

T.C.
BOLU ABANT İZZET BAYSAL ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI



DİNESH VERMA DÖNÜŞÜMÜ VE KESİRLİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ULAM TİPİ KARARLILIĞI

MATEMATİK YÜKSEK LİSANS TEZİ

TUĞÇE ÖZÇELİK

TEZ DANIŞMANI

Doç. Dr. YASEMİN BAŞCI

BOLU, TEMMUZ 2025

KABUL VE ONAY SAYFASI

Tuğçe ÖZÇELİK tarafından hazırlanan “**DİNESH VERMA DÖNÜŞÜMÜ VE KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ULAM TİPİ KARARLILIĞI**” adlı tez çalışması jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı Matematik Yüksek Lisans Programında Yüksek Lisans Tezi olarak oy birliğiyle kabul edilmiştir. 28/07/2025

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Doç. Dr. Yasemin BAŞCI
Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi

.....

Üye
Prof. Dr. Harun KARSLI
Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi

.....

Üye
Prof. Dr. Şevket GÜR
Sakarya Üniversitesi

.....

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. İbrahim KÜRTÜL
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzu ve Şablonuna uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir
- aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Teze ilişkin Turnitin adlı programında enstitü müdürlüğünce belirlenen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan benzerlik raporuna göre, tezin benzerlik oranı %30'u geçmemektedir.

.....

TUĞÇE ÖZÇELİK

ÖZET

**DİNESH VERMA DÖNÜŞÜMÜ VE KESİRLİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ULAM TİPİ KARARLILIĞI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
TUĞÇE ÖZÇELİK
BOLU ABANT İZZET BAYSAL ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. YASEMİN BAŞCI)
BOLU, TEMMUZ - 2025
IX+ 45 sayfa**

Bu çalışma, Dinesh Verma dönüşümü olarak bilinen yeni bir integral operatörü yardımıyla kesirli diferansiyel denklemler için Hyers-Ulam (H-U) tipi kararlılığı ele almaktadır. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm kesirli türev kavramının tarihsel gelişimini içermektedir. Ayrıca Caputo kesirli türevi, Dinesh Verma dönüşümü ve H-U kararlılığına dair giriş niteliğinde bilgiler sunulmuştur. İkinci bölümde, tezde kullanılan temel tanımlar ve teoremlerin yanısıra Caputo kesirli türevi ve Dinesh Verma dönüşümünün tanım ve özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde H-U kararlılığının tarihsel gelişimi özetlenmiş, bazı fonksiyonların Dinesh Verma dönüşümleri elde edilmiş ve Caputo türevini içeren kesirli diferansiyel denklemlerin H-U tipi kararlılığı araştırılmıştır. Dördüncü bölüm tartışmalara ayrılmıştır. Son bölümde ise çalışmanın temel bulguları sunulmuş ve gelecekte yapılacak araştırmalara yönelik çeşitli önerilerde bulunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Caputo kesirli türevi, Kesirli diferansiyel denklemler, Dinesh Verma dönüşümü, Hyers-Ulam kararlılığı.

ABSTRACT

DINESH VERMA TRANSFORM AND ULAM TYPE STABILITY OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

MSC THESIS

TUĞÇE ÖZÇELİK

BOLU ABANT İZZET BAYSAL UNIVERSITY

INSTITUTE OF GRADUATE STUDIES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. YASEMİN BAŞCI)

BOLU, JULY 2025

IX + 45 pages

This study examines the Hyers-Ulam (H-U) type stability of fractional differential equations by means of a novel integral operator known as the Dinesh Verma transform. This thesis consists of five chapters. The first part includes the historical development of the concept of fractional derivatives. Also introductory information on the Caputo fractional derivative, the Dinesh Verma transform, and H-U stability is presented. In the second part, the basic definitions and theorems used throughout the thesis as well as the definitions and properties of the Caputo fractional derivative and the Dinesh Verma transform are given. Then, the definitions and properties of the Caputo fractional derivative and the Dinesh Verma transform are examined. In the third part, the historical development of H-U stability is summarized, Dinesh Verma transformations of some functions are obtained, and the H-U type stability of fractional differential equations including the Caputo derivative is investigated. The fourth chapter is devoted to discussions. The last part, the main findings of the study are presented and various suggestions for future research are made.

KEYWORDS: Caputo fractional derivative, Fractional differential equations, Dinesh Verma transform, Hyers-Ulam stability.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
TABLO LİSTESİ	vii
KISALTMA VE SEMBOLLER LİSTESİ	viii
TEŞEKKÜR	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. MATERYAL ve YÖNTEM	4
2.1 Temel Kavramlar	4
2.2 Caputo Kesirli Türevi	9
2.3 Dinesh Verma Dönüşümünün Tanımı ve Özellikleri	19
3. BULGULAR	26
3.1 Hyers-Ulam Kararlılığının Tarihçesi	26
3.2 Bazı Özel Fonksiyonların Dinesh Verma Dönüşümleri	28
3.3 Caputo Kesirli Türevli Diferansiyel Denklemler için Hyers-Ulam Tipi Kararlılık	30
4. TARTIŞMA	42
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	43
KAYNAKLAR	44

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 2.1. Dinesh Verma Dönüşümleri	25
---	----



KISALTMA VE SEMBOLLER LİSTESİ

$AC[a, b]$	: Mutlak sürekli olan fonksiyonların kümesi
$B(., .)$	: Beta fonksiyonu operatörü
$C^n[a, b]$	: n. mertebeye kadar türevli ve sürekli fonksiyonların kümesi
$\mathfrak{D}$	: Dinesh Verma dönüşüm operatörü
$\mathfrak{D}^{-1}$	: Ters Dinesh Verma dönüşüm operatörü
D_{a+}^{α}	: Riemann- Liouville kesirli türevi
${}^CD_{a+}^{\alpha}$	: Caputo kesirli türevi
$E_{\alpha}(z)$	: Bir parametreye bağlı Mittag- Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha, \beta}(z)$	: İki parametreye bağlı Mittag- Leffler fonksiyonu
I_{a+}^{α}	: Riemann- Liouville kesirli integrali
$L_1(I)$	: I aralığında tanımlı ve integrallenebilen fonksiyonlar
$L_p(I)$	: I aralığında tanımlı ve p. kuvveti integrallenebilen fonksiyonlar
$\Gamma(.)$	: Gamma fonksiyonu operatörü
$[\Re(\alpha)]$	: $\Re(\alpha)$ sayısının tam değeri
$\Re(z)$	: z kompleks değişkeninin reel kısmı

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmamda değerli bilgileri ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman her türlü konuda yardımcı olan çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Yasemin BAŞCI'ya katkılarından dolayı en derin saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca desteğini ve sevgisini esirgemeyen, sevgileri, duaları ve destekleriyle beni motive eden canım aileme sonsuz teşekkür ederim. Varlıklarıyla bana güç verdiler, her adımda yanımda olduklarını hissettirdiler.

Ayrıca, bu süreçte bana her zaman moral veren, anlayışı ve desteğiyle zorlu anları kolaylaştıran, her an yanımda olduğunu hissettirip çalışmama devam etmem için güç veren çok kıymetli Nasser Bandar Nasser AL-SAREMI'ye en içten teşekkürlerimi sunarım.



1. GİRİŞ

Mertebesi tamsayı olan türev ve integral ne kadar eskiyse, kesirli mertebeli türev ve integral de o kadar eski bir geçmişe sahiptir. 300 yılı aşkın süredir araştırmalara konu olmaktadır. Kesirli türev kavramı, çeşitli kaynaklarda da verildiği üzere, ilk olarak 1695'te Leibniz tarafından L'Hospital'e yazılmış olan bir mektupla ortaya atılmıştır. Bu mektupta Leibniz, türev operatörünü ifade eden " $\frac{d^n y}{dx^n}$ " biçimindeki gösterimi kullanarak, türev tanımının tamsayı olmayan mertebelere genişletilip genişletilemeyeceğini sormuştur. L'Hospital ise bu soruya "n yerine 1/2 gelirse ne olur?" diyerek yanıt vermiştir. Bu fikir alışverişinin ardından birçok matematikçi kesirli türev üzerine çalışmalar yapmıştır. Bu alanda önemli katkılar sunan matematikçiler arasında Riemann, Liouville, Euler, Lagrange, Laplace, Weyl, Fourier ve Abel bulunmaktadır.

Kesirli türevlerin literatürde birçok farklı tanımı mevcuttur. Bunlardan öne çıkanlar; Caputo, Riemann-Liouville (R-L), Grünwald-Letnikov, Weyl ve Riesz tanımlarıdır. Bu çeşitlilik, probleme en uygun tanımın seçilmesini mümkün kılarak, daha etkili ve doğru çözümler elde edilmesini sağlar.

1960 yılında İtalyan matematikçi Caputo tarafından, Laplace dönüşümü uygulamalarında karşılaşılan başlangıç değer problemlerini çözmek için Caputo kesirli türevi tanımı geliştirilmiştir. Özellikle, Caputo tanımı başlangıç koşullarının ölçülmesi veya hesaplanmasındaki zorlukları ortadan kaldırdığından dolayı pratikte kolaylık sağlamaktadır. Caputo kesirli türevin en önemli avantajı, kesirli diferansiyel denklemlere ait başlangıç koşullarının, tam sayı mertebeli diferansiyel denklemlerde kullanılan başlangıç koşullarıyla aynı şekilde ifade edilebilmesidir.

Diferansiyel denklemlerin çözümünde karşılaşılan zorlukları aşmak adına integral dönüşümler sıklıkla başvuru olan etkili ve güçlü yöntemlerden birisidir. Belirli sınırlı koşullara bağlı olan diferansiyel denklemlerde, bu dönüşümler problem yapısını önemli ölçüde sadeleştirerek, çözüm sürecini kolaylaştırmaktadır. Uygun bir integral dönüşümün seçilmesi, karmaşık yapıya sahip diferansiyel ya da integral denklemlerin, çözümü daha basit olan adi diferansiyel denklemlere veya cebirsel denklemlere indirgenmesini sağlar. Ancak unutulmamalıdır ki, elde edilen sonuç dönüşüm uygulanmış sistemin çözümüdür; dolayısıyla orijinal denklemin çözümüne ulaşmak için ters dönüşüm işlemi gereklidir.

Klasik Laplace dönüşümüne alternatif olarak birçok yeni integral dönüşümler tanımlanmıştır. Bu doğrultuda, Sumudu, Elzaki, Natural, Aboodh, Tarig, Mohand, Shehu ve Kamal dönüşümleri gibi çeşitli dönüşümlerle ilgili literatürde birçok çalışma vardır. Söz konusu dönüşümler, diferansiyel denklemlerin çözümüne yönelik olarak geliştirilmiş olup, özellikle uygulamalı matematik ve mühendislik alanlarında karşılaşılan problemlerin çözümünde etkin bir şekilde kullanılmaktadır.

2020 yılında Dinesh Verma tarafından ortaya atılan yeni bir dönüşüm olan Dinesh Verma dönüşümü sayesinde, sabit katsayılı ve değişken katsayılı adi lineer diferansiyel denklemler, genel çözüm bulunmaksızın kolayca çözülebilmektedir.

Kararlılık kavramı ilk kez 1940 yılında, Ulam tarafından Wisconsin Üniversitesi Matematik Kulübü'nde yaptığı bir konuşmada ortaya atılmıştır. Bu konuşmada Ulam, fonksiyonel denklemlerin kararlılığıyla ilgili bir problemden söz etmiş ve bu problem, sonraki yıllarda önemli bir araştırma alanının temelini oluşturmuştur. 1941 yılında Donald Hyers, Ulam'ın bu sorusuna Banach uzayları çerçevesinde bir çözüm getirmiştir. Daha sonra, bu problemde fonksiyonel denklemler yerine daha genellemesi olan diferansiyel denklemler alınarak, daha yeni araştırma alanlarının olmasına neden olmuştur.

Bu bağlamda, lineer diferansiyel denklemler için H-U kararlılık ilk kez Obloza (1993-1997) tarafından ele alınmıştır. Alsina ve Ger (1998), Miura ve ark. (2003a; 2003b), Jung (2004; 2005; 2006), Li ve Shen (2010) ile Alqifiary ve Jung (2014) gibi birçok araştırmacı bu konu üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmalar, özellikle birinci ve ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin kararlılığıyla ilgili önemli katkılar sunmuştur.

Kısmi türevli diferansiyel denklemler ile ilgili olarak, Lungu ve Popa (2012), kısmi türevli birinci mertebeden diferansiyel denkleminin H-U kararlılığını tartışmışlardır. Gordji ve ark. (2011), kısmi türevli ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin kararlılığını incelemişlerdir. Hegyi ve Jung (2013) da, Laplace denklemi için kararlılığı incelemişlerdir.

Wang ve Xu (2015), Caputo kesirli türevine sahip lineer kesirli diferansiyel denklemlerin H-U kararlılığını Laplace dönüşümü yardımıyla incelemişlerdir.

Bu tezde Dinesh Verma dönüşümü kullanılarak aşağıdaki kesirli diferansiyel denklemlerin H-U tipi kararlılıkları incelenmiştir:

$${}^cD_{0+}^{\alpha}y(t)=h(t),$$

$${}^cD_{0+}^{\alpha}y(t)-\lambda_1y(t)=h(t)$$

ve

$${}^cD_{0+}^{\alpha}y(t)-\lambda_1{}^cD_{0+}^{\beta}y(t)=h(t).$$



2. MATERYAL ve YÖNTEM

2.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde, tezde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1 t_0 verilen bir sabit olsun. Eğer $t > t_0$ için tanımlı bir $h(t)$ fonksiyonu için

$$|h(t)| \leq M_1 e^{p_0 t}$$

olacak şekilde M_1 ve p_0 pozitif sabitleri bulunabilirse, $h(t)$ fonksiyonuna üstel mertebeden bir fonksiyon denir (Mısıır, 2020).

Tanım 2.1.2 Gamma fonksiyonu $z \in \mathbb{C}$, $\Re z > 0$ için

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.1)$$

şeklinde verilir (Podlubny, 1999).

Teorem 2.1.3 Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (2.2)$$

özelliğine sahiptir (Podlubny, 1999).

İspat:

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} (-e^{-t} t^z) \Big|_{t=0}^T + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

Eğer, $z = 0$ alınırsa,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

olduğu ve (2.2) eşitliği kullanılırsa, $z = 2, 3, \dots$ için

$$\Gamma(2) = 1. \Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2. \Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3. \Gamma(3) = 3!$$

⋮

$$\Gamma(m+1) = m \cdot \Gamma(m) = m!$$

elde edilir.

Tanım 2.1.4 $\Re(w) > 0$ ve $\Re(z) > 0$ için

$$B(w, z) = \int_0^1 \xi^{w-1} (1 - \xi)^{z-1} d\xi \quad (2.3)$$

şeklindeki fonksiyona beta fonksiyonu denir (Podlubny, 1999).

(2.3) kullanılarak beta fonksiyonunun simetrik olduğu aşağıdaki şekilde gösterilebilir. O zaman

$$\begin{aligned} B(w, z) &= \int_0^1 \xi^{w-1} (1 - \xi)^{z-1} d\xi \\ &= \int_0^1 s^{z-1} (1 - s)^{w-1} ds \\ &= B(z, w) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.5 Gamma ve beta fonksiyonları arasında aşağıdaki ilişki vardır:

$$B(w, z) = \frac{\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(w+z)}, \quad \Re(w) > 0, \quad \Re(z) > 0. \quad (2.4)$$

İspat: Eşitliğin sağ tarafında (2.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Gamma(w)\Gamma(z) &= \int_0^\infty e^{-s} s^{w-1} ds \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s+t)} s^{w-1} t^{z-1} ds dt \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $s = \eta\theta$, $t = \eta(1 - \theta)$ değişken değiştirilmesiyle, $s + t = \eta$ olur. $0 < s$, $t < \infty$ olmasından dolayı $0 < \eta < \infty$ bulunur.

Eğer $\theta \geq 1$ alınırsa $1 - \theta \leq 0$ olur. Böylece $t = \eta(1 - \theta) \leq 0$ olur. Böylece $0 < t < \infty$ olmasıyla çelişir. Bundan dolayı $0 < \theta < 1$ olmalıdır.

$$\frac{\partial(s, t)}{\partial(\eta, \theta)} = \begin{vmatrix} \theta & \eta \\ 1 - \theta & -\eta \end{vmatrix} = -\eta, \eta > 0$$

ve

$$\left| \frac{\partial(s, t)}{\partial(\eta, \theta)} \right| d\eta d\theta = ds dt$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \Gamma(w)\Gamma(z) &= \int_0^1 \int_0^\infty e^{-\eta} (\eta\theta)^{w-1} [\eta(1-\theta)]^{z-1} \eta d\eta d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^\infty e^{-\eta} \eta^{w+z-1} \theta^{w-1} (1-\theta)^{z-1} \eta d\eta d\theta \\ &= \int_0^1 \theta^{w-1} (1-\theta)^{z-1} d\theta \int_0^\infty e^{-\eta} \eta^{w+z-1} d\eta \\ &= B(w, z) \Gamma(w+z) \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca, beta fonksiyonu aşağıdaki gibi farklı şekillerde de verilebilir.

1-)

$$B(w, z) = \int_0^\infty \frac{t^{w-1}}{(t+1)^{w+z}} dt.$$

İspat: Eğer (2.3) ifadesinde $\xi = \frac{t}{t+1}$ dönüşümüyle

$$\begin{aligned} B(w, z) &= \int_0^1 \xi^{w-1} (1-\xi)^{z-1} d\xi \\ &= \int_0^\infty \frac{t^{w-1} (t+1)^{1-w} (t+1)^{1-z}}{(t+1)^2} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{t^{w-1}}{(t+1)^{w+z}} dt \end{aligned}$$

istenilen bulunur.

2-)

$$B(w, z) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2w-1} (\sin t)^{2z-1} dt.$$

İspat: (2.3)'de $\xi = \cos^2 t$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$B(w, z) = \int_0^1 \xi^{w-1} (1-\xi)^{z-1} d\xi$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos^2 t)^{w-1} (1 - \cos^2 t)^{z-1} \cos t \sin t dt \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2w-1} (\sin t)^{2z-1} dt
\end{aligned}$$

bulunur.

Özel olarak $z = w = 1/2$ olarak alınırsa,

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$$

elde edilir. (2.4) kullanılırsa

$$B(1/2, 1/2) = [\Gamma(1/2)]^2$$

olup, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ dir.

Tanım 2.1.6 $n \in \mathbb{N}$ için $h^{(n-1)} \in AC[a, b]$ olmak üzere $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı $(n - 1)$. mertebeye kadar türevli ve sürekli $h(t)$ fonksiyonlarının kümesi

$$AC^n[a, b] := \left\{ h | h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, (D^{n-1}h)(t) \in AC[a, b] \text{ ve } \left(D = \frac{d}{dt} \right) \right\}$$

şeklinde ifade edilir (Kilbas ve ark., 2006).

Tanım 2.1.7 Mittag-Leffler tarafından 1903 yılında bir parametreye bağlı Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}, (\alpha > 0) \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Podlubny, 1999).

1953 yılında Agarwal tarafından iki parametreye bağlı Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (2.6)$$

olarak verilmiştir.

Eğer (2.6)'da $\alpha = \beta = 1$ olarak alınırsa,

$$E_{1,1}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j + 1)} = e^z$$

bulunur. Böylece iki parametrelili Mittag- Leffler fonksiyonu ile e^z fonksiyonu arasındaki ilişki elde edilir.

Eğer (2.6)'da $\alpha = 1$, $\beta = 2$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} E_{1,2}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j+2)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+1)!} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{j+1}}{(j+1)!} = \frac{e^z - 1}{z} \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer (2.6)'da $\alpha = 1$, $\beta = 3$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} E_{1,3}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j+3)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+2)!} \\ &= \frac{1}{z^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{j+2}}{(j+2)!} = \frac{e^z - z - 1}{z^2} \end{aligned}$$

ve böylece devam edilirse,

$$\begin{aligned} E_{1,m}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j+m)} = \frac{1}{z^{m-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{j+m-1}}{(j+m-1)!} \\ &= \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{j=0}^{m-2} \frac{z^j}{j!} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{\Gamma(2j+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{(2j)!} = \cosh z$$

ve

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{\Gamma(2j+2)} = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sinh z$$

bulunur.

Eğer (2.5)'de, $\alpha = 0,1,2$ alınırsa,

$$E_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(1)} = \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1,$$

$$E_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j+1)} = e^z,$$

$$E_2(z) = \cosh \sqrt{z}$$

elde edilir. Ayrıca (2.5)'de $\alpha = 2$ ve z yerine $-z^2$ alınırsa da

$$E_2(-z^2) = \cos z$$

bulunur.

(2.6)'da $\beta = 1$ olarak alındığında (2.5) ve (2.6) denklemleri eşit olur. Yani,

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} = E_{\alpha}(z)$$

dir.

2.2 Caputo Kesirli Türevi

1960 yılında İtalyan matematikçi Caputo tarafından, Laplace dönüşümü uygulamalarında karşılaşılan başlangıç değer problemlerini çözmek için Caputo kesirli türev tanımı geliştirilmiştir. Özellikle, Caputo tanımı başlangıç koşullarının ölçülmesi veya hesaplanmasındaki zorlukları ortadan kaldırdığından dolayı pratikte kolaylık sağlamaktadır. Caputo kesirli türevin en önemli avantajı, kesirli diferansiyel denklemlere ait başlangıç koşullarının, tam sayı mertebeli diferansiyel denklemlerde kullanılan başlangıç koşullarıyla aynı şekilde ifade edilebilmesidir.

Son yıllarda yapılan çalışmalarda, bu avantajları nedeniyle kesirli diferansiyel denklemler için daha çok Caputo kesirli türev operatörü kullanılır. Caputo yaklaşımı, R-L tanımına kıyasla daha kullanışlıdır ve analitik ile nümerik çözümlerde daha yaygın olarak kullanılmaktadır.

R-L ve Caputo kesirli türevleri arasında kayda değer bir ayrım vardır. Bu da sabitin türevidir. Caputo tanımında, bir sabit sayının kesirli türevi sıfırdır. Buna karşın, R-L kesirli türevi alt sınır değeri sonlu olduğunda sıfırla örtüşmez. Bir problemde fiziksel olarak tutarlı bir yorum yapılabilmesi için, sabit sayının kesirli türevi sıfır olmalıdır.

Tanım 2.2.1 $[a, b]$, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı olsun. $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $\Re(\alpha) > 0$ olmak üzere

$$I_{a+}^{\alpha} h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds, \quad x_1 > a \quad (2.7)$$

integraline α . mertebeden R-L kesirli integrali denir (Samko ve ark., 1993).

Lemma 2.2.2 $\Re(\alpha) > 0$ ve $\Re(\beta) > 0$ için

$$I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta = I_{a^+}^{\alpha+\beta} \quad (2.8)$$

dir (Kilbas ve ark., 2006).

Tanım 2.2.3 Her sonlu (a, t) aralığı üzerinde tanımlı bir h fonksiyonu, sürekli ve integrallenebilir olsun. $0 < m - 1 \leq \alpha < m$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ için $t > a$ durumunda h fonksiyonunun α . mertebeden R-L kesirli türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$D_{a^+}^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} h(s) ds \quad (2.9)$$

(Podlubny, 1999).

Lemma 2.2.4 $\Re(\alpha) > 0$ ve $\Re(\beta) > 0$ için

$$I_{a^+}^\alpha (s-a)^{\beta-1}(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha-1} \quad (2.10)$$

dir (Kilbas ve ark., 2006).

İspat: (2.7) tanımını kullanılırsa

$$\begin{aligned} I_{a^+}^\alpha (s-a)^{\beta-1}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^{\beta-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-a-(s-a))^{\alpha-1} (s-a)^{\beta-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-a)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{s-a}{t-a}\right)^{\alpha-1} (s-a)^{\beta-1} ds \end{aligned}$$

elde edilir. $\xi = \frac{s-a}{t-a}$ değişken dönüşümü yapılp, (2.3) ve (2.4) kullanırsa

$$\begin{aligned}
I_{a+}^{\alpha}(s-a)^{\beta-1}(t) &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1} \xi^{\beta-1} d\xi \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}
\end{aligned}$$

olur.

Tanım 2.2.5 $0 < m-1 < \alpha < m$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olsun. O zaman $t \geq a$ için h fonksiyonunun α . mertebeden Caputo kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$${}^c D_{a+}^{\alpha} h(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} h^{(m)}(s) ds \quad (2.11)$$

(Podlubny,1999).

$h(t)$ fonksiyonu normal şartlar altında, α, m 'ye yaklaşırken Caputo kesirli türevi, $h(t)$ fonksiyonunun m . mertebeden klasik türev tanımına eşittir.

Örnek 2.2.6 $h(t) = t$ fonksiyonunun $m = 1$ için $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo kesirli türevi ele alınırsa, (2.11) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
{}^c D_{0+}^{1/2}(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-1/2)} \int_0^t (t-s)^{1-\frac{1}{2}-1} \frac{d}{ds}(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} ds, \quad (s = \xi t, \quad ds = t d\xi) \\
&= \frac{t^{1/2}}{\Gamma(1/2)} \int_0^1 (1-\xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi \\
&= \frac{B(1/2,1)}{\Gamma(1/2)} t^{1/2} = \frac{2t^{1/2}}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitliğin tekrar $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo kesirli türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
{}^c D_{0^+}^{1/2} \left(\frac{2t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \right) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(1-1/2)} \int_0^t (t-\tau)^{1-\frac{1}{2}-1} \frac{d}{d\tau} (\tau^{1/2}) d\tau \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \tau^{-1/2} d\tau \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t (1-\xi)^{-\frac{1}{2}} \xi^{-1/2} d\xi \\
&= \frac{B(1/2, 1/2)}{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}} = 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $h(t) = t$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo kesirli türevi iki kere alındığında $h(t)$ fonksiyonunun birinci mertebeden klasik türevine eşit olduğu görülür.

Tanım 2.2.7 (Lineerlik) $b_1, b_2 \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ ve $m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}$ olsun. α . mertebeden Caputo kesirli türevinin lineerliği

$${}^c D_a^\alpha (b_1 h_1(t) + b_2 h_2(t)) = b_1 {}^c D_a^\alpha h_1(t) + b_2 {}^c D_a^\alpha h_2(t)$$

biçiminde tanımlanır (Podlubny, 1999).

Tanım 2.2.8 $\alpha > 0$ ve $m = [\alpha] + 1$ için, eğer $h(t) \in AC^m[a, b]$ ise, o zaman Caputo kesirli türevi $[a, b]$ aralığında hemen hemen her yerde aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$({}^c D_{a^+}^\alpha h)(t) = (I_{a^+}^{m-\alpha} h^{(m)})(t) \quad (2.12)$$

(Jarad ve ark., 2017).

Tanım 2.2.9 Eğer $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $\Re(\alpha) > 0$ ise, o zaman Caputo kesirli türevi α . mertebeden R-L kesirli türevi

$${}^c D_{a+}^{\alpha} h(t) = D_{a+}^{\alpha} \left(h(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} (t-a)^j h^{(j)}(a) \right) \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ için $m = [\Re(\alpha)] + 1$ ve $\alpha \in \mathbb{N}_0$ için $m = \alpha$ dir (Kilbas ve ark., 2006).

Eğer (2.13)'de $0 < \Re(\alpha) < 1$ olarak alınırsa,

$${}^c D_{a+}^{\alpha} h(t) = D_{a+}^{\alpha} h(t) - D_{a+}^{\alpha} h(a)$$

şeklindedir.

(2.13) eşitliği daha genel bir şekilde aşağıdaki biçimde verilebilir:

$${}^c D_{a+}^{\alpha} h(t) = D_{a+}^{\alpha} h(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{j-\alpha} h^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}.$$

Burada $0 < \Re(\alpha) < 1$ olarak alınırsa,

$${}^c D_{a+}^{\alpha} h(t) = D_{a+}^{\alpha} h(t) - \frac{h(a)}{\Gamma(1-\alpha)(t-a)^{\alpha}}$$

şeklindedir.

(2.9) ile (2.11) ifadesi aşağıda verilen koşul sağlandığında birbiriyle çakışır.

Eğer $h(a) = h'(a) = \dots = h^{(n-1)}(a) = 0$, $m = [\Re(\alpha)] + 1$

ise bu durumda ${}^c D_{a+}^{\alpha} h(t) = D_{a+}^{\alpha} h(t)$ şeklindedir.

Özellikle $0 < \Re(\alpha) < 1$ ise, o zaman

$${}^c D_{a+}^{\alpha} h(t) = D_{a+}^{\alpha} h(t), \quad h(a) = 0$$

olur (Kilbas ve ark., 2006).

Lemma 2.2.10 $\Re(\alpha) > 0, \Re(\beta) > 0$ ve $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ için $m = [\Re(\alpha)] + 1$ ve $\alpha \in \mathbb{N}_0$ için $m = \alpha$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifade sağlanır:

$${}^c D_{a+}^{\alpha} (s-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad \Re(\beta) > m \quad (2.14)$$

(Kilbas ve ark., 2006).

İspat:

$$h(t) = (t-a)^{\beta-1}$$

$$h'(t) = (\beta-1)(t-a)^{\beta-2}$$

$\vdots$

$$h^{(m)}(t) = (\beta-1)(\beta-2) \dots (\beta-m)(t-a)^{\beta-m-1}.$$

Son eşitliğin sağ tarafındaki ifade $\Gamma(\beta-m)$ ile çarpılıp bölünürse,

$$h^{(m)}(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-m)} (t-a)^{\beta-m-1}$$

elde edilir. O halde bu son eşitlik (2.11)'de kullanılırsa

$$\begin{aligned} {}^c D_{a+}^{\alpha} h(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} h^{(m)}(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-m)} (s-a)^{\beta-m-1} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-m)\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-a-(s-a))^{m-\alpha-1} (s-a)^{\beta-m-1} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-m)\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-a)^{m-\alpha-1} \left(1 - \frac{s-a}{t-a}\right)^{m-\alpha-1} (s-a)^{\beta-m-1} ds \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $u = \frac{s-a}{t-a}$ değişken dönüşümü yapılır ve (2.3) kullanılırsa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$${}^c D_{a+}^{\alpha} h(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - m)\Gamma(m - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha - 1} B(m - \alpha, \beta - m).$$

(2.4) kullanılırsa

$${}^c D_{a+}^{\alpha} (t - a)^{\beta - 1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha - 1}$$

olur.

Teorem 2.2.11 $\Re(\alpha) > 0$ ve $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ için $m = [\Re(\alpha)] + 1$; $\alpha \in \mathbb{N}_0$ için $m = \alpha$ olsun. $h(t) \in AC^m[a, b]$ ya da $h(t) \in C^m[a, b]$ olmak üzere, aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$I_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} h(t) = h(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{h^{(j)}(a)}{j!} (t - a)^j \quad (2.15)$$

(Kilbas ve ark., 2006).

İspat: Sırasıyla (2.12) ve (2.8) kullanılıp elde edilen ifade (2.7)'de yazılırsa

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} h(t) &= I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{m-\alpha} h^{(m)}(t) = I_{a+}^m h^{(m)}(t) \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-s)^{m-1} h^{(m)}(s) ds \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-s)^{m-1} \left(\frac{d}{ds} h^{(m-1)}(s) \right) ds \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $u = (t-s)^{m-1}$ ve $dv = \frac{d}{ds} h^{(m-1)}(s) ds$ alınarak $(m-1)$ defa kısmi integrasyon yöntemi uygulandığında:

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} h(t) &= \frac{1}{(m-2)!} \int_a^t (t-s)^{m-2} \left(\frac{d}{ds} h^{(m-2)}(s) \right) ds \\ &\quad - \frac{h^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} (t-a)^{m-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(m-3)!} \int_a^t (t-s)^{m-3} \left(\frac{d}{ds} h^{(m-3)}(s) \right) ds - \sum_{j=m-2}^{m-1} \frac{h^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j \\
&= \dots = \int_a^t \left(\frac{d}{ds} h(s) \right) ds - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{h^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j \\
&= h(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{h^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j
\end{aligned}$$

bulunur.

Eğer, $0 < \Re(\alpha) < 1$ olmak üzere, aşağıdaki ifade bulunur:

$$I_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} h(t) = h(t) - h(a).$$

Teorem 2.2.12 $h \in C[a, b]$ ve $\Re(\alpha) > 0$ olsun. $\Re(\alpha) \notin \mathbb{N}$ ya da $\alpha \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$${}^c D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} h(t) = h(t) \quad (2.16)$$

dir (Kilbas ve ark., 2006).

İspat: $H(t) = I_{a+}^{\alpha} h(t)$ olarak alınır ve (2.11) kullanılırsa

$${}^c D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} h(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} H^{(n)}(s) ds \quad (2.17)$$

halini alır. (2.7) kullanılırsa

$$H(t) = I_{a+}^{\alpha} h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

$$H'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

$$= \frac{(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - s)^{\alpha-2} h(s) ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^t (t - s)^{\alpha-2} h(s) ds$$

$$H''(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t - s)^{\alpha-2} h(s) ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha - 2)} \int_a^t (t - s)^{\alpha-3} h(s) ds$$

$\vdots$

$$H^{(n-1)}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^t (t - s)^{\alpha-n} h(s) ds$$

olur. Son eşitliğe kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$H^{(n-1)}(t) = \frac{h(a)}{\Gamma(\alpha - n + 2)} (t - a)^{\alpha-n+1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha - n + 2)} \int_a^t (t - s)^{\alpha-n+1} h'(s) ds$$

ve böylece $H^{(n)}(t)$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} H^{(n)}(t) &= \frac{h(a)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} (t - a)^{\alpha-n} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^t (t - s)^{\alpha-n} h'(s) ds. \end{aligned} \tag{2.18}$$

(2.18), (2.17)'de yerine yazılıp, $u = \frac{s-a}{t-a}$ değişken dönüşümü yapılır daha sonra (2.3) ile (2.4) kullanılırsa

$${}^c D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} h(t) = \frac{h(a)}{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^t (t - s)^{n-\alpha-1} (s - a)^{\alpha-n} ds$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t \int_a^s (t-s)^{n-\alpha-1} (s-\tau)^{\alpha-n} h'(\tau) d\tau ds \\
& = \frac{h(a)(t-a)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t \left(1 - \frac{s-a}{t-a}\right)^{n-\alpha-1} (s-a)^{\alpha-n} ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t \int_\tau^t (t-s)^{n-\alpha-1} (s-\tau)^{\alpha-n} h'(\tau) ds d\tau \\
& = \frac{h(a)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_0^1 (1-u)^{n-\alpha-1} u^{\alpha-n} du \\
& + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t h'(\tau) d\tau \int_\tau^t (t-s)^{n-\alpha-1} (s-\tau)^{\alpha-n} ds \\
& = \frac{h(a)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)} \Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1) \\
& + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t h'(\tau) d\tau \Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1) \\
& = h(t)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.13 $n \in \mathbb{N}$ ve $m-1 < \alpha < m$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$${}^c D_{a^+}^\alpha ({}^c D_{a^+}^n h(t)) = {}^c D_{a^+}^{\alpha+n} h(t) \quad (2.19)$$

(Podlubny, 1999).

Türev operatörlerinin yerlerinin değiştirilmesi halinde aşağıdaki ilave koşul gerekmektedir.

Eğer $j = m, m+1, \dots, n-1$ için $h^{(j)}(a) = 0$ ise bu durumda

$${}^c D_{a^+}^\alpha ({}^c D_{a^+}^n h(t)) = {}^c D_{a^+}^n ({}^c D_{a^+}^\alpha h(t)) = {}^c D_{a^+}^{\alpha+n} h(t)$$

şeklindedir (Podlubny, 1999).

2.3 Dinesh Verma Dönüşümünün Tanımı ve Özellikleri

Bu kısımda Dinesh Verma dönüşümünün tanımı ve temel olan bazı özellikleri verildi.

Tanım 2.3.1 (Dinesh Verma Dönüşümü) Dinesh Verma dönüşümü, $h(t)$, $t \geq 0$ için reel sayıların iyi tanımlanmış bir fonksiyonu olsun. O halde, $\mathfrak{D}\{h(t); p\}$ ile gösterilir ve

$$\mathfrak{D}\{h(t); p\} = p^5 \int_0^\infty e^{-pt} h(t) dt \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer integral yakınsak ise, burada p bir reel veya kompleks parametre olabilir ve $\mathfrak{D}$, Dinesh Verma dönüşüm operatörüdür (Verma, 2020).

Teorem 2.3.2 h_1 ve h_2 sırasıyla $p > d_1$ ve $p > d_2$ için Dinesh Verma dönüşümleri olan fonksiyonlar olmak üzere $p > \max \{d_1, d_2\}$ ve b_1 ve b_2 keyfi sabitleri için

$$\mathfrak{D}\{b_1 h_1(t) + b_2 h_2(t); p\} = b_1 \mathfrak{D}\{h_1(t); p\} + b_2 \mathfrak{D}\{h_2(t); p\}$$

eşitliği sağlanır.

Aşağıda bazı fonksiyonların Dinesh Verma dönüşümleri verildi.

Örneğin,

1-) $h(t) = 1$ alınırsa, (2.20)'den

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\{1; p\} &= p^5 \int_0^\infty e^{-pt} 1 dt \\ &= p^5 \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\int_0^T e^{-pt} 1 dt \right] \\ &= p^5 \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^T \\ &= p^5 \left(0 + \frac{1}{p} \right) = p^4. \end{aligned}$$

2-) Eğer $h(t) = t$ alınırsa, (2.20)'den

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}\{t; p\} &= p^5 \int_0^{\infty} e^{-pt} t dt \\
&= p^5 \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\int_0^T e^{-pt} t dt \right] \\
&= p^5 \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{te^{-pt}}{p} - \frac{e^{-pt}}{p^2} \right]_0^T \\
&= p^5 \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{Te^{-pT}}{p} - \frac{e^{-pT} - 1}{p^2} \right] \\
&= p^3
\end{aligned}$$

bulunur.

3-) $h(t) = t^n$ alınırsa, (2.20)'den

$$\mathfrak{D}\{t^n; p\} = p^5 \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n dt$$

dir. $pt = z$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}\{t^n; p\} &= p^5 \int_0^{\infty} e^{-z} \left(\frac{z}{p}\right)^n \frac{dz}{p} \\
&= \frac{1}{p^{n+4}} \int_0^{\infty} e^{-z} z^n dz
\end{aligned}$$

olur. $n = t - 1$ alınır (2.1)'de kullanılırsa

$$\mathfrak{D}\{t^n; p\} = p^{4-n} \Gamma(n+1) = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n-4}} \quad (2.21)$$

bulunur.

4-) $t \geq 0$ ve a bir sabit olsun. $h(t) = e^{at}$ fonksiyonunun Dinesh Verma dönüşümü,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}\{e^{at}; p\} &= p^5 \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} dt \\
&= p^5 \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt \\
&= p^5 \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\int_0^T e^{-(p-a)t} dt \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p^5 \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a} \right]_0^T \\
&= \frac{p^5}{p-a}, \quad p > a \text{ ve } p > 0
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 2.3.3 $\mathfrak{D}\{h(t); p\} = F_1(p)$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur:

$$\text{i.} \quad \mathfrak{D}\{h'(t); p\} = pF_1(p) - p^5 h(0), \quad (2.22)$$

$$\text{ii.} \quad \mathfrak{D}\{h''(t); p\} = p^2 F_1(p) - p^5 h'(0) - p^6 h(0), \quad (2.23)$$

$$\text{iii.} \quad \mathfrak{D}\{h^{(n)}(t); p\} = p^n F_1(p) - p^5 \sum_{j=1}^n p^{n-j} h^{(j-1)}(0), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.24)$$

İspat:

- i. $h(t)$ sürekli bir fonksiyon ve herhangi bir aralıkta da parçalı sürekli ise $\mathfrak{D}\{h'(t); p\}$

$$\mathfrak{D}\{h'(t); p\} = p^5 \int_0^\infty e^{-pt} h'(t) dt$$

olarak tanımlanır. Kısmi integrasyon yöntemi kullanılırsa

$$\mathfrak{D}\{h'(t); p\} = p^5 \lim_{T \rightarrow \infty} [e^{-pt} h(t)]_0^T + p^5 \int_0^\infty p e^{-pt} h(t) dt$$

$$= p^5 \lim_{T \rightarrow \infty} [e^{-pt} h(t)]_0^T + p^6 \int_0^\infty e^{-pt} h(t) dt$$

$$= p^5 \lim_{T \rightarrow \infty} (e^{-pT} h(T) - h(0)) + p^6 \int_0^\infty e^{-pt} h(t) dt$$

$$= -p^5 h(0) + pF_1(p)$$

elde edilir.

$$\text{ii.} \quad \mathfrak{D}\{h''(t); p\} = p^5 \int_0^\infty e^{-pt} h''(t) dt$$

$$= p^5 \lim_{T \rightarrow \infty} [e^{-pt} h'(t) + p e^{-pt} h(t)]_0^T + p^5 \int_0^\infty p^2 e^{-pt} h(t) dt$$

$$= p^5 \lim_{T \rightarrow \infty} [e^{-pt} h'(t) + p e^{-pt} h(t)]_0^T + p^7 \int_0^\infty e^{-pt} h(t) dt$$

$$= p^5 \lim_{T \rightarrow \infty} (e^{-pT} h'(T) + p e^{-pT} h(T) - h'(0) - p h(0)) + p^7 \int_0^\infty e^{-pt} h(t) dt$$

$$= -p^5 h'(0) - p^6 h(0) + p^2 F_1(p).$$

$$\text{iii.} \quad \mathfrak{D}\{h^{(n)}(t); p\} = p^n F_1(p) - p^{n+4} h(0) - p^{n+3} h'(0) - \dots - p^5 h^{(n-1)}(0)$$

$$= p^n F_1(p) - p^5 \sum_{j=1}^n p^{n-j} h^{(j-1)}(0).$$

Teorem 2.3.4 $\mathfrak{D}\{h(t); p\} = F_1(p)$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur:

$$\text{i.} \quad \mathfrak{D}\{th(t); p\} = \frac{5}{p} F_1(p) - F_1'(p), \quad (2.25)$$

$$\text{ii.} \quad \mathfrak{D}\{th'(t); p\} = 4F_1(p) - p \left(\frac{d}{dp} F_1(p) \right), \quad (2.26)$$

$$\text{iii.} \quad \mathfrak{D}\{th''(t); p\} = p^5 h(0) + 3pF_1(p) - p^2 \left(\frac{d}{dp} F_1(p) \right).$$

İspat:

i. Dinesh Verma dönüşümünün p ye göre türevi alınır,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \mathfrak{D}\{h(t); p\} &= \frac{d}{dp} F_1(p) = \frac{d}{dp} \left(p^5 \int_0^\infty e^{-pt} h(t) dt \right) \\ &= 5p^4 \int_0^\infty e^{-pt} h(t) dt + p^5 \int_0^\infty (-t) e^{-pt} h(t) dt \\ &= 5p^4 \int_0^\infty e^{-pt} h(t) dt - p^5 \int_0^\infty e^{-pt} th(t) dt \\ &= \frac{5}{p} F_1(p) - \mathfrak{D}\{th(t); p\} \end{aligned}$$

son eşitlikten

$$\mathfrak{D}\{th(t); p\} = \frac{5}{p} F_1(p) - F_1'(p) = \left(\frac{5}{p} - \frac{d}{dp} \right) F_1(p)$$

elde edilir.

ii. Sırasıyla, (2.25) ve (2.22) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\{th'(t); p\} &= \left(\frac{5}{p} - \frac{d}{dp} \right) \mathfrak{D}\{h'(t); p\} \\ &= \left(\frac{5}{p} - \frac{d}{dp} \right) [pF_1(p) - p^5 h(0)] \\ &= 5F_1(p) - 5p^4 h(0) - \frac{d}{dp} (pF_1(p) - p^5 h(0)) \\ &= 4F_1(p) - p \left(\frac{d}{dp} F_1(p) \right) \end{aligned}$$

bulunur.

iii. Sırasıyla, (2.25) ve (2.23) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}\{th''(t); p\} &= \left(\frac{5}{p} - \frac{d}{dp}\right) \mathfrak{D}\{h''(t); p\} \\
&= \left(\frac{5}{p} - \frac{d}{dp}\right) (p^2 F_1(p) - p^6 h(0) - p^5 h'(0)) \\
&= 5p F_1(p) - 5p^5 h(0) - 5p^4 h'(0) - \frac{d}{dp} (p^2 F_1(p) - p^6 h(0) - p^5 h'(0)) \\
&= p^5 h(0) + 3p F_1(p) - p^2 \left(\frac{d}{dp} F_1(p)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.3.5 (Ters Dinesh Verma Dönüşümü) Dinesh Verma dönüşümü $\mathfrak{D}\{h(t); p\} = F_1(p)$ olan $h(t)$ fonksiyonuna, $F_1(p)$ fonksiyonunun ters Dinesh Verma dönüşümü denir ve ters dönüşüm $\mathfrak{D}^{-1}$ ile gösterilir.

Bazı temel fonksiyonların ters Dinesh Verma dönüşümleri,

- $\mathfrak{D}^{-1}\{p^4; t\} = 1$
- $\mathfrak{D}^{-1}\{p^3; t\} = t$
- $\mathfrak{D}^{-1}\left\{\frac{n!}{p^{n-4}}; t\right\} = t^n$
- $\mathfrak{D}^{-1}\left\{\frac{p^5}{p-a}; t\right\} = e^{at}, (p > a)$
- $\mathfrak{D}^{-1}\left\{\frac{ap^5}{p^2+a^2}; t\right\} = \sin at, (p > 0)$
- $\mathfrak{D}^{-1}\left\{\frac{p^6}{p^2+a^2}; t\right\} = \cos at, (p > 0)$

biçimindedir. Ters Dinesh Verma dönüşümünün özellikleri Dinesh Verma dönüşümünün özelliklerinden çıkarılabilir.

Tanım 2.3.6 h_1 ve $h_2, [0, T]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı, parçalı sürekli ve üstel mertebeden olan bu iki fonksiyonun konvolüsyonu $h_1(t) * h_2(t)$ ile verilir ve

$$h_1(t) * h_2(t) = (h_1 * h_2)(t) = \int_0^t h_1(p) h_2(t-p) dp \quad (2.27)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre $h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$ sağlanır.

Teorem 2.3.7 $\mathfrak{D}\{h_1(t); p\} = F_1(p)$ ve $\mathfrak{D}\{h_2(t); p\} = F_2(p)$ ve $\mathfrak{D}^{-1}\{F_1(p); t\} = h_1(t)$ ve $\mathfrak{D}^{-1}\{F_2(p); t\} = h_2(t)$ ise o zaman konvolüsyonun Dinesh Verma dönüşümü aşağıdaki şekildedir:

$$\mathfrak{D}\{h_1(t) * h_2(t); p\} = \frac{\mathfrak{D}\{h_1(t); p\} \mathfrak{D}\{h_2(t); p\}}{p^5} = \frac{F_1(p)F_2(p)}{p^5}. \quad (2.28)$$

İspat:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\{h_1(t) * h_2(t); p\} &= p^5 \int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_0^t h_1(t-\xi) h_2(\xi) d\xi \right) dt \\ &= p^5 \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t h_1(t-\xi) h_2(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

İntegrasyon sınırları değiştirilirse

$$\mathfrak{D}\{h_1(t) * h_2(t); p\} = p^5 \int_0^\infty h_2(\xi) d\xi \int_\xi^\infty h_1(t-\xi) e^{-pt} dt$$

bulunur. Son ifade de $s = t - \xi$ değişken dönüşümü ile

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\{h_1(t) * h_2(t); p\} &= p^5 \int_0^\infty h_2(\xi) d\xi \int_0^\infty h_1(s) e^{-p(s+\xi)} ds \\ &= p^5 \int_0^\infty e^{-p\xi} h_2(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{-ps} h_1(s) ds \\ &= \frac{F_1(p)F_2(p)}{p^5} \end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Tablo 2.1. Dinesh Verma Dönüşümleri

S. N.	$h(t) = \mathfrak{D}^{-1}\{F_1(p); t\}$	$\mathfrak{D}\{h(t); p\} = F_1(p)$
1	1	p^4
2	t	p^3
3	t^2	$2!. p^2$
4	$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n-4}}$
5	$\sin at$	$\frac{ap^5}{p^2 + a^2}$
6	$\cos at$	$\frac{p^6}{p^2 + a^2}$
7	$\sinh at$	$\frac{ap^5}{p^2 - a^2}$
8	$\cosh at$	$\frac{p^6}{p^2 - a^2}$
9	e^{at}	$\frac{p^5}{p - a}, (p > a)$
10	$\delta(t - a)$	$p^4 e^{-ap}$

3. BULGULAR

Bu bölümde öncelikle H-U kararlılığının tarihçesi sunulmuştur. Daha sonra, bu çalışmada kullanılacak olan fonksiyonların Dinesh Verma dönüşümleri ile Caputo kesirli türevli kesirli diferansiyel denklemlerin H-U tipi kararlılıkları incelenmiştir.

3.1 Hyers-Ulam Kararlılığının Tarihçesi

Stanisław Ulam, 1940 yılında Wisconsin Üniversitesinin Matematik Kulübü'nde yaptığı ünlü konuşmasında çözülmemiş birçok problem ortaya koymuştur. Burada oratya koyduğu problemler, fonksiyonel denklemler için kararlılık teorisinin başlangıç noktası olarak kabul edilmektedir. Günümüzde araştırmacıları bu alana yönlendiren söz konusu soru, literatürde “kararlılık problemi” olarak anılmaktadır.

Fonksiyonel denklemlerin kesin çözümlerini bulmak çok zordur ve eğer varsa kesin çözümlerin biçimi çoğu zaman o kadar karmaşıktır ki sayısal hesaplama için uygun değildir. Bu nedenle basit biçime sahip yaklaşık çözümleri tartışmak ve yaklaşık çözümlerin kesin çözümlere yakın olup olmadığını sormak gerekir.

Ulam tarafından ortaya konan genel problem aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$(G_1, .)$ bir grup olsun. Ayrıca $(G_2, *)$ de $d(.,.)$ metriği ile verilen bir metrik grup olsun. $\varepsilon > 0$ ve her $x, y \in G_1$ olmak üzere

$$d(g_1(x, y), g_1(x) * g_1(y)) < \delta$$

özellikliğini sağlayan bir $g_1: G_1 \rightarrow G_2$ dönüşümü bulunabiliyorsa her $x \in G_1$ için $d(g_1(x), H_1(x)) < \varepsilon$ ile $H_1: G_1 \rightarrow G_2$ bir homomorfizm olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı var mıdır?

Bu problem fonksiyonel denklemler için kararlılık teorisinin bir başlangıç noktası olmuştur. Hyers, 1941 yılında Ulam'ın sorusunu Banach uzaylarında yanıtlamıştır. Bu probleminin bir genellemesi olan, fonksiyonel denklemler yerine diferansiyel denklemlerin ele alınmasıyla yeni bir araştırma alanı doğmuştur. Bunun üzerine birçok araştırmacı H-U kararlılığı üzerine çalışmalar yapmıştır.

Lineer diferansiyel denklemlerin H-U kararlılığı üzerine yapılan ilk çalışmalardan birinin Obloza (1993;1997) tarafından gerçekleştirildiği kabul edilmektedir. Alsina ve Ger (1998), biçimindeki lineer diferansiyel denklem olan

$y'(t) = y(t)$ nin H-U kararlılığını ele almışlardır. Bu çalışmada, eğer her $t \in (a, \infty)$ için türevlenebilir bir $y(t)$ fonksiyonu, $|y'(t) - y(t)| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o hâlde sabit bir c katsayısı için $|y(t) - ce^t| \leq 3\varepsilon$ biçiminde bir çözümünün var olduğunu göstermişlerdir (Alsina ve Ger, 1998).

Alsina ve Ger tarafından yukarıda ifade edilen sonuç, Miura ve ark. (2003a; 2003b; 2002) ile Takahasi ve ark. (2004) da sabit katsayılı birinci ve daha yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklemlerinin H-U kararlılığını genelleştirmişlerdir. Buna ek olarak, Jung (2004; 2005; 2006) da H-U kararlılığı lineer diferansiyel denklemler için ispatlamışlardır. Li ve Shen (2010) ve Wang ve ark. (2008) tarafından sabit katsayılı birinci ve ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerinin H-U kararlılığını integral çarpanı yöntemiyle incelemişlerdir.

Jung (2005), Li ve Shen, (2010), Miura ve ark. (2003) çalışmalarından elde ettikleri sonuçları, Cimpean ve Popa (2010) ile Popa ve Rasa (2011; 2012) tarafından sabit katsayılı n . mertebeden lineer diferansiyel denklemler için genellemişlerdir. Son zamanlarda, Rezaei, Jung ve Rassias (2013), Laplace dönüşümü yöntemini kullanarak lineer diferansiyel denklemlerin H-U kararlılığını ortaya koymuşlardır.

Wang ve Xu (2015), Caputo kesirli türevlerine sahip aşağıdaki kesirli diferansiyel denklemleri Laplace dönüşümü yardımı ile H-U kararlılığını incelemişlerdir:

$$({}^C D_{0+}^{\alpha} y)(t) - \lambda_1 y(t) = h_1(t)$$

ve

$$({}^C D_{0+}^{\alpha} y)(t) - \lambda_1 ({}^C D_{0+}^{\beta} y)(t) = h_2(t).$$

Burada $t > 0, \lambda_1 \in \mathbb{R}, m - 1 < \alpha < m, n - 1 < \beta < n, 0 < \beta < \alpha, m, n \in \mathbb{N}, n \leq m, h_1(t)$ ve $h_2(t), \mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlı fonksiyonlardır ve ${}^C D_{0+}^{\alpha}, \alpha$. mertebeden Caputo kesirli türevidir. Caputo kesirli türevi (2.11)'de tanımlanmıştır.

3.2 Bazı Özel Fonksiyonların Dinesh Verma Dönüşümleri

Bu bölümde çalışmamızda kullanılacak olan fonksiyonların Dinesh Verma dönüşümleri ispatlarıyla verildi.

Teorem 3.2.1 $\alpha > 0$ olsun. O zaman her $[0, t]$ aralığında üstel mertebeden ve parçalı sürekli olan bir $h(t)$ fonksiyonu için

$$\mathfrak{D}\{(I_{0+}^{\alpha}h)(t); p\} = \frac{\mathfrak{D}\{h(t); p\}}{p^{\alpha}} \quad (3.1)$$

dir.

İspat: (2.7), (2.27), (2.28), (2.21) ve lineerlik kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\{(I_{0+}^{\alpha}h)(t); p\} &= p^5 \int_0^{\infty} e^{-pt} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \right] dt \\ &= \frac{\mathfrak{D}\{t^{\alpha-1} * h(t); p\}}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{\mathfrak{D}\{t^{\alpha-1}; p\} \mathfrak{D}\{h(t); p\}}{p^5 \Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{p^5 \Gamma(\alpha)} \frac{\mathfrak{D}\{h(t); p\}}{p^{\alpha-5}} = \frac{\mathfrak{D}\{h(t); p\}}{p^{\alpha}} \end{aligned}$$

bulunur.

Lemma 3.2.2 $\alpha > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha < m$ olmak üzere; herhangi $t > 0$ olmak üzere $h \in AC^m[0, t]$, $h^{(m)} \in L_1(0, t)$ ve $h^{(m)}(t)$, üstel mertebeli olsun. Dinesh Verma dönüşümü $\mathfrak{D}\{h(t); p\}$ ve $\mathfrak{D}\{D^m h(t); p\}$ vardır ve $j = 1, \dots, m$ için $\lim_{t \rightarrow \infty} (D^{j-1}h)(t) = 0$ dir. O halde

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\{(^c D_{0+}^{\alpha} h)(t); p\} &= p^{\alpha} \mathfrak{D}\{h(t); p\} - p^5 \sum_{j=1}^m p^{\alpha-j} h^{(j-1)}(0^+) \\ &= p^{\alpha} \left[\mathfrak{D}\{h(t); p\} - p^5 \sum_{j=1}^m p^{-j} h^{(j-1)}(0^+) \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Sırasıyla (2.12) ve (3.1) eşitliği kullanılırsa:

$$\mathfrak{D}\{(^c D_{0+}^{\alpha} h)(t); p\} = \mathfrak{D}\{(I_{0+}^{m-\alpha} h^{(m)})(t); p\} = \frac{\mathfrak{D}\{h^{(m)}(t); p\}}{p^{m-\alpha}}$$

elde edilir. (2.24) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}\{(^c D_{0+}^\alpha h)(t); p\} &= p^{\alpha-m} \left[p^m \mathfrak{D}\{h(t); p\} - p^5 \sum_{j=1}^m \frac{h^{(j-1)}(0^+)}{p^{j-m}} \right], j \in \mathbb{Z} \\
&= p^\alpha \left[\mathfrak{D}\{h(t); p\} - p^5 \sum_{j=1}^m \frac{h^{(j-1)}(0^+)}{p^j} \right], j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Lemma 3.2.3 $\Re(\alpha) > 0$ ve $\left| \frac{\lambda_1}{p^\alpha} \right| < 1$ ise, o zaman

$$\mathfrak{D}\{E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha); p\} = \frac{p^{\alpha+4}}{p^\alpha - \lambda_1} \quad (3.3)$$

ve

$$\mathfrak{D}\{t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\lambda_1 t^\alpha); p\} = \frac{p^{\alpha-\beta+5}}{p^\alpha - \lambda_1} \quad (3.4)$$

dir.

İspat: (2.5) ve (2.21) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}\{E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha); p\} &= p^5 \int_0^\infty e^{-pt} \sum_{j=0}^\infty \frac{\lambda_1^j t^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha + 1)} dt \\
&= \sum_{j=0}^\infty \frac{\lambda_1^j}{\Gamma(j\alpha + 1)} \mathfrak{D}\{t^{j\alpha}; p\} \\
&= \sum_{j=0}^\infty \frac{\lambda_1^j}{\Gamma(j\alpha + 1)} \frac{\Gamma(j\alpha + 1)}{p^{j\alpha-4}} \\
&= p^4 \sum_{j=0}^\infty (\lambda_1 p^{-\alpha})^j = \frac{p^4}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} = \frac{p^{\alpha+4}}{p^\alpha - \lambda_1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu (3.3) eşitliğinin ispatıdır. Şimdi de (3.4) eşitliği ele alalım.

(2.6) ve (2.21) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}\{t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\lambda_1 t^\alpha); p\} &= p^5 \int_0^\infty e^{-pt} t^{\beta-1} \sum_{j=0}^\infty \frac{\lambda_1^j t^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha + \beta)} dt \\
&= \sum_{j=0}^\infty \frac{\lambda_1^j}{\Gamma(j\alpha + \beta)} p^5 \int_0^\infty e^{-pt} t^{j\alpha + \beta - 1} dt \\
&= \sum_{j=0}^\infty \frac{\lambda_1^j}{\Gamma(j\alpha + \beta)} \mathfrak{D}\{t^{j\alpha + \beta - 1}; p\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^j}{\Gamma(j\alpha + \beta)} \frac{\Gamma(j\alpha + \beta)}{p^{j\alpha + \beta - 5}} \\
&= p^{5-\beta} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1}{p^\alpha}\right)^j = \frac{p^{5-\beta}}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} = \frac{p^{\alpha-\beta+5}}{p^\alpha - \lambda_1}
\end{aligned}$$

istenilen elde edilir.

3.3 Caputo Kesirli Türevli Diferansiyel Denklemler için Hyers-Ulam

Tipi Kararlılık

Bu bölümde,

$$({}^c D_{0+}^\alpha y)(t) = h(t), \quad (3.5)$$

$$({}^c D_{0+}^\alpha y)(t) - \lambda_1 y(t) = h(t) \quad (3.6)$$

ve

$$({}^c D_{0+}^\alpha y)(t) - \lambda_1 ({}^c D_{0+}^\beta y)(t) = h(t) \quad (3.7)$$

Caputo kesirli türevli diferansiyel denklemler için

$$y^{(j-1)}(0^+) = c_{j-1}, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.8)$$

başlangıç koşuluyla ele alındı. Burada $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $c_{j-1}, j = 1, \dots, m$ için $\mathbb{R}$ de skaler değerler, $0 < T < \infty$, $h: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ve ${}^c D_{0+}^\alpha, \alpha > 0$ mertebeden Caputo kesirli türevidir. Bu bölümde (3.5), (3.6) ve (3.7) kesirli diferansiyel denklemleri (3.8) başlangıç koşuluyla H-U tipi kararlılıkları Dinesh Verma dönüşümü yardımıyla ispatlanmıştır.

Tanım 3.3.1 $\varepsilon > 0$ verilen bir keyfi sabit ve $h, (0, T]$ aralığı üzerinde sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|({}^c D_{0+}^\alpha y)(t) - h(t)| \leq \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir y fonksiyonu için (3.5) kesirli diferansiyel denkleminin $|y(t) - y_e(t)| \leq \varepsilon K$ özelliğinde bir y_e çözümü var olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti bulunabiliyorsa, o zaman (3.8) koşulu ile (3.5)'e H-U kararlıdır denir. Burada, ε ve K nın yerine sırası ile, y ve y_e 'ya doğrudan bağlı olmayacak şekilde $C_1(t)$ ve $C_2(t)$ şeklinde fonksiyonlar seçildiğinde de geçerliyse, bu durumda (3.5) kesirli diferansiyel denkleminin genelleştirilmiş H-U kararlıdır denir.

Tanım 3.3.2 $\varepsilon > 0$ verilen bir keyfi sabit ve $h, (0, T]$ aralığı üzerinde sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|({}^c D_{0+}^\alpha y)(t) - \lambda_1 y(t) - h(t)| \leq \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir y fonksiyonu için (3.6) kesirli diferansiyel denkleminin $|y(t) - y_e(t)| \leq \varepsilon K$ özelliğinde bir y_e çözümü var olacak şekilde bir

$K > 0$ sabiti bulunabiliyorsa, o zaman (3.8) koşulu ile (3.6)'ya H-U kararlıdır denir. Burada, ε ve K nın yerine sırası ile, y ve y_e 'ya doğrudan bağlı olmayacak şekilde $C_1(t)$ ve $C_2(t)$ şeklinde fonksiyonlar seçildiğinde de geçerliyse, bu durumda (3.5) kesirli diferansiyel denkleminin genelleştirilmiş H-U kararlıdır denir.

Tanım 3.3.3 $\varepsilon > 0$ verilen bir keyfi sabit ve $h, (0, T]$ aralığı üzerinde sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| ({}^C D_{0+}^\alpha y)(t) - \lambda_1 ({}^C D_{0+}^\beta y)(t) - h(t) \right| \leq \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir y fonksiyonu için (3.7) kesirli diferansiyel denkleminin $|y(t) - y_e(t)| \leq \varepsilon K$ özelliğinde bir y_e çözümü var olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti bulunabiliyorsa, o zaman (3.8) koşulu ile (3.7)'ye H-U kararlıdır denir. Burada, ε ve K nın yerine sırası ile, y ve y_e 'ya doğrudan bağlı olmayacak şekilde $C_1(t)$ ve $C_2(t)$ şeklinde fonksiyonlar seçildiğinde de geçerliyse, bu durumda (3.5) kesirli diferansiyel denkleminin genelleştirilmiş H-U kararlıdır denir.

Teorem 3.3.4 $0 < T < \infty$ ve $0 < m - 1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}$ olsun. $h(t), (0, T]$ aralığında reel değerli olan sürekli bir fonksiyon olmak üzere, bazı $\varepsilon > 0$ ve her $t \in (0, T]$ için bir $y: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, (3.8) koşulu ile

$$\left| ({}^C D_{0+}^\alpha y)(t) - h(t) \right| \leq \varepsilon \quad (3.9)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise (3.5) kesirli diferansiyel denkleminin

$$|y(t) - y_e(t)| \leq \frac{\varepsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \quad (3.10)$$

özelliğinde bir $y_e: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ çözümü vardır.

İspat: $t \in (0, T]$ olmak üzere

$$H_1(t) = ({}^C D_{0+}^\alpha y)(t) - h(t), \quad (3.11)$$

olarak alınsın. Her iki yanının Dinesh Verma dönüşümü alınıp, (3.2) uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\{H_1(t); p\} &= \mathfrak{D}\{({}^C D_{0+}^\alpha y)(t) - h(t); p\} \\ &= \mathfrak{D}\{({}^C D_{0+}^\alpha y)(t); p\} - \mathfrak{D}\{h(t); p\} \\ &= p^\alpha \mathfrak{D}\{y(t); p\} - p^5 \sum_{j=1}^m p^{\alpha-j} y^{(j-1)}(0^+) - \mathfrak{D}\{h(t); p\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir. (3.8) başlangıç koşuluyla (3.12) yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\{y(t); p\} &= p^{-\alpha} \mathfrak{D}\{h(t); p\} + \sum_{j=1}^m p^{5-j} c_{j-1} + p^{-\alpha} \mathfrak{D}\{H_1(t); p\} \\ &= \frac{p^{-\alpha+5}}{p^5} \mathfrak{D}\{h(t); p\} + \sum_{j=1}^m p^{5-j} c_{j-1} + \frac{p^{-\alpha+5}}{p^5} \mathfrak{D}\{H_1(t); p\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

olur. (2.21)'de sırasıyla n yerine $n = j - 1$ ve $n = \alpha - 1$ yazılırsa

$$\begin{cases} p^{5-j} = \frac{\mathfrak{D}\{t^{j-1}; p\}}{\Gamma(j)}, \\ p^{-\alpha+5} = \frac{\mathfrak{D}\{t^{\alpha-1}; p\}}{\Gamma(\alpha)} \end{cases} \quad (3.14)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.14), (3.13)'te yerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\{y(t); p\} &= \frac{\mathfrak{D}\{t^{\alpha-1}; p\}\mathfrak{D}\{h(t); p\}}{p^5\Gamma(\alpha)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^m c_{j-1} \frac{\mathfrak{D}\{t^{j-1}; p\}}{\Gamma(j)} + \frac{\mathfrak{D}\{t^{\alpha-1}; p\}}{p^5\Gamma(\alpha)} \mathfrak{D}\{H_1(t); p\} \\ &= \frac{\mathfrak{D}\{t^{\alpha-1} * h(t); p\}}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{j=1}^m c_{j-1} \frac{\mathfrak{D}\{t^{j-1}; p\}}{\Gamma(j)} + \frac{\mathfrak{D}\{t^{\alpha-1} * H_1(t); p\}}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

bulunur. $y_e(t)$

$$y_e(t) = \frac{t^{\alpha-1} * h(t)}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{j=1}^m c_{j-1} \frac{t^{j-1}}{\Gamma(j)} \quad (3.16)$$

olsun. (3.16)'nın her iki yanının Dinesh Verma dönüşümü alınır ve (2.28) ile (3.14) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\{y_e(t); p\} &= \frac{\mathfrak{D}\{t^{\alpha-1} * h(t); p\}}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{j=1}^m c_{j-1} \frac{\mathfrak{D}\{t^{j-1}; p\}}{\Gamma(j)} \\ &= \frac{\mathfrak{D}\{t^{\alpha-1}; p\}\mathfrak{D}\{h(t); p\}}{p^5\Gamma(\alpha)} + \sum_{j=1}^m c_{j-1} \frac{\mathfrak{D}\{t^{j-1}; p\}}{\Gamma(j)} \\ &= p^{-\alpha}\mathfrak{D}\{h(t); p\} + \sum_{j=1}^m p^{5-j}c_{j-1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.2) ve (3.17) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\{({}^c D_{0+}^{\alpha} y_e)(t); p\} &= p^{\alpha}\mathfrak{D}\{y_e(t); p\} - \sum_{j=1}^m p^{\alpha-j+5}c_{j-1} \\ &= p^{\alpha} \left[p^{-\alpha}\mathfrak{D}\{h(t); p\} + \sum_{j=1}^m p^{5-j}c_{j-1} \right] - \sum_{j=1}^m p^{\alpha-j+5}c_{j-1} \\ &= \mathfrak{D}\{h(t); p\} \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte $\mathfrak{D}$ operatörünün bire-bir olduğu kullanılırsa

$$({}^c D_{0+}^{\alpha} y_e)(t) = h(t) \quad (3.18)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $y_e(t)$, (3.5)'in bir çözümü olur. (3.15) ve (3.17)'den

$$\mathfrak{D}\{y(t) - y_e(t); p\} = \frac{\mathfrak{D}\{t^{\alpha-1} * H_1(t); p\}}{\Gamma(\alpha)} \quad (3.19)$$

bulunur. $\mathfrak{D}$ operatörü bire-bir olduğundan

$$y(t) - y_e(t) = \frac{t^{\alpha-1} * H_1(t)}{\Gamma(\alpha)} \quad (3.20)$$

bulunur. Her iki yanının mutlak değeri alındıktan sonra (2.27) ile (3.9) kullanılır ise

$$\begin{aligned} |y(t) - y_e(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} H_1(s) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}| |H_1(s)| ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}| ds = \frac{\varepsilon t^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \leq \frac{\varepsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

bulunur. Bu ispatı tamamlar.

Not: Teorem 3.3.4'te $T < \infty$ alındığında, (3.5) kesirli diferansiyel denklemi $K = \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ olan sabiti ile H-U kararlı olur. Teoremden $T = \infty$ alındığında da (3.5) kesirli diferansiyel denklemi H-U anlamında kararlı olmaz.

Aşağıda verilen sonuçta (3.5) kesirli diferansiyel denkleminin genelleştirilmiş H-U kararlılığı gösterilmektedir.

Sonuç 3.3.5 $m - 1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$ ve $h(t)$, $\mathbb{R}^+$ da tanımlı olan bir fonksiyon olsun. Eğer her $t > 0$ ve bazı $C_1(t) > 0$ için bir $y: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (3.8) koşulu ile

$$|({}^c D_{0+}^\alpha y)(t) - h(t)| \leq C_1(t)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise (3.5) kesirli diferansiyel denkleminin

$$|y(t) - y_e(t)| \leq C_1(t) C_2(t)$$

özelliğinde bir $y_e: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ çözümü vardır. Eşitsizlikte, $C_2(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ dir.

Örnek 3.3.6 Başlangıç koşuluyla verilen aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

$${}^c D_{0+}^{1/2} y(t) = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} t^{5/2} + \frac{1}{30}, \quad y(0^+) = 0. \quad (3.21)$$

(3.21)'den $\alpha = 1/2$ ve $h(t) = \frac{16}{5\sqrt{\pi}}t^{5/2} + \frac{1}{30}$ dir. $\frac{1}{30} < \varepsilon \leq 1$ durumu için, (2.14) eşitliğinde $\beta = 4$ alınırsa, $y_1(t) = t^3$ fonksiyonunun aşağıdaki eşitsizliği sağladığı görülür.

$$|{}^cD_{0+}^{1/2}y_1(t) - h(t)| = \left| \frac{16t^{5/2}}{5\sqrt{\pi}} - \frac{16t^{5/2}}{5\sqrt{\pi}} - \frac{1}{30} \right| = \frac{1}{30} < \varepsilon.$$

Burada $y_1(t)$ nin başlangıç koşulu $y_1(0^+) = 0$ dir. Burada $\alpha = 1/2$ alındığında $m = 1$ ve $c_0 = 0$ bulunur. Böylece (3.16) kullanılırsa

$$\begin{aligned} y_e(t) &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \left(t^{-1/2} * \left(\frac{16t^{5/2}}{5\sqrt{\pi}} + \frac{1}{30} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t s^{-1/2} \left(\frac{16}{5\sqrt{\pi}}(t-s)^{5/2} + \frac{1}{30} \right) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{16}{5\sqrt{\pi}} \int_0^t s^{-1/2} (t-s)^{5/2} ds + \frac{1}{30} \int_0^t s^{-1/2} ds \right] \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Eşitlikteki birinci integrale $s = \varepsilon t$ dönüşümü yapıp, diğer integral de hesaplanırsa

$$y_e(t) = \frac{t^{1/2}}{15\sqrt{\pi}} + t^3$$

bulunur. $y_1(t)$ ve $y_e(t)$ nin farklarının mutlak değeri alındığında

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_e(t)| &= \left| t^3 - t^3 - \frac{t^{1/2}}{15\sqrt{\pi}} \right| \\ &= \frac{\sqrt{t}}{15\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{t}}{15\Gamma(1/2)} \\ &= \frac{2\sqrt{t}}{30\Gamma(1/2)} = \frac{\sqrt{t}}{30\Gamma(3/2)} \\ &< \frac{\varepsilon\sqrt{t}}{\Gamma(3/2)} < \frac{2\varepsilon\sqrt{T}}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.21) kesirli diferansiyel denklemi $K = \frac{2\varepsilon\sqrt{T}}{\sqrt{\pi}}$ ve $\frac{1}{30} < \varepsilon \leq$

1 için Teorem 3.3.4'ün koşullarını sağladığından dolayı H-U kararlı olur.

Teorem 3.3.7 $0 < T < \infty$ ve $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $0 < m - 1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$ olsun. $h(t)$, $(0, T]$ aralığında reel değerli olan sürekli bir fonksiyon olmak üzere, bazı $\varepsilon > 0$ ve her $t \in (0, T]$ için bir $y: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (3.8) koşulu ile

$$|({}^cD_{0+}^\alpha y)(t) - \lambda_1 y(t) - h(t)| \leq \varepsilon \quad (3.22)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise (3.6) kesirli diferansiyel denkleminin

$$|y(t) - y_e(t)| \leq \varepsilon T^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(|\lambda_1| T^\alpha) \quad (3.23)$$

özelliğinde bir $y_e: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ çözümü vardır.

İspat: $t \in (0, T]$ olmak üzere

$$H_2(t) = ({}^C D_{0+}^\alpha y)(t) - \lambda_1 y(t) - h(t) \quad (3.24)$$

olarak alınsın. Her iki yanının Dinesh Verma dönüşümü alınıp, (3.2) kullanılır ise

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\{H_2(t); p\} &= \mathfrak{D}\{({}^C D_{0+}^\alpha y)(t) - \lambda_1 y(t) - h(t); p\} \\ &= \mathfrak{D}\{({}^C D_{0+}^\alpha y)(t); p\} - \mathfrak{D}\{\lambda_1 y(t); p\} - \mathfrak{D}\{h(t); p\} \\ &= p^\alpha \mathfrak{D}\{y(t); p\} - p^5 \sum_{j=1}^m p^{\alpha-j} y^{(j-1)}(0^+) - \lambda_1 \mathfrak{D}\{y(t); p\} - \mathfrak{D}\{h(t); p\} \end{aligned}$$

$$= (p^\alpha - \lambda_1) \mathfrak{D}\{y(t); p\} - p^5 \sum_{j=1}^m p^{\alpha-j} y^{(j-1)}(0^+) - \mathfrak{D}\{h(t); p\}$$

elde edilir. (3.8) başlangıç koşuluyla son eşitlik yeniden düzenlenirse

$$\mathfrak{D}\{y(t); p\} = \frac{\sum_{j=1}^m p^{\alpha-j+5} c_{j-1}}{p^\alpha - \lambda_1} + \frac{\mathfrak{D}\{h(t); p\}}{p^\alpha - \lambda_1} + \frac{\mathfrak{D}\{H_2(t); p\}}{p^\alpha - \lambda_1} \quad (3.25)$$

olur. $y_e(t)$,

$$y_e(t) = \sum_{j=1}^m c_{j-1} t^{j-1} E_{\alpha, j}(\lambda_1 t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda_1 (t-s)^\alpha) h(s) ds \quad (3.26)$$

şeklinde alalım. Her iki yanının Dinesh Verma dönüşümü alındıktan sonra (2.28)

ile (3.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\{y_e(t); p\} &= \mathfrak{D}\left\{ \sum_{j=1}^m c_{j-1} t^{j-1} E_{\alpha, j}(\lambda_1 t^\alpha); p \right\} \\ &\quad + \mathfrak{D}\left\{ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda_1 (t-s)^\alpha) h(s) ds; p \right\} \\ &= \sum_{j=1}^m c_{j-1} \mathfrak{D}\{t^{j-1} E_{\alpha, j}(\lambda_1 t^\alpha); p\} + \frac{\mathfrak{D}\{t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda_1 t^\alpha); p\} \mathfrak{D}\{h(t); p\}}{p^5} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^m p^{\alpha-j+5} c_{j-1}}{p^\alpha - \lambda_1} + \frac{\mathfrak{D}\{h(t); p\}}{p^\alpha - \lambda_1} \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.2) ve (3.27) kullanılırsa

$$\mathfrak{D}\{({}^C D_{0+}^\alpha y_e)(t) - \lambda_1 y_e(t); p\} = p^\alpha \mathfrak{D}\{y_e(t); p\} - p^5 \sum_{j=1}^m p^{\alpha-j} c_{j-1}$$

$$-\lambda_1 \mathfrak{D}\{y_e(t); p\} = \mathfrak{D}\{h(t); p\}$$

bulunur. Son eşitlikte $\mathfrak{D}$ operatörü bire-bir olduğundan,

$$({}^c D_{0+}^\alpha y_e)(t) - \lambda_1 y_e(t) = h(t)$$

olur. Dolayısıyla $y_e(t)$, (3.6) kesirli diferansiyel denkleminin bir çözümü olur.

(3.25) ve (3.27)'den

$$\mathfrak{D}\{y(t) - y_e(t); p\} = \frac{\mathfrak{D}\{H_2(t); p\}}{p^\alpha - \lambda_1} \quad (3.28)$$

elde edilir. (2.28) ve (3.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\left\{\left(t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_1 t^\alpha)\right) * H_2(t); p\right\} &= \frac{1}{p^5} \mathfrak{D}\{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha); p\} \mathfrak{D}\{H_2(t); p\} \\ &= \frac{\mathfrak{D}\{H_2(t); p\}}{p^\alpha - \lambda_1} \end{aligned} \quad (3.29)$$

bulunur. (3.28) ve (3.29)'dan $\mathfrak{D}$ operatörünün bire-bir olduğu kullanılırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$y(t) - y_e(t) = \left(t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_1 t^\alpha)\right) * H_2(t). \quad (3.30)$$

Böylece, (3.30) nin her iki yanının mutlak değeri alındıktan sonra (2.27) ile (3.22) kullanılır ise

$$\begin{aligned} |y(t) - y_e(t)| &= \left| \left(t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_1 t^\alpha)\right) * H_2(t) \right| \\ &= \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_1 (t-s)^\alpha) H_2(s) ds \right| \\ &= \left| \int_0^t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^j (t-s)^{j\alpha+\alpha-1}}{\Gamma(j\alpha+\alpha)} H_2(s) ds \right| \\ &= \left| \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\lambda_1^j (t-s)^{j\alpha+\alpha-1}}{\Gamma(j\alpha+\alpha)} H_2(s) ds \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \left| \frac{\lambda_1^j (t-s)^{j\alpha+\alpha-1}}{\Gamma(j\alpha+\alpha)} \right| |H_2(s)| ds \\ &\leq \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\lambda_1|^j}{\Gamma(j\alpha+\alpha)} \int_0^t |(t-s)^{j\alpha+\alpha-1}| ds \\ &= \varepsilon t^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(|\lambda_1| t^\alpha)^j}{\Gamma(j\alpha+\alpha+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(|\lambda_1| t^\alpha) \\
&\leq \varepsilon T^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(|\lambda_1| T^\alpha)
\end{aligned}$$

olup, teoremin ispatı tamamlanır.

Not: Teorem 3.3.7’de $T < \infty$ alındığında, (3.6) kesirli diferansiyel denklemi $K = T^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(|\lambda_1| T^\alpha)$ olan sabiti ile H-U kararlı olur. Teoremde $T = \infty$ alındığında da (3.6) kesirli diferansiyel denklemi H-U anlamında kararlı olmaz.

Aşağıda verilen sonuçta (3.6) kesirli diferansiyel denkleminin genelleştirilmiş H-U kararlılığı gösterilmektedir.

Sonuç 3.3.8 $m - 1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ ve $h(t)$, $\mathbb{R}^+$ da tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer her $t > 0$ ve bazı $C_1(t) > 0$ için bir $y: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (3.8) koşulu ile

$$|(^C D_{0+}^\alpha y)(t) - \lambda_1 y(t) - h(t)| \leq C_1(t)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise (3.6) kesirli diferansiyel denkleminin

$$|y(t) - y_e(t)| \leq C_1(t) C_2(t)$$

özelliğinde bir $y_e: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ çözümü vardır. Eşitsizlikte, $C_2(t) = t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(|\lambda_1| t^\alpha)$ dir.

Örnek 3.3.9 Başlangıç koşuluyla verilen aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

$$^C D_{0+}^{1/2} y(t) + 7y(t) = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} t^{5/2} + 7t^3 + \frac{1}{30}, \quad y(0^+) = 0. \quad (3.31)$$

Burada $\lambda_1 = -7$, $\alpha = 1/2$ ve $h(t) = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} t^{5/2} + 7t^3 + \frac{1}{30}$ dir. $\frac{1}{30} < \varepsilon \leq 1$ durumu için, (2.14) eşitliğinde $\beta = 4$ alınırsa, $y_1(t) = t^3$ fonksiyonunun aşağıdaki eşitsizliği sağladığı görülür.

$$\begin{aligned}
|(^C D_{0+}^{1/2} y_1(t) + 7y_1(t) - h(t))| &= \left| \frac{16}{5\sqrt{\pi}} t^{5/2} + 7t^3 - \frac{16}{5\sqrt{\pi}} t^{5/2} - 7t^3 - \frac{1}{30} \right| \\
&= \left| \frac{1}{30} \right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Burada $y_1(t)$ nin başlangıç koşulu $y_1(0^+) = 0$ dir. Burada $\alpha = 1/2$ alındığında $m = 1$ ve $c_0 = 0$ bulunur. Böylece (3.26)’da kullanılır ise

$$\begin{aligned}
y_e(t) &= \int_0^t s^{-1/2} E_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(-7s^{1/2}) \left(\frac{16}{5\sqrt{\pi}} (t-s)^{5/2} + 7(t-s)^3 + \frac{1}{30} \right) ds \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-7)^j}{\Gamma\left(\frac{1}{2}j + \frac{1}{2}\right)} \left[\frac{16}{5\sqrt{\pi}} \int_0^t s^{\frac{j-1}{2}} (t-s)^{5/2} ds + 7 \int_0^t s^{\frac{j-1}{2}} (t-s)^3 ds + \frac{1}{30} \int_0^t s^{\frac{j-1}{2}} ds \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte birinci ve ikinci integrale $s = \varepsilon t$ dönüşümü uygulanıp diğer integral çözülürse

$$y_e(t) = \frac{1}{30} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j 7^j t^{\frac{j+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{j+1}{2} + 1\right)} + t^3$$

bulunur. $y_1(t)$ ve $y_e(t)$ nin farkları alındıktan sonra mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_e(t)| &= \left| t^3 - t^3 - \frac{1}{30} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j 7^j t^{\frac{j+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{j+1}{2} + 1\right)} \right| \\ &= \frac{1}{30} \left| t^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-7)^j t^{\frac{j}{2}}}{\Gamma\left(\frac{j}{2} + \frac{3}{2}\right)} \right| \\ &= \frac{1}{30} t^{1/2} E_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}\left(|-7| t^{\frac{1}{2}}\right) < \varepsilon \sqrt{T} E_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(|-7| \sqrt{T}) \end{aligned}$$

elde edilir. $K = \sqrt{T} E_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(|-7| \sqrt{T})$ ve $\frac{1}{30} < \varepsilon \leq 1$ olduğundan dolayı Teorem 3.3.7

sağlanır. Dolayısıyla (3.31) kesirli diferansiyel denklemi H-U kararlı olur.

Teorem 3.3.10 $0 < T < \infty$ ve $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, $m - 1 < \alpha < m$, $n - 1 < \beta < n$, $0 < \beta < \alpha$ olsun. $h(t)$, $(0, T]$ aralığında reel değerli olan sürekli bir fonksiyon olmak üzere, her $t \in (0, T]$ ve bazı $\varepsilon > 0$ için bir $y: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (3.8) koşulu ile

$$\left| ({}^c D_{0+}^{\alpha} y)(t) - \lambda_1 ({}^c D_{0+}^{\beta} y)(t) - h(t) \right| \leq \varepsilon \quad (3.32)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise (3.7) kesirli diferansiyel denkleminin

$$|y(t) - y_e(t)| \leq \varepsilon T^{\alpha} E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(|\lambda_1| T^{\alpha-\beta})$$

özelliğinde bir $y_e: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ çözümü vardır.

İspat: $t \in (0, T]$ için

$$H_3(t) = ({}^c D_{0+}^{\alpha} y)(t) - \lambda_1 ({}^c D_{0+}^{\beta} y)(t) - h(t) \quad (3.33)$$

alınsın. Her iki yanının Dinesh Verma dönüşümü alındıktan sonra (3.2)'den

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\{Y_3(t); p\} &= \mathfrak{D}\left\{({}^c D_{0+}^{\alpha} y)(t) - \lambda_1 ({}^c D_{0+}^{\beta} y)(t) - h(t); p\right\} \\ &= \mathfrak{D}\left\{({}^c D_{0+}^{\alpha} y)(t); p\right\} - \mathfrak{D}\left\{\lambda_1 ({}^c D_{0+}^{\beta} y)(t); p\right\} - \mathfrak{D}\{h(t); p\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p^\alpha \mathfrak{D}\{y(t); p\} - p^5 \sum_{j=1}^m p^{\alpha-j} y^{(j-1)}(0^+) \\
&\quad - \lambda_1 \left(p^\beta \mathfrak{D}\{y(t)\} - p^5 \sum_{j=1}^n p^{\beta-j} y^{(j-1)}(0^+) \right) - \mathfrak{D}\{h(t); p\} \\
&= (p^\alpha - \lambda_1 p^\beta) \mathfrak{D}\{y(t)\} - p^5 \left(\sum_{j=1}^m p^{\alpha-j} y^{(j-1)}(0^+) - \lambda_1 \sum_{j=1}^n p^{\beta-j} y^{(j-1)}(0^+) \right) \\
&\quad - \mathfrak{D}\{h(t); p\} \tag{3.34}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.8) başlangıç koşuluyla (3.34) yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}\{y(t); p\} &= \frac{\sum_{j=1}^m p^{5+\alpha-j} c_{j-1} - \lambda_1 \sum_{j=1}^n p^{5+\beta-j} c_{j-1}}{p^\alpha - \lambda_1 p^\beta} + \frac{\mathfrak{D}\{h(t); p\}}{p^\alpha - \lambda_1 p^\beta} \\
&+ \frac{\mathfrak{D}\{H_3(t); p\}}{p^\alpha - \lambda_1 p^\beta} \tag{3.35}
\end{aligned}$$

bulunur. $y_e(t)$

$$y_e(t) = \sum_{j=1}^m c_{j-1} y_j(t) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda_1(t-s)^{\alpha-\beta}) h(s) ds \tag{3.36}$$

olsun. Burada,

$$y_j(t) = t^{j-1} E_{\alpha-\beta, j}(\lambda_1 t^{\alpha-\beta}) - \lambda_1 t^{\alpha-\beta+j-1} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+j}(\lambda_1 t^{\alpha-\beta}), j = 1, \dots, n$$

$$y_j(t) = t^{j-1} E_{\alpha-\beta, j}(\lambda_1 t^{\alpha-\beta}), \quad j = n+1, \dots, m$$

olarak alınmıştır. (3.36)'nın her iki yanının Dinesh Verma dönüşümü alındıktan sonra (3.4) ile (2.28) kullanılır ise

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}\{y_e(t); p\} &= \mathfrak{D}\left\{ \sum_{j=1}^n c_{j-1} y_j(t); p \right\} + \mathfrak{D}\left\{ \sum_{j=n+1}^m c_{j-1} y_j(t); p \right\} \\
&\quad + \mathfrak{D}\left\{ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda_1(t-s)^{\alpha-\beta}) h(s) ds; p \right\} \\
&= \sum_{j=1}^n c_{j-1} \mathfrak{D}\{t^{j-1} E_{\alpha-\beta, j}(\lambda_1 t^{\alpha-\beta}) - \lambda_1 t^{\alpha-\beta+j-1} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+j}(\lambda_1 t^{\alpha-\beta}); p\} \\
&\quad + \sum_{j=n+1}^m c_{j-1} \mathfrak{D}\{t^{j-1} E_{\alpha-\beta, j}(\lambda_1 t^{\alpha-\beta}); p\} \\
&\quad + \frac{1}{p^5} \mathfrak{D}\{t^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda_1 t^{\alpha-\beta}); p\} \mathfrak{D}\{h(t); p\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^m p^{5+\alpha-j} c_{j-1} - \lambda_1 \sum_{j=1}^n p^{5+\beta-j} c_{j-1}}{p^\alpha - \lambda_1 p^\beta} + \frac{\mathfrak{D}\{h(t); p\}}{p^\alpha - \lambda_1 p^\beta} \quad (3.37)$$

elde edilir. (3.2) ve (3.37) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\left\{\left({}^c D_{0+}^\alpha y_e\right)(t) - \lambda_1 \left({}^c D_{0+}^\beta y_e\right)(t); p\right\} &= p^\alpha \mathfrak{D}\{y_e(t); p\} - p^5 \sum_{j=1}^m p^{\alpha-j} c_{j-1} \\ &- \lambda_1 p^\beta \mathfrak{D}\{y_e(t); p\} + \lambda_1 p^5 \sum_{j=1}^n p^{\beta-j} c_{j-1} = \mathfrak{D}\{h(t); p\} \end{aligned}$$

olur. Son eşitlikte $\mathfrak{D}$ operatörünün bire-bir olduğundan

$$\left({}^c D_{0+}^\alpha y_e\right)(t) - \lambda_1 \left({}^c D_{0+}^\beta y_e\right)(t) = h(t)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $y_e(t)$, (3.7) denkleminin bir çözümü olduğu görülür. (3.35) ile (3.37)'den

$$\mathfrak{D}\{y(t) - y_e(t); p\} = \frac{\mathfrak{D}\{H_3(t); p\}}{p^\alpha - \lambda_1 p^\beta} \quad (3.38)$$

bulunur. (2.28) ve (3.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\left\{\left(t^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda_1 t^{\alpha-\beta})\right) * H_3(t); p\right\} \\ = \frac{1}{p^5} \mathfrak{D}\{t^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda_1 t^{\alpha-\beta}); p\} \mathfrak{D}\{H_3(t); p\} \\ = \frac{\mathfrak{D}\{H_3(t); p\}}{p^\alpha - \lambda p^\beta} \end{aligned} \quad (3.39)$$

olur. (3.38), (3.39)'a eşit olup $\mathfrak{D}$ operatörünün bire-bir olduğundan aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$y(t) - y_e(t) = \left[t^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda_1 t^{\alpha-\beta})\right] * H_3(t). \quad (3.40)$$

Böylece, her iki yanının mutlak değeri alındıktan sonra (2.27) ve (3.32)'den

$$|y(t) - y_e(t)| = \left|(t^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda_1 t^{\alpha-\beta})) * H_3(t)\right|$$

$$\begin{aligned} &= \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda_1 (t-s)^{\alpha-\beta}) H_3(s) ds \right| \\ &= \left| \int_0^t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^j (t-s)^{j(\alpha-\beta)+\alpha-1} H_3(s)}{\Gamma(j(\alpha-\beta) + \alpha)} ds \right| \\ &= \left| \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\lambda_1^j (t-s)^{j(\alpha-\beta)+\alpha-1} H_3(s)}{\Gamma(j(\alpha-\beta) + \alpha)} ds \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \left| \frac{\lambda_1^j (t-s)^{j(\alpha-\beta)+\alpha-1}}{\Gamma(j(\alpha-\beta) + \alpha)} \right| |H_3(s)| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\lambda_1|^j}{\Gamma(j(\alpha - \beta) + \alpha)} \int_0^t |(t-s)^{j(\alpha-\beta)+\alpha-1}| ds \\
&= \varepsilon t^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(|\lambda_1| t^{\alpha-\beta})^j}{\Gamma(j(\alpha - \beta) + \alpha + 1)} \\
&= \varepsilon t^\alpha E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(|\lambda_1| t^{\alpha-\beta}) \\
&\leq \varepsilon T^\alpha E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(|\lambda_1| T^{\alpha-\beta})
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Not: Teorem 3.3.10'da $T < \infty$ alındığında, (3.7) kesirli diferansiyel denklemi $K = T^\alpha E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(|\lambda_1| T^{\alpha-\beta})$ olan sabiti ile H-U kararlı olur. Teoremden $T = \infty$ alındığında da (3.7) kesirli diferansiyel denklemi H-U anlamında kararlı olmaz.

Aşağıda verilen sonuçta (3.7) kesirli diferansiyel denkleminin genelleştirilmiş H-U kararlılığı gösterilmektedir.

Sonuç 3.3.11 $\lambda_1 \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}, n \leq m, m-1 < \alpha < m, n-1 < \beta < n, 0 < \beta < \alpha$ ve $h(t), \mathbb{R}^+$ da tanımlı olan bir fonksiyon olsun. Eğer her $t > 0$ ve bazı $C_1(t) > 0$ için bir $y: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (3.8) koşulu ile

$$|({}^c D_{0+}^\alpha y)(t) - \lambda_1 ({}^c D_{0+}^\beta y)(t) - h(t)| \leq C_1(t)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise (3.7) kesirli diferansiyel denkleminin

$$|y(t) - y_e(t)| \leq C_1(t)C_2(t)$$

özelliğinde bir $y_e: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ çözümü vardır. Eşitsizlikte, $C_2(t) = t^\alpha E_{\alpha-\beta, \alpha+1}(|\lambda_1| t^{\alpha-\beta})$ dir.

4. TARTIŞMA

Bu çalışmada, bazı Caputo kesirli türevine dayalı kesirli diferansiyel denklemler ele alınmış ve bu denklemlerin H-U tipi kararlılığı, Dinesh Verma dönüşümü kullanılarak ele alınmıştır. Literatürdeki klasik kesirli türev ve integral operatörleri üzerine dayalı yöntemler genişletilerek, kesirli diferansiyel denklemler için kararlılık incelenmiştir.

Bu tezin ikinci bölümünde ise çalışmada yararlanılacak olan bazı tanımlar ve teoremler verildi. Ardından Caputo kesirli türevi ve Dinesh Verma dönüşümünün tanımı ile birlikte özellikleri gösterilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde ise belirli fonksiyonların Dinesh Verma dönüşümleri ispatlarıyla verildi. Caputo kesirli türevine dayalı kesirli diferansiyel denklemlerin H-U tipi kararlılığı ile ilgili teoremler doğrulanmış ve ilgili örneklerle pekiştirilmiştir.

Bu çalışmadan yola çıkarak, daha sonraki araştırmalarda başka tipte kesirli türev operatörlerini bulunduran kesirli diferansiyel denklemler için H-U tipi kararlılıkları da Dinesh Verma dönüşümü yardımıyla ele alınabilir. Bu tip kesirli diferansiyel denklemlerin bu tezdeki H-U tipi kararlılıkları dışında da farklı H-U tipi kararlılıkları da Dinesh Verma dönüşümü yardımıyla incelenebilir. Ayrıca, Dinesh Verma dönüşümünün dışında literatürde tanıtılmış farklı Laplace tipi integral operatörlerde kullanılarak, mevcut yöntemin avantaj ve dezavantajları değerlendirilebilir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Dinesh Verma dönüşümün, Caputo kesirli türevine dayalı kesirli diferansiyel denklemler için H-U tipi kararlılıkların incelenmesinde etkili ve kolaylaştırıcı bir yöntem olduğu gösterilmiştir.

Gelecekteki çalışmalar için öneriler şu şekilde sıralanabilir:

- Bu analiz, değişken katsayılı kesirli türevler içeren diferansiyel denklemlerde uygulanabilir.
- Dinesh Verma dönüşümü genelleştirilerek kesirli diferansiyel denklemlerde H-U tipi kararlılığı incelenebilir.
- Dinesh Verma dönüşümünün farklı türde sınır değer problemlerine uygulanabilirliği araştırılabilir.
- Caputo türevinin lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemler üzerindeki etkisi incelenerek bu dinamiklerin kararlılığına dair yeni sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Alsina, C., ve Ger, R. (1998). On some inequalities and stability results related to the exponential function. *Journal of Inequalities and Applications*, 2, 373–380.
- Gordji, M.E., Cho, Y. J., Ghaemi, M. B., ve Alizadeh, B. (2011). Stability of the second order partial differential equations. *Journal of Inequalities and Applications*, Article 81. <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2011-81>.
- Hegyi, B., ve Jung, S.-M. (2013). On the stability of Laplace's equation. *Applied Mathematics Letters*, 26, 549–552. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.12.014>.
- Hyers, D. H. (1941). On the stability of the linear functional equation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 27(4), 222-224.
- Jarad, F., Abdeljawad, T., ve Baleanu, D. (2017). On the generalized fractional derivatives and their Caputo modification. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 10(5), 2607–2619. <https://doi.org/10.22436/jnsa.010.05.27>.
- Jung, S.-M. (2004). Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order. *Applied Mathematics Letters*, 17(10), 1135–1140. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2003.11.004>.
- Jung, S.-M. (2005). Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order, III. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 311(1), 139–146. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.02.025>.
- Jung, S.-M. (2006). Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order, II. *Applied Mathematics Letters*, 19(9), 854–858. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2005.11.004>.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., ve Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* (Vol. 204). Elsevier.
- Li, Y., ve Shen, Y. (2010). Hyers–Ulam stability of linear differential equations of second order. *Applied Mathematics Letters*, 23(3), 306–309. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.09.020>.
- Lungu, N., ve Popa, D. (2012). Hyers–Ulam stability of a first order partial differential equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 385, 86–91. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.06.025>.
- Mısır, A.(2020). *Teori ve uygulamalı diferansiyel denklemler*. Ankara: Gazi Kitabevi.
- Miura, T., Miyajima, S., ve Takahasi, S.-E. (2003a). A characterization of Hyers–Ulam stability of first order linear differential operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 286(1), 136–146. [https://doi.org/10.1016/S0022-247X\(03\)00458-X](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00458-X).
- Miura, T., Miyajima, S., ve Takahasi, S.-E. (2003b). Hyers–Ulam stability of linear differential operator with constant coefficients. *Mathematische Nachrichten*, 258(1), 90–96. <https://doi.org/10.1002/mana.200310088>.
- Obłoz, M. (1993). Hyers stability of the linear differential equation. *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny, Prace Matematyczne*, 159(13), 259–270. <http://hdl.handle.net/11716/7688>.
- Obłoz, M. (1997). Connections between Hyers and Lyapunov stability of the ordinary differential equations. *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny, Prace Matematyczne*, 189(14), 141–146. <http://hdl.handle.net/11716/8211>.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations*. Academic Press.

- Popa, D., ve Raşa, I. (2011). On the Hyers–Ulam stability of the linear differential equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 381(2), 530–537. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.02.051>.
- Popa, D., ve Raşa, I. (2012). Hyers–Ulam stability of the linear differential operator with nonconstant coefficients. *Applied Mathematics and Computation*, 219(4), 1562–1568. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.07.056>.
- Rassias, Th. M. (1978). On the stability of the linear mapping in Banach spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 72(2), 297–300.
- Rezaei, H., Jung, S.-M., ve Rassias, T. M. (2013). Laplace transform and Hyers–Ulam stability of linear differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 403(1), 244–251. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.02.034>.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A., ve Marichev, O. I. (1993). *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications*. Gordon and Breach.
- Takahasi, S.-E., Miura, T., ve Miyajima, S. (2002). On the Hyers–Ulam stability of the Banach space valued differential equation. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 39(2), 309–315. <https://doi.org/10.4134/BKMS.2002.39.2.309>.
- Takahasi, S.-E., Takagi, H., Miura, T., ve Miyajima, S. (2004). The Hyers–Ulam stability constants of first order linear differential operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 296(2), 403–409. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.12.044>.
- Verma, D. (2020). Putting forward a novel integral transform: Dinesh Verma transform (DVT) and its applications. *International Journal of Scientific Research in Mathematical and Statistical Sciences*, 7(2), 139–145.
- Wang, C., ve Xu, T.-Z. (2015). Hyers–Ulam stability of fractional linear differential equations involving Caputo fractional derivatives. *Applications of Mathematics*, 60(4), 383–393. <http://eudml.org/doc/271626>.
- Wang, G., Zhou, M., ve Sun, L. (2008). Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order. *Applied Mathematics Letters*, 21(10), 1024–1028. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2007.10.020>.