

DIRICHLET SERİLERİ

Pelin POŞPOŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TEMMUZ 2008
ANKARA**

Pelin POŞPOŞ tarafından hazırlanan DIRICHLET SERİLERİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Dursun TAŞCI
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih: 03 / 07 / 2008

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nermin ERTAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Pelin POŞPOŞ

DIRICHLET SERİLERİ**(Yüksek Lisans Tezi)****Pelin POŞPOŞ****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Temmuz 2008****ÖZET**

Bu çalışmada, önce aritmetik fonksiyonlar tanıtlarak Dirichlet serileri için kullanacağımız bazı özel aritmetik fonksiyonların özellikleri sunulmuştur. Sonra Dirichlet serilerinin temel özellikleri, reel ve kompleks değişken durumları için sunularak Ramanujan tarafından elde edilen bir özdeşlik kısmen genelleştirilmeye çalışılmıştır. Bu yöndeki başarılı ve başarısız girişimlerimiz son bölümde tartışılmıştır.

Bilim kodu : 204.1.025**Anahtar Kelimeler : Dirichlet serileri, aritmetik fonksiyonlar, Riemann zeta fonksiyonu, Riemann hipotezi, yakınsaklık yarı-düzlemi****Sayfa Adedi : 69****Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK**

DIRICHLET SERIES**(M.Sc.Thesis)****Pelin POŞPOŞ****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****July 2008****ABSTRACT**

In this study, arithmetical functions are firstly introduced and the properties of some arithmetical functions which we use for Dirichlet series are presented. Fundamental properties of Dirichlet series with real and complex coefficients are given and then we try to obtain a slight generalization of an identity given by Ramanujan. In the last section we argue our successful and unsuccessful attempts for this generalization.

Science Code	: 204.1.025
Key Words	: Dirichlet series, arithmetical functions, the Riemann zeta function, the Riemann Hypothesis, half-plane of convergence
Page Number	: 69
Adviser	: Ercan ALTINIŞIK, Assistant Professor

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, kıymetli tecrübelerini benden esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK' a ayrıca beni attığım her adımda destekleyen ve yalnız bırakmayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	3
2.1. Aritmetik Fonksiyon Kavramı	3
2.2. Aritmetik Fonksiyonların Dirichlet Çarpımları	9
2.3. Aritmetik Fonksiyonların Dirichlet Tersi ve Möbius inversiyon Formülü	11
2.4. Çarpımsal Fonksiyonlar	16
2.5. Aritmetik Fonksiyonların Ortalaması.....	25
3. DIRCHLET SERİLERİ	30
3.1. Dirichlet Serileri (Reel Değişken Durumu).....	30
3.2. Dirichlet Serileri (Kompleks Değişken Durumu)	46
3.3. Dirichlet Serileri ve Toplam Fonksiyonları.....	51
4. RAMANUJAN'IN SONUCU VE GENELLEŞTİRİLMESİ	60
5. SONUÇ	66
KAYNAKLAR.....	67
ÖZGEÇMİŞ.....	69

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. Dirichlet serilerinin yakınsaklık ve mutlak yakınsaklık apsisi.....	49
Şekil 3.2. $\mu(n)$ Möbius fonksiyonu	51
Şekil 3.3. $M(\mu, x)$ Toplam fonksiyonu.....	52

1.GİRİŞ

Günümüzde halen çözülememiş problemlerin başında yer alan Riemann hipotezi; $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ serisinin yakınsaklık düzleminde tanımladığı fonksiyonun analitik devamı olan $\zeta(s)$ Riemann zeta fonksiyonunun aşikar olmayan sıfırlarının $\sigma = 1/2$ kritik doğrusu üzerinde yer aldığını iddia eder. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ serisinin özel bir Dirichlet serisi olması bu serilerin önemini ortaya koyan başlıca gerçektir.

f bir aritmetik fonksiyon ve $s \in \mathbb{C}$ olmak üzere $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ şeklindeki seriye Dirichlet serisi denir. Bu tezde esas olarak Dirichlet serileri tanıtılacaktır. İlk olarak konumuz için gerekli olan aritmetik fonksiyonlar ile ilgili temel tanım ve teoremler özetlenecektir. s değişkenini, reel sayılara kısıtlayarak Dirichlet serilerinin elemanter özellikleri incelenecek ve sonra s değişkeninin kompleks sayı olması durumunda Dirichlet serilerinin zengin özellikleri kompleks analizin araçları yardımıyla sunulacaktır. Son olarak Ramanujan tarafından verilen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}$$

zarif özdeşlik ve bu özdeşliğin Borwein ve Choi tarafından sunulan genelleştirilmesi üzerinde durulacaktır. Bu özdeşliklerden esinlenerek

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

olmak üzere $\alpha \in \mathbb{R}$ (ya da $\mathbb{C}$) için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f(n))^{\alpha}}{n^s}$$

serisini $L_f(s)$ cinsinden ifade edilmeye çalışılacaktır. Üzerinde çalışıp, başarılı ve başarısız olduğumuz kısımlar son bölümde tartışılacaktır.

2. ÖN BİLGİLER

2.1. Aritmetik Fonksiyon Kavramı

2.1. Tanım

Pozitif tamsayılar kümesinden reel sayılar veya kompleks sayılar kümesine tanımlanan fonksiyonlara *aritmetik fonksiyon* ya da *teorik sayı fonksiyonu* denir [1].

2.2. Tanım

$p_1, p_2, \dots, p_k$ asal sayılar olmak üzere her $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ pozitif tamsayısı için

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & , \quad n = 1 \\ (-1)^k & , \quad a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1 \\ 0 & , \quad \text{aksi halde} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona *Möbius fonksiyonu* denir.

Örneğin her p asalı için $\mu(p) = -1$ ve $\mu(p^2) = 0$ dır.

2.1. Teorem

$$\text{Her } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ 0 & , n > 1 \end{cases}$$

dir [1].

İspat

$n=1$ ise formül açıkça doğrudur. Varsayalım $n > 1$ ve $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ olsun.

$\sum_{d|n} \mu(d)$ toplamında sadece $d=1$ olduğu ve n nin farklı asalların çarpımı olarak

yazılabildiği durumlarda μ sıfırdan farklı olacağından;

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \mu(1) + \mu(p_1) + \dots + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2) + \dots + \mu(p_{k-1} p_k) + \dots + \mu(p_1 p_2 \dots p_k) \\ &= 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \dots + \binom{k}{k}(-1)^k \\ &= (1-1)^k \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

2.3. Tanım

$n \in \mathbb{Z}^+$ için *Euler φ fonksiyonu*; n ile aralarında asal ve n yi aşmayan pozitif tamsayıların sayısıdır.

Aşağıdaki tabloda $\varphi(n)$ in bazı değerleri verilmiştir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4

2.2. Teorem

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$

dir [1].

İspat

Tamsayılar kümesini 1 den n ye kadar ayırık sınıflara ayıralım. Ayrıca n nin her d böleni için

$$A(d) = \{k : (k, n) = d, 1 \leq k \leq n\}$$

olsun. Eğer $k \in A(d)$ ise bu durumda $\left(\frac{k}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$ olur. Yani $A(d)$ sınıfındaki tamsayıların sayısı, $\frac{n}{d}$ yi geçmeyen ve $\frac{n}{d}$ ile aralarında asal olan sayıların sayısı kadardır. φ fonksiyonunun tanımından, $A(d)$ sınıfındaki tamsayıların $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ adet oldukları söylenir. Her bir tamsayı sadece bir sınıfa dahil olacağından ve n nin de bu ayırık sınıflardaki elemanların toplamına eşit olacağından $n = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ eşitliği elde edilir. Buradan da $n = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \varphi(d)$ bulunur.

Euler φ fonksiyonu ile Möbius fonksiyonu arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile gösterilebilir.

2.3. Teorem

$$\text{Her } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$$

dir [1].

İspat

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(n,k)} \right]$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 2.1 kullanılarak;

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(n,k)} \right] = \sum_{k=1}^n \sum_{d|(n,k)} \mu(d) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{d|n \\ d|k}} \mu(d)$$

elde edilir.

n nin belirli bir d böleni için $1 \leq k \leq n$ aralığındaki d nin katı olan bütün k ları toplayarak,

$$d|k \text{ ise } k = qd \text{ ve } 1 \leq k \leq n \Rightarrow 1 \leq q \leq \frac{n}{d} \text{ dir.}$$

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \sum_{q=1}^{n/d} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{q=1}^{n/d} 1 = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$$

elde edilir.

$\varphi(n)$ için Teorem 2.3 deki toplam, n nin farklı asal bölenleri üzerinden alınan bir çarpım olarak ifade edilebilir.

2.4. Teorem

$$\text{Her } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } \varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \text{ dir [1].}$$

İspat

$n = 1$ için çarpımın 1 olduğu kabul edilir. Buradan $\varphi(1) = 1$ olduğu açıktır. $n > 1$ ve $p_1, p_2, \dots, p_r$ n nin ayrık asal sayı bölenleri olsun. Bu durumda çarpım

$$\prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = 1 - \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i} + \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i p_j} - \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i p_j p_k} + \dots + \frac{(-1)^r}{p_1 p_2 \dots p_r} \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir.

Eşitliğin sağ tarafındaki $\sum_{i=1}^r \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_k}}$ toplamı, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r$ olmak üzere n nin bütün olası farklı $p_{i_1}, \dots, p_{i_k}$ asalları üzerinden alınmaktadır. Eşitlik 2.1 in sağ tarafındaki her terim $\pm \frac{1}{d}$ şeklindedir ve burada d , n nin bir böleni olup, 1 ya da ayrık asalların çarpımı şeklindedir. Eğer d , herhangi p_i asalının karesi ile bölünebiliyorsa $\mu(d) = 0$ dir. Böylece Eşitlik 2.1 in sağ tarafı $\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$ ye eşit olur.

Teorem 2.3 den

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} \text{ olup böylece } \varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \text{ dir.}$$

φ nin birçok özelliği bu çarpım formülünden yararlanılarak elde edilebilir. Bunlardan bazıları aşağıdaki teoremden verilmiştir.

2.5. Teorem

Euler φ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir [1].

a) p asal ve $\alpha \geq 1$ için $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$

b) $d = (m, n)$ olmak üzere $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)(d/\varphi(d))$

İspat

a) Teorem 2.4 de $n = p^\alpha$ yazılarak bulunur.

b) Teorem 2.4 den

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

dir. mn nin her asal böleni ya m yi ya n yi böler ve bu asallar hem m yi hem de n yi bölüyorlarsa (m, n) yi de böler. Buradan

$$\frac{\varphi(mn)}{mn} = \prod_{p|mn} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod_{p|(m,n)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} = \frac{\frac{\varphi(m)}{m} \frac{\varphi(n)}{n}}{\frac{\varphi(d)}{d}}$$

olur ve

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)(d/\varphi(d))$$

elde edilir.

2.2. Aritmetik Fonksiyonların Dirichlet Çarpımları

$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$ olduğu daha önce Teorem 2.3 de gösterilmişti; bu eşitliğin sağ tarafındaki toplam, sayılar teorisinde sık karşılaşılan önemli bir yapıdır.

2.4. Tanım

f ve g aritmetik fonksiyonlar olmak üzere,

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

ile tanımlanan $f * g$ aritmetik fonksiyonu; f ve g fonksiyonlarının Dirichlet çarpımı (Dirichlet konvolisyonu) adını alır [1].

2.5. Tanım

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\alpha \in \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ olmak üzere $N^\alpha(n) = n^\alpha$ aritmetik fonksiyonuna *kuvvet fonksiyonu* denir.

Bu fonksiyonla Teorem 2.3 $\varphi = \mu * N$ şeklinde de ifade edilebilir.

Aşağıdaki teorem Dirichlet çarpımının cebirsel özelliklerini tanımlar.

2.6. Teorem

f, g ve k aritmetik fonksiyonları için

a) $f * g = g * f$ (değişme)

b) $(f * g) * k = f * (g * k)$ (birleşme)

özellikleri sağlanır [1].

İspat

$e = \frac{n}{d}$ yazarak, $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$ İfadesini $(f * g)(n) = \sum_{de=n} f(d)g(e)$

şeklinde ifade edebiliriz.

a) Her f ve g aritmetik fonksiyonları için

$$(f * g)(n) = \sum_{de=n} f(d)g(e) = \sum_{ed=n} g(e)f(d) = \sum_{de=n} g(d)f(e) = (g * f)(n).$$

b) Her f, g ve h aritmetik fonksiyonları için

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(n) &= \sum_{dc=n} (f * g)(d)h(c) \\ &= \sum_{dc=n} \left(\sum_{ab=d} f(a)g(b) \right) h(c) \\ &= \sum_{abc=n} f(a)g(b)h(c) \end{aligned}$$

ve benzer olarak

$$\begin{aligned} (f * (g * h))(n) &= \sum_{ae=n} f(a)(g * h)(e) \\ &= \sum_{ae=n} f(a) \left(\sum_{bc=e} g(b)h(c) \right) \\ &= \sum_{abc=n} f(a)g(b)h(c) \end{aligned}$$

2.6. Tanım

$$\text{Her } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } I(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ n \end{bmatrix} = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan I fonksiyonuna *özdeşlik fonksiyonu* denir.

2.7. Teorem

f aritmetik fonksiyonu ve I özdeşlik fonksiyonu için $I * f = f * I = f$ dir [1].

İspat

$d < n$ ise $\begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0$ olduğundan

$$(f * I)(n) = \sum_{d|n} f(d) I\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d) \begin{bmatrix} \frac{n}{d} \\ n \end{bmatrix} = f(n)$$

elde edilir.

2.3. Aritmetik Fonksiyonların Dirichlet Tersi ve Möbius İncersiyon Formülü

2.8. Teorem

Bir f aritmetik fonksiyonu için $f(1) \neq 0$ ise $f * f^{-1} = f^{-1} * f = I$ olacak şekilde bir tek f^{-1} aritmetik fonksiyonu vardır ve f^{-1} ,

$$n = 1 \text{ için } f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}$$

$$n > 1 \text{ için } f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d)$$

rekürans bağıntılarıyla verilir, burada f^{-1} , f in Dirichlet tersi olarak adlandırılır [1].

İspat

f aritmetik fonksiyonu için $(f * f^{-1})(n) = I(n)$ eşitliğinin $f^{-1}(n)$ fonksiyon değeri için bir tek çözümünün olduğunu göstereceğiz. $n = 1$ için $(f * f^{-1})(1) = I(1)$ eşitliğini çözersek $f(1)f^{-1}(1) = 1$ dir. $f(1) \neq 0$ olduğundan sadece bir tek çözümü vardır yani $f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}$ dir.

Farz edelim ki $f^{-1}(k)$ fonksiyonunun her $k < n$ için bir tek belirli değeri olsun.

Buradan $(f * f^{-1})(n) = I(n)$ eşitliğini ya da $\sum_{\substack{d|n \\ d < n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) = 0$ eşitliğini çözmeliyiz, bu eşitlik

$$f(1)f^{-1}(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Eğer her $d < n$ için $f^{-1}(d)$ değeri biliniyorsa $f^{-1}(n)$ için bir tek belirli değer vardır. Yani

$$f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d)$$

dir. $f(1) \neq 0$ olduğundan tümevarım ile f^{-1} in varlığı ve tekliği bulunur.

O halde $f(1) \neq 0$ şartını sağlayan aritmetik fonksiyonların kümesi Dirichlet çarpımı ile bir değışmeli grup teşkil eder.

2.9. Teorem

f ve g iki aritmetik fonksiyon olsun $f(1) \neq 0$ ve $g(1) \neq 0$ olmak üzere

$$(f * g)^{-1} = f^{-1} * g^{-1}$$

dir [1].

2.7. Tanım

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $u(n) = 1$ şeklinde tanımlanan u fonksiyonuna *birim fonksiyon* denir.

Teorem 2.1 den $\sum_{d|n} \mu(d) = I(n)$ dir. Dirichlet çarpımının ve u fonksiyonunun tanımından

$$(\mu * u)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) u\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) = I(n)$$

yani $u = \mu^{-1}$ ve $\mu = u^{-1}$ dir.

Möbius fonksiyonunun bu basit özelliğı ve Dirichlet çarpımının birleşme özelliğı, aşağıdaki teoremi kolayca ispat etmemizi sağlar.

2.10. Teorem (Möbius İnvrsiyon Formülü)

f ve g aritmetik fonksiyonlar olmak üzere her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$ olması için gerek ve yeter şart $g(n) = \sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$ olmasıdır [1].

İspat

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$ olsun. Bu $f = g * u$ şeklinde ifade edilebilir. Her iki taraf μ ile çarpılırsa

$$f * \mu = (g * u) * \mu = g * (u * \mu) = g * I = g$$

yani $g(n) = \sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$ dir.

Karşıt olarak $f * \mu = g$ eşitliğinin her iki tarafı u fonksiyonu ile çarpılırsa

$$(f * \mu) * u = f * (\mu * u) = f * I = f = g * u$$

yani $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$ elde edilir.

2.8. Tanım

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^m \quad m \geq 1, p \text{ asal} \\ 0 & , \text{ aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *Mangoldt fonksiyonu* denir.

Aşağıdaki teoremin ispatı, bu fonksiyonun aritmetiğin temel teoreminden doğal

olarak nasıl çıktığını gösterir.

2.11. Teorem

$$\text{Her } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } \log n = \sum_{d|n} \Lambda(d) \quad (2.2)$$

dir [1].

İspat

$n = 1$ için ispat açıktır.

$n > 1$ için $n = \prod_{k=1}^r p_k^{a_k}$ olsun. Bu eşitliğin her iki tarafının da logaritmasını alırsak

$\log n = \sum_{k=1}^r a_k \log p_k$ olur. Eşitlik 2.2 nin sağ tarafındaki toplamı göz önüne alalım.

Toplamda p_k^m formunun $m = 1, 2, \dots, a_k$ ve $k = 1, 2, \dots, r$ için d bölenlerinden sadece sıfır olmayan terimler geliyor. Böylece

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{k=1}^r \sum_{m=1}^{a_k} \Lambda(p_k^m) = \sum_{k=1}^r \sum_{m=1}^{a_k} \log p_k = \sum_{k=1}^r a_k \log p_k = \log n$$

elde edilir.

2.12. Teorem

$$\text{Her } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } \Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} = - \sum_{d|n} \mu(d) \log d$$

eşitliği geçerlidir [1].

İspat

Eşitlik 2.2 de Möbius inversiyon formülünü uygularsak

$$\begin{aligned}
 \Lambda(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} \\
 &= \log n \sum_{d|n} \mu(d) - \sum_{d|n} \mu(d) \log d \\
 &= I(n) \log n - \sum_{d|n} \mu(d) \log d
 \end{aligned}$$

$I(n) \log n = 0$ olduğundan Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için ispat tamamlanır.

2.4. Çarpımsal fonksiyonlar

$f(1) \neq 0$ şeklindeki bütün f aritmetik fonksiyonlarının kümesi Dirichlet çarpımı altında bir değişmeli gruptur. Bu bölümde bu grubun önemli bir alt grubu olan çarpımsal fonksiyonlar üzerinde duracağız.

2.9. Tanım

Bir f aritmetik fonksiyonu sıfıra özdeş değilse ve $\forall m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(m, n) = 1$ iken $f(mn) = f(m)f(n)$ ise f aritmetik fonksiyonuna *çarpımsal fonksiyon* denir.

Eğer $f(mn) = f(m)f(n)$ eşitliği $\forall m, n \in \mathbb{Z}^+$ için sağlanıyorsa bu durumda f aritmetik fonksiyonuna *tam çarpımsal fonksiyon* denir.

Örneğin; N, u ve I tam çarpımsaldır μ ve φ çarpımsaldır.

φ nin çarpımsal olduğunu da şu şekilde gösterebiliriz. Teorem 2.5 in (b) şikkından $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)(d/\varphi(d))$ olduğunu biliyoruz, burada $(m, n) = d = 1$ alırsak

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

olur, buradan Euler φ fonksiyonunun çarpımsal olduğu görülür.

2.1. Örnek

f ve g iki aritmetik fonksiyon ve $(fg)(n) = f(n)g(n)$ ve $g(n) \neq 0$ olmak üzere

$\left(\frac{f}{g}\right)(n) = \frac{f(n)}{g(n)}$ işlemleri tanımlansın. Eğer f ve g çarpımsal fonksiyonlar ise

(fg) ve $\left(\frac{f}{g}\right)$ fonksiyonları da çarpımsal, eğer f ve g tam çarpımsal fonksiyonlar

ise (fg) ve $\left(\frac{f}{g}\right)$ fonksiyonları da tam çarpımsaldır.

2.13. Teorem

f fonksiyonu çarpımsal ise $f(1) = 1$ dir [1].

İspat

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(n,1) = 1$ ve f çarpımsal olduğundan $f(n) = f(1)f(n)$ ve f sıfıra özdeş olmadığından $f(1) = 1$ dir.

2.14. Teorem

f , $f(1) = 1$ olan bir aritmetik fonksiyon olsun.

Bu durumda;

a) Bütün p_i asalları ve $a_i \geq 1$ tamsayıları için

$f(p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}) = f(p_1^{a_1}) \dots f(p_r^{a_r})$ olması için gerek ve yeter şart f in çarpımsal olmasıdır.

b) f çarpımsal bir fonksiyon ise, bütün p asalları ve $a \geq 1$ tamsayıları için

$f(p^a) = f(p)^a$ olması için gerek ve yeter şart f in tam çarpımsal olmasıdır [1].

2.15. Teorem

f ve g fonksiyonları çarpımsal ise $f * g$ de çarpımsaldır [1].

İspat

$h = f * g$ ve $(m, n) = 1$ olmak üzere

$$h(mn) = \sum_{c|mn} f(c)g\left(\frac{mn}{c}\right)$$

mn nin her c böleni $c = ab$ formunda ifade edilebilir, burada $a|m$ ve $b|n$ dir.

Ayrıca $(a, b) = 1, \left(\frac{m}{a}, \frac{n}{b}\right) = 1$ olup, buradan

$$\begin{aligned} h(mn) &= \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(ab)g\left(\frac{mn}{ab}\right) \\ &= \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(a)f(b)g\left(\frac{m}{a}\right)g\left(\frac{n}{b}\right) \\ &= \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(a)g\left(\frac{m}{a}\right) \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(b)g\left(\frac{n}{b}\right) \\ &= h(m)h(n) \end{aligned}$$

elde edilir.

2.1. Uyarı

İki tam çarpımsal fonksiyonun Dirichlet çarpımlarının tam çarpımsal olması gerekmez.

2.16. Teorem

g ve $f * g$ fonksiyonları çarpımsal ise bu durumda f de çarpımsaldır [1].

İspat

f fonksiyonu çarpımsal olmadığında $f * g$ nin de çarpımsal olmadığını gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

$h = f * g$ olsun. f çarpımsal olmadığından $(m, n) = 1$ olacak şekilde m, n pozitif tamsayıları için $f(mn) \neq f(m)f(n)$ dir.

$mn = 1$ ise $f(1) \neq f(1)f(1)$ olup $f(1) \neq 1$ olur. $h(1) = f(1)g(1) = f(1) \neq 1$ olduğundan h fonksiyonu çarpımsal değildir.

$mn > 1$ ise $(a, b) = 1$ olacak şekilde a, b pozitif tamsayıları ve $ab < mn$ için $f(ab) = f(a)f(b)$ olur.

$$\begin{aligned} h(mn) &= \sum_{\substack{a|m \\ b|n \\ ab < mn}} f(ab)g\left(\frac{mn}{ab}\right) + f(mn)g(1) \\ &= \sum_{\substack{a|m \\ b|n \\ ab < mn}} f(a)f(b)g\left(\frac{m}{a}\right)g\left(\frac{n}{b}\right) + f(mn) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a|m} f(a)g\left(\frac{m}{a}\right) \sum_{b|n} f(b)g\left(\frac{n}{b}\right) - f(m)f(n) + f(mn) \\
&= h(m)h(n) - f(m)f(n) + f(mn)
\end{aligned}$$

$f(mn) \neq f(m)f(n)$ olduğundan $h(mn) \neq h(m)h(n)$ dir. Böylece h çarpımsal değildir.

2.17. Teorem

g fonksiyonu çarpımsal ise g nin Dirichlet tersi g^{-1} de çarpımsaldır [1].

İspat

$g * g^{-1} = I$ dir. I ve g fonksiyonları çarpımsal olduğundan Teorem 2.16 gereğince g^{-1} de çarpımsaldır.

Terem 2.15 ve Terem 2.17 gösteriyor ki çarpımsal fonksiyonların kümesi $f(1) \neq 0$ ile bütün f aritmetik fonksiyonlar grubunun bir alt grubudur.

2.18. Teorem

f fonksiyonu çarpımsal olsun. f in tam çarpımsal olması için gerek ve yeter şart $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$ olmasıdır [1].

İspat

$g(n) = \mu(n)f(n)$ olsun ve f tam çarpımsal ise

$$(g * f)(n) = \sum_{d|n} \mu(d)f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = f(n) \sum_{d|n} \mu(d) = f(n)I(n) = I(n)$$

$n > 1$ için $f(1) = 1$ ve $I(n) = 0$ olduğundan $g = f^{-1}$ dir.

Karşıt olarak $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$ olsun. f in tam çarpımsal olduğunu göstermek için $f(p^a) = f(p)^a$ olduğunu göstermeliyiz.

$f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$ eşitliği her $n > 1$ için $\sum_{d|n} \mu(d)f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = 0$ olmasını gerektirir

böylece $n = p^a$ alarak

$$\mu(1)f(1)f(p^a) + \mu(p)f(p)f(p^{a-1}) = 0$$

elde ederiz. Buradan $f(p^a) = f(p)f(p^{a-1})$ dir. Bu da $f(p^a) = f(p)^a$ olmasını gerektirir. Böylece f tam çarpımsaldır.

2.2. Örnek

Euler φ fonksiyonunun tersini bulalım; $\varphi = \mu * N$ olduğundan $\varphi^{-1} = \mu^{-1} * N^{-1}$ yazılabilir. N tam çarpımsal olduğundan $N^{-1} = \mu N$ dir. Böylece $\varphi^{-1} = \mu^{-1} * \mu N = u * \mu N$ buradan $\varphi^{-1}(n) = \sum_{d|n} d\mu(d)$ bulunur.

Aşağıda vereceğimiz teorem $\varphi^{-1}(n) = \prod_{p|n} (1-p)$ olduğunu gösterir.

2.19. Teorem

f çarpımsal bir fonksiyon ise $\sum_{d|n} \mu(d)f(d) = \prod_{p|n} (1-f(p))$ dir [1].

İspat

$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d)f(d)$ olsun. Bu durumda g çarpımsaldır. $g(n)$ yi belirlemek için $g(p^a)$ yı hesaplamalıyız.

$$g(p^a) = \sum_{d|p^a} \mu(d)f(d) = \mu(1)f(1) + \mu(p)f(p) = 1 - f(p)$$

böylece $g(n) = \prod_{p|n} g(p^a) = \prod_{p|n} (1 - f(p))$ bulunur.

2.10. Tanım

$p_1, p_2, \dots, p_k$ asal sayılar olmak üzere her $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ pozitif tamsayısı için

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ (-1)^{a_1 + \dots + a_k} & , n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona *Liouville fonksiyonu* denir. Liouville fonksiyonu, tam çarpımsal fonksiyonların önemli bir örneğidir.

$$m = n = 1 \text{ ise } \lambda(mn) = \lambda(1) = \lambda(1)\lambda(1) = \lambda(m)\lambda(n)$$

$m = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} \quad n = p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}$ olsun. Bu durumda $\lambda(m) = (-1)^{a_1 + \dots + a_k}$ ve $\lambda(n) = (-1)^{b_1 + \dots + b_k}$ olup, $\lambda(mn) = (-1)^{a_1 + \dots + a_k + b_1 + \dots + b_k} = \lambda(m)\lambda(n)$ elde edilir.

2.20. Teorem

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1, & n \text{ tam kare} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ve $\lambda^{-1}(n) = |\mu(n)|$ dir [1].

İspat

$g(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)$ olsun. Bu durumda g çarpımsaldır, böylece $g(n)$ i hesaplamak için sadece $g(p^a)$ yı hesaplamalıyız.

$$\begin{aligned} g(p^a) &= \sum_{d|p^a} \lambda(d) = 1 + \lambda(p) + \lambda(p^2) + \dots + \lambda(p^a) \\ &= 1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^a \\ &= \begin{cases} 0, & a \text{ tek} \\ 1, & a \text{ çift} \end{cases} \end{aligned}$$

buradan $n = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}$ ise $g(n) = \prod_{i=1}^k g(p_i^{a_i})$ olur. Eğer a_i lerin en az biri tek ise $g(p_i^{a_i}) = 0$ ve $g(n) = 0$ olur. Eğer a_i lerin hepsi çift ise $g(p_i^{a_i}) = 1$ ve $g(n) = 1$ olur. Bu da gösterir ki n bir tam kare ifade ise $g(n) = 1$, aksi halde $g(n) = 0$ dır. Ayrıca λ tam çarpımsal fonksiyon olduğundan Teorem 2.18 den

$$\lambda^{-1}(n) = \mu(n)\lambda(n) = \mu^2(n) = |\mu(n)| \text{ elde edilir.}$$

2.11. Tanım

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ ve reel ya da kompleks α için

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *bölen fonksiyon* denir.

σ_α çarpımsaldır çünkü $\sigma_\alpha = u * N^\alpha$ dır ve iki çarpımsal fonksiyonun Dirichlet çarpımları da çarpımsal fonksiyondur. Özel olarak;

$\alpha = 0$ iken $d(n) = \sigma_0(n)$, n nin bölenlerinin sayısını,

$\alpha = 1$ iken $\sigma(n) = \sigma_1(n)$, n nin bölenlerinin toplamını veren fonksiyondur.

2.3. Örnek

$\sigma_\alpha(p^a)$ fonksiyonunun değerini hesaplayalım; p^a nin bölenleri $1, p, p^2, \dots, p^a$ dır.

Buradan

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha(p^a) &= 1^\alpha + p^\alpha + p^{2\alpha} + \dots + p^{a\alpha} = \frac{p^{\alpha(a+1)} - 1}{p^\alpha - 1}, \alpha \neq 0 \text{ ise} \\ &= a + 1, \alpha = 0 \text{ ise}\end{aligned}$$

σ_α nin Dirichlet tersi n nin bölenlerinin α . kuvvetlerinin lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

2.21. Teorem

$$\text{Her } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } \sigma_\alpha^{-1}(n) = \sum_{d|n} d^\alpha \mu(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

dir [1].

İspat

$\sigma_\alpha = u * N^\alpha$ ve N^α tam çarpımsal olduğundan $\sigma_\alpha^{-1}(n) = (\mu N^\alpha) * u^{-1} = (\mu N^\alpha) * \mu$ elde edilir.

2.5. Aritmetik Fonksiyonların Ortalaması

2.12. Tanım

$g(x) > 0$ iken her $x \geq a$ için $f(x)/g(x)$ sınırlı ise yani $|f(x)| \leq M g(x)$ olacak şekilde $M > 0$ varsa $f(x) = O(g(x))$ şeklinde gösterilir [1].

2.22. Teorem (*Euler toplam formülü*)

Eğer f , $0 < y < x$ olacak şekilde $[y, x]$ aralığında f' sürekli türevi varsa

$$\sum_{y < n \leq x} f(n) = \int_y^x f(t) dt + \int_y^x (t - [t]) f'(t) dt + f(x)([x] - x) - f(y)([y] - y) \quad (2.3)$$

dir [1].

İspat

$m = [y]$, $k = [x]$ olsun. n ve $n-1$ tamsayıları için $[y, x]$ aralığında

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^n [t] f'(t) dt &= \int_{n-1}^n (n-1) f'(t) dt = (n-1) \{f(n) - f(n-1)\} \\ &= \{nf(n) - (n-1)f(n-1)\} - f(n) \end{aligned}$$

dir.

$n = m + 2$ den $n = k$ ya kadar toplayarak

$$\begin{aligned} \int_{m+1}^k [t]f'(t)dt &= kf(k) - (m+1)f(m+1) - \sum_{n=m+2}^k f(n) \\ &= kf(k) - mf(m+1) - \sum_{y < n \leq x} f(n) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{y < n \leq x} f(n) &= - \int_{m+1}^k [t]f'(t)dt + kf(k) - mf(m+1) \\ &= - \int_x^y [t]f'(t)dt + kf(x) - mf(y) \end{aligned} \tag{2.4}$$

dir. Kısmi integrasyon ile

$$\int_y^x f(t)dt = xf(x) - yf(y) - \int_y^x tf'(t)dt$$

bulunur. Yukarıda elde ettiğimiz eşitliği Eşitlik 2.4 ile birleştirildiğinde Eşitlik 2.3 ü elde ederiz.

2.4. Örnek

$x \geq 1$ ise $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + C + O\left(\frac{1}{x}\right)$ olduğunu gösterelim.

Euler toplam formülünde $f(t) = 1/t$ alırsak

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &= \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{t - [t]}{t^2} dt + 1 - \frac{x - [x]}{x} \\
&= \log x - \int_1^x \frac{t - [t]}{t^2} dt + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \log x + 1 - \int_1^{\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt + \int_x^{\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt + O\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$\int_1^{\infty} (t - [t])t^{-2} dt$ has olmayan integrali

$$0 \leq \int_x^{\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt \leq \int_x^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{x}$$

dir. Böylece son eşitlik şu hali alır

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + 1 - \int_1^{\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

buradan $C = 1 - \int_1^{\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt$ diyelim ve örnekte $x \rightarrow \infty$ iken

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \right) = 1 - \int_1^{\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt$$

buluruz. Böylece C , Euler sabitine eşit olur.

2.5. Örnek

$x \geq 1$, $s > 0$ ve $s \neq 1$ ise

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s})$$

olduğunu gösterelim.

Bu eşitliği göstermek için $s > 0, s \neq 1$ olmak üzere $f(x) = x^{-s}$ ile aynı argümanları kullanırız. Euler toplam formülünden

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} &= \int_1^x \frac{dt}{t^s} - s \int_1^x \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt + 1 - \frac{x - [x]}{x^s} \\ &= \frac{x^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} + 1 - s \int_1^\infty \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt + O(x^{-s}) \end{aligned}$$

bulunur

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + C(s) + O(x^{-s}) \quad (2.5)$$

dir ve burada

$$C(s) = 1 - \frac{1}{1-s} - s \int_1^\infty \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt$$

dir. $s > 1$ ise Eşitlik 2.5 in sol tarafı $x \rightarrow \infty$ iken $\zeta(s)$ e yakınsar ve x^{1-s} ve x^{-s} terimlerinin ikisinde 0 a yakınsar. Böylece $s > 1$ için $C(s) = \zeta(s)$ olur. $x^{-s} \rightarrow 0$ iken $0 < s < 1$ ise Eşitlik 2.5

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} \right) = C(s)$$

olur ve buradan $0 < s < 1$ için $C(s) = \zeta(s)$ olduğundan

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s})$$

elde edilir.

3. DIRICHLET SERİLERİ

3.1. Dirichlet Serileri (Reel Değişken Durumu)

Riemann 1859 daki meşhur çalışmasında $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ Dirichlet serisinin analitik devamı olan $\zeta(s)$ fonksiyonunun aşikar olmayan sıfırlarının kritik doğru üzerinde yer aldığını iddia etmiştir. Bugün Riemann Hipotezi olarak bilinen bu iddia halen ispatlanamamıştır [2].

3.1. Tanım

f bir aritmetik fonksiyon ve s bir kompleks sayı olmak üzere $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ serisine *Dirichlet serisi* denir [3].

Gerçekten $f = u$ aritmetik fonksiyonu için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s}$ serisi bir Dirichlet serisi olup bu serinin tanımladığı $F(s)$ fonksiyonunun analitik devamı $\zeta(s)$ Riemann zeta fonksiyonudur.

Bu kısımda s değişkenini reel sayılara kısıtlayarak aritmetik fonksiyonların özellikleri yardımıyla Dirichlet serilerinin temel ve şık özelliklerini elde edeceğiz. Bu amaçla ilk olarak $\zeta(s)$ in yakınsaklığı ile ilgilenelim:

$$s = 1 \text{ için } \zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

harmonik serisini elde ederiz. Önemli serilerden biri olan harmonik seri ıraksaktır. $\frac{1}{n}$

genel terimi yerine, $s > 1$ için daha küçük olan $\frac{1}{n^s}$ terimi alınırsa

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \quad (3.1)$$

Dirichlet serisi elde edilir. Literatürde bu seri de $\zeta(s)$ ile gösterilmektedir. $s > 1$ için elde ettiğimiz bu serinin terimlerini 1,2,4,8,... adet terim içeren bloklara ayırdığımızda

$$\zeta(s) = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} \right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} \right) + \left(\frac{1}{8^s} + \dots + \frac{1}{15^s} \right) + \dots$$

elde edilir ve her bloğu

$$\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} \leq \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} = \frac{2}{2^s} = 2^{1-s}$$

$$\frac{1}{4^s} + \dots + \frac{1}{7^s} \leq \frac{1}{4^s} + \dots + \frac{1}{4^s} = \frac{4}{4^s} = (2^{1-s})^2$$

$$\frac{1}{8^s} + \dots + \frac{1}{15^s} \leq \frac{1}{8^s} + \dots + \frac{1}{8^s} = \frac{8}{8^s} = (2^{1-s})^3$$

şeklinde karşılaştırsak

$$1 + 2^{1-s} + (2^{1-s})^2 + (2^{1-s})^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-s})^{n-1}$$

geometrik serisini elde ederiz Eşitlik 3.1 de verilen $\zeta(s)$ serisini $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-s})^{n-1}$

geometrik serisi ile mukayese edersek $0 < 2^{1-s} < 1$ olduğundan $s > 1$ için Eşitlik 3.1

in yakınsak olduğunu görürüz. $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-s})^n = \frac{1}{1-2^{1-s}}$ dersek yukarıdan $1 \leq \zeta(s) \leq f(s)$ olduğunu görürüz. Gerçekten $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 1$ olduğundan $s \rightarrow \infty$ iken $2^{1-s} \rightarrow 0$ dir. $\lim_{s \rightarrow \infty} \zeta(s) = 1$ dir.

Şimdi Eşitlik 3.1 in $s \leq 1$ için ıraksak olduğunu gösterelim. $s \leq 0$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{1}{n^s} \rightarrow 0$ olmayacağından ıraksak olduğu açıktır. Eşitlik 3.1 de verilen serinin terimlerini 1,1,2,4,... adet terim içeren bloklara ayırdığımızda

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \left(\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} \right) + \left(\frac{1}{5^s} + \dots + \frac{1}{8^s} \right) + \dots$$

elde edilir ve

$$\frac{1}{2^s} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5^s} + \dots + \frac{1}{8^s} \geq \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

olduğu açıktır ve buradan elde edilen $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ serisi ıraksaktır. Bu seriyi Eşitlik 3.1 de verilen $\zeta(s)$ serisi ile karşılaştırsak $s \leq 1$ için $\zeta(s)$ in ıraksak olduğu sonucuna varırız. Şimdi $\zeta(s)$ in yakınsaklığını aşağıdaki teoremle özetleyelim.

3.1. Teorem

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ serisi her reel $s > 1$ için yakınsak ve her reel $s \leq 1$ için ıraksaktır.

Zeta fonksiyonu, asal sayıların bazı özelliklerini ortaya koyması açısından önemlidir. Bu önem, Riemann' dan 120 yıl önce Euler tarafından bulunan zarif bir özdeşliğe dayanır ve bu özdeşlik aşağıdaki teoremdedir verilmiştir [3].

3.2. Teorem

$s > 1$ için

$$\zeta(s) = \prod_p \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right) \quad (3.2)$$

olup çarpım tüm p asalları üzerinden alınmaktadır [4].

İspat

Şimdi bu eşitliğin doğruluğunu aritmetiğin temel teoreminden faydalananarak gösterelim. Eşitlik 3.2 nin sağ tarafındaki çarpanların her biri, bir geometrik seriye açılabilir. Gerçekten

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots = \sum_{a=0}^{\infty} p^{-as}$$

olup $s > 0$ için $|p^{-s}| = p^{-s} < 1$ olduğundan $\sum_{a=0}^{\infty} p^{-as}$ serisi yakınsaktır. Her p asalı

için $\frac{1}{1 - p^{-s}}$ ifadesinin açılımlarını çarparsak, çarpımımızın genel terimi

$p_1^{-a_1 s} \dots p_k^{-a_k s}$ olur. Burada $p_1, \dots, p_k$ farklı asallar ve $a_i \geq 0$ dır.

Aritmetiğin temel teoremi gereğince her $n \geq 1$ tamsayısı $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ ($a_i \geq 0$) şeklinde asal sayıların çarpımı olarak tek türlü yazılabildiğinden $p_1^{-a_1 s} \dots p_k^{-a_k s} = \frac{1}{n^s}$ olur ve buradan da

$$\prod_p \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right) = \zeta(s)$$

elde edilir.

3.1. Örnek (Asal Sayılara Uygulanması)

Euler çarpımı yardımı ile “sonsuz sayıda asal sayı vardır” teoreminin farklı bir ispatını verebiliriz. Sonlu sayıda asal sayı olduğunu kabul edelim ve bunlar

$p_1, p_2, \dots, p_k$ olsun. Her $p = p_i$ için $\left| \frac{1}{p} \right| < 1$ olduğundan

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots = \frac{1}{1 - p^{-1}}$$

bir yakınsak geometrik seridir. Mademki yalnızca $p_1, p_2, \dots, p_k$ asalları vardır,

bunların her biri için $1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{p_i^3} + \dots$ serilerini çarparak elde ettiğimiz

$$\prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{p_i^3} + \dots \right) = \prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{1 - p_i^{-1}} \right) \quad (3.3)$$

çarpımı sonludur. Ayrıca bu çarpımda her terim pozitif olduğundan bu seri mutlak

yakınsaktır. Eşitlik 3.3 deki seriyi çarpabiliriz ve çarpımı değiştirmeden terimleri yeniden düzenleyebiliriz. Eğer 1. seriden $\frac{1}{p_1^{a_1}}$ terimini 2. seriden $\frac{1}{p_2^{a_2}}$ terimini vs. alırsak $a_i \geq 0$ olmak üzere

$$\frac{1}{p_1^{a_1}} \frac{1}{p_2^{a_2}} \frac{1}{p_3^{a_3}} \cdots \frac{1}{p_k^{a_k}} = \frac{1}{p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}}$$

çarpımı elde edilir ve bu çarpım, Eşitlik 3.3 içindeki açılımı verir. Aritmetiğin temel teoreminden her çarpım sadece bir tane $\frac{1}{n}$ terimini ifade eder. O halde Eşitlik 3.3 ün açılımı

$$\prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \cdots \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

şeklini alır, sağ taraf harmonik seri olduğundan ıraksaktır. Bununla beraber sol tarafın sonlu olduğunu görmüştük. Bu bir çelişkidir ve bu çelişki sonlu sayıda asal sayı olduğunu kabul etmemizden kaynaklanmaktadır. O halde sonsuz sayıda asal sayı vardır.

$s > 1$ için $\zeta(s)$ in yakınsak olduğunu biliyoruz. Şimdi, kuvvet serilerine benzer olarak $s > 1$ için $\zeta(s)$ e bir fonksiyon olarak bakalım ve $\zeta(2)$ kaçtır? sorusuna yanıt arayalım.

3.2. Örnek ($\zeta(2)$ nin Hesaplanması)

$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ nin değeri ilk olarak 1735 te Euler tarafından hesaplanmıştır [5].

Ayrıca literatürde $\zeta(2)$ nin hesaplanması için birçok farklı yöntem sunulmuştur [6-18]. Biz $\zeta(2)$ yi Fourier serilerini kullanarak hesaplayalım. Bunun için $[-1, 1]$

aralığında $f(x) = x^2$ fonksiyonuna karşılık gelen Fourier serisini bulalım. Aradığımız seri

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x)$$

olup, $x = 1$ de bu seri $f(x) = x^2$ fonksiyonuna yakınsar, kısaca

$$1^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi)$$

yazılır. Buradan $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ elde edilir.

Bugün, $\zeta(2k)$ yı hesaplamak için genel bir yöntem vardır ancak $\zeta(2k+1)$ i hesaplamak için halen bir yöntem bulunamamıştır. 1978 de Apéry $\zeta(3)$ ün irrasyonel olduğunu ispatlamasına rağmen s tek olduğunda $\zeta(s)$ hakkında çok az şey biliniyor [19].

3.3. Örnek ($\zeta(2k)$ nın Hesaplanması)

Şimdi $\zeta(2k)$ nın hesaplanışına bir göz atalım.

$$\sin z = z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

sonsuz çarpımını kullanarak her $s = 2k \geq 2$ çift tamsayısı için $\zeta(s)$ i hesaplayabiliriz ve bu çarpım açılımının logaritmasını alırsak

$$\ln \sin z = \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right)$$

olur ve terim terime türevini alarak

$$\cot z = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{n^2 \pi^2} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right)^{-1}$$

elde ederiz.

$$\frac{2z}{n^2 \pi^2} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right)^{-1} \text{ ifadesini yazmak için geometrik serileri kullanırsak}$$

$$\frac{2z}{n^2 \pi^2} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right)^{-1} = \frac{2z}{n^2 \pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right)^k = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{n^{2k+2} \pi^{2k+2}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k-1}}{n^{2k} \pi^{2k}}$$

ve sonra z nin kuvvetlerini toplayarak

$$\begin{aligned} \cot z &= \frac{1}{z} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2k-1}}{n^{2k} \pi^{2k}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k-1}}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \\ &= \frac{1}{z} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k) z^{2k-1}}{\pi^{2k}} \end{aligned} \tag{3.4}$$

elde ederiz, bu da $\cot z$ için Laurent serisidir. Şimdi bu seriyi $\cot z$ nin diğer açılımı ile karşılaştıracğız.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \Rightarrow \frac{e^t - 1}{t} = 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \dots$$

bu serinin çarpımsal tersi bir Taylor seri açılımına sahiptir ve

$$\frac{t}{e^t - 1} = \left(1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \dots\right)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} t^m \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$B_1, B_2, \dots$ katsayıları, Bernoulli sayıları olarak bilinir.

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{t}{2} \left(\frac{e^t + 1}{e^t - 1} - 1 \right) = \frac{t}{2} \left(\frac{e^{t/2} + e^{-t/2}}{e^{t/2} - e^{-t/2}} - 1 \right) = \frac{t}{2} \left(\coth \frac{t}{2} - 1 \right) = \frac{t}{2} \left(i \cot \frac{it}{2} - 1 \right)$$

$$z = \frac{it}{2} \text{ yazarak } \frac{t}{e^t - 1} = z \cot z - \frac{z}{i} = z \cot z + iz$$

elde ederiz. Son eşitliğin her iki tarafını z ye bölüp Eşitlik 3.5 i kullanarak

$$\cot z = -i + \frac{1}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} t^m = -i + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} \left(\frac{2}{i} \right)^m z^{m-1}$$

elde ederiz. Şimdi $\cot z$ nin açılımını Eşitlik 3.4 te verilen açılımla karşılaştırsak şunu görürüz, $m = 2k \geq 2$ ise

$$-2 \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} = \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(\frac{2}{i} \right)^{2k}$$

olup, buradan

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!} \quad (3.6)$$

elde edilir ve buradan da

$$\zeta(2) = \pi^2 B_2, \quad \zeta(4) = -\frac{\pi^4 B_4}{3}, \quad \zeta(6) = \frac{2\pi^6 B_6}{45}$$

olur. Bernoulli sayılarının

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}$$

değerlerini Eşitlik 3.6 da kullanarak

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \cong 1,64493406$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \cong 1,08232323$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \cong 1,01734306$$

elde edilir [3].

Bernoulli sayılarının hepsi rasyoneldir. O halde Eşitlik 3.6 dan $\zeta(2k)$, π^{2k} nın bir rasyonel katıdır ve buradan da $\zeta(2k)$ nın irrasyonel olduğu anlaşılır.

Bu noktaya kadar reel s ler için Dirichlet serilerinin yakınsaklığını ele aldık, bazı özel Dirichlet serilerinin hesaplanışı üzerinde durduk, Dirichlet serilerini Euler çarpımları cinsinden ifade ettik. Bu noktadan sonra da Tanım 2.4 te vermiş olduğumuz aritmetik fonksiyonların Dirichlet çarpımlarını kullanarak Dirichlet serilerini üreteceğiz ve bu Dirichlet serilerini zeta fonksiyonu cinsinden yazacağız.

İlk olarak aritmetik fonksiyonların Dirichlet çarpımı ile Dirichlet serilerinin çarpımı arasındaki ilişkiyi gösteren aşağıdaki teoreme bir göz atalım.

3.3. Teorem

$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$, $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ ve $H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$ olsun. Burada $h = f * g$ ve her s için $F(s)$ ve $G(s)$ mutlak yakınsak ise $H(s) = F(s)G(s)$ dir ve $H(s)$ de yakınsaktır [3].

İspat

$F(s)$ ve $G(s)$ mutlak yakınsak olduğundan bu serileri çarpabiliriz ve bunların terimlerini düzenlersek,

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(m)g(n)}{(mn)^s} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{mn=k} \frac{f(m)g(n)}{k^s} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f * g)(k)}{k^s} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(k)}{k^s} \\ &= H(s) \end{aligned}$$

elde ederiz.

3.4. Örnek

Teorem 3.3 de $f = \varphi$ ve $g = u$ olsun. $s > 1$ için $G(s) = \zeta(s)$ mutlak yakınsaktır.

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $1 \leq \varphi(n) \leq n$ dir.

Böylece $s-1 > 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}} = \zeta(s-1)$$

ile karşılaştırsak $s > 2$ için $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$ mutlak yakınsak olduğunu görürüz.

$\varphi * u = N$ olup,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi * u)(n)}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N(n)}{n^s} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} \zeta(s) = \zeta(s-1) \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.5. Örnek

Teorem 3.3 de $f = \mu$ ve $g = u$ ise $h = f * g = \mu * u = I$ $n > 1$ için $I(1) = 1$ ve $I(n) = 0$ dır.

$H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^s} = 1$ ve $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$ her iki seride $s > 1$ için yakınsak olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu * u)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^s} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \zeta(s) &= 1 \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} &= \frac{1}{\zeta(s)} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.6. Örnek

Teorem 3.3 de $f = N^k$ ve $g = u$ ise $h = f * g = N^k * u = \sigma_k$ dir. Burada

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N^k}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-k}} = \zeta(s-k) \quad s > 1+k \text{ ve}$$

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} = \zeta(s) \quad s > 1 \text{ olduğundan } s > \max(k+1, 1) \text{ için}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(N^k * u)(n)}{n^s} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(N^k)(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} = \zeta(s-k) \zeta(s) \end{aligned}$$

elde edilir.

3.7. Örnek

Tanım 2.9 da değindiğimiz Liouville fonksiyonunun λ , $\lambda(p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}) = (-1)^{a_1 + \cdots + a_k}$

şeklinde tanımlandığını hatırlayalım. Burada $p_1, \dots, p_k$ farklı asallar ve $\lambda * u = g$

dir. $g(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)$ dir ve

$$g(n) = \sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1, & n = m^2 \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan $s > 1$ için

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda * u)(n)}{n^s} \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} \\ &\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} \zeta(s) \\ &\Rightarrow \zeta(2s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} \zeta(s) \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.4. Teorem

(a) f çarpımsal ve $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ mutlak yakınsak ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 + f(p) + f(p^2) + \dots).$$

(b) f tam çarpımsal ve $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ mutlak yakınsak ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \left(\frac{1}{1 - f(p)} \right).$$

Burada çarpım, tüm p asal sayıları üzerinden alınmaktadır [3].

İspat

(a) $s > 1$ ve $p_1, \dots, p_k$ ilk k asal sayı olsun ve $P_k = \prod_{i=1}^k (1 + f(p_i) + f(p_i^2) + \dots)$

sonlu çarpımını göz önünde bulunduralım. P_k nın açılımında genel terim, f çarpımsal olduğundan $f(p_1^{a_1}) \cdots f(p_k^{a_k}) = f(p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k})$ şeklindedir yani $P_k = \sum_{n \in A_k} f(n)$ dir. Burada $A_k = \{n : n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}, a_i \geq 0\}$ dır. Her $n \notin A_k$ için $n > p_k$ olduğundan

$$\left| P_k - \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \right| = \left| \sum_{n \notin A_k} f(n) \right| \leq \sum_{n \notin A_k} |f(n)| \leq \sum_{n > p_k} |f(n)|$$

$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$ yakınsaktır ve böylece $k \rightarrow \infty$ durumunda $\sum_{n > P_k} |f(n)| \rightarrow 0$ dır. Buradan

$$\left| P_k - \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \right| \rightarrow 0 \text{ dır. } k \rightarrow \infty \text{ durumunda } P_k \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ dir.}$$

(b) f tam çarpımsalsa her p^a asal kuvveti için $f(p^a) = f(p)^a$ dir. (a) şıkkından

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) &= \prod_p (1 + f(p) + f(p^2) + \dots) \\ &= \prod_p (1 + f(p) + f(p)^2 + \dots) \\ &= \prod_p \left(\frac{1}{1 - f(p)} \right) \end{aligned}$$

dir.

3.1. Sonuç

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ mutlak yakınsak olsun.

$$f \text{ çarpımsalsa } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right),$$

$$f \text{ tam çarpımsalsa } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(\frac{1}{1 - f(p)p^{-s}} \right) \text{ dir [3].}$$

3.8. Örnek

Sonuç 3.1 de f yerine tam çarpımsal olan u aritmetik fonksiyonunu alırsak, Teorem 3.2 deki $\zeta(s)$ fonksiyonunun Euler çarpım gösterimi elde edilir.

$$f(n) = u(n) \Rightarrow \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad s > 1$$

$\mu(n)$ Möbius fonksiyonu ise çarpımsal bir fonksiyondur ve $\mu(n)$ in tanımından da hatırlayacağımız gibi $\mu(p) = -1$ ve $\forall a \geq 2$ için $\mu(p^a) = 0$ dır. Buradan

$$f(n) = \mu(n) \Rightarrow \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{\mu(p)}{p^s} + \frac{\mu(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right) = \prod_p (1 - p^{-s}) \quad s > 1$$

elde edilir.

Benzer şekilde devam edersek aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$f(n) = \varphi(n) \Rightarrow \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1-p^{-s}}{1-p^{1-s}} \quad s > 2$$

$$f(n) = \sigma_{\alpha}(n) \Rightarrow \zeta(s)\zeta(s-\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{\alpha}(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{\alpha-s})} \quad s > 1+\alpha$$

$$f(n) = \lambda(n) \Rightarrow \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \frac{(1-p^{-s})}{(1-p^{-2s})} = \prod_p \frac{1}{(1+p^{-s})} \quad s > 1$$

3.2. Dirichlet Serileri (Kompleks Değişken Durumu)

Önceki kısımda s reel değişkeni için $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ Dirichlet serilerinin özelliklerini inceledik. Birçok amaç için bu yeterlidir fakat bazı ileri uygulamalar için s değişkeninin kompleks olması gerekir. Gerçekten “ $s \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\zeta(s) = 0$ denkleminin kritik şerit içindeki kökleri $s = \frac{1}{2} + it$ kritik doğrusu üzerinde yer alır” hipotezi Riemann Hipotezi olarak bilinir ve halen ispatlanamamıştır.

Bu kısımda $\sigma, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $s = \sigma + it$ kompleks sayısı için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ Dirichlet serisi ile bu serinin tanımladığı $F(s)$ fonksiyonu ile ilgileneceğiz.

Bir $s = a + ib \in \mathbb{C}$ noktasında $F(s)$ in mutlak yakınsak olduğunu kabul edelim. $\sigma \geq a$ ise

$$\left| \frac{f(n)}{n^{\sigma+it}} \right| = \left| \frac{f(n)}{n^{\sigma}} \right| \leq \left| \frac{f(n)}{n^a} \right| = \left| \frac{f(n)}{n^{a+ib}} \right|$$

olup karşılaştırma testinden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{\sigma+it}}$ mutlak yakınsaktır [3].

3.5. Teorem

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ Dirichlet serisini göz önüne alalım. Her $s \in \mathbb{C}$ sayıları için bu seri ne yakınsak olsun ne de ıraksak olsun. $\sigma > \sigma_a$ olmak üzere her $s = \sigma + it$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right|$ yakınsak ve $\sigma < \sigma_a$ olmak üzere her $s = \sigma + it$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right|$ ıraksak olacak şekilde bir $\sigma_a \in \mathbb{R}$ vardır [20].

İspat

σ_a yı $s = a + ib$ de $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right|$ ıraksak olacak şekilde tüm $a \in \mathbb{R}$ sayılarının supremumu olarak alalım bu σ_a sayısı; $s = a + ib$ de $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right|$ yakınsak olacak şekilde tüm $a \in \mathbb{R}$ sayılarının infumumu ile çakışır bu da istenendir.

3.2. Tanım

Her Dirichlet serisi için Teorem 3.5 de varlığı garanti edilen $\sigma_a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sayısına $F(s)$ in *mutlak yakınsaklık apsisi* denir ve $\{s = \sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_a\}$ bölgesine de $F(s)$ in *mutlak yakınsaklık yarı-düzlemi* denir.

Şunu söyleyelim ki Teorem 3.5 $\sigma = \sigma_a$ olması durumunda $F(s)$ in davranışı hakkında bilgi vermez. Ayrıca teoremde belirtilmeyen iki uç durumu da söyleyelim; $F(s)$, her $s \in \mathbb{C}$ için mutlak yakınsak ise $\sigma_a = -\infty$ ve her $s \in \mathbb{C}$ için mutlak yakınsak değilse $\sigma_a = +\infty$ yazarız.

3.6. Teorem

Her bir Dirichlet serisi için *yakınsaklık apsisi* denilen $\sigma_c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sayısı vardır ki bu Dirichlet serisi $\sigma > \sigma_c$ yarı-düzleminde yakınsak, $\sigma < \sigma_c$ yarı-düzleminde ıraksaktır. Yakınsaklık yarı-düzleminin kompakt (kapalı ve sınırlı) alt kümelerinde yakınsaklık düzgündür. Üstelik $\sigma_a - 1 \leq \sigma_c \leq \sigma_a$ eşitsizliği sağlanır [20].

İspat

$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ her s için ıraksak ise teoremin iddiası $\sigma_c = \infty$ için geçerlidir. Bu serinin en az bir noktada yakınsak olduğunu varsayalım ve serinin yakınsak olduğu $s \in \mathbb{C}$ lerin kümesini D ile gösterelim. $\sigma_c = \inf\{\sigma : s \in D\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ olarak tanımlayalım. σ_c nin tanımından, $F(s)$ $\sigma < \sigma_c$ koşulunu sağlayan herhangi bir $s = \sigma + it$ noktasında ıraksaktır. Diğer yandan σ_0 , σ_c ye keyfi yakınlıkta olmak üzere seri s_0 da yakınsak olacak şekilde bir $s_0 = \sigma_0 + it_0$ noktası vardır ve bu şekilde verilen bir s_0 noktası için $\sigma > \sigma_0$ olmak üzere her bir $s = \sigma + it$ noktasında $F(s)$ in yakınsak olduğunu söyleyebiliriz.

σ_c nin tanımı gereği σ_0 , σ_c ye keyfi biçimde yakın seçilebileceğinden $\sigma > \sigma_c$ yarı-düzleminde $F(s)$ in yakınsak olduğu elde edilir. Ayrıca bu yakınsaklık, yarı-düzlemin kompakt alt kümelerinde düzgündür.

Teoremin son iddiasını elde etmek için öncelikle şunu ifade edelim: mutlak yakınsaklık yakınsaklığı gerektirdiğinden $\sigma_c \leq \sigma_a$ olduğu açıktır. Üstelik

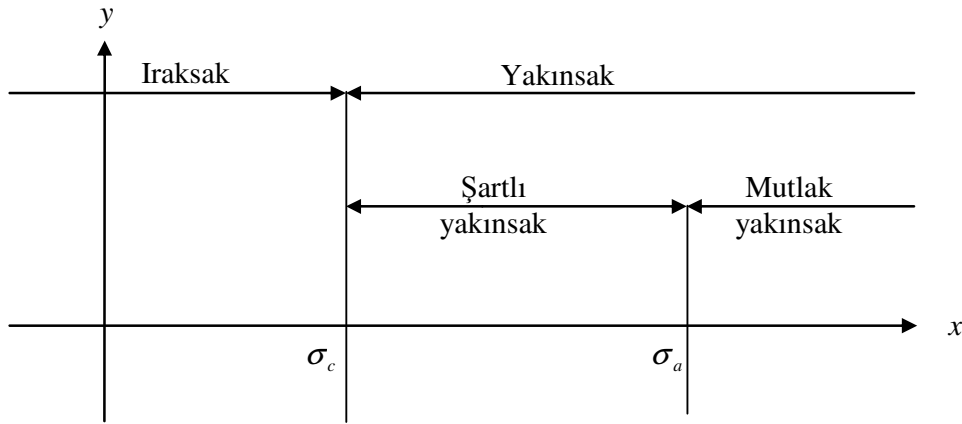
$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ bir $s = s_0 = \sigma_0 + it_0$ noktasında yakınsak ise $n \rightarrow \infty$ iken

$\frac{f(n)}{n^{s_0}} \rightarrow 0$ dır. Öyleyse özel olarak $n \geq n_0$ lar için $\left| \frac{f(n)}{n^{s_0}} \right| \leq 1$ yazabiliriz. O halde

$n \geq n_0$ ve herhangi bir s için

$$\left| \frac{f(n)}{n^s} \right| = \left| \frac{f(n)}{n^{s_0}} \frac{n^{s_0}}{n^s} \right| = \left| \frac{f(n)}{n^{s_0}} n^{s_0-s} \right| = \left| \frac{f(n)}{n^{s_0}} \right| n^{s_0-s} \leq \left| \frac{f(n)}{n^{s_0}} \right| n^{\sigma_0-\sigma} \leq n^{-(\sigma-\sigma_0)}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(\sigma-\sigma_0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}}$ serisi $\sigma - \sigma_0 > 1$ için yakınsak olduğundan $F(s)$ serisi $\sigma > \sigma_0 + 1$ için mutlak yakınsaktır. σ_0 , σ_c ye keyfi biçimde yakın alınabildiğinden $\sigma_a \leq \sigma_c + 1$ olmasını gerektirir.



Şekil 3.1. Dirichlet serilerinin yakınsaklık ve mutlak yakınsaklık apsisi

3.9. Örnek

s reel sayılara kısıtlandığında $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ serisi $s > 1$ için (mutlak) yakınsak,

$s \leq 1$ için ıraksak olduğunu göstermiştik. $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ olduğunda $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

serisi $\sigma_a = \sigma_c = 1$ yakınsaklık apsisine sahiptir. Böylece bu seri her $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ için $\sigma > 1$ olduğunda mutlak yakınsak, $\sigma < 1$ olduğunda ıraksaktır. Benzer olarak

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ serisi için $\sigma_a = 1$ ve $\sigma_c = 0$ dir. Dolayısıyla bu seri $0 < s < 1$ aralığında

alınan her $s \in \mathbb{C}$ için şartlı yakınsaktır.

3.7. Teorem

$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ Dirichlet serisi $\sigma > \sigma_c$ yakınsaklık yarı-düzleminde s in bir analitik fonksiyonunu tanımlar. Üstelik aynı yakınsaklık yarı-düzleminde Dirichlet serisi terim terime türevlenebilir ki

$$F'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \log(n)}{n^s}$$

olup bu seri bu yarı-düzlemde yakınsaktır [20].

İspat

$$F_N(s) = \sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n^s}, \quad F(s) \text{ serisinin kısmi toplamlar dizisini gösterebilir. } \frac{f(n)}{n^s} = \frac{f(n)}{e^{s(\log n)}}$$

olarak yazılabilir. Burada e^s üstel fonksiyonu tam ($\mathbb{C}$ nin tamamında analitik) olduğundan $\frac{f(n)}{n^s}$ fonksiyonu da tamdır. Teorem 3.6 dan $N \rightarrow \infty$ iken $\sigma > \sigma_c$ yarı-düzleminin her kompakt alt kümesinde $F_N(s)$, $F(s)$ e düzgün yakınsar. Aritmetik fonksiyonların düzgün yakınsak dizileri için Weierstrass teoremi gereği, $\sigma > \sigma_c$ yarı-düzleminin her kompakt alt kümesinde $F(s)$ analitiktir ve böylece bu yarı-düzlemde tamdır. Bu, teoremin ilk iddiasını ispatlar.

$$F_N(s) \text{ terim terime türevlenebilir. } F'_N(s) = \sum_{n=1}^N f(n)(-\log n)n^{-s} \text{ olup yine}$$

Weierstrass teoreminden $F'_N(s)$ türevi $\sigma > \sigma_c$ yarı-düzleminde $F'(s)$ e yakınsar.

3.3. Dirichlet Serileri ve Toplam Fonksiyonları

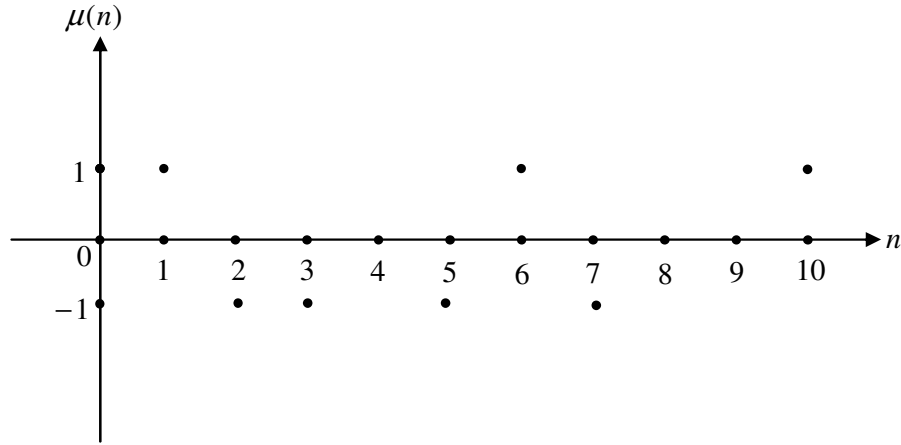
Bir f aritmetik fonksiyonunun davranışını incelerken genellikle f in

$$M(f, x) = \sum_{n \leq x} f(n) \quad (3.7)$$

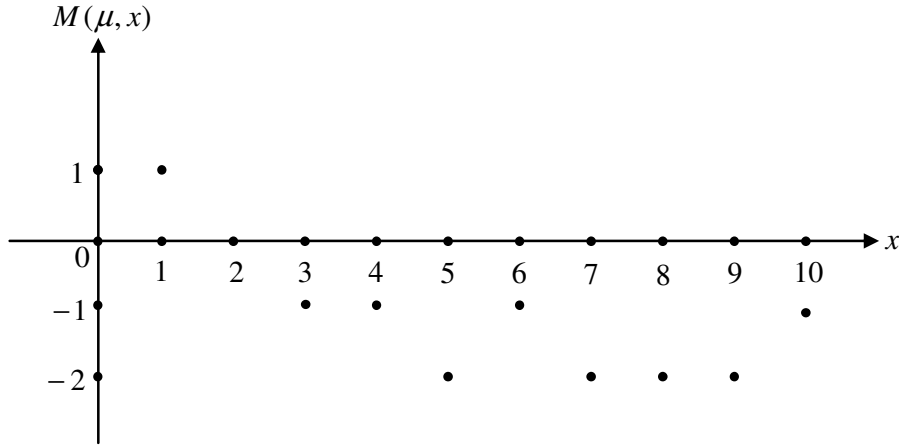
toplam fonksiyonunun özelliklerini incelemeyi ya da f in

$$L(f, x) = \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n} \quad (3.8)$$

“Logaritmik” toplam versiyonunun özelliklerini incelemeyi tercih ederiz [20]. Gerçekten $n \rightarrow \infty$ iken $f(n)$ değerini tahmin etmek zordur ama $M(f, x)$ ve $L(f, x)$ toplam fonksiyonlarının değerlerini tahmin edilebiliriz. Örneğin; Möbius fonksiyonu için aşağıdaki grafikleri inceleyelim.



Şekil 3.2. $\mu(n)$ Möbius fonksiyonu



Şekil 3.3. $M(\mu, x)$ Toplam fonksiyonu

3.8. Teorem (*Dirichlet Serilerinin Mellin Dönüşüm Gösterimi*)

$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$, σ_c sonlu yakınsaklık apsisiyle bir Dirichlet serisi olsun.

$M(f, x)$ ve $L(f, x)$ sırasıyla Eşitlik 3.7 ve Eşitlik 3.8 ile tanımlanan toplam fonksiyonları olmak üzere

$$F(s) = s \int_1^{\infty} M(f, x) x^{-s-1} dx \quad (\sigma > \max(0, \sigma_c)) \quad (3.9)$$

$$F(s) = (s-1) \int_1^{\infty} L(f, x) x^{-s} dx \quad (\sigma > \max(1, \sigma_c)) \quad (3.10)$$

dir. [20]

İspat

İlk önce Eşitlik 3.10 un Eşitlik 3.9 dan bulunabileceğini göstereceğiz. s yerine

$$\tilde{s} = s - 1 \text{ ile } \tilde{f}(n) = \frac{f(n)}{n} \text{ fonksiyonunu ve } F(s) \text{ yerine de } \tilde{F}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}(n)n^{-s}$$

yazarak, $M(\tilde{f}, x) = L(f, x)$ i elde ederiz ve böylece f yerine $\tilde{f}$, s yerine $\tilde{s} = s - 1$ yazarak Eşitlik 3.10 un sağ tarafı Eşitlik 3.9 un sağ tarafına eşit olur. Ayrıca $F(s) = \tilde{F}(s - 1) = \tilde{F}(\tilde{s})$ olur. Bu koşullar altında eşitliklerin sol tarafları eşittir. $\tilde{F}(s) = F(s + 1)$ olduğundan $\tilde{F}$ in $\tilde{\sigma}_c$ yakınsaklık apsisi $\sigma_c - 1$ e eşittir. Böylece Eşitlik 3.9 daki $\tilde{\sigma} > \max(0, \tilde{\sigma}_c)$ şartı, $\sigma - 1 > \max(0, \sigma_c - 1)$ e veya denk olarak $\sigma > \max(1, \sigma_c)$ ye dönüşür ve bu da Eşitlik 3.10 un şartıdır.

f ve $F(s)$ teoremdeki gibi verilsin ve $\sigma > \min(0, \sigma_c)$ şartı ile s sabit olsun. Böylece $F(s)$ Dirichlet serisi s de yakınsaktır.

$$\chi(x, n) = \begin{cases} 1, & n \leq x \\ 0, & n > x \end{cases} \text{ olmak üzere } M(f, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(x, n) f(n) \text{ yazalım.}$$

Her $X \geq 1$ için

$$\begin{aligned} s \int_1^X M(f, x) x^{-1-s} dx &= s \int_1^X \sum_{n=1}^{\infty} \chi(x, n) f(n) x^{-s-1} dx \\ &= s \int_1^X \sum_{n \leq X} \chi(x, n) f(n) x^{-s-1} dx \\ &= s \sum_{n \leq X} f(n) \int_1^X \chi(x, n) x^{-s-1} dx \\ &= s \sum_{n \leq X} f(n) \int_n^X x^{-s-1} dx \\ &= s \sum_{n \leq X} f(n) \frac{1}{s} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{X^s} \right) \\ &= \sum_{n \leq X} \frac{f(n)}{n^s} - \frac{1}{X^s} M(f, X). \end{aligned}$$

$X \rightarrow \infty$ iken, $F(s)$ in yakınsaklığından sağ taraftaki ilk terim $F(s)$ e yakınsar. Ayrıca Kronecker yardımcı teoreminden hatırlanacağı gibi f bir aritmetik fonksiyon

ve $\sigma > 0$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ yakınsak ise $s = \sigma + it$ için $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^s} \sum_{n \leq x} f(n) = 0$ dır.

Böylece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} s \int_1^x M(f, x) x^{-s-1} dx = F(s)$$

olup, Eşitlik 3.9 elde edilmiş olur.

3.9. Teorem (*Riemann Zeta Fonksiyonunun İntegral Gösterimi ve Analitik Devamı*)

$\sigma > 1$ için $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ serisi ile tanımlanan Riemann zeta fonksiyonu, $\sigma > 0$ yarı-düzleminde tanımlı ve $s = 1$ de rezüdüsü 1 olan basit kutup noktası hariç bu yarı-düzlemde analitik olan bir analitik devama sahiptir. Bu analitik devam

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \{x\} x^{-s-1} dx. \quad (\sigma > 0) \quad (3.11)$$

ile verilir [20].

İspat

Öncelikle $\zeta(s)$ ve analitik devamı için iki açıklama yapalım: Eşitlik 3.11 de tanımlanan $\zeta(s)$ in analitik devamı için $\tilde{\zeta}(s)$ gibi farklı bir sembol kullanmalıyız fakat kaba notasyonlardan kaçınmak için $\zeta(s)$ in analitik devamını yine aynı notasyonla göstereceğiz.

Örneğin; zeta fonksiyonunun Dirichlet seri gösterimi $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $\sigma < \sigma_c = 1$ yarı-düzleminin içindeki her noktada ıraksaktır, hatta $\sigma = 1$ doğrusunun üzerindeki her

noktada ıraksaktır ve $\sigma > 1$ yarı-düzleminin dışında iyi tanımlı bile değildir. Tersine

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \{x\} x^{-s-1} dx$$

gösterimi en geniş $\sigma > 0$ yarı-düzleminde iyi tanımlıdır ve burada bir analitik fonksiyondur. Şimdi Eşitlik 3.11 in nasıl elde edildiğini gösterelim.

Teorem 3.8 de $f \equiv 1$ alırsak, $F(s) = \zeta(s)$, $\sigma_c = 1$ ve $M(f, x) = [x]$ olur ve

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} [x] x^{-s-1} dx \quad (\sigma > 1)$$

elde edilir. $[x] = x - \{x\}$ dir ve $\{x\}$, x in ondalık kısmıdır. Buradan integral

$$\int_1^{\infty} x^{-s} dx - \int_1^{\infty} \{x\} x^{-s-1} dx = \frac{1}{s-1} - \int_1^{\infty} \{x\} x^{-s-1} dx$$

şeklini alır. Sonuç olarak $\sigma > 1$ yarı-düzleminde Eşitlik 3.11 i elde ederiz. $\varepsilon > 0$ için Eşitlik 3.11 deki integral sınırlıdır. $\sigma \geq \varepsilon$ ile herhangi bir s için

$$\left| \int_1^{\infty} \{x\} x^{-s-1} dx \right| \leq \int_1^{\infty} x^{-\sigma-1} dx \leq \int_1^{\infty} x^{-\varepsilon-1} dx = \frac{1}{\varepsilon}.$$

dur. Böylece bu integral $\sigma \geq \varepsilon$ yarı-düzleminde mutlak ve düzgün yakınsaktır ve $\sigma \geq \varepsilon$ yarı-düzleminde s in bir analitik fonksiyonunu gösterir. $\varepsilon > 0$ istenildiği kadar küçük alınabildiğinden bu fonksiyon $\sigma > 0$ yarı-düzleminde analitiktir. $\frac{s}{s-1}$ teriminden dolayı Eşitlik 3.11, $s = 1$ basit kutup noktası (ki rezidüsü 1 dir) hariç bu yarı-düzlemde analitik bir fonksiyondur. Bu, $\zeta(s)$ in $\sigma > 0$ yarı-düzlemindeki

analitik devam iddiasını sağlar.

Eşitlik 3.11 deki gösterimin bir sonucu olarak $s = 1$ civarında $\zeta(s)$ için bir tahmin elde ederiz.

3.10. Teorem ($s = 1$ civarında $\zeta(s)$ in tahmini)

γ , Euler sabiti ve $s \neq 1$ olmak üzere $|s - 1| \leq \frac{1}{2}$ için

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(|s-1|)$$

dir [20].

İspat

Teorem 3.9 gereği $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ fonksiyonu $|s-1| < 1$ diskinde analitiktir ve bu diskin içinde bir kuvvet serisi açılımı vardır.

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s-1)^n$$

$|s-1| \leq \frac{1}{2}$ diski içinde

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = a_0 + O(|s-1|)$$

dir. Böylece a_0 sabitinin γ ya eşit olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır.

Eşitlik 3.11 den $\sigma > 0$ yarı-düzleminde

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = 1 - s \int_1^{\infty} \{x\} x^{-s-1} dx$$

dir. $s \rightarrow 1$ iken sağ taraf

$$a_0 = \lim_{s \rightarrow 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = 1 - \int_1^{\infty} \{x\} x^{-2} dx$$

olur. Euler sabiti $\gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \right)$ ile tanımlanır ve $1 - \int_1^{\infty} \{x\} x^{-2} dx$ e eşittir. O halde iddia edildiği gibi $a_0 = \gamma$ dır.

3.11. Teorem ($M(f, x)$ için hata terimlerinin tahmini ve $F(s)$ in analitikliği)

Bir $\theta \geq 0$ için $M(f, x) = O(x^\theta)$ ise $F(s)$, $\sigma > \theta$ yarı-düzleminde analitiktir [20].

İspat

$f(n) = M(f, n) - M(f, n-1)$ olduğundan, $M(f, x)$ için verilen tahmin $f(n) = O(n^\theta)$ olmasını gerektirir. Böylece $F(s)$ Dirichlet serisi sonlu yakınsaklık apsisine sahiptir ve Teorem 3.8 bu durumda uygulanabilir.

$M(f, x) = O(x^\theta)$ ise Eşitlik 3.9 da verilen integrand $M(f, x)x^{-s-1} = O(x^{\theta-s-1})$ dir.

Böylece her $\varepsilon > 0$ için $\int_1^{\infty} M(f, x)x^{-s-1} dx$ integrali $\sigma \geq \theta + \varepsilon$ yarı-düzleminde

düzgün yakınsaktır. Öyleyse $\sigma \geq \theta + \varepsilon$ yarı-düzleminde analitik bir fonksiyon belirtir. O halde $\sigma > \theta$ yarı-düzleminde analitiktir. Sonuç olarak Eşitlik 3.9 un sağ tarafındaki fonksiyon ve buradan da $F(s)$, bu yarı-düzlemde analitiktir.

Bu bölümü Teorem 3.11 in bir uygulaması ile tamamlayalım, Teorem 3.11 i Möbius fonksiyonunun toplam fonksiyonu olan $M(\mu, x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$ için yorumlayalım:

$\theta \geq 0$ için

$$M(\mu, x) = O_{\theta}(x^{\theta}) \quad (3.12)$$

olsun. Teorem 3.9,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

Dirichlet serisinin $\sigma > \theta$ yarı-düzleminde analitik olmasını gerektirir. Bu da sırası ile $\zeta(s)$ in meromorfik olmasını ve

$$\text{“}\zeta(s) \text{ in } \sigma > \theta \text{ yarı-düzleminde hiç sıfırı yoktur”} \quad (3.13)$$

iddiasını gerektirir.

Buradan $M(\mu, x)$ in tahmininin niteliği ve böylece asal sayı teoremindeki hata teriminin niteliği Riemann zeta fonksiyonunun “sıfırsız bölge” sine bağlıdır ve özellikle θ değeri için İddia 3.13 sağlanır. Ne yazık ki bu kabulde çok az şey biliniyor. Bu konudaki güncel bilgileri aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

1) $\theta > 1$ için, $\zeta(s) = \prod_p \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right)$ Euler çarpım gösteriminden İddia 3.13 sağlanır.

2) s in reel kısmı $\frac{1}{2}$ olmak üzere, $\zeta(s)$ in sonsuz sayıda sıfırının olduğu biliniyor.

Böylece İddia 3.13 herhangi $\theta < \frac{1}{2}$ değeri için sağlanmaz.

3) İddia 3.13, $\theta = \frac{1}{2}$ değeri için sayılar teorisinin en ünlü problemi olan “Riemann Hipotezi” dir

4) $\frac{1}{2} \leq \theta < 1$ için İddia 3.13 ü sağlayan bir θ nın var olup olmadığı bilinmiyor.

4. RAMANUJAN'IN SONUCU VE GENELLEŞTİRİLMESİ

Ramanujan $\sigma > \max \{1, a+1, b+1, a+b+1\}$ şartını sağlayan $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}$$

zarif özdeşliğini ortaya koymuştu. Çalışmamızın üçüncü bölümünde reel değişkenli Dirichlet serileri ile ilgilenirken bunun gibi zarif özdeşlikleri vermiştik. Ramanujan'ın bu sonucunun bir genellemesi Borwein ve Choi [21] tarafından aşağıdaki teoremden verilmiştir.

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \text{ Dirichlet serisinin yakınsaklık apsisi } \sigma_c, f \text{ fonksiyonuna bağlı}$$

olarak $\sigma(f)$ ve bu Dirichlet serisinin yakınsaklık aralığında tanımladığı analitik fonksiyonu yine $L_f(s)$ ile gösterelim.

4.1. Teorem

f_1, f_2, g_1 ve g_2 tam çarpımsal aritmetik fonksiyonlar ve $\sigma \geq \max \{\sigma(f_i), \sigma(g_i)\}$ şartını sağlayan $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_1 * g_1)(n)(f_2 * g_2)(n)}{n^s} = \frac{L_{f_1 f_2}(s) L_{g_1 g_2}(s) L_{f_1 g_2}(s) L_{g_1 f_2}(s)}{L_{f_1 f_2 g_1 g_2}(2s)}$$

dir [21].

İspat

$(f_1 * g_1)(n)(f_2 * g_2)(n)$ çarpımsal olduğundan, sadece onların asal kuvvetler

üzerindeki değerlerini göz önünde bulundurmalıyız. Herhangi p asal sayısı ve herhangi $l \geq 0$ için

$$(f_i * g_i)(p^l) = \sum_{d|p^l} f_i(d) g_i\left(\frac{p^l}{d}\right) = \frac{f_i(p)^{l+1} - g_i(p)^{l+1}}{f_i(p) - g_i(p)}$$

dir.

Her bir f_1, f_2, g_1, g_2 tam çarpımsaldır.

Eğer $f_i(p)$ ve $g_i(p)$ sıfır ise

$$(f_i * g_i)(p^l) = \begin{cases} 1, & l = 0 \text{ ise} \\ 0, & l \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve buradan şunu elde ederiz

$$\begin{aligned} \Sigma_p &= \sum_{l=0}^{\infty} (f_1 * g_1)(p^l) (f_2 * g_2)(p^l) p^{-ls} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(f_1(p)^{l+1} - g_1(p)^{l+1})(f_2(p)^{l+1} - g_2(p)^{l+1})}{(f_1(p) - g_1(p))(f_2(p) - g_2(p))} p^{-ls} \\ &= \frac{\sum_{l=0}^{\infty} \{(f_1 f_2)(p)^{l+1} p^{-ls} + (g_1 g_2)(p)^{l+1} p^{-ls} - (f_1 g_2)(p)^{l+1} p^{-ls} - (g_1 f_2)(p)^{l+1} p^{-ls}\}}{(f_1(p) - g_1(p))(f_2(p) - g_2(p))} \end{aligned}$$

bütün bu geometrik serileri toplarsak

$$\begin{aligned}\sum_p &= \frac{\frac{(f_1 f_2)(p)}{1 - (f_1 f_2)(p)p^{-s}} + \frac{(g_1 g_2)(p)}{1 - (g_1 g_2)(p)p^{-s}} - \frac{(f_1 g_2)(p)}{1 - (f_1 g_2)(p)p^{-s}} - \frac{(g_1 f_2)(p)}{1 - (g_1 f_2)(p)p^{-s}}}{(f_1(p) - g_1(p))(f_2(p) - g_2(p))} \\ &= \frac{1 - (f_1 f_2 g_1 g_2)(p)p^{-2s}}{(1 - (f_1 f_2)(p)p^{-s})(1 - (g_1 g_2)(p)p^{-s})(1 - (f_1 g_2)(p)p^{-s})(1 - (g_1 f_2)(p)p^{-s})}\end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Dirichlet serileri için Euler çarpım formundan

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_1 * g_1)(n)(f_2 * g_2)(n)}{n^s} &= \prod_p \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(f_1 * g_1)(p^l)(f_2 * g_2)(p^l)}{p^{ls}} \right\} \\ &= \frac{L_{f_1 f_2}(s) L_{g_1 g_2}(s) L_{f_1 g_2}(s) L_{g_1 f_2}(s)}{L_{f_1 f_2 g_1 g_2}(2s)}\end{aligned}$$

olur, bu da bizim teoremimizi ispatlar.

Teorem 4.1 in basit bir uygulaması $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_k(n) n^{-s}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a(n) \sigma_b(n) n^{-s}$ Dirichlet serilerinin hesaplanmasıdır.

$$f_1(n) = n^k, f_2(n) = I(n) \text{ ve } g_1(n) = g_2(n) = 1 \text{ ise}$$

$$L_{f_1 f_2}(s) = L_{g_1 f_2}(s) = L_{f_1 f_2 g_1 g_2}(s) = 1$$

$$L_{f_1 g_2}(s) = \zeta(s - k), L_{g_1 g_2}(s) = \zeta(s)$$

dir.

Yukarıda elde ettiklerimizi $\frac{L_{f_1 f_2}(s) L_{g_1 g_2}(s) L_{f_1 g_2}(s) L_{g_1 f_2}(s)}{L_{f_1 f_2 g_1 g_2}(2s)}$ de yerine yazarsak

$\sigma > \max\{1, k+1\}$ şartını sağlayan $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-k)$

Dirichlet serisini elde ederiz.

Benzer olarak, eğer $f_1(n) = n^a$, $f_2(n) = n^b$ ve $g_1(n) = g_2(n) = 1$ ise

$$L_{f_1 f_2}(s) = L_{f_1 f_2 g_1 g_2}(s) = \zeta(s-(a+b)), L_{g_1 g_2}(s) = \zeta(s), L_{f_1 g_2}(s) = \zeta(s-a), L_{f_2 g_1}(s) = \zeta(s-b)$$

dir ve Teorem 4.1 bize Ramanujan'ın sonucu olan

$\sigma > \max\{1, a+1, b+1, a+b+1\}$ şartını sağlayan $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}$$

özdeşliğini verir. Özellikle herhangi reel λ için

$$\sum_{n(1)}^{\infty} \frac{\sigma_{\lambda}^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-2\lambda)\zeta(s-\lambda)^2\zeta(s)}{\zeta(2(s-\lambda))}$$

yı verir.

Çalışmamızda temel amacımız $\sigma_c = \sigma(f)$ yakınsaklık apsisine sahip

$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ Dirichlet serisinden yola çıkarak herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ (ya da $\mathbb{C}$)

için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{\alpha}(n)}{n^s}$ Dirichlet serisinin özelliklerini incelemek ve bu seriyi $L_f(s)$

cinsinden yazmaktır. Örneğin N aritmetik fonksiyonunu göz önüne alalım.

$\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(N(n))^{\alpha}}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N^{\alpha}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-\alpha}} = \zeta(s-\alpha)$$

olup bu seri $s > 1 + \alpha$ için yakınsak olduğu kolaylıkla görülür. Ancak N yerine herhangi bir çarpımsal fonksiyon alındığında böyle genel bir sonuç bulmak oldukça güçtür.

$\alpha \in \mathbb{Z}$ kısıtlaması ile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^{\alpha}(n)}{n^s}$ Dirichlet serisini inceleyelim:

α tek sayı ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^{\alpha}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$ elde edilir.

α çift sayı ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^{\alpha}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \frac{\lambda^{-1}(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$ elde edilir [22].

$\alpha \in \mathbb{Z}$ kısıtlaması altında bile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^{\alpha}(n)}{n^s}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a^{\alpha}(n)}{n^s}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda^{\alpha}(n)}{n^s}$ Dirichlet serileri için

bir sonuç elde etmek oldukça güç görünüyor. $\alpha \in \mathbb{R}$ olması durumunda ise bu güçlüğü artacağı kesindir. Bu sebeple genel olarak $\alpha \in \mathbb{R}$ (ya da $\mathbb{C}$) için

$$M_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{\alpha}(n)}{n^s} \leq M_2$$

olacak şekilde α sayısına ve f fonksiyonuna bağlı M_1 ve M_2 sınırları bulabilir

miyiz? Alternatif olarak $\sum_{n \leq x} \frac{f^{\alpha}(n)}{n^s}$ kısmi toplamı için $\left| \sum_{n \leq x} \frac{f^{\alpha}(n)}{n^s} \right| = O(x^{\theta})$ olacak

şekilde f fonksiyonuna ve α sayısına bağlı bir θ bulabilir miyiz? Soruları ile ilgilendik. Ancak kayda değer bir sonuca ulaşamadık.

Bunların yanında 3. Bölüm Örnek 3.2 de $\zeta(2)$ nin Fourier serileri yardımıyla hesaplanışına ilişkin bir yöntem sunulmuştur. Çalışmamızda Fourier serileri ya da Chebyshev serileri gibi özel bir seri sınıfı kullanarak $\zeta(2k)$ ya da $\zeta(2k+1)$ sayılarını hesaplayabilir miyiz? Sorusuna da yanıt aradık. Orijinal bir sonuca varamadık.

$\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere $L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ fonksiyonu ile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^\alpha(n)}{n^s}$ Dirichlet serisinin tanımladığı fonksiyonun hangi ortak analitik özellikleri taşımaktadır? Sorusuna da yanıt aradık ancak yine çarpıcı bir sonuca ulaşamadık.

7. SONUÇ

Bu çalışmada esas olarak Dirichlet serileri tanıtılmış, bu serilerin reel değişkenli ya da kompleks değişkenli olması durumlarında taşıdıkları temel özellikler sunulmuştur. İkinci bölümde konuya hazırlık niteliğinde olmak üzere aritmetik fonksiyonlar tanıtılmış ve temel özellikleri sıralanmıştır. Üçüncü bölümde reel değişkenli Dirichlet serileri incelenirken öncelikle yakınsaklık kavramı üzerinde durulmuş, $\zeta(s)$ Riemann zeta fonksiyonunun Euler çarpım gösterimi verilmiş, çeşitli uygulamalar sunulmuş ve Riemann zeta fonksiyonunun $\zeta(2k)$ değerinin hesaplanması için bir yöntem verilmiştir. Bu bölümün diğer kısmında ise kompleks değişkenli Dirichlet serileri incelenip daha ileri uygulamalara yer verilmiştir. Kompleks değişken durumunda Dirichlet serisinin yakınsaklık apsisi, mutlak yakınsaklık apsisi, yakınsaklık yarı-düzlemi ve mutlak yakınsaklık yarı-düzlemi kavramları tanıtılmıştır. Kompleks değişkenli Dirichlet serisinin yakınsaklık yarı-düzleminde tanımladığı kompleks değişkenli fonksiyonun bu yarı-düzlemde analitik olması gerçeği vurgulanmıştır. Bu gerçek kullanılarak Riemann hipotezi yeniden ifade edilmiştir. Dördüncü bölümde ise Ramanujan'ın şık sonucundan yola çıkarak yapılan genellemeler incelenmiştir.

Bu çalışmaya başlarken amacımız, Dirichlet serilerinin bilinen özelliklerini kullanarak reel ya da kompleks α sayısı için $\sum_{n=1}^{\infty} (f(n))^{\alpha} n^{-s}$ Dirichlet serisini

$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ cinsinden elde etmektir. Diğer bir ifade ile bundan önceki bölümde ifade edilen Ramanujan'ın sonucunun zayıf bir genelleştirilmesini ifade etmektir. Bunun yanında $\alpha \in \mathbb{R}$ (ya da $\mathbb{C}$) sayısına ve f aritmetik fonksiyonuna

bağlı olarak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{\alpha}(n)}{n^s}$ Dirichlet serisi için alt ve üst sınırlar elde etmektir.

Bu problemlere çözüm olabilecek orijinal veya dikkat çekici sonuçlar elde edememiş olmamıza rağmen çalışmamızın, bu konu ile ilgilenenlere farklı bir bakış açısı sunacağı ümidini taşıyoruz.

KAYNAKLAR

1. Apostol, T.M. , "Introduction to Analytic Number Theory", **5th. Ed. Springer-Verlag**, New York, 24-39,53-56, 229, 233 (1998).
2. Riemann, G. F. B. "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.", **Monatsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss.**, Berlin, 671-680, (Nov. 1859).
3. Jones, G.A. and Jones, J.M. "Elementary Number Theory", **Springer-Verlag**, London, 163-189 (1998).
4. Hardy, G.H., Wright, E.M., "An Introduction to the Theory of Numbers", **5th. Ed. , Oxford University Press**, New York, 245,246 (1979).
5. Derbyshire, J. "*Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*", **Penguin**, New York, 64 (2004).
6. Apostol, T. M. "A Proof That Euler Missed: Evaluating $\zeta(2)$ the Easy Way.", **Math. Intel.**, 5: 59-60 (1983).
7. Choe, B. R. "An Elementary Proof of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.", **Amer. Math. Monthly**, 94: 662-663 (1987).
8. Giesy, D. P. "Still Another Proof That $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$.", **Math. Mag.**, 45: 148-149 (1972).
9. Holme, F. "Ein enkel beregning av $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.", **Nordisk Mat. Tidskr.**, 18: 91-92, 120 (1970).
10. Kimble, G. "Euler's Other Proof.", **Math. Mag.**, 60: 282 (1987).
11. Knopp, K. and Schur, I. "Über die Herleitung der Gleichung $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.", **Archiv der Mathematik u. Physik**, 27: 174-176 (1918).
12. Kortram, R. A. "Simple Proofs for $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ and $\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$.", **Math. Mag.**, 69: 122-125 (1996).

13. Matsuoka, Y. "An Elementary Proof of the Formula $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.", *Amer. Math. Monthly*, 68: 486-487 (1961).
14. Papadimitriou, I. "A Simple Proof of the Formula $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$.", *Amer. Math. Monthly*, 80: 424-425 (1973).
15. Simmons, G. F. "Euler's Formula $\sum_1^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ by Double Integration.", Ch. B. 24 in *Calculus Gems: Brief Lives and Memorable Mathematics.*, New York: McGraw-Hill, (1992).
16. Stark, E. L. "Another Proof of the Formula $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.", *Amer. Math. Monthly*, 76: 552-553 (1969).
17. Stark, E. L. " $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$.", *Praxis Math.*, 12: 1-3 (1970).
18. Yaglom, A. M. and Yaglom, I. M. Problem 145 in *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions, Vol. 2.*, New York: Dover (1987).
19. Apéry, R. "Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$.", *Astérisque*, 61: 11-13 (1979).
20. Hildebrand, A.J. "Introduction to Analytic Number Theory", *Lecture Notes at Department of Mathematics University of Illinois*, 116-119, 123-130, 133-138 (2005).
21. Borwein, J.M., Choi, K.S., "On Dirichlet Series for Sums of Squares", *Ramanujan J.*, 7: 95-127 (2003).
22. Mc Carthy P.J. "Introduction to arithmetical functions", *Springer-Verlag*, New York, 227 (1986).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : POŞPOŞ, Pelin
Uyruğu : T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri : 03.05.1983 Ankara
Medeni Hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 231 19 91
e-mail : pelinpospos@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2006
Lise	Bahçelievler Deneme Lisesi (Yabancı Dil Ağırlıklı)	2001

Yabancı Dil

İngilizce