



T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**DİRİCHLET KOŞULLU BİTSADZE-SAMARSKİİ TİPİ
ÜSTBELİRLİ ELİPTİK PROBLEMİNİN KARARLILIK ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gulzıpa AKYÜZ

**HAZİRAN 2017
GÜMÜŞHANE**

**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**DİRİCHLET KOŞULLU BİTSADZE-SAMARSKİİ TİPİ
ÜSTBELİRLİ ELİPTİK PROBLEMİNİN KARARLILIK ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gulzıpa AKYÜZ

**Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
“Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı”
Yüksek Lisans Programında Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15.05.2017
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 12.06.2017**

HAZİRAN 2017



KABUL ve ONAY



Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV danışmanlığında **Gulzıpa AKYÜZ** tarafından hazırlanan “**DİRİCHLET KOŞULLU BİTSADZE-SAMARSKİİ TİPİ ÜSTBELİRLİ ELİPTİK PROBLEMİNİN KARARLILIK ANALİZİ**” isimli bu çalışma jürimiz tarafından Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Mühendisliği** Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak Oy Birliği ile kabul edilmiştir.

Başkan (Danışman)

.....
Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

Üye

.....
Doç. Dr. Zafer ÇAKIR

Üye

.....
Doç. Dr. Deniz AĞIRSEVEN

ONAY

Bu tez **18/07**/2017 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

.....
Doç. Dr. Ferkan SİPAHİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BEYANNAMESİ

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlamış olduğum “**DİRİCHLET KOŞULLU BİTSADZE-SAMARSKİİ TİPİ ÜSTBELİRLİ ELİPTİK PROBLEMİNİN KARARLILIK ANALİZİ**” isimli tez çalışmasında; bütün bilgi ve belgeleri genel akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak hazırlayıp sunduğumu, başka kaynaklardan yararlandığım bilgileri metin ve kaynaklarda eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma süresince bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksi durumda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 15/05/2017


Gulzıpa AKYÜZ

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİRİCHLET KOŞULLU BİTSADZE-SAMARSKİİ TİPİ
ÜSTBELİRLİ ELİPTİK PROBLEMİNİN KARARLILIK ANALİZİ

Gulzıpa AKYÜZ

Gümüşhane Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

2017, 109 sayfa

Bu tezde, Hilbert uzayında eliptik kısmi diferensiyel denklemler için Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli probleminin çözümü için kararlılık kestirimleri araştırılmıştır. Üstbelirli probleminin çözümü için kararlılık ve koersif kararlılık kestirimleri elde edilmiştir. Üstbelirli eliptik probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemaları kurulmuştur. Bu fark şemalarının çözümü için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir. Ayrıca, soyut sonuçlar elde edildikten sonra çok boyutlu eliptik denklemi için Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli Dirichlet ve Neumann sınır değer problemlerinin de birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemaları kurulmuştur ve fark şemalarının kararlılık analizleri yapılmıştır. Son olarak, fark şemaları için araştırılmış olan teorik ifadeler sayısal örneklerin sonuçlarıyla doğrulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fark şeması, Hemen-hemen koersif kararlılık, İyi tanımlılık, Kararlılık, Koersif kararlılık, Sınır Değer Problemi, Üstbelirlilik, Yaklaşık Çözüm.



ABSTRACT

MS THESIS

**STABILITY ANALYSIS OF BITSADZE-SAMARSKII TYPE
OVERDETERMINED ELLIPTIC PROBLEM WITH DIRICHLET CONDITIONS**

Gulzıpa AKYUZ

Gumushane University

The Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematical Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

2017, 109 pages

In this thesis, the stability estimates for the solution of the Dirichlet conditional Bitsadze-Samarskii type overdetermined problem for elliptic partial differential equations in the Hilbert space have been investigated. Stability and coercive stability estimates are obtained for the solution of the overdetermined problem. The first and second orders of the accuracy difference schemes are established for the approximate solutions of this overdetermined elliptic problem. Furthermore, after abstract solutions had been obtained, the first and second orders of the accuracy difference schemes of the Dirichlet conditional Bitsadze-Samarskii type overdetermined Dirichlet and Neumann boundary value problems are also established and stability analysis of the difference schemes are made. Finally,

theoretical statements investigated for the difference schemes are confirmed by the results of the numerical examples.

Key Words: Approximate solution, Almost coercive stability, Boundary Value Problem, Coercive stability, Difference scheme, Overdetermination, Stability, Well-posedness.



TEŞEKKÜR

Bu çalışma Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Tez çalışmalarımın her aşamasında yön gösterici olan, yardımlarını ve önerilerini esirgemeyen, bilgilerinden ve tecrübelerinden yararlandığım çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Charyyar ASHERYRALYYEV'e, yüksek lisans öğrenimim boyunca üzerimde emeği olan Matematik Mühendisliği bölümündeki tüm hocalarıma; ayrıca eşim Ahmet Mutlu AKYÜZ ve çocuklarım başta olmak üzere tüm aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Gulzıpa AKYÜZ
Gümüşhane, 2017

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET	IV
ABSTRACT	VI
TEŞEKKÜR	VIII
İÇİNDEKİLER	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ	XI
TABLolar DİZİNİ	XII
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XIII
1. GİRİŞ.....	1
2. DİRİCHLET KOŞULLU BİTSADZE-SAMARSKİİ TİPİ ÜSTBELİRLİ ELİPTİK DİFERENSİYEL PROBLEMİNİN İYİ TANIMLILIĞI.....	6
2.1. Diferensiyel Problemin İyi Tanımlılığı	6
2.2. Soyut Problemin Uygulamaları.....	21
3. SOYUT PROBLEM İÇİN FARK ŞEMALARI	26
3.1. Birinci Mertebeden Doğruluk Fark Şeması	33
3.2. İkinci Mertebeden Doğruluk Fark Şeması.....	49
4. DİRİCHLET KOŞULLU ÇOK BOYUTLU ÜSTBELİRLİ ELİPTİK SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN FARK ŞEMALARI.....	67
4.1. Çok Boyutlu Eliptik Denklem İçin Dirichlet Koşullu Bitsadze-Samarskii Tipi Üstbelirli Dirichlet Sınır Değer Probleminin Fark Şemaları.....	67
4.2. Çok Boyutlu Eliptik Denklem İçin Dirichlet Koşullu Bitsadze-Samarskii Tipi Üstbelirli Neumann Sınır Değer Probleminin Fark Şemaları	75
5. SAYISAL UYGULAMALAR.....	80
5.1. Eliptik Denklem İçin Dirichlet Koşullu Bitsadze-Samarskii Tipi Üstbelirli Dirichlet Sınır Değer Probleminin Sayısal Sonuçları	80

5.2.	Eliptik Denklem İçin Dirichlet Koşullu Bitsadze-Samarskii Tipi Üstbelirli Neumann Sınır Değer Probleminin Sayısal Sonuçları.....	90
6.	SONUÇLAR	101
7.	KAYNAKLAR	104
EKLER.....		110
Ek 1. Üç Noktalı DSD BSTEÜP'in Birinci ve İkinci Mertebeden Sayısal Çözümleri İçin MATLAB Program Kodları.....		110
Ek 2. Üç Noktalı NSD BSTEÜP'in Birinci ve İkinci Mertebeden Sayısal Çözümleri İçin MATLAB Program Kodları.....		113
ÖZGEÇMİŞ.....		117

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 5.1.1. (5.1) DSD BSTEÜP'nin gerçek çözüm grafiği.....	88
Şekil 5.1.2. (5.1) DSD BSTEÜP'nin BMDFŞ yaklaşık çözüm grafiği	89
Şekil 5.1.3. (5.1) DSD BSTEÜP'nin İMDFŞ yaklaşık çözüm grafiği	90
Şekil 5.2.1. (5.12) NSD BSTÜEP'nin gerçek çözüm grafiği.....	98
Şekil 5.2.2. (5.12) NSD BSTÜEP'nin BMDFŞ yaklaşık çözüm grafiği	99
Şekil 5.2.3. (5.12) NSD BSTÜEP'nin İMDFŞ yaklaşık çözüm grafiği	100

TABLÖLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 5.1.1. Bir, iki ve üç noktalı DSD BSTÜEP'lerdeki (5.2) için hatalar	86
Tablo 5.1.2. Bir, iki ve üç noktalı DSD BSTÜEP'lerdeki p için hatalar	87
Tablo 5.1.3. Bir, iki ve üç noktalı DSD BSTÜEP'lerdeki v için hatalar	87
Table 5.2.1. Bir, iki ve üç noktalı NSD BSTÜEP'lerdeki (5.13) için hatalar	97
Tablo 5.2.2. Bir, iki ve üç noktalı NSD BSTÜEP'lerdeki p için hatalar	97
Tablo 5.2.3. Bir, iki ve üç noktalı NSD BSTÜEP'lerdeki v için hatalar	98

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

H	: Hilbert uzayı
A	: Öz-eşlenik pozitif tanımlı operatör
$D(A)$	: A operatörünün tanım bölgesi
$C(H)$	: $C(H) = C([0, T], H)$ uzayı $[0, T]$ aralığı üzerinde tanımlı ve değerleri H Hilbert uzayında olan tüm sürekli fonksiyonların oluşturduğu Banach uzayı
$C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)$	: $C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H) = C_{0T}^{\alpha, \alpha}([0, T], H)$ uzayı ($0 < \alpha < 1$), $[0, T]$ aralığı üzerinde tanımlı ve değerleri H Hilbert uzayında olan bütün düzgün fonksiyonların oluşturduğu Banach uzayı
$C([0, T], D(A))$	: $[0, T]$ aralığı üzerinde tanımlı ve değerleri A operatörünün tanım bölgesinde olan tüm sürekli fonksiyonların kümesi
$C^2([0, T], H)$	: $[0, T]$ aralığı üzerinde tanımlı ve değerleri H Hilbert uzayında olan tüm ikinci mertebeden türevlenebilir sürekli fonksiyonların kümesi
BSTEÜP	: Bitsadze-Samarskii tipi eliptik üstbelirli problem
DSD	: Dirichlet sınır değer problemi
NSD	: Neumann sınır değer problemi
BMDFŞ	: Birinci mertebeden doğruluk fark şeması
IMDFŞ	: İkinci mertebeden doğruluk fark şeması

1. GİRİŞ

Matematikte ve diğer birçok bilim dalında karşılaşılan ve parametrelerin gözlem verilerinden elde edilmesini amaçlayan problemler sınıfına ters problemler denir. Ters problemler kendilerine jeofizik, fizik, astronomi, tıpta görüntü işleme, uzaktan algılama, okyanus akustiği ve tahribatsız değerlendirme (muayene) gibi bilimin birçok alt alanlarında önemli uygulama alanları bulmaktadırlar. Ters problemlerin genel teorisine ve bunlara çözüm bulma yöntemlerine Lavrentiyev vd. (1981), Prilepko vd. (2000), Samarskii ve Vabishchevich (2007) ile Kabanikhin'in (2011) kitaplarında rastlanmaktadır.

Son yıllarda ek koşulların da verilmesiyle, matematiksel fizik denklemlerini yeniden oluşturma problemlerinin etkisi mühendisliğin ve fiziğin farklı uygulama alanlarında da ortaya çıkmış olup, bu da ters problemlerin bilimsel araştırılmasının önemini daha da arttırmıştır. Ters problemleri araştırmak için Fourier integral yöntemi, Fourier seriler yöntemi ve Laplace dönüşümü yöntemi gibi klasik yöntemler uygulanabilir. Ancak, klasik yöntemler sadece sabit katsayılı durumlarda geçerlidir. Kısmi diferensiyel denklemler için ters problemlerin yaklaşık çözüm yöntemlerinden en kullanışlı olanının operatör yaklaşımı uygulayan sonlu fark yöntemi olduğu bilinmektedir (Kabanikhin, 2011).

Farklı tipteki ters problemlerin; Eidel'man (1991), Dehghan (2001), Romanov vd. (2003), Soloviev (2004), Soloviev (2006), Soloviev (2007), Kabanikhin (2008), Orlovskii (2008), Sakamoto ve Yamamoto (2009), Orlovsky ve Piskarev (2009), Hasanov (2010), Topsakal ve Amirov (2010), Kalmenov ve Shaldanbaev (2010), Ashyralyev ve Erdoğan (2010), Soloviev (2011), Alekseev vd. (2012), Ashyralyev ve Demirdağ (2012), Erdoğan (2012), Erdoğan ve Ashyralyev (2012), Ashyralyev vd. (2012), Erdoğan ve Uygun (2012), Ashyralyev vd. (2012), Aleroev vd. (2013), Qian (2013), Ashyralyev ve Dedetürk (2013), Roberty (2013), Bouzitouna vd. (2013), Orlovsky ve Piskarev (2013), Ashyralyev ve Ağırseven (2014), Ashyralyev ve Ashyralyev (2014), Ashyralyev ve Erdoğan (2014), Ashyralyev ve Urun (2014), Ashyralyev (2014), Ashyralyev ve Dedetürk (2014), Erdoğan ve Ashyralyev (2014), Ashyralyev (2015), Ashyralyev ve Akkan (2015), Ashyralyev ve Dedetürk (2015), Ashyralyev ve Dedetürk (2016), Ashyralyev ve Akyüz (2016), Klivanov ve Romanov (2016), Ashyralyev (2017) ve Ashyralyev'in (2017) çalışmalarında ele alındığı görülmektedir.

Makalelerinde; Ashyralyev ve Dedetürk (2013), Ashyralyev ve Ashyralyev (2014),

Ashyralyyev (2014), Ashyralyyev ve Dedetürk (2014), Ashyralyyev (2014), Ashyralyyev ve Dedetürk (2015), Ashyralyyev ve Dedetürk (2016) hem eliptik denklemler için Dirichlet tipi üstbelirli problemleri, hem de bu problemlerin yaklaşık çözümleri için kararlılık analizlerini araştırmışlardır.

Eliptik denklemler için Neumann tipi üstbelirli problemlerin ise, Ashyralyyev (2014), Ashyralyyev ve Akkan (2015), Ashyralyyev (2015) ve Ashyralyyev'in (2017) makalelerinde incelenmiş olduğu anlaşılmaktadır.

Eliptik denklemler için lokal olmayan sınır değer problemleri ve onların yaklaşık çözümleri için kararlılık analizleri ise, Ashyralyyev (2008), Ashyralyyev ve Öztürk (2011), Ashyralyyev ve Özsenli Tetikoğlu (2011), Ashyralyyev ve Öztürk (2012), Ashyralyyev ve Özsenli Tetikoğlu (2012), Ashyralyyev ve Öztürk (2013), Ashyralyyev ve Özsenli Tetikoğlu (2013), Ashyralyyev ve Öztürk (2014), Ashyralyyev ve Özsenli Tetikoğlu'nun (2014) çalışmalarında yer almaktadır.

Yapılan araştırmalara bakıldığında, eliptik denklemler için Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi lokal olmayan sınır değer problemlerine Öztürk'ün (2013) doktora tezinde de rastlanmıştır. Bu çalışmada direkt problemin çözümü ve yaklaşık fark şemalarının çözümleri için kararlılık kestirimlerinin elde edildiği görülmektedir.

Orlovsky (2013) makalesinde direkt eliptik problemin tersi olmak üzere Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli problemi, Banach uzayında incelemiştir. Bu çalışmada varlık ve teklik teoremleri ele alınmıştır. Ancak burada çözümün kararlılık analizinin yapılmamış olduğu görülmektedir. Yaklaşık çözüm için de kararlılık soruları açıktır. Bu tezde elde edilecek olan sonuçların literatürdeki bu boşluğu doldurması amaçlanmaktadır.

Direkt problem, var olan bir sebepten dolayı ortaya çıkabilecek sonuçların bulunması problemi iken, ters problem ise mevcut sonuçlardan sebebin belirlenmesi problemi olarak ta ifade edilebilir. Matematiksel fizikte, denklem, bölge ve şartlar verildiğinde denklemi ve şartları sağlayan çözümün bulunması problemi, direkt problem olarak adlandırılmaktadır. Ters problem, direkt problemin çözümü hakkında verilen ek bilgi yardımıyla ilgili denklemin katsayılarının belirlenmesi olarak ta tanımlanabilir (Gölgeleyen ve Kaymaz, 2016).

Eliptik denklem için direkt problemler birinci, ikinci ve üçüncü tip sınır değerleri verilerek ele alınır (Dirichlet, Neumann ve Robin). Aslında denklem bir sürecin modellenmesi anlamına gelir. Denkleminde bir şey eksik olduğu durumda ek sınır şartları

koyarız. Bu sefer de yeni bir problem karşımıza çıkar. Bu yeni probleme üst belirlir problem denir (Samarskii ve Vabishchevich, 2007).

İyi tanımlanmış problem kavramı ilk olarak, 1902 yılında Fransız matematikçi J. S. Hadamard tarafından ortaya konmuştur. Q ve F Banach uzayları ve $A:Q \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere,

$$Aq = f$$

denklemini ele alalım. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa, (Q, F) Banach uzay çifti için $Aq = f$ denkleminin *Hadamarda* göre iyi tanımlanmış problem denir.

1. Her $f \in F$ için, $Aq = f$ probleminin Q uzayında bir q_g gerçek çözümü vardır (çözümün varlık koşulu).

2. $Aq = f$ probleminin q_g gerçek çözümü Q uzayında tektir, yani A operatörünün bir $A^{-1}:F \rightarrow Q$ tersi mevcuttur (çözümün teklik koşulu).

3. $Aq = f$ probleminin q_g çözümünün her $O(q_g) \subset Q$ komşuluğu için, sağ taraftaki f 'lerin bir $O(f_g) \subset F$ komşuluğu vardır. Öyle ki, her $f_g \in O(f)$ için, $O(q_g)$ komşuluğuna ait eleman $A^{-1}f_g = q_g$ olarak ifade edilebilir, yani A^{-1} operatörü süreklidir. Problemin verileri F uzayında biraz değişecek olursa, Q uzayında problemin çözümü de değişecektir (çözümün kararlılık koşulu) (Kabanikhin, 2011).

Bu tezdeki amaç eliptik kısmi diferensiyel denklemler için Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli problemin çözümünün ve yaklaşık fark şemalarının çözümünün kararlılık analizini araştırmaktır.

Tezde A operatörü öz-eşlenik (self-adjoint) pozitif tanımlı operatör ve p bilinmeyen eleman olmak üzere,

$$\begin{cases} -v_{tt}(t) + Av(t) = g(t) + p, 0 < t < T, \\ v(0) = \phi, v(T) = \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i) + \eta, v(\gamma) = \zeta, \end{cases}$$

Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli eliptik problemi H Hilbert uzayında geçerlidir. Burada $\phi, \eta, \zeta \in D(A)$ 'dır. Eliptik denklemler için basit lokal sınır değer problemi ilk kez Bitsadze

ve Samarskii tarafından 1969 yılında ifade edilmiştir. Aşağıda yer almakta olan bu şart,

$$v(T) = \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i) + \eta \quad (1.1)$$

Bitsadze-Samarskii şartı olarak adlandırılır. Bu problemi diğer problemlerden farklı kılan husus sınır değerlerinden birinin biliniyor olmasıdır. Diğer sınır değer şartı ise herhangi bir değer ile arasındaki bağıntıyı içermektedir (Öztürk, 2013).

Tez altı bölümden ve eklerden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmı olup, ikinci bölüm ise iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde diferensiyel problemin çözümünün H Hilbert uzayında iyi tanımlılığı gösterilmiştir. Bu alt bölümde problemin çözümü için elde edilen kararlılık ve koersif kararlılık kestirimlerini veren teoremler ispatlarıyla birlikte verilmektedir. İkinci alt bölümde ise soyut problem için elde edilen sonuçlar çok boyutlu kısmi diferensiyel denklemler için Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli Dirichlet ve Neumann sınır değer problemlerine uygulanarak, kararlılık ve koersif kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

Üçüncü bölüm iki alt bölümü içerir. Öncelikle elde edilen özgün önermeler ispatıyla sunulmaktadır. Bu bölümün birinci alt bölümde Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli problemin yaklaşık çözümü için birinci mertebeden doğruluk fark şemasının kurulması ele alınmış olup, problemin çözümü için ise kararlılık, hemen-hemen koersif kararlılık ve koersif kararlılık kestirimlerini içeren teoremler ispatlarıyla verilmiştir. Devamında ikinci alt bölümde ise, Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli problemin yaklaşık çözümü için ikinci mertebeden doğruluk fark şeması oluşturulmuştur. Problemin çözümü için kararlılık, hemen-hemen koersif kararlılık ve koersif kararlılık eşitsizliklerini veren teoremler ispatlarıyla birlikte sunulmaktadır.

Dördüncü bölümde Dirichlet koşullu çok boyutlu üstbelirli eliptik sınır değer problemleri için fark şemaları oluşturulmuştur. Bu bölüm de iki alt bölümden oluşmaktadır. Buradaki birinci alt bölümde çok boyutlu eliptik denklem için Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli Dirichlet sınır değer probleminin birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemaları kurulmuş ve bu doğruluk fark şemalarının çözümü için kararlılık, hemen-hemen koersif kararlılık ve koersif kararlılık kestirimlerini içeren teoremler verilmiştir. İkinci alt bölümde ise çok boyutlu eliptik denklem için Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli Neumann sınır değer probleminin birinci ve ikinci

mertebeden doğruluk fark şemaları kurulmuş ve doğruluk fark şemalarının çözümü için kararlılık, hemen-hemen koersif kararlılık ve koersif kararlılık kestirimleri sunulmuştur.

Beşinci bölüm sayısal örneklerin sonuçlarını içermektedir. Bu bölüm de iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde eliptik denklem için Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli Dirichlet sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemalarının sayısal çözümleri ele alınmıştır. Bu kısımda, bu fark şemalarına üçlü köşegen matrisler için değiştirilmiş Gauss yöntemi (Samarskii ve Nikolaev, 1989) uygulanarak matrislerden oluşan bir lineer sisteme dönüştürülmeleri sağlanmıştır. Bir, iki ve üç noktalı Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli eliptik problemlerin sayısal çözümleri için MATLAB programı kullanılmış olup, elde edilen grafikler ve hata analizini oluşturan tablolar bu kısımda verilmiştir. İkinci alt bölümde ise eliptik denklem için Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli Neumann sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemaları ele alınmıştır. Burada da yukarıda bahsedilen Gauss yöntemi uygulanmış olup; bir, iki ve üç noktalı Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli eliptik problemin sayısal çözümlerini elde etmede ise MATLAB programı kullanılmıştır. Elde edilen grafikler ve hata analizini oluşturan tablolar verilmiştir.

Altıncı ve son bölüm, elde edilen sonuçların sunulduğu bölümdür. Ekler kısmında ise araştırılan problemin, Dirichlet ve Neumann sınır değerli üç noktalı Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli eliptik problemlerin yaklaşık çözümünün birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemalarının sayısal çözümlerinin MATLAB program kodları verilmiştir.

2. DİRİCHLET KOŞULLU BİTSADZE-SAMARSKİİ TİPİ ÜSTBELİRLİ ELİPTİK DİFERENSİYEL PROBLEMİN İYİ TANIMLILIĞI

Öncelikle bu bölümde kullanacağımız bazı önermeler verilecektir. Bu bölümde ve tez boyunca zaman zaman farklılık gösterebilen pozitif sabitler, M ile belirtilecektir. Öte yandan $M(\delta)$ sabitin, sadece δ' ya bağlı olduğu gerçeğine odaklanılarak kullanılacaktır.

Önerme 2.1. $M(B) \in [1, +\infty), \alpha(B) \in (0, +\infty)$ olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır (Ashyralyev ve Sobolevskii, 2004):

$$\begin{aligned} \|\exp(-tB)\|_{H \rightarrow H} &\leq M(B) \exp(-\alpha(B)t), \\ \|tB \exp(-tB)\|_{H \rightarrow H} &\leq M(B) \exp(-\alpha(B)t), (t > 0), \\ \|(I - \exp(-2TB))^{-1}\|_{H \rightarrow H} &\leq M(B)(1 - \exp(-2T\alpha(B)t)). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Önerme 2.2. Herbir $0 \leq t \leq t + \tau \leq T$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ için,

$$\|\exp(-tB) - \exp(-(t + \tau)B)\|_{H \rightarrow H} \leq M \frac{\tau^\alpha}{(t + \tau)^\alpha} \quad (2.2)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada M sabiti, α , t ve τ 'den bağımsızdır (Ashyralyev ve Sobolevskii, 2004).

2.1. Diferensiyel Problemin İyi Tanımlılığı

Keyfi bir H Hilbert uzayında, A öz-eşlenik pozitif tanımlı operatörü verilmiş olsun.

k_i ($i = 1, \dots, q$) parametreleri,

$$k = \sum_{i=1}^q k_i \leq 1 \quad (2.3)$$

koşulunu sağlayan bilinen negatif olmayan reel sayılardır.

A operatorünün pozitif tanımlılığı $\delta > 0$ ve I birim operatör olmak üzere, $A \geq \delta I$ eşitsizliği ile verilir.

Bitsadze-Samarskii tipi ters eliptik problemini ele alalım. Bu problem, bilinmeyen $p \in H$ ve $v \in C^2([0, T], H) \cap C([0, T], D(A))$ fonksiyonunu aşağıdaki diferensiyel denklemden ve sınır şartlarından oluşmaktadır:

$$\begin{cases} -v_{tt}(t) + Av(t) = g(t) + p, 0 < t < T, \\ v(0) = \phi, v(T) = \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i) + \eta, v(\gamma) = \zeta. \end{cases} \quad (2.4)$$

Burada $g(t)$ bilinen düzgün bir fonksiyon, $\phi, \eta, \zeta \in D(A)$ ise H Hilbert uzayının bilinen elemanlarıdır. Ayrıca, k_i ($i = 1, \dots, q$) parametreleri verilen ve (2. 3) koşulunu sağlayan sayılardır. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ sayıları ise, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_q$ özelliğindedir. Üstbelirli (2.4) probleminin sınır şartlarına baktığımızda Dirichlet tipi üstbelirli problem olduğu görülecektir.

Şimdi, $C(H)$ ve $C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)$ Banach uzaylarındaki normu tanımlayalım. $[0, T]$ aralığında tanımlı değerleri H uzayında olan düzgün $v(t)$ fonksiyonunun normları sırasıyla aşağıda tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} \|v\|_{C(H)} &= \max_{0 \leq t \leq T} \|v(t)\|_H, \\ \|v\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} &= \|v\|_{C(H)} + \sup_{0 \leq t < t+\tau \leq T} (t+\tau)^\alpha \tau^{-\alpha} (T-t)^\alpha \|v(t+\tau) - v(t)\|_H. \end{aligned}$$

Öncelikle, (2.4) problemini yardımcı lokal olmayan bir probleme indirgeyelim. (2.4) diferensiyel problemin birinci ve ikinci şartlarında $v(t)$ yerine,

$$v(t) = u(t) + A^{-1}p \quad (2.5)$$

yazarsak, $u(t)$ fonksiyonu için lokal olmayan bir sınır değer problemi elde edilir. (2.5)'den,

$$A^{-1}p = v(\gamma) - u(\gamma) = \zeta - u(\gamma),$$

$$A^{-1}p = v(0) - u(0) = \phi - u(0),$$

$$\zeta - u(\gamma) = \phi - u(0)$$

olduğuna göre,

$$u(0) - u(\gamma) = \phi - \zeta$$

yazılır. Ayrıca,

$$A^{-1}p = v(T) - u(T) = \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i) + \eta - u(T),$$

$$u(T) + A^{-1}p = \sum_{i=1}^q k_i (u(\lambda_i) + A^{-1}p) + \eta,$$

$$u(T) = \sum_{i=1}^q k_i u(\lambda_i) + \left(\sum_{i=1}^q k_i - 1 \right) A^{-1}p + \eta,$$

$$\sum_{i=1}^q k_i = k \leq 1 \text{ ve } A^{-1}p = \phi - u(0),$$

$$u(T) = \sum_{i=1}^q k_i u(\lambda_i) + (k - 1)(\phi - u(0)) + \eta$$

olduğundan,

$$u(T) - \sum_{i=1}^q k_i u(\lambda_i) + (k - 1)u(0) = (k - 1)\phi + \eta$$

elde edilir. Böylece, (2.5) formülünü kullanarak,

$$\begin{cases} -u_{tt}(t) + Au(t) = g(t), 0 < t < T, \\ u(0) - u(\gamma) = \phi - \zeta, 0 < \gamma < T, \\ u(T) - \sum_{i=1}^q k_i u(\lambda_i) + (k - 1)u(0) = (k - 1)\phi + \eta. \end{cases} \quad (2.6)$$

yardımcı lokal olmayan sınır değer problemini ifade edebiliriz.

Bilinmeyen p elemanı ise,

$$p = A\phi - Au(0) \quad (2.7)$$

bağıntısı ile bulunabilir.

Teorem 2.1.1. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayılarının (2.3) koşulunu sağladığını ve $\phi, \zeta, \eta \in D(A)$, $g(t) \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)$ ($0 < \alpha < 1$) olduğunu varsayalım. Bu durumda, (2.4) üstbelirli problemin $(v(t), p)$ çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri geçerlidir:

$$\|v\|_{C(H)} \leq M(\delta) [\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \|g\|_{C(H)}], \quad (2.8)$$

$$\|A^{-1}p\|_H \leq M(\delta) [\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \|g\|_{C(H)}], \quad (2.9)$$

$$\|p\|_H \leq M(\delta) \left[\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \|g\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} \right]. \quad (2.10)$$

Burada $M(\delta)$ sabitleri, verilen ϕ, ζ, η elemanlarından ve $g(t)$ ’den bağımsızdır.

İspat: A pozitif tanımlı ise $B = A^{\frac{1}{2}}$ operatörü de pozitif tanımlıdır. Verilen $u_0, u_T \in H$ için,

$$\begin{cases} -u_{tt}(t) + Au(t) = g(t), 0 < t < T, \\ u(0) = u_0, u(T) = u_T \end{cases} \quad (2.11)$$

direkt probleminin çözümü Ashyralyev ve Sobolevskii (2004) çalışmasında,

$$u(t) = (I - e^{-2TB})^{-1} \left[(e^{-tB} - e^{-(2T-t)B})u(0) + (e^{-(T-t)B} - e^{-(T+t)B})u(T) \right] + G(t) \quad (2.12)$$

formülüyle verilmiştir. Burada;

$$G(t) = -(I - e^{-2TB})^{-1} (e^{-(T-t)B} - e^{-(T+t)B}) (2B)^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) g(s) ds$$

$$+ (2B)^{-1} \int_0^T (e^{-|t-s|B} - e^{-(t+s)B}) g(s) ds.$$

(2.12) formülünü, (2.6) denklem sisteminde kullanarak, bilinmeyen $u(0)$ ve $u(T)$ elemanları için bir denklem sistemi elde edilir. (2.12) formülünü (2.6) lokal olmayan problemin sınır şartlarına uygulayarak,

$$u(0) - (I - e^{-2TB})^{-1} [(e^{-\gamma B} - e^{-(2T-\gamma)B})u(0) + (e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B})u(T)] = \phi - \eta - G(\gamma)$$

elde edilir. Buradan,

$$[(I - e^{-2TB}) - (e^{-\gamma B} - e^{-(2T-\gamma)B})]u(0) - (e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B})u(T) = (I - e^{-2TB})[\phi - \eta - G(\gamma)]$$

olduğu görülür. Benzer şekilde,

$$u(T) - (I - e^{-2TB})^{-1} \sum_{i=1}^q k_i \{ (e^{-\lambda_i B} - e^{-(2T-\lambda_i)B})u(0) + (e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B})u(T) \}$$

$$+ (k-1)u(0) = (k-1)\phi + \zeta - \sum_{i=1}^q k_i G(\lambda_i)$$

olduğuna göre,

$$\left[(I - e^{-2TB})(k-1) - \sum_{i=1}^q k_i (e^{-\lambda_i B} - e^{-(2T-\lambda_i)B}) \right] u(0) + [(I - e^{-2TB})$$

$$- \sum_{i=1}^q k_i (e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B})] u(T) = (I - e^{-2TB}) \left[(k-1)\phi + \eta - \sum_{i=1}^q k_i G(\lambda_i) \right]$$

bulunur. Böylece, bilinmeyen $u(0)$ ve $u(T)$ elemanlar için,

$$\begin{cases} Q_{11}u(0) + Q_{12}u(T) = G_1, \\ Q_{21}u(0) + Q_{22}u(T) = G_2 \end{cases} \quad (2.13)$$

denklem sistemi elde edilir. Burada;

$$\begin{aligned} Q_{11} &= (I - e^{-2TB}) - (e^{-\gamma B} - e^{-(2T-\gamma)B}), \\ Q_{12} &= -(e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B}), \\ G_1 &= (I - e^{-2TB})(\phi - \zeta) + (e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B})(2B)^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})g(s)ds \\ &\quad - (I - e^{-2TB})(2B)^{-1} \int_0^T (e^{-|\gamma-s|B} - e^{-(\gamma+s)B})g(s)ds, \\ Q_{21} &= (I - e^{-2TB})(k-1) - \sum_{i=1}^q k_i (e^{-\lambda_i B} - e^{-(2T-\lambda_i)B}), \\ Q_{22} &= (I - e^{-2TB}) - \sum_{i=1}^q k_i (e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B}), \\ G_2 &= (I - e^{-2TB})(k-1)\phi + \eta - \sum_{i=1}^q k_i \left\{ (e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B})(2B)^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})g(s)ds - (I - e^{-2TB})(2B)^{-1} \int_0^T (e^{-|\lambda_i-s|B} - e^{-(\lambda_i+s)B})g(s)ds \right\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

(2.13) denklem sisteminin çözümünün bulunabilmesi için,

$$\Delta = Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21}$$

determinant operatörünü inceleyelim. Δ operatörü,

$$\Delta = \left[(I - e^{-2TB}) - (e^{-\gamma B} - e^{-(2T-\gamma)B}) \right] \left[(I - e^{-2TB}) - \sum_{i=1}^q k_i (e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B}) \right]$$

$$+ \left[e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B} \left[\sum_{i=1}^q k_i (e^{-\lambda_i B} - e^{-(2T-\lambda_i)B}) + (1-k)(I - e^{-2TB}) \right] \right] \quad (2.14)$$

olarak yazılabilir. Yardımcı lokal olmayan (2.6) sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonu diye adlandırılan

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \left[(1 - e^{-2Tz}) - (e^{-\gamma z} - e^{-(2T-\gamma)z}) \right] \left[(1 - e^{-2Tz}) - \sum_{i=1}^q k_i (e^{-(T-\lambda_i)z} - e^{-(T+\lambda_i)z}) \right] \\ & + \left[e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B} \left[\sum_{i=1}^q k_i (e^{-\lambda_i B} - e^{-(2T-\lambda_i)B}) + (1-k)(I - e^{-2TB}) \right] \right] \end{aligned}$$

fonksiyonunu ele alalım.

$$\begin{aligned} 1 - e^{-2Tz} &= 2e^{-Tz} \frac{e^{Tz} - e^{-Tz}}{2} = 2e^{-Tz} \sinh Tz, \\ e^{-\gamma z} - e^{-(2T-\gamma)z} &= 2e^{-Tz} \frac{e^{(T-\gamma)z} - e^{-(T+\gamma)z}}{2} = 2e^{-Tz} \sinh(T-\gamma)z, \\ e^{-(T-\gamma)z} - e^{-(T+\gamma)z} &= 2e^{-Tz} \frac{e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}}{2} = 2e^{-Tz} \sinh \gamma z \end{aligned}$$

ifadelerini kullanarak, $\Phi(z)$ 'yi yeniden

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= 4e^{-2Tz} (\sinh Tz - \sinh(T-\gamma)z) \left(\sinh Tz - \sum_{i=1}^q k_i \sinh \lambda_i z \right) + 4e^{-2Tz} \sinh \gamma z \\ &\quad \times \left(\sum_{i=1}^q k_i \sinh(T-\lambda_i)z + (1-k) \sinh Tz \right) \\ &= 4e^{-2Tz} \left\{ [\sinh Tz - \sinh(T-\gamma)z] \left[\sinh Tz + \sum_{i=1}^q k_i \sinh \lambda_i z \right] + \sinh \gamma z \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sum_{i=1}^q k_i \sinh(T-\lambda_i)z + (1-k) \sinh Tz \right) \right\} \quad (2.15) \end{aligned}$$

biçiminde yazabiliriz. (2.3) şartından

$$\sinh Tz - \sum_{i=1}^q k_i \sinh \lambda_i z > 0, \forall z > 0 \quad (2.16)$$

ve

$$\sinh Tz - \sinh(T - \gamma)z > 0, \forall z > 0 \quad (2.17)$$

bulunur. Ayrıca pozitif yarı-ekseni üzerinde (2.15) formundaki Φ fonksiyonunun kesin pozitif olduğu görülür. Öte yandan,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z) = 1$$

olur. Dolayısıyla, öz-eşlenik operatörler için, operatör işlemlerini kullanarak Δ operatörünün sınırlı bir Δ^{-1} tersinin var olduğu ve aşağıdaki eşitsizliği sağladığı görülür:

$$\|\Delta^{-1}\|_{H \rightarrow H} \leq \sup_{\frac{1}{\delta^2} \leq z < \infty} \frac{1}{\Phi(z)} \leq M(\delta). \quad (2.18)$$

Sonuçta, (2.13) denklem sisteminin tek çözümü vardır ve

$$\begin{aligned} u(0) &= \Delta^{-1}(Q_{22}G_1 - Q_{12}G_2), \\ u(T) &= \Delta^{-1}(Q_{11}G_2 - Q_{21}G_1) \end{aligned} \quad (2.19)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, lokal olmayan (2.6) probleminin çözümü

$$\begin{aligned} u(t) &= (e^{-tB} - e^{-(2T-t)B})\Delta^{-1} \left\{ \left[(I - e^{-2TB}) - \sum_{i=1}^q k_i (e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B}) \right] \right. \\ &\quad \times \left[\phi - \zeta + (I - e^{-2TB})^{-1} (e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B}) (2B)^{-1} \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) g(s) ds - (2B)^{-1} \int_0^T (e^{-|\gamma-s|B} - e^{-(\gamma+s)B}) g(s) ds \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B} \right] \left[(k-1)\phi + \eta - (2B)^{-1} \sum_{i=1}^q k_i \left((I - e^{-2TB})^{-1} \left(e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B} \right) \right. \right. \\
& \times \left. \left. \int_0^T \left(e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B} \right) g(s) ds - \int_0^T \left(e^{-|\lambda_i-s|B} - e^{-(\lambda_i+s)B} \right) g(s) ds \right) \right] \Bigg\} \\
& + \left(e^{-(T-t)B} - e^{-(T+t)B} \right) \Delta^{-1} \left[\left(I - e^{-2TB} \right) - \left(e^{-\gamma B} - e^{-(2T-\gamma)B} \right) \right] \\
& \times \left[(k-1)\phi + \eta - (2B)^{-1} \sum_{i=1}^q k_i \left((I - e^{-2TB})^{-1} \left(e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B} \right) \right. \right. \\
& \times \left. \left. \int_0^T \left(e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B} \right) g(s) ds - \int_0^T \left(e^{-|\lambda_i-s|B} - e^{-(\lambda_i+s)B} \right) g(s) ds \right) \right] \Bigg\} \\
& - \left[\left(I - e^{-2TB} \right) (k-1) - \sum_{i=1}^q k_i \left(e^{-\lambda_i B} - e^{-(2T-\lambda_i)B} \right) \right] \left[\phi - \zeta + \left(I - e^{-2TB} \right)^{-1} \left(e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B} \right) \right. \\
& \times \left. \left. \int_0^T \left(e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B} \right) g(s) ds - (2B)^{-1} \int_0^T \left(e^{-|\gamma-s|B} - e^{-(\gamma+s)B} \right) g(s) ds \right] \Bigg\} \\
& - \left(I - e^{-2TB} \right)^{-1} \left(e^{-(T-t)B} - e^{-(T+t)B} \right) (2B)^{-1} \int_0^T \left(e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B} \right) g(s) ds \\
& + (2B)^{-1} \int_0^T \left(e^{-|t-s|B} - e^{-(t+s)B} \right) g(s) ds \\
& = J_1(t)(J_3 + J_4) + J_2(t)(J_5 + J_6) + J_7(t)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

şeklindedir. Burada,

$$J_1(t) = \left(e^{-tB} - e^{-(2T-t)B} \right) \Delta^{-1},$$

$$J_2(t) = \left(e^{-(T-t)B} - e^{-(T+t)B} \right) \Delta^{-1},$$

$$\begin{aligned}
J_3 = & \left[\left(I - e^{-2TB} \right) - \sum_{i=1}^q k_i \left(e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B} \right) \right] \left[\phi - \zeta + \left(I - e^{-2TB} \right)^{-1} \left(e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B} \right) \right. \\
& \times \left. \left. (2B)^{-1} \int_0^T \left(e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B} \right) g(s) ds - (2B)^{-1} \int_0^T \left(e^{-|\gamma-s|B} - e^{-(\gamma+s)B} \right) g(s) ds \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_4 &= [e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B}] \left[(k-1)\phi + \eta - \sum_{i=1}^q k_i \left\{ (I - e^{-2TB})^{-1} \left(e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times (2B)^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) g(s) ds - (2B)^{-1} \int_0^T (e^{-|\lambda_i-s|B} - e^{-(\lambda_i+s)B}) g(s) ds \right\} \right], \\
J_5 &= \left[(I - e^{-2TB}) - (e^{-\gamma B} - e^{-(2T-\gamma)B}) \right] \left[(k-1)\phi + \eta - \sum_{i=1}^q k_i \left\{ (I - e^{-2TB})^{-1} \left(e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times (2B)^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) g(s) ds - (2B)^{-1} \int_0^T (e^{-|\lambda_i-s|B} - e^{-(\lambda_i+s)B}) g(s) ds \right\} \right], \\
J_6 &= \left[(I - e^{-2TB}) (k-1) - \sum_{i=1}^q k_i (e^{-\lambda_i B} - e^{-(2T-\lambda_i)B}) \right] \left[\phi - \zeta + (I - e^{-2TB})^{-1} (e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B}) \right. \\
&\quad \left. \times (2B)^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) g(s) ds - (2B)^{-1} \int_0^T (e^{-|\gamma-s|B} - e^{-(\gamma+s)B}) g(s) ds \right], \\
J_7(t) &= -(I - e^{-2TB})^{-1} (e^{-(T-t)B} - e^{-(T+t)B}) (2B)^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) g(s) ds \\
&\quad + (2B)^{-1} \int_0^T (e^{-|t-s|B} - e^{-(t+s)B}) g(s) ds.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla (2.6) probleminin (2.20) ile tanımlanan bir tek $u(t)$ çözümü vardır.

$k = 1, \dots, 7$ için ayrı ayrı $\|J_k\|_H$ kestirimlerini oluşturalım. İlk $\|J_1(t)\|_H$ ve $\|J_2(t)\|_H$ için, Cauchy-Schwarz ve üçgen eşitsizliklerini, ayrıca (2.1) ve (2.18) kestirimlerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\|J_1(t)\|_H &\leq \left(\|e^{-tB}\|_{H \rightarrow H} + \|e^{-(2T-t)B}\|_{H \rightarrow H} \right) \|\Delta^{-1}\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta) \quad \text{ve} \\
\|J_2(t)\|_H &\leq \left(\|e^{-(T-t)B}\|_{H \rightarrow H} + \|e^{-(T+t)B}\|_{H \rightarrow H} \right) \|\Delta^{-1}\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta)
\end{aligned}$$

kestirimleri elde edilir. $\|J_3\|_H$ ve $\|J_4\|_H$ için, Cauchy-Schwarz ve üçgen eşitsizliklerini, ayrıca (2.1) kestirimlerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\|J_3\|_H &\leq \left[\|I - e^{-2TB}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{i=1}^q k_i \|e^{-(T-\lambda_i)B} + e^{-(T+\lambda_i)B}\|_{H \rightarrow H} \right] [\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H \\
&\quad + \|(I - e^{-2TB})^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B}\|_{H \rightarrow H} \|(2B)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|g\|_{C(H)}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^T \left\| e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B} \right\|_{H \rightarrow H} ds + \left\| (2B)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \|g\|_{C(H)} \\
& \times \int_0^T \left\| e^{-|\gamma-s|B} + e^{-(\gamma+s)B} \right\|_{H \rightarrow H} ds \Big] \\
& \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|g\|_{C(H)} \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|J_4\|_H & \leq \left\| e^{-(T-\gamma)B} \right\|_{H \rightarrow H} + \left\| e^{-(T+\gamma)B} \right\|_{H \rightarrow H} \left[(k-1) \|\phi\|_H + \|\eta\|_H \right. \\
& + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left\| (I - e^{-2TB})^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \times \left\| (2B)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \|g\|_{C(H)} \int_0^T \left\| e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B} \right\|_{H \rightarrow H} ds \\
& \left. + \left\| (2B)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \|g\|_{C(H)} \int_0^T \left\| e^{-|\lambda_i-s|B} + e^{-(\lambda_i+s)B} \right\|_{H \rightarrow H} ds \right\} \Big] \\
& \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\eta\|_H + \|g\|_{C(H)} \right]
\end{aligned}$$

kestirimleri ifade edilir. Benzer şekilde, $\|J_5\|_H$ ve $\|J_6\|_H$ için, Cauchy-Schwarz ve üçgen eşitsizliklerini, ayrıca (2.1) kestirimlerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\|J_5\|_H & \leq \left\| I - e^{-2TB} \right\|_{H \rightarrow H} + \left\| e^{-\gamma B} \right\|_{H \rightarrow H} + \left\| e^{-(2T-\gamma)B} \right\|_{H \rightarrow H} \left[(k-1) \|\phi\|_H \right. \\
& + \|\eta\|_H + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \left\| (I - e^{-2TB})^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \times \left\| (2B)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \|g\|_{C(H)} \int_0^T \left\| e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B} \right\|_{H \rightarrow H} ds \\
& \left. + \left\| (2B)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \|g\|_{C(H)} \int_0^T \left\| e^{-|\lambda_i-s|B} + e^{-(\lambda_i+s)B} \right\|_{H \rightarrow H} ds \right\} \Big] \\
& \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\eta\|_H + \|g\|_{C(H)} \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|J_6\|_H &\leq \left[(k-1)\|I - e^{-2TB}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{i=1}^q k_i \|e^{-\lambda_i B} + e^{-(2T-\lambda_i)B}\|_{H \rightarrow H} \right] \|\phi\|_H \\
&\quad + \|\zeta\|_H + \left\| (I - e^{-2TB})^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \|e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B}\|_{H \rightarrow H} \\
&\quad \times \left\| (2B)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \|g\|_{C(H)} \int_0^T \|e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}\|_{H \rightarrow H} ds \\
&\quad + \left\| (2B)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \|g\|_{C(H)} \int_0^T \|e^{-|\gamma-s|B} + e^{-(\gamma+s)B}\|_{H \rightarrow H} ds \Big] \\
&\leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|g\|_{C(H)} \right]
\end{aligned}$$

kestirimleri elde edilir. Son olarak, $\|J_7\|_H$ için, Cauchy-Schwarz ve üçgen eşitsizliklerini, ayrıca (2.1) ve (2.2) eşitsizliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\|J_7(t)\|_H &\leq \left\| (I - e^{-2TB})^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \|e^{-(T-t)B} - e^{-(T+t)B}\|_{H \rightarrow H} \left\| (2B)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \|g\|_{C(H)} \\
&\quad \times \int_0^T \|e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}\|_{H \rightarrow H} ds + \left\| (2B)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \|g\|_{C(H)} \\
&\quad \times \int_0^T \|e^{-|t-s|B} - e^{-(t+s)B}\|_{H \rightarrow H} ds \\
&\leq M \max_{0 \leq t \leq T} \|g(t)\|_H = M(\delta) \|g\|_{C(H)}
\end{aligned}$$

kestirimleri yazılır.

$k = 1, \dots, 7$ için ayrı ayrı $\|J_k\|_H$ kestirimleri birleştirilerek,

$$\|u(t)\|_H \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \|g\|_{C(H)} \right]$$

kararlılık kestirimine sahip olunur. Böylelikle, lokal olmayan (2.6) probleminin çözümü için

$$\|u\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \|g\|_{C(H)} \right] \quad (2.21)$$

kestirimleri elde edilir. Şimdi,

$$A^{-1}p = \phi - u(0)$$

yardımla, (2.7) ve (2.19) formüllerini kullanarak,

$$\begin{aligned} A^{-1}p &= \phi - \Delta^{-1} \left(I - e^{-2TB} \right) \left\{ \left[\left(I - e^{-2TB} \right) - \sum_{i=1}^q k_i \left(e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B} \right) \right] \right. \\ &\quad \times \left[\phi - \zeta + \left(I - e^{-2TB} \right)^{-1} (2B)^{-1} \left\{ e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B} \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \left. \int_0^T \left(e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B} \right) g(s) ds - \int_0^T \left(e^{-|\gamma-s|B} - e^{-(\gamma+s)B} \right) g(s) ds \right\} \right] \\ &\quad + \left[e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B} \right] \left[(k-1)\phi + \eta - \sum_{i=1}^q k_i \left(I - e^{-2TB} \right)^{-1} \right. \\ &\quad \times (2B)^{-1} \left(e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B} \right) \int_0^T \left(e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B} \right) g(s) ds \\ &\quad \left. \left. - \int_0^T \left(e^{-|\lambda_i-s|B} - e^{-(\lambda_i+s)B} \right) g(s) ds \right] \right\} \end{aligned}$$

yazılır. Öz-eşlenik operatörler için operatör işlemlerini, (2.1) kestirimlerini, Cauchy-Schwarz ve üçgen eşitsizliklerini uygulayarak,

$$\begin{aligned} \|A^{-1}p\|_H &\leq \|\phi\|_H + \|\Delta^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|I - e^{-2TB}\|_{H \rightarrow H} \|I - e^{-2TB}\|_{H \rightarrow H} \\ &\quad + \sum_{i=1}^q k_i \|e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B}\|_{H \rightarrow H} \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H \right. \\ &\quad + \left\| \left(I - e^{-2TB} \right)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \|e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B}\|_{H \rightarrow H} \|(2B)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\quad \times \|g\|_{C(H)} \int_0^T \|e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}\|_{H \rightarrow H} ds + \|(2B)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|g\|_{C(H)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^T \left\| e^{-|\gamma-s|B} + e^{-(\gamma+s)B} \right\|_{H \rightarrow H} ds \Bigg] \\
& + \left\| e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B} \right\|_{H \rightarrow H} \left[(k-1) \|\phi\|_H + \|\eta\|_H + \|(2B)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \times \sum_{i=1}^q k_i \left\| (I - e^{-2TB})^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B} \right\|_{H \rightarrow H} \|g\|_{C(H)} \\
& \times \int_0^T \left\| e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B} \right\|_{H \rightarrow H} ds + \|g\|_{C(H)} \int_0^T \left\| e^{-|\lambda_i-s|B} + e^{-(\lambda_i+s)B} \right\|_{H \rightarrow H} ds \Bigg] \Bigg\} \\
& \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \|g\|_{C(H)} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\|A^{-1}p\|_H \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \|g\|_{C(H)} \right]$$

şeklinde (2.9) kararlılık kestirimi ifade edilmiş olur. (2.7) ve (2.19) formüllerini, (2.1) ve (2.2) eşitsizliklerini kullanarak,

$$\|p\|_H \leq M(\delta) \left[\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \|g\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right]$$

kestirimi elde edilir. Son olarak, (2.9) kestirimi ile (2.21) eşitsizliği (2.5) formülüne uygulandığında,

$$\|v\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \|g\|_{C(H)} \right]$$

(2.8) kararlılık kestirimi elde edilir. Sonuç olarak Teorem 2.1.1 ispatlanmış olmaktadır.

Teorem 2.1.2. k_i katsayılarının (2.3) şartını sağladığını ve $\phi, \zeta, \eta \in D(A)$, $g(t) \in C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)$ ($0 < \alpha < 1$) olduğunu varsayalım. Bu durumda, (2.4) probleminin $(v(t), p)$ çözümü aşağıdaki koersif eşitsizliğini sağlar:

$$\begin{aligned} \|v''\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} + \|Av\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} + \|p\|_H &\leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \|g\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} + \|A\phi\|_H \right. \\ &\quad \left. + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Burada $M(\delta)$ sabiti, ϕ, ζ, η ve $g(t)$ 'den bağımsızdır.

İspat: Lokal olmayan (2.6) problemine (2.20) çözümünü uygulayarak,

$$\begin{aligned} Au(t) &= (e^{-tB} - e^{-(2T-t)B})\Delta^{-1} \left\{ \left[(I - e^{-2TB}) - \sum_{i=1}^q k_i (e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B}) \right] [A\phi - A\zeta \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} B \left\{ (I - e^{-2TB})^{-1} (e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B}) \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) g(s) ds \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^T (e^{-|\gamma-s|B} - e^{-(\gamma+s)B}) g(s) ds \right\} \right] + [e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B}] [(k-1)A\phi + A\eta \\ &\quad - \frac{1}{2} B \sum_{i=1}^q k_i \left\{ (I - e^{-2TB})^{-1} (e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B}) \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) g(s) ds \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^T (e^{-|\lambda_i-s|B} - e^{-(\lambda_i+s)B}) g(s) ds \right\} \right] \right\} + (e^{-(T-t)B} - e^{-(T+t)B})\Delta^{-1} \\ &\quad \times \left\{ \left[(I - e^{-2TB}) - (e^{-\gamma B} - e^{-(2T-\gamma)B}) \right] [(k-1)A\phi + A\eta - \frac{1}{2} B \right. \\ &\quad \times \sum_{i=1}^q k_i \left\{ (I - e^{-2TB})^{-1} (e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B}) \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) g(s) ds \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^T (e^{-|\lambda_i-s|B} - e^{-(\lambda_i+s)B}) g(s) ds \right\} \right] + \left[(I - e^{-2TB}) (k-1) - \sum_{i=1}^q k_i e^{-\lambda_i B} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^q k_i e^{-(2T-\lambda_i)B} \right] \left[A\phi - A\zeta + \frac{1}{2} B (I - e^{-2TB})^{-1} (e^{-(T-\gamma)B} - e^{-(T+\gamma)B}) \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) g(s) ds - \frac{1}{2} B \int_0^T (e^{-|\gamma-s|B} - e^{-(\gamma+s)B}) g(s) ds \right] \right\} - (I - e^{-2TB})^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}B\left(e^{-(T-t)B} - e^{-(T+t)B}\right)\int_0^T\left(e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}\right)g(s)ds \\
& +\frac{1}{2}B\int_0^T\left(e^{-|t-s|B} - e^{-(t+s)B}\right)g(s)ds
\end{aligned} \tag{2.23}$$

yazılır. Elde ettiğimiz (2.23) eşitliğine Önerme 2.1 ve Önerme 2.2 ifadelerini ve (2.18) kestirimini uyguladığımızda,

$$\|Au\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \leq M(\delta) \left[\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \|g\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right] \tag{2.24}$$

kestirimi elde edilir. (2.24) ve (2.10) eşitsizliklerini (2.5) formülüne uygulayarak,

$$\|Av\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \leq M(\delta) \left[\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \|g\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right] \tag{2.25}$$

eşitsizliğine sahip olunur. Böylece, elde edilen son eşitsizlikten ve (2.4) problemine üçgen eşitsizliği uygulanarak,

$$\|v''\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \leq M(\delta) \left[\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \|g\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right] \tag{2.26}$$

elde edilir. Böylece (2.25), (2.26) ve (2.10) eşitsizliklerinden (2.22) kestirimi elde edilir. Bu da Teorem 2.1.2'nin ispatını tamamlar.

2.2. Soyut Problemin Uygulamaları

Bu bölümde, önce elde edilen soyut sonuçlar, çok boyutlu kısmi diferensiyel denklemler için Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli Dirichlet ve Neumann sınır değer problemlerine uygulanacaktır. n -boyutlu R_n Öklid uzayında sınırı $S = \partial\Omega$ olmak üzere, $\Omega = (0, l)^n$ bir açık küp olsun. Ω kümesinin kapanışı $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ 'dır. $a_r(x), \phi(x), \eta(x), \zeta(x)$ ($x \in \overline{\Omega}$) ve $g(t, x)$ ($t \in (0, T), x \in \Omega$) bilinen düzgün fonksiyonlar,

$0 \leq \lambda_i \leq 1$, $0 \leq \gamma \leq T$, $k_1, k_2, \dots, k_q$ bilinen katsayılar, ayrıca $a_r(x) \geq a > 0$ ($x \in \Omega$) olduğunu kabul edelim.

$H = L_2(\bar{\Omega})$ Hilbert uzayı, $\bar{\Omega}$ kümesinde tanımlanan tüm karesi integrallenebilen fonksiyonlardan oluşur ve her $u \in L_2(\bar{\Omega})$ için norm,

$$\|u\|_{L_2(\bar{\Omega})} = \left\{ \int_{x \in \bar{\Omega}} \dots \int |u(x)|^2 dx_1 \dots dx_n \right\}^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır. $W_2^2(\bar{\Omega})$ Hilbert uzayı ise $\bar{\Omega}$ kümesinde ikinci mertebeden kısmi türevleri mevcut ve karesi integrallenebilen fonksiyonlardan oluşur ve her $u \in W_2^2(\bar{\Omega})$ için norm,

$$\|u\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} = \left\{ \int_{x \in \bar{\Omega}} \dots \int \left(|u(x)|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| u_{x_i x_j}(x) \right|^2 \right) dx_1 \dots dx_n \right\}^{1/2}$$

biçiminde tanımlanır.

$C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_2(\bar{\Omega}))$ ($0 < \alpha < 1$) Banach uzayı, $[0, T]$ üzerinde tanımlı ve $L_2(\bar{\Omega})$ değerli tüm düzgün v fonksiyonlarından oluşur, normu ise,

$$\|v\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_2(\bar{\Omega}))} = \|v\|_{C(L_2(\bar{\Omega}))} + \sup_{0 \leq t < t+\tau \leq T} (t+\tau)^\alpha \tau^{-\alpha} (T-t)^\alpha \|v(t+\tau) - v(t)\|_{L_2(\bar{\Omega})}$$

şeklinde tanımlanır.

İlk önce, $[0, T] \times \Omega$ bölgesinde, aşağıdaki çok boyutlu eliptik kısmi diferensiyel denklem için Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli ve Dirichlet sınır değer problemini ele alalım.

$$\begin{cases} -v_{tt}(t, x) - \sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} + \sigma v(x) = g(t, x) + p(x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, 0 < t < T, \\ v(0, x) = \phi(x), v(T, x) - \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i, x) = \eta(x), x \in \bar{\Omega}, \\ v(\gamma, x) = \zeta(x), x \in \bar{\Omega}, 0 < \gamma < T, \\ v(t, x) = 0, x \in S. \end{cases} \quad (2.27)$$

(2.27) problemindeki $k_1, k_2, \dots, k_q$ katsayılarının (2.3) şartını sağladığını varsayalım. $\sigma > 0$ olmak üzere, (2.27) probleminin diferensiyel operatörü,

$$A^x v = - \sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} + \sigma v(x) \quad (2.28)$$

şeklindedir. Tanım bölgesi,

$$D(A^x) = \{v(x) \in L_2(\bar{\Omega}), v(x) = 0, x \in S\}$$

olan $L_2(\bar{\Omega})$ uzayından $L_2(\bar{\Omega})$ uzayına bir operatör olmak üzere (2.28) ile tanımlanan A^x operatörü öz-eşlenik pozitif tanımlıdır. Bu nedenle, (2.27) ters problemi $H = L_2(\bar{\Omega})$ Hilbert uzayında, (2.4) soyut sınır değer problemine dönüştürülebilir. Dolayısıyla, (2.4) soyut sınır değer problemi için verilen Teorem 2.1.1 ve 2.1.2 uygulanarak, Dirichlet sınır koşullu (2.27) üstbelirli eliptik probleminin çözümünün kararlılığıyla ilgili aşağıdaki sonuçlar ifade edilebilir.

Teorem 2.2.1 k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayılarının (2.3) koşulunu sağladığını ve $\phi, \zeta, \eta \in D(A^x)$ ve $g \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_2(\bar{\Omega}))$ ($0 < \alpha < 1$) olduğunu varsayalım. Bu durumda, (2.27) üstbelirli problemin (v, p) çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri geçerlidir:

$$\|v\|_{C(L_2(\bar{\Omega}))} \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\zeta\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\eta\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|g\|_{C(L_2(\bar{\Omega}))} \right], \quad (2.29)$$

$$\|(A^x)^{-1}p\|_{L_2(\bar{\Omega})} \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\zeta\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\eta\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|g\|_{C(L_2(\bar{\Omega}))} \right], \quad (2.30)$$

$$\|p\|_{L_2(\bar{\Omega})} \leq M(\delta) \left[\|A\phi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|A\zeta\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|A\eta\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \|g\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(L_2(\bar{\Omega}))} \right]. \quad (2.31)$$

Burada $M(\delta)$ sabitleri, verilen ϕ, ζ, η elemanlarından ve $g(t)$ ’den bağımsızdır.

Teorem 2.2.2. k_i ($i=1, \dots, q$) katsayıları (2.3) şartını sağlasın ve $\phi, \zeta, \eta \in D(A^x)$ ve $g \in C_{0T}^{\alpha,\alpha}(L_2(\bar{\Omega}))$ ($0 < \alpha < 1$) verilsin. Öyleyse (2.27) üstbelirli probleminin (v, p) çözümü aşağıdaki koersif eşitsizliğini sağlar:

$$\begin{aligned} & \|v''\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(L_2(\bar{\Omega}))} + \|v\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(W_2^2(\bar{\Omega}))} + \|p\|_{L_2(\bar{\Omega})} \\ & \leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \|g\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(L_2(\bar{\Omega}))} + \|A\phi\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} + \|A\zeta\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} + \|A\eta\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Burada $M(\delta)$ sabiti, ϕ, ζ, η ve g ’den bağımsızdır.

İkinci olarak, $[0, T] \times \Omega$ bölgesinde aşağıdaki çok boyutlu eliptik diferensiyel denklem için Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli ve Neumann sınır değer problemini ele alalım.

$$\begin{cases} -v_{tt}(t, x) - \sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} + \sigma v(t, x) = g(t, x) + p(x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, 0 < t < T, \\ v(0, x) = \phi(x), v(T, x) - \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i, x) = \eta(x), x \in \bar{\Omega}, \\ v(\gamma, x) = \zeta(x), x \in \bar{\Omega}, 0 < \gamma < T, \\ \frac{\partial v(t, x)}{\partial \bar{n}} = 0, x \in S, 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (2.33)$$

(2.33) problemindeki $k_1, k_2, \dots, k_q$ katsayıları (2.3) şartını sağlasın. $\sigma > 0$ olmak üzere,

(2.33) probleminin diferensiyel operatörü, (2.28) şeklinde tanımlanır. Tanım bölgesi,

$$D(A^x) = \left\{ v(x) \in L_2(\bar{\Omega}), S \text{ üzerinde } \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0 \right\}$$

olan $L_2(\bar{\Omega})$ uzayından $L_2(\bar{\Omega})$ uzayına bir operatör olmak üzere (2.28) ile tanımlanan A^x operatörünün öz-eşlenik pozitif tanımlı olduğu açıktır. Böylece, (2.33) problemi $H = L_2(\bar{\Omega})$ Hilbert uzayında (2.4) soyut sınır değer problemine dönüştürülebilir. Dolayısıyla, (2.4) soyut sınır değer problemi için verilen Teorem 2.1.1 ve 2.1.2 uygulanarak, Neumann sınır koşullu (2.33) üstbelirli eliptik probleminin çözümünün kararlılığıyla ilgili aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

Teorem 2.2.3. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayılarının (2.3) koşulunu sağladığını, $\phi, \zeta, \eta \in D(A^x)$ ve $g \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_2(\bar{\Omega}))$ ($0 < \alpha < 1$) olduğunu varsayalım. O halde, (2.33) üstbelirli problemin (v, p) çözümü için (2.29), (2.30) ve (2.31) kararlılık kestirimleri geçerlidir.

Teorem 2.2.4. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayıları (2.3) şartını sağlasın ve $\phi, \zeta, \eta \in D(A^x)$, $g \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_2(\bar{\Omega}))$ ($0 < \alpha < 1$) olsun. Bu durumda, (2.33) üstbelirli probleminin (v, p) çözümü (2.32) koersif eşitsizliğini sağlar.

3. SOYUT PROBLEM İÇİN FARK ŞEMALARI

Bu bölümde (2.4) probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemaları kurulmuştur.

Eğer bir A operatörü H Hilbert uzayında sınırlı ve öz-eşlenik pozitif tanımlı ise, her bir $\tau > 0$ için $B = \frac{1}{2}(\tau A + \sqrt{4A + \tau^2 A^2})$ ve $R = (I + \tau B)^{-1}$ operatörleri de sınırlı ve öz-eşlenik pozitif tanımlı operatörlerdir (Krein, 1966).

Şimdi ileride kulanacağımız önermeleri verelim. Öncelikle, $[\cdot]$ en büyük tam sayı fonksiyonunun notasyonu olmak üzere,

$$s = \left\lceil \frac{\gamma}{\tau} \right\rceil, l_i = \left\lceil \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rceil, \mu_0 = \frac{\gamma}{\tau} - s \text{ ve } \mu_i = \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i, i = 1, \dots, q$$

notasyonlarını kabul edelim.

Önerme 3.1. Aşağıdaki kestirimler sağlanır (Ashyralyev ve Sobolevskii, 2004):

$$\begin{aligned} \|R^i\|_{H \rightarrow H} &\leq M(1 + \delta^{1/2} \tau)^{-i}, \delta > 0, \\ \|BR^i\|_{H \rightarrow H} &\leq \frac{M}{i\tau}, i = 1, 2, \dots, N, \\ \|(I - R^{2N})^{-1}\|_{H \rightarrow H} &\leq M(\delta). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Önerme 3.2. $1 \leq l_i \leq N-1$, $1 \leq s \leq N-1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= [I - R^{2N} - R^s + R^{2N-s} \left[I - R^{2N} - \sum_{i=1}^q k_i (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) \right] - [R^{N-s} - R^{N+s}] \\ &\quad \times \left[\sum_{i=1}^q k_i (R^{l_i} - R^{2N-l_i}) \right] \end{aligned}$$

olsun. O halde Δ_1 operatorünün Δ_1^{-1} tersi vardır ve

$$\left\| \Delta_1^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta) \quad (3.2)$$

kestirimi geçerlidir.

İspat: İlk önce Δ_1 operatörünün,

$$\Delta_1 = (I - R^{2N})(I - R^s) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} \right) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-(s-l_i)} \right)$$

olduğunu gösterelim. Operatörü,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= [I - R^{2N} - R^s + R^{2N-s}] \left[I - R^{2N} - \sum_{i=1}^q k_i (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) \right] - [R^{N-s} - R^{N+s}] \\ &\quad \times \left[\sum_{i=1}^q k_i (R^{l_i} - R^{2N-l_i}) \right] \\ &= \psi_1 \psi_2 - \psi_3 \end{aligned}$$

şeklinde yazalım. Şimdi Δ_1 operatörü çarpanlarına ayrılacaktır. Öncelikle ψ_1 operatörünü çarpanlarına ayıralım. Yani,

$$\psi_1 = I - R^{2N} - R^s + R^{2N-s} = I - R^s + R^{2N-s} (I - R^s) = (I - R^s) (I + R^{2N-s})$$

Öztürk (2013) tarafından ψ_2 operatörünün tersinin varlığı ve onun için kestirimi gösterilmiştir. Ayrıca, ψ_2 için, (2.3) şartından $\sum_{i=1}^q k_i = 1$ olduğundan $R^{2N} = \sum_{i=1}^q k_i R^{2N}$ şeklinde yazılabilir. Böylece,

$$\psi_2 = \left[I - R^{2N} - \sum_{i=1}^q k_i (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) \right] = I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} + \sum_{i=1}^q k_i R^{N+l_i} - \sum_{i=1}^q k_i R^{2N}$$

$$= I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} + \sum_{i=1}^q k_i R^{N+l_i} \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} \right) = \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} \right) \left(I + \sum_{i=1}^q k_i R^{N+l_i} \right)$$

elde edilir. ψ_3 operatörü için ise,

$$\begin{aligned} \psi_3 &= \left[R^{N-s} - R^{N+s} \left[\sum_{i=1}^q k_i \left(R^{l_i} - R^{2N-l_i} \right) \right] \right] = R^{N-s} \left(I - R^{2s} \right) \sum_{i=1}^q k_i R^{l_i} \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{2(N-l_i)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^q k_i R^{N-s+l_i} \left(I - R^s \right) \left(I + R^s \right) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} \right) \left(I + \sum_{i=1}^q k_i R^{N+l_i} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Δ_1 için,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left(I - R^s \right) \left(I + R^{2N-s} \right) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} \right) \left(I + \sum_{i=1}^q k_i R^{N+l_i} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-s+l_i} \left(I - R^s \right) \left(I + R^s \right) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} \right) \left(I + \sum_{i=1}^q k_i R^{N+l_i} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Ortak çarpanlar parantez dışına alınarak Δ_1 için,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left(I - R^s \right) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} \right) \left[\left(I + R^{2N-s} \right) \left(I + \sum_{i=1}^q k_i R^{N+l_i} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-s+l_i} \left(I + R^s \right) \left(I + \sum_{i=1}^q k_i R^{N+l_i} \right) \right] \\ &= \psi_4 \psi_5 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde, ψ_5 için,

$$\begin{aligned} \psi_5 &= \left(I + R^{2N-s} \right) \left(I + \sum_{i=1}^q k_i R^{N+l_i} \right) - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-s+l_i} \left(I + R^s \right) \left(I + \sum_{i=1}^q k_i R^{N+l_i} \right) \\ &= I + \sum_{i=1}^q k_i R^{N+l_i} + R^{2N-s} + \sum_{i=1}^q k_i R^{3N-s+l_i} - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-s+l_i} - R^{2N-s} - \sum_{i=1}^q k_i R^{N+l_i} - R^{2N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= I - R^{2N} + \sum_{i=1}^q k_i R^{3N-s+l_i} - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-s+l_i} = I - R^{2N} - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-s+l_i} (I - R^{2N}) \\
&= (I - R^{2N}) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-s+l_i} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak, Δ_1 için,

$$\Delta_1 = (I - R^s) (I - R^{2N}) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} \right) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-s+l_i} \right)$$

bulunur.

Δ_1 operatorünün,

$$\begin{aligned}
\Delta_1^{-1} &= (I - R^{2N})^{-1} (I - R^s)^{-1} \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} \right)^{-1} \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-(s-l_i)} \right)^{-1} \\
&= L_1 L_2 L_3 L_4
\end{aligned}$$

tersinin var olması için,

$$\begin{aligned}
\|\Delta_1^{-1}\|_{H \rightarrow H} &= \|(I - R^{2N})^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|(I - R^s)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\| \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} \right)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \\
&\quad \left\| \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-(s-l_i)} \right)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H}
\end{aligned}$$

sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Önerme 3.1'deki kestirimlerden,

$$\|L_1\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta), \|L_2\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta)$$

olduğu görülür. L_3 için,

$$\|L_3\|_{H \rightarrow H} = \left\| \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} \right)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \leq \sup_{\delta \leq \lambda \leq \infty} \left| \frac{1}{1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^q k_i \left(1 + \frac{\tau^2 \lambda}{2} + \sqrt{\tau^2 \lambda + \frac{\tau^4 \lambda^2}{4}} \right)^{N-l_i}}} \right|.$$

$(1+x)^n \geq 1+nx$ şeklindeki Bernulli eşitsizliği kullanarak,

$$\begin{aligned} \|L_3\|_{H \rightarrow H} &\leq \sup_{\delta \leq \lambda \leq \infty} \left| \frac{1}{1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^q k_i \left(1 + (N-l_i) \left(\frac{\tau^2 \lambda}{2} + \sqrt{\tau^2 \lambda + \frac{\tau^4 \lambda^2}{4}} \right) \right)}} \right| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \delta^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1 + \delta^{1/2}}{\delta^{1/2}} \\ &\leq M(\delta) \end{aligned}$$

yazılır. L_4 için Bernulli eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|L_4\|_{H \rightarrow H} &= \left\| \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-(s-l_i)} \right)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \leq \sup_{\delta \leq \lambda \leq \infty} \left| \frac{1}{1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^q k_i \left(1 + \frac{\tau^2 \lambda}{2} + \sqrt{\tau^2 \lambda + \frac{\tau^4 \lambda^2}{4}} \right)^{N-(s+l_i)}}} \right| \\ \|L_4\|_{H \rightarrow H} &\leq \sup_{\delta \leq \lambda \leq \infty} \left| \frac{1}{1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^q k_i \left(1 + (N-(s+l_i)) \left(\frac{\tau^2 \lambda}{2} + \sqrt{\tau^2 \lambda + \frac{\tau^4 \lambda^2}{4}} \right) \right)}} \right| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \delta^{1/2}}} = \frac{1 + \delta^{1/2}}{\delta^{1/2}} \\ &\leq M(\delta) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Δ_1^{-1} sınırlı olduğu, yani,

$$\|\Delta_1^{-1}\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür ki, bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3.3. $1 \leq l_i \leq N-1, 1 \leq s \leq N-1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & \left(I - R^{2N} \right) \left(I - R^s \right) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} \right) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_0+l_i} \right) + \left(I - R^{2N} \right) \left(\mu_0 \right. \\ & \times \left[\left(R^s - R^{2N-s} \right) - \left(R^{s+1} - R^{2N-s-1} \right) \right] + \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left[R^{N-l_i} - R^{N+l_i} - R^{N-l_i-1} \right. \\ & \left. + R^{N+l_i+1} \right] + \mu_0 \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) \left(R^{N-(s-l_i)-1} - R^{N+(s-l_i)+1} \right) + (\mu_0 - 1) \\ & \times \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left(R^{N-(s-l_i)-1} - R^{N+(s-l_i)+1} \right) + \mu_0 \sum_{i=1}^q k_i \left(R^{N-(s-l_i)} - R^{N+(s-l_i)} \right) \\ & \left. - 2\mu_0 \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left(R^{N-(s-l_i)} - R^{N+(s-l_i)} \right) + \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left(R^{N-(s-l_i)} - R^{N+(s-l_i)} \right) \right\} \end{aligned}$$

operatörünün Δ_2^{-1} tersi vardır ve

$$\|\Delta_2^{-1}\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta) \tag{3.3}$$

kestirimi geçerlidir. Burada M , τ 'den bağımsızdır.

İspat: K operatörü,

$$K = - \left(I - R^{2N} \right) \left\{ \mu_0 \left[\left(R^s - R^{2N-s} \right) - \left(R^{s+1} - R^{2N-s-1} \right) \right] + \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left(R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left(R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1} \right) + \mu_0 \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) \left(R^{N-(s-l_i)-1} - R^{N+(s-l_i)+1} \right) \\
& + (\mu_0 - 1) \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left(R^{N-(s-l_i-1)} - R^{N+(s-l_i-1)} \right) + \mu_0 \sum_{i=1}^q k_i \left(R^{N-(s-l_i)} - R^{N+(s-l_i)} \right) \\
& - 2\mu_0 \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left(R^{N-(s-l_i)} - R^{N+(s-l_i)} \right) + \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left(R^{N-(s-l_i)} - R^{N+(s-l_i)} \right) \Big\}
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\Delta_2^{-1} - \Delta_1^{-1} = \Delta_2^{-1} \Delta_1^{-1} K \quad (3.4)$$

yazılabilir. (3.1) kestirimlerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\|K\|_{H \rightarrow H} & \leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \left\{ \mu_0 \left[\|R^s - R^{2N-s}\|_{H \rightarrow H} + \|R^{s+1} - R^{2N-s-1}\|_{H \rightarrow H} \right] \right. \\
& + \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_i| \sum_{i=1}^q k_i \left[\|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} + \|R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \right] \\
& + |\mu_0| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_i - 1| \sum_{i=1}^q k_i \left[\|R^{N-(s-l_i)-1} - R^{N+(s-l_i)+1}\|_{H \rightarrow H} \right] \\
& + |\mu_0 - 1| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_i| \sum_{i=1}^q k_i \left[\|R^{N-(s-l_i-1)} - R^{N+(s-l_i-1)}\|_{H \rightarrow H} \right] \\
& + |\mu_0| \sum_{i=1}^q k_i \left[\|R^{N-(s-l_i)} - R^{N+(s-l_i)}\|_{H \rightarrow H} \right] \\
& - 2|\mu_0| \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_i| \sum_{i=1}^q k_i \left[\|R^{N-(s-l_i)} - R^{N+(s-l_i)}\|_{H \rightarrow H} \right] \\
& + \max_{1 \leq i \leq q} |\mu_i| \sum_{i=1}^q k_i \left[\|R^{N-(s-l_i)} - R^{N+(s-l_i)}\|_{H \rightarrow H} \right] \Big\} \\
& \leq M_1 \tau \quad (3.5)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada M_1, τ 'den bağımsızdır. Ayrıca Δ_1^{-1} operatörünün

$$\Delta_1^{-1} = \left(I - R^{2N}\right)^{-1} \left(I - R^s\right)^{-1} \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i}\right)^{-1} \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-(s-l_i)}\right)^{-1}$$

olduğu açıktır. Üçgen eşitsizliğinden, (3.4) formülünden ve (3.2) ile (3.5) kestirimlerini kullanarak yeterince küçük pozitif τ için,

$$\begin{aligned} \|\Delta_2^{-1}\|_{H \rightarrow H} &= \|\Delta_1^{-1}\|_{H \rightarrow H} + \|\Delta_2^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|\Delta_1^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|K\|_{H \rightarrow H} \\ &\leq M + \|\Delta_2^{-1}\|_{H \rightarrow H} MM\tau \end{aligned} \quad (3.6)$$

elde edilir. Buradan da (3.3) kestirimi elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar.

3.1. Birinci Mertebeden Doğruluk Fark Şeması

$v(\gamma)$ ve $v(\lambda)$ için aşağıdaki birinci mertebeden yaklaşım formüllerini

$$v(\gamma) = v\left(\left[\frac{\gamma}{\tau}\right]\tau\right) + o(\tau) = v_s + o(\tau), \quad v(\lambda) = v\left(\left[\frac{\lambda}{\tau}\right]\tau\right) + o(\tau) = v_l + o(\tau)$$

uygulayarak ve

$$k = \sum_{i=1}^q k_i = 1 \quad (3.7)$$

olduğunu kullanarak, üstbelirli (2.4) ters probleminin birinci mertebeden doğruluk fark şeması

$$\begin{cases} -\tau^{-2}(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) + Av_k = \theta_k + p, \theta_k = g(t_k), \\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = T, \\ v_0 = \phi, v_s = \zeta, v_N = \sum_{i=1}^q k_i v_{l_i} + \eta, \end{cases} \quad (3.8)$$

şeklinde oluşturulur. Burada, $[\cdot]$ en büyük tam sayı fonksiyonunun notasyonu olmak

üzere, $s = \begin{bmatrix} \gamma \\ \tau \end{bmatrix}$, $l_i = \begin{bmatrix} \lambda_i \\ \tau \end{bmatrix}$ şeklindedir.

(3.8) birinci mertebeden doğruluk fark şemasını göz önüne alarak, bu fark probleminin v_k çözümü için,

$$v_k = u_k + A^{-1}p \quad (3.9)$$

formülünü ve (3.7) ifadesini kullanarak u_k için,

$$\begin{cases} -\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + Au_k = \theta_k, 1 \leq k \leq N-1, \\ u_0 - u_s = \phi - \zeta, \\ u_N - \sum_{i=1}^q k_i u_{li} = \eta \end{cases} \quad (3.10)$$

şeklinde yardımcı lokal olmayan fark problemi elde edilir.

Yardımcı lokal olmayan fark problemi çözüldükten sonra p elemanı,

$$p = A\phi - Au_0 \quad (3.11)$$

formülü ile bulunabilir.

Teorem 3.1.1. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayılarının (2.3) koşulunu sağladığını ve $\phi, \zeta, \eta \in D(A)$,

$\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)$ ($0 < \alpha < 1$) olduğunu varsayalım. O halde, (3.8) fark probleminin

$(\{v_k\}_{k=1}^{N-1}, p)$ çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri sağlanır:

$$\|\{v_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right], \quad (3.12)$$

$$\|A^{-1}p\|_H \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right], \quad (3.13)$$

$$\|p\|_H \leq M(\delta) \left[\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right]. \quad (3.14)$$

Burada $M(\delta)$ sabitleri, verilen $\alpha, \phi, \zeta, \eta$ elemanlarından ve $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}$ 'den bağımsızdır.

İspat:

$$\begin{cases} -\tau^2(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + Au_k = \theta_k, 1 \leq k \leq N-1, \\ u_0 \text{ ve } u_N \text{ verilmiştir} \end{cases} \quad (3.15)$$

direkt probleminin çözümü Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) çalışmasında,

$$\begin{aligned} u_k &= (I - R^{2N})^{-1} \left[(R^k - R^{2N-k})u_0 + (R^{N-k} - R^{N+k})u_N - (R^{N-k} - R^{N+k})(I + \tau B) \right. \\ &\quad \times (2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j})\theta_j \tau \left. + (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \right. \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|k-j|} - R^{k+j})\theta_j \tau \end{aligned}$$

formülüyle ifade edilmiştir. Burada, A operatörü H Hilbert uzayında sınırlı ve

öz-eşlenik pozitif tanımlı olmak üzere $B = \frac{1}{2} \left(\tau A + \sqrt{4A + \tau^2 A^2} \right)$ ve $R = (I + \tau B)^{-1}$

operatörleri de sınırlı ve öz-eşlenik pozitif tanımlı operatörlerdir (Krein, 1966).

$P = (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1}$ notasyonunu kullanarak bu formülü yeniden,

$$\begin{aligned} u_k &= (I - R^{2N})^{-1} \left[(R^k - R^{2N-k})u_0 + (R^{N-k} - R^{N+k})u_N - (R^{N-k} - R^{N+k})P \right. \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j})\theta_j \tau \left. + P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|k-j|} - R^{k+j})\theta_j \tau, \right. \\ &\quad k = 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.16)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.10) fark probleminin sınır şartlarına (3.16) formülü uygulanarak,

$$u_0 = (I - R^{2N})^{-1} \left[(R^s - R^{2N-s})u_0 + (R^{N-s} - R^{N+s})u_N - (R^{N-s} - R^{N+s})P \right. \\ \left. \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j})\theta_j \tau \right] + P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|s-j|} - R^{s+j})\theta_j \tau + (\phi - \zeta)$$

elde edilir. Buradan,

$$(I - R^{2N} - R^s + R^{2N-s})u_0 - (R^{N-s} - R^{N+s})u_N = F_1$$

bulunur. Burada,

$$F_1 = (I - R^{2N})(\phi - \zeta) + (R^{N-s} - R^{N+s})P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j})\theta_j \tau - (I - R^{2N})P \\ \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|s-j|} - R^{s+j})\theta_j \tau.$$

Benzer şekilde,

$$u_N = (I - R^{2N})^{-1} \left[\sum_{i=1}^q k_i (R^{l_i} - R^{2N-l_i})u_0 + \sum_{i=1}^q k_i (R^{N-l_i} - R^{N+l_i})u_N \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^q k_i (R^{N-l_i} - R^{N+l_i})P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j})\theta_j \tau \right] \\ + P \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{N-1} k_i (R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j})\theta_j \tau + \eta$$

olduğundan,

$$- \sum_{i=1}^q k_i (R^{l_i} - R^{2N-l_i})u_0 + \left(I - R^{2N} - \sum_{i=1}^q k_i (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) \right) u_N = F_2$$

bulunur. Burada,

$$F_2 = (I - R^{2N})\eta + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau - (I - R^{2N}) P \right. \\ \left. \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j}) \theta_j \tau \right\}.$$

Böylece, bilinmeyen u_0 ve u_N elemanları için,

$$a_{11} = I - R^{2N} - R^s + R^{2N-s}, a_{12} = -(R^{N-s} - R^{N+s}), \\ a_{21} = -\sum_{i=1}^q k_i (R^{l_i} - R^{2N-l_i}), a_{22} = I - R^{2N} - \sum_{i=1}^q k_i (R^{N-l_i} - R^{N+l_i})$$

olmak üzere,

$$\begin{cases} a_{11}u_0 + a_{12}u_N = F_1, \\ a_{21}u_0 + a_{22}u_N = F_2 \end{cases} \quad (3.17)$$

denklem sistemi yazılır. (3.17) denklem sisteminin çözümünün bulunabilmesi için,

$$\Delta_1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

operatörünün tersinin var olması ve sınırlı olması yeterlidir. Önerme 3.2'den Δ_1 operatörünün

$$\Delta_1^{-1} = (I - R^{2N})^{-1} (I - R^s)^{-1} \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} \right)^{-1} \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-(s-l_i)} \right)^{-1}$$

tersinin varlığını ve sınırlı olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, (3.17) denklem sisteminin çözümü vardır ve tektir. Bu durumda,

$$u_0 = \Delta_1^{-1} (a_{22}F_1 - a_{12}F_2),$$

$$u_N = \Delta_1^{-1}(a_{11}F_2 - a_{21}F_1)$$

şeklinde yazılır. Sonuçta,

$$\begin{aligned} u_0 = & \Delta_1^{-1} \left(I - R^{2N} - \sum_{i=1}^q k_i (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) \right) \left[(I - R^{2N}) (\phi - \zeta) + (R^{N-s} - R^{N+s}) \right. \\ & \times P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau - (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|s-j|} - R^{s+j}) \theta_j \tau \left. \right] \\ & + \Delta_1^{-1} (R^{N-s} - R^{N+s}) \left[(I - R^{2N}) \eta \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau - (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j}) \theta_j \tau \right\} \right] \quad (3.18) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} u_N = & \Delta_1^{-1} (I - R^{2N} - R^s + R^{2N-s}) \left[(I - R^{2N}) \eta + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) P \right. \right. \\ & \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau - (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j}) \theta_j \tau \left. \left. \right\} \right] \\ & + \Delta_1^{-1} \sum_{i=1}^q k_i (R^{l_i} - R^{2N-l_i}) \left[(I - R^{2N}) (\phi - \zeta) + (R^{N-s} - R^{N+s}) P \right. \\ & \left. \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau - (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|s-j|} - R^{s+j}) \theta_j \tau \right] \quad (3.19) \end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle (3.10) fark problemi (3.16), (3.18) ve (3.19) formülleriyle tanımlanan tek bir $\{u_k\}_{k=0}^N$ çözümüne sahiptir.

(3.15) direkt probleminin çözümü için Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) çalışmasında,

$$\left\| \{u_k\}_{k=0}^{N-1} \right\|_{C(H)} \leq M \left[\left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} + \|Ru_0\|_H + \|Ru_N\|_H \right] \quad (3.20)$$

kestirimi geçerli olduğu gösterilmiştir.

Öncelikle, üçgen, Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini ve (3.1) kestirimlerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\|F_1\|_{C(H)} &\leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \times (\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H) + \|R^{N-s} - R^{N+s}\|_{H \rightarrow H} \|P\|_{H \rightarrow H} \\
&\times \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \\
&\times \|P\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{|s-j|} - R^{s+j}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \\
&\leq M(\delta)(\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|F_2\|_{C(H)} &\leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|\eta\|_H + \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} \|P\|_{H \rightarrow H} \right. \\
&\times \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} - \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \\
&\times \|P\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j}\|_{H \rightarrow H} \left. \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right\} \\
&\leq M(\delta)(\|\eta\|_H + \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)})
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini (3.18) ve (3.19) formüllerine uygulayarak, ayrıca (3.1) ve (3.2) kestirimlerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\|Ru_0\|_H &\leq \|\Delta_1^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left[\|R\|_{H \rightarrow H} \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \right] \\
&\times \|F_1\|_{C(H)} + \|\Delta_1^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left(\|R^{N-s+1}\|_{H \rightarrow H} + \|R^{N+s+1}\|_{H \rightarrow H} \right) \|F_2\|_{C(H)} \\
&\leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|Ru_N\|_H &\leq \|\Delta_1^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\| R \right\|_{H \rightarrow H} \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} + \left\| R^{s+1} - R^{2N-s+1} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| F_2 \right\|_{C(H)} \\
&\quad + \|\Delta_1^{-1}\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i \left\| R^{l_i+1} - R^{2N-l_i+1} \right\|_{H \rightarrow H} \left\| F_1 \right\|_{C(H)} \\
&\leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.20) eşitsizliği kullanılarak,

$$\left\| \{u_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right] \quad (3.21)$$

yazılabilir. Şimdi (3.11) ve (3.18) formülleri ve

$$A^{-1}p = \phi - u_0$$

kullanılarak,

$$A^{-1}p = \phi - \Delta_1^{-1} \left\{ \left(I - R^{2N} - \sum_{i=1}^q k_i (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) \right) F_1 + (R^{N-s} - R^{N+s}) F_2 \right\}$$

elde edilir. Öz-eşlenik operatörler için operatör işlemlerini, üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini uygulayarak, (3.13) kararlılık kestirimini

$$\|A^{-1}p\|_H \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right]$$

ifade edebiliriz. Son olarak (3.11) ve (3.18) formüllerinin yardımıyla

$$\|p\|_H \leq M(\delta) \left[\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right]$$

(3.14) kararlılık kestirimi elde edilir. (3.13) kestirimi ile (3.21) eşitsizliğini, (3.9) formülüne uygulayarak,

$$\|\{v_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right]$$

(3.12) kararlılık kestirimi bulunur. Böylece Teorem 3.1.1. ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.2. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayıları (2.3) koşulunu sağlasın ve $\phi, \zeta, \eta \in D(A)$, $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)$ ($0 < \alpha < 1$) olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.8) fark probleminin $(\{v_k\}_{k=1}^{N-1}, p)$ çözümü, aşağıdaki hemen-hemen koersif eşitsizliğini sağlar:

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \frac{(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}))}{\tau^2} \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} + \|\{Av_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} + \|p\|_H \\ & \leq M(\delta) \left\{ \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H + \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \left| \ln \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \right| \right] \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Burada $M(\delta)$ sabiti, verilen $\tau, \alpha, \phi, \zeta, \eta$ elemanlarına ve $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}$, ya bağımlı değildir.

İspat: (3.15) direkt probleminin çözümü için,

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \frac{(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}))}{\tau^2} \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} + \|\{Au_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \\ & \leq M(\delta) \left\{ \|Au_0\|_H + \|Au_N\|_H + \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \left| \ln \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \right| \right] \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

eşitsizliğin geçerliliği Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) çalışmasında ispatlanmıştır.

(3.1) ve (3.2) kestirimleri, Öztürk'ün (2013) çalışmasında elde edilen

$$\sum_{j=1}^{N-1} \|(I - R)R^{j-1}\|_{H \rightarrow H} \leq M \min \left\{ \ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \tau \left| \ln \|B\|_{H \rightarrow H} \right| \right\} \quad (3.24)$$

kestirimini ve (3.18) ve (3.19) formüllerini kullanarak lokal olmayan (3.10) fark probleminin çözümü için,

$$\begin{aligned} & \|Au_0\|_H + \|Au_N\|_H \leq M(\delta) \left(\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right. \\ & \left. + \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \left| \ln \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \right| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right) \end{aligned}$$

kestirimi elde edilmelidir. Bunun için (3.18) ve (3.19) formülleri kullanılarak ve $A = B^2$ eşitliğinden,

$$Au_0 = \Delta_1^{-1} \left\{ \left(I - R^{2N} - \sum_{i=1}^q k_i (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) \right) AF_1 + (R^{N-s} - R^{N+s}) AF_2 \right\}$$

ve

$$Au_N = \Delta_1^{-1} \left\{ (I - R^{2N} - R^s + R^{2N-s}) AF_2 + \sum_{i=1}^q k_i (R^{l_i} - R^{2N-l_i}) AF_1 \right\}$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$\begin{aligned} AF_1 &= (I - R^{2N}) (A\phi - A\zeta) + (R^{N-s} - R^{N+s}) (I + \tau B) (2I + \tau B)^{-1} \\ &\quad \times \tau B \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j - (I - R^{2N}) (I + \tau B) (2I + \tau B)^{-1} \\ &\quad \times \tau B \left(\sum_{j=1}^{s-1} R^{s-j} \theta_j + \sum_{j=s}^{N-1} R^{j-s} \theta_j - \sum_{j=1}^{N-1} R^{s+j} \theta_j \right) \end{aligned}$$

ve

$$AF_2 = (I - R^{2N}) A\eta + (I + \tau B) (2I + \tau B)^{-1} \sum_{i=1}^q k_i \left(R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right)$$

$$\begin{aligned} & \times \tau B \left(\sum_{j=1}^{N-1} R^{N-j} \theta_j - \sum_{j=1}^{N-1} R^{N+j} \theta_j \right) - (I - R^{2N}) \tau B \\ & \times \left(\sum_{j=1}^{i-1} R^{l_i-j} \theta_j + \sum_{j=i}^{N-1} R^{j-l_i} \theta_j - \sum_{i=1}^{N-1} R^{l_i+j} \theta_j \right) \Big\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Öncelikle $\tau B = (I - R)R^{-1}$ olduğundan, öz-eşlenik operatörler için operatör işlemlerini, üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini uygulayarak $\|AF_1\|_{C(H)}$ için,

$$\begin{aligned} \|AF_1\|_{C(H)} & \leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} (\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H) + \|R^{N-s} - R^{N+s}\|_{H \rightarrow H} \\ & \times \|(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\|(I - R)R^{N-j-1}\|_{H \rightarrow H} \right. \\ & \left. + \|(I - R)R^{N+j-1}\|_{H \rightarrow H} \right) \|\theta_j\|_H + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \\ & \times \|(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{j=1}^{s-1} \|(I - R)R^{s-j-1}\|_{H \rightarrow H} \|\theta_j\|_H + \sum_{j=s}^{N-1} \|(I - R)R^{j-s-1}\|_{H \rightarrow H} \right. \\ & \left. \times \|\theta_j\|_H + \sum_{j=1}^{N-1} \|(I - R)R^{s+j-1}\|_{H \rightarrow H} \|\theta_j\|_H \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1) ve (3.24) kestirimlerinden,

$$\|AF_1\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \min \left\{ \ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \left| \ln \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \right| \right\} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right]$$

bulunur. Benzer şekilde $\|AF_2\|_{C(H)}$ için,

$$\begin{aligned} \|AF_2\|_{C(H)} & \leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|A\eta\|_H + \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} \|(I + \tau B)\|_{H \rightarrow H} \\ & \times \|(2I + \tau B)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\|(I - R)R^{N-j-1}\|_{H \rightarrow H} + \|(I - R)R^{N+j-1}\|_{H \rightarrow H} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \|\theta_j\|_H + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \left(\sum_{j=1}^{i-1} \|(I - R)R^{l_i - j - 1}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=i}^{N-1} \|(I - R)R^{j - l_i - 1}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{N-1} \|(I - R)R^{l_i + j - 1}\|_{H \rightarrow H} \right) \|\theta_j\|_H
\end{aligned}$$

yazılabilir. (3.1) ve (3.24) kestirimlerinden,

$$\|AF_2\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|A\eta\|_H + \min \left\{ \ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \left| \ln \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \right| \right\} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right]$$

elde edilir. Öz-eşlenik operatörler için operatör işlemlerini, üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini uygulayarak $\|Au_0\|_H$ ve $\|Au_N\|_H$ için,

$$\begin{aligned}
\|Au_0\|_H & \leq \|\Delta_1^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left[\left(\|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} \right) \|AF_1\|_{C(H)} \right. \\
& \left. + \|R^{N-s} - R^{N+s}\|_{H \rightarrow H} \|AF_2\|_{C(H)} \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|Au_N\|_H & \leq \|\Delta_1^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left[\|I - R^{2N} - R^s + R^{2N-s}\|_{H \rightarrow H} \|AF_2\|_{C(H)} \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^q k_i \|R^{l_i} - R^{2N-l_i}\|_{H \rightarrow H} \|AF_1\|_{C(H)} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (3.1), (3.2) kestirimlerini, (2.3) şartını ve $\|AF_1\|_{C(H)}, \|AF_2\|_{C(H)}$ için elde edilen eşitsizlikleri de kullanarak, istenilen

$$\|Au_0\|_H + \|Au_N\|_H \leq M(\delta) (\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H)$$

$$+ \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \left| \ln \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \right| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right\}$$

kestirimi ifade edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \left\| \{Au_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} &\leq M(\delta) \left\| A\phi \right\|_H + \left\| A\zeta \right\|_H + \left\| A\eta \right\|_H \\ &+ \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \left| \ln \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \right| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

elde edilir. Böylece (3.10) yardımcı lokal olmayan problemine üçgen eşitsizliği uygulanarak (3.23) eşitsizliği elde edilir.

Daha sonra,

$$p = A\phi - Au_0$$

şeklindeki bağıntısına $\|Au_0\|_H$ için elde edilen kestirimi ve üçgen eşitsizliği uygulanarak $\|p\|_H$ için,

$$\|p\|_H \leq M(\delta) \left\| A\phi \right\|_H + \left\| A\zeta \right\|_H + \left\| A\eta \right\|_H + \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \left| \ln \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \right| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \quad (3.26)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.9) formülüne, (3.25) ve (3.26) kestirimleri uygulanarak,

$$\begin{aligned} \left\| \{Av_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} &\leq M(\delta) \left\| A\phi \right\|_H + \left\| A\zeta \right\|_H + \left\| A\eta \right\|_H \\ &+ \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \left| \ln \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \right| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir. Böylece (3.8) fark problemine üçgen eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned}
\left\| \left\{ \frac{(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}))}{\tau^2} \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} &\leq M(\delta) (\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \\
&+ \min \left[\ln\left(\frac{1}{\tau}\right), 1 + \left\| \ln \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \right\| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \} \quad (3.28)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak, üçgen eşitsizliğinden, (3.28), (3.27) ve (3.26) kestirimlerinden (3.22) elde edilir. Böylece Teorem 3.1.2 ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.3. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayılarının (2.3) koşulunu sağladığını ve $\phi, \zeta, \eta \in D(A)$, $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)$ ($0 < \alpha < 1$) olduğunu varsayalım. O halde, (3.8) fark probleminin $(\{v_k\}_{k=1}^{N-1}, p)$ çözümü için aşağıdaki koersif kararlılık kestirimleri geçerlidir:

$$\begin{aligned}
&\left\| \{\tau^{-2}(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}))\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \left\| \{Av_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \|p\|_H \\
&\leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right]. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Burada $M(\delta)$ sabiti, verilen $\tau, \alpha, \phi, \zeta, \eta$ elemanlarından ve $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}$ 'dan bağımsızdır.

İspat: (3.15) direkt probleminin çözümü için, Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) çalışmasında,

$$\begin{aligned}
&\left\| \{\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}))\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} \\
&\leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \|Au_0\|_H + \|Au_N\|_H \right]
\end{aligned}$$

kestiriminin doğruluğu gösterilmiştir. (3.10) fark probleminin çözümü için (3.18) ve (3.19) formülünü uygulayarak,

$$Au_0 = \Delta_1^{-1} \left\{ \left(I - R^{2N} - \sum_{i=1}^q k_i (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) \right) AF_1 + (R^{N-s} - R^{N+s}) AF_2 \right\}$$

ve

$$Au_N = \Delta_1^{-1} \left\{ (I - R^{2N} - R^s + R^{2N-s})AF_2 + \sum_{i=1}^q k_i (R^{l_i} - R^{2N-l_i})AF_1 \right\}$$

elde edilir. Öncelikle $A = B^2, P = (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1}B^{-1}$ eşitliklerinden, öz-eşlenik operatörler için operatör işlemlerini, üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini uygulayarak $\|AF_1\|_{C(H)}$ ve $\|AF_2\|_{C(H)}$ için,

$$\begin{aligned} \|AF_1\|_{C(H)} &\leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} (\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H) + \|(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1}B\|_{H \rightarrow H} \\ &\quad \times \left\{ \|R^{N-s} - R^{N+s}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right. \\ &\quad \left. + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{|s-j|} - R^{s+j}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|AF_2\|_{C(H)} &\leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|A\eta\|_H + \|(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1}B\|_{H \rightarrow H} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^q k_i \left\{ \|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right. \\ &\quad \left. + \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.1) kestirimlerinden ve (2.3) şartından

$$\|AF_1\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left(\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right)$$

ve

$$\|AF_2\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left(\|A\eta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right)$$

eşitsizlikleri yazılır. Daha sonra üçgen eşitsizliği kullanılarak $\|Au_0\|_H$ ve $\|Au_N\|_H$ için,

$$\begin{aligned} \|Au_0\|_H &\leq \|\Delta_1^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\{ \left[\|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{i=1}^q k_i \|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} \right] \|AF_1\|_{C(H)} \right. \\ &\quad \left. + \|R^{N-s} - R^{N+s}\|_{H \rightarrow H} \|AF_2\|_{C(H)} \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|Au_N\|_H &\leq \|\Delta_1^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\{ \left[\|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} + \|R^{s+1} - R^{2N-s+1}\|_{H \rightarrow H} \right] \|AF_2\|_{C(H)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^q k_i \|R^{l_i+1} - R^{2N-l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \|AF_1\|_{C(H)} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler kullanılarak,

$$\begin{aligned} &\left\| \tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)}^{N-1} \\ &\leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} + \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right] \end{aligned}$$

elde edilir. (3.10) yardımcı lokal olmayan fark problemine üçgen eşitsizliği uygulanarak aşağıdaki

$$\begin{aligned} \|\{Au_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} &\leq M(\delta) \left[\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

kestirimi elde edilir. (3.9) formülüne, (3.30) ve (3.14) kestirimlerini uygulanarak,

$$\begin{aligned} \left\| \{Av_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} &\leq M(\delta) \left[\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

eşitsizliği bulunur. (3.8) fark problemine üçgen eşitsizliği uygulanarak,

$$\begin{aligned} &\left\| \{\tau^{-2}(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1})\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \\ &\leq M(\delta) \left[\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

kestirimi elde edilir. Böylece (3.32), (3.31) ve (3.14) kestirimlerinden,

$$\begin{aligned} &\left\| \{\tau^{-2}(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1})\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} + \left\| \{Av_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} + \|p\|_H \\ &\leq M \left[\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right] \end{aligned}$$

(3.29) kestirimi elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar.

3.2. İkinci Mertebeden Doğruluk Fark Şeması

Bu bölümde (2.4) probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için ikinci mertebeden doğruluk fark şeması oluşturulacaktır.

$v(\gamma)$ ve $v(\lambda)$ için aşağıdaki ikinci mertebeden yaklaşım formüllerini,

$$\begin{aligned} v(\gamma) &= v\left(\left[\frac{\gamma}{\tau}\right]\tau\right) + \left[v\left(\left[\frac{\gamma}{\tau}\right]\tau + \tau\right) v\left(\left[\frac{\gamma}{\tau}\right]\tau\right) \right] \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left[\frac{\gamma}{\tau}\right]\right) + o(\tau^2) \\ &= v_s + (v_{s+1} - v_s) \left(\frac{\gamma}{\tau} - s\right) + o(\tau^2), \\ v(\lambda) &= v\left(\left[\frac{\lambda}{\tau}\right]\tau\right) + \left[v\left(\left[\frac{\lambda}{\tau}\right]\tau + \tau\right) v\left(\left[\frac{\lambda}{\tau}\right]\tau\right) \right] \left(\frac{\lambda}{\tau} - \left[\frac{\lambda}{\tau}\right]\right) + o(\tau^2) \end{aligned}$$

$$= v_l + (v_{l+1} - v_l) \left(\frac{\lambda}{\tau} - l \right) + o(\tau^2)$$

uygulayarak, (3.7) olmak üzere, üstbelirli (2.4) ters probleminin ikinci mertebeden doğruluk fark şeması,

$$\begin{cases} -\tau^{-2}(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) + Av_k = \theta_k + p, \theta_k = g(t_k), \\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = T, \\ v_0 = \phi, v_s + (v_{s+1} - v_s) \left(\frac{\gamma}{\tau} - s \right) = \zeta, \\ v_N = \sum_{i=1}^q k_i \left[v_{l_i} + (v_{l_i+1} - v_{l_i}) \left(\frac{\lambda_i}{\tau} - l_i \right) \right] + \eta. \end{cases} \quad (3.33)$$

şeklinde oluşturulur. Burada $[\cdot]$ en büyük tam sayı fonksiyonunun notasyonu olmak üzere,

$$s = \left[\frac{\gamma}{\tau} \right], \quad l_i = \left[\frac{\lambda_i}{\tau} \right], \quad \frac{\gamma}{\tau} - s = \mu_0, \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i = \mu_i, i = 1, \dots, q \text{ olduğu kabul edilir.}$$

(3.9) formülünü ve (3.7) şartını kullanarak, yardımcı lokal olmayan

$$\begin{cases} -\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + Au_k = \theta_k, 1 \leq k \leq N-1, \\ u_0 - u_s - \mu_0 u_{s+1} + \mu_0 u_s = \phi - \zeta, \\ u_N - \sum_{i=1}^q k_i (u_{l_i} + \mu_i u_{l_i+1}) + \sum_{i=1}^q k_i \mu_i u_{l_i} = \eta. \end{cases}$$

fark problemine indirgeyelim. u_k lokal olmayan

$$\begin{cases} -\tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + Au_k = \theta_k, 1 \leq k \leq N-1, \\ u_0 + (\mu_0 - 1)u_s - \mu_0 u_{s+1} = \phi - \zeta, \\ u_N + \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1)u_{l_i} - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i u_{l_i+1} = \eta. \end{cases} \quad (3.34)$$

şeklindeki fark probleminin çözümüdür.

Teorem 3.2.1. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayılarının (2.3) koşulunu sağladığını ve $\phi, \zeta, \eta \in D(A)$, $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)$ ($0 < \alpha < 1$) olduğunu varsayalım. Bu takdirde, (3.33) fark probleminin $(\{v_k\}_{k=1}^{N-1}, p)$ çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri geçerlidir:

$$\|\{v_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right], \quad (3.35)$$

$$\|A^{-1}p\|_H \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right] \quad (3.36)$$

$$\|p\|_H \leq M(\delta) \left[\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} \right]. \quad (3.37)$$

Burada $M(\delta)$ sabitleri, verilen $\alpha, \phi, \zeta, \eta$ elemanlarından ve $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}$ 'dan bağımsızdır.

İspat: Önerme 3.3'den Δ_2 operatörünün,

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & (I - R^{2N}) \left(I - R^s \right) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} \right) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_0+l_i} \right) + (I - R^{2N}) \mu_0 \\ & \times \left[(R^s - R^{2N-s}) - (R^{s+1} - R^{2N-s-1}) \right] + \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left[R^{N-l_i} - R^{N+l_i} - R^{N-l_i-1} \right. \\ & \left. + R^{N+l_i+1} \right] + \mu_0 \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) \left(R^{N-(s-l_i)-1} - R^{N+(s-l_i)+1} \right) + (\mu_0 - 1) \\ & \times \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left(R^{N-(s-l_i)-1} - R^{N+(s-l_i)-1} \right) + \mu_0 \sum_{i=1}^q k_i \left(R^{N-(s-l_i)} - R^{N+(s-l_i)} \right) \\ & - 2\mu_0 \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left(R^{N-(s-l_i)} - R^{N+(s-l_i)} \right) + \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left(R^{N-(s-l_i)} - R^{N+(s-l_i)} \right) \Big\} \end{aligned}$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Δ_2 'nin bir ters operatörü mevcut ve sınırlı olup, aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned}
\Delta_2^{-1} = & \left[(I - R^{2N}) (I - R^s) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_i} \right) \left(I - \sum_{i=1}^q k_i R^{N-l_0+l_i} \right) + (I - R^{2N}) \left\{ \mu_0 \right. \right. \\
& \times \left[(R^s - R^{2N-s}) - (R^{s+1} - R^{2N-s-1}) \right] + \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left[R^{N-l_i} - R^{N+l_i} - R^{N-l_i-1} \right. \\
& \left. \left. + R^{N+l_i+1} \right] + \mu_0 \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) (R^{N-(s-l_i)-1} - R^{N+(s-l_i)+1}) + (\mu_0 - 1) \right. \\
& \times \sum_{i=1}^q k_i \mu_i (R^{N-(s-l_i)-1} - R^{N+(s-l_i)+1}) + \mu_0 \sum_{i=1}^q k_i (R^{N-(s-l_i)} - R^{N+(s-l_i)}) \\
& \left. \left. - 2\mu_0 \sum_{i=1}^q k_i \mu_i (R^{N-(s-l_i)} - R^{N+(s-l_i)}) + \sum_{i=1}^q k_i \mu_i (R^{N-(s-l_i)} - R^{N+(s-l_i)}) \right\} \right]^{-1}.
\end{aligned}$$

(3.16) formülünü, (3.34) fark probleminin sınır şartlarına uygulayarak,

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[I - R^{2N} + (\mu_0 - 1) (R^s - R^{2N-s}) - \mu_0 (R^{s+1} - R^{2N-s-1}) \right] \mu_0 \\ & + \left[(\mu_0 - 1) (R^{N-s} - R^{N+s}) - \mu_0 (R^{N-s-1} - R^{N+s+1}) \right] \mu_N = F_3, \\ & \left[\sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) (R^{l_i} - R^{2N-l_i}) - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i (R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1}) \right] u_0 \\ & + \left[I - R^{2N} + \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) \right] u_N = F_4 \end{aligned} \right.$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
F_3 = & (I - R^{2N}) (\phi - \zeta) + (\mu_0 - 1) \left\{ (R^{N-s} - R^{N+s}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau \right. \\
& \left. - (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|s-j|} - R^{s+j}) \theta_j \tau \right\} \\
& - \mu_0 \left\{ (R^{N-s-1} - R^{N+s+1}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau - (I - R^{2N}) P \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|s+1-j|} - R^{s+j+1} \right) \theta_j \tau \Big\}, \\
F_4 = & \left(I - R^{2N} \right) \eta - \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) \left\{ \left(R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau \right. \\
& \left. - \left(I - R^{2N} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j} \right) \theta_j \tau \right\} \\
& - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left\{ \left(R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i+1} \right) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau - \left(I - R^{2N} \right) P \right. \\
& \left. \times \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_i+1-j|} - R^{l_i+j+1} \right) \theta_j \tau \right\}
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Böylece,

$$\begin{aligned}
b_{11} &= I - R^{2N} + (\mu_0 - 1) \left(R^s - R^{2N-s} \right) - \mu_0 \left(R^{s+1} - R^{2N-s-1} \right), \\
b_{12} &= (\mu_0 - 1) \left(R^{N-s} - R^{N+s} \right) - \mu_0 \left(R^{N-s-1} - R^{N+s+1} \right), \\
b_{21} &= \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) \left(R^{l_i} - R^{2N-l_i} \right) - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left(R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1} \right), \\
b_{22} &= I - R^{2N} + \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) \left(R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right) - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left(R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1} \right)
\end{aligned}$$

olmak üzere bilinmeyen u_0 ve u_N elemanları için,

$$\begin{cases} b_{11}u_0 + b_{12}u_N = F_3, \\ b_{21}u_0 + b_{22}u_N = F_4 \end{cases} \quad (3.38)$$

denklem sistemi ifade edilir. (3.38) denklem sisteminin çözümünün var olması için,

$$\Delta_2 = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

operatörünün tersinin varlığı ve sınırlı olduğu Önerme 3.3’de ispatlanmıştır. Bu nedenle (3.38) denklem sisteminin çözümü vardır ve tekdir. Bununla birlikte,

$$u_0 = \Delta_2^{-1}(b_{22}F_3 - b_{12}F_4),$$

$$u_N = \Delta_2^{-1}(b_{11}F_4 - b_{21}F_3)$$

şeklinde yazılır. Sonuçta,

$$\begin{aligned}
u_0 = \Delta_2^{-1} & \left\{ \left(I - R^{2N} + \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) \right) \right. \\
& \times \left[(I - R^{2N}) (\phi - \zeta) + (\mu_0 - 1) \left\{ (R^{N-s} - R^{N+s}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau \right. \right. \\
& \left. \left. - (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|s-j|} - R^{s+j}) \theta_j \tau \right\} - \mu_0 \left\{ (R^{N-s-1} - R^{N+s+1}) P \right. \right. \\
& \left. \left. \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau - (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|s+1-j|} - R^{s+j+1}) \theta_j \tau \right\} \right] \\
& - [(\mu_0 - 1) (R^{N-s} - R^{N+s}) - \mu_0 (R^{N-s-1} - R^{N+s+1})] (I - R^{2N}) \eta \\
& - \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) \left\{ (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau - (I - R^{2N}) P \right. \\
& \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j}) \theta_j \tau \left. \right\} - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left\{ (R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i+1}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \right. \\
& \times \theta_j \tau - (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_i+1-j|} - R^{l_i+j+1}) \theta_j \tau \left. \right\} \Bigg\} \tag{3.39}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
u_N = \Delta_2^{-1} & \left\{ [I - R^{2N} + (\mu_0 - 1) (R^s - R^{2N-s}) - \mu_0 (R^{s+1} - R^{2N-s-1})] (I - R^{2N}) \eta \right. \\
& - \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) \left\{ (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau - (I - R^{2N}) P \right. \\
& \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j}) \theta_j \tau \left. \right\} - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left\{ (R^{N-l_i+1} - R^{N+l_i+1}) P \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j} \right) \theta_j \tau - (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|l_i+1-j|} - R^{l_i+j+1} \right) \theta_j \tau \Bigg\} \\
& - \left(\sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) (R^{l_i} - R^{2N-l_i}) - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i (R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1}) \right) \\
& \times \left[(I - R^{2N}) (\phi - \zeta) + (\mu_0 - 1) \left\{ (R^{N-s} - R^{N+s}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau \right. \right. \\
& \left. \left. - (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|s-j|} - R^{s+j}) \theta_j \tau \right\} \right. \\
& \left. - \mu_0 \left\{ (R^{N-s-1} - R^{N+s+1}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \tau - (I - R^{2N}) P \right. \right. \\
& \left. \left. \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|s+1-j|} - R^{s+j+1}) \theta_j \tau \right\} \right] \Bigg\} \tag{3.40}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu nedenle (3.34) fark problemi, (3.16), (3.39) ve (3.40) formülleriyle tanımlanan tek bir $\{u_k\}_{k=0}^N$ çözümüne sahiptir.

Şimdi F_3 ve F_4 ifadeleri için kestirimleri belirleyelim. (3.15) direkt probleminin çözümü için (3.20) kestirimi geçerlidir (Ashyralyev ve Sobolevskii, 2004). İlk önce, üçgen, Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini ve (3.1) kestirimlerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\|F_3\|_{C(H)} & \leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} (\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H) + |\mu_0 - 1| \|P\|_{H \rightarrow H} \|R^{N-s} - R^{N+s}\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} - \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{|s-j|} - R^{s+j}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \Bigg\} - |\mu_0| \|P\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \left\{ \|R^{N-s-1} - R^{N+s+1}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j-1} - R^{N+j-1}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right. \\
& \left. - \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{|s+1-j|} - R^{s+j+1}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right\} \\
& \leq M(\delta) \left(\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|F_4\|_{C(H)} &\leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|\eta\|_H + \sum_{i=1}^q k_i |\mu_i - 1| \|P\|_{H \rightarrow H} \left\{ \|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} \right. \\
&\quad \times \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \\
&\quad \left. - \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^q k_i |\mu_i| \|P\|_{H \rightarrow H} \left\{ \|R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right. \\
&\quad \times \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} - \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \\
&\quad \times \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{|l_i+1-j|} - R^{l_i+j+1}\|_{H \rightarrow H} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \left. \right\} \\
&\leq M(\delta) \left(\|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right)
\end{aligned}$$

yazılır. Üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini (3.18) ve (3.19) formülerine uygulayarak, ayrıca (3.1) ve (3.3) kestirimlerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\|Ru_0\|_H &\leq \|R\|_{H \rightarrow H} \|\Delta_2^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\{ \left(\|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{i=1}^q k_i |\mu_i - 1| \|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{i=1}^q k_i |\mu_i| \left(\|R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \right) \right\} \|F_3\|_{C(H)} \\
&\quad - \left(|\mu_0 - 1| \|R^{N-s} - R^{N+s}\|_{H \rightarrow H} - |\mu_0| \|R^{N-s-1} - R^{N+s+1}\|_{H \rightarrow H} \right) \|F_4\|_{C(H)} \left. \right\} \\
&\leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|Ru_N\|_H &\leq \|R\|_{H \rightarrow H} \|\Delta_2^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\{ \left(\|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_0 - 1| \|R^s - R^{2N-s}\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - |\mu_0| \|R^{s+1} - R^{2N-s-1}\|_{H \rightarrow H} \right) \|F_4\|_{C(H)} - \left[\sum_{i=1}^q k_i |\mu_i - 1| \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\| R^{l_i} - R^{2N-l_i} \right\|_{H \rightarrow H} - \sum_{i=1}^q k_i |\mu_i| \left(\left\| R^{l_i+1} \right\|_{H \rightarrow H} - \left\| R^{2N-l_i-1} \right\|_{H \rightarrow H} \right) \left\| F_3 \right\|_{C(H)} \Big\} \\ & \leq M(\delta) \left[\left\| \phi \right\|_H + \left\| \zeta \right\|_H + \left\| \eta \right\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle, (3.20) eşitsizliğini kullanarak,

$$\left\| \{u_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\left\| \phi \right\|_H + \left\| \zeta \right\|_H + \left\| \eta \right\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right]$$

yazılabilir. Şimdi (3.11) ve (3.39) formüllerini ve

$$A^{-1}p = \phi - u_0$$

bağıntısını kullanarak,

$$\begin{aligned} A^{-1}p &= \phi - \Delta_2^{-1} \left\{ \left(I - R^{2N} + \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) \right) F_3 \right. \\ & \quad \left. - ((\mu_0 - 1)(R^{N-s} - R^{N+s}) - \mu_0(R^{N-s-1} - R^{N+s+1})) F_4 \right\} \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Öz-eşlenik operatörler için operatör işlemlerini, Cauchy-Schwarz ve üçgen eşitsizliklerini uygulayarak,

$$\left\| A^{-1}p \right\|_H \leq M(\delta) \left[\left\| \phi \right\|_H + \left\| \zeta \right\|_H + \left\| \eta \right\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right]$$

yazılır ki, bu da (3.36) kararlılık kestiriminin doğruluğunu gösterir. Son olarak, (3.11) ve (3.39) formüllerini kullanarak,

$$\left\| p \right\|_H \leq M(\delta) \left[\left\| A\phi \right\|_H + \left\| A\zeta \right\|_H + \left\| A\eta \right\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right]$$

kararlılık kestirimi elde edilir. (3.36) kestirimi ile (3.21) eşitsizliğini (3.9) formülüne uygulayarak,

$$\left\| \{v_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|\phi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\eta\|_H + \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right]$$

şeklindeki (3.35) kararlılık kestirimi bulunur. Böylece Teorem 3.2.1. ispatlanmış olur.

Teorem 3.2.2. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayıları için (2.3) koşulunu sağladığını ve $\phi, \zeta, \eta \in D(A)$, $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)$ ($0 < \alpha < 1$) olduğunu varsayalım. Bu takdirde, (3.33) fark probleminin $(\{v_k\}_{k=1}^{N-1}, p)$ çözümü aşağıdaki hemen-hemen koersif eşitsizliğini sağlar:

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \frac{(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}))}{\tau^2} \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} + \left\| \{Av_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} + \|p\|_H \\ & \leq M(\delta) \left\{ \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H + \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \left| \ln \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \right| \right] \right. \\ & \quad \left. \times \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

burada $M(\delta)$ sabiti, verilen $\tau, \alpha, \phi, \zeta, \eta$ elemanlarına ve $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}$ 'ya bağımlı değildir.

İspat: (3.15) direkt probleminin çözümü için (3.23) eşitsizliğinin geçerliliği Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) çalışmasında ispatlanmıştır. (3.1) ve (3.3) kestirimleri, Öztürk'ün (2013) çalışmasında ispatlanmış (3.24) eşitsizliğini ve (3.39) ve (3.40) formüllerini kullanarak, lokal olmayan (3.34) fark problemi için,

$$\begin{aligned} \|Au_0\|_H + \|Au_N\|_H & \leq M(\delta) \left\{ \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right. \\ & \quad \left. + \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \left| \ln \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \right| \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliğinin doğruluğu gösterilmelidir. Öncelikle, $A = B^2$ ve $P = (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1}$ eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} AF_3 = & (I - R^{2N})(A\phi - A\zeta) - (\mu_0 - 1) \left\{ (R^{N-s} - R^{N+s}) (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B\tau \right. \\ & \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j - (I - R^{2N})(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B\tau \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|s-j|} - R^{s+j}) \theta_j \Big\} \\ & - \mu_0 \left\{ (R^{N-s-1} - R^{N+s+1}) (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B\tau \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j \right. \\ & \left. - (I - R^{2N})(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B\tau \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|s+1-j|} - R^{s+1+j}) \theta_j \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} AF_4 = & (I - R^{2N})A\eta + \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) \left\{ (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B\tau \right. \\ & \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j - (I - R^{2N})(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B\tau \\ & \times \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j}) \theta_j \Big\} - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i \left\{ (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) (I + \tau B) \right. \\ & \times (2I + \tau B)^{-1} B\tau \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) \theta_j - (I - R^{2N})(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \\ & \left. \times B\tau \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_i+1-j|} - R^{l_i+1+j}) \theta_j \right\} \end{aligned}$$

olduğu yazılır. Buradan (3.39) ve (3.40) formüllerini kullanarak,

$$\begin{aligned} Au_0 = & \Delta_2^{-1} \left\{ \left(I - R^{2N} + \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i R^{N-l_i-1} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i=1}^q k_i \mu_i R^{N+l_i+1} \right) AF_3 - [(\mu_0 - 1)(R^{N-s} - R^{N+s}) - \mu_0(R^{N-s-1} - R^{N+s+1})] AF_4 \right\} \end{aligned}$$

ve

$$Au_N = \Delta_2^{-1} \left\{ \left[I - R^{2N} + (\mu_0 - 1)(R^s - R^{2N-s}) - \mu_0(R^{s+1} - R^{2N-s-1}) \right] AF_4 \right. \\ \left. - \left(\sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1)(R^{l_i} - R^{2N-l_i}) - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i (R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1}) \right) AF_3 \right\}$$

elde edilir. Öz-eşlenik operatörler için operatör işlemlerini, üçgen, Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini ve $\tau B = (I - R)R^{-1}$ eşitliğini uygulayarak, ilk önce $\|AF_3\|_{C(H)}$ için,

$$\begin{aligned} \|AF_3\|_{C(H)} &\leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} (\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H) + |\mu_0 - 1| \|(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\times \left\{ \|R^{N-s} - R^{N+s}\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\|(I - R)R^{N-j-1}\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\ &+ \left. \|(I - R)R^{N+j-1}\|_{H \rightarrow H} \right) \|\theta_j\|_H - \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|\theta_j\|_H \\ &\times \left(\sum_{j=1}^{s-1} \|(I - R)R^{j-s-1}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=s}^{N-1} \|(I - R)R^{s-j-1}\|_{H \rightarrow H} \right. \\ &\left. \left. - \sum_{j=1}^{N-1} \|(I - R)R^{s+j-1}\|_{H \rightarrow H} \right) \right\} - |\mu_0| \|(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \\ &\times \left\{ \|R^{N-s-1} - R^{N+s+1}\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\|(I - R)R^{N-j-1}\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\ &\left. - \|(I - R)R^{N+j-1}\|_{H \rightarrow H} \right) \|\theta_j\|_H - \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \\ &\times \left(\sum_{j=1}^{s-1} \|(I - R)R^{j-(s+1)-1}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=s}^{N-1} \|(I - R)R^{(s+1)-j-1}\|_{H \rightarrow H} \right. \\ &\left. \left. - \sum_{j=1}^{N-1} \|(I - R)R^{s+j-1}\|_{H \rightarrow H} \right) \|\theta_j\|_H \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer işlemleri kullanarak $\|AF_4\|_{C(H)}$ için,

$$\|AF_4\|_{C(H)} \leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|A\eta\|_H + \sum_{i=1}^q k_i |\mu_i - 1| \|(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1}\|_{H \rightarrow H}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \left\| R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right\|_{H \rightarrow H} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \left\| (I-R)R^{N-j-1} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{i=1}^{N-1} \left\| (I-R)R^{N+j-1} \right\|_{H \rightarrow H} \right) \left\| \theta_j \right\|_H - \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \times \left(\sum_{j=1}^{i-1} \left\| (I-R)R^{l_i-j-1} \right\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=i}^{N-1} \left\| (I-R)R^{j-l_i-1} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \left. \left. - \sum_{j=1}^{N-1} \left\| (I-R)R^{l_i+j-1} \right\|_{H \rightarrow H} \right) \left\| \theta_j \right\|_H \right\} \\
& - \left\| (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^q k_i |\mu_i| \left\{ \left\| R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \times \left(\sum_{i=1}^{N-1} \left\| (I-R)R^{N-j-1} \right\|_{H \rightarrow H} - \sum_{i=1}^{N-1} \left\| (I-R)R^{N+j-1} \right\|_{H \rightarrow H} \right) \left\| \theta_j \right\|_H - \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} \\
& \times \left(\sum_{j=1}^{i-1} \left\| (I-R)R^{(l_i+1)-j-1} \right\|_{H \rightarrow H} + \sum_{j=i}^{N-1} \left\| (I-R)R^{j-1-(l_i+1)} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \left. \left. - \sum_{j=1}^{N-1} \left\| (I-R)R^{l_i+j-1} \right\|_{H \rightarrow H} \right) \left\| \theta_j \right\|_H \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Böylece (3.1) ve (3.24) eşitsizliklerini kullanarak $\|AF_3\|_{C(H)}$ ve $\|AF_4\|_{C(H)}$ için,

$$\|AF_3\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \min \left\{ \ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \left| \ln \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \right| \right\} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right]$$

ve

$$\|AF_4\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|A\eta\|_H + \min \left\{ \ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \left| \ln \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \right| \right\} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right]$$

kestirimleri elde edilir. Daha sonra üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini uygulayarak

$\|Au_0\|_H$ ve $\|Au_N\|_H$ için,

$$\begin{aligned} \|Au_0\|_H \leq & \left\| \Delta_2^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \left\{ \left(\left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} + \sum_{i=1}^q k_i |(\mu_i - 1)| \left\| R^{N-l_i} - R^{N+l_i} \right\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{i=1}^q k_i |\mu_i| \left\| R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1} \right\|_{H \rightarrow H} \right) \|AF_3\|_{C(H)} \right. \\ & \left. - \left(|\mu_0 - 1| \left\| R^{N-s} - R^{N+s} \right\|_{H \rightarrow H} - |\mu_0| \left\| R^{N-s-1} - R^{N+s+1} \right\|_{H \rightarrow H} \right) \|AF_4\|_{C(H)} \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|Au_N\|_H \leq & \left\| \Delta_2^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \left\{ \left(\left\| I - R^{2N} \right\|_{H \rightarrow H} + |\mu_0 - 1| \left\| R^s - R^{2N-s} \right\|_{H \rightarrow H} - |\mu_0| \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left\| R^{s+1} - R^{2N-s-1} \right\|_{H \rightarrow H} \right) \|AF_4\|_{C(H)} - \left(\sum_{i=1}^q k_i |\mu_i - 1| \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left\| R^{l_i} - R^{2N-l_i} \right\|_{H \rightarrow H} - \sum_{i=1}^q k_i |\mu_i| \left\| R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1} \right\|_{H \rightarrow H} \right) \|AF_3\|_{C(H)} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliklerini ifade edebiliriz. (3.1), (3.3) kestirimlerini, (2.3) şartını uygulayarak, ayrıca $\|AF_3\|_{C(H)}, \|AF_4\|_{C(H)}$ için elde edilen eşitsizlikleri de kullanılarak,

$$\begin{aligned} \|Au_0\|_H + \|Au_N\|_H \leq & M(\delta) \left(\|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right. \\ & \left. + \min \left[\ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \ln \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \right] \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(H)} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan (3.25) kestirimi yazılabilir.. Böylece (3.34) lokal olmayan fark problemine üçgen eşitsizliği uygulanarak (3.23) eşitsizliği bulunur. Daha sonra (3.11) formülüne, $\|Au_0\|_H$ için elde edilen kestirimi ve üçgen eşitsizliğini uyguladığımızda $\|p\|_H$ için (3.26) kestirimini elde ederiz. (3.9) formülüne, (3.25) ve (3.26) kestirimleri uygulanarak (3.27) bulunur. Buradan da (3.28) elde edilir. Son olarak üçgen eşitsizliğinden ve (3.28), (3.27) ve (3.26) kestirimlerinden (3.41) elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.3. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayılarının (2.3) koşulunu sağladıkları ve $\phi, \zeta, \eta \in D(A)$, $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)$ ($0 < \alpha < 1$) olduğunu varsayalım. O halde, $M(\delta)$ sabiti verilen $\tau, \alpha, \phi, \zeta, \eta$ elemanlarından ve $\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}$ 'dan bağımsız olmak üzere (3.33) fark probleminin $(\{v_k\}_{k=1}^{N-1}, p)$ çözümü için aşağıdaki koersif kararlılık kestirimi geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left\| \tau^{-2}(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)}^{N-1} + \left\| \{Av_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \|p\|_H \\ & \leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

İspat: Lokal olmayan (3.34) fark probleminin çözümü için (3.39) ve (3.40) formülleri uygulanarak,

$$\begin{aligned} Au_0 = \Delta_2^{-1} & \left\{ \left(I - R^{2N} + \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) (R^{N-l_i} - R_i^{N+l_i}) - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i R^{N-l_i-1} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i=1}^q k_i \mu_i R^{N+l_i+1} \right) AF_3 - [(\mu_0 - 1)(R^{N-s} - R^{N+s}) \right. \\ & \left. \left. - \mu_0 (R^{N-s-1} - R^{N+s+1}) \right] AF_4 \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Au_N = \Delta_2^{-1} & \left\{ [I - R^{2N} + (\mu_0 - 1)(R^s - R^{2N-s}) - \mu_0 (R^{s+1} - R^{2N-s-1})] AF_4 \right. \\ & \left. - \left(\sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) (R^{l_i} - R^{2N-l_i}) - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i (R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1}) \right) AF_3 \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.15) direkt problemi için, Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) çalışmasında

$$\left\| \tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)}^{N-1} \leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \|Au_0\|_H + \|Au_N\|_H \right]$$

kestiriminin geçerliliği gösterilmiştir. Öncelikle, $A = B^2, P = (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1}$ eşitliklerinden, üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini uygulayarak, $\|AF_3\|_{C(H)}$ ve $\|AF_4\|_{C(H)}$ için kestirimleri belirleyelim.

$$\begin{aligned}
\|AF_3\|_{C(H)} &\leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} (A\|\phi\|_H + A\|\zeta\|_H) + |\mu_0 - 1| \|(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B\|_{H \rightarrow H} \\
&\quad \times \left\{ \|R^{N-s} - R^{N+s}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right. \\
&\quad \left. - \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{|s-j|} - R^{s+j}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right\} \\
&\quad - |\mu_0| \|(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B\|_{H \rightarrow H} \|R^{N-s-1} - R^{N+s+1}\|_{H \rightarrow H} \\
&\quad \times \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j-1} - R^{N+j-1}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} - \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \\
&\quad \times \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{|s+1-j|} - R^{s+j+1}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \Big\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|AF_4\|_{C(H)} &\leq \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \|A\eta\|_H + \sum_{i=1}^q k_i |\mu_i - 1| \|(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B\|_{H \rightarrow H} \\
&\quad \times \left\{ \|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right. \\
&\quad \left. - \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right\} \\
&\quad \|(I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B\|_{H \rightarrow H} + \sum_{i=1}^q k_i |\mu_i| \|R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \\
&\quad \times \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{N-j} - R^{N+j}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \\
&\quad - \|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} \max_{1 \leq j \leq N-1} \|R^{|l_i+1-j|} - R^{l_i+j+1}\|_{H \rightarrow H} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \Big\}.
\end{aligned}$$

Önerme 3.1 kestirimlerini uygulayarak,

$$\|AF_3\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} + \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H \right]$$

ve

$$\|AF_4\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left(\|A\eta\|_H + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \|\{\theta_k\}_{k=1}^{N-1}\|_{C(H)} \right)$$

olduğu görülür. Sonra üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini kullanarak $\|Au_0\|_H$ ve

$\|Au_N\|_H$ için,

$$\begin{aligned} \|Au_0\|_H &\leq \|\Delta_2^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\{ \left(\|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} + \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) \|R^{N-l_i} - R^{N+l_i}\|_{H \rightarrow H} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{i=1}^q k_i |\mu_i| \|R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \right) \|AF_3\|_{C(H)} \right. \\ &\quad \left. - (\|\mu_0 - 1\| \|R^{N-s} - R^{N+s}\|_{H \rightarrow H} - |\mu_0| \|R^{N-s-1} - R^{N+s+1}\|_{H \rightarrow H}) \|AF_4\|_{C(H)} \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|Au_N\|_H &\leq \|\Delta_2^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\{ \left(\|I - R^{2N}\|_{H \rightarrow H} + |\mu_0 - 1| \|R^s - R^{2N-s}\|_{H \rightarrow H} - |\mu_0| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \|R^{s+1} - R^{2N-s-1}\|_{H \rightarrow H} \right) \|AF_4\|_{C(H)} - \left(\sum_{i=1}^q k_i |\mu_i - 1| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \|R^{l_i} - R^{2N-l_i}\|_{H \rightarrow H} - \sum_{i=1}^q k_i |\mu_i| \|R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1}\|_{H \rightarrow H} \right) \|AF_3\|_{C(H)} \right\} \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizliklere, (2.3) şartını, (3.1) ve (3.3) kestirimlerini ve $\|AF_3\|_{C(H)}$ ve

$\|AF_4\|_{C(H)}$ için elde edilen eşitsizlikleri uygulayarak,

$$\left\| \tau^{-2} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)}^{N-1}$$

$$\leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} + \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right]$$

kestirimi elde edilir. (3.34) yardımcı lokal olmayan fark problemine üçgen eşitsizliği uygulanarak (3.30) kestirimi elde edilir. (3.9) formülüne, (3.30) ve (3.37) kestirimleri uygulanarak (3.31) eşitsizliği bulunur. (3.33) fark problemine üçgen eşitsizliği uygulanarak (3.32) kestirimi elde edilir. Son olarak (3.32), (3.31) ve (3.37) kestirimlerinden,

$$\begin{aligned} & \left\| \{\tau^{-2}(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1})\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} + \left\| \{Av_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} + \|p\|_H \\ & \leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{\theta_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} + \|A\phi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\eta\|_H \right] \end{aligned}$$

elde edilir ki, bu da Teorem 3.2.3'ün ispatını tamamlar.

4. DİRİCHLET KOŞULLU ÇOK BOYUTLU ÜSTBELİRLİ ELİPTİK SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN FARK ŞEMALARI

Öncelikle kullanılacak olan bazı notasyonlar tanıtılacaktır. n -boyutlu R_n Öklid uzayında sınır $S = \partial\Omega$ olmak üzere $\Omega = (0, l)^n$ bir açık küp olsun. Ω kümesinin kapanışı $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ 'dır. $a_r(x), \phi(x), \eta(x), \zeta(x)$ ($x \in \bar{\Omega}$) ve $g(t, x)$ ($t \in (0, T), x \in \Omega$) bilinen düzgün fonksiyonlar, $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $0 \leq \gamma \leq T$, $k_1, k_2, \dots, k_q$ bilinen *non-negatif* katsayılar ve ayrıca $a_r(x) \geq a > 0$ ($x \in \Omega$) 'dır.

Bu bölümde Dirichlet koşullu çok boyutlu üstbelirli eliptik sınır değer problemleri için fark şemaları incelenecektir.

4.1. Çok Boyutlu Eliptik Denklem İçin Dirichlet Koşullu Bitsadze-Samarskii Tipi Üstbelirli Dirichlet Sınır Değer Probleminin Fark Şemaları

$[0, T] \times \Omega$ bölgesinde çok boyutlu eliptik kısmi diferensiyel denklem için Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli

$$\begin{cases} -v_{tt}(t, x) - \sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} + \sigma v(x) = g(t, x) + p(x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, 0 < t < T, \\ v(0, x) = \phi(x), v(T, x) - \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i, x) = \eta(x), x \in \bar{\Omega}, \\ v(\gamma, x) = \zeta(x), x \in \bar{\Omega}, 0 < \gamma < T, \\ v(t, x) = 0, x \in S. \end{cases} \quad (4.1)$$

Dirichlet sınır değer problemini ele alalım. Burada $k_1, k_2, \dots, k_q$ katsayılarının (2.3) şartını sağladığını varsayalım. $\sigma > 0$ olmak üzere (4.1) probleminin diferensiyel operatörü,

$$A^x v = - \sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} + \sigma v(x) \quad (4.2)$$

şeklindedir. Tanım bölgesi,

$$D(A^x) = \{v(x) \in L_2(\bar{\Omega}), S \text{ üzerinde } v(x) = 0\}$$

olan $L_2(\bar{\Omega})$ uzayından $L_2(\bar{\Omega})$ uzayına bir operatör olmak üzere (4.2) ifadesi ile tanımlanan A^x operatörü öz-eşlenik pozitif tanımlıdır.

İki aşamada (4.1) probleminin yaklaşımını kuracağız. Birinci aşamada, grid noktalar uzayı,

$$\tilde{\Omega}_h = \{x = x_m = (h_1 m_1, \dots, h_n m_n); m = (m_1, \dots, m_n), m_r = 0, \dots, M_r, h_r M_r = l, r = 1, \dots, n\},$$

$$\Omega_h = \tilde{\Omega}_h \cap \Omega, S_h = \tilde{\Omega}_h \cap S$$

ile tanımlanır.

(4.2) ile tanımlanan A^x diferensiyel operatörü yerine

$$A_h^x v^h(x) = -\sum_{r=1}^n \left(a_r(x) v_{x_r, j_r}^h \right) + \sigma v^h \quad (4.3)$$

şeklindeki A_h^x fark operatörünü kullanacağız. Burada $v^h(x)$ fonksiyonları tüm $x \in S_h$ için $v^h(x) = 0$ koşulunu sağlamalıdır. A_h^x tanım bölgesi

$$D(A_h^x) = \{v^h(x) \in L_{2h}, v^h(x) = 0, x \in S_h\}$$

olan öz-eşlenik pozitif tanımlı bir operatördür.

A_h^x operatörünü kullanarak, $v^h(t, x)$ ve $p^h(x)$ bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki adi diferensiyel denklem sistemini ifade edebiliriz.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 v^h(t, x)}{dt^2} + A_h^x v^h(t, x) = g^h(t, x) + p^h(x), 0 < t < T, x \in \Omega_h, \\ v^h(0, x) = \phi^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \\ v^h(\gamma, x) = \zeta^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \\ v^h(T, x) = \sum_{i=1}^q k_i v^h(\lambda_i, x) + \eta^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

İkinci aşamada, (4.4) probleminin t değişkenine göre yaklaşımını elde edelim. Bunun için N -sabit pozitif tam sayısı olmak üzere, grid noktalar uzayını $[0, T]_\tau = \{t_k = k\tau, k = 1, \dots, N, N\tau = T\}$ ile gösterelim. Şimdi, $v^h(\lambda_i, x), (i = 1, \dots, q), v^h(\gamma, x)$ değerleri için,

$$\begin{aligned} v^h(\lambda_i, x) &= v\left(\left[\frac{\lambda_i}{\tau}\right]\tau, x\right) + o(\tau), x \in \Omega_h, \\ v^h(\gamma, x) &= v\left(\left[\frac{\gamma}{\tau}\right]\tau, x\right) + o(\tau), x \in \Omega_h, \\ v^h(\lambda_i, x) &= v\left(\left[\frac{\lambda_i}{\tau}\right]\tau, x\right) + \left(\frac{\lambda_i}{\tau} - \left[\frac{\lambda_i}{\tau}\right]\right) \left[v\left(\left[\frac{\lambda_i}{\tau}\right]\tau + \tau, x\right) - v\left(\left[\frac{\lambda_i}{\tau}\right]\tau, x\right) \right] + o(\tau^2), x \in \Omega_h, \\ v^h(\gamma, x) &= v\left(\left[\frac{\gamma}{\tau}\right]\tau, x\right) + \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left[\frac{\gamma}{\tau}\right]\right) \left[v\left(\left[\frac{\gamma}{\tau}\right]\tau + \tau, x\right) - v\left(\left[\frac{\gamma}{\tau}\right]\tau, x\right) \right] + o(\tau^2), x \in \Omega_h \end{aligned}$$

şeklindeki birinci ve ikinci mertebeden yaklaşım formüllerini uygulayarak (4.4) problemi için,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{v_{k+1}^h(x) - 2v_k^h(x) + v_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + A_h^x v_k^h(t, x) = g_k^h(t, x) + p^h(x), \\ g_k^h(x) = g^h(t, x), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, x \in \Omega_h, \\ v_0^h(x) = \phi^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \\ v_s^h(x) = \zeta^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \\ v_N^h(x) = \sum_{i=1}^q k_i v^h(\lambda_i, x) + \eta^h(x), \\ x \in \tilde{\Omega}_h, s = \left[\frac{\gamma}{\tau}\right], l_i = \left[\frac{\lambda_i}{\tau}\right] \end{array} \right. \quad (4.5)$$

birinci mertebeden doğruluk fark şemasını ve

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{v_{k+1}^h(x) - 2v_k^h(x) + v_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + A_h^x v_k^h(t, x) = g_k^h(t, x) + p^h(x), \\ g_k^h(x) = g_k^h(t, x), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, x \in \Omega_h, \\ v_0^h(x) = \phi^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \\ v_s^h(x) + \left(\frac{\gamma}{\tau} - s \right) (v_{s+1}^h(x) - v_s^h(x)) = \zeta^h(x), \\ v_N^h(x) = \sum_{i=1}^q k_i \left[v_{l_i}^h(x) + \left(\frac{\lambda_i}{\tau} - l_i \right) (v_{l_i+1}^h(x) - v_{l_i}^h(x)) \right] + \eta^h(x), \\ x \in \tilde{\Omega}_h, s = \left[\frac{\gamma}{\tau} \right], l_i = \left[\frac{\lambda_i}{\tau} \right] \end{array} \right. \quad (4.6)$$

ikinci mertebeden doğruluk fark şemasını oluştururuz.

(4.4) probleminin $v^h(t, x)$ çözümünü bulmak için,

$$v^h(t, x) = u^h(t, x) + (A_h^x)^{-1} p^h(x) \quad (4.7)$$

formülünü ve (3.7) eşitliğini kullanarak, bilinmeyen $u^h(t, x)$ fonksiyonu için lokal olmayan

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 u^h(t, x)}{dt^2} + A_h^x u^h(t, x) = g^h(t, x), 0 < t < T, x \in \Omega_h, \\ u^h(0, x) - u^h(\gamma, x) = \phi^h(x) - \zeta^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \\ u^h(T, x) - \sum_{i=1}^q k_i u^h(\lambda_i, x) = \eta^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h \end{array} \right. \quad (4.8)$$

bir yardımcı sınır değer problemini ifade edelim.

$p^h(x)$ fonkiyonunun değerinin hesaplanması için, (3.11) formülüne göre,

$$p^h(x) = A_h^x \phi^h(x) - A_h^x u^h(0, x) \quad (4.9)$$

bağıntısı kullanılacaktır.

(4.8) problemi için,

$$\begin{cases} -\frac{u_{k+1}^h(x) - 2u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + A_h^x u^h(x) = g_k^h(x), \\ g_k^h(x) = g^h(t, x), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, x \in \Omega_h, \\ u_0^h(x) - u_s^h(x) = \phi^h(x) - \zeta^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \\ u_N^h(x) - \sum_{i=1}^q k_i u_{l_i}^h(x) = \eta^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h \end{cases} \quad (4.10)$$

birinci mertebeden doğruluk fark şeması ve

$$\begin{cases} -\frac{u_{k+1}^h(x) - 2u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + A_h^x u^h(x) = g_k^h(x), \\ g_k^h(x) = g^h(t, x), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N, x \in \Omega_h, \\ u_0^h(x) + (\mu_0 - 1)u_s^h(x) - \mu_0 u_{s+1}^h(x) = \phi^h(x) - \zeta^h(x), \\ u_N^h(x) + \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1)u_{l_i}^h(x) - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i u_{l_i+1}^h(x) = \eta^h(x), \\ x \in \tilde{\Omega}_h \end{cases} \quad (4.11)$$

ikinci mertebeden doğruluk fark şeması elde edilir.

$$L_{2h} = L_2 \left(\tilde{\Omega}_h \right) \text{ uzayında } \tilde{\Omega}_h \text{ üzerinde tanımlı } \rho^x(x) = \{\rho(h_1 m_1, \dots, h_n m_n)\} \text{ grid}$$

fonksiyonlarının normu,

$$\|\rho^h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in \tilde{\Omega}_h} |\rho^h(x)|^2 h_1 \dots h_n \right)^{1/2}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.1. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayılarının (2.3) koşulunu sağladığını ve $\phi^h, \zeta^h, \eta^h \in D(A_h^x)$, $\{g_k^h\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_{2h})$ ($0 < \alpha < 1$) olduğunu varsayalım. Bu durumda, (4.5) ve (4.6) fark şemalarının $(\{v_k^h\}_{k=1}^{N-1}, p^h)$ çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri geçerlidir:

$$\left\| \{v_k^h\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(0T, L_{2h})} \leq M(\delta) \left[\|\phi^h\|_{L_{2h}} + \|\zeta^h\|_{L_{2h}} + \|\eta^h\|_{L_{2h}} + \left\| \{g_k^h\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(L_{2h})} \right], \quad (4.12)$$

$$\|p^h\|_{W_{2h}^2} \leq M(\delta) \left[\|\phi^h\|_{W_{2h}^2} + \|\zeta^h\|_{W_{2h}^2} + \|\eta^h\|_{W_{2h}^2} + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \times \left\| \{g_k^h\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_{2h})} \right]. \quad (4.13)$$

Burada $M(\delta)$ sabitleri, verilen $\alpha, \phi^h, \zeta^h, \eta^h$ elemanlardan ve $\{g_k^h\}_{k=1}^{N-1}$, den bağımsızdır.

Teorem 4.1.2. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayılarını (2.3) koşulunu sağladığını ve $\phi^h, \zeta^h, \eta^h \in D(A_h^x)$, $\{g_k^h\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_{2h})$ ($0 < \alpha < 1$) olsun. Bu takdirde, (4.5) ve (4.6) fark şemalarının $(\{v_k^h\}_{k=1}^{N-1}, p^h)$ çözümü aşağıdaki hemen-hemen koersif eşitsizliğini sağlar: W_{2h}^2

$$\left\| \left\{ \frac{(v_{k+1}^h - 2v_k^h + v_{k-1}^h)}{\tau^2} \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(L_{2h})} + \left\| \{A_h^x v_k^h\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(L_{2h})} + \|p^h\|_{L_{2h}} \leq M(\delta) \left\{ \|\phi^h\|_{W_{2h}^2} + \|\zeta^h\|_{W_{2h}^2} + \|\eta^h\|_{W_{2h}^2} + \ln \left(\frac{1}{\tau + h} \right) \left\| \{g_k^h\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(L_{2h})} \right\}. \quad (4.14)$$

Burada $M(\delta)$ sabiti, verilen $\tau, \alpha, \phi^h, \zeta^h, \eta^h$ elemanlarına ve $\{g_k^h\}_{k=1}^{N-1}$, na bağımlı değildir.

Teorem 4.1.3. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayılarının (2.3) koşulunu sağladığını ve $\phi^h, \zeta^h, \eta^h \in D(A_h^x)$, $\{g_k^h\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_{2h})$ ($0 < \alpha < 1$) olduğunu kabul edelim. O halde, (4.5) ve (4.6) fark şemalarının $(\{v_k^h\}_{k=1}^{N-1}, p^h)$ çözümü için aşağıdaki koersif kararlılık kestirimleri geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left\| \left\{ \tau^{-2} (v_{k+1}^h - 2v_k^h + v_{k-1}^h) \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_{2h})} + \left\| \{A_h^x v_k\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_{2h})} + \|p^h\|_{L_{2h}} \\
& \leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{g_k^h\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(L_{2h})} + \|\phi^h\|_{W_{2h}^2} + \|\zeta^h\|_{W_{2h}^2} + \|\eta^h\|_{W_{2h}^2} \right].
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Burada $M(\delta)$ sabiti, verilen $\tau, \alpha, \phi^h, \zeta^h, \eta^h$ elemanlarından ve $\{g_k^h\}_{k=1}^{N-1}$ 'dan bağımsızdır.

Teorem 4.1.1, 4.1.2 ve 4.1.3'ün ispatları, A_h^x operatörünün simetrik özelliğine, 3.1-3.3 arası önermelere, (4.10) ve (4.11) fark şemalarının çözümlerine dayanmaktadır. (4.10) fark şemasının çözümü için,

$$\begin{aligned}
u_k^h &= (I - R^{2N})^{-1} \left[(R^k - R^{2N-k})u_0^h + (R^{N-k} - R^{N+k})u_N^h - (R^{N-k} - R^{N+k}) \right. \\
& \quad \times (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) g_j^h \tau \left. \right] \\
& \quad + (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1} \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|k-j|} - R^{k+j}) g_j^h,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$P = (I + \tau B)(2I + \tau B)^{-1} B^{-1},$$

$$u_0^h(x) = \Delta_1^{-1} \left\{ \left(I - R^{2N} - \sum_{i=1}^q k_i (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) \right) F_1^h + (R^{N-s} - R^{N+s}) F_2^h \right\}, \tag{4.17}$$

$$u_N^h(x) = \Delta_1^{-1} \left\{ (I - R^{2N} - R^s + R^{2N-s}) F_2^h + \sum_{i=1}^q k_i (R^{l_i} - R^{2N-l_i}) F_1^h \right\} \tag{4.18}$$

$$p^h(x) = A_h^x \phi^h(x) - A_h^x u_0^h(x) \tag{4.19}$$

formüllerine ihtiyaç olmakla birlikte, buradaki

$$\begin{aligned}
F_1^h &= (I - R^{2N}) (\phi^h(x) - \zeta^h(x)) + (R^{N-s} - R^s) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) g_j^h \tau \\
& \quad - (I - R^{2N}) P \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|s-j|} - R^{s+j}) g_j^h \tau,
\end{aligned}$$

$$F_2^h = (I - R^{2N})\eta^h(x) + \sum_{i=1}^q k_i P \left\{ (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) g_j^h \tau \right. \\ \left. - (I - R^{2N}) \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j}) g_j^h \tau \right\}$$

şeklindedir. Ayrıca (4.11) fark şemasının çözümünün de (4.16) formülüne ve

$$u_0^h(x) = \Delta_2^{-1} \left\{ \left(I - R^{2N} + \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) \right) F_3^h \right. \\ \left. - [(\mu_0 - 1)(R^{N-s} - R^{N+s}) - \mu_0(R^{N-s-1} - R^{N+s+1})] F_4^h \right\}, \quad (4.20)$$

$$u_N^h(x) = \Delta_2^{-1} \left\{ \left[I - R^{2N} + (\mu_0 - 1)(R^s - R^{2N-s}) - \mu_0(R^{s+1} - R^{2N-s-1}) \right] F_4^h \right. \\ \left. - \left[\sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) (R^{l_i} - R^{2N-l_i}) - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i (R^{l_i+1} - R^{2N-l_i-1}) \right] F_3^h \right\} \quad (4.21)$$

ve (4.19) formüllerine ihtiyaç olmakla birlikte, buradaki

$$F_3^h = (I - R^{2N})(\phi^h(x) - \zeta^h(x)) + (\mu_0 - 1)P \left\{ (R^{N-s} - R^{N+s}) \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) g_j^h \tau \right. \\ \left. - (I - R^{2N}) \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|s-j|} - R^{s+j}) g_j^h \tau \right\} \\ - \mu_0 P \left\{ (R^{N-s-1} - R^{N+s+1}) \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) g_j^h \tau - (I - R^{2N}) \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|s+1-j|} - R^{s+1+j}) g_j^h \tau \right\}, \\ F_4^h = (I - R^{2N})\eta^h(x) + \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1)P \left\{ (R^{N-l_i} - R^{N+l_i}) \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) g_j^h \tau \right. \\ \left. - (I - R^{2N}) \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_i-j|} - R^{l_i+j}) g_j^h \tau \right\} \\ - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i P \left\{ (R^{N-l_i-1} - R^{N+l_i+1}) \sum_{j=1}^{N-1} (R^{N-j} - R^{N+j}) g_j^h \tau - (I - R^{2N}) \sum_{j=1}^{N-1} (R^{|l_i+1-j|} - R^{l_i+1+j}) g_j^h \tau \right\}$$

şeklindedir. Ayrıca, bunlara ek olarak Teorem 4.1.2'nin ispatı A_h^x operatörünün pozitifliğine, önceki bölümdeki soyut fark problemi için gösterilen Teorem 3.1.2 ve 3.2.2 ile Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) çalışmasında geçen,

$$\min \left\{ \ln \left(\frac{1}{\tau} \right), 1 + \left| \ln \|B_h^x\|_{L_{2h}} \right| \right\} \leq M \ln \left(\frac{1}{1+\tau} \right) \quad (4.22)$$

eşitsizliğine dayanmaktadır.

4.2. Çok Boyutlu Eliptik Denklem İçin Dirichlet Koşullu Bitsadze-Samarskii Tipi Üstbelirli Neumann Sınır Değer Probleminin Fark Şemaları

$[0, T] \times \Omega$ bölgesinde çok boyutlu eliptik kısmi diferansiyel denklem için Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli

$$\begin{cases} -v_{tt}(t, x) - \sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} + \sigma v(t, x) = g(t, x) + p(x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, 0 < t < T, \\ v(0, x) = \phi(x), v(T, x) - \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i, x) = \eta(x), x \in \bar{\Omega}, \\ v(\gamma, x) = \zeta(x), x \in \bar{\Omega}, 0 < \gamma < T, \\ \frac{\partial v(t, x)}{\partial \bar{n}} = 0, x \in S, 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.23)$$

Neumann sınır değer problemini ele alalım. $k_1, k_2, \dots, k_q$ katsayılarının (2.3) şartını sağladığını varsayalım. $\sigma > 0$ olmak üzere (4.23) probleminin diferansiyel operatörü, (4.2) şeklinde tanımlanır. Tanım bölgesi,

$$D(A^x) = \left\{ v(x) \in L_2(\bar{\Omega}), S \text{ üzerinde } \frac{\partial v}{\partial \bar{n}} = 0 \right\}$$

olan $L_2(\bar{\Omega})$ uzayından $L_2(\bar{\Omega})$ uzayına bir operatör olmak üzere (4.2) ile tanımlanan A^x operatörü öz-eşlenik pozitif tanımlıdır.

İki aşamada (4.23) probleminin yaklaşımını kuracağız. Birinci aşamada, grid noktalar uzayı,

$$\tilde{\Omega}_h = \{x = x_m = (h_1 m_1, \dots, h_n m_n); m = (m_1, \dots, m_n), m_r = 0, \dots, M_r, h_r M_r = l, r = 1, \dots, n\},$$

$$\Omega_h = \tilde{\Omega}_h \cap \Omega, S_h = \tilde{\Omega}_h \cap S$$

ile tanımlanır.

(4.23) problemine göre tanımlanan A^x diferensiyel operatörü yerine (4.3) ile tanımlanan A_h^x fark operatorünü kullanacağız. Buradaki $v^h(x)$ fonksiyonları tüm $x \in S_h$ için $D^h v^h(x) = 0$ koşulunu sağlamalıdır. Bu şekilde tanımlanan A_h^x operatörünün öz-eşlenik pozitif tanımlı bir operatör olduğu bilinir ve onun tanım bölgesi,

$$D(A_h^x) = \{v^h(x) \in L_{2h}, D^h v^h(x) = 0, x \in S_h\}$$

biçimindedir. Burada $D^h v^h(x), \frac{\partial v}{\partial n}$ 'nin bir yaklaşımıdır.

A_h^x operatörü kullanılarak, $v^h(t, x)$ ve $p^h(x)$ bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere, (4.4) biçimindeki adi diferensiyel denklem sistemi elde edilir.

İkinci aşamada, (4.4) probleminin t değişkenine göre aproksimasyonunu elde edelim. Bunun için N -sabit pozitif tam sayısı olmak üzere, grid noktalar uzayını $[0, T]_T = \{t_k = k\tau, k = 1, \dots, N, N\tau = T\}$ ile gösterelim.

Şimdi, $v^h(\lambda_i, x), (i = 1, \dots, q), v^h(\gamma, x)$ değerleri için,

$$v^h(\lambda_i, x) = v\left(\left[\frac{\lambda_i}{\tau}\right]\tau, x\right) + o(\tau), x \in \Omega_h,$$

$$v^h(\gamma, x) = v\left(\left[\frac{\gamma}{\tau}\right]\tau, x\right) + o(\tau), x \in \Omega_h,$$

birinci mertebeden yaklaşım formüllerini uygulayarak, (4.4) probleminin,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{v_{k+1}^h(x) - 2v_k^h(x) + v_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + A_h^x v_k^h(t, x) = g_k^h(t, x) + p^h(x), \\ g_k^h(x) = g_k^h(t, x), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, x \in \Omega_h, \\ v_0^h(x) = \phi^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \\ v_s^h(x) = \zeta^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \\ v_N^h(x) = \sum_{i=1}^q k_i v^h(\lambda_i, x) + \eta^h(x), \\ x \in \tilde{\Omega}_h, s = \left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor, l_i = \left\lfloor \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rfloor, \end{array} \right. \quad (4.24)$$

birinci mertebeden doğruluk fark şeması ifade edilir.

Benzer şekilde, $v^h(\lambda_i, x), (i = 1, \dots, q), v^h(\gamma, x)$ değerleri için,

$$v^h(\lambda_i, x) = v\left(\left\lfloor \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rfloor \tau, x\right) + \left(\frac{\lambda_i}{\tau} - \left\lfloor \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rfloor\right) \left[v\left(\left\lfloor \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rfloor \tau + \tau, x\right) - v\left(\left\lfloor \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rfloor \tau, x\right) \right] + o(\tau^2), x \in \Omega_h,$$

$$v^h(\gamma, x) = v\left(\left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor \tau, x\right) + \left(\frac{\gamma}{\tau} - \left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor\right) \left[v\left(\left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor \tau + \tau, x\right) - v\left(\left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor \tau, x\right) \right] + o(\tau^2), x \in \Omega_h$$

ikinci mertebeden yaklaşım formüllerini uygulayarak, (4.4) probleminin,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{v_{k+1}^h(x) - 2v_k^h(x) + v_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + A_h^x v_k^h(t, x) = g_k^h(t, x) + p^h(x), \\ g_k^h(x) = g_k^h(t, x), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, x \in \Omega_h, \\ v_0^h(x) = \phi^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \\ v_s^h(x) + \left(\frac{\gamma}{\tau} - s\right) (v_{s+1}^h(x) - v_s^h(x)) = \zeta^h(x), \\ v_N^h(x) = \sum_{i=1}^q k_i \left[v_{li}^h(x) + \left(\frac{\lambda_i}{\tau} - l_i\right) (v_{li+1}^h(x) - v_{li}^h(x)) \right] + \eta^h(x), \\ x \in \tilde{\Omega}_h, s = \left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor, l_i = \left\lfloor \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rfloor \end{array} \right. \quad (4.25)$$

ikinci mertebeden doğruluk fark şeması elde edilir.

Teorem 4.2.1. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayılarının (2.3) koşulunu sağladığını ve $\phi^h, \zeta^h, \eta^h \in D(A_h^x)$,

$\{g_k^h\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{\alpha,\alpha}(L_{2h})(0 < \alpha < 1)$ olduğunu varsayalım. O halde, (4.24) ve (4.25) fark şemalarının $\left(\{v_k^h\}_{k=1}^{N-1}, p^h\right)$ çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimlerini sağlar:

$$\left\|\{v_k^h\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(0T, L_{2h})} \leq M(\delta) \left[\|\phi^h\|_{L_{2h}} + \|\zeta^h\|_{L_{2h}} + \|\eta^h\|_{L_{2h}} + \left\|\{g_k^h\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(L_{2h})} \right], \quad (4.26)$$

$$\|p^h\|_{L_{2h}} \leq M(\delta) \left[\|\phi^h\|_{W_{2h}^2} + \|\zeta^h\|_{W_{2h}^2} + \|\eta^h\|_{W_{2h}^2} + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\|\{g_k^h\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(L_{2h})} \right]. \quad (4.27)$$

Burada $M(\delta)$ sabitleri, verilen $\alpha, \phi^h, \zeta^h, \eta^h$ elemanlarından ve $\{g_k^h\}_{k=1}^{N-1}$ 'den bağımsızdır.

Teorem 4.2.2. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayılarının (2.3) koşulunu sağladığını ve $\phi^h, \zeta^h, \eta^h \in D(A_h^x)$, $\{g_k^h\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{\alpha,\alpha}(L_{2h})(0 < \alpha < 1)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde, (4.24) ve (4.25) fark şemalarının $\left(\{v_k^h\}_{k=1}^{N-1}, p^h\right)$ çözümü, aşağıdaki hemen-hemen koersif eşitsizliğini sağlar:

$$\begin{aligned} & \left\| \left\{ \frac{(v_{k+1}^h - 2v_k^h + v_{k-1}^h)}{\tau^2} \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(L_{2h})} + \left\| \{A_h^x v_k^h\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C(L_{2h})} + \|p^h\|_{L_{2h}} \\ & \leq M(\delta) \left\{ \|\phi^h\|_{W_{2h}^2} + \|\zeta^h\|_{W_{2h}^2} + \|\eta^h\|_{W_{2h}^2} + \ln\left(\frac{1}{\tau+h}\right) \left\|\{g_k^h\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(L_{2h})} \right\}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Burada $M(\delta)$ sabiti, verilen $\tau, \alpha, \phi^h, \zeta^h, \eta^h$ elemanlarına ve $\{g_k^h\}_{k=1}^{N-1}$ 'na bağımlı değildir.

Teorem 4.2.3. k_i ($i = 1, \dots, q$) katsayılarının (2.3) koşulunu sağladığını ve $\phi^h, \zeta^h, \eta^h \in D(A_h^x)$, $\{g_k^h\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{\alpha,\alpha}(L_{2h})(0 < \alpha < 1)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde, (4.24) ve (4.25) fark şemalarının $\left(\{v_k^h\}_{k=1}^{N-1}, p^h\right)$ çözümü için aşağıdaki koersif kararlılık kestirimi geçerlidir:

$$\left\| \tau^{-2} (v_{k+1}^h - 2v_k^h + v_{k-1}^h) \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(L_{2h})} + \left\| \{A_h^x v_k^h\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(L_{2h})} + \|p^h\|_{L_{2h}}$$

$$\leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-\alpha)\alpha} \left\| \{g_k^h\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(L_{2h})} + \|\phi^h\|_{W_{2h}^2} + \|\zeta^h\|_{W_{2h}^2} + \|\eta^h\|_{W_{2h}^2} \right]. \quad (4.29)$$

Burada $M(\delta)$ sabiti, verilen $\tau, \alpha, \phi^h, \zeta^h, \eta^h$ elemanlarından ve $\{g_k^h\}_{k=1}^{N-1}$ 'dan bağımsızdır.

Teorem 4.2.1, 4.2.2 ve 4.2.3 ispatları, A_h^x operatörünün simetrik özelliğine, 3.1-3.3 arası önermelere, (4.10) ve (4.11) fark şemalarının çözümlerine dayanmaktadır. Burada (4.10) fark şemasının çözümü için (4.16), (4.17), (4.18) ve (4.19) formüllerine, (4.11) fark şemasının çözümü için ise (4.16), (4.20), (4.21) ve (4.19) formüllerine ihtiyaç bulunmaktadır. Ayrıca bunlara ek olarak, Teorem 4.2.2'nin ispatı, A_h^x operatörünün pozitifliğine, önceki bölümdeki soyut fark problemi için gösterilen Teorem 3.1.2 ve 3.2.2 ile Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) çalışmasında geçen (4.22) eşitsizliğine dayanmaktadır.

5. SAYISAL UYGULAMALAR

5.1. Eliptik Denklem İçin Dirichlet Koşullu Bitsadze-Samarskii Tipi Üstbelirli Dirichlet Sınır Değer Probleminin Sayısal Sonuçları

Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli Dirichlet sınır değer probleminin sayısal sonuçları için aşağıdaki eliptik problemi göz önüne alalım.

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left((3 + \sin(\pi x)) \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} \right) + v(t, x) = g(t, x) + p(x), 0 < x < 1, 0 < t < 1, \\ g(t, x) = [(1 + 4\pi^2) \cos(\pi t) + (3\pi^2 + 1)t] \sin(\pi x) - \pi^2 (\cos(\pi t) + t) \cos(2\pi x), \\ v(0, x) = 2 \sin(\pi x) = \phi(x), 0 \leq x \leq 1, \\ v(\gamma, x) = (\cos(\pi \gamma) + \gamma + 1) \sin(\pi x) = \zeta(x), 0 \leq x \leq 1, \\ v(1, x) - \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i, x) = - \sum_{i=1}^q k_i (\cos(\pi \lambda_i) + \lambda_i) \sin(\pi x), 0 \leq x \leq 1, \\ v(t, 0) = v(t, 1) = 0, 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (5.1)$$

(5.1) probleminin gerçek çözümlerinin $v(t, x) = (\cos(\pi t) + t + 1) \sin(\pi x)$ ve $p(x) = (3\pi^2 + 1) \sin(\pi x) - \pi^2 \cos(2\pi x)$ olduğu açıktır. (5.1) probleminin $v(t, x)$ çözümünü için $v(t, x) = u(t, x) + A^{-1}p(x)$ bağıntısını kullanarak,

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left((3 + \sin(\pi x)) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right) + u(t, x) = g(t, x), 0 < x < 1, 0 < t < 1, \\ u(0, x) - u(\gamma, x) = (1 - \cos(\pi \gamma) - \gamma) \sin(\pi x), 0 \leq x \leq 1, \\ u(1, x) - \sum_{i=1}^q k_i u(\lambda_i, x) = - \sum_{i=1}^q k_i (\cos(\pi \lambda_i) + \lambda_i) \sin(\pi x), 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (5.2)$$

yardımcı problemini oluşturalım.

Yardımcı lokal olmayan (5.2) probleminin yaklaşık çözümünü $[0, 1]_\tau \times [0, 1]_h$ kümesinde göz önüne alalım.

Grid noktalar uzayı,

$$[0, 1]_\tau \times [0, 1]_h = \{(t_k, x_n) : t_k = k\tau, k = 1, \dots, N-1, N\tau = 1, x_n = nh, n = 1, \dots, M-1, Mh = 1\}.$$

ile tanımlanır.

Birinci mertebeden doğruluk (4.10) fark şemasını uygulayarak t için birinci mertebeden ve x için ikinci mertebeden doğruluk fark şeması,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + (3 + \sin(\pi x_n)) \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \pi \cos(\pi x_n) \frac{u_{n+1}^k - u_{n-1}^k}{2h} - u_n^k = \theta_n^k, \\ \theta_n^k = -g(t_k, x_n), k = 1, \dots, N-1, n = 1, \dots, M-1, \\ u_0^k = u_M^k = 0, k = 0, \dots, N, \\ u_n^0 - u_n^s = \phi_n - \zeta_n, n = 0, \dots, M, \\ u_n^N - \sum_{i=1}^q k_i u_n^{l_i} = \eta_n, n = 0, \dots, M, \\ u_0^k = u_M^k = 0, k = 0, \dots, N, \\ \phi_n = \phi(x_n), \zeta_n = \zeta(x_n), \eta_n = \eta(x_n), l_i = \left[\frac{\lambda_i}{\tau} \right], s = \left[\frac{\gamma}{\tau} \right] \end{array} \right. \quad (5.3)$$

şeklinde ifade edilir. (4.9) formülü uygulanarak, x için ikinci mertebeden doğrulukta p -nin değerleri,

$$\begin{aligned} p_n = & -(3 + \sin(\pi x_n)) \frac{(\phi_{n+1} - u_{n+1}^0) - 2(\phi_n - u_n^0) + (\phi_{n-1} - u_{n-1}^0)}{h^2} - \pi \cos(\pi x_n) \\ & \times \frac{(\phi_{n+1} - u_{n+1}^0) - (\phi_{n-1} - u_{n-1}^0)}{2h} + (\phi_n - u_n^0), n = 1, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} a_n = & \frac{3 + \sin(\pi x_n)}{h^2} + \frac{\pi \cos(\pi x_n)}{2h}, b_n = -\frac{2}{\tau^2} - \frac{2(3 + \sin(\pi x_n))}{h^2} - 1, \\ c_n = & \frac{3 + \sin(\pi x_n)}{h^2} - \frac{\pi \cos(\pi x_n)}{2h}, d = \frac{1}{\tau^2}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$U_s = \begin{bmatrix} u_s^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_s^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, s = n-1, n, n+1,$$

olmak üzere, (5.3) fark şemasını

$$\begin{aligned} U_0 &= \vec{0}, \\ A_n U_{n+1} + B_n U_n + C_n U_{n-1} &= I \theta_n, n = 1, \dots, M-1, \\ U_M &= \vec{0} \end{aligned} \quad (5.6)$$

matris formunda yazılabilir.

Burada A_n, B_n ve C_n , $(N+1) \times (N+1)$ tipinde kare matrisler olup, θ_n ise $(N+1) \times 1$ tipinde bir sütun matris, I ise $(N+1) \times (N+1)$ tipinde bir birim matristir.

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$B_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & b_n & d & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & b_n & d & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & b_n & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_n & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & d & b_n & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d & b_n & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -k_1 & \cdots & -k_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\theta_n = \begin{bmatrix} \theta_n^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_n^N \end{bmatrix}, n = 1, \dots, M-1,$$

$$\theta_n^0 = \phi_n - \zeta_n, n = 1, \dots, M-1,$$

$$\theta_n^N = \eta_n, n = 1, \dots, M-1,$$

$$\theta_n^k = -g(t_k, x_n), k = 1, \dots, N-1, n = 1, \dots, M-1.$$

$\alpha_n (n = 1, \dots, M-1)$, $(N+1) \times (N+1)$ tipinde bir kare matris, $\beta_n (n = 1, \dots, M-1)$ ise $(N+1) \times 1$ tipinde bir sütun matris olmak üzere, (5.6) denkleminin çözümü (Samarskii ve Nikolaev, 1989)

$$U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M-1, \dots, 1,$$

şeklinde aranır ve (5.6) fark denkleminin çözümü için,

$$\alpha_{n+1} = -(B_n + C_n \alpha_n)^{-1} A_n,$$

$$\beta_{n+1} = -(B_n + C_n \alpha_n)^{-1} (I\theta_n - C_n \beta_n), n = 1, \dots, M-1$$

formülleri geçerlidir. Burada α_1 , $(N+1) \times (N+1)$ tipinde bir sıfır kare matris, β_1 ise, $(N+1) \times 1$ tipinde bir sıfır sütun vektörüdür.

Şimdi (5.1) ters probleminin ikinci mertebeden doğruluk fark şemasını ele alalım.

(4.11) fark şemasını ve

$$\omega'(x_n) = \frac{\omega(x_{n+1}) - \omega(x_{n-1}))}{2h} + O(h^2),$$

$$\omega''(x_n) = \frac{\omega(x_{n+1}) - 2\omega(x_n) + \omega(x_{n-1}))}{h^2} + O(h^2)$$

yaklaşım formüllerini kullanarak, t ve x değişkenleri için ikinci mertebeden doğruluk fark şeması,

$$\begin{cases} \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + (3 + \sin(\pi x_n)) \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \pi \cos(\pi x_n) \frac{u_{n+1}^k - u_{n-1}^k}{2h} - u_n^k = \theta_n^k, \\ \theta_n^k = -g(t_k, x_n), k = 1, \dots, N-1, n = 1, \dots, M-1, \\ u_n^0 + (\mu_0 - 1)u_n^s - \mu_0 u_n^{s+1} = \phi_n - \zeta_n, n = 0, \dots, M, \\ u_n^N + \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1)u_n^{l_i} - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i u_n^{l_i+1} = \eta_n, n = 0, \dots, M, \\ u_0^k = u_M^k = 0, k = 0, \dots, N, \\ \phi_n = (x_n), \zeta_n = \zeta(x_n), \eta_n = \eta(x_n), l_i = \left\lceil \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rceil, s = \left\lceil \frac{\gamma}{\tau} \right\rceil \end{cases} \quad (5.10)$$

şeklinde kurulur.

(5.10) fark şeması (5.6) matris formunda yazılabilir. Burada A_n , C_n , (5.7) ve (5.9) matrisleriyle tanımlıdır. B_n matrisi ise aşağıdaki forma dönüşür.

$$B_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_0 & z_0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & b_n & d & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & b_n & d & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & b_n & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_n & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d & b_n & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d & b_n & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & y_1 & z_1 & \cdots & y_3 & z_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Buradaki b_n ve d (5.5) ile aynıdır, diğer katsayılar ise,

$$y_0 = \frac{\gamma}{\tau} - s - 1 = \mu_0, \quad z_0 = -\frac{\gamma}{\tau} + s = \mu_0,$$

$$y_1 = \frac{\lambda_1}{\tau} - l_1 - 1 = \mu_1 - 1, \quad z_1 = -\frac{\lambda_1}{\tau} + l_1 = -\mu_1,$$

$$y_2 = \frac{\lambda_2}{\tau} - l_2 - 1 = \mu_2 - 1, \quad z_2 = -\frac{\lambda_2}{\tau} + l_2 = -\mu_2,$$

$$y_3 = \frac{\lambda_3}{\tau} - l_3 - 1 = \mu_3 - 1, \quad z_3 = -\frac{\lambda_3}{\tau} + l_3 = -\mu_3,$$

...

$$y_i = \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i - 1 = \mu_i - 1, \quad z_i = -\frac{\lambda_i}{\tau} + l_i = -\mu_i$$

şeklindedir.

Şimdi sayısal analiz sonuçlarını verelim. Yaklaşık bir çözüm elde etmek için MATLAB programı kullanılmıştır. Farklı $N=M$ ve $T=1$ değerleri için sayısal çözümler elde edilmiştir. Yardımcı yerel olmayan ve ters probleminin fark şemalarının (t_k, x_n) grid noktalarındaki sayısal çözümleri sırasıyla u_n^k ve v_n^k grid fonksiyonlarıyla; bilinmeyen p fonksiyonunun x_n grid noktalarındaki sayısal çözümü ise, p_n grid fonksiyonuyla gösterildi. Gerçek çözümün (t_k, x_n) noktasındaki değeri $u(t_k, x_n)$ ile verildi. Bunların karşılaştırılması için,

$$Eu_M^N = \max_{1 \leq k \leq N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} |u(t_k, x_n) - u_n^k|^2 h \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$Ev_M^N = \max_{1 \leq k \leq N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} |v(t_k, x_n) - v_n^k|^2 h \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$Ep_M = \left(\sum_{n=1}^{M-1} |p(x_n) - p_n|^2 h \right)^{\frac{1}{2}}$$

hata formülleri kullanılmıştır.

MATLAB programını kullanarak (5.1) probleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Sayısal çözümler bir, iki ve üç noktalı lokal olmayan Bitsadze-Samarskii tipi koşullar içeren üstbelirli problemler için hesaplanmıştır. Bir noktalı problemde, $q = 1, \gamma = 0.5, \lambda_1 = 0.6, k_1 = 1$

iki noktalı problemde, $q = 2, \gamma = 0.4, \lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.6, k_1 = \frac{2}{5}, k_2 = \frac{3}{5}$ ve üç noktalı

problemde, $q = 3, \gamma = 0.5, \lambda_1 = 0.6, \lambda_2 = 0.7, \lambda_3 = 0.8, k_1 = \frac{1}{5}, k_2 = \frac{3}{10}, k_3 = \frac{1}{2}$ olarak alınmıştır.

Tablo 5.1.1'den 5.1.3'e kadar gerçek çözümler ile fark şemaları arasındaki hata analizleri verilmektedir ve bu tablolar $N=M=20, 40, 80$ ve 160 için oluşturulmuştur. Sayısal deneylerden elde edilen sonuçlardan, ikinci mertebeden fark şemasının birinci mertebeden fark şemasından daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Tablo 5.1.1'de, bir, iki ve üç noktalı (5.2) yardımcı problemlerin gerçek çözümleriyle birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemalarının yaklaşık çözümleri arasındaki hatalar gösterilmektedir.

Tablo 5.1.1. Bir, iki ve üç noktalı DSD BSTÜEP'lerdeki (5.2) için hatalar

Nokta Sayısı	Fark Şeması Türü	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160
Bir noktalı	BMDFŞ	0.078802	3.91×10^{-2}	1.95×10^{-2}	9.74×10^{-3}
Bir noktalı	İMDFŞ	1.56×10^{-3}	3.90×10^{-4}	9.76×10^{-5}	2.44×10^{-5}
İki noktalı	BMDFŞ	0.04713	2.32×10^{-2}	1.15×10^{-2}	5.74×10^{-3}
İki noktalı	İMDFŞ	1.67×10^{-3}	4.20×10^{-4}	1.05×10^{-4}	2.62×10^{-5}
Üç noktalı	BMDFŞ	0.04097	2.00×10^{-2}	9.92×10^{-3}	4.93×10^{-3}
Üç noktalı	İMDFŞ	1.55×10^{-3}	3.88×10^{-4}	9.71×10^{-5}	2.42×10^{-5}

Tablo 5.1.2'de, bir, iki ve üç noktalı üstbelirli problemlerinin bilinmeyen p elemanının gerçek çözümleriyle, fark şemaları ile elde edilen çözümleri arasındaki hatalar gösterilmektedir.

Tablo 5.1.2. Bir, iki ve üç noktalı DSD BSTÜEP'lerdeki p için hatalar

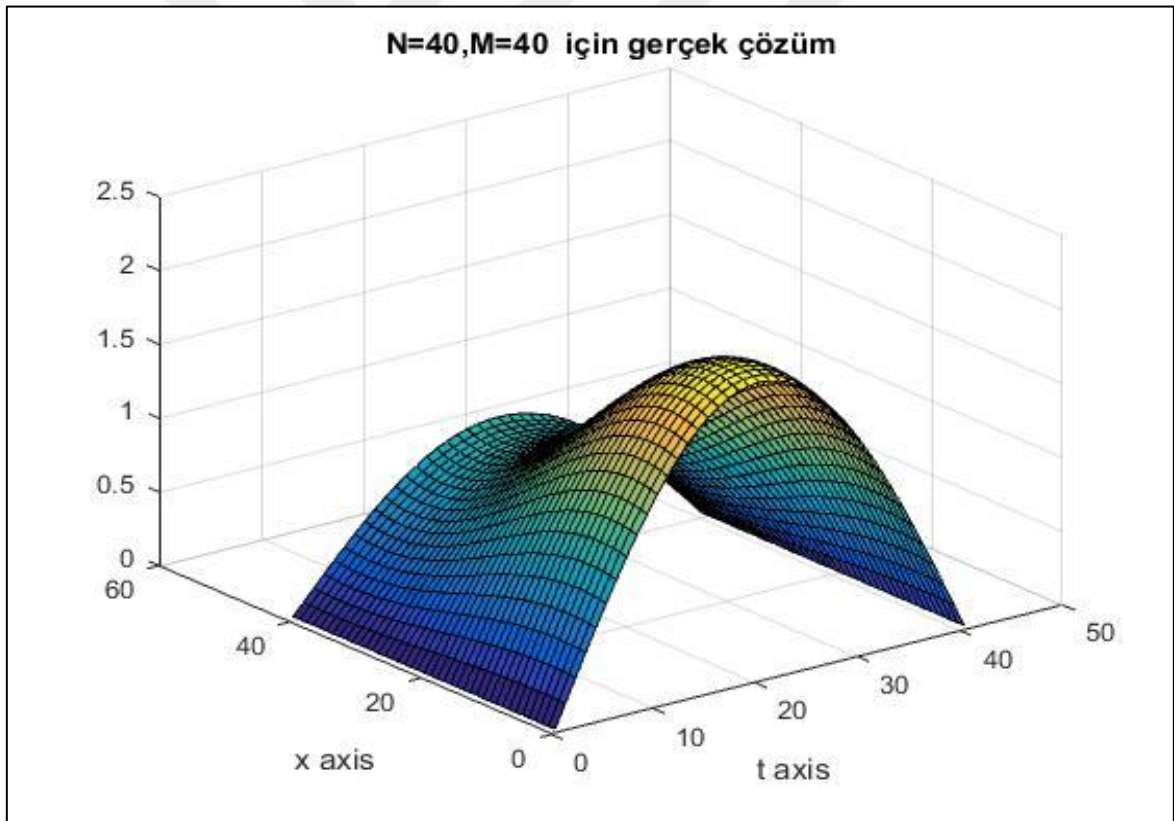
Nokta Sayısı	Fark Şeması Türü	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160
Bir noktalı	BMDFŞ	0.21867	0.09159	0.04152	1.97×10^{-2}
Bir noktalı	İMDFŞ	7.21×10^{-2}	1.81×10^{-2}	4.56×10^{-3}	1.14×10^{-3}
İki noktalı	BMDFŞ	0.13099	0.04503	0.01751	7.53×10^{-3}
İki noktalı	İMDFŞ	8.23×10^{-2}	2.07×10^{-2}	5.21×10^{-3}	1.30×10^{-3}
Üç noktalı	BMDFŞ	0.14646	0.05507	2.31×10^{-2}	1.04×10^{-2}
Üç noktalı	İMDFŞ	7.16×10^{-2}	1.80×10^{-2}	4.53×10^{-3}	1.13×10^{-3}

Tablo 5.1.3'de (5.1) bir, iki ve üç noktalı üstbelirli problemlerinin gerçek çözümleriyle birinci ve ikinci mertebeden fark şemalarıyla elde edilen çözümleri arasındaki hatalar gösterilmektedir.

Tablo 5.1.3. Bir, iki ve üç noktalı DSD BSTÜEP'lerdeki v için hatalar

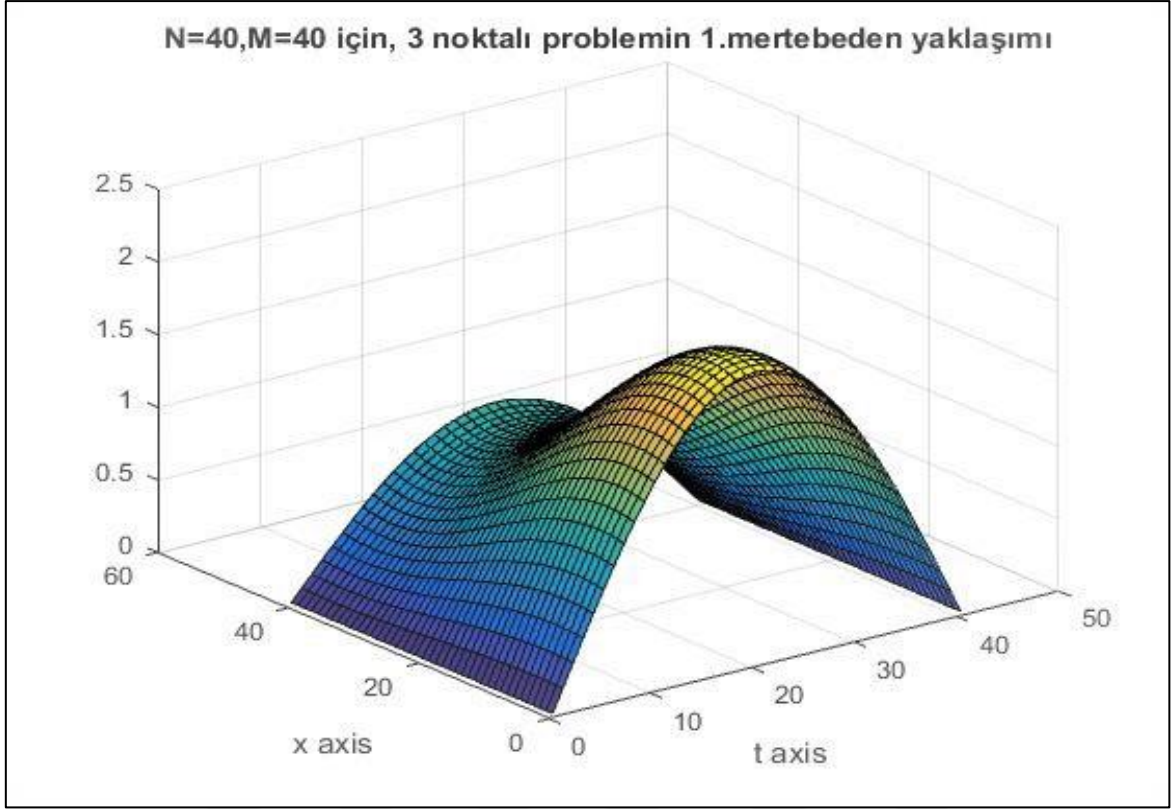
Nokta Sayısı	Fark Şeması Türü	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160
Bir noktalı	BMDFŞ	0.07378	3.68×10^{-2}	1.83×10^{-2}	9.18×10^{-3}
Bir noktalı	İMDFŞ	5.31×10^{-4}	1.33×10^{-4}	3.34×10^{-5}	8.36×10^{-6}
İki noktalı	BMDFŞ	0.04474	2.22×10^{-2}	1.11×10^{-2}	5.54×10^{-3}
İki noktalı	İMDFŞ	7.56×10^{-4}	1.89×10^{-4}	4.72×10^{-5}	1.18×10^{-5}
Üç noktalı	BMDFŞ	0.03808	1.87×10^{-2}	9.33×10^{-3}	4.65×10^{-3}
Üç noktalı	İMDFŞ	6.24×10^{-4}	1.56×10^{-4}	3.90×10^{-5}	9.76×10^{-6}

Şekil 5.1.1, Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli Dirichlet sınır değer probleminin gerçek çözüm grafiğini göstermektedir.



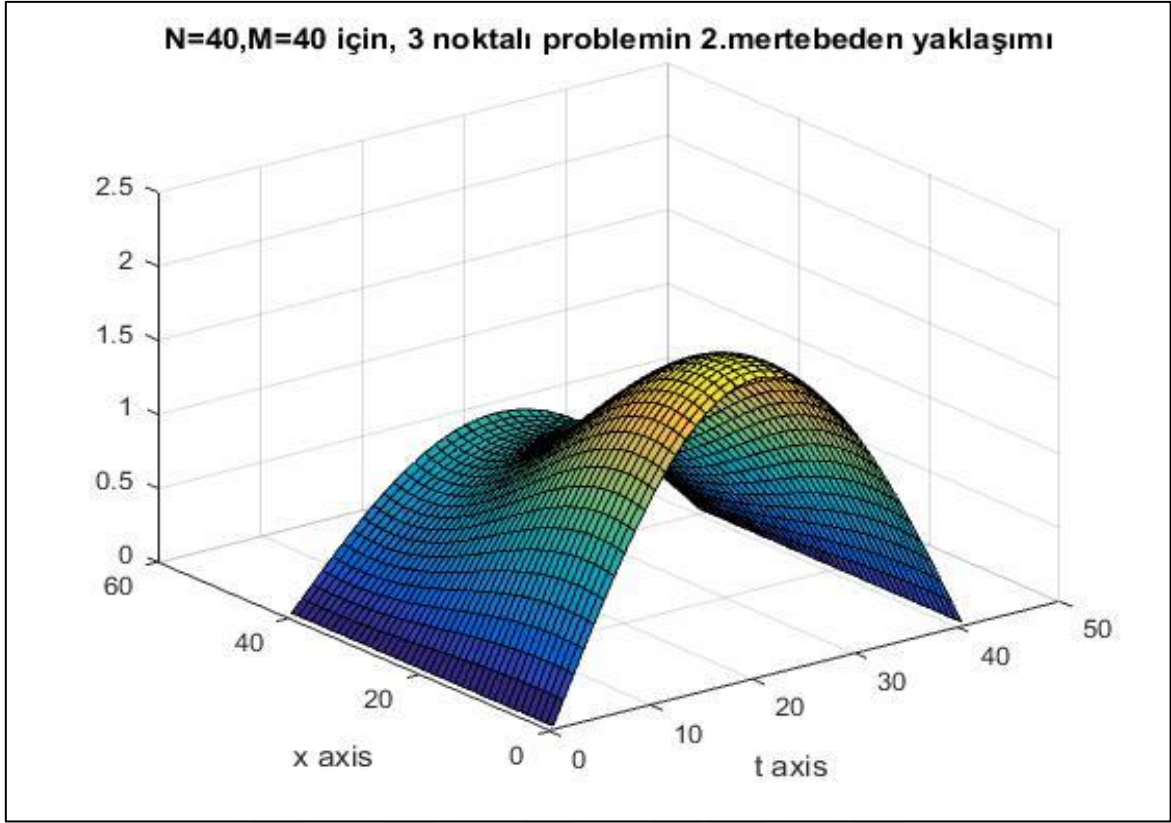
Şekil 5.1.1. (5.1) DSD BSTEÜP'nin gerçek çözüm grafiği

Şekil 5.1.2, Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üç noktalı üstbelirli Dirichlet sınır değer probleminin birinci mertebeden doğruluk fark şemasının yaklaşık çözüm grafiğini göstermektedir.



Şekil 5.1.2. (5.1) DSD BSTEÜP'nin BMDFŞ yaklaşık çözüm grafiği

Şekil 5.1.3, Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üç noktalı üstbelirli Dirichlet sınır değer probleminin ikinci mertebeden doğruluk fark şemasının yaklaşık çözüm grafiğini göstermektedir.



Şekil 5.1.3. (5.1) DSD BSTEÜP'nin İMDFŞ yaklaşık çözüm grafiği

5.2. Eliptik Denklem İçin Dirichlet Koşullu Bitsadze-Samarskii Tipi Üstbelirli Neumann Sınır Değer Probleminin Sayısal Sonuçları

Şimdi, Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli Neumann sınır değer probleminin sayısal sonuçları için aşağıdaki eliptik problemi göz önüne alalım.

$$\begin{cases}
 -\frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left((2 + \cos(\pi x)) \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} \right) + v(t, x) = g(t, x) + p(x), 0 < x < 1, 0 < t < 1, \\
 g(t, x) = [(3\pi^2 + 1)\sin(\pi t) + (2\pi^2 + 1)t] \cos(\pi x) + \pi^2 (\sin(\pi t) + t) \cos(2\pi x), \\
 v(0, x) = \cos(\pi x) = \phi(x), 0 \leq x \leq 1, \\
 v(\gamma, x) = (\sin(\pi \gamma) + \gamma + 1) \cos(\pi x) = \zeta(x), 0 \leq x \leq 1, \\
 v(1, x) - \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i, x) = \left[1 - \sum_{i=1}^q k_i (\sin(\pi \lambda_i) + \lambda_i) \right] \cos(\pi x), 0 \leq x \leq 1, \\
 v_x(t, 0) = v_x(t, 1) = 0, 0 \leq t \leq 1.
 \end{cases} \quad (5.12)$$

(5.12) probleminin gerçek çözümlerinin $v(t, x) = (\sin(\pi t) + t + 1) \cos(\pi x)$ ve $p(x) = (2\pi^2 + 1) \cos(\pi x) + \pi^2 \cos(2\pi x)$ olduğu açıktır. (5.12) probleminin $v(t, x)$ çözümü

için $v(t, x) = u(t, x) + A^{-1}p(x)$ bağıntısını kullanarak, $u(t, x)$ 'e göre yazılmış,

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left((2 + \cos(\pi x)) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right) + u(t, x) = g(t, x), 0 < x < 1, 0 < t < 1, \\ u(0, x) - u(\gamma, x) = -(\sin(\pi \gamma) + \gamma) \cos(\pi x), 0 \leq x \leq 1, \\ u(1, x) - \sum_{i=1}^q k_i u(\lambda_i, x) = \left[1 - \sum_{i=1}^q k_i (\sin(\pi \lambda_i) + \lambda_i) \right] \cos(\pi x), 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (5.13)$$

yardımcı lokal olmayan problemi elde edilir.

Yardımcı (5.13) probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için $[0, 1]_\tau \times [0, 1]_h$ kümesinde

$$[0, 1]_\tau \times [0, 1]_h = \{(t_k, x_n) : t_k = k\tau, k = 1, \dots, N-1, N\tau = 1, x_n = nh, n = 1, \dots, M-1, Mh = 1\}$$

grid noktalar uzayını ifade edelim.

(4.10) fark şemasını göz önüne alarak, (5.13) problemi için birinci mertebeden doğruluk fark şemasını

$$\begin{cases} \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + (2 + \cos(\pi x_n)) \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} - \pi \sin(\pi x_n) \frac{u_{n+1}^k - u_{n-1}^k}{2h} - u_n^k = \theta_n^k, \\ \theta_n^k = -g(t_k, x_n), k = 1, \dots, N-1, n = 1, \dots, M-1, \\ u_0^k = u_M^k = 0, k = 0, \dots, N, \\ u_n^0 - u_n^s = \phi_n - \zeta_n, n = 0, \dots, M, \\ u_n^N - \sum_{i=1}^q k_i u_n^{l_i} = \eta_n, n = 0, \dots, M, \\ u_0^k - u_1^k = u_M^k - u_{M-1}^k = 0, k = 0, \dots, N, \\ \phi_n = \phi(x_n), \zeta_n = \zeta(x_n), \eta_n = \eta(x_n), l = \left\lfloor \frac{\lambda}{\tau} \right\rfloor, s = \left\lfloor \frac{\gamma}{\tau} \right\rfloor \end{cases} \quad (5.14)$$

şeklinde ifade edelim.

(4.9) uygulanarak p -nin değerleri,

$$p_n = -(2 + \cos(\pi x_n)) \frac{(\phi_{n+1} - u_{n+1}^0) - 2(\phi_n - u_n^0) + (\phi_{n-1} - u_{n-1}^0)}{h^2} + \pi \sin(\pi x_n)$$

$$\times \frac{(\phi_{n+1} - u_{n+1}^0) - (\phi_{n-1} - u_{n-1}^0)}{2h} + (\phi_n - u_n^0), n = 1, \dots, M-1 \quad (5.15)$$

formülüyle hesaplanır.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2 + \cos(\pi x_n))}{h^2} - \frac{\pi \sin(\pi x_n)}{2h}, b_n = -\frac{2}{\tau^2} - \frac{2(2 + \cos(\pi x_n))}{h^2} - 1, \\ c_n &= \frac{(2 + \cos(\pi x_n))}{h^2} + \frac{\pi \sin(\pi x_n)}{2h}, d = \frac{1}{\tau^2} \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$U_s = \begin{bmatrix} u_s^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_s^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, s = n-1, n, n+1,$$

olmak üzere, (5.14) fark şeması

$$\begin{aligned} U_0 &= U_1, \\ A_n U_{n+1} + B_n U_n + C_n U_{n-1} &= I \theta_n, n = 1, \dots, M-1, \\ U_M &= U_{M-1}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

matris formunda yazılabilir. Burada, A_n, B_n ve C_n , $(N+1) \times (N+1)$ tipinde kare matrisler olup, θ_n ise $(N+1) \times 1$ tipinde bir sütun matris, I ise $(N+1) \times (N+1)$ tipinde bir birim matristir. A_n, B_n, C_n (5.7), (5.8) ve (5.9) matrisleriyle (şeklinde) tanımlanır.

$$\theta_n = \begin{bmatrix} \theta_n^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_n^N \end{bmatrix}, n = 1, \dots, M-1,$$

$\alpha_n (n = 1, \dots, M-1)$ $(N+1) \times (N+1)$ bir kare matris, $\beta_n (n = 1, \dots, M-1)$, $(N+1) \times 1$ tipinde

bir sütun matris olmak üzere, (5.17) fark denkleminin çözümü (Samarskii ve Nikolaev, 1989)

$$U_n = \alpha_{n+1} U_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M-1, \dots, 1$$

şeklinde aranır. (5.17) denkleminin çözümü için,

$$\alpha_{n+1} = -(B_n + C_n \alpha_n)^{-1} A_n,$$

$$\beta_{n+1} = -(B_n + C_n \alpha_n)^{-1} (I \theta_n - C_n \beta_n), n = 1, \dots, M-1,$$

formülleri geçerlidir. Burada α_1 , $(N+1) \times (N+1)$ tipinde birim kare matris iken, β_1 , $(N+1) \times 1$ bir sıfır sütun vektördür.

Şimdi (4.11) fark şemasını ve

$$\omega'(0) = \frac{-3\omega(0) + 4\omega(h) - \omega(2h)}{2h} + O(h^2),$$

$$\omega'(1) = \frac{-3\omega(1) + 4\omega(1-h) - \omega(1-2h)}{2h} + O(h^2),$$

$$\omega'''(0) = \frac{-10\omega(0) - 15\omega(h) + 6\omega(2h) - \omega(3h)}{h^3} + O(h^2),$$

$$\omega'''(1) = \frac{-10\omega(1) - 15\omega(1-h) + 6\omega(1-2h) - \omega(1-3h)}{h^3} + O(h^2)$$

yaklaşım formüllerini kullanarak, t ve x değişkenleri için ikinci mertebeden doğruluk fark şeması,

$$\begin{cases}
-\frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + (2 + \cos(\pi x_n)) \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \frac{u_{n+1}^k - u_{n-1}^k}{2h} - u_n^k = \theta_n^k, \\
\theta_n^k = -g(t_k, x_n), k = 1, \dots, N-1, n = 1, \dots, M-1, \\
u_n^0 + (\mu_0 - 1)u_n^s - \mu_0 u_n^{s+1} = \phi_n - \zeta_n, \\
u_n^N + \sum_{i=1}^q k_i (\mu_i - 1) u_n^{l_i} - \sum_{i=1}^q k_i \mu_i u_n^{l_i+1} = \eta_n, n = 0, \dots, M, \\
-3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k = -3u_M^k + 4u_{M-1}^k - u_{M-2}^k = 0 \\
10u_0^k - 15u_1^k + 6u_2^k - u_3^k = 10u_M^k - 15u_{M-1}^k + 6u_{M-2}^k - u_{M-3}^k = 0 \\
\phi_n = \phi(x_n), \zeta_n = \zeta(x_n), \eta_n = \eta(x_n), l = \left\lceil \frac{\lambda}{\tau} \right\rceil, s = \left\lceil \frac{\gamma}{\tau} \right\rceil.
\end{cases} \quad (5.18)$$

şeklinde kurulur.

(5.18) fark şeması,

$$\begin{aligned}
-3U_0 + 4U_1 - U_2 &= 0, \\
A_n U_{n+1} + B_n u_n + C_n U_{n-1} &= I \theta_n, n = 1, \dots, M-1, \\
-3U_M + 4U_{M-1} - U_{M-2} &= 0
\end{aligned} \quad (5.19)$$

matris formunda yazılabilir. Burada A_n , B_n ve C_n , (5.7), (5.11) ve (5.9) matrisleriyle tanımlıdır. B_n matrisindeki b_n ve d (5.16) ile aynıdır, diğer katsayılar ise,

$$\begin{aligned}
y_0 &= \frac{\gamma}{\tau} - s - 1 = \mu_0 - 1, z_0 = -\frac{\gamma}{\tau} + s = -\mu_0, \\
y_1 &= \frac{\lambda_1}{\tau} - l_1 - 1 = \mu_1 - 1, z_1 = -\frac{\lambda_1}{\tau} + l_1 = -\mu_1, \\
y_2 &= \frac{\lambda_2}{\tau} - l_2 - 1 = \mu_2 - 1, z_2 = -\frac{\lambda_2}{\tau} + l_2 = -\mu_2, \\
y_3 &= \frac{\lambda_3}{\tau} - l_3 - 1 = \mu_3 - 1, z_3 = -\frac{\lambda_3}{\tau} + l_3 = -\mu_3, \\
&\dots \\
y_i &= \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i - 1 = \mu_i - 1, z_i = -\frac{\lambda_i}{\tau} + l_i = -\mu_i
\end{aligned}$$

şeklindedir.

α_n, β_n , $(N+1) \times (N+1)$ tipinde kare matrisler olup, φ_n ise bir $(N+1) \times 1$

($n = 0, \dots, M-2$) sütun matrisi olmak üzere; (5.19) çözümü bu formül ile

$$U_n = \alpha_n U_{n+1} + \beta_n U_{n+2} + \varphi_n, n = M-1, \dots, 1$$

elde edilir. α_n, β_n ve φ_n için,

$$\alpha_n = -(B_n + C_n \alpha_{n-1})^{-1} (A_n + C_n \beta_{n-1}),$$

$$\beta_n = 0,$$

$$\varphi_n = -(B_n + C_n \alpha_{n-1})^{-1} (I\theta_n - C_n \varphi_{n-1}),$$

formülleri geçerlidir. Burada,

$$\alpha_0 = \frac{4}{3}I, \beta_0 = -\frac{1}{3}I, \varphi_0 = 0_{(N+1) \times 1},$$

$$\alpha_1 = \frac{8}{5}I, \beta_1 = -\frac{3}{5}I, \varphi_1 = 0_{(N+1) \times 1},$$

$$\alpha_{M-3} = \frac{8}{3}I, \beta_{M-3} = -\frac{5}{3}I, \varphi_{M-3} = 0_{(N+1) \times 1},$$

$$\alpha_{M-2} = 4I, \beta_{M-2} = -3I, \varphi_{M-2} = 0_{(N+1) \times 1}.$$

$$S_{11} = -3A_{M-2} - 8B_{M-2} - 8C_{M-2}\alpha_{M-3} - 3C_{M-2}\beta_{M-3},$$

$$S_{12} = 4A_{M-2} + 9B_{M-2} + 9C_{M-2}\alpha_{M-3} + 4C_{M-2}\beta_{M-3},$$

$$S_{21} = -3B_{M-1} - 8C_{M-1},$$

$$S_{22} = A_{M-1} + 4B_{M-1} + 9C_{M-1},$$

$$L_1 = I\theta_{M-2} - C_{M-2}\varphi_{M-3},$$

$$L_2 = I\theta_{M-1}$$

olmak üzere, u_M ve u_{M-1} için,

$$U_M = (S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21})^{-1}(L_1 - S_{12}S_{22}^{-1}L_2),$$

$$U_{M-1} = S_{22}^{-1}(L_2 - S_{21}u_M),$$

elde edilir.

Yaklaşık bir çözüm elde etmek için MATLAB programı kullanılmıştır. Farklı $N=M$ ve $T=1$ değerleri için sayısal çözümler elde edilmiştir. Yardımcı yerel olmayan ve ters problemlerin fark şemalarının (t_k, x_n) grid noktalarındaki sayısal çözümleri sırasıyla u_n^k ve v_n^k grid fonksiyonlarıyla, bilinmeyen p fonksiyonunun x_n grid noktalarındaki sayısal çözümü ise p_n grid fonksiyonuyla gösterilmiştir. Gerçek çözümün (t_k, x_n) noktasındaki değeri $u(t_k, x_n)$ ile verildi. Bunların karşılaştırılması için,

$$Eu_M^N = \max_{1 \leq k \leq N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} |u(t_k, x_n) - u_n^k|^2 h \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$Ev_M^N = \max_{1 \leq k \leq N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} |v(t_k, x_n) - v_n^k|^2 h \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$Ep_M = \left(\sum_{n=1}^{M-1} |p(x_n) - p_n|^2 h \right)^{\frac{1}{2}}$$

hata formülleri kullanılmıştır.

MATLAB programı kullanılarak (5.12) probleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Sayısal çözümler bir, iki ve üç noktalı lokal olmayan Bitsadze-Samarskii tipi koşullar içeren üstbelirli problemler için hesaplanmıştır.

Bir noktalı problemde $q = 1, \gamma = 0.4, \lambda_1 = 0.7, k_1 = 1$, iki noktalı problemde $q = 2, \gamma = 0.2, \lambda_1 = 0.6, \lambda_2 = 0.9, k_1 = \frac{1}{6}, k_2 = \frac{5}{6}$ ve üç noktalı problemde ise $q = 3, \gamma = 0.1, \lambda_1 = 0.3, \lambda_2 = 0.7, \lambda_3 = 0.8, k_1 = \frac{1}{10}, k_2 = \frac{2}{10}, k_3 = \frac{7}{10}$ olarak alınmıştır.

Tablo 5.2.1'den 5.2.3'e kadar gerçek çözümler ve fark şemaları arasındaki hata analizleri verilmektedir ve bu tablolar $N=M=20, 40, 80$ ve 160 için oluşturulmuştur. Sayısal deneylerden elde edilen sonuçlardan, ikinci mertebeden fark şemasının birinci mertebeden fark şemasından daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Table 5.2.1. Bir, iki ve üç noktalı NSD BSTÜEP'lerdeki (5.13) için hatalar

Nokta Sayısı	Fark Şeması Türü	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160
Bir Noktalı	BMDFŞ	0.72054	0.34401	0.16805	8.30×10^{-2}
Bir Noktalı	İMDFŞ	0.11251	1.50×10^{-2}	2.18×10^{-3}	3.85×10^{-4}
İki Noktalı	BMDFŞ	0.6839	0.32678	0.15971	7.89×10^{-2}
İki Noktalı	İMDFŞ	0.10724	1.43×10^{-2}	2.07×10^{-3}	3.65×10^{-4}
Üç Noktalı	BMDFŞ	0.65402	0.31258	0.1528	7.55×10^{-2}
Üç Noktalı	İMDFŞ	0.10305	1.37×10^{-2}	1.98×10^{-3}	3.50×10^{-4}

Tablo 5.2.1'de bir, iki ve üç noktalı (5.13) yardımcı problemlerinin gerçek çözümleriyle birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemalarının yaklaşık çözümleri arasındaki hatalar gösterilmektedir.

Tablo 5.2.2. Bir, iki ve üç noktalı NSD BSTÜEP'lerdeki p için hatalar

Nokta Sayısı	Fark Şeması Türü	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160
Bir Noktalı	BMDFŞ	0.23847	0.10539	4.92×10^{-2}	2.30×10^{-2}
Bir Noktalı	İMDFŞ	0.31753	5.90×10^{-2}	1.13×10^{-2}	2.26×10^{-3}
İki Noktalı	BMDFŞ	0.34404	0.17834	8.13×10^{-2}	4.63×10^{-2}
İki Noktalı	İMDFŞ	0.20296	3.65×10^{-2}	7.20×10^{-3}	1.54×10^{-3}
Üç Noktalı	BMDFŞ	0.70016	0.35855	0.18181	9.15×10^{-2}
Üç Noktalı	İMDFŞ	0.13998	2.32×10^{-2}	4.78×10^{-3}	1.13×10^{-3}

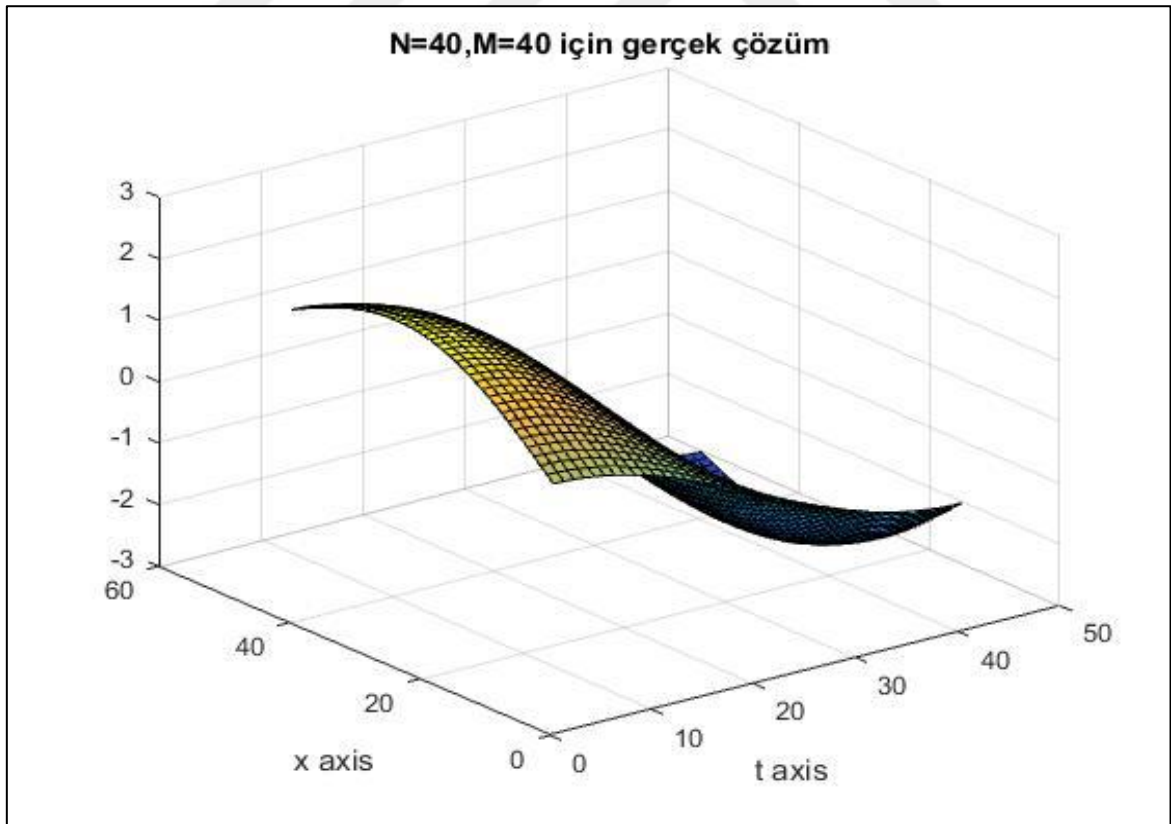
Tablo 5.2.2'de bir, iki ve üç noktalı üstbelirli problemlerin bilinmeyen p elemanının gerçek çözümleriyle, fark şemaları ile elde edilen çözümler arasındaki hatalar gösterilmektedir.

Tablo 5.2.3. Bir, iki ve üç noktalı NSD BSTÜEP’lerdeki v için hatalar

Nokta Sayısı	Fark Şeması Türü	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160
Bir Noktalı	BMDFŞ	2.00×10^{-2}	1.23×10^{-2}	6.79×10^{-3}	3.65×10^{-3}
Bir Noktalı	İMDFŞ	1.72×10^{-3}	1.80×10^{-4}	2.16×10^{-5}	3.87×10^{-6}
İki Noktalı	BMDFŞ	3.48×10^{-2}	1.63×10^{-2}	7.85×10^{-3}	3.85×10^{-3}
İki Noktalı	İMDFŞ	3.85×10^{-3}	4.60×10^{-4}	6.07×10^{-5}	1.03×10^{-5}
Üç Noktalı	BMDFŞ	5.31×10^{-2}	2.40×10^{-2}	1.16×10^{-2}	5.69×10^{-3}
Üç Noktalı	İMDFŞ	5.45×10^{-3}	6.45×10^{-4}	8.51×10^{-5}	1.49×10^{-5}

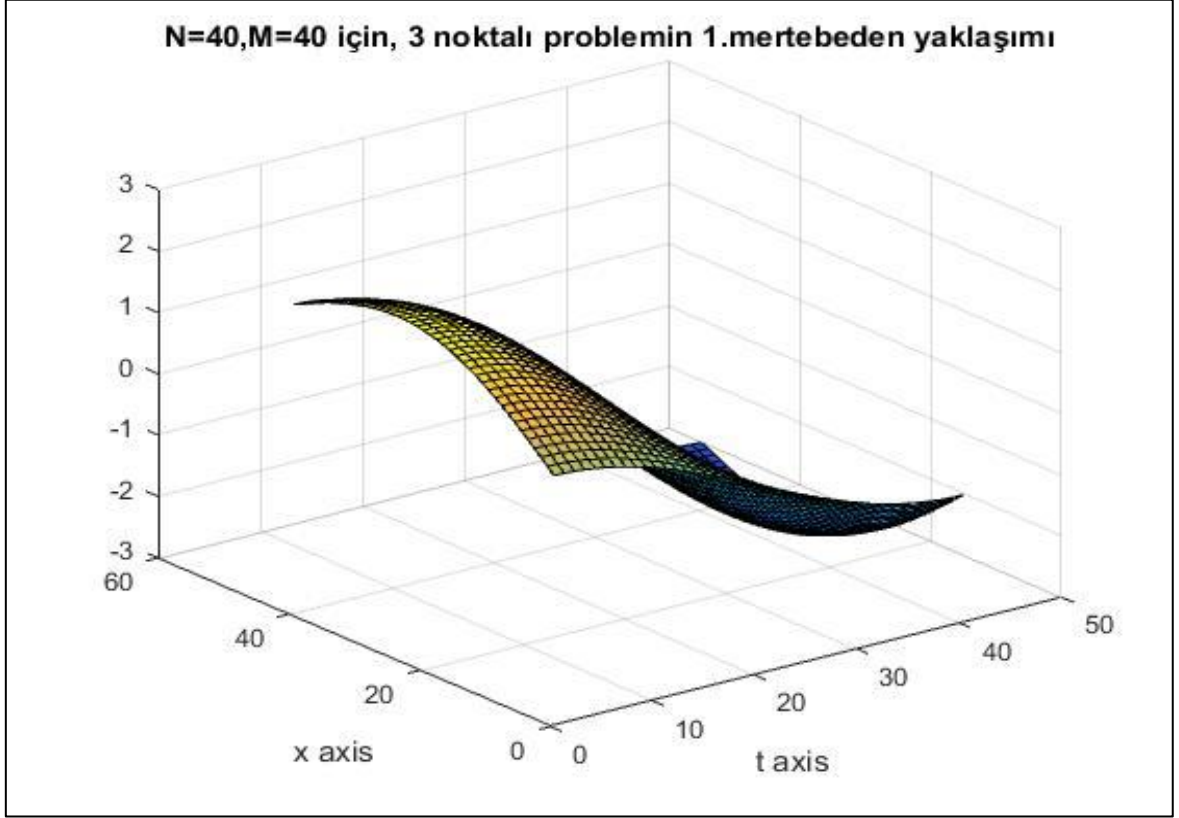
Tablo 5.2.3’de (5.12) bir, iki ve üç noktalı üstbelirli problemlerinin gerçek çözümleriyle birinci ve ikinci mertebeden fark şemalarıyla elde edilen çözümleri arasındaki hatalar gösterilmektedir.

Şekil 5.2.1, Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli Neumann sınır değer probleminin gerçek çözüm grafiğini göstermektedir.



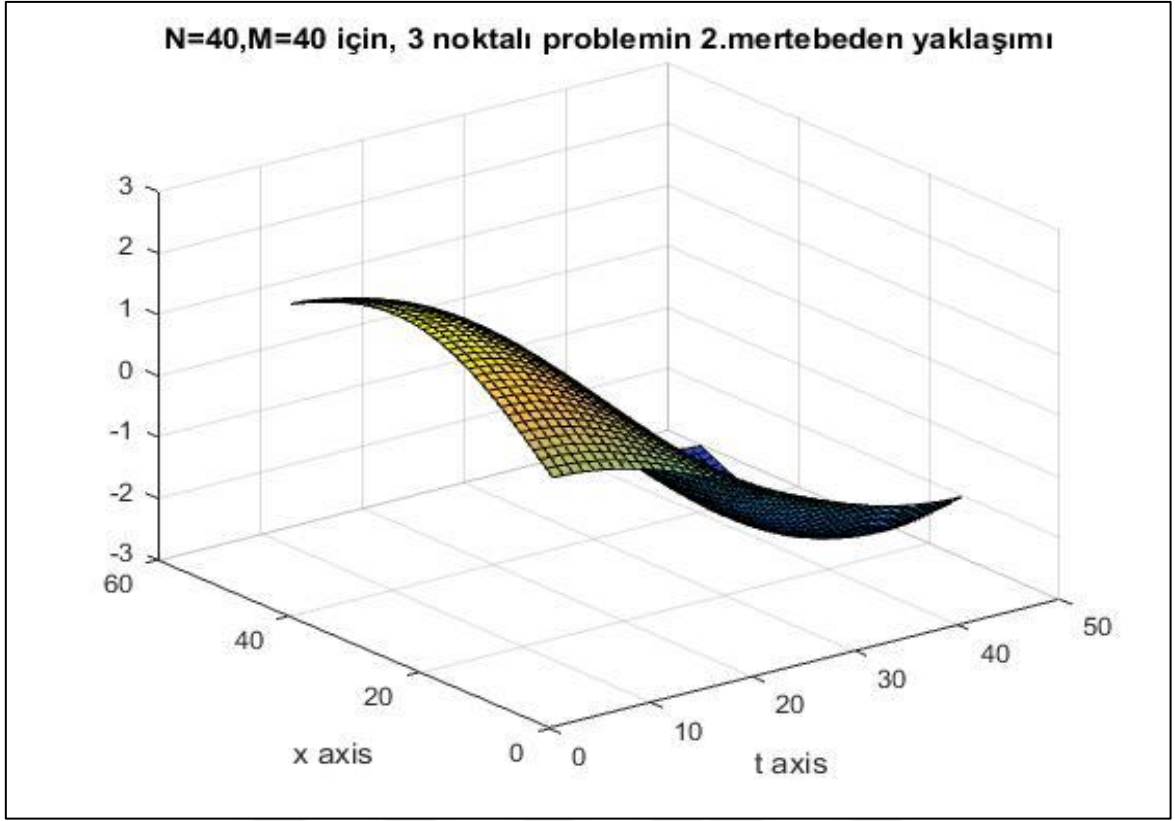
Şekil 5.2.1. (5.12) NSD BSTÜEP’nin gerçek çözüm grafiği

Şekil 5.2.2, Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üç noktalı üstbelirli Neumann sınır değer probleminin birinci mertebeden doğruluk fark şemasının yaklaşık çözüm grafiğini göstermektedir.



Şekil 5.2.2. (5.12) NSD BSTÜEP'nin BMDFŞ yaklaşık çözüm grafiği

Şekil 5.2.3, Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üç noktalı üstbelirli Neumann sınır değer probleminin ikinci mertebeden doğruluk fark şemasının yaklaşık çözüm grafiğini göstermektedir.



Şekil 5.2.3. (5.12) NSD BSTÜEP'nin İMDFŞ yaklaşık çözüm grafiği

6. SONUÇLAR

Bu çalışma, Dirichlet sınır koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli eliptik probleminin kararlılık analizini araştırmıştır. Çalışma sonucunda elde edilen özgün sonuçlar sırasıyla şu şekildedir:

1. A operatörü, H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı olmak üzere,

$$\begin{cases} -v_{tt}(t) + Av(t) = g(t) + p, 0 < t < T, \\ v(0) = \phi, v(T) = \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i) + \eta, v(\gamma) = \zeta, \end{cases} \quad (6.1)$$

şeklindeki Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli eliptik probleminin çözümü için kararlılık kestirimi ve koersif eşitsizliği ispatlanmıştır.

2. $[0, T] \times \Omega$ bölgesinde $\Omega = (0, l)^n$ olmak üzere, çok boyutlu eliptik kısmi diferensiyel denklem için,

$$\begin{cases} -v_{tt}(t, x) - \sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} + \sigma v(x) = g(t, x) + p(x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, 0 < t < T, \\ v(0, x) = \phi(x), v(T, x) - \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i, x) = \eta(x), x \in \bar{\Omega}, \\ v(\gamma, x) = \zeta(x), x \in \bar{\Omega}, 0 < \gamma < T, \\ v(t, x) = 0, x \in S. \end{cases} \quad (6.2)$$

Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli ve Dirichlet sınır değer problemi, bunun çözümü için ise, kararlılık ve koersif kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

3. $[0, T] \times \Omega$ bölgesinde $\Omega = (0, l)^n$ olmak üzere, çok boyutlu eliptik kısmi diferensiyel denklem için,

$$\left\{ \begin{array}{l} -v_{tt}(t, x) - \sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} + \sigma v(t, x) = g(t, x) + p(x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, 0 < t < T, \\ v(0, x) = \phi(x), v(T, x) - \sum_{i=1}^q k_i v(\lambda_i, x) = \eta(x), x \in \bar{\Omega}, \\ v(\gamma, x) = \zeta(x), x \in \bar{\Omega}, 0 < \gamma < T, \\ \frac{\partial v(t, x)}{\partial n} = 0, x \in S, 0 \leq t \leq T. \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli ve Neumann sınır değer problemi, bunun çözümü için ise, kararlılık ve koersif kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

4. (6.1) üstbelirli eliptik probleminin yaklaşık çözümü için birinci mertebeden doğruluk

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau^{-2}(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) + Av_k = \theta_k + p, \theta_k = g(t_k), \\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = T, \\ v_0 = \phi, v_s = \zeta, v_N = \sum_{i=1}^q k_i v_{l_i} + \eta, \end{array} \right.$$

ve ikinci mertebeden doğruluk

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau^{-2}(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) + Av_k = \theta_k + p, \theta_k = g(t_k), \\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = T, \\ v_0 = \phi, v_s + (v_{s+1} - v_s) \left(\frac{\gamma}{\tau} - s \right) = \zeta, \\ v_N = \sum_{i=1}^q k_i \left[v_{l_i} + (v_{l_i+1} - v_{l_i}) \left(\frac{\lambda_i}{\tau} - l_i \right) \right] + \eta. \end{array} \right.$$

fark şemaları kurulmuştur. Birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemalarının çözümü için ise kararlılık, hemen-hemen koersif kararlılık ve koersif kararlılık kestirimleri kanıtlanmıştır.

5. Çok boyutlu eliptik diferensiyel denklem için (6.2) üstbelirli Dirichlet sınır değer probleminin birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemaları kurulmuştur. Bunların çözümleri için ise kararlılık, hemen-hemen koersif kararlılık ve koersif kararlılık kestirimleri ispatlanmıştır.

6. Çok boyutlu eliptik diferensiyel denklem için (6.3) üstbelirli Neumann sınır değer probleminin birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemaları kurulmuştur. Bunların çözümleri için ise, kararlılık, hemen-hemen koersif kararlılık ve koersif kararlılık kestirimleri ispatlanmıştır.

7. Bir, iki ve üç noktalı lokal olmayan Bitsadze-Samarskii tipi koşulları içeren üstbelirli Dirichlet ve Neumann sınır değer problemleri için, MATLAB programı kullanılarak sayısal çözümler hesaplanmıştır. Her iki problemin de birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemalarının çözümleri için elde edilen teorik ifadeler, sayısal deneylerin sonuçlarıyla desteklenmektedir.



7. KAYNAKLAR

- Alekseev, G. V., Vakhitov, I. S., Soboleva O. V., 2012. Stability Estimates in Identification Problems for the Convection-Diffusion-Reaction Equation, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 52, 12, 1635-1649.
- Aleroev, T. S., Kirane M., Salman A. Malik., 2013. Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition, Electron. J. Differential Equations, 2013, 270, 1-16.
- Ashyralyev, A., 2008. A note on the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 344, 1, 557-573.
- Ashyralyev, A., Agirseven, D., 2014. On source identification problem for a delay parabolic equation, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 19, 3, 335-349.
- Ashyralyev, A., Ashyralyev, C., 2014. On the problem of determining the parameter of an elliptic equation in a Banach space, Abstract and Applied Analysis, 19, 3, 350-366.
- Ashyralyev, A., Erdogan, A. S., 2010. Well-posedness of the inverse problem of a multidimensional parabolic equation, Vestn. Odessa Nat. Univ., Math. Mech., 15, 18, 129-135.
- Ashyralyev, A., Erdogan, A. S., 2014. Well-Posedness of the Right-Hand Side Identification Problem for a Parabolic Equation, Ukrainian Mathematical Journal, 66, 2, 165-177.
- Ashyralyev, A., Erdogan, A. S., Demirdag, O., 2012. On the determination of the right-hand side in a parabolic equation, Applied Numerical Mathematics, 62, 11, 1672-1683.
- Ashyralyev, A., Ozesenli Tetikoglu F. S., 2011. On Numerical Solutions of Nonclassical Problems for Elliptic Equations, In: Simos, T.E. (Eds.), International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM), AIP Conference Proceedings, 1389.
- Ashyralyev, A., Ozesenli Tetikoglu F. S., 2012. FDM for Elliptic Equations with Bitsadze-Samarskii-Dirichlet Conditions, Abstract and Applied Analysis, 2012, Article ID 454831.
- Ashyralyev, A., Ozesenli Tetikoglu F. S., 2012. A Third-Order of Accuracy Difference Scheme for the Bitsadze-Samarskii Type Nonlocal Boundary Value Problem, In: Ashyralyev, A., Lukasov, A. (Eds.), First International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2012), AIP Conference Proceedings, 1470, 61-64.

- Ashyralyev, A., Ozesenli Tetikoglu F. S., 2012. A Fourth-Order of Accuracy Difference Scheme for the Bitsadze-Samarskii Type Nonlocal Boundary Value Problem, In: Simos, T. E.; Psihoyios, G.; Tsitouras, C.; et al. (Eds.), International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM), AIP Conference Proceedings, 1479, 594-597.
- Ashyralyev, A., Ozesenli Tetikoglu F. S., 2013. A Note on Bitsadze-Samarskii Type Nonlocal Boundary Value Problems: Well-Posedness, Numerical Functional Analysis and Optimization, 34, 9, 939-975.
- Ashyralyev, A., Ozesenli Tetikoglu F. S., 2014. Well-posedness of a third order of accuracy difference scheme for Bitsadze-Samarskii type multi-point NBVPs, In: Ashyralyev, A., Malkowsky, E. (Eds.), International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014), AIP Conference Proceedings, 1611, 271-275.
- Ashyralyev, A., Ozesenli Tetikoglu F.S., 2014. On well-posedness of nonclassical problems for elliptic equations, Mathematical Methods in Applied Sciences, 37, 17, 2663-2676.
- Ashyralyev, A., Ozturk, E., 2011. On the Fourth Order of Accuracy Difference Scheme for the Bitsadze-Samarskii Type Nonlocal Boundary Value Problem, In: Simos, T.E. (Eds), International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM), AIP Conference Proceedings, 1389, 2011.
- Ashyralyev, A., Ozturk, E., 2012. The numerical solution of the Bitsadze-Samarskii nonlocal boundary value problems with the Dirichlet-Neumann condition, Abstract and Applied Analysis, 2012, Article ID 730804.
- Ashyralyev, A., Ozturk, E., 2012. On Bitsadze-Samarskii Type Nonlocal Boundary Value Problems for Semi-Linear Elliptic Equations, In: Ashyralyev, A., Lukasov, A. (Eds.), First International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2012), AIP Conference Proceedings, 1470, 114-117.
- Ashyralyev, A., Ozturk, E., 2013. On Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problems for elliptic differential and difference equations: Well-posedness, Applied Mathematics and Computation, 219, 3, 1093-1107.
- Ashyralyev, A., Ozturk, E., 2014. Stability of Difference Schemes for Bitsadze-Samarskii Type Nonlocal Boundary Value Problem Involving Integral Condition, Filomat, 28, 5, 1027-1047.
- Ashyralyev, A., Ozturk, E., 2014. On a difference scheme of second order of accuracy for the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary-value problem, Boundary Value Problems, 2014:14.

- Ashyralyev A. and Sobolevskii, P. E., 2004. New Difference Schemes for Partial Differential Equations, Operator Theory Advances and Applications, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 443p.
- Ashyralyev, A., Urun, M., A Second Order of Accuracy Difference Scheme for Schrodinger Equations with an Unknown Parameter, Filomat, 28, 5, 981-993.
- Ashyralyev, A., Urun, M., 2013. Determination of a Control Parameter for the Difference Schrodinger Equation, Abstract and Applied Analysis, 2013, Article ID 548201.
- Ashyralyev, C., 2014. High order of accuracy difference schemes for the inverse elliptic problem with Dirichlet condition, Boundary Value Problems, 2014: 5.
- Ashyralyev, C., 2014. Inverse Neumann problem for an equation of elliptic type, In: Ashyralyev, A., Malkowsky, E. (Eds.), 2nd International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014), AIP Conference Proceedings, 1611, 46-52.
- Ashyralyev, C., 2014. High order approximation of the inverse elliptic problem with Dirichlet-Neumann Conditions, Filomat, 28, 5, 947-962.
- Ashyralyev, C., 2015. Well-posedness of a fourth order of accuracy difference scheme for the Neumann type overdetermined elliptic problem, AIP Conference Proceedings, 1676, 020007, doi: 10.1063/1.4930433.
- Ashyralyev, C., 2017. A fourth order approximation of the Neumann type overdetermined elliptic problem, Filomat, 31, 4, 967-980.
- Ashyralyev, C., 2017. Stability Estimates for Solution of Neumann Type Overdetermined Elliptic Problem, Numerical Functional Analysis and Optimization, 38, 4.
- Ashyralyev, C., Akkan, Y., 2015. Numerical solution to inverse elliptic problem with Neumann type overdetermination and mixed boundary conditions, Electron. J. Differential Equations, 2015, 188, 1-15.
- Ashyralyev, C., Akyuz, G., 2016. Stability estimates for solution of Bitsadze-Samarskii type inverse elliptic problem with Dirichlet conditions, AIP Conference Proceedings, 1759, 020129.
- Ashyralyev, C., Demirdag, O., 2012. The difference problem of obtaining the parameter of a parabolic equation, Abstract and Applied Analysis, 2012, Article ID 603018.
- Ashyralyev, C., Dedetürk, M., 2013. Approximate solution of inverse problem for elliptic equation with overdetermination, Abstract and Applied Analysis, 2013, Article ID 548017.

- Ashyralyev, C., Dedetürk, M., 2014. Approximation of the inverse elliptic problem with mixed boundary value conditions. In: Ashyralyev, A., Malkowsky, E. (Eds.), 2nd International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014) AIP Conference Proceedings, 1611, 25-29.
- Ashyralyev, C. Dual, A and Sozen, Y., 2012. Finite difference Method for the Reverse Parabolic Problem, Abstract and Applied Analysis, 2012, Article ID 294154.
- Ashyralyev, C., Dural, A., Sozen, Y., 2012. Finite difference method for the reverse parabolic problem with Neumann condition, In: Ashyralyev, A., Lukasov, A. (Eds.), First International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2012), AIP Conference Proceedings, 1470, 102-105.
- Bouzitouna, A., Boussetila N., Rebbani F., 2013. Two regularization methods for a class of inverse boundary value problems of elliptic type, Boundary Value Problems, 2013: 178.
- Dehghan, M., 2001. Determination of a control parameter in the two-dimensional diffusion equation, Appl. Numer. Math., 37, 4, 489-502.
- Eidel'man, Y. S., 1991. An inverse problem for an evolution equation, Mathematical Notes, 49, 5, 535-540.
- Erdogan, A.S., 2012. A Note on the Right-Hand Side Identification Problem Arising in Biofluid Mechanics, Abstract and Applied Analysis, 2012, Article ID 548508.
- Erdogan, A. S., Ashyralyev, A., 2013. Stability of Implicit Difference Scheme for Solving the Identification Problem of a Parabolic Equation, In: Dimov, I.; Farago, I.; Vulkov, L., (Eds.) 5th International Conference Numerical Analysis and Applications (NAA), Lecture Notes in Computer Science, 8236, 271-278.
- Erdogan, A. S., Ashyralyev, A., 2014. On the second order implicit difference schemes for a right hand side identification problem, Applied Mathematics and Computation, 226, 212-228.
- Erdogan, A. S., Sazaklioglu, A., 2014. A note on the numerical solution of an identification problem for observing two-phase flow in capillaries, Mathematical method in the Applied Sciences, 37, 16, 2393-2405.
- Erdogan, A. S., Uygun H., 2012. A Note on the Inverse Problem for a Fractional Parabolic Equation, Abstract and Applied Analysis, 2012, Article ID 276080.
- Gölgeleyen, İ., Kaytmaz, Ö. 2016. Ters ve kötü konumlanmış problemler teorisinin bilim ve teknolojiye bazı uygulamaları, Karalması Fen ve Müh. Dergisi, 6, 1, 230-237.
- Hasanov, A., 2010. Identification of unknown diffusion and convection coefficients infusion transport problems from flux data: An analytical approach, Journal of Mathematical Chemistry, 48, 2, 413--423.

- Kabanikhin, S.I., 2008. Definitions and examples of inverse and ill-posed problems, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 16, 4, 317--357.
- Kabanikhin, S. I., 2011. Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications, Walter de Gruyter, Berlin, 456p.
- Kabanikhin, S. I., Krivorotko, O. I., 2015. Identification of biological models described by systems of nonlinear differential equations, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 23, 5, 519-527.
- Kalmenov, T. S., Shaldanbaev, A. A., 2010. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 18, 471-492.
- Klibanov, M. V., Romanov, V. G., 2016. Two reconstruction procedures for a 3D phaseless inverse scattering problem for the generalized Helmholtz equation, Inverse Problems, 32, 1.
- Krein, S. G., 1966. Linear Differential Equations in Banach Space, Nauka, Moscow, Russia, 1966.
- Lavrentiyev, M. M., Derevtsov, E. I., Sharafutdinov, V. A., 1981. The determination of an optical body in homogeneous media by its images, Doklady Akademii Nauk SSSR, 1981, 260, 4, 799-803.
- Mehraliyev, Y. T., Kanca, F., 2014. An Inverse Boundary Value Problem for a Second Order Elliptic Equation in a Rectangle, Mathematical Modelling and Analysis, 2014, 19, 2, 241-256.
- Orlovskii, D. G., 2008. Inverse Dirichlet Problem for an Equation of Elliptic Type, Differential Equations, 2008, 44, 1, 124--134.
- Orlovsky, D. G., Piskarev, S., 2009. On approximation of inverse problems for abstract elliptic problems, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2009, 17, 8, 765 - 782.
- Orlovsky, D. G., 2013. Inverse problem for elliptic equation in a Banach space with Bitsadze-Samarsky boundary value conditions, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2013, 21, 1, 141-157.
- Orlovsky, D. G., Piskarev, S., 2013. Approximation of the Bitsadze-Samarskii inverse problem for an elliptic equation with the dirichlet conditions, Differential Equations, 49, 7, 895-907.
- Ozturk, E., 2013. Eliptik Diferansiyel ve Fark Denklemleri için Yerel olmayan Sınır Değer Problemi, Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Bursa, 148s.

- Prilepko, A. I., Orlovsky, D. G., Vasin, I. A., 2000. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, Marcel Dekker, New York.
- Qian, A., 2013. Identifying an unknown source in the Poisson equation by a wavelet dual least square method, Bound. Value Probl., 2013, 267.
- Romanov, V. G., Weng, C. I., Chen, T. C., 2003. An inverse problem for a layered elastic plate, Applied Mathematics and Computation, 137, 2-3, 349-369.
- Roberty, N. C., 2013. Simultaneous Reconstruction of Coefficients and Source Parameters in Elliptic Systems Modelled with Many Boundary Value Problems, Mathematical Problems in Engineering, 2013, Article ID 631950.
- Sakamoto K., Yamamoto M., 2009. Inverse heat source problem from time distributing overdetermination, Applicable Analysis, 88, 5, 735--748.
- Samarskii, A. A., Nikolaev, E. S., 1989. Numerical methods for grid equations, Vol 2, Birkhauser, Basel, Switzerland, 1989.
- Samarskii, A. A., Vabishchevich, P. N., 2007. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics, Inverse and Ill-Posed Problems Series, Walter de Gruyter, Berlin.
- Sobolevskii, P. E., 1975. Difference Methods for the Approximate Solution of Differential Equations, Voronezh State University Press, Voronezh, Russia.
- Soloviev, V. V., 2004. Inverse problems of source determination for the two-dimensional Poisson equation, Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki, 44, 5, 62-871.
- Soloviev, V. V., 2006. Inverse Problems for Elliptic Equations on the Plane I, Differential Equations, 42, 8, 1106-1114.
- Soloviev, V. V., 2007. Inverse Problems of Determining the Source and Coefficient in an Elliptic Equation in a Rectangle, Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki, 47, 8, 1365-1377.
- Soloviev, V. V., 2011. Inverse Coefficient Problems for Elliptic Equations in a Cylinder: I, Differential Equations, 49, 7, 908-916.
- Soloviev, V. V., 2011. Inverse Coefficient Problems for Elliptic Equations in a Cylinder: II, Differential Equations, 49, 8, 996-1005.
- Topsakal, N., and Amirov, R., 2010. Inverse Problem for Sturm-Liouville Operators with Coulomb Potential which have Discontinuity Conditions Inside an Interval, Mathematical Physics, Analysis and Geometry, 13, 1, 29-46.

EKLER

Ek 1. Üç Noktalı DSD BSTEÜP'İN Birinci ve İkinci Mertebeden Sayısal Çözümleri İçin MATLAB Program Kodları

```
function bsinverse3s(N,M,gm,lambda,miyu,omega)
%Numerical solution of the equation
%-Vtt-(3+sin(pi*x))Vxx-pi*cos(pi*x)Vx+V=f(t,x)+p(x);
%inverse problem
%v(0,x)=fi(x),v(1,x)=(1/5)*v(lambda,x)+(3/10)*v(miyu,x)+(1/2)*v(omega,x)+psi(x)
,
%v(gm,x)=ksi(x)
%v(t,0)=v(t,1)=0
%First and Second order in t and Second order in x
if nargin<1;end; close;bclose;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% first order%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
T=1; %lambda=0.68*T; gm=0.87*T; tau=T/N; h=1/M;
lbt=lambda/tau;l=floor(lbt);lbtl=lbt-l;
sbt=gm/tau;s=floor(sbt);sbts=sbt-s;
qbt=miyu/tau;q=floor(qbt);qbtq=qbt-q;
wbt=omega/tau;w=floor(wbt);wbtw=wbt-w;
%%% First step FIRST ORDER ACCURACY%%%%%%%%
%%%%%%%%Calculation U%%%%%%%%
A=zeros(N+1,N+1,M+1); B=zeros(N+1,N+1,M+1);
C=zeros(N+1,N+1,M+1); for n=1:M+1; for k=2:N; x=(n-1)*h;
A(k,k,n)=(3+sin(pi*x))/h^2+(pi*cos(pi*x))/(2*h);
C(k,k,n)=(3+sin(pi*x))/h^2-(pi*cos(pi*x))/(2*h);
B(k,k,n)=-2/tau^2-2*(3+sin(pi*x))/(h^2)-1; B(k,k+1,n)=1/tau^2;
B(k,k-1,n)=1/tau^2; end; B(1,1,n)=1; B(1,s+1,n)=-1; B(N+1,N+1,n)=1;
B(N+1,l+1,n)=-1/5; B(N+1,q+1,n)=-3/10; B(N+1,w+1,n)=-1/2; end;
R=eye(N+1,N+1); fii=zeros(N+1,M+1); for n=1:M+1
x=(n-1)*h; for k=2:N t=(k-1)*tau; fii(k,n)=-rsf(t,x); end;
fii(1,n)=ksii(0,x)-ksii(gm,x);
fii(N+1,n)=ksii(T,x)-(1/5)*ksii(lambda,x)-(3/10)*ksii(miyu,x)-(1/2)*ksii(omega,x);
end; alphaf{1}=zeros(N+1,N+1); bethaf{1}=zeros(N+1,1); for j=2:M
Q=inv(B(:,j)+C(:,j))*alphaf{j-1}; alphaf{j}=-Q*A(:,j);
bethaf{j}=Q*(R*(fii(:,j))-(C(:,j))*bethaf{j-1})); end;
U=zeros(N+1,M+1); for j=M:-1:1;
U(:,j)=alphaf{j}*U(:,j+1)+bethaf{j}; end;
%%Second step FRIST ORDER ACCURACY %%%%%%%%%
% %%%% calculation of p(x) %%%%
for n=2:M; x=(n-1)*h;
p1(n)=-(3+sin(pi*x))*(-2*(ksii(gm,x)-U(s+1,n))+(ksii(gm,x+h)-U(s+1,n+1))+...
(ksii(gm,x-h)-U(s+1,n-1)))/h^2-(pi*cos(pi*x))*((ksii(gm,x+h)-U(s+1,n+1))...
-(ksii(gm,x-h)-U(s+1,n-1)))/(2*h)+(ksii(gm,x)-U(s+1,n)); end;
p1(1)=-3*((ksii(gm,0)-U(s+1,1))-2*(ksii(gm,h)-U(s+1,2))+(ksii(gm,2*h)-...
U(s+1,3)))/h^2+pi*((ksii(gm,0)-U(s+1,1))-(ksii(gm,h)-U(s+1,2)))/h...
```

```

+(ksii(gm,0)-U(s+1,1));
p1(M+1)=-(3+sin(pi*x))*((ksii(gm,x)-U(s+1,M+1))-2*(ksii(gm,x-h)-U(s+1,M))...
+(ksii(gm,x-2*h)-U(s+1,M-1)))/h^2 -(pi*cos(pi*x))*((ksii(gm,x)...
-U(s+1,M+1))-(ksii(gm,x-h)-U(s+1,M)))/h+(ksii(gm,x)-U(s+1,M+1));
%%Third step FIRST ORDER ACCURACY %%%
%%Calculation V %%%
V=zeros(N+1,M+1); for n=1:M+1; x=(n-1)*h;
for k=1:N+1; t=(k-1)*tau;
V(k,n)=U(k,n)+ksii(gm,x)-U(s+1,n); end; end
%%ERROR ANALYSES FOR FIRST ORDER ACCURACY%%
%%EXACT SOLUTION U,V'%%%%%%%%
for n=1:M+1; for k=1:N+1; t=(k-1)*tau; x=(n-1)*h;
es(k,n)=exact(t,x); esu(k,n)=exactu(t,x); end; end;
%%%%%%%% EXACT P %%%
for n=1:M+1; x=(n-1)*h; esp(n)=exactp(x); end; pu=U; ftf=esu-pu;
fmat1=abs(ftf); fmat2=fmat1.*fmat1*h; fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2); maxerroru=max(fmat4); maxerrorp=0; for n=2:M;
maxerrorp=maxerrorp+(esp(n)-p1(n))^2; end
maxerrorp=maxerrorp^(1/2)*h^(1/2); pf=V;
ftf=es-pf; fmat1=abs(ftf); fmat2=fmat1.*fmat1*h; fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2); maxerror=max(fmat4);
%%%%%%%%Output FOR FIRST ORDER ACCURACY%%%%%%%%
format('shortG'); Grids=[N,M];
cevapFirstAccuracy=[maxerroru,maxerrorp,maxerror];
%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION for FIRST order%%%%%%%%
str1=strcat('N=',num2str(N),',','M=',num2str(M),' için 3 noktalı problemin 1.
mertebeden yaklaşımı');
figure;surf(pf);title(str1);xlabel('t axis'); ylabel('x axis'); rotate3d;
%%First step SECOND ORDER ACCURACY%%
%%Calculation U%%
A=zeros(N+1,N+1,M+1); B=zeros(N+1,N+1,M+1);
C=zeros(N+1,N+1,M+1); for n=1:M+1; for k=2:N; x=(n-1)*h;
A(k,k,n)=(3+sin(pi*x))/h^2+(pi*cos(pi*x))/(2*h);
C(k,k,n)=(3+sin(pi*x))/h^2-(pi*cos(pi*x))/(2*h);
B(k,k,n)=-2/tau^2-2*(3+sin(pi*x))/(h^2)-1;
B(k,k+1,n)=1/tau^2; B(k,k-1,n)=1/tau^2; end;
B(1,1,n)=1; B(1,s+1,n)=sbts-1; B(1,s+2,n)=-sbts; B(N+1,N+1,n)=1;
B(N+1,l+1,n)=1/5*(lbt1-1); B(N+1,l+2,n)=1/5*(-lbt1);
B(N+1,q+1,n)=3/10*(qbtq-1); B(N+1,q+2,n)=3/10*(-qbtq);
B(N+1,w+1,n)=1/2*(wbtw-1); B(N+1,w+2,n)=1/2*(-wbtw); end;
R=eye(N+1,N+1); fii=zeros(N+1,M+1);
for n=1:M+1; x=(n-1)*h; for k=2:N; t=(k-1)*tau;
fii(k,n)=-rsf(t,x); end; fii(1,n)=ksii(0,x)-ksii(gm,x);
fii(N+1,n)=ksii(T,x)-(1/5)*ksii(lambda,x)-(3/10)*ksii(miyu,x)-(1/2)*ksii(omega,x);
end; alphaf{1}=zeros(N+1,N+1); bethaf{1}=zeros(N+1,1);
for j=2:M; Q=inv(B(:,j)+C(:,j)*alphaf{j-1}); alphaf{j}=-Q*A(:,j);
bethaf{j}=Q*(R*(fii(:,j))-(C(:,j)*bethaf{j-1})); end;
U=zeros(N+1,M+1); for j=M:-1:1; U(:,j)=alphaf{j}*U(:,j+1)+bethaf{j}; end;
%%Second step SECOND ORDER ACCURACY%%

```

```

%%%%%%%% calculation of p(x)%%%%%%%%
for n=2:M; x=(n-1)*h;
p1(n)=- (3+sin(pi*x))*(-2*(ksii(gm,x)-(sbts*U(s+2,n)-(sbts-1)*U(s+1,n)))+...
(ksii(gm,x+h)-(sbts*U(s+2,n+1)-(sbts-1)*U(s+1,n+1)))+(ksii(gm,x-h)-...
-(sbts*U(s+2,n-1)-(sbts-1)*U(s+1,n-1))))/h^2-(pi*cos(pi*x))*((ksii(gm,...
x+h)-(sbts*U(s+2,n+1)-(sbts-1)*U(s+1,n+1)))-(ksii(gm,x-h)-...
(sbts*U(s+2,n-1)-(sbts-1)*U(s+1,n-1))))/(2*h)+(ksii(gm,x)...
-(sbts*U(s+2,n)-(sbts-1)*U(s+1,n))); end;
p1(1)=-3*((ksii(gm,0)-U(s+1,1))-2*(ksii(gm,h)-U(s+1,2)))+(ksii(gm,2*h)-...
U(s+1,3))/h^2+pi*((ksii(gm,0)-U(s+1,1))-(ksii(gm,h)-U(s+1,2)))/h...
+(ksii(gm,0)-U(s+1,1)); x=1;
p1(M+1)=- (3+sin(pi*x))*((ksii(gm,x)-U(s+1,M+1))-2*(ksii(gm,x-h)-U(s+1,M)))+...
(ksii(gm,x-2*h)-U(s+1,M-1))/h^2-(pi*cos(pi*x))*((ksii(gm,x)-U(s+1,M+1))...
-(ksii(gm,x-h)-U(s+1,M)))/h+(ksii(gm,x)-U(s+1,M+1));
%%%%%%%%Third step SECOND ORDER ACCURACY%%%%%%%%
%%%%%%%%Calculation V%%%%%%%%
V=zeros(N+1,M+1); for n=1:M+1; x=(n-1)*h; for k=1:N+1; t=(k-1)*tau;
V(k,n)=U(k,n)+ksii(gm,x)-sbts*U(s+2,n)+(sbts-1)*U(s+1,n); end; end;
%%%%%%%% ERROR ANALYSES FOR SECOND ORDER ACCURACY%%%%%%%%
%%%%%%%%'EXACT SOLUTION U,V'%%%%%%%%
for n=1:M+1; for k=1:N+1; t=(k-1)*tau; x=(n-1)*h; es(k,n)=exact(t,x);
esu(k,n)=exactu(t,x); end; end;
%%%%%%%% EXACT P %%%%%%%%%
for n=1:M+1; x=(n-1)*h; esp(n)=exactp(x); end; pu=U;
maxesu=max(max(esu)); maxappu=max(max(pu));
maxerroru=max(max(abs(esu-pu)));
relativeerroru=max(max((abs(esu-pu)))/max(max(abs(pu)))); maxerrorp=0;
for n=2:M; maxerrorp=maxerrorp+(esp(n)-p1(n))^2; end;
maxerrorp=maxerrorp^(1/2)*h^(1/2); pf=V; ftf=es-pf; fmat1=abs(ftf);
fmat2=fmat1.*fmat1*h; fmat3=sum(fmat2,2); fmat4=fmat3.^(1/2);
maxerror=max(fmat4);
%%%%%%%%Output FOR SECOND ORDER ACCURACY;%%%%%%%%
format('shortG');
cevapSecondAccuracy=[maxerroru,maxerrorp,maxerror];
cevap=[cevapFirstAccuracy,cevapSecondAccuracy,Grids]
%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION for Second order;%%%%%%%%
str1=strcat('N=',num2str(N),' ','M=',num2str(M),' için 3 noktalı problemin 2.
mertebeden yaklaşımı');
figure; surf(pf); title(str1); xlabel('t axis'); ylabel('x axis'); rotate3d;
str1=strcat('N=',num2str(N),' ','M=',num2str(M),' için gerçek çözüm');
figure; surf(es); title(str1); xlabel('t axis'); ylabel('x axis'); rotate3d;
%%%%%%%% SUB FUNCTIONS %%%%%%%%%
function estx=exact(t,x)
estx=(cos(pi*t)+t+1)*sin(pi*x);
function estxu=exactu(t,x)
estxu=(cos(pi*t)+t)*sin(pi*x);
function estxp=exactp(x)
estxp=(3*pi^2+1)*sin(pi*x)-(pi^2)*cos(2*pi*x);
function ksi=ksii(t,x)

```

```
ksi=(cos(pi*t)+t+1)*sin(pi*x);
function rsftx=rsf(t,x)
rsftx=((4*pi^2+1)*cos(pi*t)+(3*pi^2+1)*t)*sin(pi*x)-(pi^2)*(cos(pi*t)+t)*cos(2*pi*x);
```

Ek 2. Üç Noktalı NSD BSTEÜP'in Birinci ve İkinci Mertebeden Sayısal Çözümleri İçin MATLAB Program Kodları

```
function Nbsinverse3s(N,M,gm,lambda,miyu,omega)
%Numerical solution of the equation
%-Vtt-(1+2cos(pi*x))Vxx+2pi*sin(pi*x)Vx+V=f(t,x)+p(x);
%inverse problem
%v(0,x)=fi(x),v(1,x)=(1/10)*v(lambda,x)+(2/10)*v(miyu,x)+(7/10)*v(omega,x)+psi(x),
%v(gm,x)=ksi(x)
%vx(t,0)=vx(t,1)=0
%First and Second order in t and Second order in x
if nargin<1;end; close;close;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% first order%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
T=1; %lambda=0.68*T;gm=0.87*T; tau=T/N;h=1/M;
lbt=lambda/tau;l=floor(lbt);lbt=lbt-l; sbt=gm/tau;s=floor(sbt);sbts=sbt-s;
qbt=miyu/tau;q=floor(qbt);qbt=qbt-q; wbt=omega/tau;w=floor(wbt);wbtw=wbt-w;
%%% First step FIRST ORDER ACCURACY%%%%%%%%
%%%%%%%%Calculation U%%%%%%%%
A=zeros(N+1,N+1,M+1); B=zeros(N+1,N+1,M+1);
C=zeros(N+1,N+1,M+1); for n=1:M+1; for k=2:N; x=(n-1)*h;
A(k,k,n)=(2+cos(pi*x))/h^2-pi*sin(pi*x)/2h;C(k,k,n)=(2+cos(pi*x))/h^2+pi*sin(pi*x)/2h;
B(k,k,n)=-2/tau^2-2*(2+cos(pi*x))/h^2-1;B(k,k+1,n)=1/tau^2;B(k,k-1,n)=1/tau^2;
end;
B(1,1,n)=1; B(1,s+1,n)=-1; B(N+1,N+1,n)=1;
B(N+1,l+1,n)=-1/10; B(N+1,q+1,n)=-2/10; B(N+1,w+1,n)=-7/10; end;
R=eye(N+1,N+1); fii=zeros(N+1,M+1); for n=1:M+1; x=(n-1)*h;
for k=2:N; t=(k-1)*tau; fii(k,n)=-rsf(t,x); end;
fii(1,n)=ksii(0,x)-ksii(gm,x);
fii(N+1,n)=ksii(T,x)-(1/10)*ksii(lambda,x)-(2/10)*ksii(miyu,x)-(7/10)*ksii(omega,x);
;
end; alphaf{1}=R; bethaf{1}=zeros(N+1,1); for j=2:M-1;
Q=inv(B(:,j)+C(:,j)*alphaf{j-1}); alphaf{j}=-Q*A(:,j);
bethaf{j}=Q*(R*(fii(:,j))-(C(:,j)*bethaf{j-1})); end;
U=zeros(N+1,M+1); alphaf{M}=R; bethaf{M}=zeros(N+1,1);
QZ=A(:,M)+B(:,M)+C(:,M)*alphaf{M-1}; Q=inv(QZ);
U(:,M+1)=Q*(R*(fii(:,M))-C(:,M)*bethaf{M-1}); for j=M:-1:1;
U(:,j)=alphaf{j}*U(:,j+1)+bethaf{j}; end;
%%%%%%%%Second step FRIST ORDER ACCURACY%%%%%%%%
%%%%%%%%calculation of p(x)%%%%%%%%
for n=2:M; x=(n-1)*h;
p1(n)=-(2+cos(pi*x))*(-2*(ksii(gm,x)-U(s+1,n))+(ksii(gm,x+h)-U(s+1,n+1))+...
```

```

(ksii(gm,x-h)-U(s+1,n-1))/h^2+pi*sin(pi*x)*((ksii(gm,x+h)-U(s+1,n+1))...
-(ksii(gm,x-h)-U(s+1,n-1)))/(2*h)+(ksii(gm,x)-U(s+1,n)); end;
x=0; p1(1)=exactp(x); x=1; p1(M+1)=exactp(x);
%%%%%%%%%Third step FIRST ORDER ACCURACY%%%%%%%%%
%%%%%%%%%Calculation V%%%%%%%%%
V=zeros(N+1,M+1); for n=1:M+1; x=(n-1)*h; for k=1:N+1; t=(k-1)*tau;
V(k,n)=U(k,n)+ksii(gm,x)-U(s+1,n); end; end;
%%%%%%%%%ERROR ANALYSES FOR FIRST ORDER ACCURACY%%%%%%%%%
%%%%%%%%%EXACT SOLUTION U,V%%%%%%%%%
for n=1:M+1; for k=1:N+1; t=(k-1)*tau; x=(n-1)*h;
es(k,n)=exact(t,x); esu(k,n)=exactu(t,x); end; end;
%%%%%%%%% EXACT P%%%%%%%%%
for n=1:M+1; x=(n-1)*h; esp(n)=exactp(x); end; pu=U;ftf=esu-pu; fmat1=abs(ftf);
fmat2=fmat1.*fmat1*h; fmat3=sum(fmat2,2);fmat4=fmat3.^(1/2);
maxerroru=max(fmat4); maxerrorp=0; for n=2:M;
maxerrorp=maxerrorp+(esp(n)-p1(n))^2; end;maxerrorp=maxerrorp^(1/2)*h^(1/2);
pf=V; ftf=es-pf; fmat1=abs(ftf); fmat2=fmat1.*fmat1*h; fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2); maxerror=max(fmat4);
%%%%%%%%%Output FOR FIRST ORDER ACCURACY;%%%%%%%%%
format('shortG'); Grids=[N,M];
cevapFirstAccuracy=[maxerroru,maxerrorp,maxerror];
%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION for FIRST order;%%%%%%%%%
str1=strcat('N=',num2str(N),',','M=',num2str(M),' için 3 noktalı problemin 1.
mertebeden yaklaşımı');
figure;surf(pf);title(str1);xlabel('t axis'); ylabel('x axis');rotate3d;
%%%%%%%%%First step SECOND ORDER ACCURACY%%%%%%%%%
%%%%%%%%%Calculation U%%%%%%%%%
A=zeros(N+1,N+1,M+1); B=zeros(N+1,N+1,M+1);C=zeros(N+1,N+1,M+1);
for n=1:M+1;for k=2:N; x=(n-1)*h;
A(k,k,n)=(2+cos(pi*x))/h^2-pi*sin(pi*x)/2h;C(k,k,n)=(2+cos(pi*x))/h^2+pi*sin(pi*x
)/2h;
B(k,k,n)=-2/tau^2-2*(2+cos(pi*x))/h^2-1;B(k,k+1,n)=1/tau^2;
B(k,k-1,n)=1/tau^2;end;
B(1,1,n)=1; B(1,s+1,n)=sbts-1; B(1,s+2,n)=-sbts; B(N+1,N+1,n)=1;
B(N+1,l+1,n)=1/10*(lbt1-1); B(N+1,l+2,n)=1/10*(-lbt1);
B(N+1,q+1,n)=2/10*(qbtq-1); B(N+1,q+2,n)=2/10*(-qbtq);
B(N+1,w+1,n)=7/10*(wbtw-1); B(N+1,w+2,n)=7/10*(-wbtw); end;
R=eye(N+1,N+1); fii=zeros(N+1,M+1); for n=1:M+1; x=(n-1)*h;
for k=2:N; t=(k-1)*tau; fii(k,n)=-rsf(t,x); end;
fii(1,n)=ksii(0,x)-ksii(gm,x);
fii(N+1,n)=ksii(T,x)-(1/10)*ksii(lambda,x)-(2/10)*ksii(miyu,x)-(7/10)*ksii(omega,x)
;
end; U=zeros(N+1,M+1);
%%%%%%%%%Alpha, Betha,Gamma%%%%%%%%%
alpha{1} = 4/3*R; betha{1} = -1/3*R; gamma{1} = zeros(N+1,1) ;
alpha{2} = (8/5)*R; betha{2} = (-3/5)*R; gamma{2} = zeros(N+1,1);
%%%%%%%%%
for j = 3:M-1; L=inv(B(:,j)+C(:,j)*alpha{j-1});
betha{j} = zeros(N+1,N+1); alpha{j} = - L*(A(:,j) +C(:,j)*betha{j-1});

```

```

gamma{j} = L*(R*(fii(:,j)) - C(:,j)*gamma{j-1}); end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
alpha{M-1} = 4*R; betha{M-1} = -3*R;
gamma{M-1}= zeros(N+1,1) ; alpha{M-2} = (8/3)*R;
betha{M-2} = (-5/3)*R; gamma{M-2} = zeros(N+1,1);
A12=4*A(:,M-2)+9*B(:,M-2)+C(:,M-2)*(9*alpha{M-3}+4*betha{M-3});
A11=-3*A(:,M-2)-8*B(:,M-2)-C(:,M-2)*(8*alpha{M-3}+3*betha{M-3});
A21=-3*B(:,M-1)-8*C(:,M-1);A22=A(:,M-1)+4*B(:,M-1)+9*C(:,M-1);
F1=R*(fii(:,M-2))-C(:,M-2)*gamma{M-3};
F2=R*(fii(:,M-1)); Q=inv(A22); QZ=A11-A12*Q*A21;
F=inv(QZ); U(:,M+1)=F*(F1-A12*Q*F2);U(:,M)=Q*(F2-A21*U(:,M+1));
for j= M-1:-1:1;U(:,j)=alpha{j}*U(:,j+1)+betha{j}*U(:,j+2)+gamma{j};end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Second step SECOND ORDER ACCURACY%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%calculation of p(x)%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for n=2:M; x=(n-1)*h;
p1(n)=-(2+cos(pi*x))*(-2*(ksii(gm,x)-(sbts*U(s+2,n)-(sbts-1)*U(s+1,n)))+...
(ksii(gm,x+h)-(sbts*U(s+2,n+1)-(sbts-1)*U(s+1,n+1)))+(ksii(gm,x-h)...
-(sbts*U(s+2,n-1)-(sbts-1)*U(s+1,n-1))))/h^2+pi*sin(pi*x)*((ksii(gm,...
x+h)-(sbts*U(s+2,n+1)-(sbts-1)*U(s+1,n+1)))-(ksii(gm,x-h)-...
(sbts*U(s+2,n-1)-(sbts-1)*U(s+1,n-1))))/(2*h)+(ksii(gm,x)...
-(sbts*U(s+2,n)-(sbts-1)*U(s+1,n)));
end; x=0; p1(1)=exactp(x); x=1; p1(M+1)=exactp(x);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Third step SECOND ORDER ACCURACY%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Calculation V%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
V=zeros(N+1,M+1); for n=1:M+1; x=(n-1)*h; for k=1:N+1; t=(k-1)*tau;
V(k,n)=U(k,n)+ksii(gm,x)-sbts*U(s+2,n)+(sbts-1)*U(s+1,n); end; end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%ERROR ANALYSES FOR SECOND ORDER ACCURACY%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%'EXACT SOLUTION U,V'%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for n=1:M+1; for k=1:N+1; t=(k-1)*tau; x=(n-1)*h;
es(k,n)=exact(t,x); esu(k,n)=exactu(t,x); end; end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% EXACT P%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for n=1:M+1; x=(n-1)*h; esp(n)=exactp(x); end; pu=U;maxesu=max(max(esu));
maxappu=max(max(pu));maxerroru=max(max(abs(esu-pu)));
relativeerroru=max(max((abs(esu-pu)))/max(max(abs(pu)))); maxerrorp=0;
for n=2:M; maxerrorp=maxerrorp+(esp(n)-p1(n))^2; end;
maxerrorp=maxerrorp^(1/2)*h^(1/2); ps=V; fts=es-ps;
fmat1=abs(fts); fmat2=fmat1.*fmat1*h; fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2); maxerror=max(fmat4);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Output FOR SECOND ORDER ACCURACY;%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
format('shortG');
cevapSecondAccuracy=[maxerroru,maxerrorp,maxerror];
cevap=[cevapFirstAccuracy,cevapSecondAccuracy,Grids]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION for Second order;
str1=strcat('N=',num2str(N),',','M=',num2str(M),' için 3 noktal problemin 2.
mertebeden yaklaşıımı');
figure; surf(ps); title(str1); xlabel('t axis'); ylabel('x axis'); rotate3d;
str1=strcat('N=',num2str(N),',','M=',num2str(M),' için gerçek çözüm');
figure; surf(es); title(str1); xlabel('t axis'); ylabel('x axis'); rotate3d;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SUB FUNCTIONS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

function estx=exact(t,x)
estx=(sin(pi*t)+t+1)*cos(pi*x);
function estxu=exactu(t,x)
estxu=(sin(pi*t)+t)*cos(pi*x);
function estxp=exactp(x)
estxp=pi^2*cos(2*pi*x)+(2*pi^2+1)*cos(pi*x);
function ksi=ksii(t,x)
ksi=(sin(pi*t)+t+1)*cos(pi*x);
function rsftx=rsf(t,x)
rsftx=pi^2*sin(pi*t)*cos(pi*x)+(sin(pi*t)+t)*(pi^2*cos(2*pi*x)+(2*pi^2+1)*cos(pi*
x));

```



ÖZGEÇMİŞ

Aslen Kazak uyruklu olan Gulzıpa AKYÜZ, 1976 yılında Özbekistan Cumhuriyeti'nin başkenti Taşkent'e bağlı Kibray ilçesinde, ailece eğitimci olan bir anne babadan dünyaya geldi. İlk, orta ve lise öğrenimini Kibray'da tamamladı. Daha sonra Kazakistan Cumhuriyeti'nde bulunan ve eğitim dili Kazakça, Rusça ve Türkçe dillerinde olan, Türkiye ve Kazakistan devletlerince ortaklaşa kurulan Uluslararası Hoca Ahmet Yesevi Türk-Kazak Üniversitesi'nin Matematik, Matematik Öğretmenliği bölümünden 1999 yılında üstün başarı diploması alarak mezun oldu. Daha sonra Türkiye Cumhuriyeti devleti vatandaşlığını da kazanmakla birlikte Türkiye'ye yerleşti. Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü bünyesinde yüksek lisans eğitimini 2017 yılı itibariyle başarıyla tamamlamıştır.

Evli ve dört çocuk annesi olan Gulzıpa AKYÜZ, çok iyi derecede Kazakça ve Rusça dillerini bilmektedir.

Gulzıpa AKYÜZ