynamics.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve sonuçlanmasında benden yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sinop Üniversitesi öğretim üyesi Sayın Yrd. Doç. Dr. Cihangir ALACA' ya, bana her türlü desteği sağlayan ve yol gösteren Yaşar Üniversitesi öğretim üyesi Sayın Prof. Dr. Mehmet TERZİLER'e, Ege Üniversitesi öğretim üyesi Sayın Yrd. Doç. Dr. Tahsin ÖNER'e, tezin sonuçlanmasındaki katkılarından dolayı İstanbul Kültür Üniversitesi öğretim üyesi Sayın Prof. Dr. Çiğdem GENCER'e ve ayrıca tezin yazım aşamasında her türlü yardımda bulunan mesai arkadaşım Arş. Gör. Ayşenur UÇAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL ve YÖNTEM	2
3. ÖN BİLGİLER	3
3.1. Modal Lojik	3
3.2. Temel Modal Lojik ve Kripke Semantiği	3
3.3. Kripke Semantiği	5
3.4. Tanımlanabilirlik	8
3.5. Sağlamlık ve Tamlık	8
3.6. Topolojik uzaylar	9
4. BULGULAR	12
5. TEMEL MODAL DİL VE TOPOLOJİK SEMANTİK	13
5.1. Topolojik Modeller	13
5.2. Doğruluk ve Geçerlilik	14
5.3. Kripke Çatıları ve Topolojik Uzaylar Arasındaki İlişki	16
5.4. Tanımlanabilirlik	18
5.5. Sağlamlık ve Tamlık	23
6. DİNAMİK TOPOLOJİK SİSTEM ÖRNEKLERİ	27
6.1. $S4C$ ve $S4O$ Sistemleri	27
6.2. Dinamik Topolojik Lojikler	29
6.3. Klasik Dinamik Topolojik Lojik	33
6.4. Alexandrov Uzayları Dinamik Topolojik Lojiği	33
6.5. Homeomorfizmalar Dinamik Topolojik Lojiği	34
6.6. Sürekli Fonksiyonlar Dinamik Topolojik Lojiği	39

7. SONUÇ VE ÖNERİLER	41
8. KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\models$	: geçerlilik
$\vdash$	: türetim
$\Box$	: zorunluluk modal operatörü
$\Diamond$	: olabilirlik modal operatörü
$\bigcirc$	: next modal operatörü
$*$	: henceforth modal operatörü
$\langle a, b \rangle$	: a, b sıralı ikilisi
$\neg$	: değilleme
$\forall$	: evrensel niceleyici
$\exists$	: varlıksal niceleyici
$\top$	: doğruluk operatörü
$\perp$	: yanlışlık operatörü
DTL	: Dinamik topolojik lojik
DTM	: Dinamik topolojik model
DTS	: Dinamik topolojik sistem

1. GİRİŞ

İlk olarak 1944 yılında McKinsey ve A. Tarski nin yaptıkları çalışmalar ile modal lojik topolojik olarak yorumlanmıştır. Daha sonra S. Artemov, J. Davoren, ve A. Nerode nin 1997 yılında yaptıkları çalışma ile bu S4 lojiğini, üzerine kurdukları sürekli fonksiyon yardımıyla ve temporal modaliteler ile durağan bir sistemden dinamik bir sistem haline getirmişlerdir. Böylece S4 lojiği S4C lojiğine genişletilmiştir. Çalışmada (Artemov ve Ark, 1997) S4C lojiğinin Hilbert aksiyomlaştırılması verilip Kripke tamlığı gösterilmiştir. 2005 yılında P. Kremer ve G. Mints bu S4C lojiği üzerine kurulu olan sürekli fonksiyonu homeomorfizma olarak ele alıp bu sistemi S4O lojiğine genişleterek daha kullanışlı olan yeni bir sistem oluşturmuşlardır. Bu sayede S4O lojiği daha zengin bir hale gelip dinamik sistemleri ve topolojiksel dinamikleri açıklayıcı bir hal almıştır.

Bir dinamik topolojik Sistem, $\langle X, f \rangle$ sıralı ikilisi olup X bir topolojik uzay ve f de X üzerinde bir sürekli fonksiyondur. Bu f fonksiyonunu X içinde ayrık birim zamanda hareket eden noktalar olarak düşünebiliriz. Böylece doğal olarak, S4 lojiği topolojik uzayların durağan lojiğinden, f fonksiyonunun hareketini biçimlendirecek şekilde uygun temporal modaliteler eklenerek dinamik topolojik lojiğe genişletilmiş olur.

Bu tezde $\langle X, f \rangle$ biçimindeki dinamik topolojik sistemler incelenmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Öncelikle dinamik topolojik lojiklerle ilgili gerekli kitap ve makaleler toplanarak çalışılmıştır. Bu çalışmalar seminer olarak anlatılmıştır. Bunların sonucunda McKinsey ve Tarski nin (1944) çalışmalarıyla ortaya çıkan modal dilin topolojik olarak yorumlanması üzerinde durulmuş bunların tanımlanabilirliği, sağlamlığı ve tamlığı gösterilmiştir. Ayrıca Artemov ve Davoren nin (1997) ve Kremer ve Mints in (2005) te verdikleri dinamik lojiğin aksiyomları incelenerek bu lojiğin sağlamlığı ve tamlığı ispatlanmıştır.

3. ÖN BİLGİLER

3.1. Modal Lojik

Modal lojik, klasik önermeler lojiğine iki yeni operatör eklenerek genişletilmiş klasik dışı lojiktir. Önermeler lojiğinde bir önermenin doğruluk değerinin doğru ya da yanlış olarak adlandırılmasına karşın modal lojikte $\Box$ (zorunluluk) ve $\Diamond$ (olabilirlik) değerleri almakta ve bu operatörler;

$$\Box = \neg \Diamond \neg$$

$$\Diamond = \neg \Box \neg$$

eşitlikleri ile tanımlanmaktadır.

3.2. $\mathcal{L}_{\Box}$ Temel Modal Lojik Dil

Bu bölümde temel modal dilin sözdiziminden bahsedilecektir. Ayrıca S4 lojiğinin taslakları tanıtılıp, bu S4 lojiğine yeni taslaklar eklenerek oluşturulmuş olan S4.1, S4.2 ve S5 genişlemeleri üzerinde durulacaktır.

3.2.1. Tanım $\mathcal{L}_{\Box}$ temel modal dilimiz, $p_1, p_2, p_3, \dots$ şeklinde sayılabilir sonsuzlukta önerme değişkeninden, $\top$ doğruluk sabitinden, $\wedge, \neg$ Boole bağlaçlarından ve $\Box$ modal operatöründen meydana gelmektedir. Formüller en az bir önerme değişkeninden meydana gelmektedir. Formüller için $\varphi, \phi, \alpha, \beta, \dots$ gibi harfler kullanılacaktır.

Önerme değişkenleri genel olarak atomik formül olarak adlandırılacaktır. Tüm bu önerme değişkenlerinin kümesi de Ω ile gösterilecektir.

3.2.2. Tanım ($\mathcal{L}_{\Box}$ Dilinin Formülleri)

- Her önerme değişkeni bir formüldür.
- $\top$ bir formüldür.
- φ ve ϕ birer formül iseler, $\varphi \wedge \phi$ yine bir formüldür.
- φ bir formül ise, $\Box \varphi$ da bir formüldür.

$p_i, \top, \varphi \wedge \phi, \neg \varphi, \Box \varphi$ birer formüldür. Tüm bu formüllerin kümesi de $\mathfrak{F}_{\Box}$ ile gösterilecektir.

3.2.3. Önerme φ ve ϕ formüller olmak üzere, aşağıdaki kısaltmalar kullanılacaktır.

- $\neg\varphi \equiv \varphi \rightarrow \perp$
- $\varphi \vee \phi \equiv \neg\varphi \rightarrow \phi$
- $\phi \leftrightarrow \varphi \equiv (\varphi \rightarrow \phi) \wedge (\phi \rightarrow \varphi)$
- $\Diamond\phi \equiv \neg\Box\neg\phi$.

3.2.4. Tanım $\mathfrak{F}_\Box$ nin aşağıdaki koşulları sağlayan bir Γ altkümesine lojik denir:

- (a) Γ tüm totolojileri içerir.
 (b) Γ modes ponens türetim kuralına kapalıdır yani;

$$\forall \phi, \forall \varphi \in \mathfrak{F}_\Box \text{ için } (\phi \in \Gamma \text{ ve } (\phi \rightarrow \varphi) \in \Gamma) \Rightarrow (\varphi \in \Gamma)$$

dir.

Γ lojiğinin her elemanı Γ nın bir teoremidir. Γ nın bir φ teoremi $\Gamma \vdash \varphi$ ile gösterilir.

3.2.5. Tanım (Normal Lojikler) Bir Γ lojiği

$$K: \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$$

taslağını içerip, $\forall \alpha \in \mathfrak{F}_\Box (\alpha \in \Gamma \Rightarrow \Box\alpha \in \Gamma)$ olup gereklilik kuralına (N: $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$ ye) kapalı ise normal lojik olarak adlandırılır.

3.2.6. Tanım S4 lojiği,

$$T: \Box\alpha \rightarrow \alpha,$$

$$4: \Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$$

taslaklarını içeren en küçük normal lojiktir.

3.2.7. Tanım S4.1 lojiği,

$$T: \Box\alpha \rightarrow \alpha,$$

$$4: \Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha,$$

$$M: \Box\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\Box\alpha$$

taslaklarını içeren en küçük normal lojiktir.

3.2.8. Tanım S4.2 lojigi,

$$T: \Box\alpha \rightarrow \alpha,$$

$$4: \Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha,$$

$$G: \Diamond\Box\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$$

taslaklarını içeren en küçük normal lojiktir.

3.2.9. Tanım S5 lojigi,

$$T: \Box\alpha \rightarrow \alpha,$$

$$5: \Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha,$$

taslaklarını içeren en küçük normal lojiktir.

3.3. Kripke Semantiği

Şimdi modal lojik için çok önemli bir yere sahip olan Kripke Semantikleri üzerinde durulacak ve Kripke çatıları ile Kripke modellerinin tanımları verilecektir. Kripke semantikleri formüllerin geçerliliğini incelemeye temel rol oynamaktadır. İlk olarak Saul Kripke tarafından tanıtılmıştır.

3.3.1. Tanım (Kripke Çatıları ve Kripke Modelleri) X boştan farklı bir küme ve R de bu küme üzerinde ikili bir bağıntı olmak üzere $\langle X, R \rangle$ ikilisine Kripke çatısı veya kısaca çatı denir. $\langle X, R \rangle$ bir Kripke çatısı ve V, Ω dan $\mathcal{P}(X)$ e bir valuasyon fonksiyonu olmak üzere $\langle X, R, V \rangle$ üçlüsüne bir Kripke çatısı üzerinde ki bir Kripke modeli denir. Böylece bir α formülü, bir $\mathcal{M} = \langle X, R, V \rangle$ Kripke Modelinin bir x noktasında geçerli olması,

$$x \in X (\mathcal{M} \models_x \alpha)$$

ile gösterilir ve bu geçerlilik aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$\forall p \in \Omega \forall x \in X (\mathcal{M} \models_x p \Leftrightarrow x \in V(p)),$$

$$\forall x \in X (\mathcal{M} \not\models_x \perp),$$

$$\forall \alpha, \forall \beta \in \mathfrak{F}_\Box \forall x \in X (\mathcal{M} \models_x \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow (\mathcal{M} \models_x \alpha \Rightarrow \mathcal{M} \models_x \beta)),$$

$$\forall \alpha \in \mathfrak{F}_\Box \forall x \in X (\mathcal{M} \models_x \Box\alpha \Leftrightarrow \forall y \in X (xRy \Rightarrow \mathcal{M} \models_y \alpha)).$$

3.3.2. Önerme $\mathcal{M} = \langle X, \mathcal{R}, V \rangle$ bir Kripke modeli olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

1. $\forall \alpha, \forall \beta \in \mathfrak{F}_\square \forall x \in X \left(\mathcal{M} \models_x \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow (\mathcal{M} \models_x \alpha \text{ ve } \mathcal{M} \models_x \beta) \right),$
2. $\forall \alpha, \forall \beta \in \mathfrak{F}_\square \forall x \in X \left(\mathcal{M} \models_x \alpha \vee \beta \Leftrightarrow (\mathcal{M} \models_x \alpha \text{ veya } \mathcal{M} \models_x \beta) \right),$
3. $\forall \alpha \in \mathfrak{F}_\square \forall x \in X \left(\mathcal{M} \models_x \neg \alpha \Leftrightarrow (\mathcal{M} \not\models_x \alpha) \right),$
4. $\forall x \in X \left(\mathcal{M} \models_x \top \right),$
5. $\forall \alpha \in \mathfrak{F}_\square \forall x \in X \left(\mathcal{M} \models_x \Diamond \alpha \Leftrightarrow \exists y \in X \left(xRy \text{ ve } \mathcal{M} \models_y \alpha \right) \right).$

İspat Önermenin sadece 5. maddesinin ispatı yapılacaktır.

$$\forall \alpha \in \mathfrak{F}_\square \forall x \in X \left(\mathcal{M} \models_x \Box \alpha \Leftrightarrow \forall y \in X \left(xRy \Rightarrow \mathcal{M} \models_y \alpha \right) \right)$$

şeklinde tanımlanmakta ve herhangi bir α önermesi için $\Box \alpha = \neg \Diamond \neg \alpha$ eşitliğinin var olduğu bilinmekte. Buna göre;

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathfrak{F}_\square \forall x \in X \left(\mathcal{M} \models_x \neg \Diamond \neg \alpha \Leftrightarrow \forall y \in X \left(xRy \Rightarrow \mathcal{M} \models_y \alpha \right) \right) \\ \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathfrak{F}_\square \forall x \in X \left(\mathcal{M} \not\models_x \Diamond \neg \alpha \Leftrightarrow \forall y \in X \left(xRy \Rightarrow \mathcal{M} \models_y \alpha \right) \right) \\ \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathfrak{F}_\square \forall x \in X \left(\mathcal{M} \models_x \Diamond \neg \alpha \Leftrightarrow \exists y \in X \left(xRy \wedge \mathcal{M} \not\models_y \alpha \right) \right) \\ \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathfrak{F}_\square \forall x \in X \left(\mathcal{M} \models_x \Diamond \alpha \Leftrightarrow \exists y \in X \left(xRy \wedge \mathcal{M} \models_y \alpha \right) \right) \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

3.3.3. Tanım (Modellerde Doğruluk) $\mathcal{M} = \langle X, R, V \rangle$ bir Kripke modeli ve α bir formül olsun. Buna göre α nın $\mathcal{M}$ modelinde doğru olması $\forall x \in X \left(\mathcal{M} \models_x \alpha \right)$ olmak üzere $\mathcal{M} \models \alpha$ ile gösterilir.

3.3.4. Tanım (Çatılarda Geçerlilik) α bir formül, $\mathcal{K} = \langle X, R \rangle$ bir Kripke çatısı ve $\mathfrak{C}$ çatılar sınıfı olsun. Buna göre, $\forall V (V : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(X)) (\langle X, R, V \rangle \models \alpha)$ olmak üzere α nın bu $\mathcal{K}$ Kripke çatısında geçerli olması ya da $\mathcal{K}$ nın α yı geçerlemesi $\mathcal{K} \models \alpha$ ile gösterilir. Ayrıca $\mathcal{K} \in \mathfrak{C} (\mathcal{K} \models \alpha)$ olmak üzere α nın $\mathfrak{C}$ çatı sınıfında geçerli olması $\mathfrak{C} \models \alpha$ ile gösterilir.

3.3.5. Önerme $\mathcal{M} = \langle X, R, V \rangle$ bir Kripke model olsun. V nin tanımından,

$$\forall p \in \Omega (V(p) = \{x \in X : \mathcal{M} \models_x p\})$$

dir. Buna göre V yi; $\forall \alpha \in \mathfrak{F}_\square (V(\alpha) = \{x \in X : \mathcal{M} \models_x \alpha\})$ olacak şekilde genişletirsek, aşağıdakiler sağlanır.

1. $\forall \alpha, \forall \beta \in \mathfrak{F}_\square (V(\alpha \wedge \beta) = V(\alpha) \cap V(\beta)),$
2. $\forall \alpha, \forall \beta \in \mathfrak{F}_\square (V(\alpha \vee \beta) = V(\alpha) \cup V(\beta)),$
3. $\forall \alpha \in \mathfrak{F}_\square (V(\neg \alpha) = X - V(\alpha)),$
4. $\forall \alpha, \forall \beta \in \mathfrak{F}_\square (V(\alpha \rightarrow \beta) \Leftrightarrow V(\alpha) \subseteq V(\beta)),$
5. $V(\top) = X,$
6. $V(\perp) = \emptyset.$

3.3.6. Tanım $\mathcal{K} = \langle X, R \rangle$ bir çatı olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler vardır.

- X üzerindeki R bağıntısı $\forall x \in X$ için (xRx) koşulunu sağlıyorsa, R ye yansıyan bağıntı $\mathcal{K}$ çatısına da yansımalıdır denir.
- X üzerindeki R bağıntısı $\forall x, \forall y, \forall z \in X$ için $((xRy \text{ ve } yRz) \Rightarrow xRz)$ koşulunu sağlıyorsa, R ye geçişmeli bağıntı $\mathcal{K}$ çatısına da geçişmelidir denir.
- X üzerindeki R bağıntısı $\forall x \in X$ ve $\exists y \in X$ için $(xRy \text{ ve } \forall z \in X (yRz \Rightarrow y = z))$ koşulunu sağlıyorsa, R ye atomik bağıntı $\mathcal{K}$ çatısına da atomiktir denir.
- X üzerindeki R bağıntısı $\forall x, \forall y, \forall z \in X$ için $((xRy \text{ ve } yRz) \Rightarrow \exists w \in X (yRw \text{ ve } zRw))$ koşulunu sağlıyorsa, R ye zayıf yönlendirilmiş bağıntı $\mathcal{K}$ çatısına da zayıf yönlendirilmiştir denir.
- X üzerindeki R bağıntısı $\forall x, \forall y \in X$ için (xRy) koşulunu sağlıyorsa, R bağıntısına evrensel bağıntı $\mathcal{K}$ çatısına da evrenseldir denir.
- X uzayı sonlu ise $\mathcal{K}$ çatısı da sonludur.

3.4. Tanımlanabilirlik

Bu kısımda modal operatöre sahip formüllerin çatılar üzerinde ki tanımlanabilirliği üzerinde durulacaktır.

3.4.1. Tanım $\mathcal{C}$ bir çatı sınıfı olsun. $\mathcal{K}$ herhangi bir çatı olmak üzere $\mathfrak{F}_\square$ nın bir Ψ altkümesi için $\mathcal{K} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \forall \alpha \in \Gamma(\mathcal{K} \models \alpha)$ koşulu sağlanırsa Ψ altkümesi $\mathcal{C}$ çatı sınıfını tanımlar.

3.4.2. Teorem T, 4, M, G taslaklarının tanımladığı çatı sınıfı aşağıdaki gibidir.

- T taslağı tüm yansımali çatı sınıfını tanımlar.
- 4 taslağı tüm geçişmeli çatı sınıfını tanımlar.
- M taslağı tüm atomik çatı sınıfını tanımlar.
- G taslağı tüm zayıf yönlendirilmiş çatı sınıfını tanımlar.

3.5. Sağlamlık ve Tamlık

Bu kısımda, lojiklerin hangi bağıntı özelliklerine sahip çatı sınıflarının tamlığı ve sağlamlığı üzerinde durulacaktır.

3.5.1. Tanım Γ bir lojik ve $\mathcal{C}$ de bir çatı sınıfı olsun. Buna göre;

$\forall \alpha \in \mathfrak{F}_\square$ için $(\vdash_T \alpha \Rightarrow \mathcal{C} \models \alpha)$ koşulu sağlanıyorsa Γ lojiği sağlamdır denir.

$\forall \alpha \in \mathfrak{F}_\square$ için $(\mathcal{C} \models \alpha \Rightarrow \vdash_T \alpha)$ koşulu sağlanıyorsa Γ lojiği tamdır denir.

3.5.2. Teorem

- S4 lojiği, tüm yansımali ve geçişmeli çatı sınıfında sağlam ve tamdır.
- S4.1 lojiği, tüm yansımali, geçişmeli ve atomik çatı sınıfında sağlam ve tamdır.
- S4.2 lojiği, tüm yansımali, geçişmeli ve zayıf yönlendirilmiş çatı sınıfında sağlam ve tamdır.
- S5 lojiği, tüm evrensel çatı sınıfında sağlam ve tamdır.

3.6. Topolojik Uzaylar

Bu kısımda tez boyunca kullanılacak olan temel topoloji kavramları verilecektir.

3.6.1. Tanım (Topolojik Uzaylar) X boştan farklı bir küme ve τ , X in kuvvet kümesi olan $\mathcal{P}(X)$ in bir altkümesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan τ ailesine X üzerinde bir **topoloji** (veya **topolojik yapı**) denir.

T1) $\emptyset, X \in \tau$,

T2) τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti yine τ ya aittir; yani

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau \text{ için } \bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$$

T3) τ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi yine τ ya aittir; yani

$$\forall \{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$$

$$\text{için } \bigcup_{i=1}^n A_i \in \tau \text{ dır.}$$

τ nun elemanlarına X in açık alt kümeleri, $\langle X, \tau \rangle$ çiftine topolojik uzay denir. X kümesinin elemanlarına da $\langle X, \tau \rangle$ veya kısaca X topolojik uzayının noktaları denir

3.6.2. Tanım (Açık Küme) $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzay olsun. Bu uzayda X in bir Y altkümesi $Y \in \tau$ ise Y kümesine açık küme denir.

3.6.3. Tanım (Kapalı Küme) $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzay olsun. Bu uzayda $X - Y \in \tau$ ise Y kümesine kapalı küme denir.

3.6.4. Tanım (Ayrık Topolojik Uzay) $\tau = \mathcal{P}(X)$ olmak üzere, τ topolojisi X kümesi üzerinde bir topoloji oluşturur. Bu $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayına ayrık topolojik uzay denir.

3.6.5. Tanım (Ayrık Olmayan Topolojik Uzay) X herhangi bir küme ve $\tau = \{\emptyset, X\}$ olsun. τ ailesi X kümesi üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye X üzerindeki ayrık olmayan topoloji (veya kaba topoloji) ve $\langle X, \tau \rangle$ ikilisine de ayrık olmayan topolojik uzay denir.

3.6.6. Tanım (Kapanış, İç ve Sınır Noktaları) Bir $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayında, X in bir Y altkümeleri için,

- $Int(Y) = \{x \in X \mid \exists G \in \tau (x \in G \text{ ve } G \subseteq Y)\}$ kümesine Y nin içi denir.
- $Cl(Y) = \{x \in X \mid \forall G \in \tau (x \in G \Rightarrow G \cap Y \neq \emptyset)\}$ kümesine Y nin kapanışı denir.
- $Fr(Y) = Cl(Y) \cap Cl(X - Y)$ kümesine Y nin sınırı denir.

3.6.7. Önerme $\langle X, \tau \rangle$ bir topolojik uzay olsun. Y ve Z kümeleri de X altkümeleri olmak üzere aşağıdaki ifadeler vardır.

1. $Int(Y) \in \tau$,
2. $Int(Y) \subseteq Y$,
3. $Int(Y) = Y \Leftrightarrow Y \in \tau$,
4. $Int(Int(Y)) = Int(Y)$,
5. $Int(Y \cap Z) = Int(Y) \cap Int(Z)$,
6. $Int(Y) = X - Cl(X - Y)$,
7. $Y \subseteq Cl(Y)$,
8. $Cl(Y) \subseteq Y \Leftrightarrow (X - Y) \in \tau$.

3.6.8. Tanım (Tamamen Bağlantısız Uzay) $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayı ve $\forall G \in \tau$ için $Cl(G) \in \tau$ şartını sağlanıyorsa bu topolojik uzaya tamamen bağlantısız uzay denir.

3.6.9. Tanım (Atomik Topolojik Uzay) $\langle X, \tau \rangle$ bir topolojik uzay ve $\forall G \in \tau$ için $Int(Fr(G)) = \emptyset$ şartı sağlanıyorsa bu topolojik uzaya atomik topolojik uzay denir.

3.6.10. Tanım (Süreklili Fonksiyon) $\langle X, \tau_1 \rangle$ ve $\langle Y, \tau_2 \rangle$ iki topolojik uzay olsun. X ten Y ye bir f fonksiyonu $\forall G \in \tau_2$ için $f^{-1}(G) \in \tau_1$ sağlıyorsa f fonksiyonuna X topolojik uzayında süreklidir fonksiyon denir.

3.6.11. Tanım (Homeomorfizma) $\langle X, \tau_1 \rangle$ ve $\langle Y, \tau_2 \rangle$ topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu sürekli ve tersi f^{-1} var ve f^{-1} de sürekli ise, f ye bir homeomorfizma denir.

4. BULGULAR

Dinamik topolojik sistemlerin incelendiği bu tez çalışması 6 bölümden oluşmaktadır. Tezin 3. bölümünde konuya ilişkin ön bilgiler verilmiştir. 5. ve 6. bölümler ise tezin esas kısmını oluşturmaktadır. Tezin 5. bölümünde topolojik modeller bu modeller üzerinde doğruluk ve geçerlik kavramları verilerek Kripke çatıları ve topolojik uzaylar arasındaki ilişkiler gösterilmiştir. Ayrıca adı geçen lojiklerin sağlam ve tam olduğu ispatlanmıştır. 6. bölümde ise $S4C$ ve $S4O$ sistemleri aksiyomatik olarak tanımlanmıştır. $S4C$ ve $S4O$ sistemlerinden farklı dinamik topolojik lojik örnekleri verilmiş ve bu lojiklerin temel özellikleri incelenmiştir.

5. TEMEL MODAL LOJİK ve TOPOLOJİK SEMANTİK

5.1. Topolojik Modeller

Bu bölümde, bir modal operatöre sahip formülün topolojik uzaylarda nasıl yorumlanabileceği üzerinde durulacaktır. Topolojik semantikler de bir önceki konuda verilen Kripke semantiklerine benzer özellikler taşımaktadır. Fakat bizim ileriki bölümlerde bahsedilecek dinamik lojik sistemleri Kripke çatılarından ziyade topolojik uzaylara dayalı olduğundan bu bölümde bahsedilecek kavramlar dinamik lojik sistemleri için önemlidir.

5.1.1. Tanım (Topolojik Modeller) V , Ω dan $\mathcal{P}(X)$ e bir valuasyon fonksiyonu olmak üzere $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayındaki $\langle X, \tau, V \rangle$ üçlüsüne topolojik model denir. Kripke semantiklerinde olduğu gibi, bir α formülünün $\mathcal{M} = \langle X, \tau, V \rangle$ modelinin bir x noktasında doğru olması $\mathcal{M} \models_x \alpha$ ile gösterilir ve aşağıdakiler ile tanımlanır;

$$\forall p \in \Omega, \forall x \in X (\mathcal{M} \models_x p \Leftrightarrow x \in V(p)), \text{ ya da } (\mathcal{M} \models p \Leftrightarrow V(p) = X),$$

$$\forall x \in X (\mathcal{M} \not\models_x \perp),$$

$$\forall \alpha, \forall \beta \in \mathfrak{F}_\square \forall x \in X (\mathcal{M} \models_x \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow (\mathcal{M} \models_x \alpha \Rightarrow \mathcal{M} \models_x \beta)),$$

$$\forall \alpha \in \mathfrak{F}_\square, \forall x \in X (\mathcal{M} \models_x \Box \alpha \Leftrightarrow \exists G \in \tau (x \in G \text{ ve } \forall y \in G (\mathcal{M} \models_y \alpha))).$$

Şimdi $\Diamond$ operatörünün tanımlanmasını sağlayan aşağıdaki önerme verilecektir.

5.1.2. Önerme $\mathcal{M} = \langle X, \tau, V \rangle$ bir topolojik model olsun. Buna göre aşağıdakiler sağlanır.

$$(1) \forall \alpha, \forall \beta \in \mathfrak{F}_\square \forall x \in X (\mathcal{M} \models_x \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow (\mathcal{M} \models_x \alpha \text{ ve } \mathcal{M} \models_x \beta)),$$

$$(2) \forall \alpha, \forall \beta \in \mathfrak{F}_\square \forall x \in X (\mathcal{M} \models_x \alpha \vee \beta \Leftrightarrow (\mathcal{M} \models_x \alpha \text{ veya } \mathcal{M} \models_x \beta)),$$

$$(3) \forall \alpha \in \mathfrak{F}_\square \forall x \in X (\mathcal{M} \models_x \neg \alpha \Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models_x \alpha),$$

$$(4) \forall x \in X (\mathcal{M} \models_x \top),$$

$$(5) \forall \alpha \in \mathfrak{F}_\square \forall x \in X (\mathcal{M} \models_x \Diamond \alpha \Leftrightarrow \forall G \in \tau (x \in G \Rightarrow \exists y \in G (\mathcal{M} \models_y \alpha))).$$

İspat

(5) Keyfi $x \in X$ ve α formül olarak alınsın. Buna göre;

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} \models_x \Diamond \alpha &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models_x \neg \Box \neg \alpha \\
 &\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models_x \Box \neg \alpha \\
 &\Leftrightarrow \forall G \in \tau (x \in G \Rightarrow \exists y \in G (\mathcal{M} \not\models_y \neg \alpha)) \\
 &\Leftrightarrow \forall G \in \tau (x \in G \Rightarrow \exists y \in G (\mathcal{M} \models_y \alpha)).
 \end{aligned}$$

5.2. Doğruluk ve Geçerlilik

Bu bölümde formüllerin doğruluğu ve geçerliliği modeller ve uzaylar üzerinde incelenecektir. Modellerdeki doğruluk kavramı Kripke semantikleri ile benzerdir.

5.2.1. Tanım $\mathcal{M} = \langle X, \tau, V \rangle$ bir model ve α da bir formül olsun. Buna göre, α nın bir $\mathcal{M}$ modelinde doğruluğu, $\forall x \in X$ için $(\mathcal{M} \models_x \alpha)$ sağlayıp $\mathcal{M} \models \alpha$ şeklinde gösterilir.

5.2.2. Tanım $\langle X, \tau \rangle$ bir topolojik uzay ve α bir formül olsun. Buna göre, $\mathcal{T}$ topolojik uzay sınıfı ve $\forall V (V : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(X)) (\langle X, \tau, V \rangle \models \alpha)$ olmak üzere bir α formülünün $\langle X, \tau \rangle$ da geçerli olması yada $\langle X, \tau \rangle$ nin α yı geçerlemesi, $\langle X, \tau \rangle \models \alpha$ ile gösterilir. Ayrıca α nın $\mathcal{T}$ topolojik uzaylar sınıfında geçerli olması, $\forall \langle X, \tau \rangle \in \mathcal{T} (\langle X, \tau \rangle \models \alpha)$ olmak üzere, $\mathcal{T} \models \alpha$ şeklinde gösterilir.

5.2.3. Önerme $\mathcal{M} = \langle X, \tau, V \rangle$ bir topolojik model olsun. V nin tanımından,

$\forall p \in \Phi$ için $V(p) = \{x \in X : \mathcal{M} \models_x p\}$ dir. Buna göre V yi; $\forall \alpha \in \mathfrak{F}_\Box$ için

$V(\alpha) = \{x \in X : \mathcal{M} \models_x \alpha\}$ olacak şekilde genişletildiğinde aşağıdaki ifadeler vardır.

1. $\forall \alpha, \forall \beta \in \mathfrak{F}_\Box (V(\alpha \wedge \beta) = V(\alpha) \cap V(\beta)),$
2. $\forall \alpha, \forall \beta \in \mathfrak{F}_\Box (V(\alpha \vee \beta) = V(\alpha) \cup V(\beta)),$
3. $\forall \alpha \in \mathfrak{F}_\Box (V(\neg \alpha) = X - V(\alpha)),$
4. $\forall \alpha, \forall \beta \in \mathfrak{F}_\Box (V(\alpha \rightarrow \beta) \Leftrightarrow V(\alpha) \subseteq V(\beta)),$

5. $V(\top) = X$,
6. $V(\perp) = \emptyset$,
7. $\forall \alpha \in \mathfrak{F}_\square (V(\square \alpha) = \text{Int}(V(\alpha)))$,
8. $\forall \alpha \in \mathfrak{F}_\diamond (V(\diamond \alpha) = \text{Cl}(V(\alpha)))$.

İspat Burada tüm önermelerin ispatı yerine sadece 7. ve 8. önermenin ispatı yapılacaktır.

7. Keyfi $x \in X$ elemanını ve α formülü alınsın. Buna göre;

$$\begin{aligned}
x \in V(\square \alpha) &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models_x \square \alpha \\
&\Leftrightarrow \exists G \in \tau (x \in G \text{ ve } \forall y \in G (\mathcal{M} \models_y \alpha)) \\
&\Leftrightarrow \exists G \in \tau (x \in G \text{ ve } \forall y \in G (y \in V(\alpha))) \\
&\Leftrightarrow \exists G \in \tau (x \in G \text{ ve } \forall y \in X (y \in G \Rightarrow y \in V(\alpha))) \\
&\Leftrightarrow \exists G \in \tau (x \in G \text{ ve } G \subseteq V(\alpha)) \\
&\Leftrightarrow x \in \text{Int}(V(\alpha)).
\end{aligned}$$

8. Keyfi $x \in X$ elemanını ve α formülü alınsın. Buna göre;

$$\begin{aligned}
x \in V(\diamond \alpha) &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models_x \diamond \alpha \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \models_x \neg \square \neg \alpha \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models_x \square \neg \alpha \\
&\Leftrightarrow \exists G \in \tau (x \in G \Rightarrow \exists y \in G (\mathcal{M} \not\models_y \neg \alpha)) \\
&\Leftrightarrow \exists G \in \tau (x \in G \Rightarrow \exists y \in G (\mathcal{M} \models_y \alpha)) \\
&\Leftrightarrow \exists G \in \tau (x \in G \Rightarrow \exists y \in G (y \in V(\alpha))) \\
&\Leftrightarrow \exists G \in \tau (x \in G \Rightarrow \exists y \in X (y \in G \text{ ve } y \in V(\alpha))) \\
&\Leftrightarrow \exists G \in \tau (x \in G \Rightarrow \exists y \in X (y \in G \cap V(\alpha))) \\
&\Leftrightarrow \exists G \in \tau (x \in G \Rightarrow G \cap V(\alpha) \neq \emptyset)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in Cl(V(\alpha)).$$

5.2.4. Tanım $\mathcal{T}$ bir topolojik uzay sınıfı olsun. $\mathcal{L}_\square$ nin bir Γ altkümesi için $\langle X, \tau \rangle$ herhangi bir topolojik uzay olmak üzere,

$$\langle X, \tau \rangle \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall \alpha \in \Gamma (\mathcal{T} \models \alpha)$$

koşulu sağlanıyorsa, Γ lojiği $\mathcal{T}$ yi tanımlıyor denir. $\mathcal{L}_\square$ nin $\mathcal{T}$ yi tanımlayan böyle bir altkümesi varsa, $\mathcal{T}$ topolojik uzay sınıfı $\mathcal{L}_\square$ dilinde tanımlanabilir denir.

5.2.5. Tanım Γ bir lojik ve $\mathcal{C}$ de bir topolojik uzay sınıfı olsun. Buna göre,

$\forall \alpha \in \mathcal{L}_\square$ için $(\vdash_\Gamma \alpha \Rightarrow \mathcal{C} \models \alpha)$ koşulu sağlanıyorsa Γ lojiğine sağlamdır denir.

$\forall \alpha \in \mathcal{L}_\square$ için $(\mathcal{C} \models \alpha \Rightarrow \vdash_\Gamma \alpha)$ koşulu sağlanıyorsa Γ lojiğine tamdır denir.

5.3. Kripke Çatıları ile Topolojik Uzaylar Arasındaki İlişki

Kripke semantikleri ile topolojik semantikler formüllerin doğruluğu ve geçerliliğinde önemli rol oynamaktadır. Bu bölümde bunlar arasındaki ilişkiden bahsedilecek. Ayrıca yansımali, geçişmeli bir bağıntı üzerine kurulu bir Kripke Çatısının topolojik uzaylardaki karşılığını üst kapalı küme çatısı yardımıyla verilecektir.

5.3.1. Tanım Bir $\langle X, \leq \rangle$ kısmi sıralı kümesi üzerindeki bir $Y \subseteq X$ altkümesi $\forall x, \forall y (x \in Y \text{ ve } x \leq y \Rightarrow y \in Y)$ şartını sağlıyorsa üst kapalı küme adını alır.

5.3.2. Önerme τ ailesi, $G \in \tau \Leftrightarrow \forall x, \forall y \in X (x \in G \text{ ve } xRy \Rightarrow y \in G)$ olacak şekilde yansımali ve geçişmeli $\langle X, R \rangle$ çatısının tüm üst kümelerinin bir ailesi olsun. Buna göre, τ ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji tanımlar. $\langle X, \tau \rangle$ bir topolojik uzaydır. Bu topolojik uzay aynı zamanda Aleksandrov uzayı adını alıp daha sonraki bölümde incelenecektir.

İspat. Tanımdan $X, \emptyset \in \tau$ olduğu açıktır. $\{G_i\}_{i \in I}$ ailesi üst kümeler ailesi olsun. $x, y \in X$ olmak üzere,

$$x \in \bigcup_{i \in I} G_i \text{ ve } xRy$$

$$\Leftrightarrow \exists i_0 \in I \left(x \in G_{i_0} \right) \text{ ve } xRy \Rightarrow \exists i_0 \in I \left(y \in G_{i_0} \right)$$

$$\Leftrightarrow y \in \bigcup_{i \in I} G_i$$

ve

$$x \in \bigcap_{i \in I} G_i \text{ ve } xRy$$

$$\Leftrightarrow \forall i_0 \in I \left(x \in G_{i_0} \right) \text{ ve } xRy \Rightarrow \forall i_0 \in I \left(y \in G_{i_0} \right)$$

$$\Leftrightarrow y \in \bigcap_{i \in I} G_i .$$

Sonuç olarak keyfi sayıdaki üst kümelerin birleşimi ve kesişimi yine bir üst kapalı kümedir.

5.3.3. Önerme $\langle X, R \rangle$ yansımali ve geçişmeli bir Kripke Çatısının dual uzayı $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayı olsun. Bu durumda,

$$\forall V, \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathcal{L}_{\square} \left(\langle X, R, V \rangle \models_x \alpha \Leftrightarrow \langle X, \tau, V \rangle \models_x \alpha \right)$$

ifadesi vardır.

İspat $\langle X, R \rangle$ ve $\langle X, \tau \rangle$ üzerinde sırasıyla $\mathcal{M}_1 = \langle X, R, V \rangle$ ve $\mathcal{M}_2 = \langle X, \tau, V \rangle$ modelleri alınsın. Bir α formülü için, $\forall x \in X \left(\mathcal{M}_1 \models_x \alpha \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models_x \alpha \right)$ olsun. Bu durumda, $\forall x \in X \left(\mathcal{M}_1 \models_x \Box \alpha \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models_x \Box \alpha \right)$ olduğu gösterilsin. Bu durumda keyfi $x \in X$ elemanı için,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 \models_x \Box \alpha &\Leftrightarrow \forall y \in X \left(xRy \Rightarrow \mathcal{M}_1 \models_y \alpha \right) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in X \left(xRy \Rightarrow \mathcal{M}_2 \models_y \alpha \right) \\ &\Leftrightarrow \exists G \in \tau \left(x \in G \text{ ve } \forall y \in G \left(\mathcal{M}_2 \models_y \alpha \right) \right) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models_x \Box \alpha \end{aligned}$$

şeklindedir.

Bu önermeden, yansımali ve geçişmeli bir çatının duali olan topolojik uzayın bir formülün geçerliliğini koruduğu sonucu çıkarılır.

Bir sonraki önermede, bir topolojik uzaydaki iç işlem (Int) ve kapanış işleminin (Cl) yansımali ve geçişmeli çatılardaki gösteriminden bahsedilecektir.

5.3.4. Önerme $\langle X, R \rangle$ yansımali ve geçişmeli bir çatının dual uzayı $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayı olsun. Bu durumda;

$$Int(Y) = \{x \in X \mid \forall y \in X (xRy \Rightarrow y \in Y)\},$$

$$Cl(Y) = \{x \in X \mid \exists y \in X (xRy \text{ ve } y \in Y)\}$$

eşitlikleri vardır.

İspat $x \in X$ olsun.

$$x \in Int(Y)$$

$$\Leftrightarrow \exists G \in \tau (x \in G \text{ ve } G \subseteq Y)$$

$$\Leftrightarrow \exists G \in \tau (\forall y \in X (xRy \Rightarrow y \in G) \text{ ve } G \subseteq Y)$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in X (xRy \Rightarrow y \in Y)$$

ve

$$x \in Cl(Y)$$

$$\Leftrightarrow x \in X - Int(X - Y)$$

$$\Leftrightarrow x \notin Int(X - Y)$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in X (xRy \text{ ve } y \notin X - Y)$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in X (xRy \text{ ve } y \in Y).$$

5.4. Tanımlanabilirlik

Modal lojiğin bazı temel taslakları topolojik semantikler yardımıyla tüm topolojik uzaylarda geçerli olmayabilir. Örneğin (T) taslağının tanımlanabilirliği topolojik uzaylarda üzerindeki topolojinin ne olduğu önemli olmadan tanımlı olmasına rağmen $\alpha \rightarrow \Box \alpha$ taslağının tanımlanabilirliği X üzerindeki topolojik yapının ayrık topoloji olmasına bağlıdır. Ayrıca bu bölümde farklı taslakların durumu da topolojik yapıya bağlı olarak incelenecektir.

İlk olarak tek nokta kümelerinin açık olduğu en ince yapılı topolojik uzay olan ayrık topolojik uzayların tanımlanabilirliği verilecektir.

5.4.1. Lemma $\alpha \rightarrow \Box \alpha$ taslağını geçerleyen uzay ayrık topolojik uzaydır.

İspat. $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayı $\alpha \rightarrow \Box \alpha$ taslağını geçerleyen bir topolojik uzay olsun.

Amacımız, $\tau = P(X)$ olduğunu göstermektir.

Bu durumda herhangi bir $Y \subseteq X$ alt kümesini alıp bunun $Y = \text{Int}(Y)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Taslağımızın $\langle X, \tau \rangle$ uzayında geçerli olmasından dolayı,

$V(p) = Y$ ve $\langle X, \tau, V \rangle \models p \rightarrow \Box p$ olacak şekilde bir p atomik önermesi ve V valuasyon fonksiyonu vardır.

Böylece, $\mathcal{M} = \langle X, \tau, V \rangle$ modeli için,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models p \rightarrow \Box p &\Leftrightarrow V(p) \subseteq V(\Box p) \\ &\Leftrightarrow V(p) \subseteq \text{Int}(V(p)) \\ &\Leftrightarrow Y \subseteq \text{Int}(Y) \\ &\Leftrightarrow Y = \text{Int}(Y) \end{aligned}$$

dır. Böylece $\alpha \rightarrow \Box \alpha$ taslağını geçerleyen uzay ayrık topolojik uzaydır.

5.4.2. Lemma $\alpha \rightarrow \Box \alpha$ taslağı herhangi bir ayrık topolojik uzayda geçerlidir.

İspat Bir $\mathcal{M} = \langle X, \tau, V \rangle$ modelini ve $\langle X, \tau \rangle$ ayrık uzayını alalım. Buna göre, herhangi bir α formülü için, $\mathcal{M} \models p \rightarrow \Box p$ olduğunu göstermemiz gerekir. $\langle X, \tau \rangle$ ayrık topolojik uzay olduğu için $V(\alpha)$ açıktır. Yani, $V(\alpha) = \text{Int}V(\alpha)$ dır.

Buna göre,

$$\begin{aligned} V(\alpha) = \text{Int}(V(\alpha)) &\Leftrightarrow V(\alpha) \subseteq \text{Int}(V(\alpha)) \\ &\Leftrightarrow V(\alpha) \subseteq V(\Box \alpha) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models p \rightarrow \Box p. \end{aligned}$$

5.4.3. Teorem (Ayrık Topolojik Uzayın Tanımlanabilirliği) $\alpha \rightarrow \Box \alpha$ taslağı tüm ayrık topolojik uzayları tanımlar.

5.4.4. Atomik Topolojik Uzayın Tanımlanabilirliği

Bu bölümde modal lojikte çok kullanılan M taslağının atomik uzaylarda tanımlanabilirliği üzerinde durulacaktır.

5.4.5. Lemma M taslağını geçerleyen bir uzay atomik uzaydır.

İspat $\langle X, \tau \rangle$ uzayı M taslağını gerçekleyen bir topolojik uzay olsun. $Y \subseteq X$ altkümesini alınıp, $Int(Fr(Y)) = \emptyset$ olduğu gösterilmelidir. M taslağı $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayında geçerli olduğundan, $V(p) = Y, \langle X, \tau, V \rangle \models \Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$ olacak şekilde bir p atomik formülü ve bir V valuasyon fonksiyonu vardır. Şimdi bir $\mathcal{M} = \langle X, \tau, V \rangle$ modeli alınsın. Bu modele göre,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p &\Leftrightarrow V(\Box \Diamond p) \subseteq V(\Diamond \Box p) \\
&\Leftrightarrow Int(V(\Diamond p)) \subseteq Cl(V(\Box p)) \\
&\Leftrightarrow Int(Cl(V(p))) \subseteq Cl(Int(V(p))) \\
&\Leftrightarrow Int(Cl(Y)) \subseteq Cl(Int(Y)) \\
&\Leftrightarrow Int(Cl(Y)) \cap (X - Cl(Int(Y))) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow Int(Cl(Y)) \cap (X - (X - Int(X - Int(Y)))) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow Int(Cl(Y)) \cap Int(X - Int(Y)) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow Int(Cl(Y)) \cap Int(X - (X - Cl(X - Y))) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow Int(Cl(Y)) \cap Int(Cl(X - Y)) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow Int(Cl(Y)) \cap (Cl(X - Y)) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow Int(Fr(Y)) = \emptyset
\end{aligned}$$

dır.

5.4.6. Lemma M taslağı herhangi bir atomik topolojik uzayda geçerlidir.

İspat $\langle X, \tau \rangle$ atomik topolojik uzay üzerinde bir $\mathcal{M} = \langle X, \tau, V \rangle$ modelini alınsın. Bir α formülü için $\langle X, \tau \rangle$ atomik topolojik uzay olduğundan, $Int(Fr(V(\alpha))) = \emptyset$ eşitliği $\mathcal{M} \models \Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$ ifadesi sağlanır. Tersine,

$$\begin{aligned} Int(Fr(V(\alpha))) &= \emptyset \\ \Leftrightarrow Int(Cl(V(\alpha))) &\subseteq Cl(Int(V(\alpha))) \\ \Leftrightarrow V(\Box \Diamond \alpha) &\subseteq V(\Diamond \Box \alpha) \\ \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \Box \Diamond p &\rightarrow \Diamond \Box p \end{aligned}$$

ifadesi sağlanmış olur. Bu durumda M taslağı atomik topolojik uzaylarda geçerlidir.

5.4.7. Teorem (Atomik Topolojik Uzayların Tanımlanabilirliği) M taslağı tüm atomik topolojik uzay sınıfını tanımlar.

5.4.8. Lemma G taslağını gerçekleyen topolojik uzay tamamen bağlantısız topolojik uzaydır.

İspat $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayı G taslağını gerçeklesin. U ise τ nun bir açığı olsun. $Cl(U)$ nun açık olduğu gösterildiğinde ispat tamamlanmış olur. Bunun için, $Cl(U) = Int(Cl(U))$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmeli. Bir kümenin içi tanımından $Int(Cl(U)) \subseteq Cl(U)$ olduğu açıktır. Tersinin sağlandığı yani, $Cl(U) \subseteq Int(Cl(U))$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$V(p) = U$ ve $\mathcal{M} \models \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$ olacak şekilde bir p atomik önermesi ve V valuasyon fonksiyonu alınsın. Bu durumda, $\mathcal{M} = \langle X, \tau, V \rangle$ modeli için,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p &\Leftrightarrow V(\Diamond \Box p) \subseteq V(\Box \Diamond p) \\ &\Leftrightarrow Cl(V(\Box p)) \subseteq Int(V(\Diamond p)) \\ &\Leftrightarrow Cl(Int(p)) \subseteq Int(Cl(p)) \\ &\Leftrightarrow Cl(Int(U)) \subseteq Int(Cl(U)) \\ &\Leftrightarrow Cl(U) \subseteq Int(Cl(U)) \end{aligned}$$

dir.

5.4.9. Lemma G taslağı herhangi bir tamamen bağlantısız topolojik uzayda geçerlidir.

İspat $\mathcal{M}$ modeli, bir $\langle X, \tau \rangle$ tamamen bağlantısız topolojik uzayında bir model olsun.

Buna göre bir α formülü için, $\mathcal{M} \models \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$ yi ispatlanması gerekmektedir.

$\langle X, \tau \rangle$ tamamen bağlantısız bir topolojik uzay olduğundan, $Cl(Int(V(\alpha)))$ nin açık olması gerekmekte. Bir başka ifadeyle, $Cl(Int(V(\alpha))) = Int(Cl(Int(V(\alpha))))$ eşitliği sağlanmalıdır. Bu durumda;

$$\begin{aligned} Cl(Int(V(\alpha))) &= Int(Cl(Int(V(\alpha)))) \\ \Leftrightarrow Cl(Int(V(\alpha))) &\subseteq Int(Cl(Int(V(\alpha)))) \\ \Rightarrow Cl(Int(V(\alpha))) &\subseteq Int(Cl(V(\alpha))) \\ \Leftrightarrow Cl(V(\Box \alpha)) &\subseteq Int(V(\Diamond \alpha)) \\ \Leftrightarrow V(\Diamond \Box) &\subseteq V(\Box \Diamond) \\ \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \Diamond \Box p &\rightarrow \Box \Diamond p \end{aligned}$$

böylece ispat tamamlanmış olur.

5.4.10. Lemma B taslağı herhangi bir ayrık olmayan (veya kaba) topolojik uzayda geçerlidir.

İspat $\langle X, \tau \rangle$ ayrık olmayan topolojik uzayın bir modeli $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha$ olsun. Bu model üzerinde herhangi bir α formülü için, $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha$ olduğu gösterilmelidir.

$\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayı ayrık olmayan topolojik uzay olduğundan,

$Cl(V(\alpha)) = X$ ve $Int(Cl(V(\alpha))) = X$ eşitliklerinin sağlandığı açıktır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} V(\alpha) \subseteq X &\Leftrightarrow V(\alpha) \subseteq Int(Cl(V(\alpha))) \\ &\Leftrightarrow V(\alpha) \subseteq Int(V(\Diamond \alpha)) \\ &\Leftrightarrow V(\alpha) \subseteq V(\Box \Diamond \alpha) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha \end{aligned}$$

dır. Böylece B taslağı herhangi bir ayrık olmayan topolojik uzayda geçerlidir.

5.5. Sağlamlık ve Tamlık

Tezin bu kısmında S4, S4.1 ve S4.2 lojiklerinin sağlamlığı ve tamlığı üzerinde durulacaktır. Bir önceki bölümde verilen tanımlanabilirlik örnekleri bu bölümde sağlamlık ve tamlık ispatları için yardımcı olacaktır.

5.5.1. Teorem (S4 Lojiğinin Sağlamlığı) S4 lojiği tüm uzay sınıflarında sağlamdır.

İspat Tüm klasik totolojiler ve K, T, 4 taslakları herhangi bir uzayda geçerlidir. Gereklilik kuralı ve modus ponens bir formülün geçerliliğini korumaktadır.

5.5.2. Teorem (S4 Lojiğinin Tamlığı) S4 lojiği tüm uzay sınıflarında tamdır.

İspat α formülü S4 lojiğine ait bir teorem olmasın. Bu durumda, α nın geçersizliğini gösteren bir uzay olduğunu ispatlamamız gerekmektedir. S4 ün Kripke Semantiklerinde tamlığından dolayı, $\exists V (V : \Phi \rightarrow P(X)) \exists x \in X (\langle X, R, V \rangle \not\models_x \alpha)$ olacak şekilde yansımali ve geçişmeli bir $\langle X, R \rangle$ çatısı bulunmaktadır.

Şimdi $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayını alalım. Böylece,

$$\exists V (V : \Phi \rightarrow P(X)) \exists x \in X (\langle X, R, V \rangle \not\models_x \alpha)$$

olup, $\langle X, \tau \rangle$ uzayı α nın geçerli olmadığını gösterir.

5.5.3. Teorem (S4.1 Lojiğinin Sağlamlığı) S4.1 lojiği tüm atomik topolojik uzaylarda sağlamdır.

İspat S4 ün sağlamlığı ile, tüm klasik totolojiler ve K, T, 4 taslakları herhangi bir atomik uzayda geçerlidir. Gereklilik kuralı ve modus ponens geçerliliği korumaktadır. Ayrıca, atomik topolojik uzayın tanımlanabilirliği gösteriyor ki M taslağı tüm atomik uzaylarda geçerlidir.

5.5.4 Lemma Yansımali, geçişmeli ve atomik bir çatının dual uzayı bir atomik topolojik uzaydır.

İspat $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayı bir $\langle X, R \rangle$ yansımali, geçişmeli ve atomik çatısının dual uzayı olsun. Bu durumda $Y \subseteq X$ altkümesi için $Int(Fr(Y)) = \emptyset$ olduğu

gösterilmelidir. Bunun için herhangi bir $x \in X$ elemanı alınarak $x \notin \text{Int}(\text{Fr}(Y))$ olduğu gösterilmelidir. $\langle X, R \rangle$ atomik olduğundan dolayı,

$$\exists y \in X \left(xRy \text{ ve } \forall z \in X \left(yRz \Rightarrow y = z \right) \right)$$

dir. Buna göre;

$$\begin{aligned} & \exists y \in X \left(xRy \text{ ve } \forall z \in X \left(yRz \Rightarrow y = z \right) \right) \\ & \Rightarrow \exists y \in X \left(xRy \text{ ve } \forall z \in X \left((yRz \Rightarrow z \in X - Y) \text{ veya } (yRz \Rightarrow z \in Y) \right) \right) \\ & \Leftrightarrow \exists y \in X \left(xRy \text{ ve } \forall z \in X \left((yRz \Rightarrow z \notin Y) \text{ veya } (yRz \Rightarrow z \notin X - Y) \right) \right) \\ & \Leftrightarrow \exists y \in X \left(xRy \text{ ve } (y \notin \text{Cl}(Y) \text{ veya } y \notin \text{Cl}(X - Y)) \right) \\ & \Leftrightarrow \exists y \in X \left(xRy \text{ ve } (y \notin \text{Cl}(Y)) \text{ veya } (xRy \text{ ve } y \notin \text{Cl}(X - Y)) \right) \\ & \Leftrightarrow \exists y \in X \left(xRy \text{ ve } y \notin \text{Cl}(Y) \right) \text{ veya } \exists y \in X \left(xRy \text{ ve } y \notin \text{Cl}(X - Y) \right) \\ & \Leftrightarrow x \notin \text{Int}(\text{Cl}(Y)) \text{ veya } x \notin \text{Int}(\text{Cl}(X - Y)) \\ & \Leftrightarrow x \notin \text{Int}(\text{Cl}(Y)) \cap \text{Int}(\text{Cl}(X - Y)) \\ & \Leftrightarrow x \notin \text{Int}(\text{Cl}(Y)) \cap \text{Cl}(X - Y) \\ & \Leftrightarrow x \notin \text{Int}(\text{Fr}(Y)) \end{aligned}$$

elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

5.5.5. Teorem (S4.1 Sisteminin Tamlığı) S4.1 lojiği tüm atomik topolojik uzay sınıfında tamdır.

İspat α formülü S4 lojiğine ait bir teorem olmasın. Bu durumda, α nın geçersizliğini gösteren bir uzay olduğunu ispatlamamız gerekmektedir. S4 ün Kripke Semantiklerinde tamlığından dolayı, $\exists V (V : \Phi \rightarrow P(X)) \exists x \in X (\langle X, R, V \rangle \not\models_x \alpha)$ olacak şekilde yansımali, geçişmeli ve atomik bir $\langle X, R \rangle$ çatısı bulunmaktadır.

$\langle X, R \rangle$ çatısına ilişkin $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayını alalım. Bu topolojik uzayda atomik topolojik uzaydır. Böylece, $\exists V (V : \Phi \rightarrow P(X)) \exists x \in X (\langle X, R, V \rangle \not\models_x \alpha)$ ifadesinden, $\langle X, \tau \rangle$ uzayı α nın geçerli olmadığını gösterir.

5.5.6. Teorem (S4.2 Lojiğinin Sağlamlığı) S4.2 lojiği tüm tamamen bağlantısız topolojik uzaylarda sağlamdır.

İspat S4 ün sağlamlığı ile, tüm klasik totolojiler, K, T, 4 taslakları herhangi bir tamamen bağlantısız uzayda geçerlidir. Modus Ponens ile gereklilik kuralları herhangi bir formülün geçerliliğini korumaktadır. Diğer taraftan, tamamen bağlantısız topolojik uzayların tanımlanabilirliği ile de G taslağının herhangi bir tamamen bağlantısız topolojik uzaylarda geçerli oluşu görülmektedir.

5.5.7. Teorem (S4.2 Lojiğinin Tamlığı) S4.2 lojiği tüm tamamen bağlantısız topolojik uzaylarda tamdır.

İspat α formülü S4.2 ye ait bir teorem olmasın. Buna göre, α yı yanlış kılan tamamen bağlantısız bir topolojik uzayın varlığının gösterilmesi gerekir. S4.2 sisteminin Kripke semantiklerinde tamlığı gereği, $\exists V (V : \Phi \rightarrow P(X)) \exists x \in X (\langle X, R, V \rangle \not\models_x \alpha)$

olacak şekilde, yansımali, geçişmeli ve zayıf yönlendirilmiş bir $\langle X, R \rangle$ çatısının varlığından bahsedilebilir. Bu $\langle X, R \rangle$ çatısının dual uzayı olarak $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayı alınsın. Bu durumda, $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayı tamamen bağlantısız bir uzaydır ve

$$\exists V (V : \Phi \rightarrow P(X)) \exists x \in X (\langle X, \tau, V \rangle \not\models_x \alpha)$$

olduğundan $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayında α formülü geçersiz olmaktadır.

5.5.8. Teorem (S5 Sisteminin Sağlamlığı) S5 sistemi tüm ayrık topolojik uzaylar sınıfında sağlamdır.

İspat S4 ün sağlamlığı ile, tüm klasik totolojiler, K, T, 4 taslakları herhangi bir ayrık topolojik uzayda geçerlidir. Modus Ponens ile gereklilik kuralları herhangi bir formülün geçerliliğini korumaktadır. Diğer taraftan, ayrık topolojik uzayların tanımlanabilirliği ile de B taslağının herhangi bir ayrık topolojik uzaylarda geçerli olduğu görülmektedir.

5.5.9. Lemma Evrensel bir çatının dual topolojik uzayı ayrık topolojik uzaydır.

İspat $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayı $\langle X, R \rangle$ evrensel çatısının dual uzayı olsun. $G \subseteq \tau$ uzayın bir açığı olmak üzere, $G = X$ veya $G = \emptyset$ olduğunu gösterilmeli. R bağıntısı evrensel

bir bağıntı olmasıyla bunun duali olan τ uzayının kümeleri üst kümelerdir. Bundan dolayı $G = X$ veya $G = \emptyset$ dur.

5.5.10. Teorem S5 sistemi tüm ayrık olmayan topolojik uzaylar sınıfında tamdır.

İspat α formülü S5 in bir teoremi olmasın. Buna göre, α yı yanlışlayan ayrık olmayan bir topolojik uzayın varlığının gösterilmesi gerekir. S5 sisteminin Kripke semantiklerinde tamlığı tanımı ile

$$\exists V (V : \Phi \rightarrow P(X)) \exists x \in X (\langle X, R, V \rangle \not\models_x \alpha)$$

olacak şekilde, evrensel bir $\langle X, R \rangle$ çatısının varlığından bahsedilebilir. Bu $\langle X, R \rangle$ çatısının dual uzayı olarak $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayı alınsın. Dolayısıyla, $\langle X, \tau \rangle$ ayrık olmayan bir topolojik uzaydır ve $\exists V (V : \Phi \rightarrow P(X)) \exists x \in X (\langle X, \tau, V \rangle \not\models_x \alpha)$. Bu durumda, $\langle X, \tau \rangle$ topolojik uzayında α formülü geçersizdir.

6. DİNAMİK TOPOLOJİK SİSTEM ÖRNEKLERİ

6.1. S4C ve S4○ Sistemlerinin Aksiyomları

Önceki bölümlerde incelediği gibi S4 sistemi topolojik olarak tanımlanabilir bir modal lojik sistemidir. Bu durağan S4 sisteminin üzerine süreklilik aksiyomu eklenerek (Artemov ve ark, 1997) S4C sistemi oluşturulmuştur. Daha sonra (Kremer ve Mints, 2005) yapılan çalışmalarla da S4C sistemi üzerindeki sürekli fonksiyonların yerine homeomorfizmalar konularak S4○ sistemi tanıtılmıştır. Bu şekilde durağan S4 lojiği daha güçlü bir yapı haline gelerek dinamik S4C ve S4○ lojikleri meydana gelmiştir.

S4C sistemini oluşturan aksiyomlar ;

- Önermesel mantığın tüm totolojileri,
- S4 aksiyomları,

Bu aksiyomların topolojik tanımlanabilirliği önceki bölümde verilmiştir.

- $\bigcirc(\varphi \vee \phi) \equiv (\bigcirc\varphi \vee \bigcirc\phi)$,

Topolojik anlamda $f^{-1}(V(\varphi) \cup V(\phi)) = f^{-1}(V(\varphi)) \cup f^{-1}(V(\phi))$ şeklinde yorumlanır.

- $\bigcirc\neg\varphi \equiv \neg\bigcirc\varphi$,

Topolojik anlamda $f^{-1}(X - V(\varphi)) = X - f^{-1}(V(\varphi))$ şeklinde yorumlanır.

- Süreklilik aksiyomu: $\bigcirc\Box\varphi \rightarrow \Box\bigcirc\varphi$,

Topolojik uzaylarda $f^{-1}(\text{Int}(V(\varphi))) \subseteq \text{Int}(f^{-1}(V(\varphi)))$ şeklinde yorumlanır.

S4C sistemini oluşturan kurallar;

- Modus Ponens: $\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \phi}{\vdash \phi}$
- $\Box$ için (N) kuralı: $\frac{\varphi}{\vdash \Box\varphi}$

- $\bigcirc$ için (N) kuralı: $\frac{\varphi}{\vdash \bigcirc \varphi}$

S4C sistemine ters süreklilik aksiomunun eklenmesiyle S4 $\bigcirc$ sistemi oluşur.

$$S4\bigcirc = S4C + (\Box\bigcirc\varphi \rightarrow \bigcirc\Box\varphi).$$

6.1.1. Önerme $\langle X, \tau, f \rangle \mathcal{L}_{\Box\bigcirc}$ dilinde herhangi bir topolojik yapı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir,

- (i) $\bigcirc\Box\varphi \rightarrow \Box\bigcirc\varphi$ (her $\varphi \in \mathcal{L}_{\Box\bigcirc}$ için),
- (ii) $\bigcirc\Box\varphi \leftrightarrow \Box\bigcirc\Box\varphi$ (her $\varphi \in \mathcal{L}_{\Box\bigcirc}$ için),
- (iii) $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu her τ uzayında süreklidir.

İspat $\varphi \in \mathcal{L}_{\Box\bigcirc}$ bir formül ve V de valuasyon fonksiyonu olsun. Bu durumda $V(\varphi) = G \subseteq X$ olacak şekilde,

$$V(\bigcirc\Box\varphi \rightarrow \Box\bigcirc\varphi) = X \Leftrightarrow f^{-1}(\text{Int}(\varphi)) \subseteq \text{Int}(f^{-1}(\varphi))$$

$$V(\Box\bigcirc\varphi \rightarrow \bigcirc\Box\varphi) = X \Leftrightarrow \text{Int}(f^{-1}(\varphi)) \subseteq \text{Int}(f^{-1}(\text{Int}(\varphi)))$$

ifadelerinin sağlanması gerekir.

- (i) $\rightarrow$ (iii) , $G \in \tau$ ve $G = \text{Int}(G)$ olsun. Bu durumda,

$$\text{Int}(f^{-1}(G)) \subseteq f^{-1}(G) = f^{-1}(\text{Int}(G)) \subseteq \text{Int}(f^{-1}(G))$$

ifadesi elde edilir.

$$f^{-1}(G) = \text{Int}(f^{-1}(G))$$

sonucuna ulaşılmış olur.

- (iii) $\rightarrow$ (ii) nin ispatı açıktır. Hipotezden, $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyon olsun.

Süreklilik tanımından $\forall G \in \tau$ için $f^{-1}(G) \in \tau$ olur. Yani, $f^{-1}(G) = \text{Int}(f^{-1}(G))$ dir.

Buradan da, $f^{-1}(\text{Int}(G)) = \text{Int}(f^{-1}(\text{Int}(G)))$ olur.

(ii) $\rightarrow$ (i) , herhangi bir $G \subseteq X$ kümesini alınsın, $Int(G) \subseteq G$ olmasından dolayı,

$$Int(f^{-1}(Int(G))) \subseteq Int(f^{-1}(G))$$

ifadesi sağlanır. Bu durumda,

$$f^{-1}(Int(G)) = Int(f^{-1}(Int(G))) \subseteq Int(f^{-1}(G))$$

ifadesi elde edilmiş olup ispat tamamlanır.

6.2. Dinamik Topolojik Lojikler

$\mathcal{L}$ dilimiz, Ω önermesel değişkenleri ile birlikte, Boole bağlaçları ve birli modal operatörler olan, $\Box$ (*interior*), $\bigcirc$ (*next*), $*$ (*henceforth*) operatörlerinden oluşmaktadır. Bazı durumlarda $\mathcal{L}$ dilinin fragmanları ile çalışılacaktır. Her zaman fragmanlarımız Boole bağlaçlarını içerecektir. Burada $\Box\Box$ parçaları $\mathcal{L}_{\Box\Box}$ ile gösterilecektir. Ayrıca, $p, q, r, \dots$ 'yi Ω üzerinde atomik önermeler olarak, $\alpha, \beta, \varphi, \phi$ sembolleri ise formüller olarak kullanılacaktır.

6.2.1. Tanım X bir topolojik uzay ve $V : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(X)$ önermesel değişkenlerini X in altkümelerine eşleyen valuasyon fonksiyonu olmak üzere $\mathcal{M} = \langle X, V \rangle$ sıralı ikilisi alınsın. $\mathcal{L}_{\Box}$ dilindeki her φ formülü için, $\mathcal{M}(\varphi)$ aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$\mathcal{M}(p) = V(p),$$

$$\mathcal{M}(\varphi \vee \phi) = \mathcal{M}(\varphi) \cup \mathcal{M}(\phi)$$

$$\mathcal{M}(\neg \varphi) = X - \mathcal{M}(\varphi)$$

$$\mathcal{M}(\Box \varphi) = Int(\mathcal{M}(\varphi)).$$

$\mathcal{M}(\varphi)$ modeli için standart geçerlilik aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}(\varphi) = X$$

$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \text{her } \mathcal{M} = \langle X, V \rangle \text{ modeli için } \mathcal{M} \models \varphi$$

$\varnothing$ geçerlidir ($\models \varnothing$) $\Leftrightarrow$ her X topolojik uzayı için $X \models \varnothing$.

6.2.3. Tanım (Alexsandrov Uzayları) Bir $\langle W, R \rangle$ Kripke çatısı verilmiş olsun, W nin bir S altkümesi açık olması için gerek ve yeter şart S kümesinin R bağıntısına göre kapalı olmasıdır. Yani, her $x, y \in W$ için, eğer $x \in S$ ve xRy ise $y \in S$ dir. Böylece, her $\langle W, R \rangle$ Kripke çatısı için, W üzerindeki topolojiden yararlanılarak bir dual topolojik uzay tanımlanabilir. Bir $Y \subseteq X$ kümesinin için; $Int(Y) = \{x \in Y : \forall y \in X, xRy \Rightarrow y \in Y\}$ şeklinde tanımlanır.

Bu uzaylarda açık kümelerin keyfi kesişimi açık olup, bu uzaylar Alexandrov uzayıdır. İlk olarak 1937 yılında P. S. Alexsandrov tarafından verilmiştir.

6.2.4. Tanım Bir X topolojik uzayında, R bağıntısını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$xRy \Leftrightarrow x \in Cl(y).$$

Burada R bağıntısı: yansıma ve geçişme özelliklerini sağladığından $\langle X, R \rangle$ bir yansımali ve geçişmeli Kripke çatısıdır.

6.2.5. Teorem X bir Alexandrov uzayı olsun, bu durumda X in bir Y altkümesinin açık olması için gerek ve yeter şart Y nin bir Kripke çatısında açık olmasıdır. Böylece, X Alexsandrov uzayının duali $\langle X, R \rangle$ Kripke çatısıdır.

İspat. X bir Alexandrov uzayı ve $Y \subseteq X$ olsun.

($\Rightarrow$) Y, X de açık olsun. Y nin R bağıntısına göre kapalı olduğunu göstermek için $x \in Y$ ve xRy kabul edilsin. Böylece, $x \in Cl(y)$ dir. O halde x i içeren her açık küme aynı zamanda y yide içermektedir. Bu nedenle $y \in Y$ dir.

($\Leftarrow$) Y kümesi, R bağıntısına göre kapalı olsun. Y nin X topolojik uzayında açık olduğunun gösterilmesi için, $Z = X - Y$ nin kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için, $Cl(Z) \subseteq Z$ sağladığı gösterilmelidir. $z \in Cl(Z)$ alınsın, fakat $z \notin Z$ olsun. O halde $z \in Y$ dir. $O_z = \cap \{O : O \subseteq X \text{ ve } O \text{ açık olup } z \in O\}$. O_z , X in Alexandrov uzayı olmasından dolayı açıktır. $z \in Cl(Z)$ olmasından, bazı $w \in Z \cap O_z$ vardır. O halde w yi içeren her açık küme z yide içerir. Böylece $z \in Cl(w)$ olup $zR_x w$ dir. Y , R bağıntısına kapalı olduğundan $w \in Y$ dir. Fakat $w \in Z = X - Y$ çelişkidir.

6.2.6. Teorem (McKinsey – Tarski - Kripke) X kendi içinde yoğun bir metrik uzay ve A da $\mathcal{L}_{\square}$ dilinde verilen bir formül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (i) $A \in S4$
- (ii) $\models A$
- (iii) $X \models A$
- (iv) $\mathbb{R} \models A$
- (v) (Her sonlu Y topolojik uzayı için) $Y \models A$
- (vi) (Her Y Aleksandrov uzayı için) $Y \models A$.

6.2.7. Tanım X bir topolojik uzay ve f , X üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\langle X, f \rangle$ sıralı ikilisine dinamik topolojik sistem (DTS) denir. $\langle X, f \rangle$ bir dinamik topolojik sistem ve V de $p \in PV$ yi X in bir altkümese eşleyen bir valuasyon fonksiyonu olmak üzere $\mathcal{M} = \langle X, V, f \rangle$ sıralı üçlüsüne de dinamik topolojik model (DTM) denir. Her bir φ formülü için, $\mathcal{M}$ tarafından φ ye bir $\mathcal{M}(B)$ altkümesi tanımlanabilir. Bu durumda:

$$\mathcal{M}(\bigcirc \varphi) = f^{-1}(\varphi),$$

$$\mathcal{M}(*\varphi) = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(\varphi)$$

eşitlikleri verilebilir.

6.2.8. Tanım $\mathcal{M} = \langle X, V, f \rangle$ bir DTM olsun. Böylece standart geçerlilik bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}(\varphi) = X,$$

$$\langle X, f \rangle \models \varphi \Leftrightarrow \text{her } \mathcal{M} = \langle X, V, f \rangle \text{ modeli için } \mathcal{M} \models \varphi,$$

$$X \models \varphi \Leftrightarrow \text{her sürekli } f \text{ fonksiyonu için } \langle X, f \rangle \models \varphi,$$

$$\varphi \text{ geçerlidir } (\models \varphi) \Leftrightarrow \text{her } X \text{ topolojik uzayı için } X \models \varphi.$$

6.2.9. Tanım $\mathcal{F}$ bir fonksiyon sınıfı olmak üzere her $f \in \mathcal{F}$ fonksiyonunun bazı topolojik uzaylar üzerinde sürekli olduğu kabul edilsin. $\mathcal{T}$ topolojik uzaylar sınıfı olarak alınırsa aşağıdaki üç geçerlilik bağıntısı tanımlanabilir.

- $\tau, \mathcal{F} \models B \Leftrightarrow$ Her $f \in \mathcal{F}$ ve her $X \in \tau$ için f, X de sürekli ise $\langle X, f \rangle \models B$ dir.
- $\mathcal{F} \models B \Leftrightarrow$ Her X topolojik uzayı ve her $f \in \mathcal{F}$ için f sürekli ise $\langle X, f \rangle \models B$ dir.
- $\tau \models B \Leftrightarrow X \models B$ Her topolojik uzay için $X \in \tau$ dir.

Dinamik topolojik lojik çeşitleri sürekli fonksiyonlar üzerinde ve topolojik uzaylar sınıfında aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

6.2.10. Tanım Herhangi bir τ topolojik uzay ve $\mathcal{F}$ sürekli fonksiyon sınıfı için aşağıdaki ifadeleri verilebilir.

$$\text{DTL}_{\tau, \mathcal{F}} = \{A : \tau, \mathcal{F} \models A\}.$$

$$\text{DTL}_{\tau} = \{A : \tau \models A\}.$$

$$\text{DTL}_{\mathcal{F}} = \{A : \mathcal{F} \models A\}.$$

6.2.11. Tanım $\mathcal{D}$ bir dinamik topolojik lojik olsun, $\mathcal{D}$ nin *tamamen topolojik fragmanı* $\mathcal{L}_{\square}$ dilinde açıklanabilir bir fragmandır. Bu fragman $\mathcal{L}_{\square}$ içinde formüller kümesi olup $\mathcal{D}$ ye aittir. $\mathcal{D}$ nin *tamamen temporal fragmanı* $\mathcal{L}_{*\square}$ dilinde ifade edilebilir bir fragmandır. $\mathcal{D}$ nin *next-interior* fragmanı $\mathcal{L}_{\square\Box}$ dilinde ifade edilebilir bir fragmandır. Bu lojikler sırasıyla $\mathcal{D}^{\square}$, $\mathcal{D}^{*\square}$ ve $\mathcal{D}^{\square\Box}$ ile gösterilecektir.

Bundan sonraki kısımlarda üzerinde özel bir topoloji veya fonksiyon tanımlanmış çeşitli dinamik topolojik lojikler incelenecektir. Bunların gösterimleri aşağıdaki gibidir.

$$\text{DTL}_{\mathcal{D}_0}; \text{Klasik topolojik uzaylar DTL.}$$

$$\text{DTL}_{\mathcal{A}}; \text{Alexsandrov uzayları DTL.}$$

$$\text{DTL}_{\mathcal{H}}; \text{Homeomorfizma DTL.}$$

6.3. Klasik Dinamik Topolojik Lojik

$DTL_0 = \{A \models A\}$ en temel DTL dir. Fakat DTL_0 in aksiyomlaştırılabilir olup olmadığı henüz bilinmemektedir. $S4C \subseteq DTL_0^{\Box}$ sağlandığı takdirde DTL_0 in sağlamlığı, $DTL_0^{\Box} \subseteq S4C$ sağlandığı takdirde ise DTL_0 in tamlığı gösterilmiş olacaktır.

6.4. Alexandrov Uzayları Dinamik Topolojik Lojiği

Alexsandrov Uzaylarının dinamik topolojik lojiği daha önce de bahsedildiği gibi Kripke çatılarına dayanmaktadır. $DTL_0 \subset DTL_{\mathcal{A}}$ olduğu açıktır fakat $DTL_0 \neq DTL_{\mathcal{A}}$ durumu için,

$$(*\Box p \rightarrow \Box *p) \notin DTL_0$$

$$(*\Box p \rightarrow \Box *p) \in DTL_{\mathcal{A}}$$

formülleri alınsın. Bir Alexandrov uzayda keyfi sayıda açıkların kesişimi açık olduğundan $(*\Box p \rightarrow \Box *p) \in DTL_{\mathcal{A}}$ dir. $(*\Box p \rightarrow \Box *p) \notin DTL_0$ olduğunu göstermek için, bir $\mathcal{M} = \langle \mathbb{R}, f, V \rangle$ modeli, $f(x) = 2x$ fonksiyonu ve $V(p) = (-1, 1)$ alınsın. Bu durumda, $V(\Box p) = (-1, 1)$ dir ve $f^{-n}(V(\Box p)) = (-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n})$ olmasından $V(*\Box p) = \{0\}$ elde edilir. Benzer şekilde, $V(*p) = \{0\}$ elde edilir. $V(\Box *p) = \emptyset$ olduğundan $\mathcal{M} \not\models (*\Box p \rightarrow \Box *p)$ bulunur.

6.5. Homeomorfizmalar Dinamik Topolojik Lojği

Bir diğ er dinamik topolojik sınıfıda $\mathcal{H}$ homeomorfizmaların sınıfıdır. Bu homeomorfizmalar sürekli tersi var, tersi de sürekli olan birebir fonksiyonlardır.

$$(\Box \bigcirc p \rightarrow \bigcirc \Box p) \notin \text{DTL}_0$$

$$(\Box \bigcirc p \rightarrow \bigcirc \Box p) \in \text{DTL}_{\mathcal{H}}$$

olup, S bir X topolojik uzayının alt kümesi olup f nin bir homeomorfizma oluşuyla $\text{Int}(f^{-1}(S)) \subseteq f^{-1}(\text{Int}(S))$ gerçeğiyle $(\Box \bigcirc p \rightarrow \bigcirc \Box p) \in \text{DTL}_{\mathcal{H}}$ durumu sağlanır. $(\Box \bigcirc p \rightarrow \bigcirc \Box p) \notin \text{DTL}_0$ durumunu görmek için, $\mathcal{M} = \langle X, f, V \rangle$ modeli, $X = \{0,1\}$ kümesi ve üzerinde açık kümeler olarak $\emptyset$, $\{0\}$ ve $\{0,1\}$ kümeleri alınsın. Burada $f(0) = f(1) = 1$ ve $V(p) = \{1\}$ olsun. f fonksiyonu sürekli ve böylece $\mathcal{M}$ bir DTM dir. $V(\Box \bigcirc p) = \{0,1\}$ ve $V(\bigcirc \Box p) = \emptyset$ olup böylece $\mathcal{M} \models (\Box \bigcirc p \rightarrow \bigcirc \Box p)$ dir.

6.5.1. Teorem Eğer $[0,1], \mathcal{H} \models \varphi$ ise $\mathbb{R}, \mathcal{H} \models \varphi$ dir.

İspat $\mathbb{R}, \mathcal{H} \models A$ olduğu kabul edilsin. $\mathcal{M} \models A$ olmak üzere bir $\mathcal{M} = \langle \mathbb{R}, f, V \rangle$ modeli alınsın. f fonksiyonu ise $\mathbb{R}$ üzerinde bir homeomorfizma olarak kabul edilsin. f , $\mathbb{R}$ de bir homeomorfizma olduğundan kesin artan ya da kesin azalan bir fonksiyondur. Şimdi $\mathbb{R}$ den $(0,1)$ üzerine sürekli birebir ve kesin artan h fonksiyonu alınsın. Bir f' fonksiyonu da, $f'(x) = hf^{-1}(x)$, $(0 < x < 1)$ şeklinde tanımlansın: Bu durumda,

$$f'(x) = x, \quad f \text{ kesin artan, } x = 0 \text{ ve } x = 1.$$

$$f'(x) = 1 - x, \quad f \text{ kesin azalan, } x = 0 \text{ ve } x = 1 \text{ dir.}$$

$V'(p) = \{x \in (0,1) : h^{-1}(x) \in V(p)\}$ olarak tanımlanırsa, f' birebir ve üzerine fonksiyon olup sürekli bir fonksiyon olur. Eğer f kesin artan ise, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1$ dir. Şayet f kesin azalan ise, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 1$ ve $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 0$ dir. Böylece, $\mathcal{M}' = \langle [0,1], f', V' \rangle$ modeli bir dinamik topolojik modeldir.

Dikkat edilecek olursa, her B formülü için $(0,1) \cap V'(B) = \{x \in (0,1) : h^{-1}(x) \in V(B)\}$ dir. Böylece, $V'(A) \neq [0,1]$ bulunur. Aksi takdirde $V(A) = \mathbb{R}$ olup yanlıştır. Sonuç olarak, $[0,1], \mathcal{H} \models A$ olduğu elde edilir.

6.5.2. Tanım B formülü verilmiş olsun. Burada $g(B)$ formülü $\bigcirc$ operatörlerinin atomik formüllerinin önüne getirilmesidir. Örneğin,

$g(\bigcirc(\bigcirc\Box(p \vee \bigcirc q) \vee \bigcirc \neg r)) = (\Box(\bigcirc\bigcirc p \vee \bigcirc\bigcirc\bigcirc q) \vee \neg \bigcirc\bigcirc r)$. Daha açık bir ifade ile,

$$g(\bigcirc^n B) = \bigcirc^n B, \quad (B \in PV),$$

$$g(\bigcirc^n \neg B) = \neg g(\bigcirc^n B),$$

$$g(\bigcirc^n (B \vee C)) = g(\bigcirc^n B) \vee g(\bigcirc^n C),$$

$$g(\bigcirc^n \Box B) = \Box g(\bigcirc^n B).$$

6.5.3. Tanım (Near Atomik Formül) Bir near atomik formül $\bigcirc^n p$ şeklinde bir formül olup $p \in PV$ dir.

6.5.4. Tanım Eğer bir formül, Boole bağlaçları ve $\Box$ operatörü kullanılarak near atomik önermelerden oluşuyorsa bu formüle basit formül denir.

Near atomik formüller S4 dilinin formülleri gibi parçalanamayan atomik formüller olarak düşünülecektir. Topolojik modellerin tanımı near atomik formüllere göre tekrar verilirse:

$$V(\bigcirc^n P) = V(\bigcirc^n P),$$

$$V(A \vee B) = V(A) \cup V(B)$$

$$V(\neg B) = X - V(B)$$

$$V(\Box B) = \text{Int}(V(B)).$$

Daha önce tanımlandığı gibi genel geçerlilik bağıntıları:

$$\mathcal{M} \models B \Leftrightarrow V(B) = X$$

$$X \models B \Leftrightarrow \text{her } \mathcal{M} = \langle X, V \rangle \text{ modeli için } \mathcal{M} \models B$$

$$B \text{ geçerli } (\models B) \Leftrightarrow \text{Her } X \text{ topolojik uzayı için } X \models B.$$

ifadeleri ile verilir.

6.5.5. Lemma $B \in S4\bigcirc \Leftrightarrow g(B) \in S4 \Leftrightarrow g(B) \in S4\bigcirc$.

İspat B nin $S4$ elemanı olduğunun ispatı tümevarım yöntemi kullanılarak, $B \in S4$ ise $g(B) \in S4$ olduğu gösterilmiş olur. Açık ki eğer, $g(B) \in S4$ ise $g(B) \in S4 \circ$. Son olarak, $B \equiv g(B)$ olup, $(B \equiv g(B)) \in S4 \circ$ olmasından dolayı, $(g(B) \in S4) \Rightarrow (B \in S4 \circ)$ söylenebilir.

6.5.6. Lemma $(0,1)$ açık birim aralık olmak üzere her B formülü için, $(g(B) \in S4) \Leftrightarrow ((0,1) \models g(B))$ dir.

6.5.7. Teorem Eğer $\mathbb{R}, H \models A$ ise $A \in S4 \circ$.

İspat $A \notin S4 \circ$ olduğu kabul edilsin. Lemma 6.5.5 ve 6.5.6 gereği, bazı $M = \langle (0,1), V \rangle$ topolojik modelleri için, $\mathcal{M} \not\models g(A)$ olduğu görülür. $\mathcal{M}' = \langle \mathbb{R}, f, V' \rangle$ bir dinamik topolojik model olmak üzere $f x = x+1$ ve $V'(p) = \{x \in \mathbb{R} : \text{bazı } m \text{ doğal sayıları için, } x-m \in V(\circ^m p)\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda f bir homeomorfizmadır. $\mathcal{M}' \not\models A$ olduğu gösterildiğinde ispat tamamlanmış olacaktır. Bunun için de lemma 6.5.5 ten $\mathcal{M}' \not\models g(A)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Her B formülü için $V(B) = (0,1) \cap V'(B)$ olduğu gösterilmelidir. Bu gösterim B formülü üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. B bir near atomik formüldür. Yani $\circ^n p$ dır.

$$\begin{aligned}
& x \in (0,1) \cap V'(B) \\
& \Rightarrow x \in (0,1) \text{ ve } x \in V'(\circ^n p) \\
& \Rightarrow x \in (0,1) \text{ ve } x+n \in V'(p) \\
& \Rightarrow x \in (0,1) \text{ ve (bazı } m \text{ ler için) } x+n-m \in V'(\circ^m p) \\
& \Rightarrow x \in (0,1) \text{ olduğu için } m=n \text{ ve } x+n-m \in V'(\circ^m p) \subseteq (0,1) \\
& \Rightarrow x \in (0,1) \text{ ve } x \in V(\circ^n p) \\
& \Rightarrow x \in V(B)
\end{aligned}$$

Tersine,

$$\begin{aligned}
& x \in V(B) \\
& \Rightarrow x \in (0,1) \text{ ve } x \in V(\bigcirc^n p) \\
& \Rightarrow x \in (0,1) \text{ ve (bazı } m \text{ ler için) } x+n-m \in V(\bigcirc^m p) \\
& \Rightarrow x \in (0,1) \text{ ve } x+n \in V'(p) \\
& \Rightarrow x \in (0,1) \text{ ve } x \in V'(\bigcirc^n p) \\
& \Rightarrow x \in (0,1) \cap V'(B)
\end{aligned}$$

Tümevarım adımı $B = C \vee D$.

$$\begin{aligned}
V(C \vee D) &= V(C) \cup V(D) \\
&= ((0,1) \cap V'(C)) \cup ((0,1) \cap V'(D)) \\
&= ((0,1) \cap V'(C \vee D)).
\end{aligned}$$

Tümevarım adımı $B = \neg C$

$$\begin{aligned}
V(\neg C) &= (0,1) - V(C) \\
&= (0,1) - ((0,1) \cap V'(C)) \\
&= (0,1) - ((0,1) \cap V'(C)) \\
&= (0,1) - (\mathbb{R} \cap V'(C)) \\
&= (0,1) \cap V'(\neg C).
\end{aligned}$$

Tümevarım adımı $B = \Box C$

$$\begin{aligned}
V(\Box C) &= \text{Int}V(C) \\
&= \text{Int}V((0,1) \cap V'(C)) \\
&= \text{Int}((0,1)) \cap \text{Int}(V'(C)) \\
&= (0,1) \cap V'(\Box C).
\end{aligned}$$

6.5.8. Teorem $\mathcal{A}, \mathcal{H} \models A$ ise $A \in S4\bigcirc$ dir.

İspat $A \notin S4\bigcirc$ olduğu kabul edilirse buradan $g(A) \notin S4\bigcirc$ dir. Böylece, $\mathcal{M} \not\models g(A)$ olacak şekilde bir $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ Kripke modeli vardır. Şimdi,

$$X = \{ \langle w, n \rangle : w \in W, n \in \mathbb{Z} \},$$

$$\langle w, n \rangle R' \langle w', m \rangle \Leftrightarrow wRw' \text{ ve } n = m,$$

$$Y \subseteq X \text{ açıktır} \Leftrightarrow Y, R' \text{ bağıntısına kapalıdır},$$

$$f \langle w, n \rangle = \langle w, n+1 \rangle,$$

$$\langle w, n \rangle \in V(p) \Leftrightarrow w \in V(\bigcirc^n p) \text{ olacak şekilde bir } \mathcal{M}' = \langle X, f, V' \rangle \text{ modeli tanımlansın.}$$

Eğer açık kümeler yukarıdaki şekilde tanımlanırsa X bir Aleksandrov uzaydır. Ayrıca, $\langle w, n \rangle R' \langle w', m \rangle \Leftrightarrow (f \langle w, n \rangle) R' (f \langle w', m \rangle)$ olduğundan f sürekli bir fonksiyondur. Bu durumda f birebir örten bir fonksiyondur. Böylece $\mathcal{M}' = \langle X, f, V' \rangle$ modeli f homeomorfizması ile bir dinamik Aleksandrov modelidir. Eğer $\mathcal{M} \not\models A$ ya da $\mathcal{M} \not\models g(A)$ gösterilirse ispat tamamlanmış olacaktır. Bunun için de her B basit formülü ve her $w \in W$ için $w \in W \Leftrightarrow \langle w, 0 \rangle \in V'(B)$ nin sağlandığı gösterilmelidir. Bunun sağlandığı B formülü üzerinden tümevarım ile yapılacaktır.

Temel koşul: B formülü, $\bigcirc^n p$ şeklinde near atomik bir formül olsun. Buna göre,

$$\langle w, 0 \rangle \in V'(B) \Leftrightarrow \langle w, 0 \rangle \in V'(\bigcirc^n p)$$

$$\Leftrightarrow f^n \langle w, 0 \rangle \Leftrightarrow \langle w, n \rangle \in V'(p)$$

$$\Leftrightarrow w \in V(\bigcirc^n p) \Leftrightarrow \langle w, n \rangle \in V'(p)$$

$$\Leftrightarrow w \in V(B)$$

Tümevarım adımı: $B = C \vee D$

$$\langle w, 0 \rangle \in V'(C \vee D) \Leftrightarrow \langle w, 0 \rangle \in V'(C) \text{ veya } \langle w, 0 \rangle \in V'(D)$$

$$\Leftrightarrow w \in V(C) \text{ veya } w \in V(D)$$

$$\Leftrightarrow w \in V(C \vee D)$$

Tümevarım adımı: $B = \neg C$

$$\langle w, 0 \rangle \in V'(\neg C) \Leftrightarrow \langle w, 0 \rangle \notin V'(C)$$

$$\Leftrightarrow w \in V(C) \text{ veya } w \in V(D)$$

$$\Leftrightarrow w \notin V(C) \Leftrightarrow w \in V(\neg C)$$

Tümevarım adımı: $B = \Box C$

$$\langle w, 0 \rangle \in V'(\Box C) \Leftrightarrow (\forall w')(\forall n)(\langle w, 0 \rangle R \langle w', 0 \rangle \Rightarrow \langle w', n \rangle \in V'(C))$$

$$\Leftrightarrow (\forall w')(\langle w R w' \Rightarrow \langle w', 0 \rangle \in V'(C))$$

$$\Leftrightarrow (\forall w')(\langle w R w' \Rightarrow w' \in V(C))$$

$$\Leftrightarrow w \in V(\Box C).$$

6.6. Sürekli Fonksiyonlar Dinamik Topolojik Lojigi

En temel dinamik topolojik lojiklerden biride, topolojik uzaylar üzerindeki sürekli fonksiyonlar lojiğidir. Bu bölümde $DTL_0 \subset DTL_{\mathbb{R}}$ ve $DTL_0 \subset DTL_{\mathbb{R}}$ olduğunu gösteren bir örnek verilecektir. S4C ile S4O arasındaki en büyük fark S4O, $\mathbb{R}$ üzerindeki homeomorfizmaların $\Box$ lojigi olmasına rağmen, S4C sistemi $\mathbb{R}$ üzerindeki sürekli fonksiyonların $\Box$ lojigi olmamasıdır. Şimdi, $\mathcal{L}_{\infty}$ dilinde $\varphi \notin S4C$ fakat $\mathbb{R} \models \varphi$ olacak şekilde bir φ formülünün var olduğu gösterilsin.

φ bir formül, p ve q lar da önerme değişkenleri olmak üzere

$$(\Box \bigcirc p \rightarrow \bigcirc \Diamond \Box p) \vee (\bigcirc q \rightarrow \Box \bigcirc q)$$

şeklinde olsun. Öncelikle $\varphi \notin S4C$ olduğu gösterilecektir. $\mathcal{M} = \langle X, V, f \rangle$ modeli aşağıdakileri sağlayacak şekilde alınsın.

$$X = \{0, 1, 2\} \text{ ve } \tau = \{\emptyset, X, \{2\}\}$$

$$f(2) = f(1) = 0 \text{ ve } f(0) = 1$$

ve ayrıca,

$$V(p) = \{0, 1\} \text{ ve } V(q) = \{1\}$$

olsun. Buna göre,

$$V(\bigcirc p) = X \text{ olmasıyla } V(\Box \bigcirc p) = \text{Int}(V(\bigcirc p)) = X,$$

$$V(\Box p) = \emptyset \text{ ise } V(\Diamond \Box p) = \text{Cl}(V(\Box p)) = \emptyset, V(\bigcirc \Diamond \Box p) = \emptyset$$

dir.

Bu durumda,

$$V(\Box \bigcirc p \rightarrow \bigcirc \Diamond \Box p) = (X - V(\Box \bigcirc p)) \cup V(\bigcirc \Diamond \Box p) = \emptyset$$

olur. Diğer yandan,

$$V(\bigcirc q) = \{0\} \text{ olup } V(\Box \bigcirc q) = \text{Int}(V(\bigcirc q)) = \emptyset,$$

$$V(\bigcirc q \rightarrow \Box \bigcirc q) = (X - V(\bigcirc q)) \cup V(\Box \bigcirc q) = \{1, 2\},$$

olduğu açıktır. Bu durumda $V(\varphi) = \{1, 2\} \neq X$ olduğunu görülüp $\mathcal{M} \neq \varphi$

sonucuna ulaşılmış olur.

$\mathbb{R} \models \varphi$ olduğunun gösterilmesi için $\mathbb{R} \neq \varphi$ olarak alınsın. Böylece, bazı $x \in \mathbb{R}$ ler için $x \notin V'(\varphi)$ olacak şekilde bir $\mathcal{M}' = \langle X', V', f' \rangle$ dinamik topolojik modeli vardır. Bu durumda,

(i) $x \in V'(\Box \bigcirc p)$ için öyle bir I açık aralığı vardır ki $x \in I \subseteq V'(\bigcirc p)$ dir ve $f'(x) \in f'(I) \subseteq V'(p)$ olur.

(ii) $x \notin V'(\bigcirc \Diamond \Box p)$. O halde $f'(x) \notin \text{Cl}(\text{Int}(V'(p)))$.

(iii) $x \in V'(\bigcirc q)$ olup $f'(x) \in V'(q)$.

(iv) $x \notin V'(\Box \bigcirc q)$ olsun. Böylece $y \notin V'(\bigcirc q)$ olacak şekilde en az bir $y \in I$ bulunur. O halde $f'(y) \notin V'(q)$ ve $f'(x) \neq f'(y)$ olup $f'(I)$ tek elemanlı bir küme değildir. $f'(I)$ nın tek elemanlı bir küme olmayıp bir aralık olmasından dolayı, $f'(I)$ ya açık aralık, ya kapalı aralık ya da yarı-açık aralık $([a, b), (a, b], [a, b])$ tipinde) olması gerekir. Bu durumların herhangi birinde $f'(I) \subseteq \text{Cl}(\text{Int}(f'(I)))$ sağlanmaktadır.

(i) den $f'(I) \subseteq V'(p)$ olduğu görülmektedir böylece,

$f'(x) \in f'(I) \subseteq \text{Cl}(\text{Int}(f'(I))) \subseteq \text{Cl}(\text{Int}(V'(p)))$ olup bu (ii) ile çelişmektedir.

6.6.1. Teorem S4C lojiği tüm dinamik topolojik modellerde ve dinamik Aleksandrov modellerde sağlam ve tamdır. (Yani $\text{S4C} = \text{DTL}^{\Box}_0 = \text{DTL}^{\Box}_{\mathcal{A}}$ dir.)

İspat Bu teoremin ispatı için (Kremer ve Mints, 2005) e bakınız.

Teorem 6.7.1 in bir sonucu olarak, S4C lojiğinin tüm dinamik topolojik sistemlerine göre sağlam ve tam olduğu söylenebilir. (Kremer ve Mints, 2005).

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

S4 sisteminin taslakları, genel topolojik uzaylarda tanımlanabilir olup, sağlamlık ve tamlık şartlarını sağlamaktadır. Ayrıca S4 sistemine eklenen süreklilik aksiyomu ve bu aksiyoma bağlı olarak geliştirilen aksiyomun tersi yani verilmiş bir fonksiyonun homeomorfizma olarak ele alınmasıyla oluşturulan dinamik S4 sisteminin tamlığı gösterilmiştir. Böylece bu dinamik S4 sisteminin bir formülü bir topolojik uzay ve bu uzay üzerinde sürekli bir fonksiyon veya homeomorfizma ikilisi ile geçerli olmaktadır.

Bir dinamik S4 sisteminin üzerindeki topolojik uzay Alexandrov uzay olduğunda bunun aksiyomlaştırılabilir olup olmadığı henüz gösterilememiştir. Ayrıca S4 sistemi üzerinde ölçüm koruyan sürekli fonksiyonlarla ilgili henüz tam anlamıyla bir çalışma yapılmamıştır.

KAYNAKLAR

- Aiello, M., Benthem, J., Hartmann, E., 2007. Handbook of Spatial Logics. Springer, 1072.
- Artemov, S., Davoren, J., Nerode A., 1997. Modal Logics and Topological Semantics for Hybrid Systems. Cornell University Technical Report, 05: 1-33.
- Blackburn, P., Rijke, M., Venema, Y., 2001. Modal Logic. Cambridge University Press, 572.
- Chellas, B.F., 1980. Modal Logic An Introduction. Cambridge University Pres, Cambridge, 305.
- Engelking, R., 1977. General Topology. Polish Scientific Publishers, Warszawa, 535.
- Gabelaia, D., 2001. Modal Definability in Topology. Yüksek Lisans Tezi, The University of Amsterdam, Amsterdam, 47.
- Kremer, P., Mints, G., 2005. Dynamic Topological Logic. Annals of Pure and Applied Logic, 131: 133-158.
- McKinsey, J.C.C., Tarski, A., 1944. The Algebra of Topology. Annals of Mathematics, 45: 141-191.
- Saito, T., 2005. Definability in Topological Semantics of Modal Logic. Yüksek Lisans Tezi, Japan Advanced Institute of Science and Technology School of Information Science, Nomi, 64.
- Terziler, M., Öner, T., 2002. Kafes Teorisi. Ege Üniversitesi Basımevi, 353.
- Yıldız, C., 2002. Genel Topoloji, Ankara, 328.
- Zakharyashev, M., Konev, B., Kontchakov, R., Wolter, F., 2006. Dynamic Topological Logics Over Spaces of Continuous Functions. Advances of Modal Logics, 6: 299-318.