

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER VE
KARARLILIK ANALİZİ**

ERTUĞRUL KAYGUSUZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI
FİZİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. HASAN TATLIPINAR**

İSTANBUL, 2014

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER VE KARARLILIK ANALİZİ

Ertuğrul Kaygusuz tarafından hazırlanan tez çalışması 17.12.2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Bölümü Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Zeynel YALÇIN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Haşim MUTUŞ

İstanbul Üniversitesi

ÖNSÖZ

Lisans ve Yüksek Lisans eğitimi boyunca ilminden faydalandığım, insani değerleri ile de örnek edindiğim, beraber çalışmaktan onur duyduğum hocam ve danışmanım Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR' a en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Akademik eğitimim boyunca çalışmalarımda bana katkıda bulunan ve üzerimde emeği olan değerli hocalarıma ve çalışmalarım boyunca bana her türlü desteği ve ilgiyi sağlayan değerli arkadaşlarıma teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Hayatım boyunca hem eğitimim hem diğer konularda bana maddi ve manevi destek olan başta abim olmak üzere aileme ve eşime en içten sevgilerimi sunarım.

Aralık, 2014

Ertuğrul KAYGUSUZ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
KISALTMA LİSTESİ.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÇİZELGE LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Hipotez	3
BÖLÜM 2	
DOĞRUSAL OLMAYAN BAZI FİZİKSEL SİSTEMLER	4
2.1 Basit Sarkaç	4
2.2 Doğrusal Olmayan Sönüm	6
2.3 Kulak Zarı Titreşimi.....	7
2.4 Doğrusal Olmayan Latis Dinamiği.....	8
2.5 Yarış (Rekabet) olayı ve Volterra-Lotka Yarış Denklemleri	9
2.6 Doğrusal Olmayn İndüktans	10
2.7 Elektronik Salınıcı.....	11
2.8 Solitonlar	12
2.9 Kuantum Mekaniğinde Bazı Doğrusal Olmayan Sistemler	15
2.10 Topolojik Analizler	16
2.11 Lojistik Harita	18

BÖLÜM 3

FAZ DÜZLEMİ, YÖRÜNGELER VE KRİTİK NOKTALAR	21
3.1 Temel Kavramlar ve Tanımlar	23
3.2 Kritik Nokta Çeşitleri.....	26
3.3 Kararlılık	29
3.4 Doğrusal Sistemlerin Yörünge ve Kritik Noktaları.....	30
3.4.1 Temel Teoremler	30
3.5 Doğrusal Olmayan Sistemlerin Yörünge ve Kritik Noktaları	35
3.5.1 Doğrusal Olmayan Sistemler Hakkındaki Temel Teoremler	35

BÖLÜM 4

DİNAMİK SİSTEMLERE ÖRNEKLER	39
4.1 Dinamik Sisteme Örnek Olarak Zorlamalı Sönümlü Salıncı Problemi	39
4.2 Doğrusal Olmayan Korunumlu Sistemler	41
4.3 Doğrusal Olmayan Sistemlerin Davranışlarının Parametreye Bağlılığı	48
4.4 Liapunov'un Doğrudan Metodu.....	49

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER	51
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ.....	55

SİMGE LİSTESİ

α	Sönümlleme faktörü
ω	Frekans
k	Yay sabiti
$V(r)$	Toda potansiyeli
i	Akım
Φ	Akı
L_0	Öz indüktans
ϵ	Yer değıştirme parametresi
$\phi(p)$	Genlik dağılım fonksiyonu
μ	Kompleks sayı
λ	Lyapunav üsteli
T_0	Periyot
g_B	Büyüme katsayısı
g_L	Azalma katsayısı
β	Doğrusal olmayan etkileşme uzaklığı
γ	Iraksama, sürtünme etkisi
δ	Yarıçap uzunluğu
B	Sönüm terimi

KISALTMA LİSTESİ

FPU	E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam
KdV	Kortweg-de Vries
MANIAC	Mathematical Analyzer Numerical Integrator and Computer
NLKG	Nonlinear Klein-Gordon Equation
SGE	Sine-Gordon Equation

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2. 1 Basit sarkaç	4
Şekil 2. 2 Hareketli basit sarkaç	6
Şekil 2. 3 Bir boyutlu Latis	8
Şekil 2. 4 Toda potansiyeli	9
Şekil 2. 5 $g_B = g_L = 0$ için balık sayısındaki değişim	10
Şekil 2. 6 Doğrusal olmayan indüktans	10
Şekil 2. 7 "Pulse" veya atmanın grafik gösterimi	12
Şekil 2. 8 Sine Gordon denkleminin çözümü olan kink ve anti-kink	14
Şekil 2. 9 Ferromagnetik bölgede Block duvarı	15
Şekil 2. 10 Üç farklı a değeri için Lojistik denklemin çözümleri.....	18
Şekil 2. 11 Lojistik denklemin a parametresine göre davranışı.....	19
Şekil 2. 12 Lyapunov üsteli λ' nın Lojistik harita için değerleri.....	20
Şekil 3. 1 Kritik nokta çeşitleri	28
Şekil 3. 2 Denklem (3.4) ile verilen yörüngenin davranışı.....	30
Şekil 3. 3 Düğüm noktası	33
Şekil 3. 4 Sarmal nokta	34
Şekil 3. 5 Doğrusal ve doğrusal olmayan eyer noktası.....	37
Şekil 4. 1 Zorlamalı sönümlü salınım sistemi.....	39
Şekil 4. 2 (a) xy düzlemi, (b) xy faz düzlemi	44
Şekil 4. 3 Faz düzlemi davranışı	45
Şekil 4. 4 (4.8) ile verilen sistemin davranışı	46
Şekil 4. 5 Yörüngelerin kritik noktadaki davranışı.....	47

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 3. 1 Bazı doğrusal olmayan sistemlerin doğrusal hale getirilmiş denklemleri	21
Çizelge 4. 1 (4.1) siteminin davranışı.....	40

DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER VE KARARLILIK ANALİZİ

Ertuğrul KAYGUSUZ

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR

Doğrusal olmayan dinamik sistemler son zamanlarda yapılan bilimsel çalışmaların önemli bir konusudur. Gerçek doğal olaylar doğrusal olmayan bir karaktere sahip oldukları için, temel bilimlerde, mühendislikte, sosyal ve ekonomi bilimlerinde yapılan model çalışmalar doğrusal olmayan dinamik davranışa sahiptir. Bu tezde fizik ve mühendislik konularında bazı doğrusal olmayan sistemler ve bunlara karşılık gelen denklemler verildi. Doğrusal olmayan dinamik sistemlerin zaman içindeki değişimlerini analitik olarak incelemek kolay değildir, bu nedenle bu sistemlerin incelenmesi için gerekli metotlar verildi. Doğrusal olmayan sistemler için faz uzayı tanımı yapıldı ve yörüngeler, kritik noktalar gibi bazı özel tanımlar yapıldı. Faz uzayı analizi ve bununla ilgili teoremler verilerek doğrusal olmayan dinamik sistemin kararlılığı tartışıldı. Tezde anlatılan genel prosedür doğrusal olmayan korunumlu sistemlere uygulandı.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal olmayan sistemler, kararlılık, kritik noktalar, faz uzayı.

NONLINEAR SYSTEMS AND STABILITY ANALYSIS

Ertuğrul KAYGUSUZ

Department of Physics

MSc. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR

Nonlinear dynamic systems are very important subject of scientific researchers recently. Real natural phenomena have nonlinear characters so that in basic science, engineering social and economy sciences the most of model studies have nonlinear dynamic behavior. In this thesis some physical and engineering examples of nonlinear systems and related mathematical nonlinear equations are given. Time evolution of nonlinear dynamical systems are not easy to study analytically, so that the methods to study these systems are introduced. Phase space of the nonlinear systems are introduced and some specific definitions such as trajectories and critical points are defined. By using phase space analysis and some related theorems the stability of the nonlinear systems are discussed. The general procedure given in thesis are applied to nonlinear conservative systems.

Keywords: Nonlinear systems, stability, critical points, phase space.

1.1 Literatür Özeti

Doğada gözlemlediğimiz her olay dinamik bir süreci temsil eder, bu dinamik süreçler matematiksel olarak bir denklemle ifade edilebilir. Genellikle karmaşık olan bu süreçlerin incelenmesi tarihsel olarak basit olandan karmaşık olana doğrudur. Basit sistemlere ait matematiksel bağıntılar genellikle doğrusal (lineer) bağıntılardır. Bu doğrusal denklemlerin çözümleri istisnalar dışında tek değerli, sabit veya düzgün davranışlı fonksiyonlardır. Bu tür doğrusal denklemler dinamik sistemi temsil eden gerçek bir denklemden çok belli varsayımlar ve idealleştirmeler altında geçerli olan denklemlerdir. Bu durumda bile birçok dinamik sistemin zaman içindeki evrimini incelemek oldukça zor bir iştir. Bu nedenle birçok durumda dinamik sistemin minimum enerjisine karşılık gelen denge durumu gibi bazı özel durumları incelenir.

Günümüzde teknolojiye gelişmeler sayesinde çok hassas deneylerin yapılabilmesi ve bilgisayar hesaplama yöntemlerinin gelişmesi sonucu temel ve uygulamalı bilimlerde birçok doğa olayı gerçek koşullarına daha uygun olacak şekilde modellenerek incelenmektedir. Bu durumda dinamik sistemi doğrusal denklemler yerine doğrusal olmayan denklemlerle ifade etmek gerekmektedir. Doğrusal olmayan denklemlerin ise çözümleri matematiksel olarak kolay değildir. Bu denklemlerin incelenmesi için çeşitli yöntemler geliştirilmiş olmasına rağmen bazı durumlar için genel bir yöntemden bahsetmek bile zordur.

Doğrusal olmayan dinamik sistemler günümüzde fizik, kimya, biyoloji gibi temel bilimlerin yanında mühendislikte, ekonomide, toplum bilimlerinde birçok olayın zaman içindeki davranışını açıklamak için oluşturulan matematiksel çalışmalara ait genel bir ifadedir.

Dinamik sistem, matematiksel veya fiziksel bir sistemin zamana, kontrol girişlerine veya diğer değişken parametrelerine bağlı olarak çözümün bir açılımını temsil eden denklemlerini tanımlamakta kullanılan bir terimdir. Doğrusal olmayan dinamik sistem veya doğrusal olmayan kontrol sistemleri teorisi 19.yy'dan beri büyük bir ilerleme göstermiştir. Günümüzde, doğrusal olmayan kontrol sistemleri, sosyal, yaşam ve fizik bilimlerinden mühendislik ve teknolojiye kadar değişen geniş bir bilimsel ve mühendislik olaylarının tanımlanmasında kullanılmaktadır.

Kararlılık teorisi sistem mühendisliğinde, özellikle kontrol ve otomasyon alanında, dinamik ve kontrol uygulamalarında önemli bir role sahiptir. Bir dinamik sistemin dengede olması (kontrol ve bozucu girişimlerin beraberinde veya haricinde) pratik uygulamalarda, özellikle gerçek zamanlı uygulamalarda temel bir gerekliliktir. Kaba bir tabirle, denge, sistemin çıkışlarının ve iç sinyallerinin kontrol edilebilir sınırlara bağımlı olması anlamına gelir veya daha katı bir tabirle sistem çıkışları daha sınırlı bir alanda (asimtotik kararlı) dengede olmasıdır. İçerik olarak birçok kararlılık çeşidi vardır ve aralarından üç tanesi doğrusal olmayan dinamik ve kontrol sistemlerinin ilgi alanına girer. Bunlar; denge durumuna göre kararlılık, sistemin çıkış yörüngesine göre orbital kararlılık ve sistemin kendisinin yapısal kararlılığı.

Temel denge kavramı, kökleri E. Torricelli' nin katı cisimlerin doğal yerçekimi kuvveti altında dengesini incelediği 1644 yılındaki "mekanik sistemin denge durumu" çalışmasına kadar dayanır. G. Lagrange'ın 1788' de formüle ettiği klasik denge teoremi, korunumlu mekanik sistemlerin dengesi hakkında belki de en çok bilinen sonuçtur. Buna göre korunumlu bir sistemin potansiyel enerjisi yalıtılmış bir denge durumunda ise veya bir minimuma sahip basit sınırlara maruz kalmışsa sistemin denge noktası karalıdır. Sistem ve yörünge kararlılığı birçok gelişim ve ilerleme içeren uzun bir tarih sürecinden geçmiştir. A. M. Lyapunov' un doktora tezi olan "hareket kararlılığının genel problemi" 1892' de ünlenmiştir. Bu çalışma tüm dinamik sistemin kararlılığı araştırmaları ve uygulamalarının temel fikirlerini ve tekniklerini oluşturur. Sadece modern fiziğin dinamik davranış analizinde değil aynı zamanda mühendislik sistemlerinin kontrol dizaynında kullanılır. Doğrusal olmayan sistemlerde kararlılık analizi isimli bu tezde, doğrusal olmayan bazı fiziksel sistemlere örnek verilerek genel davranışları genel davranışları incelenecektir. Bu tür sistemlerin kararlılığı için yörüngeler, kritik noktalar gibi faz uzayı analizi için matematiksel tanımlar verilerek doğrusal

korunumlu bir sistemin genel davranışına uygulanacaktır. Tez hazırlanırken oldukça geniş bir literatür içinden [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] R. H. Enns ve G. C. McGuire tarafından yazılan Nonlinear Physics [10] ve S. L. Ross tarafından yazılan Differential Equations [11] kitabı temel alınarak bir derleme şeklinde hazırlanmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Doğrusal olmayan dinamik sistemlerin incelenmesi son yıllarda yapılan önemli araştırma konularından birisidir. Deney ve gözlem yapmadaki son teknolojik gelişmeler, bilgisayar hesaplamalarındaki gelişmeler bu konuda yapılan araştırmaların çoğalmasını sağlamıştır. Doğrusal olmayan dinamik sistemler bilimin incelediği her alanda karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle bu tezde doğrusal olmayan dinamik sistemlerin temel kavramları verilerek, bu sistemlerde kararlılık analizi için kullanılan yöntemler incelenmiştir. Tez bu konuda yapılacak çalışmalara bir ön bilgi vermeyi amaçlamaktadır.

1.3 Hipotez

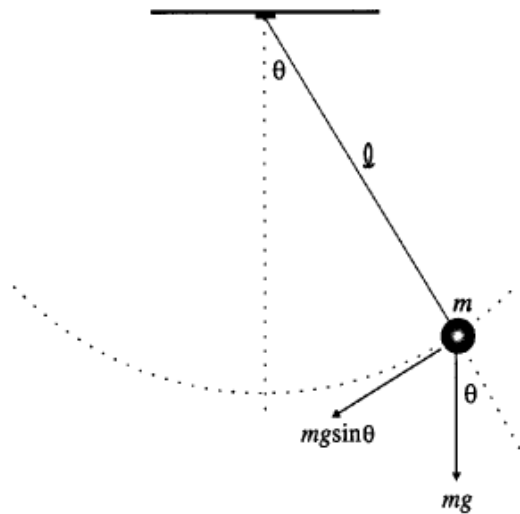
Doğrusal olmayan dinamik sistemlerin davranışları kritik noktalar, faz yörüngeleri gibi faz analizi yolu ile incelenebilir. Buna göre bu sistemlerin hangi koşullar altında ve hangi parametrelere göre ne tür kararlılık davranışına sahip olacakları belirlenebilir.

DOĞRUSAL OLMAYAN BAZI FİZİKSEL SİSTEMLER

Doğada birçok fiziksel sistemin davranışı diferansiyel denklemlerle ifade edilebilir. Doğrusal olmayan fiziksel olayların bazıları da, doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem veya kısmi diferansiyel denklem şeklinde ifade edilebilir. Doğrusal olmayan bazı sistemlere örnekler bu bölümde verilecektir.

2.1 Basit Sarkaç

Örneğin; basit harmonik salıncığı ele alalım, l uzunluklu bir ipin ucunda m kütleli bir cisim aşağıdaki şekilde verilen salınım hareketini yapsın. Bu sistem doğrusal olmayan dinamik bir sistemdir, bazı varsayımlar altında basit harmonik hareket yapar, fakat genel davranışı daha karmaşıktır.



Şekil 2. 1 Basit sarkaç

$\vec{F} = m\vec{a}$ dinamiğin temel yasası veya Newton hareket denklemi

$-mgsin\theta = m \frac{d^2}{dt^2}(l\theta), \quad (x = l\theta), \quad (\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}})$ olmak üzere hareket denklemi

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde bulunur.

Lagrange formalizmi $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ kullanılacak olursa ;

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - mgl(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}2ml(l\dot{\theta}) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = mgl\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{Newton hareket denkleminde elde edilen hareket denklemi} \quad (2.1)$$

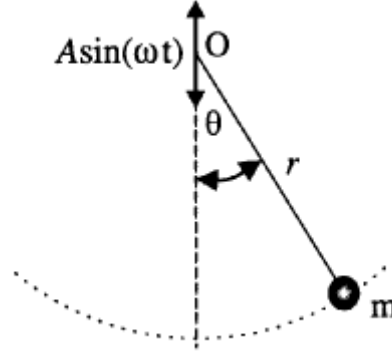
elde edilir. $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$ denklemi ($\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ g : yerçekimi sabiti). $\sin \theta = \theta -$

$\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots$ şeklinde θ 'nın doğrusal olmayan bir fonksiyonudur. Burada θ küçük ise $\sin \theta \simeq \theta$

alınır $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$ denkleminin çözümlerine bakılabilir. Bu durumda $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ doğrusal denklemi elde edilir ve denklemin çözümleri aşıkardır[12]. Fakat θ büyük ise $\sin \theta \simeq \theta$ yaklaşımı çalışmaz, bu nedenle doğrusal olmayan denklemi çözmemiz gereklidir.

Sarkaç durumunda $\theta_{max} = \pm 150^\circ$ ve $\theta_{max} = \pm 10^\circ$ arasında ise hareket nitelik olarak çok fazla değişmez. Bu aralıkta $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ periyodu fazla değişmez. Fakat $\theta = 180^\circ$

olduğunda $T_0 = \infty$ olacağı açıktır. Diğer birçok doğrusal olmayan sistemde, görülecektir ki doğrusal olmayan davranışı göz önüne almanın, fizikte, kimyada, biyolojide ve diğer disiplinlerde birçok önemli sonuçları vardır.



Şekil 2. 2 Hareketli basit sarkaç

O noktası $A \sin(\omega t)$ şeklinde düşey titreşime sahip. Sistemin hareket denklemi

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left[1 - \frac{A\omega^2}{g} \sin(\omega t) \right] \sin \theta = 0 \text{ şeklindedir.}$$

2.2 Doğrusal Olmayan Sönüm

Viskoz bir akışkan içinde hareket eden cisim problemi fizikteki önemli bir problemdir. Bu problemde sürtünme kuvvetlerinin önemli etkileri vardır. Örneğin, havada hareket eden bir (roketin, uçağın, uydunun, vb..) cisim üzerine etkiyen sürtünme kuvveti yüksek hızlarda oldukça önemlidir. Cisim hızı $\vec{v}$, cisme etkiyen kuvvet $F(\vec{v})$ ise bu kuvvetin analitik olarak belirlenmesi mümkün değildir. Fakat basitçe $F \propto |\vec{v}|^{n-1} \vec{v}$ gibi düşünülebilir. Buna göre yer yüzeyine yakın bir yerde cismin hareket denklemi $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - m|\vec{v}|^{n-1} \vec{v}$ şeklindedir. ($k > 0$; sabiti viskozite ve geometriye bağlı). Deneysel verilere göre $v_1 \leq 24 \text{ m/s}$ için $n = 1$. $n = 1$ Stokes yasası, $v_1 < v < v_s$ (v_s : ses hızı $\cong 330 \text{ m/s}$) ise $n = 2$ alınabilir. Bu ise Newton Direnç Yasası olarak bilinir. $n = 1$, ve $n = 2$ için denklem analitik olarak çözülebilir. $v_s < v \leq 600 \text{ m/s}$ aralığında havada hareket eden bir cisme karşı havanın gösterdiği direnç oldukça artar (patlama yapar) 600 m/s' den sonra tekrar doğrusal olarak davranır.

Daha ileride, doğrusal olmayan sistemlerin belli aralıklarda periyodik(lineer), belli aralıklarda (koşullarda) 'kaotik' davrandığını göreceğiz. Bu konu otomobil ve uçak sektöründe oldukça önemlidir.

2.3 Kulak Zarının Titreşimi

Newton'un 2.yasası biyolojik sistemlerin hareketini anlamada da kullanılabilir. Orta kulakta bulunan kulak zarının titreşimi (denge noktası etrafında) bir boyutlu sistem gibi düşünülebilir. $x(t)$ denge konumundan ayrılma mesafesi olsun,

$F(x)$, zar $x(t)$ kadar yer değiştirdiğinde geri getirici kuvvet küçük x için $F(x)$ Taylor serisine açılabilir.

$$F(x) = F_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=0} x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{x=0} x^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)_{x=0} x^3 + \dots$$

$$x = 0 \Rightarrow F_0 = 0 \text{ (denge noktası)}$$

Kuvvetin geri getirici olması için $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=0} < 0$ olmalı $= -k$. x' li terimin (en küçük üslü olan) etkin olduğunu düşünürsek, $F = -kx$ Hooke Yasası.

m kulak zarının kütlesi, $F(t)$ kulak zarına gelen ses basıncının oluşturduğu periyodik kuvvet

ise Newton'un 2. Denklemini $m\ddot{x} = -kx + f(t)$ veya $\ddot{x} + \tilde{\omega}_0^2 x = F(t)$, $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

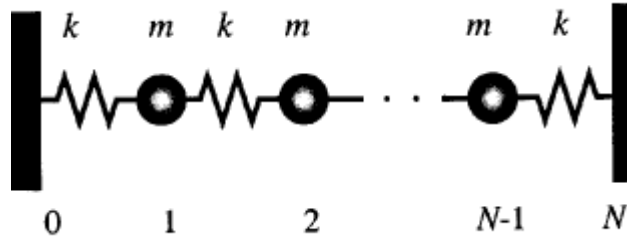
$F(t) = \frac{f(t)}{m}$ bu zorlamalı basit harmonik salınıcı problemi. $F(t) = A \cos(\omega t)$ şeklinde ise,

kulak zarı başlangıç periyodundan sonra yalnızca ω frekansına yanıt verir. Bu ω dışındaki seslerin (harmoniklerin) kulak zarı tarafından algılanması için, $F(x)$ bağıntısındaki doğrusal olmayan terimlerle de bağlantı kurulmalı. Kulak zarı üzerine yapılan deneylerde, ses basınç kuvvetinin kulak zarını asimetrik olarak etkilediği görülmüştür. Taylor açılımındaki 2. terimi

göz önüne alacak olursak $\frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{x=0} = -\beta m$ diyebiliriz, olursak,

$\ddot{x} + \tilde{\omega}_0^2 x + \beta x^2 = F(t)$ yazabiliriz. Bu zorlamalı doğrusal olmayan salınıcı denklemdir. x^2 'li terimi asimetriyi temsil etmektedir.

2.4 Doğrusal Olmayan Latis Dinamiği



Şekil 2. 3 Bir boyutlu Latis

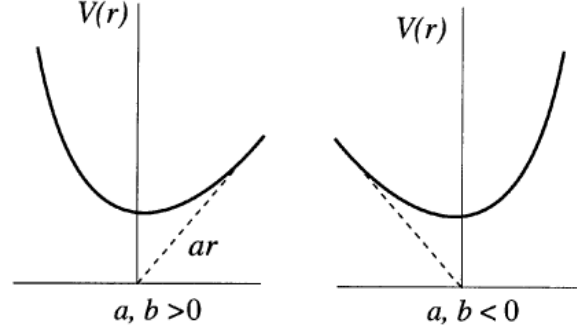
N tane parçacıktan oluşmuş bir boyutlu Latis sistemini göz önüne alalım. Sistem klasik fiziğe göre incelendiğinde, sistemin normal modlarının enerjisi sabit kalır, zamanla değişmez. 1950'li yıllarda E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam (FPU) Los Alamos' ta bu tür sistemleri çalışmışlardır ve şu soruyu sormuşlardır:

Katılarda denge durumu sıcaklığı (enerjisi) nasıl oluşur (veya nasıl modellenenebilir)?

Fermi ve arkadaşları, bu tür sistemlerde doğrusal olmayan salınımların sistemde modlar arasında enerji geçişlerine neden olacağını ve bir süre sonra (zaman içerisinde ortalama alındığında) bütün modların enerjisinin birbirine eşit olacağını öne sürmüşlerdir. Bu tür denge durumuna "Termodinamiğin sıfırıncı yasası" denir. FPU $N = 64$ parçacık ve en yakın komşu etkileşmesi $V(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{3}kar^3$ olarak çalıştılar. ($F = -\frac{\partial V}{\partial r} = -kr - kar^2$ kulak zarının titreşimini veren bağının benzeri). Los Alamos' ta "MANIAC" bilgisayarı ile yapılan hesap sonucu (nümerik) sistemin belli bir denge durumuna yaklaşmadığı fakat sistemin enerjisinin belli bazı modlara yaklaştığını (bir çok mod içinde belli modlara) gördüler. Bu olaya " FPU Anomalisi " denir. FPU Anomalisinin (bozukluğunun) kaldırılması için bir çok çalışma yapılmıştır. FPU' nun nümerik olarak yaptığı hesabı M. Toda analitik olarak yapmayı başarmıştır. Bunun için en yakın komşu uzaklığı için etkileşme potansiyel enerjisi $V(r) = \frac{a}{b}e^{-br} + ar$ alınmıştır. Buna göre $F(r) = a(e^{-br} - 1)$ $r \ll 1$ için

$$e^{-br} = -br + \frac{1}{2!}b^2r^2 - \dots \Rightarrow F(r) = -abr + \frac{1}{2}ab^2r^2 - \dots \text{ olarak bulunur.}$$

($-abr \rightarrow$ harmonik terim, $\frac{1}{2}ab^2r^2 \rightarrow$ anharmonik terim)



Şekil 2. 4 Toda potansiyeli

Toda bu potansiyeli kullanarak FPU problemini analitik olarak çözmüş ve aynı sonuçları bulmuştur. Doğrusal olmayan Latis Dinamiği katılarda, erime olayının anlaşılması için de önemlidir. Çünkü katılar ısıtıldığında, katıdaki atom ya da iyonların denge konumları etrafındaki mesafeleri artar, bu durumda bu mesafe arttıkça, doğrusal olmayan terimlerin etkisi de artar. Belli bir kritik değerde katı artık sıvı faza geçer [13].

2.5 Yarış (Rekabet) Olayı ve Volterra-Lotka Yarış Denklemleri

Doğada birçok sistem birbiri ile rekabet halindedir, bu sistemler biyolojik, fiziksel veya sosyal sistemler olabilir, bu sistemleri temsil eden denklemler doğrusal olmayan denklemlerdir. Bu denklemlerin bazıları şu şekildedir.

Volterra-Lotka denklemi biyolojik canlılar arasındaki etkileşmeyi veren denklemdir. 1905-1923 yılları arasında Adriyatikte yakalanan balık miktarı analizine dayanmaktadır. Bu süre içinde büyük balık ve küçük balık popülasyonundaki değişime bakılmıştır.

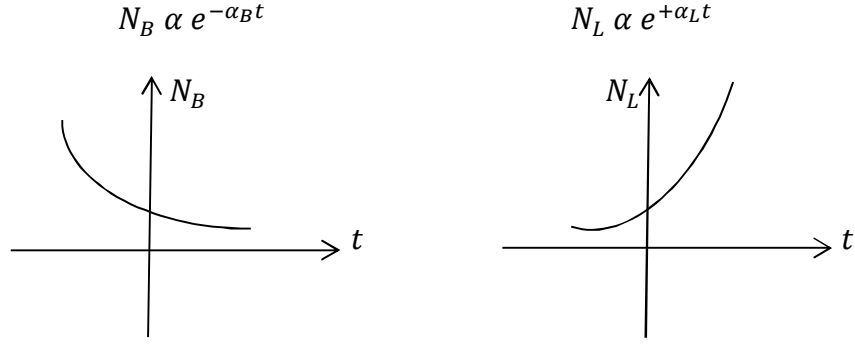
$N_B \equiv$ büyük balık sayısı $N_L \equiv$ küçük balık sayısı “Phenomenological” bir çift denklem,

$$\dot{N}_B = (-\alpha_B + g_B N_L) N_B$$

$$\dot{N}_L = (+\alpha_L - g_L N_B) N_L$$

$$\dot{N}_i = \frac{d N_i}{dt} \quad \alpha_i, g_i > 0$$

Balıklar arası etkileşme yok ise, $g_B = g_L = 0$ ise

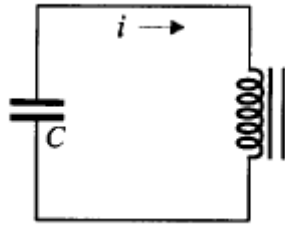


Şekil 2. 5 $g_B = g_L = 0$ için balık sayısındaki değişim

Eğer bir etkileşme var ise büyüme katsayısı $+g_B N$ ve azalma katsayısı $-g_L N$ devreye girecek ve diferansiyel denklemin yapısı değişecektir. Bu tür avlayan avlanan canlılar için, bu denklemler (Predator-Prey) birçok sisteme (canlı türüne) uygulanabilir. Bu tür doğrusal olmayan denklemler, topolojik, analitik, nümerik olarak çözülebilir. Denklemlerin doğru ve çabuk çözümleri popülasyondaki başlangıç koşullarının kesinliğine ve etkileşme şekillerinin sadeliğine bağlıdır. (büyük balık küçük balığı yer, yaralanma veya hastalık varsa problem kararsızlaşır, vb.)[14].

2.6 Doğrusal Olmayan İndüktans

Doğrusal olmayan elektrik devresine en basit örnek, yüklü bir C kondansatörü ile bir demir çubuk üzerine sarılmış N sarımlı indüktörden oluşmuş devredir.



Şekil 2. 6 Doğrusal olmayan indüktans

Bu devrede akım ile akı Φ arasındaki bağıntı;

$$i = \frac{N\Phi}{L_0} + A\Phi^3$$

Eğer kübik terim olmasaydı, bu basitçe $i = \frac{N\phi}{L_0}$ doğrusal bağıntısını verecekti. Burada L_0 : öz-indüktans, ϕ ise bobinden geçen akı (manyetik akı). ϕ^3 terimi demir çubuktan kaynaklanır. (Kirchof yasasına göre bir devrede gerilimlerin toplamı sıfırdır.)

$$\varepsilon_L = -N \frac{d\phi_B}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad , \quad \frac{q}{C} - N \frac{d\phi_B}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{q}{C} - N \frac{d\phi_B}{dt} \right) = 0,$$

$$\frac{i}{C} - N\ddot{\phi} = 0 \quad , \quad i = \frac{N}{C} \ddot{\phi}$$

bu eşitliği yukarıdaki denklem ile karşılaştırsak

$$\frac{N}{C} \ddot{\phi} = \frac{N\phi}{L_0} + A\phi^3$$

$$\ddot{\phi} + \alpha\phi + \beta\phi^3 = 0$$

doğrusal olmayan denklemini buluruz. ($\alpha = \frac{1}{L_0 C}$, $\beta = \frac{A}{NC}$)

2.7 Elektronik Salıncı

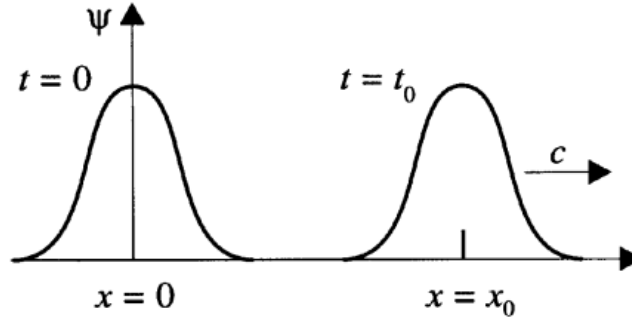
Doğrusal olamayan teoremin gelişiminde Van der Pol Denklemini önemli bir rol oynamıştır, çünkü bu denklem, doğrusal problemlerde karşılaşılmayan “sonlu çevrim (Limit Cycle)” özelliği gösterir. Sonlu çevrim, sistemin başlangıç koşulları ne olursa olsun, sistemin periyodik davranış özelliği gösterdiği bir durumdur. Bütün elektronik salıncılar birçok akustik, mekanik sistem, kalp atışı gibi sistemler sonlu çevrim özelliği gösterirler. Bu denklem şu şekilde yazılabilir.

$$\ddot{X} - \epsilon(1 - X^2)\dot{X} + X = 0$$

Burada $\epsilon > 0$ bir parametre (devre elemanları ile ilgili), X ise elektronik salıncı için yer değiştirme parametresi. $X > 1$ için sönüm terimi osilatörün, salıncının büyüklüğünü (magnitude) azaltacak şekilde, $X < 1$ için ise negatif sönüm söz konusu, yani salının büyüklüğü artacak yönde. Bazı X değerleri ise salının büyüklüğünü etkilemez. Bu değerler limit çevrime karşılık gelir. Bu tür sistemlerde (öz-uyumlu) self-sustained (öz-devamlı) salınımlar sistemin periyodik olduğu durumlardan, sabit bir kaynaktan enerji olarak güçlenebilirler, elektronik salıncı durumunda bu enerji bu terimden alınır. Mekanik olarak da köprüde yürüyen asker probleminde olduğu gibi askerlerin periyodik hareketi ile köprünün periyodik hareketi öz-uyumlu olduğunda köprü yıkılabilir.

2.8 Solitonlar

Doğrusal Dalga Denklemi $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$ şeklindedir. Belli bir ortamda c hızı ile ilerleyen dalga "pulse" , "atma" şekil olarak aşağıda verilmiştir.



Şekil 2. 7 "pulse" veya atmanın grafik gösterimi

$\psi(x, t) = \psi(x - ct)$ koordinat sistemi sabit atma c hızıyla ilerliyor veya atma sabit koordinat sistemi c hızı ile ilerliyor.

Uzayda lokalize olmuş (yerelleşmiş) bu atma "solitary" dalgaya bir örnektir. Soliton ise "solitary dalga" denkleminin çözümlerine denir. Soliton asimtotik olarak yapısını başka bir solitonla saçılma yapana kadar korur. Eğer dalga denkleminin çözümleri bir çok "solitary dalga" dan oluşmuş ise (ψ_{sol})

$$\psi(x, t) = \sum_{j=1}^N \psi_{sol}(x - c_j t)$$

yazabiliriz.

$t \rightarrow -\infty$ için bu şekilde yazılan $\psi(x, t)$ soliton olarak adlandırılacaktır.

$t \rightarrow +\infty$ olduğunda, yani dalgalar arasında bir çok etkileşme olduktan sonra yalnızca bir δ faz farkı kadar değişiyor ise yani

$$\psi(x, t) \sim \sum_{j=1}^N \psi_{sol}(x - c_j t + \delta_j)$$

oluyorsa, bu dalgaya soliton çözümleri diyeceğiz.

Yukarıda verilen atma tek bir "pulse" olarak ele alınacağı gibi birçok değişik hız ve genliğe sahip dalganın Fourier toplamı gibi de düşünülebilir. Bu durumda $c = c(\omega)$ ise atmayı oluşturan Fourier bileşenleri dalgalar zaman geçtikçe değişik hızlarda ilerleyeceği için atma zamanla genişleyerek şeklini bozacak ve solitary dalga olmaktan çıkacaktır. Buna göre,

$$\psi(x, t) = A_1\psi(x + ct) + A_2\psi(x - ct)$$

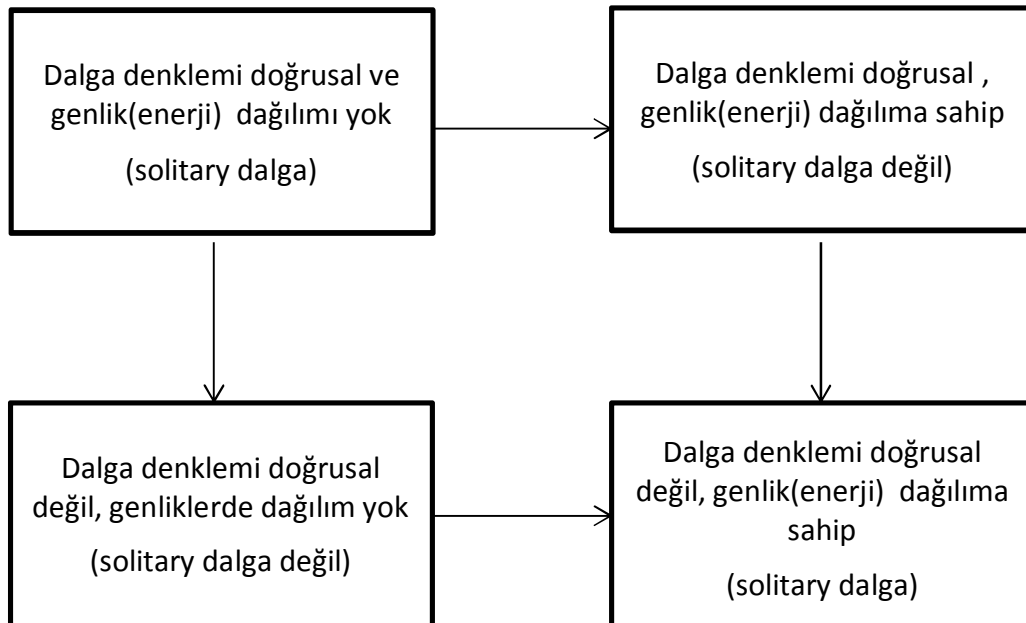
Birinci terim sola doğru, ikinci terim sağa doğru giden dalgayı tanımlar.

Doğrusal dağılımsız dalga denkleminde göre ilerleyen dalga biri diğeri içinden (birbiri içinden) etkileşmeden geçer.

Dalga denkleminde doğrusal olmayan terimler eklenirse dalganın enerji dağılımında daha yüksek frekanslı terimler devreye girecektir, bu nedenle frekans bir dağılıma sahip olacaktır.

Frekans dağılımındaki genişleme ise belirsizlik ilkesine göre $(\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2})$ zaman dağılımında (konum dağılımında da) bir daralma görülecektir. Bu ise solitary dalga oluşumuna katkıda bulunacaktır.

Buna göre solitonu oluşturan dalganın genliğinin (enerjisinin) bir dağılıma sahip olmasından dolayı solitonların deforme olması ile, doğrusal olmayan terimlerden gelen solitonların oluşumuna katkı birbirini dengeleyip, soliton oluşumu sağlanabilir. Buna göre, soliton oluşumu aşağıda şematik olarak gösterilebilir.



Burada dalganın dağılıma sahip olması (genliğin(enerjinin)) dalgayı değişik frekans bileşenlerine ait dalgaların Fourier toplamı gibi düşünmektir.

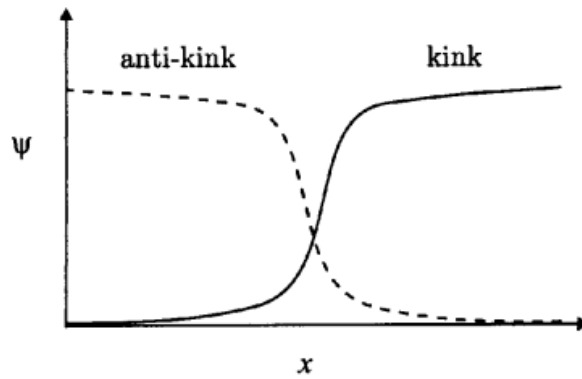
$\psi(x) = \int \phi(p)e^{-ixp} dp$ gibi düşünülebilir. ($\phi(p)$: genlik dağılım fonksiyonu). Buna göre soliton çözümleri veren bazı durumlara ait denklemler şunlardır;

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 6 \frac{\partial^2(\psi^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = 0$: Sığ sularda oluşan dalga denklemi (bir boyutlu Boussinesg denklemi).

$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \alpha \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0$: Korteweg-de Vries (KdV) denklemi (dikdörtgen bir kanalda düzgün akan bir suda ani bir değişim sonucu oluşan soliton çözümlerini verir).

Sine Gordon denklemi magnetik bir ortamda spin dalgalarının veren denklemdir

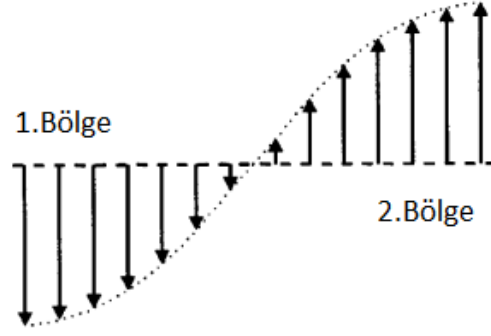
$\psi_{xx} - \psi_{tt} = \sin \psi$, Bu denklem "topolojik" solitonlar oluşturur.



Şekil 2. 8 Sine Gordon denleminin çözümü olan kink ve anti-kink

Bu solitonlar şekilde gösterilmiştir. Bu iki çözüm dağılmadan ilerler, ve soliton türü çözümlerdir.

Örneğin aşağıdaki şekilde verilen iki Ferromagnetik bölge için Block duvarına bir magnetik alan uygular isek, bu şekil Sine-Gordon denklemine göre formunu koruyarak ilerler.



Şekil 2. 9 Ferromagnetik bölgede Block duvarı

2.9 Kuantum Mekaniğinde Bazı Doğrusal Olmayan Sistemler

Doğrusal olmayan Kuantum sistemleri içinde son çeyrek yüzyılda birçok çalışma yapılmıştır. Kuantum mekaniğinin doğrusal olmayan yapısının nasıl tanımlanacağı henüz tartışma konusudur. Bu konuda genel bakış kuantum sistemlerinde doğrusal olmayan davranışların sistemin “coherent” eş fazlı kollektif davranışından kaynaklandığı ve bu duruma göre bir mekanik tanımlanması gerektiğini savunur, daha yeni ve henüz yaygınlık kazanmamış bir görüş ise kuantum mekaniğinin aslında doğrusal olmadığını, doğrusal durumun bu doğrusal olmayan mekaniğin özel bir hali olduğunu savunur[15,16].

Kuantum mekaniğinde doğrusal olmayan sistemler için aşağıdaki tanımlar yapılabilir.

1- Nonlineer kuantum sistemlerde mikroskopik parçacıklar aşağıdaki dalga fonksiyonuyla ifade edilir.

$$\phi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t)e^{i\theta(\vec{r}, t)}$$

Burada hem $\varphi(\vec{r}, t)$ genlik hem de $e^{i\theta(\vec{r}, t)}$ fazı, uzay ve zamanın fonksiyonlarıdır.

2- Göreli olmayan durumda dalga fonksiyonu $\phi(\vec{r}, t)$, genelleştirilmiş nonlineer Schrödinger eşitliğiyle tanımlanır.

$$\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi \pm b|\phi|^2 \phi + V(\vec{r}, t) \phi + A$$

yada

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi \pm b|\phi|^2 \phi + V(\vec{r}, t) \phi + A(\phi)$$

burada μ kompleks sayı, V dış potansiyel alan, A ϕ nin fonksiyonu ve b nonlinear etkileşimin uzaklığını belirten katsayıdır.

Görelî durumlarda ise, dalga fonksiyonu $\phi(\vec{r}, t)$ Sine-Gordon eşitliği (SGE) ve ϕ^4 alan denklemini içeren genelleştirilmiş nonlinear Klein-Gordon eşitliğiyle (NLKGE) verilir. Buna göre,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} = \beta \sin \phi + \gamma \frac{\partial \phi}{\partial t} + A(\phi) \quad (j = 1, 2, 3)$$

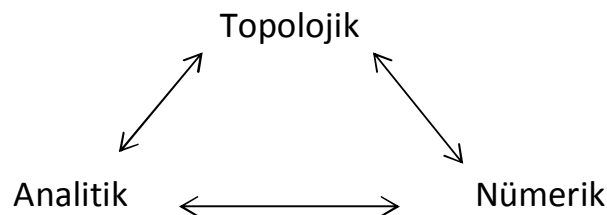
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} \pm \alpha \phi \mp \beta |\phi|^2 \phi = A(\phi) \quad (j = 1, 2, 3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada γ , ıraksama (dissipation) ya da sürtünme etkisidir, β nonlinear etkileşimin uzaklığını gösteren katsayı ve A , ϕ 'nin fonksiyonudur.

Yukarıda, iki madde altında özetlenen bilgiler, nonlinear kuantum mekaniğin iki temel varsayımıdır ve lineer kuantum temel varsayımlarından oldukça farklıdır. Fakat, nonlinear kuantum eşitlikleri, lineer Schrödinger ve lineer Klein-Gordon eşitliklerinin genelleştirilmesinden doğmuştur. Bu eşitliklerin nonlinear kuantum sistemlerdeki mikroskopik parçacıkların özelliklerini sağladığı ve bu parçacıklar için hareket denklemleri olduğu gösterilebilir. Bunlar nonlinear kuantum mekaniğin temel iki prensibidir. Sonuç olarak, nonlinear kuantum mekaniği; süper akışkanlık, süper iletkenlik, modern soliton teorisi ve bunların deneysel gerçekleri üzerine kurulan bir teoridir.

2.10 Topolojik Analizler

Doğrusal olmayan denklemler genel olarak aşağıdaki şemada anlatılan yöntemlerle incelenebilir.



Analitik yöntemler simetrisi yüksek ve ideal durumlara karşılık gelen problemler için daha çok kullanılır. Bu yöntemde doğrusal olmayan sistem mümkünse bazı tekniklerle doğrusal hale getirilir ve gerekirse pertürbasyon teorisi gibi yaklaşık yöntemlerde kullanılarak sistemin özellikleri incelenir. Doğrusal duruma getirilemeyen durumlar için nümerik yaklaşım yöntemleri (Monte Carlo simülasyon yöntemi, sonlu farklar yöntemi vb.) yaygın olarak kullanılır. Bunun yanında sistemin faz uzayı analizi diye adlandırılabilen topolojik yöntemde sistemin davranışını açıklamak için kullanılır.

Doğrusal olmayan denklemler genellikle analitik olarak (kesin olarak) çözülemezler, bu nedenle yaklaşık çözümler için değişik metotlar uygulanır. Bunlardan biri “faz düzlemindeki” görüntü yöntemidir.

“Faz düzlemi analizi (Phase Plane Analysis)” kısaca şöyle özetlenebilir.

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

gibi diferansiyel denklemleri göz önüne alalım. P ve Q , x ve y 'ye doğrusal olmayan bağlı fonksiyonlar, t ise bağımsız değişken olsun. Matematikçiler t 'ye açıkça bağlı olmayan bu denklemleri otonom (“autonomous”) denklemler olarak adlandırırlar. (P ve Q t 'ye bağlı değil).

Bütün mekanik problemleri Newton'un 2. Yasasına göre

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = \vec{F}$$

Şeklinde yazabiliriz. Sisteme etkiyen kuvvet konumun veya hızın fonksiyonu olabilir.

$F = F(x, \dot{x})$ yada $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$ yazabiliriz,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = y \Rightarrow \ddot{x} = \dot{y} = F(x, y) \text{ buna göre}$$

$P(x, y) = \frac{dx}{dt} = y$ $Q(x, y) = \frac{dy}{dt} = F(x, y)$ yazılabilir. t zaman parametresi elimine edilirse,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

Zamandan bağımsız denklem elde edilir. Bu denklemin çözümleri, zaman ilerledikçe, faz düzleminde sistemin davranışını “faz yörüngeleri(faz izleri)” olarak adlandıracağımız çözümleri verir. Newton denklemlerinin çözümlerinde faz düzlemi x ve $\dot{x}$ ile belirlenir,

halbuki yarış denklemlerinde faz düzlemi popülasyonu oluşturan ikililer oluşturur (tavşan, tilki sayıları vb.). Genel olarak $y(x)$ fonksiyonunun elde edilmesi zor olabilir (veya mümkün olmayabilir). Bu durumda topolojik yaklaşım bize bu tür denklemlerde, faz düzleminde (x_0, y_0) gibi belirli özel noktaların (kararlı veya tekil noktalar) olduğunu ve çözümlerin genel yapısının bu noktalar yardımı ile yapılabileceğini söyler.

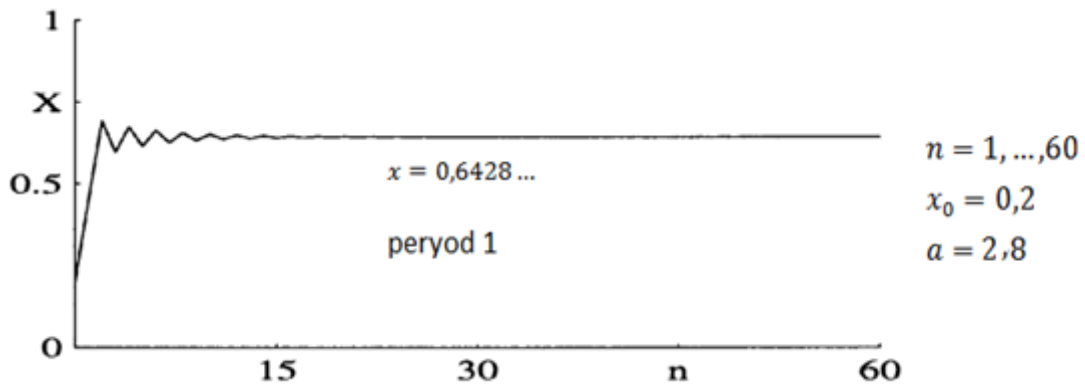
2.11 Lojistik Harita

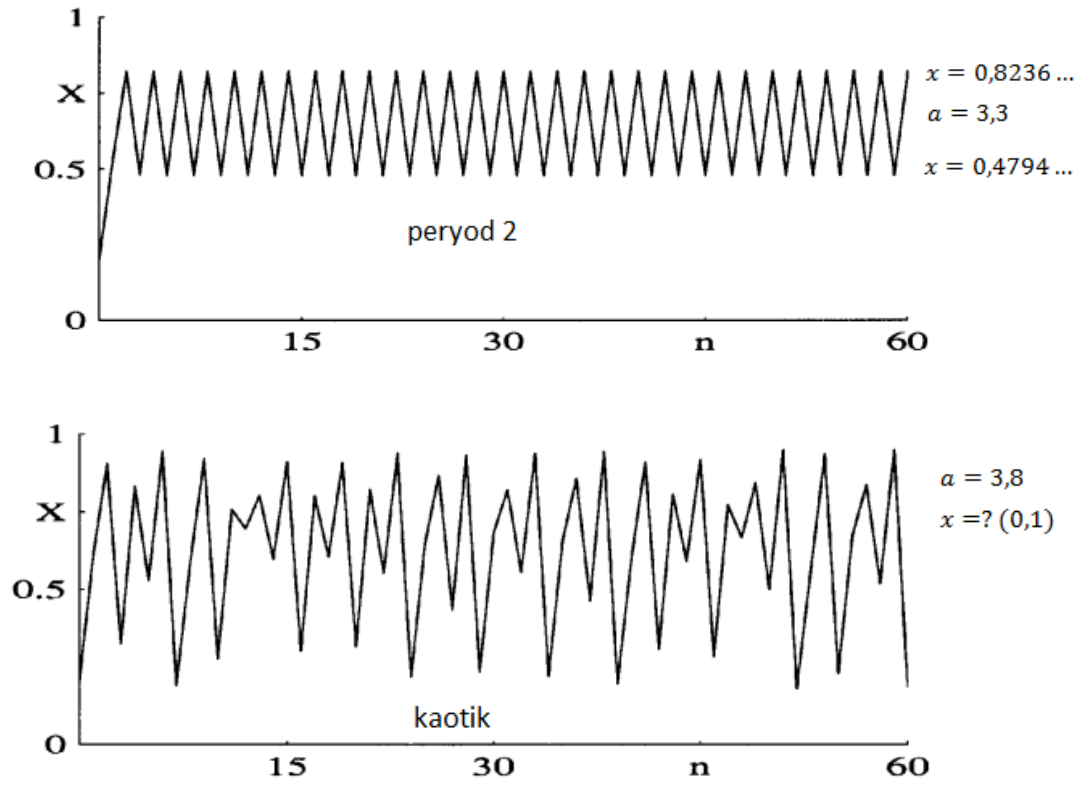
$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

Şeklinde doğrusal olmayan bir denklem genellikle "Lojistik Denklem" olarak da isimlendirilebilir. $0 \leq a \leq 4$ seçildiğinde x_0 ' in $(0,1)$ aralığındaki seçimine göre x çözümleri $(0,1)$ aralığında kalacaktır.

Örneğin $a = 6$, $x_0 = 0,25 \Rightarrow x_0 = 6 \cdot 0,25(1 - 0,25) = 1,125 > 1$ olacaktır. Lojistik denklem nümerik olarak kolayca çözülebilir. a ve x_0 biliniyor ise x_1 bulunur vb..

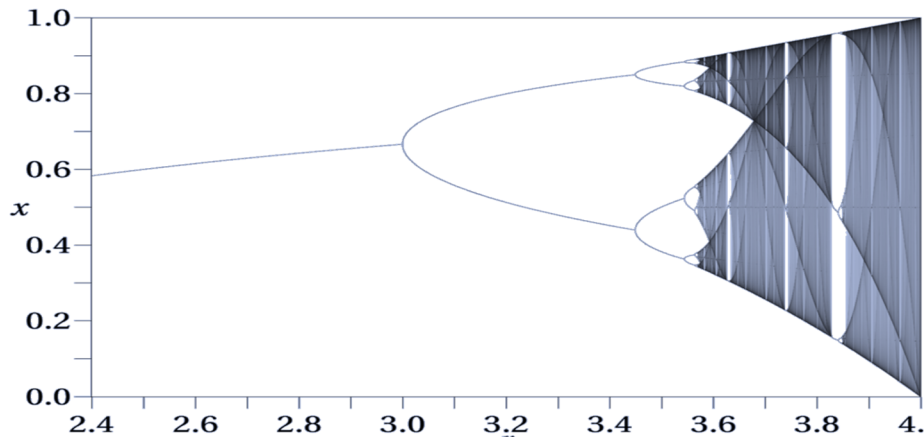
Denklemdeki n biyolojik sistemler göz önüne alındığında zaman adımı olarak da ele alınabilir. Bu durumda x_0 belli bir andaki popülasyonu belirtiyor ise x_n belli zaman sonundaki popülasyonu belirleyecek şekilde ayarlanabilir. Aşağıdaki şekillerde lojistik denklemin üç farklı çözümü verilmektedir.





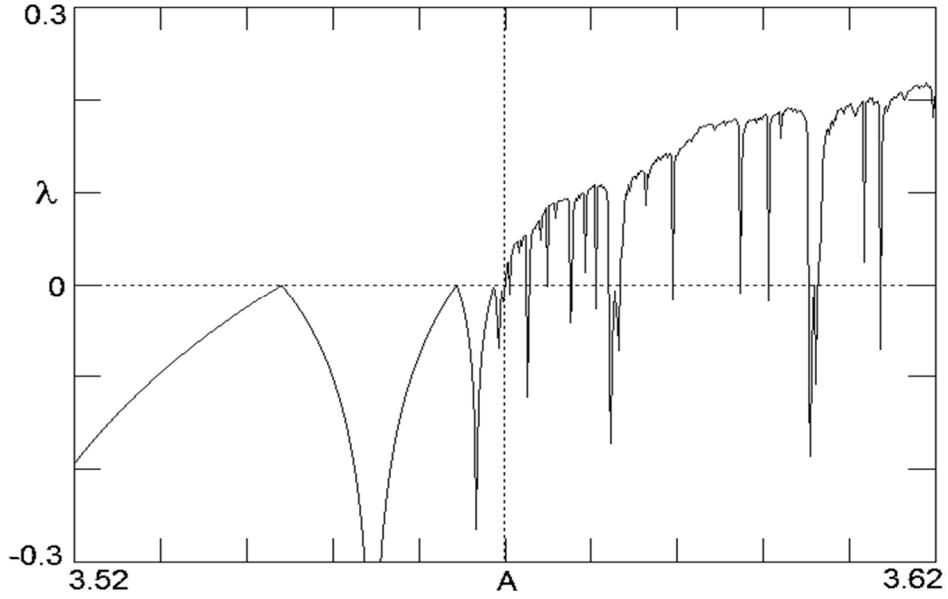
Şekil 2. 10 Üç farklı a değeri için lojistik denklemin çözümleri [10]

$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ Lojistik denklemin a parametresine göre çözümleri aşağıdaki şekilde verilmiştir. Buna göre şekilde görüleceği denklemin a parametresine bağlı olarak bir periyodlu çözümü, iki periyodlu çözümü, 4 periyodlu çözümü vb.. şeklinde katlamalı olarak periyodik çözümleri değişmektedir. a değeri 3.5 ten büyük olunca periyodik çözümlerin yerini kaotik çözümler almaktadır.



Şekil 2. 11 Lojistik denklemin a parametresine göre davranışı

Ayrıca $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(Xk)}{dXk} \right|$ Şeklinde tanımlanan Lyapunov üsteli λ , Lojistik denklemin hangi durumlarda ne tür çözümlere sahip olacağını belirtir. Buna göre λ 'nın pozitif olduğu değerlerde lojistik denklemin çözümleri kaotik, negatif olduğu değerlerde periyodik olacaktır.



Şekil 2. 12 Lyapunav üsteli λ 'nın Lojistik harita için değerleri

A değerinden küçük a değerleri için bütün çözümler periyodik, A değerinden büyük a değerleri için çok seyrek te olsa bazı periyodik çözümler olmasına rağmen genel davranışın kaotik olduğu görülmektedir. Şekil 2. 12, şekil 2. 11 ile büyük bir uyum göstermektedir. Bu yöntemlerin dışında faz uzayı bir düzlem ile kesildiğinde, faz yörüngelerinin düzlem üzerinde oluşturdukları izlere göre de sistemin periyodik veya kaotik olduğu söylenebilir. Bu izler, noktalar veya düzgün geometrik şekiller ise çözümler periyodik, düzlem üzerindeki izler “fraktal” yapıda ise sistemin davranışı kaotik yapıda olduğu söylenebilir. Bu yöntem “Poincare Kesiti” yöntemi olarak adlandırılır.

BÖLÜM 3

FAZ DÜZLEMİ, YÖRÜNGELER VE KRİTİK NOKTALAR

Doğrusal olmayan dinamik sistemlerin davranışını veren diferansiyel denklemler doğrusal değildirler. Birçok durumda doğrusal olmayan böyle bir denklemi çalışabilmek için gerçek doğrusal olmayan denkleme yeterince benzeyen ilgili doğrusal bir denklemle değiştirmek mümkündür. Ancak bu şekilde bir doğrusallaştırma her zaman mümkün değildir. Bu durum da doğrusal olmayan denklemin kendisi dikkate alınmalıdır. Doğrusal denklemlerin genel kuramları ve yöntemleri bir hayli geliştirildiği halde doğrusal olmayan denklemlerle ilgili genel özelliklerin çok azı bilinmektedir. Doğrusal olmayan denklemlerle ilgili sonuç veren çalışmalar çeşitli özel durumlarla sınırlıdır ve çeşitli yaklaşım yöntemlerine başvurmalıdır. Bu bölümde, bu yöntemlerden bazılarının kısa tanıtımı verilecektir.

Çizelge 3. 1 Bazı doğrusal olmayan sistemlerin doğrusal hale getirilmiş denklemleri[8]

N o	Doğrusal olmayan sistem denklemi	Ψ	Tekil noktalar	Doğrusallaştırıl- mış denklem
1	$y'' + by^r y' + y = 0$	$-bx_1^r x_2 - x_1$	$[0; 0]$	$y'' + y = 0$
2	$ay'' + by^r y' + cy = 0$	$-\frac{b}{a}x_1^r x_2 - \frac{c}{a}x_1$	$[0; 0]$	$y'' + \frac{c}{a}y = 0$

Çizelge 3. 1 Bazı doğrusal olmayan sistemlerin doğrusal hale getirilmiş denklemleri(devamı)

N o	Doğrusal olmayan sistem denklemleri	Ψ	Tekil noktalar	Doğrusallaştırıl- mış denklem
3	$ay'' + by' + cy + dy^2 = 0$	$-\frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_1 - \frac{d}{a}x_1^2$	$[0; 0]$ $[-\frac{c}{d}; 0]$	$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0$ $y'' + \frac{b}{a}y' - \frac{c}{a}y + \frac{c}{a} = 0$
4	$ay'' + by' + cy + dy^t = 0$	$-\frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_1 - \frac{d}{a}x_1^t$	$[0; 0]$	$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0$
5	$ay'' + by' + cy^r y' + dy = 0$	$-\frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_1^r x_2 - \frac{d}{a}x_1$	$[0; 0]$	$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{d}{a}y = 0$
6	$ay'' + by' + cy'' + dy + ey^2 = 0$	$-\frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_2^r - \frac{d}{a}x_1 - \frac{e}{a}x_1^2$	$[0; 0]$ $[-\frac{d}{e}; 0]$	$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{d}{a}y = 0$ $y'' + \frac{b}{a}y' - \frac{d}{a}y = 0$
7	$ay'' + by' + cy'' + dy + ey^t = 0$	$-\frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_2^r - \frac{d}{a}x_1 - \frac{e}{a}x_1^t$	$[0; 0]$	$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{d}{a}y = 0$
8	$ay'' + b(m + ny^r)y' + cy = 0$	$-\frac{b}{a}(m + nx_1^r)x_2 - \frac{c}{a}x_1$	$[0; 0]$	$y'' + \frac{b}{a}my' + \frac{c}{a}y = 0$
9	$ay'' + b(my^p + ny^r)y'^q + cy = 0$	$-\frac{b}{a}(mx_1^p + nx_1^r)x_2^q - \frac{c}{a}x_1$	$[0; 0]$	$y'' + \frac{c}{a}y = 0$

3.1 Temel Kavramlar ve Tanımlar

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (3.1)$$

şeklindeki ikinci dereceden doğrusal olmayan bir diferansiyel denklemi göz önüne alalım.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (3.2)$$

Buradaki μ pozitif bir sabittir. (3.2)'yi (3.1) ile karşılaştırsak,

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = -\mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} - x$$

olur.

(3.1) diferansiyel denklemi bir serbestlik derecesine sahip belirli bir dinamik sistemi ifade etsin. Bu sistemin t zamanındaki durumu x (konum) ve dx/dt (sürat) değerlerine göre belirlenir. x ve dx/dt değişkenlerinin oluşturduğu düzlem faz düzlemi olarak adlandırılır.

Eğer $y = dx/dt$ dersek, (3.1) ikinci dereceden denklemini denk bir sistemle değiştirebiliriz.

$$\frac{dx}{dt} = y \quad (3.3)$$

$$\frac{dy}{dt} = F(x, y)$$

(3.1) denklemi ile ilgili bir çok bilgi (3.3)'deki sistemi çalışılarak bulunabilir. Bunun için (3.3) çözümlerin belirlediği eğrilerle oluşturulan şekillerle ilgileneceğiz. Sabit bir t için xy düzleminde bir takım eğriler ortaya çıkacak bu eğriler faz eğrileri, x , $y = dx/dt$ 'nin oluşturduğu düzlem daha önce belirtildiği gibi faz düzlemidir.

Daha genel olarak, (3.3) ile verilen sistemler

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad (3.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

şeklinde ele alınabilir.

P ve Q bütün (x, y) ler için sürekli birinci kısmi türevlere sahiptirler. Bağımsız değişken t 'nin soldaki elemanların türevleri olan dt şeklinde görüldüğü ve sağda P ve Q nun fonksiyonlarında açıkça görünmediği böyle bir sisteme otonom sistem denir. Şimdi (3.4)'teki çözümlerle belirlenen eğrilerle oluşmuş xy faz düzlemi şekillerini çalışmaya devam edeceğiz.

Herhangi bir t_0 ve reel sayılardan oluşan herhangi bir (x_0, y_0) çifti verildiğinde

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

gibi bir sistemin

$$f(t_0) = x_0,$$

$$g(t_0) = y_0 \tag{3.5}$$

şeklinde tek bir çözümü vardır.

Eğer f ve g nin her ikisi de sabit fonksiyon değilse o zaman (3.5), sistemin yörüngesi olarak adlandıracağımız xy düzleminde bir eğriyi belirtir. Eğer (3.5)'te belirlenen düzenli fonksiyon çifti (3.4)'ün bir çözümü ve t_1 herhangi bir reel sayı ise o zaman

$$x = f(t - t_1), \tag{3.6}$$

$$y = g(t - t_1)$$

tarafından belirlenen sıralı fonksiyon çiftinin aynı zamanda (3.4)'ün bir çözümü olduğunu görmek kolaydır.

Farz edelim ki (3.5)'deki f ve g nin her ikisi de sabit fonksiyon değiller ve $t_1 \neq 0$, (3.5) ve (3.6)'da belirlenen çözüm (3.4)'ün iki farklı çözümüdür. Ancak bu iki farklı çözüm aynı yörüngenin basitçe farklı değişkenleştirilmesidir(parametreleştirilmesidir). Bu nedenle çözüm ve yörünge ifadelerinin aynı anlamda olmadığını gözlemleyebiliriz. Bir yandan (3.4)'deki çözüm, $x = f(t)$, $y = g(t)$ nin iki denklem sistemini (3.4) aynı anda aynen sağlayan bir çift sıralı fonksiyondur. (f, g) diğer yandan (3.4)'ün yörüngesi (3.4)'ün birden fazla çözümü tarafından parametrik olarak belirlenebilen xy faz düzleminde bir eğridir. xy faz düzleminin herhangi bir noktasından (3.4)'ün en fazla bir yörüngesi geçebilir. C , (3.4)'ün bir yörüngesi olsun ve bu C yörüngesini parametrik olarak belirleyen (3.4)'ün farklı çözümlerinin tümünü göz önünde bulunduralım. Belirlenen bu çözümlerin her biri için C , t parametresi artarken

aynı yönde çizilir. Bu nedenle her bir C yörüngesinin, C nin uygun sistem çözümleri ile çeşitli muhtemel parametrik gösterimlerdeki t parametresinin belirli bir artış yönü vardır. Şekillerimizde yörüngeye bağlı bu yönü göstermek için oklar kullanacağız. Sistemin iki denklemi (3.4) arasındaki t yi çıkararak

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \quad (3.7)$$

denklemini elde ederiz.

Bu denklem, P ve Q nun her ikisi de bu noktada sıfır olmaması koşuluyla (x, y) noktasından geçen (3.4)'ün yörüngesine teğetin eğimini verir. (3.7)'deki çözümlerin parametre takımı böylece (3.4)'ün yörüngelerinin bir parametre takımını sağlar. Ancak açıklama(3.7) bu yörüngelere bağlı yönleri göstermez. P ve Q nun her ikisinin de sıfır olduğu bir noktada (x_0, y_0) (3.7) tarafından belirlenen yörüngeye teğetin eğimi belirsizdir. Bu tür noktalar bir sonraki tanımda belirlenecektir.

Kritik Nokta

Verilen bir otonom sistemde

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad (3.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

$P(x_0, y_0) = 0$ ve $Q(x_0, y_0) = 0$ olduğu bir nokta (x_0, y_0) , (3.4)'ün kritik noktası olarak adlandırılır.

Eğer (3.4) sistemine ait (x_0, y_0) noktası etrafında,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

çemberi varsa ve (x_0, y_0) noktası bu çember içerisindeki, (3.4) sistemine ait tek kritik nokta ise bu noktaya yalıtılmış denir.

Bundan sonraki takip eden konuda her kritik noktayı yalıtılmış olarak kabul edeceğiz.

Kolaylık olsun diye (x_0, y_0) kritik noktasının $(0,0)$ orijin noktasında olduğunu kabul edeceğiz. Eğer $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ ise genel olarak bu kabulden bir kaybımız olmaz. Böyle olursa $\xi = x - x_0, \eta = y - y_0$ (x_0, y_0) noktasını $\xi\eta$ düzleminde orijine yerleştirir.

$C, (3.4)$ sisteminin bir yörüngesi olsun ve $x = f(t), y = g(t)$ C 'yi parametrik olarak tanımlayan, (3.4) sisteminin çözümü olsun. Eğer aşağıdaki denklem sistemi $t \rightarrow +\infty$ 'a gidildikçe C 'nin $(0,0)$ kritik noktasına yaklaştığını kabul edeceğiz

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0. \quad (3.8)$$

$t \rightarrow +\infty$ 'a gittikçe, $x = f(t), y = g(t)$ tarafından parametrik olarak tanımlanan C yörüngesi $(0,0)$ kritik noktasına yaklaşımından anladığımız C yörüngesini izleyen ve $x = f(t), y = g(t)$ tarafından tanımlanmış bir R noktasının $t \rightarrow +\infty$ 'a gidildikçe, $(0,0)$ kritik noktasına yaklaşacağıdır. C yörüngesinin $(0,0)$ kritik noktasına yaklaşmasını tanımlayan bu denklem C 'yi tanımlayan asıl düzlem sisteminin çözümünden bağımsızdır. Bu durum, eğer $t \rightarrow +\infty$ 'a gidildikçe $C(0,0)$ kritik noktasına yaklaşıyorsa, C 'yi temsil eden tüm $x = f(t), y = g(t)$ çözümleri için geçerlidir.

Buna benzer olarak eğer aşağıdaki denklem sistemini sağlıyorsa $x = f(t), y = g(t)$ tarafından parametrik olarak tanımlanmış bir C_1 yörüngesinin, $t \rightarrow -\infty$ 'a gidildikçe $(0,0)$ kritik noktasına yaklaşır

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} g_1(t) = 0.$$

$C, (3.4)$ sisteminin bir yörüngesi olsun ve $x = f(t), y = g(t)$ C 'yi parametrik olarak tanımlayan, (3.4) sisteminin çözümü olsun. Eğer aşağıdaki denklem sistemi $t \rightarrow +\infty$ 'a gidildikçe C 'nin $(0,0)$ kritik noktasına yaklaştığını kabul edeceğiz. Eğer $t \rightarrow +\infty$ 'a gidildikçe çözümü artı veya eksi sonsuz çıkıyorsa

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{f(t)} \quad (3.9)$$

(3.9)'ün C 'nin $(0,0)$ kritik noktasına yaklaştığını söyleriz.

3.2 Kritik Nokta Çeşitleri

Şimdi her bir kritik nokta çeşidi için uygun bir şekli ifade eden, geometrik bir tanımlama yapacağız. Daha sonra her bir tanımlama daha açık bir ifadeyle takip edeceğiz.

a) Merkez Noktası

Şekil 3. 1(a)'nın $(0,0)$ kritik noktası bir **merkez** noktası olarak adlandırılır. Bu şekildeki bir nokta, elemanları $(0,0)$ noktasına keyfi yakın olan, sonsuz kapalı yörüngeler kümesi tarafından çevrelenmiştir fakat $t \rightarrow +\infty$ veya $t \rightarrow -\infty$ 'a giderken herhangi bir yörüngeye yaklaşmamaktadır.

b) Eyer Noktası

Şekil 3. 1(b)'ye ait $(0,0)$ kritik noktasına eyer noktası (saddle) denir. Bu tür bir nokta şu şekilde karakterize edilebilir;

$t \rightarrow +\infty$ 'iken bu noktaya, AB geometrik eğrisini oluşturan, iki tane yarım yörünge (A0 ve B0) tarafından 0 noktasına yaklaşıp girilmektedir.

$t \rightarrow -\infty$ 'iken bu noktaya, CD geometrik eğrisini oluşturan, iki tane yarım yörünge (C0 ve D0) tarafından 0 noktasına uzaklaşılarak girilmektedir.

Bu dört yarım yörünge arasında, (1) ve (2) de tanımlanmış dört R_1, R_2, R_3, R_4 bölgeleri, her birinin içinde sonsuz adet yarı hiperbolik benzeri yörüngeler bulunan ve $t \rightarrow +\infty$ veya $t \rightarrow -\infty$ 'a giderken sifıra yaklaşmayan fakat $t \rightarrow +\infty$ veya $t \rightarrow -\infty$ 'a giderken içlerinden biri asimptotik olan dört yarı yörüngeden oluşan kümeler bulunur.

c) Spiral Nokta

Şekil 3. 1(c)'ye ait $(0,0)$ kritik noktasına spiral (ya da odak) noktası denir. Bu noktaya $t \rightarrow +\infty$ 'a (veya $t \rightarrow -\infty$) gidildikçe, spiral benzeri yapıda olan ve sonsuz sayıdaki yörüngeden oluşan yörünge kümeleri tarafından yaklaşılmaktadır. Yörüngelerin, orijin noktasına yaklaşırken, orijin noktasına girmediğine dikkat ediniz. Bu, $t \rightarrow +\infty$ 'a gittikçe, orijine yaklaşan C yörüngesini izleyen R yörüngesidir. Ancak, OR çizgisi, yörünge sabit olarak orijinin etrafında döndüğü için, belirli bir yönde meyilli değildir.

d) Düğüm Noktası

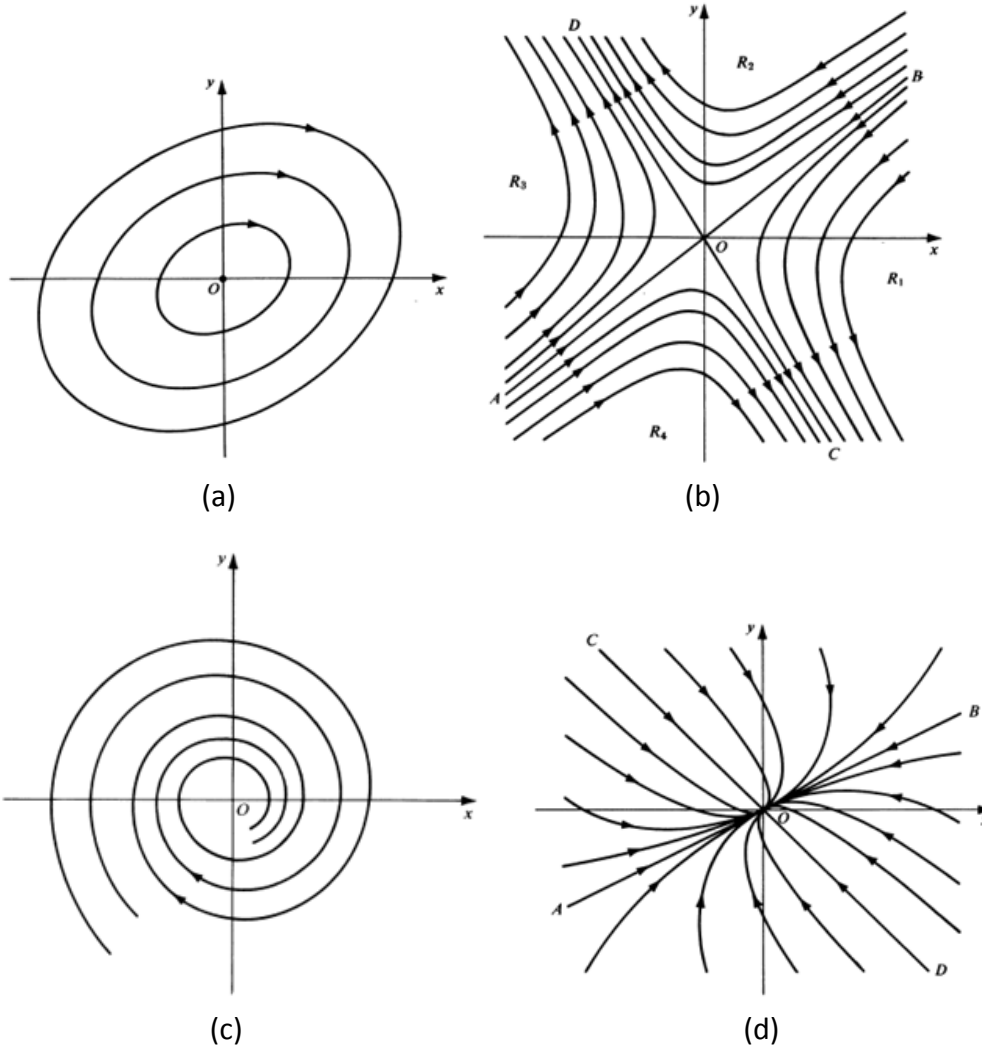
Şekil 3. 1(d)'nin $(0,0)$ kritik noktasına düğüm noktası denir. Bu noktaya $t \rightarrow +\infty$ 'a (veya $t \rightarrow -\infty$) gidildikçe, sonsuz sayıdaki yörüngeden oluşan yörünge kümeleri tarafından yaklaşılmakla beraber aynı zamanda girilmektedir. Bu $t \rightarrow +\infty$ 'a (veya $t \rightarrow -\infty$) gidildikçe, orijine yaklaşmakla beraber, OR çizgisi, belirli bir yönde meyilli olan C yörüngesini izleyen R noktasıdır. Şekil 3. 1(d)'de gösterilen düğüm noktası için dört tane düz çizgi halindeki

yörünge vardır, bunlar: AO , BO , CO ve DO dur. Diğer tüm yörüngeler yarı parabolüdür. Bu yarım parabolik benzeri yörüngeler orijine yaklaştıkça kuyrukları da AB çizgisine yaklaşır.

Daha kesin bir dille ifade etmek istersek;

Şekil 3. 3 (d) de izole edilmiş $(0,0)$ kritik noktası, $(0,0)$ komşuluğunun varlığından ve bu komşuluğun içinde bulunan P noktası aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, bu noktaya düğüm noktası denir.

Tüm $t > t_0$ (veya $t < t_0$) için tanımlı bazı t_0 noktaları için , $t \rightarrow +\infty$ 'a (veya $t \rightarrow -\infty$) gidildikçe, $(0,0)$ noktasına yaklaşıyorsa ve $(0,0)$ noktasına giriyorsa P noktası bir düğüm noktasıdır.



Şekil 3. 1 Kritik nokta çeşitleri

3.3 Kararlılık

Denklem (3.4) ile verilen aşağıdaki sistemin izole edilmiş kritik noktası $(0, 0)$ olsun.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

Bu sistemin kararlılığını ve asimptotik kararlılığını tanımlayacağız.

C eğrisi, (3.4) sisteminin bir yörüngesi olsun. $x = f(t), y = g(t)$, (3.4) sisteminin çözümü olsun ve C eğrisini parametrik olarak tanımlasın buna göre

$$D(t) = \sqrt{[f(t)]^2 + [g(t)]^2} \quad (3.10)$$

denklemini, $(0,0)$ kritik noktası ile, C üzerinde bulunan $R: [f(t), g(t)]$ noktası arasındaki uzaklığı ifade etsin. $(0,0)$ kritik noktası, eğer her $\epsilon > 0$ sayısı için bir $\delta > 0$ sayısı varsa ve şu koşulu sağlıyorsa kararlıdır denir:

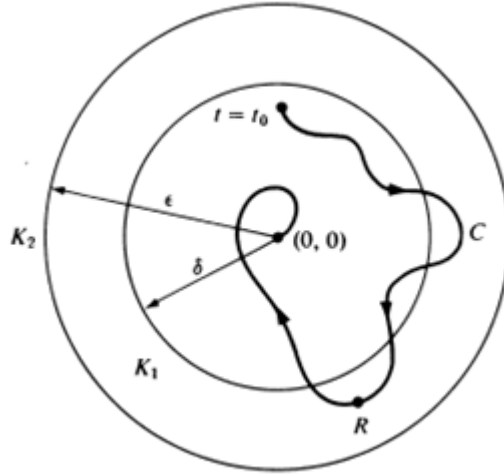
Her C yörüngesinin de bazı t_0 değerleri için

$$D(t_0) < \delta \text{ olmak üzere} \quad (3.11)$$

$$\text{tüm } t \geq t_0, \quad t_0 \leq t < \infty \text{ için } D(t) < \epsilon \quad (3.12)$$

Şekil 3. 2 ten yararlanarak bu tanımı analiz edelim. Eğer herhangi bir pozitif ϵ noktası için “bir şey” yapan başka bir δ pozitif sayısı bulunur ise $(0,0)$ kritik noktası kararlı bir noktadır. Peki bu “bir şey” nedir? Bu sorunun cevabını verebilmek için, (3.11) ve (3.12)’de verilen eşitsizlikleri anlamamız gereklidir. (3.10)’a göre $D(t_0) < \delta$, bazı t_0 değerleri için (3.11) ifadesinin anlamı: $(0,0)$ kritik noktası ile, C üzerinde bulunan $R: [f(t), g(t)]$ noktası arasındaki uzaklık, $t = t_0$ ’da δ ’dan küçük olmalıdır. Bunun anlamı $(0,0)$ civarında, $t = t_0$ ’da R ’nin, yarıçapı δ olan K_1 çemberi içerisinde olmasıdır. Buna benzer olarak, $D(t) < \epsilon$, tüm $t_0 \leq t < \infty$ (3.12) eşitsizliğinin anlamı, $(0,0)$ kritik noktası ile R arasındaki uzaklığın, tüm $t \geq t_0$ değerleri için ϵ ’dan küçük olduğu ve ayrıca $t \geq t_0$ olması yüzünden, R ’nin, yarıçapı ϵ olan K_2 çemberi içerisinde olmasıdır. Artık δ ’nın bizim için yaptığı “şey” in ne olduğunu anlayabilmekteyiz. Eğer $(0,0)$ kararlı ise, yarıçapı δ olan K_1 çemberi içerisinde bulunan her C yörüngesi, yarıçapı ϵ olan K_2 çemberi içerisinde kalacaktır. Kabaca her C yörüngesi (ϵ

mesafesi içerisinde), olmasını istediğimiz gibi, $(0,0)$ noktasına yakın (δ mesafesi içerisinde) kalıyorsa $(0,0)$ kritik noktası kararlıdır.



Şekil 3. 2 Denklem (3.4) ile verilen yörüngesinin davranışı

Eğer bir kritik nokta yukarıdaki anlatılan anlamda kararlı değilse, kararsızdır denir.

Bu tanımlamalara göre kararlı kritik noktalara örnek olarak, Şekil 3. 1 (a) merkez, (c) spiral ve (d) düğüm noktaları verilebilir. Bu üçü içerisinde, spiral ve düğüm noktası asimptotik kararlıdır. Şekil 3. 1'deki yörüngelerin yönleri tersine çevrilmiş olsaydı bu spiral ve düğüm noktaları kararsız olacaktı. Şekil 3. 1 (b) de ki eyer noktası ise kararsız bir kritik noktadır.

3.4 Doğrusal Sistemlerin Yörünge ve Kritik Noktaları

3.4.1 Temel Teoremler

Bu bölümde (3.4) formundaki doğrusal olmayan otonom sistemlere karşılık gelen doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri incelenecektir. Bu tip doğrusal olmayan sistemlerin kritik noktalarının sınıflandırılmasının nasıl yapılacağı incelenecektir. Uygun şartlar altında, doğrusal olmayan sistemin doğrusal olan sistemle değiştirilebileceği ve bu doğrusal sistemi uygulayarak kritik noktanın doğasının belirlenebileceği gösterilecektir.

Şu doğrusal sistemi göz önüne alalım;

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by, \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Burada a, b, c ve d reel sabitlerdir. (3.13)'ün $(0,0)$ noktası, açıkça bir kritik noktadır.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0\tag{3.14}$$

Olduğunu varsayacağız. Bu nedenle $(0,0)$ noktası, (3.13) sisteminin tek kritik noktası olacaktır.

(2.13) sisteminin çözümü şu formda olacaktır;

$$\begin{aligned}x &= Ae^{\lambda t} \\ y &= Be^{\lambda t}\end{aligned}\tag{3.15}$$

Eğer (3.15), (3.13) sisteminin bir çözümü olacaksa, λ şu ikinci dereceden denklemi sağlamalıdır;

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0\tag{3.16}$$

Bu denkleme (3.13)'ün karakteristik denklemi adı verilir. (3.14) yüzünden sıfırın (3.16) denkleminin kökü olamayacağına dikkat ediniz.

λ_1 ve λ_2 (3.16) karakteristik denkleminin kökleri olsun. (3.13) sistemine ait $(0,0)$ noktasının yapısının, λ_1 ve λ_2 köklerinin yapısına bağlı olduğunu kanıtlayacağız. λ_1 ve λ_2 köklerinin yapısına bağlı olarak üç olası durum beklemeliyiz. Bunlar köklerin; reel ve farklı, reel ve eşit, karmaşık eşlenik olması durumlarıdır. Ancak durum gerçekte bu kadar basit değildir ve beş farklı durumu ele almamız gerekir.

1. λ_1 ve λ_2 reel, farklı ve aynı işaretli
2. λ_1 ve λ_2 reel, farklı ve farklı işaretli
3. λ_1 ve λ_2 reel ve eşit
4. λ_1 ve λ_2 kompleks eşlenik fakat sadece sanal kısım içermeyen
5. λ_1 ve λ_2 tamamen sanal kısımdan oluşan kompleks olması durumları

1- (3.16) karakteristik denkleminin kökleri λ_1 ve λ_2 , reel, farklı ve aynı işaretli ise

(3.13) sisteminin (0,0) kritik noktası bir düğüm noktasıdır. Bunu kanıtlamak mümkündür, buna göre İlk olarak λ_1 ve λ_2 'nin her ikisinin de negatif ve $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ olduğunu varsayacağız. (3.13) sisteminin genele çözümü şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned} x &= c_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y &= c_1 B_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 B_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Burada A_1, B_1, A_2 ve B_2 belirli sabitlerdir ve $A_1 B_2 \neq A_2 B_1$ dir. Ayrıca c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. $c_2 = 0$ seçerek şu sonucu elde ederiz.

$$\begin{aligned} x &= c_1 A_1 e^{\lambda_1 t} \\ y &= c_1 B_1 e^{\lambda_1 t} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$c_1 = 0$ seçerek şu sonucu elde ederiz.

$$\begin{aligned} x &= c_2 A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y &= c_2 B_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Her $c_1 > 0$ değeri için, (3.18)'in çözümü bize B_1/A_1 eğrisine ait $B_1 x = A_1 y$ doğrusunun yarım yörüngesini verir. Her $c_1 < 0$ değeri için, (3.18)'in çözümü bize diğer yarıyı verecektir. $\lambda_1 < 0$ olduğundan dolayı, $t \rightarrow +\infty$ iken, bu her iki yarı yörünge (0,0) noktasına yaklaşacaktır. Ayrıca $y/x = B_1/A_1$ olduğundan dolayı, bu iki yörünge B_1/A_1 eğrisi ile beraber (0,0) noktasına girer.

Benzer şekilde, her $c_2 > 0$ değeri için, (3.19)'un çözümü bize B_2/A_2 eğrisine ait $B_2 x = A_2 y$ doğrusunun yarım yörüngesini verir. Her $c_2 < 0$ değeri için, (3.19)'in çözümü bize diğer yarıyı verecektir. $\lambda_2 < 0$ olduğundan dolayı, $t \rightarrow +\infty$ iken, bu her iki yarı yörünge (0,0) noktasına yaklaşacaktır. Ayrıca $y/x = B_2/A_2$ olduğundan dolayı, bu iki yörünge B_2/A_2 eğrisi ile beraber (0,0) noktasına girer.

Bu nedenle, (3.18) ve (3.19) bize her biri $t \rightarrow +\infty$ iken (0,0) noktasına yaklaşan ve giren dört tane yarım yörünge verecektir.

Eğer $c_1 \neq 0$ ve $c_2 \neq 0$ ise, (3.17) genel çözümü bize düz olmayan yörüngeler verecektir. Tekrar, $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ olduğundan dolayı, bütün bu yörüngeler $t \rightarrow +\infty$ iken (0,0) noktasına yaklaşacaktır. Buna ilaveten,

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 A_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 B_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 B_2 e^{\lambda_2 t}} = \frac{\left(\frac{c_1 B_1}{c_2}\right) e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + B_2}{\left(\frac{c_1 A_1}{c_2}\right) e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + A_2}$$

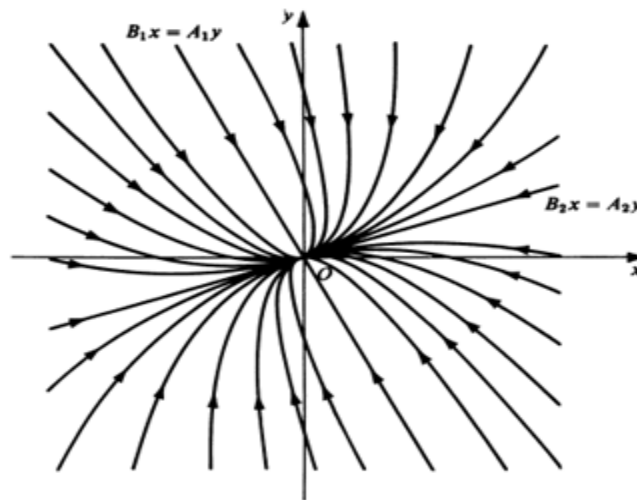
olduğundan dolayı,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \frac{B_2}{A_2}$$

olacaktır ve bu nedenle tüm yörüngeler B_2/A_2 eğrisi sınırları içerisinde $(0,0)$ noktasından geçer. Bu sebeple, tüm yörüngeler (düz ve düz olmayan) $t \rightarrow +\infty$ iken $(0,0)$ noktasından geçer. Ve ayrıca, (3.18) tarafından tanımlanan ikisi hariç tümü B_2/A_2 eğrisi ile girecektir. Bölüm 3. 2 (d) 'de ki tanıma göre, $(0,0)$ kritik noktası bir düğümdür. Açıkça asimptotik olarak kararlıdır. Şekil 3. 3'de yörüngelerin nitelikli bir diyagramı görülmektedir.

Şimdi eğer, λ_1 ve λ_2 nin her ikisinin de pozitif ve $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ olduğunu varsayarsak, (3.13)'ün genel çözümünü yine (3.17) formunda olduğunu görürüz ve özel (3.18) ve (3.19) çözümlerinin hali hazırda var olduğunu görürüz. Durum öncekiyle aynıdır, ancak tüm yörüngeler $t \rightarrow -\infty$ iken $(0,0)$ noktasından geçer. Şekil 3. 3'nin diyagramı hala geçerlidir fakat tüm oklar aksi yönde olacaktır. $(0,0)$ kritik noktası yine kararlı olacaktır ancak açıkça bir düğüm değildir.

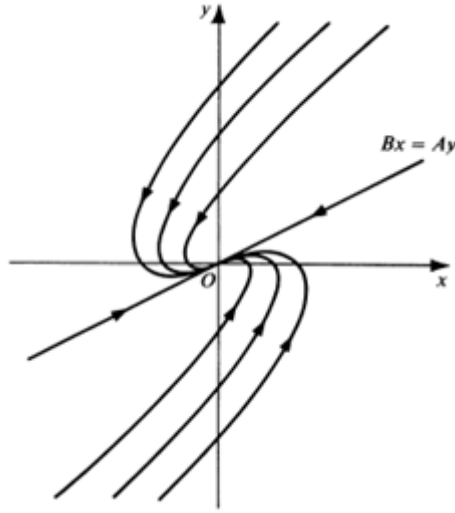
2- (3.16) karakteristik denkleminin kökleri λ_1 ve λ_2 , reel, farklı ve farklı işaretli ise (3.13) sisteminin $(0,0)$ kritik noktası şekil 3. 1 (b) de verilen bir eyer noktasıdır.



Şekil 3. 3 Düzüm noktası

3- (3.16) karakteristik denkleminin kökleri λ_1 ve λ_2 , reel ve eşit ise (3.13) doğrusal sisteminin $(0,0)$ kritik noktası bir düğüm noktasıdır.

4- (3.16)'daki karakteristik denklemin kökleri olan λ_1 ve λ_2 , sıfır olmayan (yani yalın sanal olmayan) gerçek kısmıyla eşlenik karmaşıktırlar. Bu durumda (3.13) doğrusal sisteminin $(0,0)$ kritik noktası şekil 3. 4 de verilen bir sarmal noktadır.



Şekil 3. 4 Sarmal nokta

5- (3.16)'deki karakteristik denklemin kökleri olan λ_1 ve λ_2 yalın sanaldırlar. Bu durumda (3.13) doğrusal sisteminin $(0,0)$ kritik noktası bir merkezdir.

(3.14) denkleminde $ad = bc \neq 0$, durumu için $(0,0)$ 'ın sisteminin tek kritik noktası olduğu doğrusal bir sistemi aşağıdaki gibi göz önünde bulunduralım.

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \quad (3.13)$$

Bu Durumda;

a) Eğer (3.16) karakteristik denkleminin her iki kökü negatif gerçek kısımlarla gerçek, negatif veya eşlenik karmaşıksa o zaman (3.13)'ün $(0,0)$ kritik noktası asimptotik olarak sabittir.

b) Eğer (3.16)'nın kökleri yalın sanal ise o zaman (3.13)'ün $(0,0)$ kritik noktası sabittir ancak asimptotik olarak sabit değildir.

c) Eğer (3.16)'nin her iki kökü de gerçektir ve pozitifse veya eğer kökler pozitif gerçektir ve kısımlarla eşlenik karmaşıksa o zaman (3.13)'ün $(0,0)$ kritik noktası değişkendir.

3.5 Doğrusal Olmayan Sistemlerin Yörünge ve Kritik Noktaları

3.5.1 Doğrusal Olmayan Sistemler Hakkındaki Temel Teoremler

Doğrusal olmayan reel otonom bir sistemini ele alalım.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y)\end{aligned}\tag{3.22}$$

(3.4) sisteminin, orijini keyfi olarak seçilmiş olan $(0,0)$ noktasında izole edilmiş bir kritik noktaya sahip olduğunu varsayalım. (3.4) sisteminde eşitliğin sağında bulunan $P(x, y)$ ve $Q(x, y)$ fonksiyonlarının şu formda yazılabileceği varsayımında bulunalım:

$$\begin{aligned}P(x, y) &= ax + by + P_1(x, y), \\ Q(x, y) &= cx + dy + Q_1(x, y).\end{aligned}\tag{3.23}$$

Burada:

1. a, b, c ve d reel sabitler, ve

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

olur. Ayrıca,

2. P_1 ve Q_1 tüm (x, y) değerleri için birinci dereceden, sürekli, kısmi türevlere sahip olsun ve

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{P_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{Q_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \text{ koşulunu sağlasın}$$

bu durumda ele alınan sistem şu formda yazılabilir:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by + P_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + Q_1(x, y)\end{aligned}\tag{3.24}$$

Böylece a, b, c, d, P_1 ve Q_1 yukarıda verilen 1 ve 2 nolu maddelerin şartlarını yerine getirecektir.

Eğer (3.4)'de verilen sistemin, (0,0) noktası etrafında kuvvet serisi yazılmak istenirse şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \left[\frac{\partial P}{\partial x} \right]_{(0,0)} x + \left[\frac{\partial P}{\partial y} \right]_{(0,0)} y + a_{12} x^2 + a_{22} x y + a_{21} y^2 + \dots \\ \frac{dy}{dt} &= \left[\frac{\partial Q}{\partial x} \right]_{(0,0)} x + \left[\frac{\partial Q}{\partial y} \right]_{(0,0)} y + b_{12} x^2 + b_{22} x y + b_{21} y^2 + \dots\end{aligned}\quad (3.25)$$

(3.24)'deki denklem formunda yazılan yukarıdaki sistemde, eşitliğin $P_1(x, y)$ ve $Q_1(x, y)$ terimleri yüksek mertebededir. 1. ve 2. maddede verilen koşulları ise aşağıda verilen jakobiyen ile sağlanır.

$$\left. \frac{\partial(P, Q)}{\partial(x, y)} \right|_{(0,0)} \neq 0$$

(3.25)'deki denklem sisteminde, $P(0,0) = Q(0,0) = 0$ olduğundan dolayı, eşitliğin sağında bulunması gereken sabit terimlerin olmadığına dikkat ediniz.

Teorem

Hipotez:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by + P_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + Q_1(x, y)\end{aligned}\quad (3.24)$$

Doğrusal olmayan sistemi ele alırsak, buradaki a, b, c, d, P_1 ve Q_1 önceki sayfada verilen 1 ve 2 nolu maddelerin şartlarını yerine getirecektir. Ayrıca (3.24) sisteminden $P_1(x, y)$ ve $Q_1(x, y)$ terimlerinin çıkarılmasıyla elde edilen aşağıdaki doğrusal sistemi ele alalım:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy\end{aligned}\quad (3.13)$$

Her iki sistem de (0,0) noktasında izole bir kritik noktaya sahiptir. (3.13) doğrusal sistemi için, λ_1 ve λ_2 nin karakteristik denklem kökleri olduğunu kabul edelim. Öyleyse:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (3.16)$$

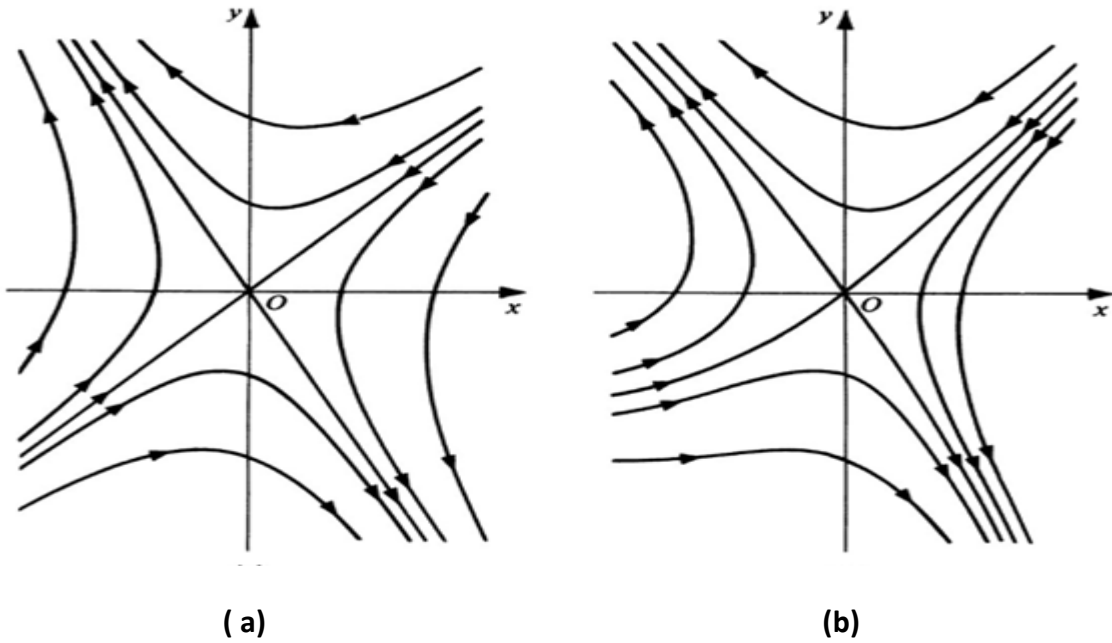
Sonuçlar: Aşağıdaki hallerde, (3.13) doğrusal sisteminin (0,0) noktasındaki kritik noktası (3.24) sistemi ile aynıdır:

λ_1 ve λ_2 kökleri reel, farklı ve aynı işarete sahipse; $(0,0)$ noktası sadece (3.13) sisteminin değil, aynı zamanda (3.24) sisteminin de düğüm noktasıdır.

- (i) λ_1 ve λ_2 kökleri reel, farklı ve ters işaretliyse; $(0,0)$ noktası sadece (3.13) sisteminin değil, aynı zamanda (3.24) sisteminin de eyer noktasıdır.
- (ii) λ_1 ve λ_2 kökleri reel, çakışık ve (3.13) sistemi için $a = d \neq 0$, $b = c = 0$ şartları sağlanıyorsa; $(0,0)$ noktası sadece (3.13) sisteminin değil, aynı zamanda (3.24) sisteminin de düğüm noktasıdır.
- (iii) λ_1 ve λ_2 kökleri karmaşık eşlenik ve gerçel kısımları sıfırdan farklı ise, $(0,0)$ noktası sadece (3.13) sisteminin değil, aynı zamanda (3.24) sisteminin de spiral noktasıdır.

1. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa, (3.13) doğrusal o sistemin $(0,0)$ kritik noktası ile (3.24) doğrusal olmayan sistemin kritik noktası aynı tipte olmak zorunda değildir:

- (iv) λ_1 ve λ_2 kökleri reel, çakışık ve (3.13) sistemi için $a = d \neq 0$, $b = c = 0$ şartları sağlanıyorsa; $(0,0)$ noktası (3.13) doğrusal sisteminin düğüm noktası olmasına rağmen, (3.24) için bu nokta düğüm veya sarmal olabilir.



Şekil 3. 5 Doğrusal ve doğrusal olmayan eyer noktası

- (v) λ_1 ve λ_2 kökleri sadece sanal kısımdan oluşuyor ise; $(0,0)$ noktası (3.13) doğrusal sisteminin merkez noktası olmasına rağmen, (3.24) için bu nokta merkez veya sarmal olabilir.

(3.24) doğrusal olmayan sistemi için $(0,0)$ kritik noktasıyla, (3.13) doğrusal sisteminin kritik noktası yukarıda verilen (i), (ii), (iii) ve (iv) şartları sağlandığında aynı olsa da; aslında yörüngelerin gerçek görünüşleri biraz farklıdır. Örneğin, $(0,0)$ noktası, (3.13) doğrusal sistemi için bir eyer noktasıysa $(0,0)$ noktasından geçen dört adet yarım yörünge bulunduğunu bilinmektedir. Bunlar: $t \rightarrow +\infty$ için iki tane ve $t \rightarrow -\infty$ için iki tanedir. Ancak, (3.24) doğrusal olmayan sisteminde $(0,0)$, doğrusal olan sistemde yer alan yarım yörüngelerin geçtiği yerler yerine, eyer noktasından geçen 4 adet doğru olmayan (eğimli) yörünge bulunmaktadır. Bunlar: $t \rightarrow +\infty$ için iki tane ve $t \rightarrow -\infty$ için iki tanedir. Bu durum Şekil 3. 5’de gösterilmiştir.

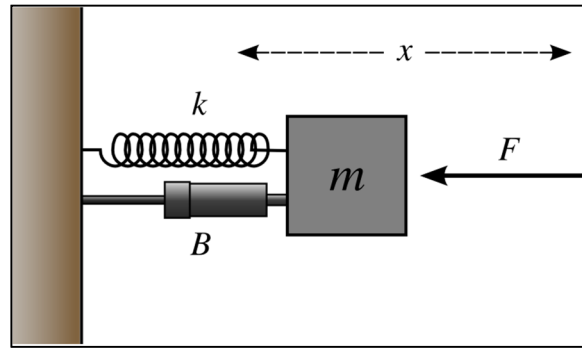
Teorem, (3.24) doğrusal olmayan sisteminin $(0,0)$ kritik noktasının tipini açıklamaktadır. Aynı sistemin $(0,0)$ noktasındaki kararlılığını ise “ Liapunov Teoremi” ile incelemektedir. Buna göre

1. (3.13)’e ait (3.16)’da verilen karakteristik denkleminin λ_1 ve λ_2 kökleri, reel ve negatifse veya negatif gerçel kısma sahip kompleks eşlenik köklerse; $(0,0)$ noktası sadece (3.13) doğrusal sistemine ait asimptotik kararlı kritik noktası değil, aynı zamanda (3.24) doğrusal olmayan sisteminin de asimptotik kararlı kritik noktasıdır.
2. λ_1 ve λ_2 kökleri, sadece sanal kısımdan oluşuyorsa; $(0,0)$ noktası (3.24) sisteminin asimptotik kararlı kritik noktası olmasına rağmen, (3.13) doğrusal sistemi için $(0,0)$ kritik noktası karardır ancak asimptotik kararlı olmayabilir.

λ_1 ve λ_2 köklerinin herhangi biri reel ve pozitif veya gerçel kısımları pozitif karmaşık eşlenikse; $(0,0)$ noktası sadece (3.13) doğrusal sistemine ait kararsız kritik noktası değil, aynı zamanda (3.24) doğrusal olmayan sisteminin de kararsız kritik noktasıdır.

DİNAMİK SİSTEMLERE ÖRNEKLER

4.1 Dinamik Sisteme Örnek Olarak Zorlamalı Sönümlü Salınıcı Problemi



Şekil 4. 1 Zorlamalı sönümlü salınım sistemi

Yukarıdaki şekilde belirtilen kütle-yay sistemine ait diferansiyel denklem şu şekildedir. (B sönüm terimi = α olmak üzere)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (4.1)$$

Burada $m > 0$, $\alpha \geq 0$ ve $k > 0$ sabitleri sırasıyla; kütle, sönümleme katsayısı, yay sabitidir.

(4.1) denkleminin birinci mertebe eşdeğer sistemi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{\alpha}{m}y \quad (4.2)$$

(4.2) sisteminin çözümü (4.1) denklem sistemi ile ilişkisi bulunan xy faz düzlemindeki yörüngeleri (faz yörüngelerini) tanımlar. (4.2) denkleminin bu yörünge diferansiyel denklemleri ise iki denklemin oranından şu şekilde bulunur:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{kx + \alpha y}{my}$$

(4.2) sisteminin tek kritik noktasının $(0,0)$ olduğu görülmektedir. (4.1) denkleminin karakteristik denklemi:

$$\lambda^2 + \frac{\alpha}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \quad (4.3)$$

İle gösterilirken, (4.2) diferansiyel denkleminin yardımcı denklemi ise şöyledir:

$$mr^2 + \alpha r + k = 0 \quad (4.4)$$

Çizelge 4. 1 (4.1) sisteminin davranışı

Sönümleme Faktörü α	Karakteristik ve Yardımcı denklemin köklerinin yapısı	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$ $\beta = \alpha/2m$ Denklemlerinin çözüm formu	$(0,0)$ kritik noktasının xy faz düzlemindeki yapısı	Yorum
$\alpha = 0$ (sönümleme yok)	Sadece sanal kısımdan oluşan kökler	$x = c \cos(\omega t + \phi)$	(Kararlı) Merkez	Salınım hareketi. Yer değiştirme ve hız, zamanın periyodik fonksiyonudur.
$\alpha < 2\sqrt{km}$ (eksik sönümleme)	Reel kısımları negatif olan karmaşık eşlenik kökler	$x = ce^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \phi)$ $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$	Asimptotik kararlı spiral	Sönümlenen salınım hareketi. Yer değiştirme ve hız giderek azalarak sıfıra yaklaşır.

Çizelge 4. 1 (4.1) sisteminin davranışı(devamı)

Sönümlleme Faktörü α	Karakteristik ve Yardımcı denklemin köklerinin yapısı	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$ $\beta = \alpha/2m$ Denklemlerinin çözüm formu	(0,0) kritik noktasının xy faz düzlemindeki yapısı	Yorum
$\alpha = 2\sqrt{km}$ (kritik sönümlleme)	Reel, çakışık ve negatif kök	$x = (c_1 + c_2 t) e^{-\beta t}$	Asimptotik kararlı düğüm	Salınım yok. Yer değiştirme ve hız sifıra yaklaşır.
$\alpha > 2\sqrt{km}$ (aşırı sönümlleme)	Reel, birbirinden farklı ve negatif	$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ $r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$ $r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$	Asimptotik kararlı düğüm	Salınım yok. Yer değiştirme ve hız sifıra yaklaşır.

(4.4) ve (4.3) denklemleri açıkça aynı λ_1 ve λ_2 köklerine sahiptir. Çizelge (4. 1) da olası tüm durumların, denklem çözüm formları, kritik noktanın faz analizi ve kısaca yorumları toplu halde verilmiştir.

4.2 Doğrusal Olmayan Korunumlu Sistemler

Enerji kaybı ihmal edilebilecek kadar küçük olan bir dinamik sistemi ele alalım. Bu ihmali de göz önüne alarak, enerjinin korunumu kanununa göre, sistemin kinetik enerjisi ile potansiyel enerjisinin toplamı sabit olacaktır. Bir başka deyişle sistem korunumlu olarak kabul edilecektir.

Spesifik olarak, x yer değiştirmesinin bir fonksiyonu olan F kuvvetinin ilk haline dönmesi için gerekli eğrisel hareket halinde olan m kütesinin bir parçacığını ele alacağız. O halde, hareketin diferansiyel denklemi şöyle olacaktır:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x) \quad (4.4)$$

Burada F , tüm x değerleri için var olduğunu kabul edelim. (4.4) diferansiyel denklemi doğrusal olmayan otonom sisteme eşdeğerdir.

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{F(x)}{m} \quad (4.5)$$

dt terimini elimine ederek, (4.5) sistemine ait xy faz düzlemi için rotalarının diferansiyel denklemini elde ederiz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x)}{my} \quad (4.6)$$

Buna göre, $dy my = F(x) dx$, $x = x_0$ ve $t = t_0$ noktasında $y = \frac{dx}{dt} = y_0$ olduğunu varsayarak integral alınırsa:

$$\frac{1}{2} m y^2 - \frac{1}{2} m y_0^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx$$

veya,

$$\frac{1}{2} m y^2 - \int_0^x F(x) dx = \frac{1}{2} m y_0^2 - \int_0^{x_0} F(x) dx \quad (4.7)$$

Denklemi elde edilir. Bu denklemde $\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dy} \right)^2$ sistemin kinetik enerjisidir ve

$$V(x) = - \int_0^x F(x) dx$$

Sistemin potansiyel enerjisini oluşturur. Bu sebeple (4.7)'deki eşitlik şu formu alır:

$$\frac{1}{2} m y^2 + V(x) = h \quad (4.8)$$

Burada h sistemin toplam enerjisidir ve açılımı ise şu şekildedir:

$$h = \frac{1}{2} m y_0^2 - \int_0^x F(x) dx = \frac{1}{2} m y_0^2 + V(x) \geq 0$$

(4.8) denklemi (4.6) denkleminde integral alma yöntemiyle bulunduğundan dolayı, (4.8) denkleminin xy faz düzlemindeki yörüngeleri verdiği görülebilmektedir. Verilen bir h değeri

için (3.8) denklemi yoluyla bulunan yörüngeler, xy düzlemi üzerinde sabit bir enerji eğrisi oluşturur. Bir başka deyişle, her bir enerji yörüngesi boyunca, sistemin toplam enerjisi sabittir; bu enerjinin korunumu kanuna da uymaktadır.

(4.5) sisteminin kritik noktaları $(x_c, 0)$ dir. Burada x_c , $F = 0$ denkleminin hesaplanmasıyla bulunur. Bu noktalara sistemin denge noktaları adı verilir. (4.6) denkleminde de görülebileceği gibi x eksenini kesen yollar düzlemin sağ tarafındadır ve $x = x_c$ doğrusuna yatay olarak teğettir. (4.8) denkleminde ise bu yolların x eksenine simetrik olduğu görülmektedir.

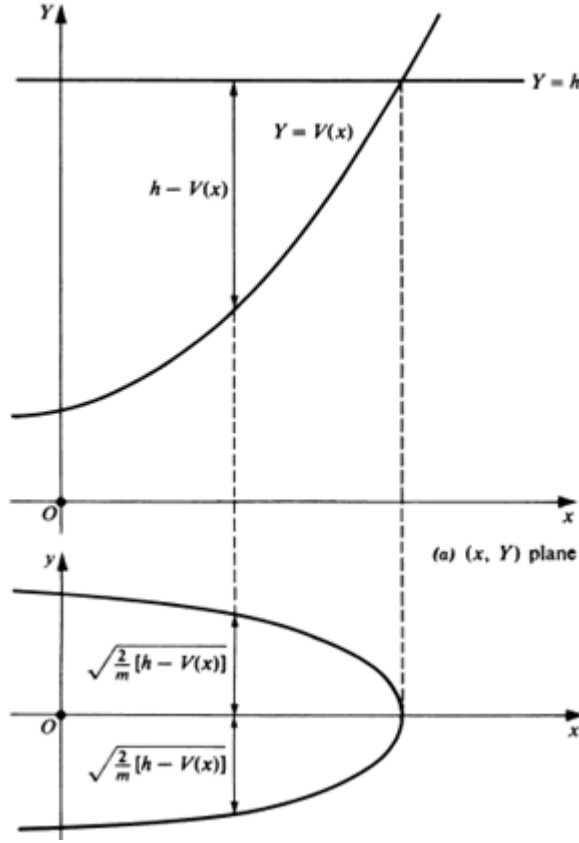
(4.8) denkleminde

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[h - V(x)]} \quad (4.9)$$

$y = f(x)$ yörüngeleri şu yolla bulunabilir:

- (a) Dikdörtgensel bir xY düzleminde oluşturulan, her bir h değeri için çizilmiş $Y = V(x)$ grafiği ve $Y = h$ doğrusu bulunarak (Şekil 4. 2(a)). Her bir sabit h değeri için $h - V(x)$ farkı bulunur.
- (b) xY düzleminin hemen altına xy faz düzlemi, Y eksenini ile y eksenini aynı dikey çizgide olacak şekilde çizilir (Şekil 4.2 (b)). (a) Metotta bulunan her bir $h - V(x)$ farkı, her x değeri için, $2/m$ sabitiyle çarpılır ve (4.9) denkleminde karşılık gelen xy faz düzlemindeki y değerleri bulunarak çizim yapılır.

(4.5) sisteminin kritik noktasının $(x_c, 0)$ olduğunu ve her bir x_c değerinin $F(x_c) = 0$ yoluyla bulunduğunu gözlemlemiştik. Şimdi $F(x) = -V'(x)$ olduğuna dikkat ediniz ve $V'(x) = 0$ in $V(x)$ fonksiyonunun ya göreceli bir ekstremumu ya da $x = x_c$ de bir kırılma noktasının varlığını ima ettiğini hatırlayınız. Bu sebepten ötürü, (4.5) sisteminin tüm kritik noktalarının x eksenini üzerinde olduğu ve $V(x)$ potansiyel enerji fonksiyonunun göreceli minimum olduğu veya dikey kırılmaya uğradığı noktalara karşılık geldiği sonucuna ulaşabiliriz. Şimdi bu üç olasılığı yukarıda belirtilen grafiksel metodu kullanarak tartışacağız.



Şekil 4. 2 (a) xY düzlemi, (b) xy faz düzlemi

1. $V(x)$ 'in $x = x_c$ noktasında göreceli minimum olduğunu varsayalım (bkz. şekil 4. 3).

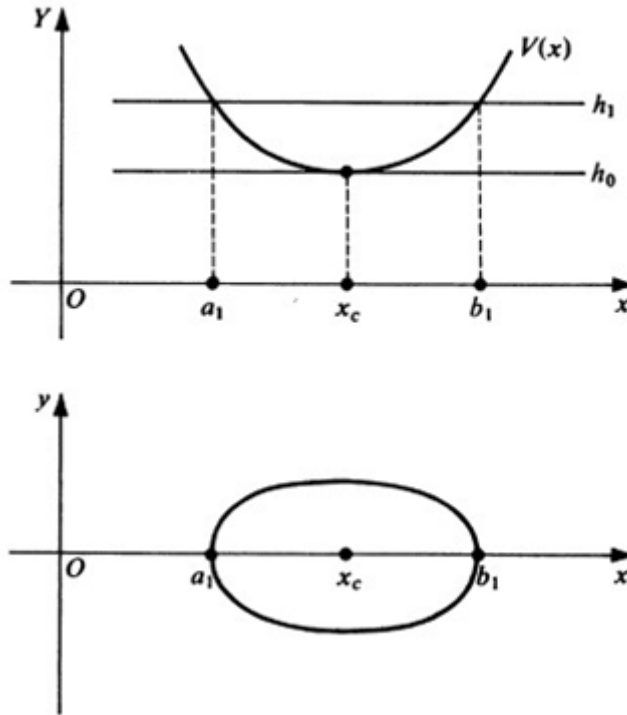
$V(x_c) = h_0 \geq 0$ kabul edelim ve h_0 'dan büyük bir h değeri ele alalım ve h_1 adını verelim. $h = h_1$ için, (4.9) denklemini kullanılarak bulunan y değeri, $a_1 \leq x \leq b_1$ için geçerlidir ayrıca $x = a_1$ ve $y = b_1$ noktalarının her birinde sıfıra eşittir. Yörüngelerin simetrik olması sebebiyle, $h = h_1$ 'e karşılık gelen rota, $(x_c, 0)$ noktası etrafında kapalı bir eliptik şekil oluşturur. Bu durum tüm $h > h_0$ yörüngeleri için geçerlidir ve $(x_c, 0)$ noktası etrafında yaklaşılarak devam eder. Bu sebeple $V(x)$ potansiyel enerji fonksiyonunun $x = x_c$ noktasında göreceli bir minimuma sahip olduğu ayrıca $(x_c, 0)$ kritik noktasının merkez ve kararlı olduğu sonucuna ulaşılır.

2. $V(x)$ 'in $x = x_c$ noktasında göreceli maksimum olduğunu varsayalım (bkz. şekil 4. 4).

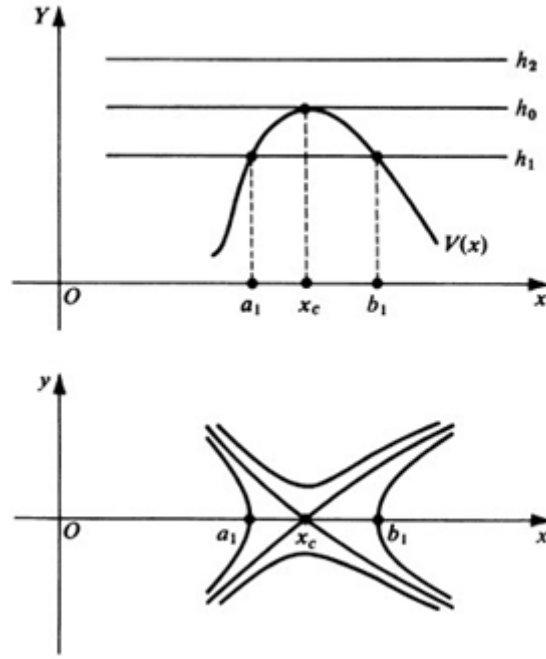
$V(x_c) = h_0 \geq 0$ kabul edelim ve h_0 'dan küçük bir h değeri ele alalım ve h_1 adını verelim. $h = h_1$ için, (4.9) denklemini kullanılarak bulunan karşılık gelen y değeri, $x \leq a_1$ ve $x \geq b_1$ noktalarının her birinde reelidir; ayrıca $x = a_1$ ve $y = b_1$ noktalarının her birinde sıfıra eşittir. Bu sebeple $x \leq a_1$ için, $h = h_1$ 'e karşılık gelen yörünge açıklığı $x = a_1$ doğrusunun soluna

bakan hiperbolik benzeri bir eğri şeklini alır. Oysa $x \geq b_1$ için, $h = h_1$ 'e karşılık gelen yörünge, açıklığı $y = b_1$ doğrusunun sağına bakan hiperbolik benzeri bir eğri şeklindedir.

Şimdi h_0 'dan büyük bir h değeri ele alalım ve h_2 adını verelim. $h = h_2$ için, (4.9) denklemini kullanılarak bulunan y değeri, x_c ye yakın tüm x değerleri için geçerlidir. Üstelik y 'nin pozitif değerleri $x = x_c$ 'ye karşılık gelen değer için minimumdur (m diyelim) ve y 'nin negatif değerleri $x = x_c$ 'ye karşılık gelen değer için maksimumdur ($-m$ olur). Bu nedenle x_c 'ye yeterince yakın olan $h = h_2$ 'ye karşılık gelen tüm x değerleri, bir tarafı (x_c, m) den yukarı bakan diğer tarafı ise $(x_c, -m)$ 'den aşağı bakan, bir çift hiperbolik benzeri şekil oluşturur.



Şekil 4. 3 Faz düzlemi davranışı



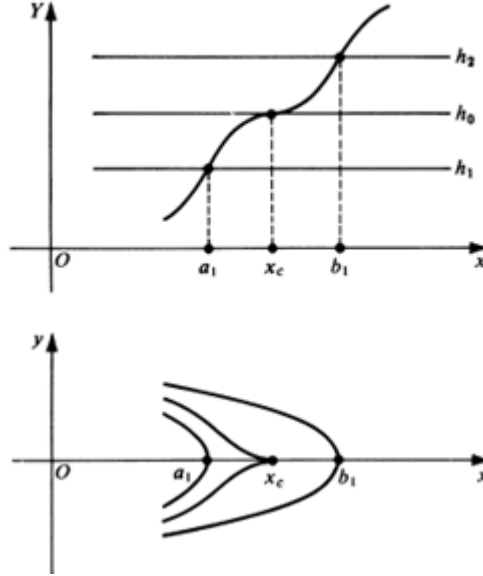
Şekil 4. 4 (4.8) ile verilen sistemin davranışı

Son olarak, $h = h_0$ 'a karşılık gelen yörüngeleri ele alalım. $h = h_1$ için, (4.9) denklemini kullanarak bulunan karşılık gelen y değeri, $x = x_c$ için sıfırdır. $x \neq x_c$ için ise gerçel ve ters işaretlidir. Bu sebeple, x eksenini $x = x_c$ noktasında kesen iki adet geometrik eğri vardır ve bu iki eğri $(x_c, 0)$ noktasına yaklaşan ve giren dört adet yoldan oluşur; $t \rightarrow +\infty$ için iki tane ve $t \rightarrow -\infty$ için iki tanedir. Bu ve bundan önceki iki paragraftaki tartışmamıza dayanarak; eğer $V(x)$ potansiyel enerji fonksiyonu $x = x_c$ 'de göreceli minimumsa $(x_c, 0)$ kritik noktasının bir eyer noktası ve kararsız olduğu sonucuna ulaşabiliriz.

3. $V(x)$ 'in $x = x_c$ noktasının yatay kırılma noktası olduğunu varsayalım (bkz. şekil 4. 5).

$V(x)$ 'in tüm $x \neq x_c$ için kesin olarak arttığını ve $V(x_c) = h_0 \geq 0$ olduğunu kabul edelim. Daha önceki 1 ve 2 durumlarını da göz önüne alarak, yörüngelerin şekil 4. 5 te gösterilen şekilde görüldüğüne ulaşabiliriz. Tipik bir $h \neq h_0$ değeri için (diyelim ki $h_1 < h_0$ veya $h_2 > h_0$) rotaların x eksenine neredeyse simetriktir ve x eksenini neredeyse doğru açılarda keser. $h = h_0$ için simetri özelliği korunur fakat boynuz şeklini alarak $(x_c, 0)$ kritik noktadan geçer. (bkz. şekil 4. 5) $(x_c, 0)$ kritik noktası, bozunmuş tip bir noktadır ve kararsızdır.

Böylece (4.9) ile verilen korunumlu bir sistem için faz uzayı gösterimi kullanılarak grafiksel bir çözüm bulunmuş olur. Analitik çözüm metodunu uygulanmasının yanı sıra, temel kalkülüs hesabıyla da aynı sonuca ulaşılabilir.



Şekil 4. 5 Yörüngelerin kritik noktadaki davranışı

Bu anlatılanlara göre

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x) \quad (4.10)$$

Şeklinde verilen ve korunumlu bir dinamik sistemin diferansiyel denklemi olsun. Buna göre bu denkleme

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{F(x)}{m} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Şeklinde eşdeğer otonom sistemi ele alınarak, $(x_c, 0)$ noktasının bu sistemin kritik noktası olduğunu varsayalım. Ayrıca V , (4.11) diferansiyel denklemine sahip dinamik sistemin $V(x) = - \int_0^x F(x) dx$ şeklinde tanımlanan potansiyel enerji fonksiyonu olsun.

Bu durumda şu sonuçlara ulaşılabilir:

1. Eğer potansiyel enerji fonksiyonu $x = x_c$ noktasında yerel minimuma sahipse $(x_c, 0)$ noktası dengeli bir merkez noktasıdır.

2. Eğer potansiyel enerji fonksiyonu $x = x_c$ noktasında yerel maksimuma sahipse $(x_c, 0)$ noktası dengersiz bir eyer noktasıdır.
3. Eğer potansiyel enerji fonksiyonu $x = x_c$ noktasında kırılıyor, bükülüyor ise $(x_c, 0)$ noktası dengersiz bir bozunum tipi boynuz noktasıdır.

4.3 Doğrusal Olmayan Sistemlerin Davranışlarının Parametreye Bağlılığı

Kısaca anlatmak gerekirse, korunumlu bir dinamik sistemde F kuvvetinin, sadece x yer değiştirme parametresine değil aynı zamanda λ parametresine de bağlı olması durumu söz konusu olabilir. Buna örnek olarak şu diferansiyel denklem formunu ele alalım:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, \lambda) \quad (4.12)$$

Burada F kuvvet fonksiyonu x ve λ nin tüm değerlerinin bir fonksiyonudur. (4.12)'de verilen diferansiyel denklemin, doğrusal olmayan otonom eşdeğer sistemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= F(x, \lambda) \end{aligned} \quad (4.13)$$

λ Parametresinin her sabit değeri için, (4.13) sisteminin kritik noktası $(x_c, 0)$ olacaktır. Buradaki x değeri olan x_c , $F(x, \lambda) = 0$ denkleminin köklerinden oluşur ve bilinmeyen x 'in bir denklemi olarak kabul edilir. Genel olarak, λ parametresi belirtilen bir aralıkta sürekli değişecektir, bunun sonucunda buna karşılık gelen x_c değeri noktası; nihayetinde de buna karşılık gelen (4.13) sisteminin kritik noktası, yörüngeleri ve çözümleri de değişecektir. λ Parametresinin alacağı bir değerde, kendinden önceki aldığı değerlere göre; iki veya daha fazla kritik noktada birleşecektir veya bunun tam tersi olacak bir veya daha fazla noktada birbirinden ayrılacaktır. Birleşme olayının gerçekleştiği λ değerlerine, kritik değer; ayrılma olayının gerçekleştiği değere ise dallanma değeri denir. Bu değerde, yörüngelerin doğası ansızın değişecektir. (4.13) sisteminin kritik değer ve noktaların belirlenmesinde $F(x, \lambda) = 0$ denkleminin, $x\lambda$ faz düzlemindeki ilişkilerinin grafiğinin incelenmesi bize fayda sağlayacaktır.

4.4 Liapunov' un Doğrudan Metodu

Bölüm 4.1 de, korunumlu bir dinamik sistemin denge noktasında, potansiyel enerji fonksiyonunun göreceli minimum olması durumunda sistemin kararlı, maksimum olması durumunda ise kararsız olduğunu incelemiştik. Bu prensip, Rus asıllı matematikçi olan Liapunov tarafından genellenerek, otonom korunumlu sistemlerin incelenmesi için yeni bir metot olarak geliştirilmiştir. Bu metoda Liapunov'un Direkt Metodu (veya ikinci metodu) denir.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y)\end{aligned}\tag{4.14}$$

(4.14) doğrusal olmayan otonom sistemini ele alalım. Sistemin $(0,0)$ orijin noktasında izole edilmiş bir kritik noktasının var olduğunu, ayrıca P ve Q fonksiyonlarının tüm (x, y) değerlerinin birinci kısmi türevleri için sürekli olduğunu kabul edelim.

TANIMLAR:

$E(x, y)$ fonksiyonunun, $(0,0)$ orijin noktasını da içeren D bölgesinde, tüm (x, y) değerinin birinci kısmi türevleri için sürekli olduğunu kabul edelim.

Eğer E fonksiyonu, D bölgesindeki tüm (x, y) değerleri için $E(0,0) = 0$ ve $E(x, y) > 0$ koşullarını sağlıyorsa; D bölgesinde, “pozitif tanımlı” adını alır.

1. Eğer E fonksiyonu, D bölgesindeki tüm (x, y) değerleri için $E(0,0) = 0$ ve $E(x, y) \geq 0$ koşullarını sağlıyorsa; D bölgesinde, “pozitif yarı-tanımlı” adını alır.
2. Eğer E fonksiyonu, D bölgesindeki tüm (x, y) değerleri için $E(0,0) = 0$ ve $E(x, y) < 0$ koşullarını sağlıyorsa; D bölgesinde, “negatif tanımlı” adını alır.
3. Eğer E fonksiyonu, D bölgesindeki tüm (x, y) değerleri için $E(0,0) = 0$ ve $E(x, y) \leq 0$ koşullarını sağlıyorsa; D bölgesinde, “negatif yarı-tanımlı” adını alır.

$E(x, y)$ fonksiyonunun, $(0,0)$ orijin noktasını da içeren D bölgesinde, tüm (x, y) değerinin birinci kısmi türevleri için sürekli olduğunu kabul edelim. E fonksiyonunun (4.14) sistemi için kısmi türevine $\dot{E}$ adını verelim ve $\dot{E}$ yi şöyle tanımlayalım:

$$\dot{E} = \frac{\partial E(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial E(x, y)}{\partial y} Q(x, y) \quad (4.15)$$

(4.14) ile verilen

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) \end{aligned}$$

Sistemi ele alalım. Sistemin $(0,0)$ orijin noktasında izole edilmiş bir kritik noktasının var olduğunu, ayrıca P ve Q fonksiyonlarının tüm (x, y) değerlerinin birinci kısmi türevleri için sürekli olduğunu kabul edelim. $E(x, y)$ fonksiyonunun, $(0,0)$ orijin noktasını içeren D bölgesinde, tüm (x, y) için pozitif tanımlı olduğunu ayrıca (4.14) sistemi için tanımlı E fonksiyonuna ait $\dot{E}$ nin tüm $(x, y) \in D$ değerleri için negatif yarı-tanımlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda E fonksiyonuna, D bölgesinde, Liapunov fonksiyonu adı verilir. Buna Liapunov tarafından verilen bir teorem olarak (a) Eğer $(0,0)$ noktasını içeren bir D bölgesinde, Liapunov fonksiyonu E mevcut ise, $(0,0)$ kritik noktası karardlıdır. (b) Eğer $(0,0)$ noktasını içeren bir D bölgesinde, Liapunov fonksiyonu E mevcut ise; ayrıca (4.14) denklemini elde edilmiş ve D bölgesinde, negatif tanımlı bir $\dot{E}$ fonksiyonuna sahipse, $(0,0)$ kritik noktası asimptotik karardlıdır [11].

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Doğrusal olmayan dinamik sistemlerle ilgili çalışmalar günümüzde temel bilimin, mühendisliğin, tıbbın ve sosyal bilimlerin hemen hemen her dalında karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle bu tür sistemlerin matematiksel olarak nasıl tanımlanacağını ve dinamik bir sistemin zaman içindeki davranışının hangi yöntemlerle inceleneceğini anlamak önemli bir çalışma konusudur. Bu konuda oldukça çeşitli ve geniş bir literatür mevcuttur. Bu tezde konunun temel kavramlarının anlaşılması için genel ve kısa bir inceleme yapılmıştır. Tezde incelenen sistemler ve kullanılan teoremler klasik mekanik diye adlandırılan sistemler göz önüne alınmıştır. Doğrusal olmayan kuantum sistemleri ile ilgili çalışmalara girilmemiştir.

Bu tezin ikinci bölümünde harmonik salınımlar, av-avcı problemi veya rekabet edici sistemler, kulak zarı titreşimi, elektrik devreleri gibi bazı doğrusal olmayan otonom (korunumlu) sistemlerin matematiksel olarak nasıl tanımlandığını, bu sistemlere ait diferansiyel denklemlerin nasıl ifade edildiği anlatıldı. Bu problemlerin çözümleri topolojik (yapısal geometrik davranış), analitik ve nümerik olarak incelenebilir. Doğrusal olmayan sistemler için bazı özel durumlar hariç genellikle analitik çözüm yöntemleri mevcut değildir. Fakat birçok durumda doğrusal olmayan denklemler bazı tekniklerle ve yaklaşımlarla doğrusal hale getirilerek çözümler elde edilebilir (Çizelge 3. 1). Doğrusal olmayan bir sistemin topolojik olarak incelenebilmesi için sisteme ait değişkenlerin oluşturduğu “faz uzayı” oluşturulur. Faz uzayında otonom sistemin zaman içindeki gelişimi çeşitli yörüngelerle ifade edilebilir. Tezin üçüncü bölümü bu yörünge tipleri ve bu yörüngelerin faz düzleminde oluşturduğu kritik noktaların tanımları yapıldı. Buna göre sistemin ne tür bir davranış göstereceği, ne zaman kararlı olup olmadığı anlatıldı.

Bölüm dörtte doğrusal olmayan korunumlu sistemlere örnek olarak sönümlü zorlamalı salıncı problemi ve yerel bir $V(x)$ potansiyel enerjine sahip bir sistemin faz uzayındaki davranışı incelendi. Bu sistem için $V(x)$ potansiyelinin çeşitli durumlarına bağlı olarak faz uzayındaki yörünge tipleri, kritik noktaları ve sistemin kararlılık koşulları incelendi. Salıncı probleminde sistemin parametrelerine göre sistemin davranışı Tablo 2 de özetlendi. Doğrusal olmayan dinamik sistemlere ait Lyapunov tarafında verilen kararlılık teoremleri ve sonuçları tartışıldı. Bu tezde sayısal çözüm yöntemleri incelenmedi. Sayısal çözüm yöntemleri moleküler dinamik, Monte Carlo simülasyon, sonlu farklar yöntemi gibi birçok yöntemi içermektedir. Bu yöntemlerin her biri başlı başına bir inceleme konusudur. Ayrıca faz uzayı analizi yapılır iken sistemin periyodik veya kaotik davranışı da incelenebilir. Bu tür bir analiz için faz düzleminde Poincare kesiti denen bir yöntem kullanılabilir. Buna göre faz düzleminde Poincare kesitinin belirlediği şekil fraktal yapıya sahip ise sistem kaotik davranacaktır. Tezde 2.1 konusunda anlatılan Lojistik denklem şeklinde davranan bir sistem için zaman serisi yöntemi uygulanabilir. Burada bir parametreye bağlı ve exponansiyel davranan Lyapunov fonksiyonu tanımlanarak bu fonksiyonun davranışına göre de sistemin periyodik veya kaotik olup olmadığı incelenebilir[5].

KAYNAKLAR

- [1] Hirsch, M. ve Smale. S. (Academic Press, New York, 1974). Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra.
- [2] Jordan, D. ve Smith, P. (Clarendon Press, Oxford, 1977). Nonlinear Ordinary Differential Equations.
- [3] Sanchez, D. (Freeman , San Francisco, 1968). Ordinary Differential Equations and Stability Theory: An Introduction.
- [4] Myint-U, T. (Elsevier, New York, 1973). Partial Differential Equations of Mathematical Physics.
- [5] Verhals, F. (1976). Nonlinear Differential Equation and Dynamical Systems.
- [6] Strogetz, S.H. (1994). Nonlinear Dynamics and Chaos., Addison –Wesley.
- [7] Verhulst, F. (1990). Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Werlag, New York.
- [8] Parker, T.S. ve Chua, L.O. (1989). Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. Springer-Werlag, New York.
- [9] Hedrick, J.K. ve Girard, A. (2005). Control of Nonlinear Dynamic Systems: Theory and Applications.
- [10] Enns, R.H. ve Mc Guire, G.C. (1997). Nonlinear Physics, Birkhauser Boston.
- [11] Ross, S.L. (1984). Differential Equations, John Wiley.
- [12] Helmholtz, H. (1895). Sensation of Tone. Longmans Green, London.
- [13] Campbell, D. (1987). "Nonlinear science-from paradigms to practicalities." Los Alamos Science, 15:218.
- [14] Toda, M. (1989). Theory of Nonlinear Lattices. Springer-Verlag, Berlin, New York, 2nd edition.
- [15] Pang ve Xiao-Feng, (2005). Theory of nonlinear quantum mechanics, World Scientific Press.
- [16] Dixon, J.M. ve Tuszyniski, J.A. ve Clarkson, P.A. (1997). From Nonlinearity to Coherence, Clarendon Press-Oxford.

- [17] Fowles, G.R. ve Cassiday, G.L. (1986). *Analytical Mechanics*. Saunders College Publishing, Orlando.
- [18] Marionand, J.B. ve Thornton, S. T. (1995). *Classical Dynamics of Particles ve Systems*. Saunders College Publishing, Orlando.
- [19] Scott, A. C. (1981). Introduction to nonlinear waves. In Enns, R. H. , Jones, B. L. , Miura, R. M. ve Rangnekar, S. S. editors, *Nonlinear Phenomena in Physics and Biology*. Plenum, New York.
- [20] Fermi, E. , Pasta, J. R. ve Ulam, S. M. (1955). Studies of nonlinear problems. Los Alamos Science Laboratory Report, LA-1940.
- [21] Chow, W. F. (1964) *Principles of Tunnel Diode Circuits*. Wiley, New York.
- [22] Rangnekar, S.S. ve Enns, R. H. (1976). "Numerical solution of the transient gain equations for stimulated backward scattering in absorbing fluids." *Canadian Journal of Physics*, 54:1564.
- [23] Morse, P. M. (1948). *Vibrations and Sound*. McGrawHill, New York.
- [24] Korteweg, D.J. ve De Vries, G. (1895). "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and a new type of long stationary wave." *Philosophical Magazine*, 39:422.
- [25] Russell, J. S. (1844). "Report on waves." *British Assoc. Adv. Sci. , 14th Meeting*.
- [26] May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated Dynamics. *Nature*, 261:459.
- [27] Volterra, V. (1926). *Variazionie Fluttuazioni del numerod'individui in specie animali conviventi*. Mem. Acad. Lincei, 2:31.
- [28] Neffand, R. B. ve Tillman, L. (1975). *Hewlett-Packard Journal*, Nov.
- [29] Matousek, R. (2009). Member, Iaeng, I. Svarc, P. Pivoňka, P. Osmera, M. Seda, "Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science 2009 Vol II WCECS 2009" October 20-22 , San Francisco, USA.
- [30] Van der Pol, B. (1926). "On relaxation oscillations. *Philosophical Magazine*", 2:978.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ertuğrul KAYGUSUZ
Doğum Tarihi ve Yeri : 1985/Sivas
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ekaygusuz58@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
P. Formasyon	Fizik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2014
Y. Lisans	Fizik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2014
Lisans	Fizik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2010
Lise	Fen Bilimleri	Malatya Gazi Lisesi	2002

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2011	Pelikan Eğitim Danışmanlık	Kurucu(devam ediyor)
2010	Şair Abay Konanbay Lisesi	Fizik Öğretmeni
2009	Eksen Dershanesi	Fizik Öğretmeni