

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DOĞRU EKSENLİ ÇUBUKLARIN KARIŞIK SONLU ELEMANLAR
YÖNTEMİ İLE BOYUNA TİTREŞİM ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Safiye ECER

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

MAYIS 2015

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DOĞRU EKSENLİ ÇUBUKLARIN KARIŞIK SONLU ELEMANLAR
YÖNTEMİ İLE BOYUNA TİTREŞİM ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Safiye ECER
(501111061)**

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Fethi KADIOĞLU

MAYIS 2015

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 501111061 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Safiye ECER**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**DOĞRU EKSENLİ ÇUBUKLARIN KARIŞIK SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE BOYUNA TİTREŞİM ANALİZİ**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Fethi KADIOĞLU**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Reha ARTAN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Zafer KÜTÜĞ
Yıldız Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **4 Mayıs 2015**
Savunma Tarihi : **28 Mayıs 2015**

Eşime ve Aileme,

ÖNSÖZ

Öncelikle yüksek lisans öğrenimim boyunca kıymetli zamanını, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan ve her konuda bana yol gösteren danışmanım Doç. Dr. Fethi Kadioğlu'na sonsuz teşekkürler.

İkinci olarak hayatımın her anında yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen annem Hüsniye Ergün ve babam Mehmet Ergün'e ve ayrıca bana benden çok inanan ve yüksek lisansımı tamamlayabilmem için elinden gelen her şeyi yapan sevgili eşim Alper Ecer'e minnettarlığımı bildiririm.

Tezim ile ilgili her türlü konuda bana yardım eden arkadaşım Gülçin Tekin'e ve son olarak çalışmalarım sırasında ihtiyacım olan zamanı bana sağlayan Türk Standardları Enstitüsü yöneticilerine, sayım müdürüm Bahri Hüsrev ve birim arkadaşlarıma teşekkürü borç bilirim.

Mayıs 2015

Safiye Ecer
(İnşaat Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xv
ÖZET.....	xvii
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ	1
1.1 Çalışmanın Amacı Ve Kapsamı	2
1.2 Konu İle İlgili Yapılan Çalışmalar	2
2. ÇUBUK KAVRAMI VE BOYUNA TİTREŞİM	5
2.1 Çubuk Kavramı	5
2.2 Çubuklarda Boyuna Titreşim	5
2.3 Çubuğun Titreşim Frekansının Elde Edilmesi	8
2.3.1 Farklı sınır koşullarına sahip sisteme ait titreşim frekansları	8
2.4 Temel Denklemlerin Elde Edilmesi	10
3. FONKSİYONEL ANALİZ.....	13
3.1 Diferansiyel Denklemlerden Fonksiyonele Geçiş.....	13
3.1.1 Potansiyellik koşulu	13
3.1.2 Yönsel toplam (İç çarpım)	13
3.1.3 Yönsel türev (Gâteaux türevi).....	14
3.2 Fonksiyonelin Elde Edilmesi	15
4. SONLU ELEMAN FORMULASYONU.....	17
4.1 Sonlu Eleman Yöntemi	17
4.2 Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemi	17
4.2.1 I_1 fonksiyoneli için eleman matrisi	20
4.2.2 I_2 fonksiyoneli için eleman matrisi	21
5. DİNAMİK ANALİZ	25
6. SAYISAL ÖRNEKLER	27
6.1 Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Sabit Kesitli Çubuk.....	27
6.2 Her İki Ucu Ankastre Bağlı Sabit Kesitli Çubuk	27
6.3 Bir Ucu Ankastre Bağlı Diğer Ucu Serbest Lineer Değişken Kesitli Çubuk... 28	
6.4 Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Parabolik Değişken Kesitli Çubuk	29
6.5 Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Ani Değişken Kesitli Çubuk.....	30
6.6 Bir Ucu Ankastre Diğer Ucunda Yay Bulunan Sabit Kesitli Çubuk	30
7. SONUÇLAR	33
KAYNAKLAR	35
EKLER.....	37
ÖZGEÇMİŞ.....	39

KISALTMALAR

A	: Kesit Alanı
F	: Sisteme Etkiyen Toplam Yük
I(u)	: Fonksiyonel
L	: Türev Operatörü
L_e	: Çubuk Eleman Boyu
N	: Normal Kuvvet
Q	: Operatör
U	: Yer Değiştirme
ω	: Titreşim Frekansı
ε	: Şekil Değiştirme
σ	: Gerilme
Ψ_i, Ψ_j	: Şekil Fonksiyonları
Φ	: Fonksiyon
E	: Elastisite Modülü
ρ	: Malzeme Yoğunluğu
[M]	: Kütle Matrisi
[K]	: Rijitlik Matrisi
[C]	: Sönüm Katsayısı Matrisi
μ	: Çubuğun Birim Uzunluğunun Kütlesi
k	: Yay Sabiti

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 6.1 : Bir ucu ankastre diğer ucu serbest sabit kesitli çubuk için titreşim frekansı.....	27
Çizelge 6.2 : Her iki ucu ankastre bağlı sabit kesitli çubuk için titreşim frekansı. ...	28
Çizelge 6.3 : Bir ucu ankastre bağlı diğer ucu serbest lineer değişen kesitli çubuğa ait titreşim frekansı.	29
Çizelge 6.4 : Bir ucu ankastre diğer ucu serbest parabolik değişen kesitli çubuğa ait titreşim frekansı	29
Çizelge 6.5 : Bir ucu ankastre diğer ucu serbest ani değişen kesitli çubuğa ait titreşim frekansı.	30
Çizelge 6.6 : Bir ucu ankastre diğer ucunda yay bulunan sabit kesitli çubuğa ait titreşim frekansı..	31

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Çubuk elemanlarının gösterimi	5
Şekil 2.2 : Doğru eksenli çubuk ve x, y, z koordinatları.	5
Şekil 2.3 : dz çubuk parçası üzerine etkiyen kuvvetler..	6
Şekil 4.1 : Sonlu eleman yönteminde eleman ve nodlar.....	17
Şekil 4.2 : Doğrusal şekil fonksiyonları	18
Şekil 6.1 : Bir ucu ankastre bağlı diğer ucu serbest lineer değişken kesitli çubuk....	28
Şekil 6.2 : Bir ucu ankastre bağlı diğer ucu serbest parabolik değişken kesitli çubuk.....	29
Şekil 6.3 : Bir ucu ankastre diğer ucu serbest ani değişken kesitli çubuk	30
Şekil 6.4 : Bir ucu ankastre diğer ucunda yay bulunan sabit kesitli çubuk	30

DOĞRU EKSENLİ ÇUBUKLARIN KARIŞIK SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE BOYUNA TİTREŞİM ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmada Gâteaux türevi ve fonksiyonel analiz ile farklı sınır koşullarına sahip elastik çubuklara ait boyuna titreşim hareketi incelenmiştir. Burada değişik sınır koşulları ve değişik en kesitlere sahip doğru eksenli çubuk sistemler ele alınmış ve çubuk eksenine paralel doğrultudaki doğal frekanslar elde edilmiştir. Gâteaux diferansiyel yöntemi ile fonksiyoneller elde edilerek yer değiştirmelerin yanında normal kuvvetlerin de bulunduğu karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Karışık sonlu eleman yöntemi ile iki düğüm noktalı doğru eksenli çubuk eleman üzerinde eleman matrisleri elde edilmiş ve bulunan sonuçların doğruluğunu kontrol etmek için de literatürde konu ile ilgili yapılan çalışmalar incelenerek sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Bu çalışma toplam 7 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde titreşim hareketi hakkında genel bilgiler verilmiş ve ardından çalışmanın amacı ve kapsamı üzerinde durulmuştur. Ayrıca literatürde konu ile ilgili yapılan çalışmaların bir kısmı hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde çubuk kavramı ve boyuna titreşim hareketi hakkında temel bilgiler verilmiş olup analiz sırasında kullanılacak olan temel denklemler elde edilmiştir. Ayrıca farklı sınır koşullarına sahip sistemlere ait titreşim frekansları elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, ikinci bölümde elde edilen temel denklemler operatör formda yazılarak potansiyellik koşulunu sağladığı gösterilmiştir. Daha sonra Gâteaux türevi yöntemi ile çubukların boyuna titreşim hareketine ait ilgili fonksiyoneller elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde karışık sonlu elemanlar yöntemi ile ilgili genel bilgilere değinilmiş ve probleme uygun doğrusal şekil fonksiyonları seçilmiştir. Daha sonra bu şekil fonksiyonları mevcut fonksiyonellere uygulanarak her iki fonksiyonel için de eleman matrisleri ayrı ayrı elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise, çubuklara ait boyuna titreşimlerin doğal frekansları ele alınmıştır. Bu çalışmada kullanılan Gâteaux türevi yöntemine bağlı olarak geliştirilen formülasyonun dinamik problemler için geçerliliği gösterilip problem öz değer-öz vektör problemine dönüştürülmüştür.

Altıncı bölümde elde edilen eleman matrisi ile farklı sınır koşullarına ve farklı kesit özelliklerine sahip çubuklar üzerinde sayısal olarak boyuna titreşim frekansları elde edilmiş ve literatürde daha önce elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Yedinci ve son bölümde bu çalışma ile elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

LONGITUDINAL VIBRATION ANALYSIS OF STRAIGHT BARS USING MIXED FINITE ELEMENT METHOD

SUMMARY

In this study, the longitudinal vibration movements of elastic bars have been investigated using the Gâteaux differential method and the functional analysis method with different boundary conditions. Bars with straight axis and variable cross-section have been investigated and the natural frequencies have been obtained. By obtaining the functionals by using Gâteaux differential the mixed finite element method have been used. In the mixed finite element method beside replacements the normal forces also have been used. By the mixed finite element method the element matrices have been obtained on two-nodded straight axis bar and for the verifying the obtained numeric results, the similar works in the literature were scanned and their results compared.

This work includes 7 chapters.

In first chapter, some general information on the vibration movement and kinds of vibration have been explained. Then the aim and the scope of the study have been clarified. The method of obtaining the frequencies by using Gâteaux derivative and mixed finite element method have been mentioned. In addition to those the studies have been told and some studies from 1881 to the present day have been analyzed and the results have been compared. There are a lot of informations about vibrations in the literature.

On 1881 the frequency equation of fixed-spring ended and fixed-mass ended straight bar have been obtained.

In the study on 1989 the eigenvalue solution have been obtained of fixedviscous damped straight bar.

Then on 1991, the longitudinal vibration frequency of bars with variable cross-section. The results have been compared with the results that have been found by using finite element method

In the year 1996, the longitudinal vibrations were investigated those caused by the sudden tension forces applied to a prismatic bar which is one sidely fixed to a spring.

In the work realized in 1997, some exact solutions for the longitudinal vibrations of non-uniform bars were obtained.

In the year 2000, some exact solutions for the free longitudinal vibrations of the varying cross sectional bars were obtained.

The longitudinal vibration movement of bars with variable cross-section have been studied on 2011. The frequency equations for different boundary conditions have been obtained by using variational methods.

In the study on 2012 the longitudinal vibration movement of viscous damped bars for both ends have been studied.

On 2013 the longitudinal vibration movement of viscous damped bars for both ends have been studied with Fourier series solution.

The second chapter contains essential information on bars and longitudinal vibration movements. The basic equations to be used in the analysis have been obtained in this chapter. By using the appropriate boundary conditions, the natural longitudinal vibration frequencies of straight bars have been obtained. For this process the both ends are fixed bar and one end is free-one end is fixed straight bars have been used.

In the third chapter the equations obtained in second chapter have been written in operator form and it has been shown that they provide the necessary potentiality condition. The equation has been expressed with Q operator. To be a potential operator for the Q operator, the sum of all functions have been derivated from this function must be equal to this function. Then the functionals of longitudinal vibration movements of bars have been obtained with the Gâteaux derivative method. In the equation have been written for obtaining the functional, there are two unknowns, normal force and displacements. I_1 functional have been with applying the partial derivatives of normal force and I_2 functional have been with applying the partial derivatives of displacements.

In the fourth chapter, general information about mixed finite elements method and the areas where the method is used have been told. The linear shape functions suitable for the problem and for the method have been chosen. Then, these linear shape functions have been transformed to the proper state by using some derivation transactions and they have been applied to the existing functionals and elements matrixes have been obtained for both functionals.

Fifth chapter explains the natural frequencies of the longitudinal vibrations of the bars. It is shown that the formula obtained from the Gâteaux derivation used in this work is also valid for the dynamic problems. Then the problem was transformed into an eigen value, eigen vector problem.

In the sixth chapter by using the elements matrix obtained, the longitudinal vibration frequencies on the bars of different boundary conditions have been obtained and the numerical results have been given.

In the first example, a fixed-free ended constant cross-section straight bar have been divided by 1,2,5,10,25,50 pieces and then the natural longitudinal vibration have been obtained. Then the results have been compared with the exact result and the literature.

In the second example, a fixed-fixed ended constant cross-section straight bar have been divided by 1,2,5,10,25,50 pieces and then the natural longitudinal vibration have been obtained. Then the results have been compared with literature and the exact result.

In the third example, a fixed-free ended linearly variable cross-section straight bar have been divided by 1,2,5,10,25,50 pieces and then the natural longitudinal vibration have been obtained. Then the results have been compared with the exact result and the literature.

In the fourth example, a fixed-free ended parabolic variable cross-section straight bar have been divided by 1,2,5,10,25,50 pieces and then the natural longitudinal vibration have been obtained. Then the results have been compared with literature and the exact result.

In the fifth example, a fixed-free end discontinuous variable cross-section straight bar have been divided by 3 pieces and then the natural longitudinal vibration have been obtained. Then the results have been compared with literature.

In the sixth example, a fixed-spring end constant cross-section straight bar have been used. The bar has been divided into 10, 20, 40 pieces and different spring coefficients have been used between 0 and infinite. Then the results have been compared with literature.

On the seventh (and the last) chapter explains the results of this study.

1. GİRİŞ

Kirişler, kolonlar gibi herhangi bir elastik sistem denge konumundayken sisteme herhangi bir kuvvet etki ettirilmesi veya sistem bir kuvvet etkisindeyken bu kuvvetin kaldırılması durumunda, dengede olan elastik kuvvetler denge konumundan uzaklaşacak ve bunun sonucunda titreşim hareketi meydana gelecektir [1].

Titreşimler yaklaşık bin yıldır deprem, okyanus dalgaları vb... doğal olayların yapılar üzerindeki etkilerinden dolayı araştırılmaktadır. Ancak yalnızca bir yüzyıllık kısa bir zamandan beri matematiksel olarak incelenmektedir [2].

1930'lu yılların başlarında titreşimler ile ilgili yapılan ilk çalışmalar binaların depremler esnasında gösterdikleri davranışların geliştirilmesi üzerine yapılmıştır [3].

Titreşim hareketi, yapılar üzerinde sürekli veya süreksiz bir dinamik etki oluşturur. Yapılara etkiyen deprem yükleri, trenlerin raylar üzerinde yaptığı etki, taşıtların yollar üzerindeki etkisi dinamik yüklere birer örnektir. Yapı üzerine etkiyen aynı şiddetteki bir dinamik yük, statik yükten daha fazla etkiye sahiptir. Dolayısı ile bir yapının projelendirilmesi sırasında, dinamik yüklerin de etkisinin araştırılıp yapının bu yüklere göre tasarlanması zorunludur.

Titreşim hareketi genel olarak 3 grupta incelenmektedir:

1. Sisteme etkiyen dış yükün varlığına göre: Zorlanmış Titreşim ve Serbest Titreşim
2. Sistemde sönüm olup olmasına göre: Sönümlü Titreşim ve Sönümsüz Titreşim
3. Eleman davranışlarına göre: Titreşimin lineer veya nonlineer olması

Üzerinde titreşim hareketinin incelendiği sistemler sürekli sistemler (sonsuz serbestlik dereceli) ve ayrık sistemler (tek serbestlik dereceli ve çok serbestlik dereceli) olarak ikiye ayrılabilirler.

Burada sistemin serbestlik derecesi ile anlatılmak istenen, sistemin tüm parçalarının konumlarının belirli olabilmesi için gereken, birbirinden bağımsız en az koordinat sayısıdır.

Ayrıca titreşim hareketi, hareketin yönüne göre enine titreşim, boyuna titreşim ve burulma olarak incelenmektedir [4].

1.1 Çalışmanın Amacı Ve Kapsamı

Bu çalışmada doğru eksenli elastik çubukların boyuna titreşim analizi incelenmiştir. Öncelikle inceleme sırasında çubuk kavramı ve çubuklara ait temel titreşim denklemleri ele alınmıştır. Bu denklemlerden yola çıkılarak titreşim frekansının hesaplanabilmesi için kullanılacak olan denklemler elde edilmiş ve potansiyellik koşulu sağlatılmıştır. Ardından bu denklemlere Gâteaux türevi uygulanmış ve çubukta meydana gelen boyuna titreşim hareketine ait fonksiyoneller elde edilmiştir. Fonksiyoneller üzerinde bilinmeyenler yerine sonlu elemanlar yöntemi ile doğrusal şekil fonksiyonlarına bağlı fonksiyonlar konulmuş ve gerekli matematiksel işlemler sonucunda ilgili eleman matrisleri elde edilmiştir.

Elde edilen eleman matrisleri kullanılarak farklı sınır koşullarına bağlı titreşim frekansları elde edilmiştir. Yukarıda bahsedilen iki farklı fonksiyonele ait frekanslar elde edilerek karşılaştırılmış ve her iki fonksiyonelden elde edilen frekansların aynı olduğu görülmüştür.

Titreşim frekanslarının, nod sayısına bağlı olarak satır ve sütun sayısı artan eleman matrisleri ile hesaplanması dolayısı ile çok sayıda nod sayısı bulunan sistemlerin çözülebilmesi esnasında karşılaşılan işlem fazlalığı ve işlem hatası ihtimalinin ortadan kaldırılabilmesi için Fortran isimli programlama dili kullanılarak bir program yazılmıştır. Hazırlanan program ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması için literatürde yer alan örnekler kullanılmıştır.

1.2 Konu İle İlgili Yapılan Çalışmalar

Çubukların boyuna titreşimleri ile ilgili temel bilgileri literatürde ve birçok kitapta bulmak mümkündür.

R.E.D. Bishop ve D.C. Johnson [5], S. Timoshenko [6], B. Rayleigh ve J. W. Strutt [7] tarafından yazılan kitaplarda boyuna titreşim ile ilgili ayrıntılı bilgiler mevcuttur.

Literatürde tarafımızdan yapılan inceleme sonrasında boyuna titreşim üzerine aşağıdaki çalışmalara ulaşılmıştır:

R. Kohoutek [8] tarafından 1881 yılında ucunda kütle veya yay bulunan homojen çubuğun serbest boyuna frekans denklemi çıkarılmıştır.

R. Singh, W. M. Lyons ve G. Prater [9] tarafından 1989 yılında bir ucu ankastre diğer ucu viskoz sönümlü çubuğun boyuna titreşiminin karmaşık özdeğer çözümü elde edilmiştir. Bunun için bir özdeğer çözümü geliştirilmiş, sonuçlar sınır sönüm değerlerindeki davranışlar incelenerek ve sürekli sistemler ile ayırık sistemlerin modal parametreleri geniş bir sönüm aralığında karşılaştırarak doğrulanmıştır.

M. Eisenberger [10] tarafından 1991 yılında değişken kesitli çubuklarda titreşim frekansı incelenmiştir. Bunun için eksenel rijitliğin bulunduğu yerde kesin çözüm kullanılmıştır. Değişken kesitli elemanların doğal frekansları rijitlikleri sıfıra eşit olan elemanların rijitlikleri gibidir. Bulunan sonuçlar sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar ile karşılaştırmıştır.

A. J. Hull [11] tarafından 1994 yılında tekil yüke maruz viskoz sınır koşullarına sahip çubukların boyuna titreşimlerinin kapalı form çözümleri elde edilmiştir. Bu çalışmada kirişin uzay-zaman modlarını ayırabilen yeni bir seri çözümü formüle edilmiştir ve sonuçlar sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak bulunan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

C. A. Rossit, D. V. Bambill ve P. A. A. Laura [12] tarafından 1996 yılında bir ucu yay ile bağlı prizmatik çubuğa ani çekme kuvveti uygulandığında oluşan boyuna titreşimler incelenmiştir. Bu çalışmada problemin analitik çözümü bir boyutlu klasik dalga yaklaşımı kullanılarak verilmiştir.

B. M. Kumar ve R. I. Sujith [13] tarafından 1997’de yapılan çalışmada üniform olmayan çubukların boyuna titreşimleri için kesin çözümler elde edilmiştir. Uygun dönüşümler kullanılarak, değişken kesitli çubuğun eksenel titreşimine ait hareket denklemi, spesifik alan değişimlerine bağlı olan çözülebilir diferansiyel denklemlere indirgenerek sonuçlar elde edilmiştir. Çeşitli sınır koşullarına ait üniform olmayan çubukların doğal frekans denklemleri elde edilmiştir.

B. Yardımoğlu [14] 2010’da referans [13]’de bulunan iki ucu serbest çubuğun frekans denklemindeki hatayı düzelterek doğru frekans denklemini elde etmiştir.

Q. S. Li [15] tarafından 2000 yılında yapılan çalışmada sürekli değişen kesite sahip çubukların boyuna serbest titreşimleri için kesin çözümleri elde edilmiştir. Bu çalışmada uygun fonksiyon dönüşümleri kullanılarak probleme ait karmaşık diferansiyel denklemler analitik olarak çözülebilir diferansiyel denklemlere dönüştürülmüştür. Normalizasyon şartlarını sağlayan temel çözümler çubuklar için klasik ve klasik olmayan sınır koşullarının frekans denklemlerini kurmak için türetilmiş ve kullanılmıştır. Sonuçlar sonlu elemanlar metodu ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Yine aynı sene Q. S. Li [16] tarafından kesitleri ani değişen çubukların parçalı analitik çözümüne dayalı serbest boyuna titreşimleri incelenmiştir.

Z. Girgin, E. Demir ve C. Kol [17] tarafından 2004 yılında genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu ile bir ucu ankastre diğer ucu serbest çubuğun boyuna titreşim frekansı elde edilmiştir. Bulunan frekans denklemi ile çubuğu çeşitli sayıda parçaya bölünerek elde edilen sonuçları karşılaştırılmıştır.

B. Yardımoğlu ve L. Aydın [18] tarafından 2011 yılında değişken kesitli çubukların boyuna titreşim karakteristikleri üzerine bir çalışma yapılmıştır. Bu çalışmada değişken kesitli çubukların doğal boyuna titreşim frekansları dönüşüm metodlarına dayalı diferansiyel hareket denklemlerinin kesin çözümünden elde edilmiştir. Çeşitli sınır koşulları için frekans denklemleri bulunmuş ve literatürdeki çeşitli en kesitlere sahip çubukların frekansları ile karşılaştırılmıştır.

F. E. Udwadia [19] tarafından 2012’de yapılan çalışmada her iki ucunda viskoz sönüm bulunan çubukların boyuna hareketi incelenmiştir. Ayrıca V. Jovanovic [20] tarafından 2013 yılında her iki ucu viskoz sınır koşullarına sahip çubuğun boyuna titreşimleri için genelleştirilmiş Fourier serisi çözümü üzerine çalışma yapılmıştır. Elde edilen seri çözümü çeşitli sınır koşullarına sahip çubuklar üzerinde gösterilmiş ve çalışmada sayısal örneklere yer verilmiştir.

2. ÇUBUK KAVRAMI VE BOYUNA TİTREŞİM

2.1 Çubuk Kavramı

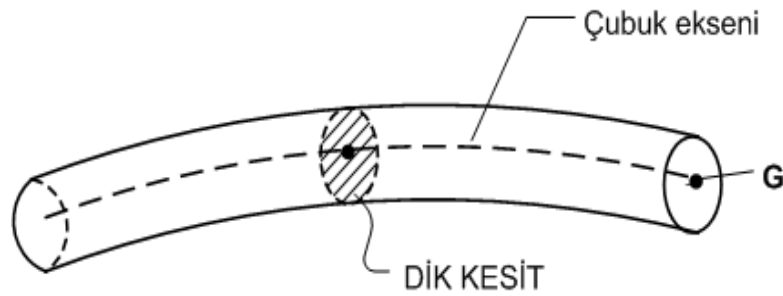
Çubuklar, en ve yükseklikleri boylarına göre çok küçük olan, bir boyutlu cisimlerdir. Yapılarda bulunan kolon, kiriş gibi taşıyıcı elemanlar çubuk olarak kabul edilebilirler.

Çubukların belirli olabilmesi için çubuğa ait eksen ve dik kesit unsurlarının bilinmesi gereklidir. Eksen, çubuğun boyunu temsil eden uzay eğrisidir. Dik kesit ise kapalı bir eğri ile çevrelenmiş ve merkezinden geçen doğru eksene paralel olan düzlem parçasıdır [21].

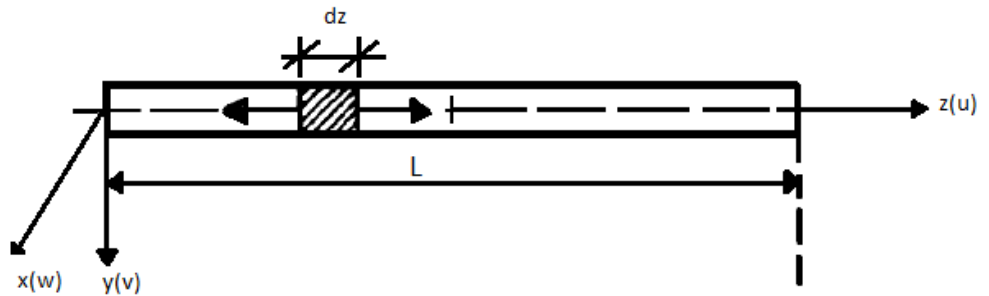
Çubuklar kesitlerine göre sabit kesitli ve değişken kesitli, eksenlerine göre ise doğru eksenli ve eğri eksenli olarak sınıflandırılırlar.

Bu çalışmada doğru eksenli ve değişken kesitli çubuklardaki boyuna titreşim hareketi incelenmiştir.

2.2 Çubuklarda Boyuna Titreşim

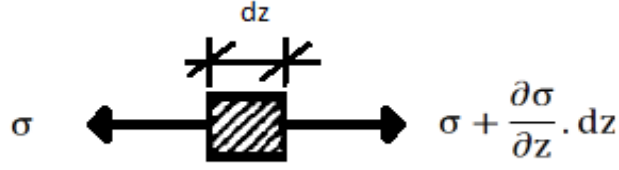


Şekil 2.1 : Çubuk elemanlarının gösterimi.



Şekil 2.2 : Doğru eksenli çubuk ve x , y , z koordinatları.

Şekil 2.2’de verilen çubuk üzerinde dz boyunda bir parça incelenecek olursa cisim üzerinde oluşan kuvvetler aşağıdaki şekilde gösterilir:



Şekil 2.3 : dz çubuk parçası üzerine etkiyen kuvvetler.

Cisme z ekseninde N kuvveti uygulanırsa dik kesitte meydana gelen gerilme:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2.1)$$

şeklindedir. Ayrıca elastik cisimlerin gerilme-şekil değiştirmesi arasındaki ilişki Hooke yasasına göre:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.2)$$

denklemleri ifade edilir.

Denklem (2.2)’de geçen ε , cisimde meydana gelen birim uzamandır ve matematiksel olarak;

$$\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.3)$$

şeklinde gösterilebilir.

Denklem (2.1), denklem (2.2) ve denklem (2.3)’den çubuğa uygulanan kuvvet;

$$N = E \cdot A \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.4)$$

halini alır.

Dinamik problemlerde yer değiştirmeler zamana bağlı olduğundan kütleli atalet kuvvetleri oluşmaktadır. Bundan dolayı problemin kuvvet ve yer değiştirme parametreleri de zamana bağlı olarak ortaya çıkar.

Sistemin hareket denklemleri elde edilirken Newton'un Hareket Yasaları'ndan 2. yasaya göre m kütleli bir cisme etkiyen F kuvveti, doğrusal momentumdaki değişime eşittir [22].

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \cdot (m \cdot \dot{U}) \quad (2.5)$$

Burada $\dot{U}$ sistemin hızı olup U yer değiştirmesinin zamana göre birinci türevidir.

Sonuç olarak;

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2 U}{dt^2} \quad (2.6)$$

elde edilir.

Şekil 2.3'deki sisteme etkiyen kuvvetler üzerinde denge yazılırsa;

$$\left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot A - \sigma \cdot A + qz \cdot A \cdot dz = \rho \cdot A \cdot dz \cdot \ddot{u} \quad (2.7)$$

elde edilir. Denklem (2.7)'de geçen A cismin eksenine dik yüzey alanı ve ρ cismin birim kütleini ifade etmektedir.

Denklem (2.7)'de gerekli sadeleştirmeler yapılır ve hacim kuvvetleri ihmal edilirse denklem;

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

olarak bulunur.

Denklem (2.8)'de σ yerine denklem (2.2) ve denklem (2.3)'den yararlanarak bir kere türevi alındıktan sonra yerine konulduğunda

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

olur.

Eğer $\sqrt{\frac{E}{\rho}} = C_0$ denilirse, denklem (2.9)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{C_0} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

şeklini alır.

2.3 Çubuğun Titreşim Frekansının Elde Edilmesi

Elde edilen denklem (2.10) hem zamana hem yer değiştirmeye bağlıdır. Değişkenlere ayırmayı düşünerek;

$$U(z, t) = \emptyset(z)T(t) \quad (2.11)$$

$$U(z, t) = \emptyset(z) \cdot \sin(\omega t + \delta) \quad (2.12)$$

şeklinde bir çözüm önerilirse denklem (2.12) denklem (2.10)'da yerine konulduğunda;

$$C_0^2 \emptyset''(z) + \omega^2 \emptyset(z) = 0 \quad (2.13)$$

elde edilir.

Buradan $\emptyset(z)$ fonksiyonu;

$$\emptyset(z) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{C_0} z\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{C_0} z\right) \quad (2.14)$$

olarak bulunur. Burada C_1 ve C_2 sabitleri sınır koşullarından yararlanılarak bulunur.

2.3.1 Farklı sınır koşullarına sahip sisteme ait titreşim frekansları

Denklem (2.14) kullanılarak farklı sınır koşullarına sahip sistemin titreşim frekanslarını elde edelim:

1) Her iki ucu ankastre çubuk:

Her iki ucu ankastre bağlı olan L uzunluğundaki bir sistemde z doğrultusunda yer değiştirmeler 0 olacağından;

$$\emptyset(0) = \emptyset(L) = 0 \quad (2.15)$$

Dolayısı ile denklem (2.14)

$$\emptyset(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \quad (2.16)$$

olur. Buradan $C_1 = 0$ bulunur. Diğer ucundaki sınır koşulu da 0'dır.

Buna göre;

$$\sin\left(\frac{\omega}{C_0} L\right) = 0 \quad (2.17)$$

şeklinde frekans denklemi elde edilir. Bu frekans denkleminde ait sonsuz sayıda frekans vardır. Denklemin n. frekansı:

$$\frac{\omega \cdot L}{C_0} = n \cdot \pi \quad (2.18)$$

$$\omega_n = \frac{n \cdot \pi}{L} \cdot C_0 \quad (2.19)$$

$$\omega_n = \frac{n \cdot \pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.20)$$

olarak elde edilir.

2) Bir ucu ankastre diğer ucu boş çubuk:

Bir ucu ankastre bağlı ve diğer ucu serbest olan L uzunluğundaki sistemin ankastre bağlı ucunda z doğrultusunda yer değiştirmeler sıfır ve serbest ucunda normal kuvvet sıfır olacağından sınır koşulları

$$\emptyset(0) = 0 \quad \text{ve} \quad \emptyset'(L) = 0 \quad (2.21)$$

şeklinde yazılabilir.

Dolayısı ile

$$\emptyset(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \quad (2.22)$$

olur.

Buradan $C_1 = 0$ bulunur. Ayrıca sistemin boş ucuna ait normal kuvvet sıfır olacağından;

$$\emptyset'(L) = 0 + C_2 \frac{\omega}{C_0} \cos \frac{\omega}{C_0} \cdot L = 0 \quad (2.23)$$

sistemin frekans denklemi:

$$\cos \left(\frac{\omega}{C_0} \cdot L \right) = 0 \quad (2.24)$$

şeklinde elde edilir.

Sistemin n. frekansı:

$$\omega_n = \frac{(2n - 1)}{2} \cdot \frac{\pi}{L} \cdot C_0 \quad (2.25)$$

$$\omega_n = \frac{(2n - 1)}{2} \cdot \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.26)$$

olarak elde edilir.

2.4 Temel Denklemlerin Elde Edilmesi

Denklem (2.8), alan üzerinde integre edildiğinde normal kuvvet cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (2.27)$$

(2.27) denklemi zaman ve yer değiştirmeye bağlı denklem olduğundan, çözüm kolaylığı sağlanabilmesi için zamana bağlı değişkenlerin denklemlerden yok edilmesi gerekmektedir.

Yer değiştirme ve normal kuvvet

$$U(z, t) = u \cdot e^{i\omega t} \quad (2.28)$$

$$N(z, t) = N \cdot e^{i\omega t} \quad (2.29)$$

şeklinde yazılabilirler.

(2.4) ve (2.27) denklemlerinde yerlerine yerleştirilirse denklemler aşağıdaki hale gelir:

$$-\frac{\partial u}{\partial z} \cdot e^{i\omega t} + \frac{N}{E \cdot A} \cdot e^{i\omega t} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} \cdot e^{i\omega t} + \rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot u \cdot e^{i\omega t} = 0 \quad (2.31)$$

Her iki denklem $e^{i\omega t}$ parantezine alınır ise parantezin iinin sıfıra eşit olması gerekir.

Böylece aşağıdaki temel denklemler elde edilmiş olur:

$$\rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot u + \frac{\partial N}{\partial z} = 0 \quad (2.32)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{N}{E \cdot A} = 0 \quad (2.33)$$

3. FONKSİYONEL ANALİZ

Karmaşık sınır koşullarına sahip diferansiyel deklemlerin çözülmesi her zaman kolay olmamaktadır. Bu tür zorluklarla karşılaşıldığı takdirde yaklaşık çözüm yöntemlerinden yararlanılmaktadır. Bu çalışmada yaklaşık sayısal çözüm yöntemlerinden biri olan “Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemi” kullanılmıştır.

3.1 Diferansiyel Denklemlerden Fonksiyonele Geçiş

3.1.1 Potansiyellik koşulu

Alan denklemleri operatör formda $Q=Lu-f$ olarak gösterilmektedir. Burada L türev operatörünü, u bilinmeyenleri ve f dış yükleri temsil etmektedir. Q operatörünün potansiyel bir fonksiyon olabilmesi için bu fonksiyondan türetilen tüm diğer fonksiyonların toplamının yine bu fonksiyona eşit olması gerekmektedir.

Yukarıdaki ifadenin matematiksel olarak gösterimi;

$$\langle dQ(u, \bar{u}), u^* \rangle = \langle dQ(u, u^*), \bar{u} \rangle \quad (3.1)$$

şeklindedir.

Bu gösterime göre Q operatörünün $\bar{u}$ yönüne göre türevinin u^* yönündeki türevi, o operatörün u^* yönüne göre türevinin $\bar{u}$ yönüne göre türevine eşittir. Bu denklemin yazılabilmesi için yönsel toplamı (iç çarpım) ve yönsel türevi (Gâteaux türevi) tanımlamak gerekmektedir.

3.1.2 Yönsel toplam (İç çarpım)

Bir fonksiyon ile bir değişkenin çarpımının belirli bir aralıktaki integraline iç çarpım denir. Yukarıda $\langle, \rangle$ gösterimi iç çarpımı ifade eder ve aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$[f, g] = \int_a^b f \cdot g \cdot dz \quad (3.2)$$

3.1.3 Yönsel türev (Gâteaux türevi)

η bir skaler olmak üzere Gateaux türevinin matematiksel gösterimi aşağıdaki şekildedir:

$$dQ(u, \bar{u}) = \frac{\partial Q(u + \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \quad (3.3)$$

Temel denklemler;

$$\frac{\partial N}{\partial z} + \rho A \omega^2 u = 0 \Leftrightarrow u \quad (3.4)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{N}{EA} = 0 \Leftrightarrow N \quad (3.5)$$

şeklinde olup bu temel denklemler sınır koşullarını da içerecek şekilde matris formda yazılacak olursa:

$$\begin{bmatrix} \rho A \omega^2 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ N \\ \hat{u} \\ \hat{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hat{N} \\ \hat{u} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Denklem (3.1)'e göre Q operatörünün $\bar{u}$ yönündeki türevinin u^* yönündeki türevi

$$\begin{aligned} \langle dQ(u, \bar{u}), u^* \rangle &= \rho A \omega^2 [\bar{u}, u^*] + [\bar{N}', u^*] - [\bar{u}', N^*] + \left[\frac{\bar{N}}{EA}, N^* \right] \\ &\quad - [\bar{N}, u^*]_{\sigma} + [\bar{u}, N^*]_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Q operatörünün u^* yönündeki türevinin $\bar{u}$ yönündeki türevi

$$\begin{aligned} \langle dQ(u, u^*), \bar{u} \rangle &= \rho A \omega^2 [u^*, \bar{u}] + [N^*, \bar{u}] - [\bar{u}', \bar{N}] + \left[\frac{N^*}{EA}, \bar{N} \right] \\ &\quad - [N^*, \bar{u}]_{\sigma} + [\bar{u}, \bar{N}]_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.8)$$

şeklinde elde edilir.

Gerekli sadeleştirmeler yapıлып denklem (3.7)'ye kısmi türev uygulandığında aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} \langle dQ(u, \bar{u}), u^* \rangle &= \rho A \omega^2 [\bar{u}, u^*] + [\bar{N}', u^*]_0 - [\bar{N}, u^{*'}] - [\bar{u}, N^*]_0 + [\bar{u}, N^*] \\ &+ \left[\frac{\bar{N}}{EA}, N^* \right] - [\bar{N}, u^*]_\sigma + [\bar{u}, N^*]_\varepsilon \end{aligned} \quad (3.9)$$

Denklem (3.9)'daki 0 indisi geometrik ve dinamik sınır koşullarının toplamını, her iki denklemde bulunan σ indisi dinamik ve ε indisi geometrik sınır koşullarını ifade eder. Sınır koşulları açılarak yazılırsa:

$$\begin{aligned} [\bar{N}u^*]_\sigma + [\bar{N}, u^*]_\varepsilon - [\bar{u}, N^*]_\sigma - [\bar{u}, N^*]_\varepsilon - [\bar{N}, u^*]_\sigma + [\bar{u}, N^*]_\varepsilon \\ = -[N^*, \bar{u}]_\sigma + [u^*, \bar{N}]_\varepsilon \end{aligned} \quad (3.10)$$

ifadesi elde edilir ve Q operatörü (3.1) koşulunu sağladığından dolayı Q, potansiyel bir operatördür.

3.2 Fonksiyonelin Elde Edilmesi

Bölüm 3.1'de Q operatörünün potansiyel olduğu ispat edilmiştir. Oden ve Reddy [23] tarafından verilen alan denklemlerine ait fonksiyonel:

$$I(u) = \int_0^1 \langle Q(su, u), u \rangle ds \quad (3.11)$$

ifadesi kullanılarak elde edilir. Bu denklemde “s” skaler bir büyüklüktür.

Denklem (3.11), matris formunda yazılacak olunursa

$$I(u) = \int_0^1 \left\{ \begin{bmatrix} \rho A \omega^2 & \frac{d}{dz} & 0 & 0 \\ -\frac{d}{dz} & \frac{1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} su \\ sN \\ su \\ sN \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hat{N} \\ \hat{u} \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} u \\ N \\ u \\ N \end{Bmatrix} ds \quad (3.12)$$

elde edilir.

Denklem (3.11) uygulandığında fonksiyonel

$$I(u) = \int_0^1 \left\{ \begin{aligned} &spA\omega^2 uu + sN'u - su'N + \frac{s}{EA}NN \\ &-sNu_\sigma + suN_\varepsilon + \hat{N}u_\sigma - \hat{u}N_\varepsilon \end{aligned} \right\} ds \quad (3.13)$$

haline gelir.

Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$I(u) = \frac{1}{2} \rho A \omega^2 [u, u] + \frac{1}{2} [N' u] - \frac{1}{2} [u', N] + \frac{1}{2EA} [N, N] - \frac{1}{2} [N, u]_\sigma + \frac{1}{2} [u, N]_\varepsilon + [\hat{N}, u]_\sigma - [\hat{u}, N]_\varepsilon \quad (3.14)$$

elde edilir.

Denklem (3.14)'de bulunan normal kuvvet (N) üzerinde kısmi türev uygulandığında

$$I_1 = \frac{1}{2} \rho A \omega^2 [u, u] - [N, u'] + \frac{1}{2EA} [N, N] + [u, N]_\varepsilon + [\hat{N}, u]_\sigma - [\hat{u}, N]_\varepsilon \quad (3.15)$$

elde edilir. Denklemdeki son üç terim sınır koşullarıdır.

Aynı şekilde denklem (3.14)'de boyuna uzama (u) üzerine kısmi türev uygulanırsa

$$I_2 = \frac{1}{2} \rho A \omega^2 [u, u] + [N', u] + \frac{1}{2EA} [N, N] - [u, N]_\sigma + [\hat{N}, u]_\sigma - [\hat{u}, N]_\varepsilon \quad (3.16)$$

elde edilir. Denklem (3.15) ve (3.16)'daki son üç terim sınır koşullarıdır.

4. SONLU ELEMEN FORMULASYONU

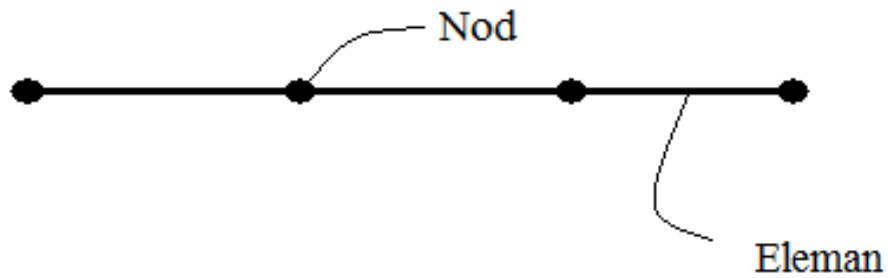
4.1 Sonlu Eleman Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi basitçe, çözümünü aranan büyük bir elemanı, geometrisi belli daha küçük parçalara bölerek hesaplama yöntemidir. Bu yöntem bir, iki veya üç boyutlu parçalara uygulanabilir. Sonlu elemanlar yöntemi günümüzde hemen hemen mühendisliğin tüm alanlarında kullanılmaktadır. Mekanik problemleri, akışkanlar mekaniği, uzay ve uçak mühendisliği, otomotiv mühendisliği, inşaat mühendisliği vb.

4.2 Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemi

Klasik sonlu elemanlar yönteminde bilinmeyenler yalnızca yer değiştirmelerdir. Yer değiştirmeler bulunarak diğer büyüklükler bu yer değiştirmeler yardımıyla elde edilmektedir. Karışık sonlu elemanlar yönteminde ise tüm büyüklükler bilinmeyen olarak alınır ve denklem takımları tüm bilinmeyen değerleri içerecek şekilde oluşturulur [24,25].

Sonlu elemanlar yönteminde çözüm bölgesi, sonlu sayıda alt bölgelere ayrılır. Bu alt bölgelere eleman adı verilir. Elemanlar nod (düğüm) denilen sınır noktaları ile birbirlerine birleşirler.

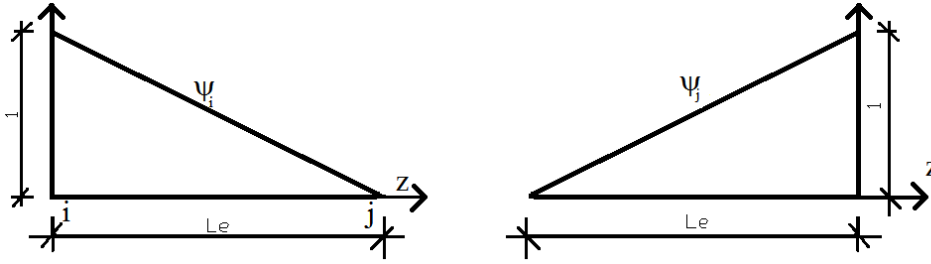


Şekil 4.1 : Sonlu eleman yönteminde eleman ve nodlar.

Bölgenin alt bölgelere ayrılmasından sonra bilinmeyen değişkeni karakterize eden sürekli bir fonksiyon seçilir. Bu fonksiyona şekil fonksiyonu adı verilir. Şekil fonksiyonu nodlardaki değeri cinsinden ifade edilir [26]. Doğrusal şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$\emptyset^e = a_1^e + a_2^e z \quad (4.1)$$

a_1 ve a_2 bulunması gereken sabitlerdir.



Şekil 4.2 : Doğrusal şekil fonksiyonları.

Bu sabitlerin bulunabilmesi için şekil fonksiyonunun i ve j noktasındaki değerleri yazılır:

$$\emptyset_i = a_1 + a_2 z_i \quad z = z_i \quad (4.2)$$

$$\emptyset_j = a_1 + a_2 z_j \quad z = z_j \quad (4.3)$$

L^e eleman boyunu belirtmek üzere:

$$L^e = z_j - z_i \quad (4.4)$$

şeklindedir. Bu iki denklemden;

$$a_1 = \frac{z_i \emptyset_j - z_j \emptyset_i}{z_i z_j} \quad (4.5)$$

$$a_2 = \frac{\emptyset_i - \emptyset_j}{z_i z_j} \quad (4.6)$$

bulunur.

a_1 ve a_2 yerine yerleştirilirse

$$\phi^e = \left(\frac{z_j - z}{z_j - z_i} \right) \phi_i + \left(\frac{z - z_i}{z_j - z_i} \right) \phi_j \quad (4.7)$$

elde edilir.

$$\Psi_i = \frac{z_j - z}{z_j - z_i} = \frac{z_j - z}{L_e} \quad (4.8)$$

$$\Psi_j = \frac{z - z_i}{z_j - z_i} = \frac{z - z_i}{L_e} \quad (4.9)$$

ile gösterilirse:

$$\phi^{(e)} = \Psi_i^{(e)} \phi_i + \Psi_j^{(e)} \phi_j \quad (4.10)$$

elde edilir. Burada denklemlerinin bir kez türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \Psi_i' &= -\frac{1}{L_e} \\ \Psi_j' &= \frac{1}{L_e} \end{aligned} \quad (4.11)$$

haline gelir.

Fonksiyonele ait tüm bilinmeyenler interpolasyon formunda yazılırsa çubuk içinde herhangi bir noktadaki değişkenler:

$$u = u_i \cdot \Psi_i + u_j \cdot \Psi_j \quad (4.12)$$

$$u' = u_i \cdot \Psi_i' + u_j \cdot \Psi_j' \quad (4.13)$$

$$N = N_i \cdot \Psi_i + N_j \cdot \Psi_j \quad (4.14)$$

$$N' = N_i \cdot \Psi_i' + N_j \cdot \Psi_j' \quad (4.15)$$

şeklinde yazılabilirler.

4.2.1 I₁ fonksiyoneli için eleman matrisi

(3.15) I₁ fonksiyoneli için denklem (4.12), (4.13) ve (4.14) yerine konulursa;

$$I_1^e = \int_{z_i}^{z_j} \frac{\rho \cdot A \cdot \omega^2}{2} (u_i \cdot \Psi_i + u_j \cdot \Psi_j)^2 \cdot dz - \int_{z_i}^{z_j} (u_i \cdot \Psi_i' + u_j \cdot \Psi_j') \cdot (N_i \cdot \Psi_i + N_j \cdot \Psi_j) dz + \int_{z_i}^{z_j} \frac{1}{2EA} \cdot (N_i \cdot \Psi_i + N_j \cdot \Psi_j)^2 dz \quad (4.16)$$

elde edilir ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$I_1^e = \int_{z_i}^{z_j} \left[\frac{\rho \cdot A \cdot \omega^2}{2} \cdot (u_i^2 \cdot \Psi_i \cdot \Psi_i + 2u_i \cdot u_j \cdot \Psi_i \cdot \Psi_j + u_j^2 \cdot \Psi_j \cdot \Psi_j) - (u_i \cdot N_i \cdot \Psi_i' \cdot \Psi_i) - (u_i \cdot N_j \cdot \Psi_i' \cdot \Psi_j) - (u_j \cdot N_i \cdot \Psi_j' \cdot \Psi_i) - (u_j \cdot N_j \cdot \Psi_j' \cdot \Psi_j) + \frac{1}{2EA} \cdot (N_i^2 \cdot \Psi_i \cdot \Psi_i + 2N_i \cdot N_j \cdot \Psi_i \cdot \Psi_j + N_j^2 \cdot \Psi_j \cdot \Psi_j) \right] \cdot dz \quad (4.17)$$

(4.17) denklemini düzenleyebilmek için gerekli olan şekil fonksiyonları üzerinde yapılan integral işlemleri Ek A'da verildiği gibi kullanılarak düzenlenirse elemana ait fonksiyonel;

$$I_1^e = \frac{\rho \cdot A \cdot \omega^2}{2} \cdot \left(u_i^2 \cdot \frac{L}{3} + 2u_i u_j \cdot \frac{L}{6} + u_j^2 \cdot \frac{L}{3} \right) + \left(u_i N_i \frac{1}{2} \right) + \left(u_i N_j \frac{1}{2} \right) - \left(u_j N_i \frac{1}{2} \right) - \left(u_j N_j \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2EA} \cdot \left(N_i^2 \cdot \frac{L}{3} + 2N_i N_j \cdot \frac{L}{6} + N_j^2 \cdot \frac{L}{3} \right) \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial I^e}{\partial u_i} = 0 \quad \frac{\partial I^e}{\partial u_j} = 0 \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial I^e}{\partial N_i} = 0 \quad \frac{\partial I^e}{\partial N_j} = 0 \quad (4.20)$$

elde edilir. Eleman matrisini elde edebilmek için fonksiyonelin nodlara göre birinci türevlerinin sıfır olması gerekmektedir.

olmalıdır.

Denklem (4.17) ve (4.18) çözüldüğünde

$$\frac{\partial I^e}{\partial u_i} = \rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \frac{L}{3} \cdot u_i + \rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \frac{L}{6} \cdot u_j + \frac{1}{2} \cdot N_i + \frac{1}{2} \cdot N_j = 0 \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial I^e}{\partial N_i} = \frac{1}{2} \cdot u_i - \frac{1}{2} \cdot u_j + \frac{L}{3EA} \cdot N_i + \frac{L}{6EA} \cdot N_j = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial I^e}{\partial u_j} = \rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \frac{L}{6} \cdot u_i + \rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \frac{L}{3} \cdot u_j - \frac{1}{2} \cdot N_i - \frac{1}{2} \cdot N_j = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial I^e}{\partial N_j} = \frac{1}{2} \cdot u_i - \frac{1}{2} \cdot u_j + \frac{L}{6EA} \cdot N_i + \frac{L}{3EA} \cdot N_j = 0 \quad (4.24)$$

elde edilir.

Elde edilen doğrusal şekil fonksiyonuna bağlı denklem takımı matris formunda yazılırsa:

$$\begin{bmatrix} (\rho \cdot A \cdot \omega^2) \cdot \frac{L}{3} & \frac{1}{2} & \rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \frac{L}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{L}{3EA} & -\frac{1}{2} & \frac{L}{6EA} \\ (\rho \cdot A \cdot \omega^2) \cdot \frac{L}{6} & -\frac{1}{2} & (\rho \cdot A \cdot \omega^2) \cdot \frac{L}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{L}{6EA} & -\frac{1}{2} & \frac{L}{3EA} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ N_i \\ u_j \\ N_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

elde edilir. Burada çeşitli sınır koşullarına sahip çubuklarda kullanılacak olan eleman matrisi elde edilmiştir.

4.2.2 I₂ fonksiyoneli için eleman matrisi

(3.16) I₂ fonksiyoneliinde kullanılacak olan şekil fonksiyonları denklem (4.12), (4.13) ve (4.15) yerine yerleştirilirse:

$$I_2^e = \int_{z_i}^{z_j} \frac{\rho \cdot A \cdot \omega^2}{2} (u_i \cdot \Psi_i + u_j \cdot \Psi_j)^2 \cdot dz - \int_{z_i}^{z_j} (N_i \cdot \Psi_i' + N_j \cdot \Psi_j') \cdot (u_i \cdot \Psi_i + u_j \cdot \Psi_j) dz + \int_{z_i}^{z_j} \frac{1}{2EA} \cdot (N_i \cdot \Psi_i + N_j \cdot \Psi_j)^2 dz \quad (4.26)$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa aşağıdaki denkleme ulaşılır:

$$I_2^e = \int_{z_i}^{z_j} \left[\frac{\rho \cdot A \cdot \omega^2}{2} \cdot (u_i^2 \cdot \Psi_i \cdot \Psi_i + 2u_i \cdot u_j \cdot \Psi_i \cdot \Psi_j + u_j^2 \cdot \Psi_j \cdot \Psi_j) + (N_i \cdot u_i \cdot \Psi_i' \cdot \Psi_i) \right. \\ \left. + (N_i \cdot u_j \cdot \Psi_i' \cdot \Psi_j) + (N_j \cdot u_i \cdot \Psi_j' \cdot \Psi_i) + (N_j \cdot u_j \cdot \Psi_j' \cdot \Psi_j) \right. \\ \left. + \frac{1}{2EA} \cdot (N_i^2 \cdot \Psi_i \cdot \Psi_i + 2N_i \cdot N_j \cdot \Psi_i \cdot \Psi_j + N_j^2 \cdot \Psi_j \cdot \Psi_j) \right] \cdot dz \quad (4.27)$$

(4.27) denklemini düzenleyebilmek için gerekli olan şekil fonksiyonları üzerinde yapılan integral işlemleri Ek A'da verildiği gibi kullanılarak düzenlenirse elemana ait fonksiyonel;

$$I_2^e = \frac{\rho \cdot A \cdot \omega^2}{2} \cdot \left(u_i^2 \cdot \frac{L}{3} + 2u_i u_j \cdot \frac{L}{6} + u_j^2 \cdot \frac{L}{3} \right) - \left(u_i N_i \frac{1}{2} \right) - \left(u_i N_j \frac{1}{2} \right) \\ + \left(u_j N_i \frac{1}{2} \right) + \left(u_j N_j \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2EA} \cdot \left(N_i^2 \cdot \frac{L}{3} + 2N_i N_j \cdot \frac{L}{6} + N_j^2 \cdot \frac{L}{3} \right) \quad (4.28)$$

elde edilir. Elde edilen denklem üzerinde nodlara göre türevi sıfır yapan denklemler yazılırsa;

$$\frac{\partial I^e}{\partial u_i} = \rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \frac{L}{3} \cdot u_i + \rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \frac{L}{6} \cdot u_j - \frac{1}{2} \cdot N_i + \frac{1}{2} \cdot N_j = 0 \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial I^e}{\partial N_i} = -\frac{1}{2} \cdot u_i - \frac{1}{2} \cdot u_j + \frac{L}{3EA} \cdot N_i + \frac{L}{6EA} \cdot N_j = 0 \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial I^e}{\partial u_j} = \rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \frac{L}{6} \cdot u_i + \rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \frac{L}{3} \cdot u_j - \frac{1}{2} \cdot N_i + \frac{1}{2} \cdot N_j = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial I^e}{\partial N_j} = \frac{1}{2} \cdot u_i + \frac{1}{2} \cdot u_j + \frac{L}{6EA} \cdot N_i + \frac{L}{3EA} \cdot N_j = 0 \quad (4.32)$$

Elde edilen doğrusal şekil fonksiyonlarına bağlı denklem takımı matris formda yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} (\rho \cdot A \cdot \omega^2) \cdot \frac{L}{3} & -\frac{1}{2} & (\rho \cdot A \cdot \omega^2) \cdot \frac{L}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{L}{3EA} & -\frac{1}{2} & \frac{L}{6EA} \\ (\rho \cdot A \cdot \omega^2) \cdot \frac{L}{6} & -\frac{1}{2} & (\rho \cdot A \cdot \omega^2) \cdot \frac{L}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{L}{6EA} & \frac{1}{2} & \frac{L}{3EA} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ N_i \\ u_j \\ N_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

elde edilir. Burada çeşitli sınır koşullarına sahip çubuklarda kullanılacak olan 2. eleman matrisi elde edilmiştir.

5. DİNAMİK ANALİZ

Bu bölümde çubuklara ait boyuna titreşim hareketinin doğal frekanslarına değinilmiştir.

Çok serbestlik dereceli bir sisteme ait genel hareket denklemi:

$$[M]. [\ddot{u}] + [C]. [\dot{u}] + [K]. [u] = F(t) \quad (5.1)$$

Burada [M] kütle matrisini, [C] sönüm katsayısı matrisini, [K] rijitlik matrisini, $[\ddot{u}]$ düğüm noktalarındaki ivme matrisini $[\dot{u}]$ düğüm noktalarındaki hız matrisini, [u] düğüm noktalarındaki yer değiştirme matrisini ve F(t) yapıya etkiyen dış yükleri simgelemektedir.

Burada bahsi geçen sistemde sönüm olmadığından C=0 ve sistem serbest titreşim yaptığından F(t)=0'dır.

Bu dinamik analizde [u] yer değiştirme vektörü hesaplanacaktır.

Denklem (5.1)'de sönüm ve dış yükler ihmal edildiğinde denklem:

$$[M]. [\ddot{u}] + [K]. [u] = 0 \quad (5.2)$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümünde yer değiştirme vektörü:

$$u = \emptyset. e^{i\omega t} \quad (5.3)$$

(5.3) ifadesi zamana göre iki kez türetildiğinde

$$\ddot{u} = i^2 \omega^2 \emptyset e^{i\omega t} \quad (5.4)$$

elde edilir.

(5.3) ve (5.4) denklemleri (5.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$[[K] - \omega^2[M]].\{\emptyset\} = 0 \quad (5.5)$$

elde edilir. (5.5) denklemi bir özdeğer problemi olduğundan denklem takımının bir çözümünün olabilmesi için

$$\det|[K] - \omega^2[M]| = 0 \quad (5.6)$$

olmalıdır. Burada sistemin serbestlik derecesi kadar titreşim frekansı (ω) elde edilir.

Elde edilen sistem matrisi

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

şeklini alır. Bu ifadede ilk denklem:

$$[K_{11}].F + [K_{12}].u = 0 \quad (5.8)$$

$$[K_{21}].F + [K_{22}].u = 0$$

şeklinde olup buradan F çekilirse ve denklem (5.7)'deki ikinci denklemde yerine konulursa F yok edilmiş olup u cinsinden

$$\{-[K_{21}].[K_{11}]^{-1}.[K_{12}] + [K_{22}]\}.\{u\} = 0 \quad (5.9)$$

Elde edilir. Burada

$$[K^*] = [K_{22}] - [K_{21}].[K_{11}]^{-1}.[K_{12}] \quad (5.10)$$

ifadesi indirgenmiş sistem matrisidir.

Denklem (5.5) açılarak yazılırsa:

$$\left(\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} - \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} [F] \\ [u] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [0] \\ [0] \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

şeklini alır.

(5.11) ifadesinden serbest titreşim frekansları elde edilmektedir. Elde edilen ω 'lar yerine konularak yer değiştirmeler bulunmaktadır.

6. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde, geliştirilen karışık sonlu eleman yöntemi kullanılarak sayısal örnekler çözülmüştür. Farklı kesit ve sınır koşullarına sahip sistemlerin titreşim frekansları elde edilmiş ve sonuçların karşılaştırılabilmesi amacıyla literatürde yer alan çalışmalardan faydalanılmıştır.

6.1 Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Sabit Kesitli Çubuk

Sabit kesitli bir ucu ankastre diğer ucu serbest çubuğa ait titreşim frekansının hesaplanabilmesi amacıyla $\frac{E}{\rho} = 1$, $L=1m$, $A=1m^2$ değerleri kullanılmış ve sistem 1, 2, 5, 10, 25, 50 eşit parçaya bölünmüştür. Sonuçlar Eisenberger [27] ile karşılaştırılmıştır.

Çizelge 6.1: Bir ucu ankastre diğer ucu serbest sabit kesitli çubuk için titreşim frekansı.

Eleman Sayısı	Bu Çalışma	Eisenberger
1	1.5	1.73205
2	1.567223	1.61142
5	1.570708	1.57726
10	1.570798	1.57241
25	1.570788	1.57105
50	1.570788	1.57086
Kesin Sonuç		1.57080

6.2 Her İki Ucu Ankastre Bağlı Sabit Kesitli Çubuk

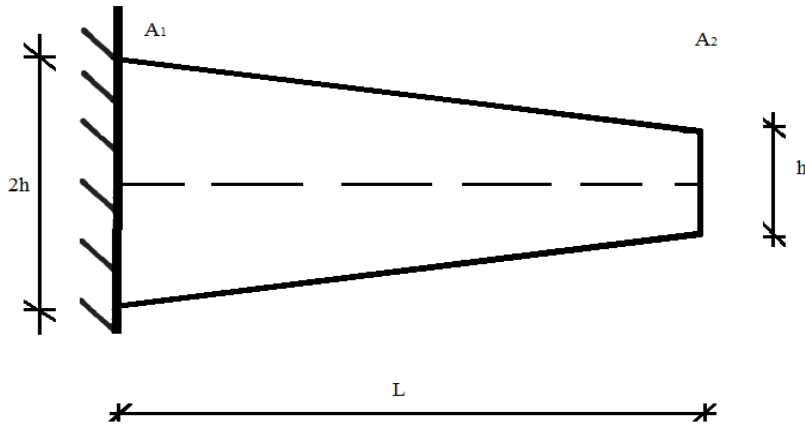
Sabit kesitli her iki ucu ankastre çubuğa ait titreşim frekansının hesaplanabilmesi amacıyla $\frac{E}{\rho} = 1$, $L=1m$, $A=1m^2$ değerleri kullanılmış ve sistem 1, 2, 5, 10, 25, 50 eşit parçaya bölünmüştür. Sonuçlar kesin çözüm ile karşılaştırılmıştır.

Çizelge 6.2 : Her iki ucu ankastre bağlı sabit kesitli çubuk için titreşim frekansı

Eleman Sayısı	Bu Çalışma
1	3
2	3
5	3.138740
10	3.141417
25	3.141596
50	3.141588
Kesin Sonuç	3.141592

6.3 Bir Ucu Ankastre Bağlı Diğer Ucu Serbest Lineer Değişken Kesitli Çubuk

Lineer değişken kesitli çubuk için titreşim frekansını hesaplayabilmek amacıyla $\frac{E}{\rho} = 1$, $L=1m$, $A_1=2m^2$ ve $A_2=1m^2$ olarak belirlenmiştir. Eisenberger [28]'de yer alan alan için $A=2-z$ bağıntısı kullanılmıştır. Sistem 1, 2, 5, 10, 25, 50 eşit parçaya bölünmüştür. Sonuçlar Eisenberger [28] ile karşılaştırılmıştır.



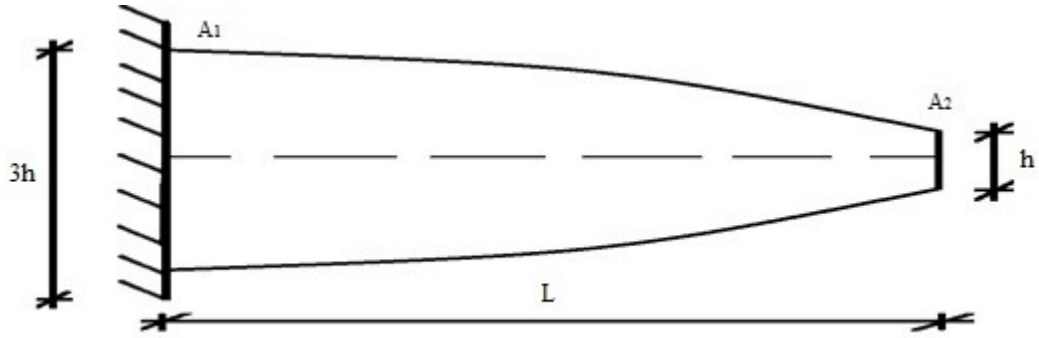
Şekil 6.1 : Bir ucu ankastre bağlı diğer ucu serbest lineer değişken kesitli çubuk

Çizelge 6.3 : Bir ucu ankastre bağlı diğer ucu serbest lineer değişen kesitli çubuğa ait titreşim frekansı.

Eleman Sayısı	Bu Çalışma	Eisenberger
1	1.5	1.73205
2	1.70854	1.79334
5	1.77092	1.79473
10	1.78422	1.79422
25	1.79053	1.79405
50	1.79244	1.79402
Kesin Sonuç		1.79401

6.4 Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Parabolik Değişken Kesitli Çubuk

Parabolik değişen kesitli çubuk için titreşim frekansını hesaplayabilmek amacıyla, $\frac{E}{\rho} = 1$, $L=1m$, Alan için Eisenberger [29]'de örneğinde yer alan $A=3-4z+2z^2$ bağıntısı kullanılmıştır. Sistem 1, 2, 5, 10, 25, 50 eşit parçaya bölünmüştür. Sonuçlar Eisenberger [29] ile karşılaştırılmıştır



Şekil 6.2 : Bir ucu ankastre diğer ucu serbest parabolik değişken kesitli çubuk

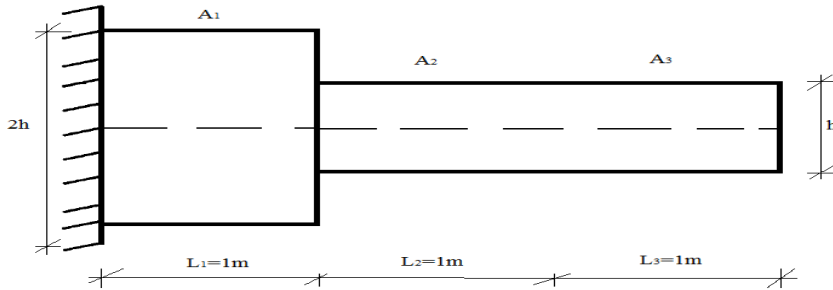
Çizelge 6.4 : Bir ucu ankastre diğer ucu serbest parabolik değişen kesitli çubuğa ait titreşim frekansı.

Eleman Sayısı	Bu Çalışma	Eisenberger
1	1.5	1.73205
2	1.90078	1.95371
5	1.98845	1.96945
10	1.98651	1.97058
25	1.978799	1.97085
50	1.97498	1.97088
Kesin Sonuç		1.97090

6.5 Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Ani Değişken Kesitli Çubuk

Ani değişken kesitli çubuğa ait titreşim frekansının hesaplanabilmesi amacıyla sistemdeki çubuğa ait $\frac{E}{\rho} = 1$, toplam boy $L=3\text{m}$, olarak verilmiş ve çubuk $A_1=2A$ ve $L=1\text{m}$, $A_2=A$ ve $L=1\text{m}$ $A_3=A$ ve $L=1\text{m}$ olacak şekilde birbirine eşit 3 parçaya bölünmüştür. Sonuçların karşılaştırılabilmesi için Bishop [30]'da yer alan örneğe ait sonuçlardan faydalanılmıştır ve sisteme ait frekans hesabı için;

$$\frac{A_1 \cdot \tan \frac{\omega L_2}{\frac{E}{\rho}} + A_2 \cdot \tan \frac{\omega L_1}{\frac{E}{\rho}}}{A_1 - A_2 \cdot \tan \frac{\omega L_1}{\frac{E}{\rho}} \cdot \tan \frac{\omega L_2}{\frac{E}{\rho}}} = \frac{A_2}{A_3} \cdot \cot \frac{\omega L_3}{\frac{E}{\rho}} \text{ bağıntısı verilmiştir.}$$



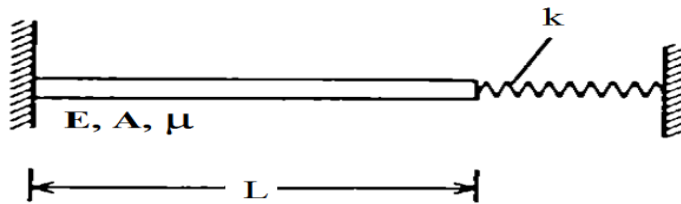
Şekil 6.3 : Bir ucu ankastre diğer ucu serbest ani değişken kesitli çubuk

Çizelge 6.5 : Bir ucu ankastre diğer ucu serbest ani değişken kesitli çubuğa ait titreşim frekansı.

Eleman Sayısı	Bu Çalışma	Bishop
3	0.61497	0.61548

6.6 Bir Ucu Ankastre Diğer Ucunda Yay Bulunan Sabit Kesitli Çubuk

Bu örnekte bir ucu ankastre bağlı diğer ucunda yay bulunan sabit kesitli çubuğun boyuna titreşim frekansı hesaplanmıştır. $L=1\text{ m}$, $A=1\text{ m}^2$ alınmıştır.



Şekil 6.4 : Bir ucu ankastre diğer ucunda yay bulunan sabit kesitli çubuk

Küçük şekil değiştirmeler için hareket denklemi:

$$-\mu \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + E \cdot A \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (6.1)$$

Serbest titreşim için yer değiştirme:

$$U = u \cdot \sin \omega t \quad (6.2)$$

denklem (6.1)'de yerine konulduğunda

$$\omega^2 \mu \cdot u + E \cdot A \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (6.3)$$

elde edilir.

Denklem (6.3)'ün genel çözümü:

$$u = C_1 \cos \frac{\omega \cdot z}{L} + C_2 \sin \frac{\omega \cdot z}{L} \quad (6.4)$$

Sistem için sınır koşulları yerine yerleştirildiğinde denklem:

$$\frac{k}{E \cdot A} \cdot \sin \omega + \frac{\omega}{L} \cdot \cos \omega = 0 \quad (6.5)$$

haline gelir.

Bu verilerden yararlanarak yazılan program ile sistem farklı sayıda parçaya bölünerek ve farklı $\frac{k}{E \cdot A}$ değerleri kullanılarak frekanslar hesaplanmıştır.

Çizelge 6.6 : Bir ucu ankastre diğer ucunda yay bulunan sabit kesitli çubuğa ait titreşim frekansı

$\frac{k}{E \cdot A}$	0.0	0.1	0.3	0.5	1.0	10	∞
10 Eleman	$\pi/2$	1.631988	1.741391	1.836584	2.028739	2.8626	π
20 Eleman	$\pi/2$	1.632016	1.741387	1.836586	2.028745	2.8627	π
40 Eleman	$\pi/2$	1.632016	1.741387	1.836586	2.028735	2.8627	π

7. SONUÇLAR

Bu tezde Gâteaux türevi yöntemi kullanılarak doğru eksenli çubukların boyuna serbest titreşimine karşı gelen fonksiyonel elde edilmiştir. Daha sonra sonlu elemanlar yöntemi ile doğrusal şekil fonksiyonları kullanılarak iki farklı eleman matrisi elde edilmiştir. Eleman matrislerinde Yer Değiştirme (u) ve Normal Kuvvet (N) olmak üzere iki adet bilinmeyen mevcuttur. Elde edilen veriler, tarafımızdan hazırlanan Fortran programlama dili kullanılarak, farklı sınır koşullarına sahip çubuklara ait boyuna titreşim frekansları elde edilmiştir. Bu frekanslar literatürde başka yöntemler ile elde edilmiş olan frekanslar ile karşılaştırılıp sonuçlar değerlendirilmiştir. Sonuç olarak bu tezde bulunan sonuçlar, literatürdeki sonuçlar ile uyumlu çıkmıştır. Sonuçların uyumlu çıkması bu çalışmada geliştirilen yöntemin ve yazılan programın güvenilir olduğunu göstermektedir.

Karışık sonlu elemanlar yöntemi ile sadece yer değiştirmeleri değişken olarak kullanan Klasik Sonlu Eleman yönteminde karşılaşılan türev ve yuvarlama hataları en aza indirilmektedir. Ayrıca Gâteaux türevi yöntemi eleman matrisinin çok daha hızlı ve kolay elde edilmesini sağlamaktadır.

Sonuç olarak Gâteaux türevi ve Sonlu eleman yönteminin birlikte kullanılması ile elde edilen sonuçlar hem diğer yöntemler ile uyumlu, hem de diğer yöntemlerden daha hızlı ve kolay elde edilmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] **Timoshenko, S.** (1928). *Vibration Problems İn Engineering*, 1st Ed., D. Van Nostrand Company, Inc.
- [2] **Paez, T. L.** (2012). Random Vibration – A Brief History, *Sound & Vibration*, **46**, 52-60.
- [3] **Paez, T. L.** (2006). The history of random vibrations through 1958 *Mechanical Systems and Signal Processing*, **20**, 1783–1818.
- [4] **İnceoğlu, S.** (1999). Birden Fazla Çift Sayıda Çift-Yay-Kütle Sistemi İle Birbirine Bağlı İki Ankastre Çubuğun Boyuna Titreşimleri, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.
- [5] **Bishop, R. E. D. ve Johnson, D. C.** (1969). *The Mechanics of Vibration*, 1st Ed., Cambridge Univerity Press.
- [6] **Timoshenko, S.** (1928). *Vibration Problems İn Engineering*, 1st Ed., D. Van Nostrand Company, Inc.
- [7] **Strutt, J. W. ve Rayleigh, B.** (1877). *The Theory Of Sound*, Macmillan And Co.
- [8] **Kohoutek, R.** (1981). Natural Longitudinal Frequencies Of A Uniform Rod With A Tip Mass Or A Spring, *Journal Of Sound And Vibration*, **77**, 147-148.
- [9] **Singh, R. ve Lyons, W. M. ve Prater, Jr G.** (1989). Complex Eigensolution For Longitudinally Vibrating Bars With A Viscously Damped Boundary, *Journal Of Sound And Vibration*, **133**, 364-367.
- [10] **Eisenberger, M.** (1991). Exact longitudinal vibration frequencies of a variable cross-section rod, *Applied Acoustics*, **34**, 123-130.
- [11] **Hull, A. J.** (1994). A Closed Form Solution Of A Longitudinal Bar With A Viscous Boundary Condition, *Journal Of Sound And Vibration*, **169**, 19-28.
- [12] **Rossit, C. A. ve Bambill, D. V. ve Laura, P. A. A.** (1996). Longitudinal Vibrations Of A Prismatic Bar Suddenly Subjected To A Tensile Load At One End When The Other Is Elastically Restrained, *Journal Of Sound And Vibration*, **188**, 145-148.
- [13] **Kumar, B. M. ve Sujith, R. I.** (1997). Exact Solutions For The Longitudinal Vibration Of Non-Uniform Rods, *Journal Of Sound And Vibration*, **207**, 721-729.
- [14] **Yardımoğlu, B.** (2010). Exact Solutions For The Longitudinal Vibration Of Non-Uniform Rods, *Journal Of Sound And Vibration*, **329**, 4107-4107.
- [15] **Li, Q. S.** (2000). Exact Solutions For Free Longitudinal Vibrations Of Non-Uniform Rods, *Journal Of Sound And Vibration*, **234**, 1-19.

- [16] **Li, Q. S.** (2000). Free Longitudinal Vibration Analysis Of Multi-Step Non-Uniform Bars Based On Piecewise Analytical Solutions, *Engineering Structures*, **22**, 1205-1215.
- [17] **Girgin, Z. ve Demir, E. ve Kol, C.** (2004). Genelleştirilmiş Diferansiyal Quadrature Metodunun Kirişlerin Serbest Titreşim Analizine Uygulanması, *Journal Of Engineering Sciences*, **10**, 347-352.
- [18] **Yardımoğlu, B. ve Aydın, L.** (2011). Exact Longitudinal Vibration Characteristics Of Rods With Variable Cross-Sections, *Shock And Vibration*, **18**, 555-562.
- [19] **Udwadia, F. E.** (2012). On the longitudinal vibrations of a bar with viscous boundaries: Super-stability, super-instability, and loss of damping, *International Journal Of Engineering Science*, **50**, 79-100.
- [20] **Jovanovic, V.** (2013). A Fourier Series Solution For The Longitudinal Vibrations Of A Bar With Viscous Boundary Conditions At Each End, *Journal Of Engineering Mathematics*, **79**, 125-142.
- [21] **İnan, M.** (2001). Cisimlerin Mukavemeti, 8. Baskı, İTÜ Vakfı Yayınları.
- [22] **Newton, I.** (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, S.Pepys, Reg. Soc. Praesses
- [23] **Oden, J.D. ve Reddy, J.N.** (1976). *Variational Methods In Theoretical Mechanics*, Springer, Berlin.
- [24] **Aköz, Y.** (1984). Şekil Değiştiren Cisimler Mekaniği, TÜBİTAK.
- [25] **Kadioğlu, F.** (1994). Elastik Zemin Oturan Doğru Ve Daire Eksenli Çubuklar, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.
- [26] **Aköz, Y.** (1984). Şekil Değiştiren Cisimler Mekaniği, TÜBİTAK.
- [27] **Eisenberger, M.** (1991). Exact longitudinal vibration frequencies of a variable cross-section rod, *Applied Acoustics*, **34**, 123-130.
- [28] **Eisenberger, M.** (1991). Exact longitudinal vibration frequencies of a variable cross-section rod, *Applied Acoustics*, **34**, 123-130.
- [29] **Eisenberger, M.** (1991). Exact longitudinal vibration frequencies of a variable cross-section rod, *Applied Acoustics*, **34**, 123-130.
- [30] **Bishop, R. E. D. ve Johnson, D. C.** (1969). *The Mechanics of Vibration*, 1st Ed., Cambridge University Press.

EKLER

EK A: Şekil Fonksiyonları ve Kullanılan İntegral İfadeler

EK A

$$L = z_j - z_i \quad \text{A.4.1}$$

$$\Psi_i \frac{z_j - z}{L} \quad \Psi_i' = -\frac{1}{L} \quad \text{A.4.2}$$

$$\Psi_j \frac{z - z_i}{L} \quad \Psi_j' = \frac{1}{L} \quad \text{A.4.3}$$

$$\int_{z_i}^{z_j} \Psi_i \Psi_i. dz = \int_{z_i}^{z_j} \left(\frac{z_j - z}{L}\right)^2. dz = \frac{L}{3} \quad \text{A.4.4}$$

$$\int_{z_i}^{z_j} \Psi_j \Psi_j. dz = \int_{z_i}^{z_j} \left(\frac{z - z_i}{L}\right)^2. dz = \frac{L}{3} \quad \text{A.4.5}$$

$$\int_{z_i}^{z_j} \Psi_i \Psi_j. dz = \int_{z_i}^{z_j} \left(\frac{z_j - z}{L}\right). \left(\frac{z - z_i}{L}\right) dz = \frac{L}{6} \quad \text{A.4.6}$$

$$\int_{z_i}^{z_j} \Psi_i' . \Psi_i. dz = \int_{z_i}^{z_j} \left(\frac{-1}{L}\right). \left(\frac{z_j - z}{L}\right). dz = -\frac{1}{2} \quad \text{A.4.7}$$

$$\int_{z_i}^{z_j} \Psi_i' . \Psi_j. dz = \int_{z_i}^{z_j} \left(\frac{-1}{L}\right). \left(\frac{z - z_i}{L}\right). dz = -\frac{1}{2} \quad \text{A.4.8}$$

$$\int_{z_i}^{z_j} \Psi_j' . \Psi_i. dz = \int_{z_i}^{z_j} \left(\frac{1}{L}\right). \left(\frac{z_j - z}{L}\right). dz = \frac{1}{2} \quad \text{A.4.9}$$

$$\int_{z_i}^{z_j} \Psi_j' . \Psi_j. dz = \int_{z_i}^{z_j} \left(\frac{1}{L}\right). \left(\frac{z - z_i}{L}\right). dz = \frac{1}{2} \quad \text{A.4.10}$$

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Safiye ECER
Doğum Yeri ve Tarihi : ANKARA/16.11.1988
E-Posta : safiyeecer@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2011, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü
- **Yükseklisans** : Devam etmekte, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yapı Mühendisliği Programı
-

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Türk Standartları Enstitüsü/İnşaat Mühendisi