

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DISLOCATED METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Duygu AKÇAY

Anabilim Dalı: MATEMATİK

Programı : TOPOLOJİ

MANİSA 2013

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ	ii
ŞEKİL LİSTESİ	iii
TEŞEKKÜR	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
GİRİŞ	vii
 I. BÖLÜM	
TEMEL KAVRAMLAR	1
1.1.Metrik Uzaylar Üzerine Bazı Temel Kavramlar	1
1.2.Sabit Nokta Teorisinde Bazı Temel Kavramlar	8
1.3. Büzülme Dönüşüm Prensibinin Lineer Denklemlere Uygulaması	15
II. BÖLÜM	
DISLOCATED METRİK UZAYLAR	17
2.1.Dislocated Metrik Uzaylar Üzerine Temel Kavramlar	17
2.2.Dislocated Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri	20
 III. BÖLÜM	
DISLOCATED TOPOLOJİ	33
3.1.Dislocated Topolojik Uzaylarda Komşuluk Kavramı	33
3.2.Dislocated Topolojik Uzaylarda Yakınsaklık Ve Süreklilik	36
3.3.Klasik Metrik İle Dislocated Metrik Arasındaki İlişki	39
 IV.BÖLÜM	
DISLOCATED QUASI METRİK UZAYLAR	44
4.1.Dislocated Quasi Metrik Uzaylar Üzerine Bazı Temel Kavramlar	44
4.2. Dislocated Quasi Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri	48
4.3. Dislocated Quasi Metrik Uzaylarda Coupled Sabit Nokta Teoremi	65
 SONUÇLAR VE BULGULAR	70
REFERANSLAR	71
ÖZGEÇMİŞ	74

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi.
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi.
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi.
(X, d)	: Metrik / d – metrik / dq – metrik uzay .
(x_n)	:Dizi.
$\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$	: İterasyon dizisi.
$B_e(x)$	: e – açık yuvar.
$\square$	: d – üyelik bağıntısı.
$(U_x, \square)$	: d – komşuluk sistemi.
u_r	: r ' nun dislocation fonksiyonu.

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1. Taxi-Cab Metriği	3
Şekil 2. T Büzülme (contraction) Dönüşümü	10
Şekil 3. Dönüşümler Arasındaki Bağını	10

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, fikirleri ve deneyimleriyle çalışmalarına ışık tutan, gerek bilgisi gerek manevi desteğiyle her zaman yanımda olan değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Cihangir ALACA'ya ve öğrenimim boyunca bana emeği geçen tüm hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten ve güvenden dolayı sevgili aileme sonsuz teşekkürü borç bilirim.

Duygu AKÇAY
MANİSA 2013

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde metrik uzay tanımı hatırlatılmış ve çeşitli metrik örnekleri verilmiştir. Ayrıca dizi, süreklilik ve yakınsama kavramları tanıtılmıştır. Cauchy dizisi ve tam metrik uzay kavramı hatırlatılmış, gerekli teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Daha sonra sabit nokta, Lipschitz koşulu, büzülme dönüşümü, büzülebilir dönüşüm, genişlemeyen dönüşüm kavramları verilmiş, teoremler ve çeşitli örneklerle desteklenmiştir. Banach büzülme dönüşüm prensibi ifade ve ispat edilip, bir örnek verilmiştir. Son olarak büzülme dönüşüm prensibinin lineer denklemlere uygulaması verilmiştir.

İkinci bölümde dislocated metrik uzayların temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Ardından dislocated metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir ve örneklerle teoremler desteklenmiştir.

Üçüncü bölümde dislocated topolojide yer alan komşuluk kavramı, ϵ -açık yuvar, d -üyelik bağıntısı, d -komşuluk sistemi, d -topolojik uzay, d -yakınsaklık, d -süreklilik, dislocation fonksiyonu kavramları tanıtılmış, bazı teoremler ispatlanmış ve örnekler çözülmüştür.

Dördüncü bölümde dislocated quasi metrik uzayların temel tanımları ve bazı sabit nokta teoremleri verilmiştir. Son olarak özgün çalışmamız olan dislocated quasi metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ile genelleştirilmiş metrik uzaylardaki coupled sabit nokta çalışmaları birleştirilerek, dislocated quasi metrik uzaylar için ilk defa coupled sabit nokta teoremi ispatlanmış, ana teoremi destekleyen bir sonuç ve örnek sunulmuştur.

ABSTRACT

This thesis consists of four sections.

In the first section, basic concepts of metric spaces and various metric examples are given. Also sequence, continuity, convergence are introduced. Concepts of Cauchy sequence and complete metric space are recalled and some essential theorems are stated and proved. Subsequently concepts of fixed point, lipschitz condition, contraction mapping, contractive mapping, nonexpansive mapping are giving. Theorems and various examples are supported. Banach contraction mapping principles are stated and proved. An example are giving. Lastly application of linear equations of contraction mapping principles are given.

In the second section, some essential definitions and theorems of dislocated metric spaces are giving. Also some fixed point theorems of dislocated metric spaces are examined and supported by examples of theorems.

In the third section, concepts of neighborhoods, $\mathcal{C}$ -open ball, d-membership relation, d-neighbourhood system, d-topological spaces, d-convergence, d-continuity, dislocation function in dislocated topology are introduced and some theorems with examples are giving.

In the fourth section, some essential definitions and theorems of dislocated quasi metric spaces are giving. Subsequently some fixed point theorems of dislocated quasi metric spaces are examined. Finally we define the notion of a coupled fixed point and introduce coupled coincidence fixed point theorem in dislocated quasi metric spaces. Also we give an example to validate our main theorem and a corollary of the main result.

1.0. GİRİŞ

“*Sabit Nokta Teorisi*” çalışmaları 19. yüzyıl başlarına dayanmaktadır. Matematikte sabit nokta teoremleri diferansiyel denklemler ve integral denklemler gibi çeşitli denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliğinin araştırılmasında önemli bir araç olarak kullanılmaktadır. Bunun yanında pratik sonuçlarının ve uygulamalarının oldukça iyi bilinmesinden dolayı, tıp (tomografi, yeniden görüntü oluşturma), haberleşme (telekomünikasyon, interpolasyon, ekstrapolasyon, quantizer tasarlama, sinyal sentezleri, filtre sentezleri) ve ekonomi başta olmak üzere, daha bir çok alanda yoğun olarak uygulamaları ile karşılaşılmalıdır. Sabit nokta teorisi, bu nedenle non-lineer (lineer olmayan) fonksiyonel analiz, matematiksel analiz, operatör teorisi ve genel topoloji gibi birçok farklı matematik alanları ile de iç içedir.

Tarihsel olarak sabit nokta teorisi çalışmaları iki ana dalda gelişmiştir: Birincisi, bir lineer normlu uzayın bir kompakt ve konveks alt kümesi üzerine sürekli operatörlerin sabit nokta teorisi diğeri ise tam metrik uzaylar üzerine büzülme ve büzülme tipi operatörlerin sabit nokta teorisidir. Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları, 1909-1913 yıllarında L. E. J. Brouwer ile başlamıştır.

Analize giriş derslerinden de çok iyi bilinen en basit sabit nokta teoremi: “ $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ sürekli bir dönüşüm ise, f ’nin $[a, b]$ aralığında bir sabit noktası vardır” şeklindedir. 1912 yılında, Brouwer bu teoremi, $\mathbb{R}^n$ üzerine şu şekilde genişletmiştir: “ $B, \mathbb{R}^n$ ’de kapalı bir yuvar olsun. Bu durumda $f : B \rightarrow B$ sürekli dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir”. Brouwer’ın bu teoremi, ekonomi biliminde (iktisat) Nobel ödülü alan John Nash’ın makalelerinde temel bir matematiksel araç olmuştur. Yine ekonomistlere göre gelecekte Brouwer’ın bu teoremi, kesin bir ekonomik dengenin hesaplanması için yardımcı olabilecektir.

Metrik uzaylarda sabit nokta teorisinin başlangıcı, özel durumu için Liouville, Picard (1890) ve Goursat tarafından daha önce elde edilmiş olan ve 1922 yılında basılmış **Banach Büzülme Prensibi** olmuştur. Açıkça, bir sabit noktanın varlığı hakkındaki en basit sonuç “*Banach Sabit Nokta Teoremi*” dir. Bazı matematikçiler bu teoremi, “*Daralma (büzülme) Dönüşüm Prensibi veya Teoremi*” olarak da adlandırmıştır. “*Büzülme ilkesi*” olarak bilinen bu teorem, ilk olarak 1920’ li yılların başlarında, S. Banach tarafından: “ (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için, $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$, $0 \leq k < 1$ ise T dönüşümü X ’ de bir sabit noktaya sahiptir.” şeklinde ortaya konulmuştur. Bu teorem, S. Banach’ın doktora tezinin bir kısmı olarak belirlenmiş ve ispatı yapılmıştır. Bundan sonraki aşamalarda Banach’ın sabit nokta teoremi, matematiğin birçok dalındaki uygulamalarda varlık problemlerinin çözümünde, kullanışlı ve kolaylık sağlayan bir unsur olmuştur. Tek ve çoğul değerli dönüşümler üzerine sabit nokta teorisi son yüz yıl boyunca çeşitli problemlere geliştirilmiş ve uygulanmıştır.

Banach Sabit Nokta Teoremi büzülme dönüşümünde yeni sonuçlar keşfetmek ya da bu konu üzerinde çalışmak amacıyla birçok araştırmacıyı etkilemiştir. Bunun yanı sıra R. Kannan [23], B. K. Dass ve S. Gupta [13] ile Lj. B. Ćirić [11]’ in metrik uzayda Banach büzülme prensibine getirdikleri genellemede olduğu gibi sürekli olmayan yeni bir büzülme dönüşümü şekli ortaya çıkarmıştır. Ayrıca B. E. Rhoades [30] büzülme dönüşümünün farklı tanımları için kısmi bir sıralama oluşturmak için başarılı bir girişimde bulunmuştur. S. G. Matthews [26] domain teorisinin içeriğinde metrik domains adı altında dislocated metrikleri çalışmıştır. S. Abramsky ve A. Jung [3]’ un çalışması “ Herhangi bir noktanın kendine olan uzaklığı bir metrik için sıfıra eşit olması gerekir ” görüşünü ele alan çalışması domain teorisinin içeriğinde metrik domains adı altında dislocated metrikler kavramına dikkat çekmiştir. P. Hitzler ve A. K. Seda [18] dislocated metrik uzaylar kavramıyla bilinmiştir, böylece bu gibi uzaylar için Banach Büzülme Prensibini genişletmiştir. F. M. Zeyada, G. H. Hassan ve M. A. Ahmed [35] dislocated metrik uzaylarda P. Hitzler ve A. K. Seda [18]’ nın çalışmasını kullanmışlardır. Dahası C. T. Aage ve J. N. Salunke [1, 2], R. Kannan [23] ve Lj. B. Ćirić [3] tarafından verilen dönüşümler

üzerinde çalışmışlar ve dislocated quasi metrik uzaylarda sabit nokta teoremi oluşturmuşlardır. Son zamanlarda A. Isufati [19] dislocated büzülme dönüşümünde B. K. Dass ve S. Gupta [13] ile B. E. Rhoades [30] tarafından tanımlanan sürekli büzülme dönüşümü için birkaç sabit nokta teoremi kanıtlamıştır.

Dislocated metrik uzaylar kavramı ilk olarak S. G. Matthews [26] tarafından 1986 yılında “*Metric Domains for Completeness*” adlı doktora teziyle literatüre girmiştir. P. Hitzler [17] tarafından 2001 yılında basılmış “*Generalized Metrics and Topology in Logic Programming Semantics*” adlı doktora tezine temel oluşturan, P. Hitzler ve A. K. Seda [18] tarafından 2000 yılında basılmış “*Dislocated Topologies*” adlı çalışmada dislocated metrik uzay kavramı tanımlanmış, ardından dislocated topoloji, dislocated yakınsaklık ve dislocated süreklilik kavramları üzerinde durulmuştur. Ayrıca metrik uzaylar ve dislocated metrik uzaylar arasındaki ilişki teorem ve örneklerle açıklanmıştır. S. G. Matthews [26] çalışmaları temel alınarak başlayan dislocated metrik uzaylar ve dislocated quasi metrik uzaylar üzerine çalışmalar, P. Hitzler ve A. K. Seda [18], P. S. Kumari [24], F. M. Zeyada, G. H. Hassan ve M. A. Ahmed [35], C. T. Aage ve J. N. Salunke [1, 2], A. Isufati [19], K. Zoto, E. Hoxha [37], K. Jha, D. Panthi [21], K. P. Rao, P. R. Swamy [29], R. Shrivastava, Z. K. Ansari, M. Sharma [32], D. Akçay ve C. Alaca [5] çalışmaları ile devam etmiştir.

I. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Metrik Uzaylar Üzerine Bazı Temel Kavramlar

Bu bölüme, metrik uzaylarda bazı temel kavramları C. Yıldız [34] ve T. Başkan, O. Bizim, İ. N. Cangül [9] kitapları yardımıyla vererek başlayalım.

Metrik veya metrik uzay kavramı, klasik analizden modern analize geçiş sağlayan çok önemli bir köprüdür. Bu kavram reel ve kompleks teorilerde bilinen bir çok önemli özelliklerin herhangi bir uzayda nasıl yapılacağını gösterir. Ayrıca topolojide soyut olan bir takım kavramlar, metrik uzaylarda daha somut kavramlarla açıklama imkânını sağlar. Bu nedenle metrik ve metrik uzay kavramını tanımlayarak, metrik uzaylara ait bazı önemli özellikleri vermek yerinde olacaktır.

Tanım 1.1.1.: Boş olmayan bir X kümesi ile bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan bir d fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, d ye X üzerinde bir **metrik**, (X, d) ikilisine de **metrik uzay** denir:

$\forall x, y, z \in X$ için

$$m_1) d(x, y) \geq 0$$

$$m_2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$m_3) d(x, y) = d(y, x)$$

$$m_4) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

(X, d) metrik uzayı kısaca X metrik uzayı olarak ifade edilir.

d fonksiyonu $(m_1), (m_3)$ ve (m_4) aksiyomları ile birlikte (m_2^*) $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$ şartını sağlıyorsa d ye **metrikimsi** (pseudometric), (X, d) ikilisine de **metrikimsi uzay** denir. Metrik uzaylar için verilecek birçok sonuç metrikimsi uzaylar içinde doğrudur.

Hemen belirtelim ki bu aksiyomlar birbirinden bağımsız değildir. Örneğin (m_2^*) , (m_4) ve (m_3) birlikte kullanılırsa

$$0 \leq d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$$

çıkart ki bu (m_1) aksiyomunu verir.

(X, d) bir metrik uzay ve $x, y \in X$ ise, negatif olmayan $d(x, y)$ gerçel sayısına x ile y noktaları arasındaki uzaklık diyeceğiz.

Şimdi bazı metrik örneklerini aşağıdaki gibi verelim:

Örnek 1.1.2.: $| \cdot |$ simgesi gerçel ekseninde salt değer fonksiyonunu göstermek üzere

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ 'ye tanımlanan

$$m(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

fonksiyonu bir metriktir. Adına gerçel eksen üzerindeki salt değer metriği (mutlak değer metriği) ya da kısaca salt metrik diyeceğimiz bu metrik iki gerçel sayı arasındaki uzaklığı vermektedir. Bu metrik diğer bir ifadeyle $\mathbb{R}$ 'nin alışılmış metriğidir.

Örnek 1.1.3.: $| \cdot |$ simgesi karmaşık düzlemde salt değer fonksiyonunu göstermek üzere

$\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ den $\mathbb{C}$ 'ye tanımlanan

$$k(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

fonksiyonu bir metriktir. Adına karmaşık düzlem üzerindeki salt değer metriği ya da kısaca salt metrik diyeceğimiz bu metrik iki karmaşık sayı arasındaki uzaklığı vermektedir.

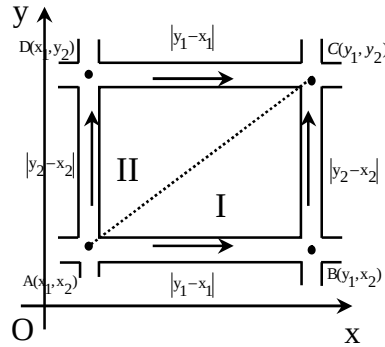
Örnek 1.1.4.: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ üzerinde, yani düzlemde

$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{R}^2$ nin alışılmış metriği veya **Öklid metriği** denir.

Benzer şekilde $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ olmak üzere, $\forall x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonu da $\mathbb{R}^n$ nin alışılmış metriğidir.

Örnek 1.1.5.: Caddeleri birbirine dik ve paralel olan, düzenli bir plana sahip bir şehrin farklı iki noktasında bulunan bir kuşla bir insan, bu noktalardan birinden diğerine gitmek için kuş öklid metriğini kullanırken, taksi ile gitmek isteyen insan öklid metriğinden başka bir metrik kullanmak zorundadır.



Sekil 1.: Taxi-cab metriği

Taksinin A dan C ye gitmesi için $|AB| + |BC|$ yolunu veya $|AD| + |DC|$ yolunu izlemesi gerekir. Bu durumda taksinin alacağı yolu uzaklık fonksiyonu cinsinden yazacak olursak

$$h(x, y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$$

şeklinde olur. Kolayca gösterilebilir ki h fonksiyonu metrik şartlarını sağlar. Bu metriğe

$\mathbb{R}^2$ de **taksi-kab (taxi-cab) metriği** denir.

$\mathbb{R}^2$ de tanımlanan bu metrik $\mathbb{R}^n$ de şöyle tanımlanır:

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \text{ için } h(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Örnek 1.1.6.: $\mathbb{R}^2$ de bir başka uzaklık fonksiyonu $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$g(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

şeklinde tanımlanabilir. Gösterilebilir ki g fonksiyonu metrik şartlarını sağlar. $\mathbb{R}^2$ de

tanımlanan bu g metrik, $\mathbb{R}^n$ de $\forall x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$g(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

şeklinde tanımlanabilir. g fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de bir metrik olup, bu metriğe **maksimum metrik** denir.

Not 1.1.7.: $\mathbb{R}^n$ de tanımlanan d , h ve g metrikleri $n=1$ olması halinde eşit, $n \geq 2$ halinde farklıdırlar. Gerçekten $x = (1, 1), y = (0, 0)$ için $d(x, y) = \sqrt{2}$, $h(x, y) = 2$, $g(x, y) = 1$ 'dir.

Önerme 1.1.8.: $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) olmak

üzere $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan $r : (x, y) \rightarrow r(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ dönüşümü $\mathbb{R}^n$

üzerinde bir metriktir.

İspat: (m_1) ve (m_3) aksiyomlarının sağlandığı açıktır. (m_4) aksiyomu

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| &= \sum_{i=1}^n |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |z_i - y_i| \end{aligned}$$

eşitsizliği çıkar. Son olarak, (m_2) aksiyomu

$$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i \quad (1 \leq i \leq n) \Leftrightarrow x = y \text{ bağıntısından çıkar.}$$

Önerme 1.1.9.: $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n \in \mathbb{R}^n)$ ($n \geq 1$) olmak üzere $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan $g : (x, y) \rightarrow g(x, y) = \max \{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}$ dönüşümü $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metriktir.

İspat: (m_1) ve (m_3) aksiyomlarının sağlandığı açıktır. (m_4) aksiyomu $\max |x_i - y_i| \leq \max \{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|\} \quad (1 \leq i \leq n)$
 $\leq \max |x_i - z_i| + \max |z_i - y_i|$

eşitsizliğinden çıkar. Son olarak, (m_2) aksiyomu

$$\begin{aligned} g(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \max |x_i - y_i| = 0 \quad (1 \leq i \leq n) \\ &\Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \\ &\Leftrightarrow x_i = y_i \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

İfadesinden elde edilir.

Örnek 1.1.10.: $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \text{ ile bir metriktir.}$$

Bu şekilde tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe **ayrık (diskret) metrik** denir.

Örnek 1.1.11.: $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = 0$ ise d , X üzerinde metrik olmayıp, bir metrikimsidir. Bu metriğe **aşık metrikimsi** denir.

Analizde, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan bir reel değişkenli, reel değerli bir f fonksiyonun verilen bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli olması şöyle tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} f, x_0 \text{ da sürekli} &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \text{ için } \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ vardır } \ni |x - x_0| < \delta \\ &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Burada $\mathbb{R}$ nın alışılmış metriği kullanılmıştır.

Soyut metrik uzaylarda verilen bir fonksiyonun sürekliliği aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 1.1.12.: (X, d) ve (Y, d') metrik uzaylar, $x_0 \in X$ ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Verilen $\forall e > 0$ sayısına karşılık $d(x, x_0) < d$ olduğunda $d'(f(x), f(x_0)) < e$ olacak şekilde e a bağlı pozitif bir d sayısı varsa, f fonksiyonuna x_0 **noktasında süreklidir** denir. Yani,

f, x_0 da sürekli $\Leftrightarrow \forall e > 0$ için $\exists d(e) > 0$ vardır $\ni d(x, x_0) < d \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < e$.

Eğer $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu $\forall x \in X$ noktasında sürekli ise, f fonksiyonuna X **uzayında süreklidir** denir.

Tanım 1.1.13.: (X, d) metrik uzay $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = x_n$ olacak şekilde $\mathbb{N}$ 'den X 'e tanımlanan her fonksiyona, X **metrik uzayında bir dizi** denir ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ veya (x_n) ile gösterilir. Diğer bir deyimle X metrik uzayında bir dizi, elemanları doğal sayılar tarafından indislenmiş bir alt kümedir, yani $(x_n) = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$.

Tanım 1.1.14.: (X, d) metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\forall e > 0$ için $\exists n_0(e) > 0$ vardır $\ni \forall n \geq n_0$ için $d(x_n, x) < e$ oluyorsa (x_n) **dizisine x noktasına yakınsaktır** denir ve $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ile gösterilir.

(X, d) metrik uzay, (x_n) de bu uzayda tanımlı bir dizi olsun.

$\forall e > 0$ için $\exists n_0(e) \in \mathbb{N}$ $\ni \forall n, m \geq n_0$ iken $d(x_n, x_m) < e$ oluyorsa, (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir.

Eğer (X, d) metrik uzayında alınan her Cauchy dizisi yine bu uzaydaki bir noktaya yakınsak ise, (X, d) metrik uzayına **tam metrik uzay** denir.

Örnek 1.1.15.: Boş olmayan herhangi bir küme aşikar metrik ile birlikte tam metrik

uzaydır. X üzerindeki aşikar metrik $d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \text{ ise} \\ 0, & x = y \text{ ise} \end{cases}$ olduğuna göre, eğer

X de herhangi bir Cauchy dizisi (x_n) ise her $e > 0$ için $n, m \geq n_0(e)$ olduğunda, $d(x_n, x_m) < e$ olacak şekilde e sayısına bağlı bir $n_0(e)$ doğal sayısı

vardır. Özel olarak, $e = \frac{1}{3}$ pozitif sayısı için de $n, m \geq n_0(\frac{1}{3})$ olduğunda,

$d(x_n, x_m) < \frac{1}{3}$ olacak şekilde $e = \frac{1}{3}$ sayısına bağlı bir $n_0(\frac{1}{3})$ doğal sayısı vardır.

$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \text{ ise} \\ 0, & x = y \text{ ise} \end{cases}$ olduğundan dolayı, $n, m \geq n_0(\frac{1}{3})$ olduğunda, $d(x_n, x_m) = 0$

olacak şekilde $e = \frac{1}{3}$ sayısına bağlı bir $n_0(\frac{1}{3})$ doğal sayısı vardır.

Teorem 1.1.16.: (X, d) metrik uzayında yakınsak her (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir.

İspat: (x_n) , (X, d) de yakınsak bir dizi ve $(x_n) \rightarrow p \in X$ olsun. O halde

verilen her $e > 0$ sayısına karşılık her $n, m \geq n_0$ için $d(x_n, p) < \frac{e}{2}$ ve $d(x_m, p) < \frac{e}{2}$

olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı vardır. Dolayısıyla aynı n_0 doğal sayısı için

$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, p) + d(x_m, p) < e$ olur. Böylece (x_n) bir Cauchy dizisi olur.

Uyarı 1.1.17.: Bu teoremin tersi doğru değildir. Yani her Cauchy dizisi yakınsak değildir. Örneğin $X = (0, 1)$ kümesi üzerinde alışılmış metriğin olduğunu kabul edersek

$\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi X metrik uzayında bir Cauchy dizisidir, ancak bu dizi X metrik uzayında yakınsak değildir.

Teorem 1.1.18.: (X, d) bir metrik uzay, (x_n) bir Cauchy dizisi ve (x_{n_i}) bunun bir alt dizisi olsun. Eğer (x_{n_i}) yakınsak ise (x_n) dizisi de yakınsaktır.

İspat: $(x_{n_i}) \rightarrow a$ olsun. O halde verilen herhangi bir $e > 0$ sayısına karşılık $d(x_{n_i}, a) < e$ olacak biçimde bir m_0 doğal sayısı ve ayrıca (x_n) bir Cauchy dizisi olduğundan aynı $e > 0$ sayısına karşılık her $n, m \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < e$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı vardır. $N = \max\{n_0, m_0\}$ olarak seçilirse, her $n \geq N$ için $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, a) < 2e$, yani $(x_n) \rightarrow a$ olur.

Uyarı 1.1.19.: Bu özelliğin sadece Cauchy dizileri için geçerli, herhangi bir dizi için geçerli olmadığı açıktır. Örneğin $(x_n) = (-1)^n$ dizisi için $(x_{2n}) \rightarrow 1$ ve $(x_{2n+1}) \rightarrow -1$ olmasına karşılık (x_n) dizisi yakınsak değildir.

1.2 Sabit Nokta Teorisinde Bazı Temel Kavramlar

Şimdi, metrik uzaylarda sabit nokta kavramı ve bu kavramı açıklayıcı örnekler vereceğiz. Daha sonra sabit nokta teorisinde kullanılan büzülme dönüşümü, genişlemeyen dönüşüm, büzülebilir dönüşüm ve lipschitz şartı gibi temel kavramları tanıtır örneklerle bu kavramları açıklamaya çalışacağız.

Tanım 1.2.1.: X boş olmayan bir küme olmak üzere $T: X \rightarrow X$ dönüşümü için, $T(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu $x \in X$ noktasına T dönüşümünün bir **sabit noktası** denir.

Verilen bir dönüşümün sabit noktası olmayabilir, birden fazla olabilir, tek olabilir, sonsuz sayıda olabilir. Şimdi bu durumlara birer örnek verelim:

Örnek 1.2.2.: $X=[0,1]$ ve $T: X \rightarrow X$,

$$T(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \text{ şeklinde tanımlanan dönüşümün verilen aralıklar için } X' \text{ de}$$

sabit noktası yoktur.

Örnek 1.2.3.: $X=[0,1]$ ve $T: X \rightarrow X$, $T(x) = x^2$ şeklinde tanımlanan dönüşümün $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ olmak üzere X' de iki farklı sabit noktası vardır.

Örnek 1.2.4.: $X=[0,1]$ ve $T: X \rightarrow X$, $T(x) = 2x - 1$ şeklinde tanımlanan dönüşümün $x = 1$ olmak üzere X' de bir tek sabit noktası vardır.

Örnek 1.2.5.: $X=[0,1]$ ve $T: X \rightarrow X$, $T(x) = x$ özdeşlik dönüşümünün ise X' de sonsuz tane sabit noktası vardır.

Tanım 1.2.6.: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq a d(x, y)$$

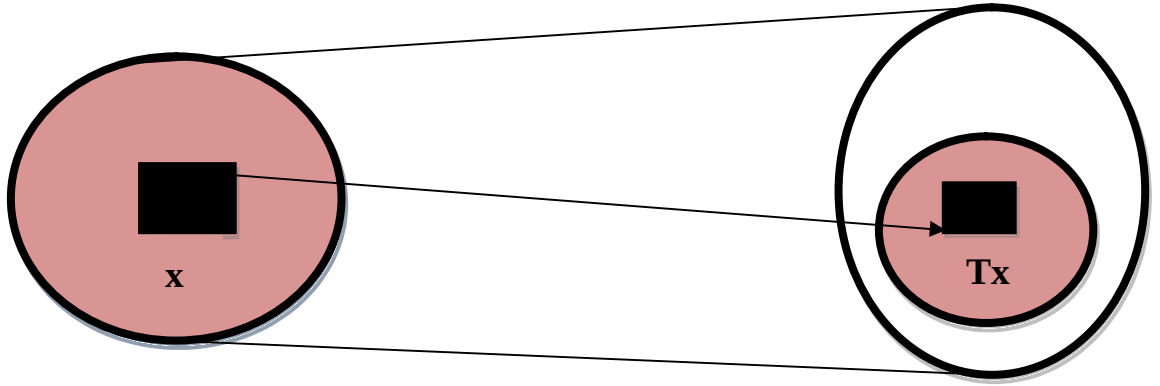
koşulunu sağlayan bir $a \geq 0$ reel sayısı varsa, T dönüşümüne **Lipschitz koşulunu sağlıyor** denir.

Eğer $a < 1$ ise T 'ye **büzülme (contraction) dönüşümü**, $a = 1$ ise T 'ye **genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm** denir.

Eğer $\forall x, y \in X$ için, $(x \neq y)$

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

koşulu sağlanıyorsa T 'ye **büzülebilir (contractive) dönüşüm** denir.



Şekil 2.: T büzülme (contraction) dönüşümü

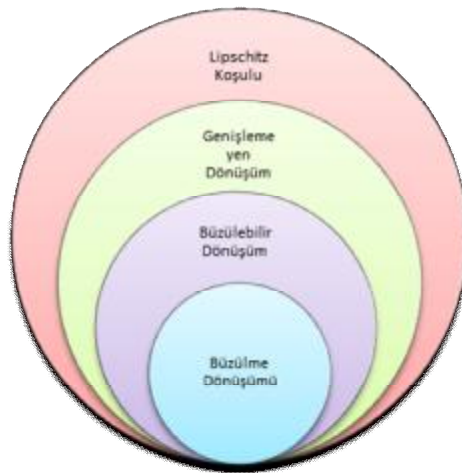
Not 1.2.7.: Bundan böyle zaman zaman $d(T(x), T(y))$ yerine $d(Tx, Ty)$ gösterimini kullanacağız.

Not 1.2.8.: Bu dönüşümler arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

Büzülme dönüşümü $\Rightarrow$ Büzülebilir dönüşüm $\Rightarrow$ Genişlemeyen dönüşüm



Lipschitz koşulunu sağlıyor.



Şekil 3.: Dönüşümler arasındaki bağıntı

Şimdi büzülme kavramını açıklayan bazı örnekler verelim:

Örnek 1.2.9.: (X, d) bir alışılmış metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. $T(x) = x + a$, $(a \neq 0)$ öteleme dönüşümü genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat büzülebilir ve büzülme dönüşümü değildir.

Örnek 1.2.10.: (X, d) bir alışılmış metrik uzay, $X = [0, 1]$ ve $T : X \rightarrow X$, $T(x) = \frac{x}{2}$ şeklinde tanımlı herhangi bir dönüşüm olsun. T bir büzülme dönüşümdür. Ayrıca, büzülebilir, genişlemeyen dönüşüm olduğu ve Lipschitz koşulunu sağladığı açıktır.

Örnek 1.2.11.: (X, d) bir alışılmış metrik uzay, $X = [1, \infty)$ ve $T : X \rightarrow X$, $T(x) = x + \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlanan herhangi bir dönüşüm olsun. T büzülebilir dönüşümdür. Ancak büzülme dönüşümü değildir. Ayrıca bu dönüşümün sabit noktası yoktur.

Örnek 1.2.12.: $\mathbb{R}$ 'nin alışılmış metriğine göre $T : [0, \frac{1}{3}) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $T(x) = x^2$ eşitliği ile veriliyor. T dönüşümünün bir büzülme dönüşümü olduğunu gösterelim.

$a = \frac{2}{3}$ olarak alırsak, $0 < a < 1$ olup, $\forall x, y \in [0, \frac{1}{3})$ için,

$$d(T(x), T(y)) = d(x^2, y^2) = |x^2 - y^2| = |x + y| \cdot |x - y|$$

$$|x + y| \cdot d(x, y) \leq \frac{2}{3} d(x, y) = a \cdot d(x, y)$$

olup T bir büzülme dönüşümü olur.

Not 1.2.13.: Hiçbir uzayda özdeşlik dönüşümü bir büzülme dönüşümü olamaz. Çünkü $T(x) = x$ özdeşlik dönüşümü için, $\forall a \in (0, 1)$ için, $d(T(x), T(y)) = d(x, y) \neq a \cdot d(x, y)$.

Teorem 1.2.14.: *Her büzölme dönüşümü düzgün süreklidir.*

İspat : $T : (X, d) \rightarrow (Y, d_1)$ büzölme dönüşümü verilsin. Buna göre,
 $d_1(T(x), T(y)) \leq a d(x, y) \leq d(x, y)$

olacak şekilde $0 < a < 1$ sayısı vardır. $d(x, y) < \frac{e}{a}$ olarak alınırsa,

$$d_1(T(x), T(y)) < e$$

olur. Sonuçta T dönüşümü düzgün süreklidir.

Banach sabit nokta teoremi olarak bilinen tam metrik uzayda büzölme dönüşümü konusunda elde edilen çok kabul görmüş sonucu 1922'de S. Banach ispatlamıştır. Bu ispatlanan buluş matematiğin farklı alanlarında özellikle diferansiyel ve integral denklemlerde, mantık programlamada, elektronik mühendisliğinde ve bunlar gibi matematik içeren diğer alanlarda çok faydalı olmuştur. Banach büzölme dönüşüm prensibi matematik ve onun mühendislikteki uygulamalarından doğan problemlerin çözümünün varlık ve tekliği için en basit ve aynı zamanda en önemli testinden birisidir.

Banach büzölme dönüşüm prensibini vermeden önce

$$T^n x = T(T^{n-1}x), T^0 x = x, x \in X$$

olarak verilen $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine **iterasyon dizisi** veya T dönüşümüne göre x **noktasının yörüngesi (orbit)** denildiğini belirtelim.

Banach bu teoremi 1922 yılında orijinalinde bir tam normlu uzaylarda formüle etmiştir. Aşağıda bu teoremin keyfi bir metrik uzay için formüle edilmiş halini vereceğiz.

Teorem 1.2.15.: *(Banach Büzölme Dönüşüm Prensibi veya Banach Sabit Nokta Teoremi)*

(X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir büzölme dönüşümü olsun. Buna göre, T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. (veya $T(x) = x$ dönüşümünün (denkleminin) bir tek çözümü vardır).

İspat: X ' den keyfi ve sabit bir x_0 elemanını alalım. x_0 ve T dönüşümü yardımı ile (x_n) dizisini şöyle tanımlayalım:

$$x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1), x_3 = T(x_2), \dots, x_n = T(x_{n-1}), \dots$$

(x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

$$d(x_2, x_1) = d(T(x_1), T(x_0)) \leq a d(x_1, x_0) = d(T(x_0), x_0)$$

$$d(x_3, x_2) = d(T(x_2), T(x_1)) \leq a d(x_2, x_1) \leq a^2 d(T(x_0), x_0)$$

$\vdots$

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq a^n d(T(x_0), x_0)$$

bulunur. Buradan m, n pozitif sayılarını $m > n$ olarak alalım. Üçgen eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (a^{m-1} + a^{m-2} + \dots + a^n) d(x_1, x_0) \\ &= a^n (a^{m-n-1} + a^{m-n-2} + \dots + 1) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{a^n}{1-a} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$0 < a < 1$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$. Yani, (x_n) X kümesi üzerinde bir Cauchy dizisidir.

X uzayı tam metrik uzay olduğundan (x_n) dizisi bu uzayda yakınsaktır. Yani

$$\exists x_0 \in X \text{ var } \ni x_n \rightarrow x_0.$$

Şimdi $T(x_0) = x_0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} d(T(x_0), x_0) &\leq d(T(x_0), x_n) + d(x_n, x_0) \\ &= d(T(x_0), T(x_{n-1})) + d(x_n, x_0) \\ &\leq a d(x_0, x_{n-1}) + d(x_n, x_0) \end{aligned}$$

ve buradan

$$d(x_n, x_0) \rightarrow 0, \quad d(x_0, x_{n-1}) \rightarrow 0$$

olduğundan,

$$d(T(x_0), x_0) \leq a d(x_0, x_{n-1}) + d(x_n, x_0) \rightarrow 0.$$

Buradan;

$$d(T(x_0), x_0) = 0.$$

Yani,

$$T(x_0) = x_0$$

bulunur.

Teklik:

x_0 ' dan farklı bir başka sabit nokta $y_0 \in X$ olsun. Buna göre, $T(y_0) = y_0$ ' dır.

Buradan,

$$d(x_0, y_0) = d(T(x_0), T(y_0)) \leq a d(x_0, y_0)$$

$0 < a < 1$ olduğundan,

$$d(x_0, y_0) = 0,$$

Yani,

$$x_0 = y_0.$$

Yani, T dönüşümünün sabit noktası tektir. Sonuç olarak, $T(x) = x$ denkleminin bir tek çözümü vardır.

Örnek 1.2.16.: $X = \mathbb{R}$, $K = [0,1] \subset X$, $T : K \rightarrow K$ ve $Tx = \frac{x}{2}$ olsun. $x_0 = \frac{1}{3}$ olarak seçelim.

$$x_1 = Tx_0 = \frac{1}{6}$$

$$x_2 = Tx_1 = T^2x_0 = \frac{1}{12}$$

$$x_3 = Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 = \frac{1}{24}$$

M

$$x_n = Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = \dots = T^n x_0$$

M

şeklinde bir dizi elde ederiz. $n \rightarrow \infty$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ olur. T dönüşümünün sabit noktası $0 \in [0,1]$ 'dir.

Bilinen sabit nokta tanımını bu örneğe uygularsak; $Tx = x \Rightarrow \frac{x}{2} = x \Rightarrow x = 2x \Rightarrow x = 0$ olur. Yani sabit nokta yine $0 \in [0,1]$ olarak bulunur.

Şimdi, Banach sabit nokta teoreminin bir takım uygulamalarını aşağıdaki gibi verelim:

1.3. Büzülme Dönüşüm Prensiplerinin Lineer Denklemlere Uygulanması

1. $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metrik ve $\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \leq a < 1$, $j = 1, 2, \dots, n$ ise

$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ denklem sisteminin bir tek çözüme sahip olduğunu görmek için

$$x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

ve

$$x'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$$

$$d_1(Tx', Tx'')$$

$$= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} (x'_j - x''_j) \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x'_j - x''_j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}| |x'_j - x''_j| = \sum_{j=1}^n \left\{ |x'_j - x''_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\} \\ \leq a d_1(x', x'')$$

$d_1(Tx', Tx'') \leq a d_1(x', x'')$ ($a < 1$) eşitsizliği sağlanır. Buradan T dönüşümü bir büzülme dönüşümü olup verilen lineer denklem sisteminin bu uzayda bir tek çözümü vardır.

$$2. d_2(x, y) = \left| \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right|^{\frac{1}{2}}, \quad \square^n \text{ üzerinde bir metrik olmak üzere } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \leq a^2 < 1 \text{ ise}$$

$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ denklem sisteminin bir tek çözüme sahip olduğunu gösterebilmek için T dönüşümünün bir büzülme dönüşümü olduğunu göstermeliyiz.

$$x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \text{ ve } x'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$$

$$\left[d_2(Tx', Tx'') \right]^2 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} (x'_j - x''_j) \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x'_j - x''_j| \right)^2 \\ \text{"Schwartz eşitsizliğinden"} \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^n |x'_j - x''_j|^2 \right)$$

Böylece;

$$\left[d_2(Tx', Tx'') \right]^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \left(d_2(x', x'') \right)^2 \\ \leq a^2 \left(d_2(x', x'') \right)^2 \quad (a < 1)$$

$$d_2(Tx', Tx'') \leq a d_2(x', x'') \quad (a < 1)$$

Verilen dönüşüm bir büzülme dönüşümü olup verilen denklem sisteminin bu uzayda bir tek çözümü vardır.

II. BÖLÜM

DISLOCATED METRİK UZAYLAR

Bu bölümde, 2000 yılında P.Hitzler ve A.K.Seda [18] tarafından ortaya konmuş dislocated metrik uzay tanımını vererek başlayacağız. Daha sonra, dislocated topoloji kavramı tanıtarak, metrik uzay ile dislocated metrik uzay arasındaki ilişkiyi araştıracağız.

2.1 Dislocated Metrik Uzaylar Üzerine Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1.: *Boştan farklı bir X kümesi ile bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall x, y, z \in X$ için;*

$$mi) \ d(x, x) = 0$$

$$mii) \ d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

$$miii) \ d(x, y) = d(y, x)$$

$$miv) \ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

$$miv^*) \ d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$$

d fonksiyonu, yukarıdaki aksiyomlarından; (mi), (mii), (miii) ve (miv) sağlıyorsa d fonksiyonuna bir **metrik**, (mi),(miii)ve (miv) sağlanıyorsa d fonksiyonuna bir **pseudo metrik (sözde metrik)**, (mii), (miii) ve (miv) sağlanıyorsa d fonksiyonuna bir **dislocated metrik** denir.

Eğer *pseudo metrik* veya *dislocated metrik* (miv*) şartını sağlıyorsa **pseudo ultra metrik** veya **dislocated ultra metrik** diye adlandırılır. Bundan sonra zaman zaman *dislocated metrik* kısaca **d-metrik** olarak ifade edilecektir.

Tanım 2.1.2.: (X, d) d-metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. $n \rightarrow \infty$ iken $d(x_n, x) \rightarrow 0$ ise (x_n) dizisinin **limiti** x ' dir denir ve $x_n \rightarrow x$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.3.: Dislocated metrik uzayda alınan (x_n) dizisinin bir tek limiti vardır.

İspat: Kabul edelim ki (x_n) dizisinin iki farklı limiti x ve y olsun. (mii) ve (miii) özelliklerinden

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y)$$

eşitsizliğinde $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y) = 0$ olmasından dolayı $d(x, y) \leq 0$ elde edilir. Buradan, $d(x, y) = 0$. (mii) özelliğinden $x = y$.

Tanım 2.1.4.: (X, d) d-metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. $\forall e > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır $\ni \forall n, m \geq n_0$ iken $d(x_n, x_m) < e$ oluyorsa, (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir.

Önerme 2.1.5.: (X, d) d-metrik uzay olmak üzere bu uzayda alınan yakınsak her (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir.

İspat: (X, d) d-metrik uzayında bir dizi (x_n) ve $x_n \rightarrow x \in X$ olsun. O halde verilen $\forall e > 0$ için $\forall n, m \geq n_0$ iken $d(x_n, x) < \frac{e}{2}$ ve $d(x_m, x) < \frac{e}{2}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla aynı $n_0 \in \mathbb{N}$ için ;
 $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < 2 \cdot \frac{e}{2} = e$ olur. Bu ise (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.6.: (X, d) d -metrik uzayında her Cauchy dizisi yine bu uzayda yakınsak ise (X, d) d -metrik uzayına **tam d -metrik uzay** denir.

Teorem 2.1.7.: (X, d) bir tam d -metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda f dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Keyfi bir $x_0 \in X$ elemanını alalım. Gösterelim ki $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisidir.

$$\begin{aligned} d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) &\leq l d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)) \\ &\leq l^2 d(f^{n-2}(x_0), f^{n-1}(x_0)) \\ &\vdots \\ &\leq l^n d(x_0, f(x_0)) \end{aligned}$$

Şimdi herhangi bir $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sayısı için;

$$\begin{aligned} d(f^n(x_0), f^{n+r}(x_0)) &\leq d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + d(f^{n+1}(x_0), f^{n+r}(x_0)) \\ &\leq d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + d(f^{n+1}(x_0), f^{n+2}(x_0)) + d(f^{n+2}(x_0), f^{n+r}(x_0)) \\ &\leq d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + d(f^{n+1}(x_0), f^{n+2}(x_0)) + \mathbf{L} + d(f^{n+r-1}(x_0), f^{n+r}(x_0)) \\ &\leq (l^n + l^{n+1} + \mathbf{L} + l^{n+r-1}) d(x_0, f(x_0)) \\ &\leq \frac{l^n}{1-l} d(x_0, f(x_0)) \end{aligned}$$

$0 < l < 1$ olduğundan; $\lim_{n \rightarrow \infty} l^n = 0$.

Yani $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

(X, d) bir tam d -metrik uzay, $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisi olduğundan bu uzaydaki bir y noktasına yakınsaktır. Ayrıca f büzülme dönüşümü olduğundan süreklidir. O

$$\text{halde; } y = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{n-1}(x_0)\right) = f(y) .$$

Bu taktirde $f(y) = y$ olduğundan y bir sabit noktadır.

Teklik;

Kabul edelim ki f dönüşümünün iki farklı sabit noktası y ve z olsun. Buna göre $f(y) = y$ ve $f(z) = z$ 'dir. Buradan;

$$d(y, z) = d(f(y), f(z)) \leq l d(y, z) \\ (1 - l)d(y, z) \leq 0 .$$

$0 < l < 1$ olduğundan; $d(y, z) = 0$ olur. $d(y, z) = 0$ ise $y = z$ 'dir.

Sonuç olarak, f dönüşümünün sabit noktası tektir.

2.2 Dislocated Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Aşağıda verilecek olan teorem 2008 yılında C. T. Aage ve J. N. Salunke [1] tarafından ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 2.2.1.: (X, d) bir tam d -metrik uzay olsun. $f, g : X \rightarrow X$ sürekli dönüşümleri $\forall x, y \in X$ ve $0 < h < 1$ için; $d(fx, gy) \leq h \max\{d(x, y), d(x, fx), d(y, gy)\}$ şartını sağlasın. Bu taktirde f ve g dönüşümleri ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. $x_1 = f(x_0), x_2 = g(x_1), x_{2n} = g(x_{2n-1}), x_{2n+1} = f(x_{2n}), \mathbf{K}$ olacak şekilde (x_n) dizisi tanımlansın. x yerine x_{2n} , y yerine x_{2n+1} yazılırsa;

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) = d(fx_{2n}, gx_{2n+1}) \\ \leq h \max\{d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n}, fx_{2n}), d(x_{2n+1}, gx_{2n+1})\} \\ = h \max\{d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n+1}, x_{2n+2})\} \\ = hd(x_{2n}, x_{2n+1})$$

Dolayısıyla;

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq hd(x_{2n}, x_{2n+1}).$$

Benzer şekilde;

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq hd(x_{2n-1}, x_{2n}).$$

Ve böylece;

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq h^2 d(x_{2n-1}, x_{2n}).$$

Bu yolla;

$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq h^{2n} d(x_0, x_1)$ elde edilir. $h < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ iken $h^{2n} \rightarrow 0$ olur. Böylece (x_n) dizisi X d-metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. Bu yüzden $x_n \rightarrow u$ olacak şekilde bir $u \in X$ noktası vardır. Dolayısıyla (x_n) dizisinin alt dizileri için $(fx_{2n}) \rightarrow u$ ve $(gx_{2n+1}) \rightarrow u$ elde edilir. f ve g sürekli dönüşümler olduğundan $fu = u$ ve $gu = u$ elde edilir.

Teklik ;

u ve v noktaları f ve g dönüşümlerinin iki farklı ortak sabit noktası olsun.

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(fu, gv) \\ &\leq \lim h \max\{d(u, v), d(u, fu), d(v, gv)\} \\ &= h \max\{d(u, v), d(u, u), d(v, v)\} \end{aligned}$$

v yerine u yazılırsa; $d(u, u) \leq h d(u, u)$ elde edilir. $h < 1$ olduğundan $d(u, u) = 0$ bulunur. Bu yöntemle $d(v, v) = 0$ bulunur. Dolayısıyla; $d(u, v) \leq h d(u, v)$ olup $h < 1$ olduğundan $d(u, v) = 0$ bulunur. X d-metrik uzay olduğundan $u = v$ elde edilir.

Aşağıda verilecek olan teorem 2012 yılında R. Shrivastava, Z. K. Ansari ve M. Sharma [32] tarafından ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 2.2.2.: (X, d) bir tam d-metrik uzay olsun. $S, T : X \rightarrow X$ sürekli dönüşümleri $\forall x, y \in X$ ve $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ için;

$$d(Sx, Ty) \leq a \max\{d(x, Sx) + d(y, Ty), d(y, Ty) + d(x, y), d(x, Sx) + d(x, y)\} \quad (1) \quad \text{şartını}$$

sağlasın. Bu takdirde S ve T ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. $x_1 = S(x_0), x_2 = T(x_1), K, x_{2n} = T(x_{2n-1}), x_{2n+1} = S(x_{2n}), K$ olacak şekilde (x_n) dizisi tanımlansın. (1) de x yerine x_{2n} , y yerine x_{2n+1} yazılırsa;

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) \\ &\leq a \max\{d(x_{2n}, Sx_{2n}) + d(x_{2n+1}, Tx_{2n+1}), d(x_{2n+1}, Tx_{2n+1}) + d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n}, Sx_{2n}) + d(x_{2n}, x_{2n+1})\} \\ &= a \max\{d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) + d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n}, x_{2n+1})\} \\ &\leq a[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})] \end{aligned}$$

Dolayısıyla;

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &\leq \frac{a}{1-a} d(x_{2n}, x_{2n+1}) \quad \text{ve} \quad K = \frac{a}{1-a} \quad \text{ve} \quad 0 \leq K < 1 \quad \text{olarak tanımlanırsa} \\ d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &\leq K d(x_{2n}, x_{2n+1}). \text{ Benzer şekilde; } d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq K d(x_{2n-1}, x_{2n}) \quad \text{ve bu} \\ &\text{yüzden;} \end{aligned}$$

$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq K^2 d(x_0, x_1)$. $0 \leq K < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ iken $K^n \rightarrow 0$ olur. Böylece (x_n) dizisi X d-metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. Bu yüzden $x_n \rightarrow u$ olacak şekilde bir $u \in X$ noktası vardır. Dolayısıyla (x_n) dizisinin alt dizileri için $(Sx_{2n}) \rightarrow u$ ve $(Tx_{2n+1}) \rightarrow u$ elde edilir. S ve T sürekli dönüşümler olduğundan $Su = u$ ve $Tu = u$ elde edilir. Böylece u , S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır.

Teklik ;

u ve v noktaları S ve T dönüşümlerinin iki farklı ortak sabit noktası olsun. Bu taktirde (1) eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(Su, Tv) \\ &\leq a \max\{d(u, u) + d(v, v), d(v, v) + d(u, v), d(u, u) + d(u, v)\} \end{aligned}$$

v yerine u yazılırsa; $d(u, u) \leq 2a d(u, u)$ elde edilir. $2a < 1$ olduğundan $d(u, u) = 0$ bulunur. Bu yöntemle $d(v, v) = 0$ bulunur. Dolayısıyla; $d(u, v) \leq a d(u, v)$ olup $0 \leq a < \frac{1}{2}$ olduğundan $d(u, v) = 0$ bulunur. X d-metrik uzay olduğundan $u = v$ elde edilir. Böylece u , S ve T dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktasıdır.

Aşağıda verilecek olan teorem 2010 yılında A. Isufati [19] tarafından ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 2.2.3.: (X, d) bir tam d-metrik uzay olsun. $f, g : X \rightarrow X$ sürekli dönüşümleri $\forall x, y \in X$ ve $0 < h < 1$ için;
 $d(fx, gy) \leq h \max\{d(x, y), d(x, fx), d(y, gy), \frac{d(x, gy) + d(y, fx)}{2}\}$ şartını sağlasın. Bu taktirde f ve g dönüşümleri ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. $x_1 = f(x_0), x_2 = g(x_1), x_{2n} = g(x_{2n-1}), x_{2n+1} = f(x_{2n}), x_{2n+2} = g(x_{2n+1})$ olacak şekilde (x_n) dizisi tanımlansın. x yerine x_{2n} , y yerine x_{2n+1} yazılırsa;

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d(fx_{2n}, gx_{2n+1}) \\ &\leq h \max\{d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n}, fx_{2n}), d(x_{2n+1}, gx_{2n+1}), \frac{d(x_{2n}, gx_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, fx_{2n})}{2}\} \\ &= h \max\{d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), \frac{d(x_{2n}, x_{2n+2}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+1})}{2}\} \\ &= hd(x_{2n}, x_{2n+1}) \end{aligned}$$

Dolayısıyla;

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq hd(x_{2n}, x_{2n+1}).$$

Benzer şekilde;

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq hd(x_{2n-1}, x_{2n}).$$

Ve böylece;

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq h^2 \cdot d(x_{2n-1}, x_{2n}).$$

Bu yolla;

$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq h^{2n} \cdot d(x_0, x_1)$ elde edilir. $0 < h < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ iken $h^{2n} \rightarrow 0$ olur. Böylece (x_n) dizisi X d-metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. Bu yüzden $x_n \rightarrow u$ olacak şekilde bir $u \in X$ noktası vardır. Dolayısıyla (x_n) dizisinin alt dizileri için $(fx_{2n}) \rightarrow u$ ve $(gx_{2n+1}) \rightarrow u$ elde edilir. f ve g sürekli dönüşümler olduğundan $fu = u$ ve $gu = u$ elde edilir.

Teklik ;

u ve v noktaları f ve g dönüşümlerinin iki farklı ortak sabit noktası olsun.

$$\begin{aligned}
 d(u, v) &= d(fu, gv) \\
 &\leq \lim h \max\{d(u, v), d(u, fu), d(v, gv), \frac{d(u, gv) + d(v, fu)}{2}\} \\
 &= h \max\{d(u, v), d(u, u), d(v, v), \frac{d(u, v) + d(v, u)}{2}\} \\
 &= h \max\{d(u, v), d(u, u), d(v, v)\}
 \end{aligned}$$

v yerine u yazılırsa; $d(u, u) \leq h d(u, u)$ elde edilir. $0 < h < 1$ olduğundan $d(u, u) = 0$ bulunur. Bu yöntemle $d(v, v) = 0$ bulunur. Dolayısıyla; $d(u, v) \leq h d(u, v)$ olup $0 < h < 1$ olduğundan $d(u, v) = 0$ bulunur. X d-metrik uzay olduğundan $u = v$ elde edilir.

A. Isufati [19] tarafından verilmiş yukarıdaki teoreme 2011 yılında K. P. Rao ve P. R. Swamy [29] tarafından örnek verilmiştir.

Örnek 2.2.4.: $X = \{1, 2, 3\}$ ve $d(x, y) = \begin{cases} 2, & x + y \text{ çift ise} \\ 1, & x + y \text{ tek ise} \end{cases}$ olsun. $S, T : X \rightarrow X$

dönüşümleri $S1 = S2 = S3 = 1$ ve $T1 = T2 = T3 = 2$ olarak tanımlansın. $h = \frac{1}{2}$ ve $\forall x, y \in X$ için;

$d(Sx, Ty) = \frac{1}{2} \max\{d(x, y), d(x, Sx), d(y, Ty), \frac{1}{2}[d(x, Ty) + d(y, Sx)]\}$ elde edilir. Böylece

S dönüşümünün bir sabit noktası 1 ve T dönüşümünün bir sabit noktası 2 olur.

Dikkat edelim ki $h = \frac{1}{2}$ için Teorem 2.2.3 için geçerli değildir. Çünkü $h = \frac{1}{2}$ için S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası yoktur.

Aşağıda verilecek olan teorem 2012 yılında K. Zoto , E. Hoxha ve A. Isufati [38] tarafından ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 2.2.5.: (X, d) bir tam d -metrik uzay olsun. $S, T : X \rightarrow X$ sürekli dönüşümleri $\forall x, y \in X$ ve $0 < h < \frac{1}{2}$ için;

$$d(Sx, Ty) \leq h \max \{d(x, y), d(x, Sx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Sx), \frac{d(x, Sx)d(y, Ty)}{d(x, y)}\} \quad (2)$$

şartını sağlasın. Bu taktirde S ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. $x_1 = S(x_0), x_2 = T(x_1), x_{2n} = T(x_{2n-1}), x_{2n+1} = S(x_{2n}), x_{2n+2} = T(x_{2n+1})$ olacak şekilde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi tanımlansın. (2) eşitsizliğinde x yerine x_{2n}, y yerine x_{2n+1} yazılırsa;

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) \\ &\leq h \max \{d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n}, Sx_{2n}), d(x_{2n+1}, Tx_{2n+1}), d(x_{2n}, Tx_{2n+1}), d(x_{2n+1}, Sx_{2n}), \frac{d(x_{2n}, Sx_{2n})d(x_{2n+1}, Tx_{2n+1})}{d(x_{2n}, x_{2n+1})}\} \\ &= h \max \{d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), d(x_{2n}, x_{2n+2}), d(x_{2n+1}, x_{2n+1}), \frac{d(x_{2n}, x_{2n+1})d(x_{2n+1}, x_{2n+2})}{d(x_{2n}, x_{2n+1})}\} \\ &= h \max \{d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), d(x_{2n}, x_{2n+2}), d(x_{2n+1}, x_{2n+1}), d(x_{2n+1}, x_{2n+2})\} \\ &\leq h \{d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})\} \end{aligned}$$

Dolayısıyla;

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq \frac{h}{1-h} d(x_{2n}, x_{2n+1}) \quad \text{ve} \quad r = \frac{h}{1-h} \quad \text{ve} \quad 0 < r < 1 \quad \text{olarak}$$

tanımlanırsa $d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq rd(x_{2n}, x_{2n+1})$. Benzer şekilde; $d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq rd(x_{2n-1}, x_{2n})$ ve bu yüzden;

$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq r^{2n} d(x_0, x_1)$. $0 < r < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ iken $r^{2n} \rightarrow 0$ olur. Böylece (x_n) dizisi X d -metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. Bu yüzden $x_n \rightarrow u$ olacak şekilde bir $u \in X$ noktası vardır. Dolayısıyla (x_n) dizisinin alt dizileri için $(Sx_{2n}) \rightarrow u$ ve $(Tx_{2n+1}) \rightarrow u$ elde edilir. S ve T sürekli dönüşümler olduğundan $Su = u$ ve $Tu = u$ elde edilir. Böylece u , S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır.

Teklik ;

u ve v noktaları S ve T dönüşümlerinin iki farklı ortak sabit noktası olsun. Bu takdirde (2) eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(Su, Tv) \\ &\leq h \max \left\{ d(u, v), d(u, Su), d(v, Tv), d(u, Tv), d(v, Su), \frac{d(u, Su)d(v, Tv)}{d(u, v)} \right\} \\ &= h \max \left\{ d(u, v), d(u, u), d(v, v), d(u, v), d(v, u), \frac{d(u, u)d(v, v)}{d(u, v)} \right\} \end{aligned}$$

v yerine u yazılırsa; $d(u, u) \leq h d(u, u)$ elde edilir. $0 < h < \frac{1}{2}$ olduğundan $d(u, u) = 0$ bulunur. Bu yöntemle $d(v, v) = 0$ bulunur. Dolayısıyla; $d(u, v) \leq h d(u, v)$ olup $0 < h < \frac{1}{2}$ olduğundan $d(u, v) = 0$ olur. X d-metrik uzay olduğundan $u = v$ elde edilir. Böylece u , S ve T dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktasıdır.

Örnek 2.2.6.: $X = \{1, 2, 3\}$ ve $d(x, y) = \begin{cases} 2 & , x + y \text{ çift ise} \\ 1 & , x + y \text{ tek ise} \end{cases}$ olsun. $S, T : X \rightarrow X$ dönüşümleri $S(1) = S(2) = S(3) = 1$ ve $T(1) = T(2) = T(3) = 2$ olarak tanımlansın. $\forall x, y \in X$ için;

$$d(Sx, Ty) = \frac{1}{2} \max \left\{ d(x, y), d(x, Sx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Sx), \frac{d(x, Sx)d(y, Ty)}{d(x, y)} \right\}$$

elde edilir. Dikkat edelim ki $h = \frac{1}{2}$ için Teorem 2.2.5 için geçerli değildir. Çünkü $h = \frac{1}{2}$ için S dönüşümünün bir sabit noktası 1 ve T dönüşümünün bir sabit noktası 2 olur. $h = \frac{1}{2}$ için S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası yoktur.

Aşağıda verilecek olan teorem 2011 yılında K. P. Rao ve P. R. Swamy [29] tarafından ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 2.2.7.: (X, d) bir tam d -metrik uzay olsun. $F, G, S, T : X \rightarrow X$ sürekli dönüşümleri;

$$(1) S(X) \subseteq G(X) \text{ ve } T(X) \subseteq F(X)$$

$$(2) SF = FS \text{ ve } TG = GT$$

$$(3) f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ monoton azalmayan bir dönüşüm, } \forall t > 0 \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} f^n(t) < \infty \text{ ve } \forall x, y \in X \text{ için;}$$

$$d(Sx, Ty) \leq f \max \{d(Fx, Gy), d(Fx, Sx), d(Gy, Ty), \frac{d(Fx, Sx)d(Gy, Ty)}{d(Fx, Gy)}\}$$

şartlarını sağlasın. Bu taktirde;

(i) F ve S veya G ve T çakışimsı noktaya sahiptir.

(ii) (F, S) ve (G, T) çiftleri bir ortak çakışimsı noktaya sahiptir.

İspat: $\forall t > 0$ için $f(t) < t$ ve $n \rightarrow \infty$ için $f^n(t) \rightarrow 0$ olur. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun.

$$y_{2n} = Sx_{2n} = Gx_{2n+1}$$

$$y_{2n+1} = Tx_{2n+1} = Fx_{2n+2}, n = 0, 1, 2, 3, \mathbf{K}$$

olacak şekilde X ' de (x_n) ve (y_n) dizileri tanımlansın. $\exists n$ için $y_{2n} = y_{2n+1}$ ise bu taktirde $Gx_{2n+1} = Tx_{2n+1}$. Böylece x_{2n+1} , G ve T dönüşümlerinin bir çakışimsı noktasıdır. $\exists n$ için $y_{2n+1} = y_{2n+2}$ ise bu taktirde $Fx_{2n+2} = Sx_{2n+2}$. Böylece x_{2n+2} , F ve S dönüşümlerinin bir çakışimsı noktasıdır. Kabul edelim ki $\forall n$ için $y_{2n} \neq y_{2n+1}$ olsun.

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) = d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1})$$

$$\leq f \max \{d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n+1}), \frac{d(y_{2n-1}, y_{2n})d(y_{2n}, y_{2n+1})}{d(y_{2n-1}, y_{2n})}\}$$

$$= f \max \{d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n+1})\}$$

$$\begin{aligned}
d(y_{2n-1}, y_{2n}) &= d(Sx_{2n}, Tx_{2n-1}) \\
&\leq f \max\{d(y_{2n-1}, y_{2n-2}), d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n-2}, y_{2n-1}), \frac{d(y_{2n-1}, y_{2n})d(y_{2n-2}, y_{2n-1})}{d(y_{2n-1}, y_{2n-2})}\} \\
&= f \max\{d(y_{2n-1}, y_{2n-2}), d(y_{2n-1}, y_{2n})\}
\end{aligned}$$

$\max\{d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n+1})\} = d(y_{2n}, y_{2n+1})$ ise bu takdirde
 $d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq f(d(y_{2n}, y_{2n+1})) < d(y_{2n}, y_{2n+1})$. Bu bir çelişki olduğundan;
 $d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq f(d(y_{2n-1}, y_{2n}))$ (3) eşitsizliği elde edilir. Buradan
 $d(y_{2n-1}, y_{2n}) \leq f(d(y_{2n-2}, y_{2n-1}))$ (4) elde edilir.

(3) ve (4) ' ten;

$$\begin{aligned}
d(y_n, y_{n+1}) &\leq f(d(y_{n-1}, y_n)) \\
&\leq f^2(d(y_{n-2}, y_{n-1})) \\
&\vdots \\
&\leq f^n(d(y_0, y_1))
\end{aligned} \quad (5)$$

Şimdi $n, m \in \mathbb{N}$ ile $n < m$ için;

$$\begin{aligned}
d(y_n, y_m) &\leq d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2}) + \dots + d(y_{m-1}, y_m) \\
(5)'den \quad &\leq f^n(d(y_0, y_1)) + f^{n+1}(d(y_0, y_1)) + \dots + f^{m-1}(d(y_0, y_1)) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} f^i(d(y_0, y_1))
\end{aligned}$$

$n, m \rightarrow \infty$ iken $d(y_n, y_m) \rightarrow 0$. Böylece (y_n) dizisi X d-metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. Bu yüzden $y_n \rightarrow u$ olacak şekilde bir $u \in X$ noktası vardır.

$$SF = FS \text{ ve } S \text{ ve } F \text{ sürekli olduğundan; } Su = \lim_{n \rightarrow \infty} SFx_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} FSx_{2n} = Fu.$$

$$TG = GT \text{ ve } T \text{ ve } G \text{ sürekli olduğundan; } Tu = \lim_{n \rightarrow \infty} TGx_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} GTx_{2n+1} = Gu.$$

Böylece (F, S) ve (G, T) çiftleri bir ortak çakışmsı noktaya sahiptir.

Örnek 2.2.8.: $X = [0,1]$ ve $d(x, y) = \max\{x, y\}$ olsun. Bu taktirde (X, d) bir d-metrik uzaydır.

$Sx = 0$, $Tx = \frac{x}{6}$, $Fx = x$ ve $Gx = \frac{x}{3}$ olarak tanımlansın. S, T, F ve G dönüşümleri süreklidir ve teorem koşullarından (1) ve (2) sağlanır. $\forall x, y \in X$ ve $f(t) = \frac{t}{2}$ için;
 $d(Sx, Ty) \leq f(d(Fx, Gy))$. Böylece (F, S) ve (G, T) çiftlerinin bir ortak çakışımı noktası 0 (sıfır)'dır.

Aşağıda verilecek olan teorem 2012 yılında K. Jha ve D. Panthi [21] tarafından ifade ve ispat edilmiştir.

Tanım 2.2.9.: (X, d) metrik uzay, $A, S : X \rightarrow X$ dönüşümler olsun. $\exists x \in X$ için $Ax = Sx$ olacak şekilde $ASx = SAx$ oluyorsa yani A ve S dönüşümleri çakışımı noktalarında değışmeli iseler A ve S dönüşümleri zayıf bağdaşabilir.

Teorem 2.2.10.: (X, d) bir tam d-metrik uzay olsun. $A, B, S, T : X \rightarrow X$ sürekli dönüşümleri;

(i) $T(X) \subset A(X)$ ve $S(X) \subset B(X)$

(ii) (S, A) ve (T, B) çiftleri zayıf bağdaşabilir

(iii) $\forall x, y \in X$, $a, b, g \geq 0$, $0 \leq a + b + g < \frac{1}{2}$ için;

$$d(Sx, Ty) \leq a d(Ax, Ty) + b d(By, Sx) + g d(Ax, By)$$

şartlarını sağlasın. Bu taktirde A, B, S ve T dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır.

İspat: (i) şartı kullanılarak;

$$y_{2n} = Bx_{2n+1} = Sx_{2n}$$

$$y_{2n+1} = Ax_{2n+2} = Tx_{2n+1} , n = 0, 1, 2, \mathbf{K}$$

olacak şekilde X' de (x_n) ve (y_n) dizileri tanımlansın. $\exists n$ için $y_{2n} = y_{2n+1}$ ise bu taktirde $Bx_{2n+1} = Tx_{2n+1}$. Böylece x_{2n+1} , B ve T dönüşümlerinin bir çakışımı noktasıdır. $\exists n$ için $y_{2n+1} = y_{2n+2}$ ise bu taktirde $Ax_{2n+2} = Sx_{2n+2}$.

Böylece x_{2n+2} , A ve S dönüşümlerinin bir çakışımı noktasıdır. Kabul edelim ki $\forall n$ için $y_{2n} \neq y_{2n+1}$ olsun. Bu taktirde;

$$\begin{aligned} d(y_{2n}, y_{2n+1}) &= d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) \\ &\leq a d(Ax_{2n}, Tx_{2n+1}) + b d(Bx_{2n+1}, Sx_{2n}) + g d(Ax_{2n}, Bx_{2n+1}) \\ &\leq a d(y_{2n-1}, y_{2n}) + b d(y_{2n}, y_{2n+1}) + g d(y_{2n-1}, y_{2n}) \\ &\leq a [d(y_{2n-1}, y_{2n}) + d(y_{2n}, y_{2n+1})] + b [d(y_{2n-1}, y_{2n}) + d(y_{2n}, y_{2n+1})] + g d(y_{2n-1}, y_{2n}) \\ &= (a + b + g) d(y_{2n-1}, y_{2n}) + (a + b) d(y_{2n}, y_{2n+1}) \end{aligned}$$

Bu yüzden;

$$\begin{aligned} d(y_{2n}, y_{2n+1}) &\leq \frac{a + b + g}{1 - a - b} d(y_{2n-1}, y_{2n}) \\ &= h d(y_{2n-1}, y_{2n}) \end{aligned}$$

$$\text{burada } h = \frac{a + b + g}{1 - a - b} < 1 .$$

$$\text{Böylece } d(y_n, y_{n+1}) \leq h d(y_{n-1}, y_n) \leq h^2 d(y_{n-2}, y_{n-1}) \leq \mathbf{L} \leq h^n d(y_0, y_1)$$

$\forall q > 0$ sayısı için;

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+q}) &\leq d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2}) + \mathbf{L} + d(y_{n+q-1}, y_{n+q}) \\ &\leq (1 + h + h^2 + \mathbf{L} + h^{q-1}) d(y_n, y_{n+1}) \\ &\leq \frac{h^n}{1 - h} d(y_0, y_1) \end{aligned}$$

$0 < h < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ iken $h^n \rightarrow 0$. Buradan $d(y_n, y_{n+q}) \rightarrow 0$. Böylece (y_n) dizisi X tam d-metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

Bu yüzden $y_n \rightarrow z$ olacak şekilde bir $z \in X$ noktası vardır. Dolayısıyla alt diziler için; $(Sx_{2n}) \rightarrow z$, $(Bx_{2n+1}) \rightarrow z$, $(Tx_{2n+1}) \rightarrow z$ ve $(Ax_{2n+2}) \rightarrow z$.

$T(X) \subset A(X)$ olduğundan $z = Au$ olacak şekilde bir $u \in X$ noktası vardır.

$$\begin{aligned}
d(Su, z) &= d(Su, Tx_{2n+1}) \\
&\leq a d(Au, Tx_{2n+1}) + b d(Bx_{2n+1}, Su) + g d(Au, Bx_{2n+1}) \\
&= a d(z, Tx_{2n+1}) + b d(Bx_{2n+1}, Su) + g d(z, Bx_{2n+1})
\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ için limit alınır;

$$\begin{aligned}
d(Su, z) &\leq a d(z, z) + b d(z, Su) + g d(z, z) \\
&= (a + g) d(z, z) + b d(z, Su) \\
&\leq 2(a + g) d(z, Su) + b d(z, Su) \\
&= (2a + b + 2g) d(z, Su)
\end{aligned}$$

$2a + b + 2g < 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu yüzden $Su = Au = z$ olur. $S(X) \subset B(X)$ olduğundan $z = Bv$ olacak şekilde bir $v \in X$ noktası vardır. İddia ediyoruz ki $z = Tv$ dir. Eğer $z \neq Tv$ ise bu taktirde;

$$\begin{aligned}
d(z, Tv) &= d(Su, Tv) \\
&\leq a d(Au, Tv) + b d(Bv, Su) + g d(Au, Bv) \\
&= a d(z, Tv) + b d(z, z) + g d(z, z) \\
&\leq a d(z, Tv) + 2(b + g) d(z, Tv) \\
&= (a + 2b + 2g) d(z, Tv)
\end{aligned}$$

$a + 2b + 2g < 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu yüzden $z = Tv$ elde edilir. Böylece $Su = Au = Tv = Bv = z$ elde edilir.

(S, A) çifti zayıf bağdaşabilir olduğundan tanım gereğince $Sz = Az$ olması $SAu = ASu$ olmasını gerektirir. Şimdi bu z noktasının S dönüşümünün bir sabit noktası olduğunu gösterelim. $Sz \neq z$ ise bu taktirde;

$$\begin{aligned}
d(Sz, z) &= d(Sz, Tv) \leq a d(Az, Tv) + b d(Bv, Sz) + g d(Az, Bv) \\
&= (a + b + g) d(Sz, z)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Böylece $Sz = z$ bulunur. Yani $Az = Sz = z$ elde edilir. (T, B) çifti zayıf bağdaşabilir olduğundan tanım gereğince $Tz = Bz$ olması $TBv = BTv$ olmasını gerektirir.

Şimdi bu z noktasının T dönüşümünün bir sabit noktası olduğunu gösterelim. $Tz \neq z$ ise bu taktirde;

$$\begin{aligned}
d(z, Tz) &= d(Sz, Tz) \leq a d(Az, Tz) + b d(Bz, Sz) + g d(Az, Sz) \\
&= (a + b + g) d(z, Tz)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Böylece $z = Tz$ bulunur. Yani $Az = Bz = Sz = Tz = z$ elde edilir. Bu gösterir ki z noktası A, B, S ve T dönüşümlerinin bir ortak sabit noktasıdır.

Teklik ;

u ve v noktaları A, B, S ve T dönüşümlerinin iki farklı ortak sabit noktası olsun.

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(Su, Tv) \\ &\leq a d(Au, Tv) + b d(Bv, Su) + g d(Au, Bv) \\ &= a d(u, v) + b d(v, u) + g d(u, v) \\ &= (a + b + g) d(u, v) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $d(u, v) = 0$ olur. X d-metrik uzay olduğundan $u = v$ elde edilir.

Örnek 2.2.11.: $X = [0, 1]$ ve d bir alışılmış metrik olsun. A, B, S ve T dönüşümleri

$Sx = 0$, $Ax = x$, $Tx = \frac{x}{5}$ ve $Bx = x$ olarak tanımlansın. Bu taktirde

$a = \frac{1}{5}, b = \frac{1}{6}, g = \frac{1}{8}$ ve A, B, S ve T dönüşümleri Teorem 2.2.10' un tüm şartlarını sağlıyor ise $x = 0$ noktası A, B, S ve T dönüşümlerinin bir ortak sabit noktasıdır.

III. BÖLÜM

DISLOCATED TOPOLOJİ

Bu bölümde, dislocated topolojilerde komşuluk, yakınsama ve süreklilik kavramlarının bazı özelliklerini vereceğiz. Sabit diziler genelde d-metrik uzaylarda yakınsak olmadığından klasik olarak topolojik yaklaşım yapılmamalıdır. Bu yüzden burada komşuluk, yakınsama ve süreklilik kavramlarında revizyon yapılmak zorundadır.

3.1. Dislocated Topolojik Uzaylarda Komşuluk Kavramı

3.1.1. Tanım: (X, r) bir d-metrik uzay, $x \in X$ ve $e > 0$ bir reel sayı olsun. Bu durumda $B_e(x) = \{y \in X : r(x, y) < e\}$ kümesine **e -açık yuvar** denir.

3.1.2. Uyarı: Bu tanıma göre, d-metrik uzayında alınan herhangi bir yuvar boş küme olabilir. Aslında, yukarıda verdiğimiz yuvar tanımı, yuvarın kendisi tarafından içerilmiş yuvarın merkezini ifade etmez. Yani, bu nokta yuvardan dislocated (çıkarılmış=yerinden oynatılmış) olabilir. Bu yüzden, bu tezde “dislocated” terimini kullanma ihtiyacı duyulmuştur.

3.1.3. Önerme: (X, r) bir d -metrik uzay olsun. Aşağıdaki üç özellik birbirine denktir.

i) Her $x \in X$ için $r(x, x) = 0$.

ii) r bir metriktir.

iii) Her $x \in X$ ve $e > 0$ için $B_e(x) \neq \emptyset$.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii): d -metrik tanımından açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): e -açık yuvar tanımından açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Her $e > 0$ için $B_e(x) \neq \emptyset$ olduğundan her $e > 0$ için en az bir $y \in X$ vardır öyle ki $r(x, y) < e$ olur. Her $y \in X$ için ($x = y$ halinde) $r(x, x) \leq r(x, y) + r(y, x)$, buradan $x = y$ alınırsa $r(x, x) \leq 2r(x, y)$ ve buradan da her $e > 0$ için $r(x, x) < e$ elde edilir. Bu takdirde $r(x, x) = 0$ olasıdır.

3.1.4. Not: $X' = \{x \in X : r(x, x) = 0\}$ olmak üzere Önerme 3.1.3 gereği (X', r) ikilisi bir metrik uzaydır.

3.1.5. Tanım: X bir küme olmak üzere her $x \in X$ ve $A, B \subseteq X$ için;

" $x \in A$ ve $A \subseteq B$ iken $x \in B$ "

özellikliğini sağlayan $\square \subseteq X \times P(X)$ kapsamasını sağlayan ve sembolik olarak " $\square$ " gösterilen bağıntıya X üzerinde **d -üyelik bağıntısı** denir.

Burada $x \in A$ olmasına " x, A nın altındadır" ile ifade edeceğiz. "Altında" olma bağıntısı küme teorisinde üyelik bağıntısının bir genellemesidir. Bu bağıntıdan, komşuluk kavramının uygun bir notasyonunu tanımlamak için faydalanacağız.

3.1.6. Tanım: X herhangi bir küme, $\square$, X üzerinde bir d -üyelik bağıntısı ve her $x \in X$ için X 'in alt kümelerinin bir ailesi $U_x \neq \emptyset$ olsun. Aşağıdaki şartlar sağlıyorsa, $(U_x, \square)$ ikilisine x için bir **d -komşuluk sistemi** denir.

(N_1) $U \in U_x$ ise $x \in U$.

(N_2) $U, V \in U_x$ iken $U \cap V \in U_x$.

(N_3) $U \in U_x$ ve $U \subseteq V$ iken $V \in U_x$.

(N₄) $U \in U_x$ için $V \subseteq U$ olacak şekilde öyle bir $V \in U_x$ vardır ki her $y \in V$ için $U \in U_y$ dir.

Her bir $U \in U_x$ kümesi x 'in **d-komşuluğu** olarak adlandırılır. Sonuç olarak, X bir küme, $\square$, X 'in d-üyelik bağıntısı ve her bir $x \in X$ için $(U_x, \square)$ ikilisi x için d-komşuluk sistemi olsun. Bu durumda, $U = \{U_x : x \in X\}$ olmak üzere $(X, U, \square)$ (veya sadece X), bir **d-topolojik uzay** olarak adlandırılır.

Bu tanımda noktalardaki d-komşuluklar boş olabilir, eğer " $\square$ " sembolü " $\in$ " üyelik bağıntısı olursa Tanım 3.1.6, topolojik komşuluk sistemi tanımını tamamlar.

3.1.7. Önerme: (X, r) bir d-metrik uzay olsun. $\square$, d-üyelik bağıntısının tanımından $\{(x, A) : e > 0 \text{ için } B_e(x) \subseteq A\}$. Her bir $x \in X$ için U_x , $x \in A$ olacak şekilde X 'in bütün A alt kümelerinin ailesi olsun. Bu durumda, her bir $x \in X$ için $(U_x, \square)$ ikilisi, x için d-komşuluk sistemidir.

İspat: $\square$, d-üyelik bağıntısı olduğunu görmek için bu bağıntının (N₁), (N₂), (N₃) ve (N₄) özelliklerini sağladığını gösterelim.

(N₁) Tanımdan açıktır. Burada, tersine olarak $x \in U$ ise $U \in U_x$ özelliğinin de sağlandığına dikkat edelim.

(N₂) $x \in U, V$ ise bu taktirde $A \subseteq U$ ve $B \subseteq V$ olacak şekilde x merkezli A, B yuvarları vardır. Genelliği bozmaksızın A ve B yuvarlarının kütüğü A olsun. Bu taktirde $A = A \cap B \subseteq U \cap V$.

(N₃) $x \in U \subseteq V$ olduğundan $x \in V$ olduğu açıktır.

(N₄) $U \in U_x$, yani $x \in U$ olsun. Buna göre, $B \subseteq U$ ve $B \in U_x$ olacak şekilde x merkezli bir B yuvarı vardır. Keyfi $y \in B$ alalım. $y \in U$ olduğunu göstermeliyiz. $y \in B$ alınması $y \in B' \subseteq B \subseteq U$ olacak şekilde y merkezli bir B' yuvarının varlığını gerektirir. Sonuçta, $y \in U$ olmasını elde ederiz.

3.1.8. Uyarı : (X, r) bir metrik uzay olduğunda yukarıda verdiğimiz yapılarla bir metrikle oluşturulmuş alışılmış topolojiyi verebilir. Ancak, d-metrikli yuvarların kümesi genelde klasik topoloji vermez.

Bu bağlamda, bir dislocated metrik tanımlayan aksiyomlar [27, 28] de verilmiş bir kısmi (partial) metrik tanımlayan aksiyomlardan aşağıdaki gibi farklı olduğu görülebilir.

3.1.9. Tanım: X bir küme ve $p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$(Pi) \quad \forall x, y \in X \text{ için } x = y \Leftrightarrow p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$$

$$(Pii) \quad \forall x, y \in X \text{ için } p(x, x) \leq p(x, y)$$

$$(Piii) \quad \forall x, y \in X \text{ için } p(x, y) = p(y, x)$$

$$(Piv) \quad \forall x, y, z \in X \text{ için } p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$$

şartları sağlanıyorsa p fonksiyonu **kısmi (partial) metrik** olarak adlandırılır.

Bu tanımdan her kısmi metriğin bir d-metrik olduğu açıktır.

3.1.10. Önerme: Herhangi bir d-ultrametrik (Pii) ve (Piv) şartlarını sağlar. Bunun yanında (Pi) şartını sağlamak zorunda değildir.

İspat: (X, r) bir d-ultrametrik ve keyfi $x, y, z \in X$ elemanları verilsin.

(Pii) Kuvvetli üçgen eşitsizliği kullanılarak, $r(x, x) \leq \max\{r(x, y), r(y, x)\}$ elde edilir.

Buradan da simetri özelliği kullanılarak istenen özellik elde edilir.

(Piv) Kuvvetli üçgen eşitsizliği kullanılarak $r(x, z) \leq \max\{r(x, y), r(y, z)\}$ elde edilir.

Genelliği bozmaksızın, kabul edelim ki $r(x, y) \geq r(y, z)$ olsun. (Pii) özelliğinden dolayı $r(y, y) \leq r(y, z)$ ve buradan da $r(x, z) \leq r(x, y) \leq r(x, y) + r(y, z) - r(y, y)$ elde edilir.

X bir küme ve $X \times X$ üzerinde 1 eşitliği ile r tanımlansın. Böylece, r, X üzerinde bir d-ultra metriktir ve (Pi) şartını sağlamaz.

3.2. Dislocated Topolojik Uzaylarda Yakınsaklık ve Süreklilik

Burada vermiş olduğumuz d-komşuluk kavramını kullanarak d-topolojik uzaylara yakınsaklık kavramını adapte ederek başlayalım.

3.2.1. Tanım: $(X, U, \square)$ bir d-topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. Eğer x noktasının her U d-komşuluğu için x_l sonunda U da ise, yani, her $l > l_0$ için öyle bir l_0 vardır ki $x_l \in U$ oluyorsa topolojik olarak (x_l) ağı $x \in X$ noktasına **d-yakınsar** denir.

3.2.2. Uyarı: Dislocated topolojik uzaylarda komşuluk kavramından, bazı $x \in X$ için $f \in U_x$ olduğundan (x) sabit dizisi d -yakınsak değildir. Aslında, $f \in U_x$ olduğunda $x \in X$ noktasına yakınsayan X de bir ağ yoktur. Tanım 3.2.1' de verilmiş olan yakınsaklık kavramı bir d -metriğe göre yakınsaklığın doğal bir genelleştirilmesidir.

3.2.3. Önerme: (X, r) bir d -metrik uzay ve Önerme 3.1.7' deki yapı ile bu metriktan elde edilmiş olan d -topolojik uzay $(X, U, \square)$ olsun. (x_n) , X de bir dizi olmak üzere (x_n) nin r da yakınsak olması için gerek ve yeter şartın (x_n) nin $(X, U, \square)$ da d -yakınsak olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: (x_n) dizi r da $x \in X$ noktasına yakınsak olsun. Yakınsama tanımından $n \rightarrow \infty$ için $r(x_n, x) \rightarrow 0$ olur. Keyfi $x \in X$ noktasının bir U d -komşuluğunu alalım. Böylece, $e > 0$ vardır öyle ki $B_e(x) \subseteq U$ olur. $r(x_n, x) \rightarrow 0$ olduğundan her $n > n_0$ için n_0 vardır öyle ki $x_n \in B \subseteq U$ olur. Buda (x_n) nin $(X, U, \square)$ da $x \in X$ noktasına d -yakınsak olmasıdır.

$(\Leftarrow)$: (x_n) , $(X, U, \square)$ da $x \in X$ noktasına d -yakınsak olsun. Tanımdan, $x \in X$ noktasının her U d -komşuluğu için $n > n_0$ için n_0 vardır öyle ki $x_n \in U$ olur. Her $e > 0$ için $B_e(x)$, $x \in X$ noktasının bir d -komşuluğudur. Burada $e > 0$ keyfi bir şekilde küçük seçilebileceğinden $n \rightarrow \infty$ için $r(x_n, x) \rightarrow 0$ elde edilir.

Şimdi d -topolojik uzaylarda süreklilik kavramını tanımlayarak devam edelim.

3.2.4. Tanım: X ve Y d -topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Y de $f(x_0)$ in her V d -komşuluğu için X de x_0 in bir U d -komşuluğu var öyle ki $f(U) \subseteq V$ oluyorsa f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında **d -süreklidir** denir. Eğer f fonksiyonu her $x_0 \in X$ noktasında d -süreklili ise f fonksiyonuna X üzerinde **d -süreklidir** denir.

Aşağıdaki teorem ile ağlar yardımı ile karakterize edilmiş olan d-yakınsaklık kavramını kullanarak d-sürekliliğin bir başka ifadesini verelim.

3.2.5. Teorem: X ve Y d-topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonun d-sürekliliği için gerek ve yeter şart $x_0 \in X$ noktasında d-yakınsak olan X de her (x_i) ağı için $f(x_0) \in Y$ noktasında d-yakınsak olan Y de bir $(f(x_i))$ ağının var olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: Kabul edelim ki, f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında d-süreklili ve $x_0 \in X$ noktasında d-yakınsak olan bir ağ (x_i) olsun. $f(x_0)$ noktasının V d-komşuluğunu alalım. d-süreklilik tanımından $x_0 \in X$ noktasının U d-komşuluğu var öyle ki $f(U) \subseteq V$ dir. x_i , sonunda U nun içinde olduğundan $f(x_i)$, sonunda V nin içinde olur. Böylece $f(x_i)$, $f(x_0)$ noktasına d-yakınsar.

$(\Leftarrow)$: Tersine ispat için, önermeler cebirindeki $(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$ denkleğini kullanacağız. Kabul edelim ki, f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında d-süreklili olmasın. d-süreklilik tanımından her $U \in U_{x_0}$ ve $f(x_0)$ noktasının bazı V d-komşuluğu için $f(U) \not\subseteq V$ olur. Böylece her $U \in U_{x_0}$ için $f(x_U) \notin V$ olacak biçimde $x_U \in U$ vardır. Buda $x_0 \in X$ noktasında d-yakınsak olan X de (x_U) ağı için $f(x_U)$ nun $f(x_0)$ noktasına d-yakınsak olmaması anlamına gelir. Buda ispatı tamamlar.

Aşağıdaki önerme ile d-metrik uzaylarda açık yuvarlar cinsinden d-süreklilik ifadesini verelim.

3.2.6. Önerme: (X, r) ve (Y, r') d-metrik uzaylar, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $(X, U, \square)$ ile $(Y, V, \square')$ sırasıyla (X, r) ve (Y, r') tarafından Önerme 3.1.7' deki yapıyla verilmiş d-topolojik uzaylar olsun. Buna göre, f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında d-süreklili olması için gerek ve yeter şart her $e > 0$ için bir $d > 0$ var öyle ki $f(B_d(x_0)) \subseteq B_e(f(x_0))$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: Kabul edelim ki, f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında d-süreklili ve keyfi $e > 0$ olsun. Böylece, $B_e(f(x_0))$ yuvarı $f(x_0)$ noktasının bir d-komşuluğudur. d-süreklilik tanımından, $x_0 \in X$ noktasının $f(U) \subseteq B_e(f(x_0))$ kapsamasını sağlayacak biçimde bir U d-komşuluğu vardır.

Hipotezden, U , $x_0 \in X$ noktasının bir d -komşuluğu olduğundan $B_d(x_0) \subseteq U$ yuvarı vardır ve buradan da kapsamada her iki tarafın görüntüsü alınır, $f(B_d(x_0)) \subseteq f(U) \subseteq B_e(f(x_0))$ kapsaması sağlanır.

($\Leftarrow$): Kabul edelim ki, f fonksiyonu yardımıyla $e-d$ şartlı ve $f(x_0)$ noktasının V , d -komşuluğu verilmiş olsun. Hipotezden, $e > 0$ vardır öyle ki $B_e(f(x_0)) \subseteq V$ ve $f(B_d(x_0)) \subseteq B_e(f(x_0)) \subseteq V$ kapsamasını sağlayan bir $d > 0$ vardır. Buradan $B_d(x_0)$, $x_0 \in X$ noktasının d -komşuluğu olduğundan f fonksiyonun d -sürekliliği elde edilmiş olur.

3.3. Klasik Metrik İle Dislocated Metrik Arasındaki İlişki

Bu bölümde, klasik metrik ile dislocated metrik (d -metrik) arasındaki ilişkiyi vermeye çalışacağız. Eğer f , X üzerindeki d -metrikle beraber bir büzülme dönüşümü ise her $x \in X$ için $r(f(x), f(x)) \leq l r(x, x)$ olmalıdır. Burada, her $x \in X$ için $r(x, x) = 0$ eşitliğinin sağlanmasını istiyorsak d -metriğini bir metriğe dönüştürmeliyiz. Bunun için $u_r(x) = r(x, x)$ eşitliği ile tanımlanmış $u_r : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonundan faydalanacağız. Şimdi, bu fonksiyonla ilgili bazı özellikler verelim.

3.3.1. Tanım: (X, r) bir d -metrik uzay olsun. $u_r : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $u_r(x) = r(x, x)$ eşitliği ile veriliyor. Bu eşitlikle tanımlanan u_r fonksiyonuna r nun **dislocation fonksiyonu** adı verilir.

3.3.2. Lemma: (X, r) bir d -metrik uzay olsun. Bu durumda $u_r : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu d -süreklidir.

İspat: Burada ispat için Tanım 3.2.1' in ifadesinden faydalanacağız. Keyfi $x \in X$ ve (x_l) , X 'de x noktasına d -yakınsak bir ağ olsun. d -yakınsaklık tanımından, her $e > 0$ ve $l > l_0$ için $r(x_l, x) < e$ olacak şekilde bir l_0 vardır. u_r fonksiyonunun tanımından her l için $u_r(x_l) = r(x_l, x_l) \leq 2r(x_l, x)$ olduğundan l artanı için $u_r(x_l) \rightarrow 0$ elde edilir.

Buradan $u_r(x) = 0$ olduğunu göstermek kalır ki bu $u_r(x) = r(x, x) \leq 2r(x_l, x)$ ifadesinde l artanı için ikinci tarafın 0 (sıfıra) yaklaşmasından elde edilir.

Aşağıdaki önerme ile klasik metriklerden nasıl d-metrikler elde edilebilir sorusuna cevap vermeye çalışalım.

3.3.3. Önerme: (X, d) bir metrik uzay, $u: X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ bir fonksiyon, $T: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ üçgen eşitsizliğini sağlayan bir simetrik operatör olsun. Buna göre, (X, r) , $r(x, y) := d(x, y) + T(u(x), u(y))$ eşitliği ile birlikte bir d-metrik uzaydır ve u_r fonksiyonunun tanımından her $x \in X$ için $u_r(x) = T(u(x), u(x))$ eşitliği vardır. Özellikle, her $x \in \mathbb{R}_0^+$ için $T(x, x) = x$ ise $u_r \equiv u$ denkliği sağlanır.

İspat: (mii) Eğer $r(x, y) = 0$ ise buradan $d(x, y) + T(u(x), u(y)) = 0$ olup $d(x, y) = 0$ ve $x = y$ elde edilir.

(miii) d metrik fonksiyonu ve T üçgen eşitsizliğini sağlayan bir simetrik operatör olmasından simetri özelliği sağlanır.

(miv) d metrik fonksiyonu ve T üçgen eşitsizliğini sağlayan bir simetrik operatör olmasından üçgen eşitsizliği sağlanır.

Bazı süreklilik şartları uygulanarak Önerme 3.3.3' de kullanılan notasyonlar yardımı ile tamlık için aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

3.3.4. Önerme: (X, d) bir metrik uzay, $u: X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sürekli bir fonksiyon (alışılmış topoloji ile verilen) ve $T: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ her x için $T(x, x) = x$ ek şartını sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. Buna göre, (X, d) bir tam metrik uzay ise (X, r) bir tam d-metrik uzaydır.

İspat: (x_n) , (X, r) d-metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Böylece, her $\epsilon > 0$ ve $m, n \geq n_0$ için $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_n) + T(u(x_m), u(x_n)) = r(x_m, x_n) < \epsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu yüzden (x_n) , (X, d) metrik uzayında da bir Cauchy dizisidir ve (X, d) bir tek x limitine sahiptir.

Daha açık yazarsak, (X, d) metrik uzayında $x_n \rightarrow x$ ve ayrıca $u(x_n) \rightarrow u(x)$ ve $T(u(x_n), u(x)) \rightarrow T(u(x), u(x)) = u(x)$ limitleri vardır. İspatı tamamlamak için $n \rightarrow \infty$ için $r(x_n, x) \rightarrow 0$ olduğunu göstermeliyiz. Her $n \in \mathbb{N}$ için $r(x_n, x) = d(x_n, x) + T(u(x_n), u(x)) \rightarrow u(x) = u_r(x)$ elde edilir. Geriye $r(x, x) = 0$ olduğunu göstermek kalır. Buda, (x_n) nin bir Cauchy dizisi olmasından $n \rightarrow \infty$ için $u(x_n) = u_r(x_n) = r(x_n, x_n) \rightarrow 0$ olup u fonksiyonunun sürekliliğinden $u(x) = 0$ elde edilir.

Aşağıdaki önerme ile Önerme 3.3.3' ün kısmen de olsa tersini elde edebiliriz.

3.3.5. Önerme: (X, r) , (Piv) şartını sağlayan bir d -metrik uzay ve $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, her $x \in \mathbb{R}$ için $T(x, x) = x$ özelliğini sağlayan ve her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için $T(x, y) \geq T(x, z) + T(z, y) - T(z, z)$ eşitsizliğini sağlayan bir simetrik operatör olsun. Buna göre, (X, d) ikilisi $d(x, y) := r(x, y) - T(u_r(x), u_r(y))$ eşitliği ile bir pseudo-metrik uzaydır.

İspat: (mi) Her $x \in X$ için $d(x, x) = r(x, x) - u_r(x) = 0$.

(miii) r ve T fonksiyonlarının simetrik olmasından açıktır.

(miv) Her $x, y \in X$ için;

$$\begin{aligned} d(x, y) &= r(x, y) - T(u_r(x), u_r(y)) \\ &\leq r(x, z) + r(z, y) - r(z, z) - [T(u_r(x), u_r(z)) + T(u_r(z), u_r(y)) - u_r(z)] \\ &= r(x, z) - T(u_r(x), u_r(z)) + r(z, y) - T(u_r(z), u_r(y)) \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

3.3.6. Uyarı: Buraya kadar verdiğimiz Önerme 3.3.3, Önerme 3.3.4 ve Önerme 3.3.5' in gereksinimlerini sağlayan doğal bir T operatörüne bir örnek olarak

$$T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)$$

eşitliğini verebiliriz.

3.3.7. Örnek: $d, \square_0^+$ üzerinde, $d(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|$ eşitliği ile bir metrik, $u : \square_0^+ \rightarrow \square_0^+$ bir

özdeşlik fonksiyonu ve $T(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)$ ile tanımlanmış olsun. Buna göre,

Önerme 3.3.3' de tanımlanmış r bir d-metrikdir ve burada her $x, y \in \square_0^+$ için

$$r(x, y) = \frac{1}{2}|x - y| + \frac{1}{2}(x + y) = \max\{x, y\} \text{ eşitliği elde edilmiş olur.}$$

3.3.8. Örnek: $I, \square$ üzerindeki bütün kapalı aralıkların kümesi olsun. Bu taktirde

$$d : I \times I \rightarrow \square_0^+, \quad d([a, b], [c, d]) = \frac{1}{2}(|a - c| + |b - d|), \quad I \text{ üzerinde bir metrikdir.}$$

$u : I \rightarrow \square^+, u([a, b]) = b - a$ eşitliği ile tanımlanmış olsun. $T(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)$ olarak

tanımlansın. Buna göre her $[a, b], [c, d] \in I$ için

$$r([a, b], [c, d]) = \max\{b, d\} - \min\{a, c\} \text{ olacak şekilde } r \text{ bir}$$

$$r([a, b], [c, d]) = d([a, b], [c, d]) + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}c$$

$$= \frac{1}{2}(|b - d| + b + d + |a - c| - a - c)$$

$$= \frac{1}{2}(|b - d| + (b + d)) + \frac{1}{2}(|a - c| - (a + c))$$

$$= \max\{b, d\} - \min\{a, c\}$$

ifadeleri ile d-metrikdir.

3.3.9. Örnek: $r : (x, y) \rightarrow x + y$ ifadesi ile birlikte $(\square_0^+, r)$ bir dislocated metrik uzaydır.

Aşağıdaki önerme bize ultrametriklerden, d-ultrametrikleri elde etmenin alternatif bir yolunu verir. Şimdi ultra metrikler ve d-ultrametrikler arasındaki ilişkiyi açıklayacağız.

3.3.10. Önerme: (X, d) bir ultrametrik uzay ve $u : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ bir fonksiyon olsun. Buna göre, (X, r) ikilisi, $r(x, y) = \max\{d(x, y), u(x), u(y)\}$ eşitliği ile bir d-ultrametriktir ve her $x \in X$ için $r(x, x) = u(x)$ dir. $u, (X, d)$ 'de sürekli bir fonksiyon ise (X, d) 'nin tamlığı, (X, r) 'nin tamlığını gerektirir.

İspat: (mii) ve (miii) sağlandığı açıktır.

(miv*) eşitsizliği,

$$\begin{aligned} r(x, y) &= \max\{d(x, y), u(x), u(y)\} \\ &\leq \max\{d(x, z), d(z, y), u(x), u(y)\} \\ &\leq \max\{d(x, z), u(x), u(z), d(z, y), u(y)\} \\ &\leq \max\{r(x, z), r(z, y)\} \end{aligned}$$

ifadelerinden sağlandığı açıktır.

Tamlığın ispatı için, $(x_n), (X, r)$ 'da bir Cauchy dizisi olsun. Buna göre, $(x_n), (X, d)$ 'de bir Cauchy dizisidir ve bir $x \in X$ noktasına yakınsar. $n \rightarrow \infty$ iken $r(x_n, x) = \max\{d(x_n, x), u(x_n), u(x)\} \rightarrow u(x)$ elde ederiz. Buradan Önerme 3.3.4' ün ispatı gibi $u(x) = 0$ elde edilir.

IV. BÖLÜM

DISLOCATED QUASI METRİK UZAYLAR

4.1. Dislocated Quasi Metrik Uzaylar Üzerine Bazı Temel Kavramlar

Tanım 4.1.1.: Boştan farklı bir X kümesi ile bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall x, y, z \in X$ için;

$$mi) d(x, x) = 0$$

$$mii) d(x, y) = d(y, x) = 0 \text{ ise } x = y.$$

$$miii) d(x, y) = d(y, x)$$

$$miv) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

aksiyomlarından; (mi),(mii) ve (miv) özellikleri sağlanıyorsa d fonksiyonuna **quasi metrik**, (mii) ve (miv) özellikleri sağlanıyorsa d fonksiyonuna **dislocated quasi metrik** denir. Dislocated quasi metrik kısaca **dq-metrik** olarak ifade edilecektir.

Tanım 4.1.2.: (X, d) dq-metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. $\forall \epsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır $\exists \forall m, n \geq n_0$ iken $d(x_m, x_n) < \epsilon$ veya $d(x_n, x_m) < \epsilon$ ise (x_n) bir Cauchy dizisidir. Tanımda $d(x_m, x_n) < \epsilon$ veya $d(x_n, x_m) < \epsilon$ yerine;

$\max\{d(x_m, x_n), d(x_n, x_m)\} < e$ alınırsa (X, d) dq-metrik uzayında (x_n) dizisi 'bi' **Cauchy dizisi** olarak adlandırılır.

Tanım 4.1.3.: (X, d) dq-metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$ ise (x_n) dizisi x noktasına **dq-yakınsaktır**. Yani $x, (x_n)$ dizisinin **dq-limitidir**.

Tanım 4.1.4.: (X, d) dq-metrik uzayında alınan her Cauchy dizisi yine bu uzayda dq-yakınsak ise (X, d) dq-metrik uzayına **tam dq-metrik uzay** denir.

Tanım 4.1.5.: (X, d_1) ve (Y, d_2) dq-metrik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her bir (x_n) dizisi X 'de x_0 noktasına dq-yakınsak ise $(f(x_n))$ dizisi Y 'de $f(x_0)$ noktasına dq-yakınsaktır. Bu taktirde, f süreklidir.

Lemma 4.1.6.: Bir x_0 noktasına dq-yakınsak dizinin her alt dizisi x_0 noktasına dq-yakınsaktır. Fakat tersi her zaman doğru olmayabilir.

Lemma 4.1.7.: (X, d) dq-metrik uzay olsun. $f : X \rightarrow Y$ bir büzülme dönüşümü ise bu taktirde her bir $x_0 \in X$ için $(f^n(x_0))$ bir Cauchy dizisidir.

İspat: Herhangi bir $x_0 \in X$ elemanını seçelim. Gösterelim ki $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisidir.

$$\begin{aligned} d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) &\leq l d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)) \\ &\leq l^2 d(f^{n-2}(x_0), f^{n-1}(x_0)) \\ &\vdots \\ &\leq l^n d(x_0, f(x_0)) \end{aligned}$$

Herhangi bir $r \in \mathbb{Q} \cup \{0\}$ sayısı için;

$$\begin{aligned}
d(f^n(x_0), f^{n+r}(x_0)) &\leq d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + d(f^{n+1}(x_0), f^{n+r}(x_0)) \\
&\leq d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + d(f^{n+1}(x_0), f^{n+2}(x_0)) + d(f^{n+2}(x_0), f^{n+r}(x_0)) \\
&\leq d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + d(f^{n+1}(x_0), f^{n+2}(x_0)) + \mathbf{L} + d(f^{n+r-1}(x_0), f^{n+r}(x_0)) \\
&\leq (l^n + l^{n+1} + \mathbf{L} + l^{n+r-1}) d(x_0, f(x_0)) \\
&\leq \frac{l^n}{1-l} d(x_0, f(x_0))
\end{aligned}$$

$0 < l < 1$ olduğundan; $\lim_{n \rightarrow \infty} l^n = 0$. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x_0), f^{n+r}(x_0)) = 0$.

Benzer şekilde; $d(f^{n+r}(x_0), f^n(x_0)) \leq \frac{l^n}{1-l} d(f(x_0), x_0)$ elde edilir. Yine $0 < l < 1$ olduğundan; $\lim_{n \rightarrow \infty} l^n = 0$. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{n+r}(x_0), f^n(x_0)) = 0$. Böylece $(f^n(x_0))$ bir Cauchy dizisidir.

Lemma 4.1.8.: Bir dq-metrik uzayda alınan dizinin dq-limiti tektir.

İspat: Kabul edelim ki (x_n) dizisinin iki farklı dq-limiti x ve y olsun. (miv) özelliğinden $n \rightarrow \infty$ iken $d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y)$ eşitsizliğinde $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y) = 0$ olmasından dolayı $d(x, y) \leq 0$ elde edilir. Buradan, $d(x, y) = 0$. Benzer şekilde $n \rightarrow \infty$ iken $d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x)$ eşitsizliğinde $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y, x_n) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ olmasından dolayı $d(y, x) \leq 0$ elde edilir. Buradan, $d(y, x) = 0$. Böylece $d(x, y) = d(y, x) = 0$ ise $x = y$ elde edilir.

Uyarı 4.1.9.: Quasi metrik uzaydan kendi içine sürekli olmayan bir büzülme dönüşümü olduğu gibi dq-metrik uzaydan da kendi içine sürekli olmayan bir büzülme dönüşümü vardır.

Teorem 4.1.10.: (X, d) bir tam dq-metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ sürekli bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda f dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: (X, d) dq-metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ büzölme dönüşümü ve her bir $x_0 \in X$ için $(f^n(x_0))$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu ispatlamıştık. O halde; (X, d) tam olduğundan $(f^n(x_0))$ dq-yakınsaktır. $(f^n(x_0))$ dizisinin dq-limiti x olsun. f 'nin sürekliliğinden ve bir x noktasına dq-yakınsak her dizinin alt dizisinin de x noktasına dq-yakınsak olmasından dolayı; $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^n(x_0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x_0) = x$. Böylece f büzölme dönüşümünün sabit noktası vardır.

Teklik;

Kabul edelim ki f büzölme dönüşümünün iki farklı sabit noktası x ve y olsun.

Bu taktirde;

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(f(x), f(y)) \leq l d(x, y) \\ (1 - l)d(x, y) &\leq 0 \end{aligned}$$

Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} d(y, x) &= d(f(y), f(x)) \leq l d(y, x) \\ (1 - l)d(y, x) &\leq 0 \end{aligned}$$

$(1 - l) > 0$ olduğundan; $d(x, y) = d(y, x) = 0$ ise $x = y$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 4.1.11.: Bir dq-metrik uzay d-metrik uzay olmayabilir fakat her d-metrik uzay bir dq-metrik uzaydır.

4.2. Dislocated Quasi Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

R. Kannan [23] tarafından 1968 yılında literatüre katılmış Kannan dönüşümü tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 4.2.1.: $\forall x, y \in X$ ve $0 \leq a < \frac{1}{2}$ için; $d(Tx, Ty) \leq a \{d(x, Tx) + d(y, Ty)\}$ ise $T : X \rightarrow X$ dönüşümü **Kannan dönüşümü** olarak adlandırılır.

Tanım 4.2.2.: $\forall x, y \in X$ için; $\sup \{a + b + g + 2d : x, y \in X\} < 1$ ve $d(Tx, Ty) \leq a d(x, y) + b d(x, Tx) + g d(y, Ty) + d[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$ olacak şekilde a, b, g ve d negatif olmayan sayıları varsa $T : X \rightarrow X$ dönüşümü **genelleştirilmiş büzülme dönüşümü** olarak adlandırılır.

Aşağıdaki teorem C. T. Aage ve J. N. Salunke [1] tarafından 2008 yılında dq-metrik uzaylarda Kannan tipi sabit nokta teoremine bir örnek olarak verilmiştir.

Teorem 4.2.3.: (X, d) bir tam dq-metrik uzay olsun. $\forall x, y \in X$ ve $0 \leq a < \frac{1}{2}$ için; $d(Tx, Ty) \leq a \{d(x, Tx) + d(y, Ty)\}$ eşitsizliğini sağlayan $T : X \rightarrow X$ sürekli dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: (x_n) , X 'de bir dizi olsun. $x_0 \in X$,

$T(x_0) = x_1, T(x_1) = x_2, \dots, T(x_n) = x_{n+1}, \dots$ olsun.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq a \{d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + d(x_n, Tx_n)\} \\ &\leq a \{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\} \end{aligned}$$

Dolayısıyla;

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \frac{a}{1-a} d(x_{n-1}, x_n) \\ &= l d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Burada $0 \leq l < 1$ ve $l = \frac{a}{1-a}$.

Benzer şekilde; $d(x_{n-1}, x_n) \leq l d(x_{n-2}, x_{n-1})$ ve $d(x_n, x_{n+1}) \leq l^2 d(x_{n-2}, x_{n-1})$. Böylece;

$d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$. Benzer olarak gösterebiliriz ki $d(x_{n+1}, x_n) \rightarrow 0$.

$n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ için;

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq l^n d(x_0, x_1) + l^{n+1} d(x_0, x_1) + \dots + l^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq (l^n + l^{n+1} + \dots + l^{m-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq l^n (1 + l + \dots + l^{m-n-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{l^n}{1-l} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

$0 \leq l < 1$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} l^n = 0$. Böylece $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$. Benzer şekilde $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla (x_n) dizisi X dq-metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

Yani (x_n) , bir $t_0 \in X$ noktasına dq-yakınsar. T sürekli olduğundan;
 $T(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = t_0$. Böylece $T(t_0) = t_0$ elde edilir. Yani T bir sabit noktaya sahiptir.

Teklik;

T 'nin bir sabit noktası x olsun. $d(x, x) = d(Tx, Tx) \leq a \{d(x, x), d(x, x)\}$ yani;
 $d(x, x) \leq 2a d(x, x)$. Buradan; $0 \leq 2a < 1$ ve $d(x, x) \geq 0$ olduğundan; $d(x, x) = 0$ elde edilir. Yani T 'nin bir sabit noktası x ise $d(x, x) = 0$ olur.

T 'nin iki farklı sabit noktası $x, y \in X$ olsun. Yani $Tx = x$ ve $Ty = y$.
 $d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq a \{d(x, x) + d(y, y)\}$
 $= 0$

Çünkü $d(x, x) = 0$ olduğundan $d(y, y) = 0$ olur. Böylece $d(x, y) \leq 0$ ve $d(x, y) \geq 0$ eşitsizliklerinden $d(x, y) = 0$ elde edilir. Benzer olarak $d(y, x) = 0$ bulunur ve $x = y$ elde edilir. Sonuç olarak T dönüşümünün sabit noktası tektir.

Teorem 4.2.4.: (X, d) bir tam dq -metrik uzay olsun. $T : X \rightarrow X$ bir sürekli genelleştirilmiş büzülme dönüşümü ise bu taktirde T 'nin bir tek sabit noktası vardır.

İspat: (x_n) , X 'de bir dizi ve $x_0 \in X$ için
 $T(x_0) = x_1, T(x_1) = x_2, \dots, T(x_n) = x_{n+1}, \dots$ olsun.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq a d(x_{n-1}, x_n) + b d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + g d(x_n, Tx_n) + d [d(x_{n-1}, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1})] \\ &= a d(x_{n-1}, x_n) + b d(x_{n-1}, x_n) + g d(x_n, x_{n+1}) + d [d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)] \\ &\leq a d(x_{n-1}, x_n) + b d(x_{n-1}, x_n) + g d(x_n, x_{n+1}) + d d(x_{n-1}, x_n) + d d(x_n, x_{n+1}) \end{aligned}$$

Bundan dolayı;

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \frac{a + b + d}{1 - (g + d)} d(x_{n-1}, x_n) \\ &= l d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Burada $l = \frac{a + b + d}{1 - (g + d)}$. Benzer şekilde; $d(x_{n-1}, x_n) \leq l d(x_{n-2}, x_{n-1})$ elde edilir. Bu yolla;

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq l^n d(x_0, x_1) . 0 \leq l < 1 \text{ olduğundan } n \rightarrow \infty \text{ iken } l^n \rightarrow 0 . \text{ Böylece} \\ d(x_n, x_{n+1}) &\rightarrow 0 . \end{aligned}$$

Benzer olarak gösterebiliriz ki $d(x_{n+1}, x_n) \rightarrow 0$.

$n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ için;

$$\begin{aligned}
 d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \mathbf{L} + d(x_{m-1}, x_m) \\
 &\leq l^n d(x_0, x_1) + l^{n+1} d(x_0, x_1) + \mathbf{L} + l^{m-1} d(x_0, x_1) \\
 &\leq (l^n + l^{n+1} + \mathbf{L} + l^{m-1}) d(x_0, x_1) \\
 &\leq l^n (1 + l + \mathbf{L} + l^{m-n-1}) d(x_0, x_1) \\
 &\leq \frac{l^n}{1-l} d(x_0, x_1)
 \end{aligned}$$

$0 \leq l < 1$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} l^n = 0$. Böylece $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$. Benzer şekilde $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla (x_n) dizisi X dq-metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. Yani (x_n) , bir $t_0 \in X$ noktasına dq-yakınsar. T sürekli olduğundan; $T(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = t_0$. Böylece $T(t_0) = t_0$ elde edilir. Yani T bir sabit noktaya sahiptir.

Teklik;

T dönüşümünün bir sabit noktası $x \in X$ ise

$$d(x, x) = d(Tx, Tx) \leq (a + b + g + 2d) d(x, x). \text{Buradan};$$

$0 \leq a + b + g + 2d < 1$ ve $d(x, x) \geq 0$ olduğundan $d(x, x) = 0$ elde edilir. Böylece T dönüşümünün bir $x \in X$ sabit noktası için $d(x, x) = 0$ olur.

T 'nin iki farklı sabit noktası $x, y \in X$ olsun. Yani $Tx = x$ ve $Ty = y$.

$$\begin{aligned}
 d(x, y) &= d(Tx, Ty) \leq a d(x, y) + b d(x, Tx) + g d(y, Ty) + d[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \\
 &= a d(x, y) + b d(x, x) + g d(y, y) + d[d(x, y) + d(y, x)] \\
 &= a d(x, y) + d[d(x, y) + d(y, x)]
 \end{aligned}$$

Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
 d(y, x) &\leq a d(y, x) + d[d(y, x) + d(x, y)] \\
 |d(x, y) - d(y, x)| &\leq a |d(x, y) - d(y, x)|
 \end{aligned}$$

elde edilir. $0 \leq a < 1$ olduğundan $d(x, y) = d(y, x)$. $d(x, y) \leq (a + 2d) d(x, y)$. Buradan;

$0 \leq a + 2d < 1$ olduğundan $x = y$ bulunur. Böylece T dönüşümünün sabit noktasının tek olduğu ispatlanmış olur.

Sonuç 4.2.5.: Teorem 4.2.4.' de $a = d = 0$ ve $b = g$ olarak alınırsa Teorem 4.2.3. elde edilir.

Teorem 4.2.6.: (X, d) bir tam dq-metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ sürekli bir dönüşüm olsun. T dönüşümü $\forall x, y \in X, a, b, g, d, m \geq 0$ ve $a + b + g + 4m < 1$ için

$$d(Tx, Ty) \leq a d(x, y) + b d(x, Tx) + g d(y, Ty) + d \frac{d(x, Tx) \cdot d(y, Ty)}{d(x, y)} + m \frac{d(x, Ty) \cdot d(y, Tx)}{d(x, y)} \quad (6)$$

şartını sağlasın. Bu taktirde T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: (x_n) , X de bir dizi ve $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun.

$$T(x_0) = x_1, T(x_1) = x_2, \mathbf{K}, T(x_n) = x_{n+1}, \mathbf{K}$$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, x_n) \\ &\leq a d(x_{n-1}, x_n) + b d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + g d(x_n, Tx_n) + d \frac{d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) \cdot d(x_n, Tx_n)}{d(x_{n-1}, x_n)} + m \frac{d(x_{n-1}, Tx_n) \cdot d(x_n, Tx_{n-1})}{d(x_{n-1}, x_n)} \\ &= a d(x_{n-1}, x_n) + b d(x_{n-1}, x_n) + g d(x_n, x_{n+1}) + d \frac{d(x_{n-1}, x_n) \cdot d(x_n, x_{n+1})}{d(x_{n-1}, x_n)} + m \frac{d(x_{n-1}, x_{n+1}) \cdot d(x_n, x_n)}{d(x_{n-1}, x_n)} \\ &\leq (a + b) d(x_{n-1}, x_n) + (g + d) d(x_n, x_{n+1}) + 2m d(x_{n-1}, x_{n+1}) \\ &\leq (a + b + 2m) d(x_{n-1}, x_n) + (g + d + 2m) d(x_n, x_{n+1}) \end{aligned}$$

Böylece,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{(a + b + 2m)}{1 - (g + d + 2m)} d(x_n, x_{n+1}) = l d(x_{n-1}, x_n) \text{ eşitsizliği elde edilir.}$$

Burada $l = \frac{(a + b + 2m)}{1 - (g + d + 2m)}$, $0 \leq l < 1$ ise $d(x_n, x_{n+1}) \leq l d(x_{n-1}, x_n)$ olur. Benzer şekilde;

$d(x_{n-1}, x_n) \leq l d(x_{n-2}, x_{n-1})$ ve $d(x_n, x_{n+1}) \leq l^2 d(x_{n-2}, x_{n-1})$ olduğu gösterilebilir. Bu şekilde işleme devam edilerek $d(x_n, x_{n+1}) \leq l^n d(x_0, x_1)$ genellemesine ulaşırız. $0 \leq l < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $l^n \rightarrow 0$ yani $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$. Benzer şekilde $n \rightarrow \infty$ için $d(x_{n+1}, x_n) \rightarrow 0$ bulunur.

$n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ için;

$$\begin{aligned}
 d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \mathbf{L} + d(x_{m-1}, x_m) \\
 &\leq l^n d(x_0, x_1) + l^{n+1} d(x_0, x_1) + \mathbf{L} + l^{m-1} d(x_0, x_1) \\
 &\leq (l^n + l^{n+1} + \mathbf{L} + l^{m-1}) d(x_0, x_1) \\
 &\leq l^n (1 + l + \mathbf{L} + l^{m-n-1}) d(x_0, x_1) \\
 &\leq \frac{l^n}{1-l} d(x_0, x_1)
 \end{aligned}$$

$0 \leq l < 1$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} l^n = 0$. Böylece $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$. Benzer şekilde $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla (x_n) dizisi X dq-metrik uzayında bir Cauchy dizisidir ve bir $k \in X$ noktasına dq-yakınsar. T sürekli olduğundan $T(k) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = k$. Böylece $T(k) = k$ elde edilir. Yani k , T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Teklik;

x ve y noktaları T dönüşümünün farklı iki sabit noktası olsun. Yani $Tx = x$ ve $Ty = y$. Bu taktirde (6) eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}
 d(x, y) &= d(Tx, Ty) \leq a d(x, y) + b d(x, x) + g d(y, y) + d \frac{d(x, x) \cdot d(y, y)}{d(x, y)} + m \frac{d(x, y) \cdot d(y, x)}{d(x, y)} \\
 &= a d(x, y) + b d(x, x) + g d(y, y) + d \frac{d(x, x) \cdot d(y, y)}{d(x, y)} + m d(y, x)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned}
 d(x, x) &= d(Tx, Tx) \leq a d(x, x) + b d(x, x) + g d(x, x) + d \frac{d(x, x) \cdot d(x, x)}{d(x, x)} + m \frac{d(x, x) \cdot d(x, x)}{d(x, x)} \\
 &= (a + b + g + d + m) d(x, x)
 \end{aligned}$$

yani $0 \leq a + b + g + d + m < 1$ ve $d(x, x) \geq 0$ olduğundan $d(x, x) = 0$ olur. Buradan x , T dönüşümünün sabit noktası olduğunda $d(x, x) = 0$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde y , T dönüşümünün sabit noktası olduğunda $d(y, y) = 0$ olduğu elde edilir.

x ve y noktaları T dönüşümünün farklı iki sabit noktası olduğundan; $d(x, y) \leq (a + m)d(x, y)$ olur ki $0 \leq a + m < 1$ ve $d(x, y) \geq 0$ olduğundan $d(x, y) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $d(y, x) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $x = y$ yani T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

B. K. Dass ve S. Gupta [13] ile B. E. Rhoades [30] tarafından tanımlanan metrik uzaylar üzerinde sürekli büzülme dönüşümleri için bazı sabit nokta teoremlerini A. Isufati [19] 2010 yılında dislocated metrik uzaylar üzerinde tanımlamıştır.

Teorem 4.2.7.: (X, d) bir tam dq -metrik uzay olsun. $\forall x, y \in X, a > 0, b > 0, a + b < 1$ için;

$$d(Tx, Ty) \leq a \frac{d(y, Ty)[1 + d(x, Tx)]}{1 + d(x, y)} + b d(x, y) \text{ şartını sağlayan } T : X \rightarrow X \text{ sürekli}$$

dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: (x_n) , X 'de bir dizi olsun. $x_0 \in X$ için $T(x_0) = x_1, T(x_1) = x_2, \mathbf{K}, T(x_n) = x_{n+1}, \mathbf{K}$ olsun.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq a \frac{d(x_n, Tx_n)[1 + d(x_{n-1}, Tx_{n-1})]}{1 + d(x_{n-1}, x_n)} + b d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq a \frac{d(x_n, x_{n+1})[1 + d(x_{n-1}, x_n)]}{1 + d(x_{n-1}, x_n)} + b d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Dolayısıyla;

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \frac{b}{1-a} d(x_{n-1}, x_n) \\ &= l d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Burada $l = \frac{b}{1-a}, 0 \leq l < 1$. Benzer şekilde; $d(x_{n-1}, x_n) \leq l d(x_{n-2}, x_{n-1})$

ve $d(x_n, x_{n+1}) \leq l^2 d(x_{n-2}, x_{n-1})$. Böylece; $d(x_n, x_{n+1}) \leq l^n d(x_1, x_0)$.

$n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ için;

$$\begin{aligned}
 d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \mathbf{L} + d(x_{m-1}, x_m) \\
 &\leq l^n d(x_0, x_1) + l^{n+1} d(x_0, x_1) + \mathbf{L} + l^{m-1} d(x_0, x_1) \\
 &\leq (l^n + l^{n+1} + \mathbf{L} + l^{m-1}) d(x_0, x_1) \\
 &\leq l^n (1 + l + \mathbf{L} + l^{m-n-1}) d(x_0, x_1) \\
 &\leq \frac{l^n}{1-l} d(x_0, x_1)
 \end{aligned}$$

$0 \leq l < 1$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} l^n = 0$. Böylece $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$. Benzer şekilde $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla (x_n) dizisi X dq-metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

Yani (x_n) , bir $t_0 \in X$ noktasına dq-yakınsar. T sürekli olduğundan; $T(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = t_0$. Böylece $T(t_0) = t_0$ elde edilir. Yani T bir sabit noktaya sahiptir.

Teklik;

T dönüşümünün bir sabit noktası $x \in X$ ise

$$d(x, x) = d(Tx, Tx) \leq (a + b) d(x, x). \text{ Buradan;}$$

$0 \leq a + b < 1$ ve $d(x, x) \geq 0$ olduğundan $d(x, x) = 0$ elde edilir. Böylece T dönüşümünün bir $x \in X$ sabit noktası için $d(x, x) = 0$ olur.

T dönüşümünün iki farklı sabit noktası $x, y \in X$ olsun. Yani $Tx = x$ ve $Ty = y$. $d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq b d(x, y)$. $0 \leq b < 1$ ve $d(x, y) \geq 0$ olduğundan $d(x, y) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde; $d(y, x) = 0$ ve buradan $x = y$ bulunur. Böylece T dönüşümünün sabit noktası tektir.

Teorem 4.2.8.: (X, d) bir tam dq-metrik uzay olsun.

$\forall x, y \in X$, $a, b, g > 0$, $\sup\{2a + 2b + g : x, y \in X\} < 1$ için;

$d(Tx, Ty) \leq a d(x, Ty) + b d(y, Tx) + g d(x, y)$ (7) şartını sağlayan $T : X \rightarrow X$ sürekli dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: (x_n) , X 'de bir dizi olsun. $x_0 \in X$ için

$T(x_0) = x_1, T(x_1) = x_2, \mathbf{K}, T(x_n) = x_{n+1}, \mathbf{K}$ olsun.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq a d(x_{n-1}, Tx_n) + b d(x_n, Tx_{n-1}) + g d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq a d(x_{n-1}, x_n) + a d(x_n, x_{n+1}) + b d(x_{n-1}, x_n) + b d(x_n, x_{n+1}) + g d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Dolayısıyla;

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{a+b+g}{1-(a+b)} d(x_{n-1}, x_n) = l d(x_{n-1}, x_n) \text{ burada } l = \frac{a+b+g}{1-(a+b)}. \text{ Benzer şekilde;}$$

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq l d(x_{n-2}, x_{n-1}) \quad \text{ve} \quad d(x_n, x_{n+1}) \leq l^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}). \quad \text{Böylece;}$$

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq l^n d(x_1, x_0) \text{ elde edilir.}$$

$n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ için;

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \mathbf{L} + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq l^n d(x_0, x_1) + l^{n+1} d(x_0, x_1) + \mathbf{L} + l^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq (l^n + l^{n+1} + \mathbf{L} + l^{m-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq l^n (1 + l + \mathbf{L} + l^{m-n-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{l^n}{1-l} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

$0 \leq l < 1$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} l^n = 0$. Böylece $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$. Benzer şekilde

$d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla (x_n) dizisi X dq-metrik uzayında bir

Cauchy dizisidir. Bu yüzden $x_n \rightarrow t_0$ olacak şekilde bir $t_0 \in X$ noktası vardır. T sürekli

olduğundan; $T(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = t_0$. Böylece $T(t_0) = t_0$ elde edilir. Yani T bir

sabit noktaya sahiptir.

Teklik;

$x \in X$ noktası T dönüşümünün bir sabit noktası olsun. Bu taktirde

$$d(x, x) = d(Tx, Tx) \leq (a + b + g) d(x, x). \text{ Buradan;}$$

$0 \leq a + b + g < 1$ ve $d(x, x) \geq 0$ olduğundan $d(x, x) = 0$ elde edilir. Böylece T dönüşümünün bir $x \in X$ sabit noktası için $d(x, x) = 0$ olur.

T 'nin iki farklı sabit noktası $x, y \in X$ olsun. Yani $Tx = x$ ve $Ty = y$. (7) eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(Tx, Ty) \leq a d(x, Ty) + b d(y, Tx) + g d(x, y) \\ &= a d(x, y) + b d(y, x) + g d(x, y) \\ &= (a + g) d(x, y) + b d(y, x) \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$d(y, x) \leq (a + g) d(y, x) + b d(x, y)$$

elde edilir. $|d(x, y) - d(y, x)| \leq [(a + g) - b] |d(x, y) - d(y, x)|$,

$0 \leq |(a + g) - b| < 1$ olduğundan $d(x, y) = d(y, x)$ elde edilir. Yine (7) eşitsizliğinden;

$$d(x, y) \leq (a + b + g) d(x, y) \quad \text{elde edilir. } 0 \leq a + b + g < 1 \quad \text{olduğundan} \quad d(x, y) = 0$$

bulunur. $d(x, y) = d(y, x) = 0$ olduğundan $x = y$ elde edilir. Böylece T dönüşümünün sabit noktası tektir.

D. S. Jaggi [20] tarafından 1977 de verilen bazı sabit nokta teoremleri, R. Shrivastava, Z. K. Ansari ve M. Sharma [32] tarafından 2012 yılında dislocated quasi metrik uzaylardaki karşılığı verilmiştir.

Teorem 4.2.9 : (X, d) bir tam dq-metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ sürekli bir dönüşüm olsun. T dönüşümü $\forall x, y \in X, a, b, g \geq 0$ ve $a + b + 2g + 2d < 1$ için

$$d(Tx, Ty) \leq a d(x, y) + b \frac{d(x, Tx) d(y, Ty)}{d(x, y)} + g [d(x, Tx) + d(y, Ty)] + d [d(x, Ty) + d(y, Tx)] \quad (8)$$

şartını sağlasın. Bu taktirde, T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: (x_n) , X de bir dizi ve $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun.

$$T(x_0) = x_1, T(x_1) = x_2, \mathbf{K}, T(x_n) = x_{n+1}, \mathbf{K}$$

(8) eşitsizliğinde $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ yerine konulursa

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\
&\leq ad(x_{n-1}, x_n) + \frac{bd(x_{n-1}, Tx_{n-1})d(x_n, Tx_n)}{d(x_{n-1}, x_n)} + g[d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + d(x_n, Tx_n)] + d[d(x_{n-1}, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1})] \\
&= ad(x_{n-1}, x_n) + \frac{bd(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1})}{d(x_{n-1}, x_n)} + g[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] + d[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)] \\
&= ad(x_{n-1}, x_n) + bd(x_n, x_{n+1}) + gd(x_{n-1}, x_n) + gd(x_n, x_{n+1}) + d[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)] \\
&\leq ad(x_{n-1}, x_n) + bd(x_n, x_{n+1}) + gd(x_{n-1}, x_n) + gd(x_n, x_{n+1}) + dd(x_{n-1}, x_n) + dd(x_n, x_{n+1}) \\
&\leq (a + g + d)d(x_{n-1}, x_n) + (b + g + d)d(x_n, x_{n+1})
\end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{a + g + d}{1 - (b + g + d)} d(x_{n-1}, x_n)$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_{n+1}) \leq l d(x_{n-1}, x_n) \quad (9)$$

$$\text{Burada } l = \frac{a + g + d}{1 - (b + g + d)} \text{ ve } 0 \leq l < 1 .$$

Benzer şekilde $d(x_{n-1}, x_n) \leq l d(x_{n-2}, x_{n-1})$ olduğunu da gösterebiliriz. (9)

eşitsizliğinden $d(x_n, x_{n+1}) \leq l^2 d(x_{n-2}, x_{n-1})$ elde ederiz. Bu yolla devam ederek,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq l^n d(x_0, x_1) \text{ elde ederiz.}$$

$n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ için;

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \mathbf{L} + d(x_{m-1}, x_m) \\
&\leq l^n d(x_0, x_1) + l^{n+1} d(x_0, x_1) + \mathbf{L} + l^{m-1} d(x_0, x_1) \\
&\leq (l^n + l^{n+1} + \mathbf{L} + l^{m-1}) d(x_0, x_1) \\
&\leq l^n (1 + l + \mathbf{L} + l^{m-n-1}) d(x_0, x_1) \\
&\leq \frac{l^n}{1-l} d(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

$0 \leq l < 1$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} l^n = 0$. Böylece $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$. Benzer şekilde

$d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla (x_n) dizisi X dq-metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

Böylece (x_n) dizisi X tam dq-metrik uzayında bir Cauchy dizisidir ve bir u noktasına dq-yakınsar. T sürekli olduğundan $T(u) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = u$. Böylece $T(u) = u$ elde edilir. Yani u , T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Teklik;

u , T dönüşümünün sabit noktası olsun. Yani $T(u) = u$. Bu taktirde (8) eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} d(u, u) &= d(Tu, Tu) \\ &\leq a d(u, u) + b d(u, u) + 2g d(u, u) + 2d d(u, u) \\ &\leq (a + b + 2g + 2d) d(u, u) \end{aligned}$$

$0 \leq a + b + 2g + 2d < 1$ olduğundan $d(u, u) = 0$ elde edilir. Buradan u , T dönüşümünün sabit noktası olduğunda $d(u, u) = 0$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde eğer v , T dönüşümünün bir sabit noktası ise $d(v, v) = 0$ elde edilir.

u ve v noktaları T dönüşümünün farklı iki sabit noktası olsun. Yani $Tu = u$ ve $Tv = v$. Bu taktirde (8) eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(Tu, Tv) \\ &\leq a d(u, v) + b \frac{d(u, v) + d(v, v)}{d(u, v)} + g [d(u, u) + d(v, v)] + d [d(u, v) + d(v, u)] \\ &= a d(u, v) + d [d(u, v) + d(v, u)] \end{aligned}$$

Benzer şekilde $d(v, u) = a d(v, u) + d [d(v, u) + d(u, v)]$. Böylece

$|d(u, v) - d(v, u)| \leq a |d(u, v) - d(v, u)|$ elde edilir. $0 < a < 1$ olduğundan $d(u, v) = d(v, u)$.

(8) eşitsizliğinden; $d(u, v) \leq (a + 2d) d(u, v)$, $0 \leq a + 2d < 1$ olduğundan $d(u, v) = 0$.

Sonuç olarak $d(u, v) = d(v, u) = 0$ olmasından $u = v$ bulunur. Böylece T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 4.2.10.: Yukarıda ifadesini ve ispatını verdiğimiz teoremden;

(1) $b = g = 0$ olarak alırsak A. Isufati [19] tarafından verilen Teorem 4.2.8. elde edilir.

(2) $b = 0$ olarak alırsak C. T. Aage ve J. Salunke [1] tarafından verilen Teorem 4.2.6. elde edilir.

C. T. Aage ve J. N. Salunke [1] tarafından verilen Teorem 4.2.3 ve A. Isufati [19] tarafından verilen Teorem 4.2.7 teoremleri K. P. R. Rao ve P. R. Swamy [29] tarafından 2011 yılında ispatlanan aşağıdaki teoremin bir sonucudur.

Teorem 4.2.11.: (X, d) bir tam dq-metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ sürekli bir dönüşüm ,

$y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\forall t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} y^n(t) < \infty$ monoton artmayan dönüşüm olsun. T

dönüşümü $\forall x, y \in X$ için

$d(Tx, Ty) \leq y (\max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Tx) \cdot d(y, Ty)}{d(x, y)}\})$ şartını sağlasın. Bu

taktirde T dönüşümü X dq-metrik uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: $\forall t > 0$ için $y(t) < t$. x_0, X de keyfi bir nokta olsun. $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \mathbf{K}$ dizisi tanımlansın. Eğer herhangi bir n için $x_{n+1} = x_n$ ise bu taktirde $Tx_n = x_n$. Böylece x_n, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Kabul edelim ki $\forall n$ için $x_{n+1} \neq x_n$ olsun.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq y (\max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_{n-1}, x_n) \cdot d(x_n, x_{n+1})}{d(x_{n-1}, x_n)}\}) \\ &= y (\max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}) \end{aligned}$$

Eğer $\max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\} = d(x_n, x_{n+1})$ ise bu taktirde

$d(x_n, x_{n+1}) \leq y (d(x_n, x_{n+1})) < d(x_n, x_{n+1})$. Fakat bu bir çelişkidir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) &\leq y(d(x_{n-1}, x_n)) \\
&\leq y^2(d(x_{n-2}, x_{n-1})) \\
&\vdots \\
&\leq y^n(d(x_0, x_1))
\end{aligned}$$

$n, m \in \mathbb{N}$ ve $n < m$ için;

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\
&\leq y^n(d(x_0, x_1)) + y^{n+1}(d(x_0, x_1)) + \dots + y^{m-1}(d(x_0, x_1)) \\
&\leq \sum_{i=n}^{m-1} y^i(d(x_0, x_1))
\end{aligned}$$

Buradan $n, m \rightarrow \infty$ iken $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$. Dolayısıyla (x_n) dizisi X tam dq-metrik uzayında bir Cauchy dizisidir ve bir u noktasına dq-yakınsar. T sürekli olduğundan $T(u) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = u$. Böylece $T(u) = u$ elde edilir. Yani u , T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Teklik;

Kabul edelim ki u ve v noktaları T dönüşümünün farklı iki sabit noktası olsun.

$$\begin{aligned}
d(u, v) &= d(Tu, Tv) \\
&\leq y(\max\{d(u, v), d(u, u), d(v, v), \frac{d(u, u)d(v, v)}{d(u, v)}\}) \quad (10)
\end{aligned}$$

(10)'da v yerine u koyarsak $d(u, u) \leq y(d(u, u)) < d(u, u)$. Buradan $d(u, u) = 0$ (11) elde edilir. Benzer şekilde $d(v, v) = 0$ (12) olduğuda gösterilebilir. Şimdi (10) eşitsizliğinden,

$$d(u, v) \leq y(d(u, v)) \text{ eşitsizliği elde edilir ki bu } d(u, v) = 0 \text{ (13) olmasını gerektirir.}$$

$$\begin{aligned}
d(v, u) &= d(Tv, Tu) \\
&\leq y(\max\{d(v, u), d(v, v), d(u, u), \frac{d(v, v)d(u, u)}{d(v, u)}\})
\end{aligned}$$

(11) ve (12) eşitsizlikleri kullanılarak;

$d(v, u) \leq y (d(v, u))$ eşitsizliği elde edilir ki bu $d(v, u) = 0$ (14) olmasını gerektirir.

Sonuç olarak (13) ve (14) eşitsizliklerinden $u = v$ elde edilir. Böylece u , T dönüşümünün tek sabit noktasıdır.

Rhoades [30] ve Dass ile Gupta [13] tarafından tanımlanan sürekli büzülme dönüşümleri için sabit nokta teoremlerini temel alan M. Sharma [31] dislocated quasi metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri üzerine çalışmıştır.

Teorem 4.2.12.: (X, d) bir tam dq-metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ sürekli bir dönüşüm olsun. T dönüşümü $\forall x, y \in X, a, b, g > 0$ ve $a + b + g < 1$ için

$$d(Tx, Ty) \leq a d(x, y) + b d(x, Tx) + g \frac{d(y, Ty)[1 + d(x, Ty) + d(y, Tx)]}{1 + d(x, y) + d(y, Ty)} \quad (15)$$

şartını sağlasın. Bu taktirde T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: (x_n) , X de bir dizi ve $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun.

$$T(x_0) = x_1, T(x_1) = x_2, \dots, T(x_n) = x_{n+1}, \dots$$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq a d(x_{n-1}, x_n) + b d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + g \frac{d(x_n, Tx_n)[1 + d(x_{n-1}, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1})]}{1 + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, Tx_n)} \\ &= a d(x_{n-1}, x_n) + b d(x_{n-1}, x_n) + g \frac{d(x_n, x_{n+1})[1 + d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)]}{1 + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})} \\ &= a d(x_{n-1}, x_n) + b d(x_{n-1}, x_n) + g \frac{d(x_n, x_{n+1})[1 + d(x_{n-1}, x_{n+1})]}{1 + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})} \\ &\leq a d(x_{n-1}, x_n) + b d(x_{n-1}, x_n) + g \frac{d(x_n, x_{n+1})[1 + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]}{1 + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})} \\ &= a d(x_{n-1}, x_n) + b d(x_{n-1}, x_n) + g d(x_n, x_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$(1-g)d(x_n, x_{n+1}) \leq (a+b)d(x_{n-1}, x_n)$$

Böylece,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{(a+b)}{(1-g)} d(x_{n-1}, x_n) \text{ eşitsizliği elde edilir.}$$

Burada $l = \frac{(a+b)}{(1-g)}$, $0 \leq l < 1$ ise $d(x_n, x_{n+1}) \leq l d(x_{n-1}, x_n)$ olur. Benzer şekilde;

$d(x_{n-1}, x_n) \leq l d(x_{n-2}, x_{n-1})$ ve $d(x_n, x_{n+1}) \leq l^2 d(x_{n-2}, x_{n-1})$ olduğu gösterilebilir. Bu şekilde işleme devam edilerek $d(x_n, x_{n+1}) \leq l^n d(x_0, x_1)$ genellemesine ulaşırız.

$n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ için;

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \mathbf{L} + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq l^n d(x_0, x_1) + l^{n+1} d(x_0, x_1) + \mathbf{L} + l^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq (l^n + l^{n+1} + \mathbf{L} + l^{m-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq l^n (1 + l + \mathbf{L} + l^{m-n-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{l^n}{1-l} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

$0 \leq l < 1$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} l^n = 0$. Böylece $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$. Benzer şekilde

$d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla (x_n) dizisi X dq-metrik uzayında bir Cauchy dizisidir ve bir z noktasına dq-yakınsar. T sürekli olduğundan $T(z) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = z$. Böylece $T(z) = z$ elde edilir. Yani z , T dönüşümünün sabit noktasıdır.

Teklik;

x , T dönüşümünün sabit noktası olsun. Yani $T(x) = x$. Bu taktirde (15) eşitsizliğinden

$$d(x, x) = d(Tx, Tx) \leq a d(x, x) + b d(x, x) + g \frac{d(x, x)[1 + d(x, x) + d(x, x)]}{1 + d(x, x) + d(x, x)} \text{ yani}$$

$d(x, x) \leq (a + b + g)d(x, x)$ $0 \leq a + b + g < 1$ ve $d(x, x) \geq 0$ olduğundan $d(x, x) = 0$ olur. Buradan x , T dönüşümünün sabit noktası olduğunda $d(x, x) = 0$ olduğu elde edilir.

x ve y noktaları T dönüşümünün farklı iki sabit noktası olsun. Yani $Tx = x$ ve $Ty = y$. Bu takdirde (15) eşitsizliğinden;

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq a d(x, y) + b d(x, x) + g \frac{d(y, y)[1 + d(x, y) + d(y, x)]}{1 + d(x, y) + d(y, y)}$$

bu yüzden $d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq a d(x, y)$ olur ki $0 \leq a < 1$ ve $d(x, y) \geq 0$ olduğundan $d(x, y) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $d(y, x) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $x = y$ yani T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

4.3 Dislocated Quasi Metrik Uzaylarda Coupled Sabit Nokta Teoremi

Bu bölümde 2013 yılında D. Akçay ve C. Alaca [5] tarafından dislocated quasi metrik uzaylarda coupled sabit nokta teoremi ispatlanmış, teoremi destekleyen bir sonuç ve örnek verilmiştir.

Tanım 4.3.1.: $F(x, y) = x$ ve $F(y, x) = y$ ise bir $(x, y) \in X \times X$ elemanına $F : X \times X \rightarrow X$ dönüşümünün bir **coupled sabit noktası** denir.

Tanım 4.3.2.: $F(x, y) = gx$ ve $F(y, x) = gy$ ise bir $(x, y) \in X \times X$ elemanına $F : X \times X \rightarrow X$ ve $g : X \rightarrow X$ dönüşümlerinin bir **coupled çakışmsı noktası** denir.

Tanım 4.3.3.: X boş olmayan bir küme olsun. $gF(x, y) = F(gx, gy)$ ise $F : X \times X \rightarrow X$ ve $g : X \rightarrow X$ dönüşümleri **değişmelidir**.

Lemma 4.3.4.: (X, d) bir dq-metrik uzay olsun. $\forall x, y, u, v \in X$ için;

$d(F(x, y), F(u, v)) \leq l[d(gx, gu) + d(gy, gv)]$ (16) olacak şekilde $F : X \times X \rightarrow X$ ve $g : X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. Kabul edelim ki; (x, y) , F ve g dönüşümlerinin bir coupled çakışmsı noktası olsun. $l \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ ise bu taktirde $F(x, y) = gx = gy = F(y, x)$.

İspat: (x, y) , F ve g dönüşümlerinin bir coupled çakışmsı noktası olduğundan; $F(x, y) = gx$ ve $F(y, x) = gy$. Kabul edelim ki $gx \neq gy$ olsun. Bu taktirde (16) ' dan;

$$d(gx, gy) = d(F(x, y), F(y, x)) \leq l[d(gx, gy) + d(gy, gx)]$$

$$d(gy, gx) = d(F(y, x), F(x, y)) \leq l[d(gy, gx) + d(gx, gy)]$$

Dolayısıyla;

$$d(gx, gy) + d(gy, gx) \leq 2l[d(gx, gy) + d(gy, gx)]$$

$2l < 1$ olduğundan; $d(gx, gy) + d(gy, gx) < d(gx, gy) + d(gy, gx)$ olur ki bu bir çelişkidir. Bu yüzden $gx = gy$ ve $F(x, y) = gx = gy = F(y, x)$ elde edilir.

Teorem 4.3.5 : (X, d) bir dq-metrik uzay olsun. $\forall x, y, u, v \in X$ için;

$d(F(x, y), F(u, v)) \leq l [d(gx, gu) + d(gy, gv)]$ (17) olacak şekilde $F : X \times X \rightarrow X$ ve $g : X \rightarrow X$ iki sürekli dönüşüm olsun. Kabul edelim ki F ve g dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın;

(i) $F(X \times X) \subseteq g(X)$

(ii) $g(X)$ bir tam dq-metrik uzaydır.

(iii) g, F ile değişmelidir.

$l \in (0, 1)$ ise bu taktirde $gx = F(x, x) = x$ olacak şekilde X 'de bir tek x noktası vardır.

İspat: $x_0, y_0 \in X$ olsun. (i) şartından dolayı $F(X \times X) \subseteq g(X)$ olduğundan; $gx_1 = F(x_0, y_0)$ ve $gy_1 = F(y_0, x_0)$ olacak şekilde $x_1, y_1 \in X$ seçebiliriz. Yine $F(X \times X) \subseteq g(X)$ olduğundan; $gx_2 = F(x_1, y_1)$ ve $gy_2 = F(y_1, x_1)$ olacak şekilde $x_2, y_2 \in X$ seçebiliriz. Bu işleme devam edilerek; $gx_{n+1} = F(x_n, y_n)$ ve $gy_{n+1} = F(y_n, x_n)$ olacak şekilde X 'de (x_n) ve (y_n) dizileri oluşturabiliriz. $\forall n \in \mathbb{N}$ için (17) eşitsizliğinden dolayı ,

$$\begin{aligned} d(gx_n, gx_{n+1}) &= d(F(x_{n-1}, y_{n-1}), F(x_n, y_n)) \\ &\leq l [d(gx_{n-1}, gx_n) + d(gy_{n-1}, gy_n)] \end{aligned}$$

elde ederiz. $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned} d(gx_{n-1}, gx_n) &= d(F(x_{n-2}, y_{n-2}), F(x_{n-1}, y_{n-1})) \\ &\leq l [d(gx_{n-2}, gx_{n-1}) + d(gy_{n-2}, gy_{n-1})] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d(gy_{n-1}, gy_n) &= d(F(y_{n-2}, x_{n-2}), F(y_{n-1}, x_{n-1})) \\ &\leq l [d(gy_{n-2}, gy_{n-1}) + d(gx_{n-2}, gx_{n-1})] \end{aligned}$$

olduğundan;

$$d(gx_{n-1}, gx_n) + d(gy_{n-1}, gy_n) \leq 2l [d(gx_{n-2}, gx_{n-1}) + d(gy_{n-2}, gy_{n-1})]$$

elde ederiz.

Böylece;

$$\begin{aligned} d(gx_n, gx_{n+1}) &\leq l [d(gx_{n-1}, gx_n) + d(gy_{n-1}, gy_n)] \\ &\leq 2l^2 [d(gx_{n-2}, gx_{n-1}) + d(gy_{n-2}, gy_{n-1})] \\ &\quad \vdots \\ &\leq \frac{1}{2} (2l)^n [d(gx_0, gx_1) + d(gy_0, gy_1)] \end{aligned}$$

Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$d(gx_n, gx_{n+1}) \leq \frac{1}{2} (2l)^n [d(gx_0, gx_1) + d(gy_0, gy_1)] \quad (18)$$

elde ederiz. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ olsun. Dq-metrik uzay tanımındaki (miv) aksiyomundan;

$$d(gx_n, gx_m) \leq d(gx_n, gx_{n+1}) + d(gx_{n+1}, gx_{n+2}) + \dots + d(gx_{m-1}, gx_m) .$$

$2l < 1$ ve (18) eşitsizliğinden dolayı;

$$\begin{aligned} d(gx_n, gx_m) &\leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=n}^{m-1} (2l)^i \right) [d(gx_0, gx_1) + d(gy_0, gy_1)] \\ &\leq \frac{(2l)^n}{2(1-2l)} [d(gx_0, gx_1) + d(gy_0, gy_1)] \end{aligned}$$

elde ederiz.

$m, n \rightarrow \infty$ iken $\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(gx_n, gx_m) = 0$ olur. Böylece (gx_n) , $g(X)$ 'de bir Cauchy dizisidir.

Benzer şekilde (gy_n) , $g(X)$ 'de bir Cauchy dizisidir. $g(X)$ tam dq-metrik uzay olduğundan (gx_n) ve (gy_n) sırasıyla $x \in X$ ve $y \in X$ noktalarına dq-yakınsar. F ve g sürekli ve değişmeli olduğundan; $ggx_{n+1} = g(F(x_n, y_n)) = F(gx_n, gy_n)$ ve $ggy_{n+1} = g(F(y_n, x_n)) = F(gy_n, gx_n)$.

Bu nedenle;

$$gx = g(\lim_{n \rightarrow \infty} gx_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(F(x_{n-1}, y_{n-1})) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(gx_{n-1}, gy_{n-1}) = F(\lim_{n \rightarrow \infty} gx_{n-1}, \lim_{n \rightarrow \infty} gy_{n-1}) = F(x, y)$$

Sonuç olarak $gx = F(x, y)$ elde edilir. Benzer şekilde $gy = F(y, x)$ elde edilir.

Dolayısıyla (x, y) , F ve g dönüşümlerinin bir coupled çakışımı noktasıdır.

Lemma 4.3.4' den, $gx = F(x, y) = F(y, x) = gy$.

(gx_{n+1}) , (gx_n) ' in alt dizisi olduğundan (gx_{n+1}) dizisi x noktasına dq-yakınsaktır.

Böylece;

$$d(gx_{n+1}, gx) = d(gx_{n+1}, F(x, y)) = d(F(x_n, y_n), F(x, y)) \leq l [d(gx_n, gx) + d(gy_n, gy)]$$

$n \rightarrow \infty$ iken d 'nin sürekli olması kullanılarak, $d(x, gx) \leq l [d(x, gx) + d(y, gy)]$ elde edilir. Benzer şekilde; $d(y, gy) \leq l [d(x, gx) + d(y, gy)]$ gösterilebilir. Bundan dolayı;

$$d(x, gx) + d(y, gy) \leq 2l [d(x, gx) + d(y, gy)] \text{ elde edilir. } 2l < 1 \text{ olduğundan, son}$$

eşitsizlikte $d(x, gx) = 0$ ve $d(y, gy) = 0$ olur. Benzer şekilde;

$$d(gx, gx_{n+1}) = d(F(x, y), gx_{n+1}) = d(F(x, y), F(x_n, y_n)) \leq l [d(gx, gx_n) + d(gy, gy_n)]$$

$n \rightarrow \infty$ iken d 'nin sürekli olması kullanılarak, $d(gx, x) \leq l [d(gx, x) + d(gy, y)]$ elde edilir. Benzer şekilde;

$$d(gy, y) \leq l [d(gx, x) + d(gy, y)] \text{ gösterilebilir. Bundan dolayı;}$$

$$d(gx, x) + d(gy, y) \leq 2l [d(gx, x) + d(gy, y)] \text{ elde edilir. } 2l < 1 \text{ olduğundan, son}$$

eşitsizlikte $d(gx, x) = 0$ ve $d(gy, y) = 0$ olur. Dq-metrik uzay tanımı (mii) aksiyomundan; $x = gx$ ve $y = gy$ elde edilir. Böylece; $gx = F(x, x) = x$.

Teklik;

$z = gz = F(z, z)$ olacak şekilde $z \in X$ ve $z \neq x$ olsun. Bu taktirde;

$$d(x, z) = d(F(x, x), F(z, z)) \leq l [d(gx, gz) + d(gx, gz)] = 2l d(gx, gz).$$

$2l < 1$ olduğundan, $d(x, z) < d(x, z)$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Böylece F ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 4.3.6.: (X, d) bir tam dq-metrik uzay olsun. $\forall x, y, u, v \in X$ için;

$$d(F(x, y), F(u, v)) \leq l [d(x, u) + d(y, v)] \text{ olacak şekilde } F : X \times X \rightarrow X \text{ sürekli bir}$$

dönüşüm olsun. $l \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ ise bu taktirde $F(x, x) = x$ olacak şekilde X 'de bir tek x noktası vardır.

İspat: $g : X \rightarrow X$, $g(x) = x$ ile tanımlansın. Bu taktirde F ve g teoremin bütün hipotezlerini sağlar. Dolayısıyla sonuç elde edilir.

Örnek 4.3.7.: $X = [0,1]$ olsun. $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$, $\forall x, y \in X$ için; $d(x, y) = |x - y| + |x|$ ile tanımlansın. Bu taktirde (X, d) bir tam dq-metrik uzaydır. $F : X \times X \rightarrow X$, $\forall x, y \in X$ için $F(x, y) = \frac{1}{6}xy$ ile tanımlansın. Ayrıca $g : X \rightarrow X$, $\forall x \in X$ için

$$g(x) = \frac{1}{2}x \text{ ile tanımlansın. } \forall x, y, u, v \in X ;$$

$|xy - uv| \leq |x - u| + |y - v|$ ve $|xy| \leq |x| + |y|$ olduğundan;

$$d(F(x, y), F(u, v)) = \frac{1}{6}|xy - uv| + \frac{1}{6}|xy| \leq \frac{1}{6}[|x - u| + |y - v|] + \frac{1}{6}[|x| + |y|] \leq \frac{1}{3}[d(gx, gu) + d(gy, gv)]$$

elde edilir. Dolayısıyla F ve g 'nin teoremin bütün hipotezlerini sağladığı görülür.

Böylece F ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir. Bu nokta $F(0, 0) = g(0) = 0$ 'dır.

SONUÇLAR VE BULGULAR

Bu tez çalışmamızda, dislocated quasi-metrik uzaylarda yeni bir coupled sabit nokta teoremi ispatlanmış ve bunun bazı sonuçları verilerek, ana teoremi destekleyen bir örnek sunulmuştur. Böylece bu alanda yeni bir yaklaşım ortaya koyulmuştur. Bu alanda çalışmak isteyen araştırmacılar, bu uzayda yeni bir takım sabit nokta teoremleri nasıl verilebilir üzerine çalışabilir. Ayrıca, Alaca, Turkoglu ve Yıldız [6], Efe, Alaca ve Yıldız [14] ve Alaca [7, 8] makalelerinden faydalanarak dislocated metrik uzayların sırasıyla sezgisel fuzzy metrik uzaylarda, fuzzy multi-(çoklu) metrik uzaylarda ve fuzzy Banach uzaylardaki karşılıkları araştırılarak yeni birtakım tanım ve sabit nokta sonuçlarına ulaşılabilir.

REFERANSLAR

1. C. T. Aage and J. N. Salunke. The results on fixed points in dislocated and dislocated quasi-metric space. *Appl. Math. Sci.* , **2(59)**, (2008), 2941-2948.
2. C. T. Aage and J. N. Salunke, Some Results of Fixed Point Theorem in Dislocated Quasi-Metric Spaces, *Bull. Marathwada Math. Soc.* , **9(2)**,(2008),1-5.
3. S. Abramsky, A. Jung, Domain theory in Handbook of logic in Computer Science, **3**,(1994), New York Oxford Univ.
4. M. A. Ahmed, F. M. Zeyada, G. F. Hassan, Fixed point theorems in generalized Types of dislocated metric spaces and its applications, *Thai Journal of Mathematics*, 2012 In Press.
5. D. Akcay, C. Alaca, Coupled Fixed Point Theorems in Dislocated Quasi-metric Spaces, *Journal of Advanced Studies in Topology*, **4(1)**, (2013), 66-72.
6. C. Alaca, D. Turkoglu, C. Yildiz, Fixed points in intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitons & Fractals* **29(5)**, (2006) 1073-1078.
7. C. Alaca, Banach contraction mapping principle for satisfying a general contractive condition of integral type in dislocated fuzzy metric spaces, *Bull. Pure Appl. Math.*, **4 (2)**, (2010) 258-265.
8. C. Alaca, Fixed point results for mappings satisfying a general contractive condition of operator type in dislocated fuzzy quasi-metric spaces, *J. Comput. Anal. Appl.*, **12 (1-b)**, (2010), 361-368.
9. T. Başkan, O. Bizim, I. N. Cangül, Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş, Ankara, 2006, 2. Basım, ISBN : 9789944770033
- 10.B. S. Choudhury, A. Kundu, A coupled coincidence point result in partially ordered metric spaces for compatible mappings, *Nonlinear Analysis*, **73(8)**, (2010), 2524-2531.
- 11.L. B. Ćirić , A generalization of Banach's contraction principle, *Amer. Math. Soc.*, **45(2)**, (1974), 267-273.
- 12.R. D. Daheriya, R. Jain and M. Ughade, Some fixed point theorem for expansive type mapping in dislocated metric space, *International Scholarly Research Network ISRN Mathematical Analysis* **2012**, Article ID 376832.

13. B. K. Dass and S. Gupta, "An extension of Banach contraction principle through rational expression," *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **6(12)**, (1975), 1455–1458.
14. H. Efe, C. Alaca and C. Yildiz, Fuzzy multi-metric spaces, *J. Comput. Anal. Appl.* **10**, (2008), 367-375.
15. R. George and M. S. Khan, Dislocated fuzzy metric spaces and associated fuzzy topologies, *Proceedings of the 8th Joint Conference on Information Sciences*, July 21-26, Salt Lake city, Utah, USA, (2005), 20-24.
16. R. George, Some fixed point results in dislocated fuzzy metric spaces, *Journal of Advanced Studies in Topology*, **3(4)**, (2012), 41-52.
17. P. Hitzler, Generalized metrics topology in logic programming semantics, PhD. dissertation, National University of Ireland, University College Cork, 2001.
18. P. Hitzler, A. K. Seda, Dislocated topologies, *J. Electr. Engin.* **51**, (2000), 3-7.
19. A. Isufati. Fixed point theorems in dislocated quasi-metric space. *Appl. Math.Sci.*, **4(5)**, (2010), 217-223.
20. D. S. Jaggi, Some unique fixed point theorems, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **8(2)**, (1977), 223-230.
21. K. Jha, D. Panthi, A common fixed point theorem in dislocated metric spaces, *Applied Mathematical Sciences*, **6(91)**, (2012), 4497-4503.
22. G. Jungck and B. E. Rhoades, Fixed Points For Set Valued Functions without Continuity, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **29(3)**, (1998), 227-238.
23. R. Kannan, Some Results on fixed points, *Bull. Cal. Math. Soc.*, **60**, (1965), 71-76.
24. P.S. Kumari, On dislocated quasi-metrics, *Journal of Advanced Studies in Topology*, **3(2)**, (2012) 66-74.
25. V. Lakshmikantham, L. Ćirić, Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces, *Nonlinear Analysis*, **70** (2009), 4341-4349.
26. S. G. Matthews, Metric domains for completeness, Ph.D. Thesis, Dept. Comput. Sci., University of Warwick, UK, (1986), 1-127.
27. S. G. Matthews, The Topology of Partial Metric Spaces, Research Report 222, Dept. of Computer Science, University of Warwick, UK, (1992), 1-19.
28. S. G. Matthews, The Cycle Contraction Mapping Theorem, Research Report 228, Dept. of Computer Science, University of Warwick, UK, (1992), 1-16.

29. K. P. R. Rao, P. R. Swamy, Common Fixed Point Theorem for Four Mappings in Dislocated Quasi-metric Space, *The Nepali Math. Sci. Report*, **30** (1-2), (2010), 70-75.
30. B. E. Rhoades, "A comparison of various definitions of contractive mappings," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. **226**, (1977), 257–290.
31. M. Sharma, Fixed Point Theorems in Dislocated Quasi Metric space, *South Asian Journal of Mathematics*, **2(2)**, (2012), 162-166.
32. R. Shrivastava, Z. K. Ansari, M. Sharma, Some results on fixed points in dislocated quasi-metric spaces, *Journal of Advanced Studies in Topology*, **3(1)**, (2012), 25-31.
33. S. K. Vats, Weakly Compatible Maps in Metric Spaces, *J. Indian Math.Soc.*, **69** (1-4), (2002), 139-143.
34. C. Yildiz, Genel Topoloji, Gazi Kitapevi, Ankara, 2005, 3. Basım, ISBN : 9789758895809
35. F. M. Zeyada, G. H. Hassan, and M. A. Ahmed, A Generalization of a fixed point theorem due to Hitzler and Seda in dislocated quasi-metric spaces, *The Arabian Journal for science and engineering*, Vol. **31**, (2005), 111-114.
36. F. M. Zeyada, M. R. Moubarak and A. H. Soliman, A generalization of generalized Banach fixed-point theorem in a weak left small self-distance space, *Miskolc Mathematical Notes*, **8**, (2007) 99-105.
37. K. Zoto, E. Hoxha, Fixed point theorems in dislocated and dislocated quasi-metric spaces, *Journal of Advanced Studies in Topology*, **3(4)**, (2012) 119-124.
38. K. Zoto, E. Hoxha, A. Isufati, Some New Results in Dislocated and Dislocated Quasi Metric Spaces, **6**, (2012), 3519-3526.

ÖZGEÇMİŞ

ADI SOYADI : Duygu AKÇAY
ÜNVANI : Matematik Öğretmeni
DOĞUM TARİHİ : 01.01.1990
DOĞUM YERİ : Bursa

İlköğrenimini Bursa' da Namazgah İhsan Dikmen İlköğretim Okulunda, lise öğrenimini Özel Melike Pınar Lisesinde tamamladı. 2010-2011 Öğretim yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2011-2012 Öğretim yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansa başladı. 2012-2013 Öğretim yılında İstanbul' un Çatalca ilçesinde matematik öğretmenliği görevine başladı. Halen yüksek lisans eğitimine devam etmekte ve Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.