

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL OLMAYAN TİMOSENKO DENKLEMİNİN
ÇÖZÜMLERİNİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

Nazlı IRKIL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(Danışman: Doç. Dr. Erhan PİŞKİN)

DIYARBAKIR
Temmuz-2016

T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
DİYARBAKIR

Nazlı IRKIL tarafından yapılan “**Doğrusal Olmayan Timoshenko Denklemine Çözümlerinin Matematiksel Davranışı**” konulu bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

Ünvanı Adı Soyadı

Başkan: Doç.Dr. Erhan PİŞKİN (Danışman)

Üye : Yrd.Doç.Dr. Baver OKUTMUŞTUR

Üye : Yrd.Doç.Dr. Mustafa MIZRAK

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 11/07/2016

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../.../20

...

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranışa ve akademik kurallara uygun olarak elde ettiğimi ve sunduğumu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tezde özgün olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına atıfta bulunduğumu bildiririm.



TEŞEKKÜR

“Bir öğrencinin en büyük şansı iyi bir öğretmene rastlamaktır.” sözünü ilk duyduğumda ne kadar şanslı biri olduğumu gördüm. Çünkü ben üniversiteye başladığımda matematiği hayatının merkezine alan ve matematikle uğraşmaktan mutlu olan bir hocayı tanıdım. Ve o an kendimi matematikte hocam kadar olmazsa da olabildiğince çok geliştirmeye ve bunun için yüksek lisans yapmaya karar verdim. Ve yüksek lisansımı bana matematiği sevdiren değerli hocam “Doç. Dr. Erhan PİŞKİN” in danışmanlığında yapma şansını buldum.

Yüksek lisansım boyunca başta her türlü desteğini benden esirgemeyen ve her zaman yanımda olan ailem olmak üzere; deneyimi ve sorularıma ı ışık tutan akademik bilgisiyle tezimin hazırlanmasında bana destek olan hocam Doç. Dr. Erhan PİŞKİN’ e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu yüksek lisans çalışmasına destek sunan Dicle Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü’ne (ZGEF.16.007) teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa	
TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
1. GİRİŞ	
1.1. KISALTMALAR VE NOTASYONLAR	
1.1.1. Simgeler.....	1
1.1.2. Notasyonlar.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
3. MATERYAL VE METOD	
3.1. Normlu Uzay, İç Çarpım Uzayı ve Hilbert Uzayı.....	9
3.2. Lebesgue Uzayı.....	13
3.3. Sobolev Uzayı.....	15
3.4. Operatörler.....	17
3.5. Eşitlik ve eşitsizlikler.....	19
3.6. Daralma Dönüşüm Prensibi.....	22
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	
4.1. Lokal Varlık.....	25
4.2. Negatif Başlangıç Enerjisi İçin Çözümün Patlaması	37
4.3. Pozitif Başlangıç Enerjisi İçin Çözümün Patlaması	47
5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR	61
6. KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	67

ÖZET

DOĞRUSAL OLMAYAN TİMOSHENKO DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nazlı IRKIL

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

Bu tezin ilk bölümünde tezde kullanılacak olan kısaltma ve bazı notasyonlar verilmiştir.

İkinci bölümde çözümlerin patlaması ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalar tarihi gelişimiyle ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde tez boyunca gerekli olan temel tanım, teorem, eşitsizlikler verilmiştir.

Dördüncü bölüm ise üç alt bölümden oluşmuştur. İlk bölümde doğrusal olmayan damping ve kaynak terim içeren Timoshenko denkleminin çözümlerinin lokal varlığı; ikinci bölümde denklemin negatif başlangıç enerjisi için çözümlerinin patlaması; üçüncü bölümde ise tezin esas kısmını oluşturan pozitif başlangıç enerjisi için çözümlerinin patlaması çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Patlama, Lokal varlık, Doğrusal olmayan Timoshenko denklemi.

ABSTRACT

MATHEMATICAL BEHAVIOR OF SOLUTION OF NONLINEAR TIMOSHENKO EQUATION

MASTER THESIS

Nazlı IRKİL

**UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

2016

In the first chapter of this thesis, the abbreviations and notations that will be used throughout this thesis are provided.

In the second chapter, the historical developments of the blow up of solutions are investigated.

In the third chapter, the basic definitions, theorems, and inequalities that will be used in this thesis are provided.

The fourth chapter is composed of three sub-sections. In the first sub-section, the local existence of solutions of Timoshenko equations that contain nonlinear damping and source terms are examined. In the second sub-section, the blow up of solutions for the equation with the initial negative energy is investigated. In the final sub-section, which also forms the main part of this thesis, the blow up of solutions for positive initial energy is studied.

Keywords: Blow up, Local existence, Nonlinear Timoshenko equation.

1. GİRİŞ

1.1. KISALTMALAR VE NOTASYONLAR

Bu bölümde tezde kullanılan simgeler ve bazı kısaltmalar tanıtılacaktır.

1.1.1. Simgeler

α : *alfa*

β : *beta*

γ : *gamma*

η : *eta*

σ : *sigma*

δ : *delta*

ε : *epsilon*

Ψ : *psi*

∇ : *nabla operatörü*(gradiyent)

Δ : *laplasyon*

1.1.2. Notasyonlar

R^n , n boyutlu Öklit uzayıdır.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, R^n de bir noktadır.

Ω , R^n de sınırlı bir bölgedir.

$\partial\Omega$, Ω bölgesinin yeterli düzgün sınırıdır.

u_t, u_{tt}, u_x notasyonları $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial u}{\partial x}$ türevleridir.

Δu notasyonu $u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \dots + u_{x_nx_n}$ dır.

$\Delta^2 u$ notasyonu $u_{x_1x_1x_1x_1} + u_{x_2x_2x_2x_2} + \dots + u_{x_nx_nx_nx_n}$ dır.

$\nabla^2 u = \Delta u$

.



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Günlük hayatta karşılaştığımız birçok problemin adı veya kısmi diferansiyel denklemlerle modellenebilmesi mümkündür. Bu problemler fizikten kimyaya, biyolojiden tıp bilimine, makine mühendisliğinden inşaat mühendisliğine, ekonomiden futbola kadar birçok alanla ilgili olabilmektedir. Ancak modellenen her problemin tam olarak açık çözümünün bulunması çoğu zaman mümkün olmamaktadır. Hatta çözümü açık ve tam olarak bilinen problemlerin, çözümü tam olarak bilinmeyen problemlere kıyasla çok daha az olduğu söylenebilir.

Ele alınan doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin doğrusal denklemlere oranla gerçek dünya olaylarıyla daha bağlantılı olduğu söylenebilir. Çünkü doğrusal diferansiyel denklemler gerçek dünya ile ilgili birçok özelliği ifade etmekte yetersiz kalmıştır. Ama doğrusal olmayan diferansiyel denklemler bu özelliklerin birçoğunu içinde barındırdığı ve matematiksel dünyanın birçok yeni temel sorularına dikkat çektiği için matematikçileri cezbeden ve matematiksel araştırmaların aktif olarak yapıldığı bir alan olmuştur.

Bu problemler için yaklaşık bir çözüm bulmak veya en azından çözümün davranışıyla ilgili bir fikre sahip olmak için denklemin bazı şartlar ile sınırlandırılması gerekliliği ortaya çıkmıştır. Bu nedenle problemlere genellikle başlangıç ve sınır koşulları eklenerek iyi tanımlı çözüm bulmak amaçlanmıştır. İyi tanımlı bir çözüm bulmak için ilk aşama çözümün varlığını, çözüm varsa şayet çözümün tekliğini ve başlangıç verilerine bağımlılığını araştırmaktır. Çözümünün varlığı ve tek olduğu kanıtlanmış denklemin asimptotik davranışı yani çözümünün sonlu veya sonsuz bir zamanda davranışı her ne kadar çözüm tam olarak bilinmese de çözüme yönelik bir fikre sahip olmamızı sağlar. Bütün bu araştırmaların gerçek hayatta karşılaşılan problemlere faydasını bir bölgede bulunan sıtma vakalarının belli koşullar altında sonlu veya uzun zaman davranışı belirleyebilme olarak örneklendirebiliriz. Veya kimyasal bir deney sonucu ortaya çıkan ve çözümü bilinen yöntemlerle belirlenemeyen bir denklemin çözümünün asimptotik davranışı yardımıyla deneyin sonuçları hakkında tahminlerde bulunabiliriz. Bu örneklerden de anlaşılacağı üzere bu kadar büyük öneme sahip bu alanla ilgili çalışmalar son derece önemli ve gereklidir.

Doğrusal olmayan problemlerde singularitenin en basit formu, zamanın bazı sonlu $T > 0$ limitine yaklaştığı zaman, değişken veya değişkenlerin sonsuza gitmesidir. Değişkenlerin sonsuz büyümesinden dolayı da çözümler global olarak yok olur. Bu olaya **blow up (çözümün patlaması)** veya **global çözümlerin yokluğu** denilmek-

tedir. Blow up latin dilinde patlama anlamını taşır ve matematik problemlerinin birçoğunda patlamayı betimler. Singularite doğrusal diferansiyel denklemlerde kat-sayı, veri veya problemlerdeki sabit singulariteler için oluşurken doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerde ise daha çok zamanından, konumundan kaynaklı olabilir.

Blow up adi diferansiyel denklemlerde oldukça temel ama temsili bir düzeyde gerçekleşmektedir. Basit bir örnekle ifade edecek olursak reel değişkenli

$$u = u(t)$$

için

$$\begin{cases} u' = u^2, t > 0 \\ u(0) = a \end{cases}$$

başlangıç değer problemidir. $a > 0$ için tek çözüm

$$0 < t < T = \frac{1}{a}$$

zaman aralığında mevcuttur.

$$u(t) = \frac{1}{T - t}$$

formülü ile verilebildiğinden

$$t < T$$

için düzgün çözüm ve $t \rightarrow T^-$ için $u(t) \rightarrow \infty$ olur. Bu durumda $t = T$ için çözüm blow up denir.

Doğrusal olmayan

$$u_{tt} = \Delta u + u^p, \quad p > 1$$

tipindeki denklemlerin blow up çalışmaları parabolik denklemlerden daha eski olup 1957 yılına kadar dayanmaktadır.

1960 lı yıllardan beri hiperbolik tipten diferansiyel denklemlerin çözümlerinin patlaması konusu matematikçilerin ilgi alanına girmiştir.

Sattinger 1968 yılında yayınladığı çalışmasında enerji integrallerine bağlı "potansiyel çukur metodu" olarak adlandırılan metodu elde ederek

$$u_{tt} - \Delta u + f(x, u) = 0$$

denklemin global zayıf çözümünü $f(x, u)$ fonksiyonunu bazı koşullarla sınırlayarak

ifade etti.

Levine 1974 yılında yaptığı çalışmayla

$$Pu_{tt} = -A(t)u + F(u)$$

denkleminin global çözümlerinin yokluğunu "konkavlık metodunu" geliştirerek gösterdi. Konkavlık metodunda amaç problemin lokal varlığının çözümüyle tanımlanmış sınır koşullarına uygun $\phi(t) > 0$ fonksiyonunu oluşturmak ve $\alpha > 0$ için t zamanına bağlı konkav $\phi^{-\alpha}(t)$ fonksiyonunun varlığını göstermektir. Burada $\phi(t)$ fonksiyonu iki kez türevlenebilen ve

$$\phi''(t)\phi(t) - (\alpha + 1)(\phi'(t))^2 \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyondur. Blow up zamanı ise $F(0) > 0$ ve $F'(0) > 0$ için

$$T < \frac{F(0)}{\alpha F'(c)}$$

şeklinde ifade edilir.

Kalantarov ve Ladyzhenskaya 1978 yılında yayımlanan çalışmalarında Levine çalışmalarını temel alarak parabolik ve hiperbolik denklemlerinde blow up için "genelleştirilmiş konkavlık metodunu" geliştirdiler.

1990 yıllarında ise yapılan çalışmalarda

$$M(s) = m_1 + m_2 s^\gamma$$

şeklinde tanımlanmış bir fonksiyon olmak üzere

$$u_{tt} - M(s)\Delta u + f(u_t) = g(u)$$

tipindeki denklemler en çok dikkat çeken ve çalışmaların yoğunlaştığı denklemler olmuştur [Meyvacı 2005].

Georgiev ve Todorova 1994 yılında

$$u_{tt} - \Delta u + au_t|u_t|^{m-1} = b|u|u^{p-1}$$

doğrusal olmayan damping ve doğrusal olmayan kaynak terim arasındaki etkileşimi inceleyerek çözümlerin lokal varlığını ve global çözümlerinin yokluğunu yeni bir metod geliştirerek gösterdiler.

Ono 1997 yılında

$$u_{tt} - M \left(\left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 \right) Au + \delta u_t = |u|^\alpha u,$$

$$u_{tt} - M \left(\left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 \right) Au + |u_t|^\beta u_t = f(u),$$

$$u_{tt} - M \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^{2\gamma} Au + Au_t = |u|^\alpha u$$

denklemleri için blow up çalıştı.

Georgiev ve Todorova'nın çalışmalarında başlangıç enerjisinin negatif ($E(0) < 0$) alınmasına karşın 1999 yılında Vitilaro bu metodu biraz daha geliştirerek ($E(0) < E_1$) için blow up çalıştı.

Messaoudi 2001 yılında

$$u_{tt} - \Delta u + g(u_t) = f(u)$$

denkleminin blow up çalışmasını yaptı. 2009 yılında Galerkin metodunu kullanan Runzhang ve Jihong uygun başlangıç ve sınır koşulları ile denklemin çözümünün global varlığını çalıştılar. 2009 yılında Yu, 2013 yılında ise Chen ve Liu $g(u_t)$ yerine

$$G(u_t, \Delta u_t) = -\Delta u_t + u_t |u_t|^{p-1}$$

ve

$$f(u) = u |u|^{q-1}$$

olarak denklemin çözümünün varlığı, enerji azalması ve çözümün patlamasını çalıştılar.

1950 yılında Woinosky-Kreiger tarafından matematiksel modellemesi yapılan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \left(\alpha + \beta \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| d\tau \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0$$

denklemini daha sonra geliştirilerek

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u + |u_t|^{p-1} u_t = |u|^{q-1} u$$

denkleminde olduğu gibi $M(\|\nabla u\|^2) \Delta u$ ifadesini içeren ve genel olarak lineer olmayan Timoshenko denklemleri olarak isimlendirilip çeşitli şekillerde gösterimleri de mevcut olan denklem olarak ifade edildi. Bu denklemler dalgaların lineer olmayan

salınım hareketlerini ifade etmekte kullanılırlar. Denklem eksenel bir kuvvet tarafından sıkıştırılan veya gerilen bir salınım dalgasının dinamik bükülme hareketlerinin araştırıldığı bir çalışma sonucu ortaya konmuştur. Antman [Antman 2005] tarafından yapılan çalışmalar sonucunda ise denklemin esneme teorisinin genel yapısı oluşturulmuştur. Sonrasında bu denklemin farklı özelliklerini inceleyen birçok çalışma yapıldı.

1970 yılında Dickey, 1974 yılında Timoshenko, Young ve Weaver, 1979 yılında Medeiros, 1994 yılında Astaburuaga, Fernandez ve Perla Menzala tarafından çalışılmıştır.

1997 yılında Bainov ve Minchev bazı özel şartlar altında çözümün yokluğunu negatif başlangıç enerjisi için çalıştılar. Taşkesen ve Polat 2015 yılında yüksek başlangıç enerjisi için çözümün global varlığını çalıştılar.

2010 ve 2013 yılında Esquivel-Avila Timoshenko denkleminin çözümünün varlığını, patlamasını ve atraktörü üzerine çalışmalar yaptılar.

Pişkin 2015 yılında üstteki denklemin Banach bükülme dönüşümünden faydalananarak lokal varlığını, negatif başlangıç enerjisi için blow up ve enerji azalmasını gösterdi.

Bu tez çalışmasının son kısmında Timoshenko denkleminin çözümünün pozitif başlangıç enerjisi için global çözümlerinin yokluğu (blow up) çalışıldı [Pişkin ve İrkil].



3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olabilecek bazı tanımlar, çalışılan uzaylar eşitsizlikler ve bazılarının ispatı yer almaktadır [Kesevan 1989, Evans 1998, Adams ve Fournier 2003, Brezis 2011, Polat 2005, Pişkin 2013]

3.1. Normlu Uzay, İç Çarpım ve Hilbert Uzayı

Tanım 3.1.1. Boş olmayan bir X kümesi ve $X \times X$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan bir d fonksiyonu

$$(x, y) \rightarrow d(x, y)$$

verilsin. d fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

$\forall x, y, z \in X$ için

- (i) $d(x, y) \geq 0$
- (ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Burada (iv) ye üçgen eşitsizliği denir. (iv) şartı tekrar tekrar uygulanırsa $\forall x, y, z_1, \dots, z_n$ için

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \\ &\leq d(x, z_1) + d(z_2, z_3) + d(z_3, y) \\ &\dots \\ &\leq d(x, z_1) + d(z_2, z_3) + \dots + d(z_n, y) \end{aligned}$$

şeklindeki ifadeye genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği denir.

Tanım 3.1.2. X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+, x \rightarrow \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

- (N₁) $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
- (N₂) $\|ax\| = |a| \|x\|;$
- (N₃) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

X uzayı N_1, N_2, N_3 özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir *normlu uzay* adı verilir, $\|x\|$ sayısında $x \in X$ elemanın normu olarak adlandırılır.

Her $\|x\|$ normu, $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanmış bir uzaklık fonksiyonu olduğundan her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzay olur. Bunun tersi ise her zaman sağlanmayabilir yani; bir metrik uzayın normlu uzay olması gerekmez. Bir normlu uzay, üzerinde tanımlanmış olduğu norm altında vektör uzayı belirtir.

Tanım 3.1.3. $(x_n), (X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına ait bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq N$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 3.1.4. $(x_n), (X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine yakınsaktır denir ve $x_n \rightarrow x$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.5. Bir X normlu uzayında her Cauchy dizisi X uzayının bir elemanına yakınsıyor ise bu uzaya tam uzay denir. $(X, \|\cdot\|)$ uzayı tam ise bu uzaya *Banach uzayı* denir.

Tanım 3.1.6. X vektör uzayı üzerinde tanımlı iki norm, $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ olsun. $A > 0$, $B > 0$ sabitleri için

$$A \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B \|x\|_1$$

eşitsizliği X uzayındaki her x noktası için geçerli ise, $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına *denk normlar* denir.

Sonlu boyutlu normlu (veya vektör) uzaylarda tanımlanan tüm normlar denktir. Dolayısıyla sonlu boyutlu normlu uzaylarda tanımlanan tüm normlar o uzay üzerinde aynı topolojiyi tanımlarlar; örneğin X normlu uzayındaki bir (x_n) dizisi $\|\cdot\|_1(\|\cdot\|_2)$ normuna göre yakınsak, sınırlı veya Cauchy dizisi ise, $\|\cdot\|_2(\|\cdot\|_1)$ normuna göre de yakınsak, sınırlı veya Cauchy dizisidir.

Tanım 3.1.7. K cismi üzerinde bir X vektör uzayı verildiğinde, $X \times X$ uzayı üzerinde tanımlı K değerli

$$(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow K$$

bir fonksiyonun her $x, y \in X$ ve $a, b \in C$ için aşağıdaki özellikleri varsa, bu fonksiyona *iç çarpım* denir.

- (i) $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0 \iff x = 0$,
- (ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (burada $\bar{c}$, $c \in C$ nin karmaşık eşleniğini belirtir),
- (iii) $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$.

$K = \mathbb{R}$ halinde $(x, y) = (y, x)$ olduğu hemen görülür.

Bir iç çarpım ile

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

tanımlanan $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun norm olduğunu görmek oldukça kolaydır. Normu yukarıda olduğu gibi bir iç çarpım tarafından tanımlanan uzaya *iç çarpım uzayı* denir.

Tanım 3.1.8. Normlu bir uzay olan bir iç çarpım uzayı bir Banach uzayı ise bu uzaya *Hilbert uzayı* denir. Başka bir ifadeyle, bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisinin bu uzayın bir ögesine yakınsak olması halinde bu uzaya *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 3.1.9. n -boyutlu $\mathbb{R}^n$ ve gerçel Öklit uzayında bir nokta $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve bu noktanın normu $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır. x ve y nin iç çarpımı $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ şeklindedir.

Tanım 3.1.10. X bir normlu uzay olsun. X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonların kümesi X uzayının *dual uzayını* oluşturur. X' veya X^* ile gösterilen bu uzay

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} < \infty$$

normuyla bir Banach uzayıdır. X' uzayının duali $(X')' = X''$ şeklindeki lineer vektör uzayıdır ve *ikinci dual* olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.11. (x_n) , X normlu uzayına ait bir dizi olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *güçlü yakınsak* dizi denir ve bu yakınsama $x_n \rightarrow x$ olarak gösterilir.

Tanım 3.1.12. X normlu uzayında bir dizi (x_n) olsun. Her $f \in X'$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \rightarrow f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *zayıf yakınsak dizi* denir. Bu yakınsama $x_n \rightharpoonup x$ veya $x_n \xrightarrow{z} x$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.13. (f_n) , X normlu uzayı üzerinde sınırlı lineer fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda

(a)

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0$$

olacak şekilde bir $f \in X'$ varsa (f_n) dizisine *güçlü yakınsaktır* denir. $f_n \rightarrow f$ şeklinde yazılır.

(b) her $x \in X$ için

$$f_n(x) \rightarrow f(x)$$

olacak şekilde bir $f \in X'$ varsa (f_n) dizisine *zayıf* yakınsaktır* denir. $f_n \xrightarrow{z^*} f$ şeklinde yazılır.

Tanım 3.1.14. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ negatif olmayan α_j lerin n -bileşenlisi ise α ya çoklu-indis denir ve x^α , $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ mertebeye sahip olan $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ tek terimlisi, yani $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ ile tanımlanır. Benzer şekilde $1 \leq j \leq n$ için $D_j = \partial/\partial x_j$ ise, o zaman

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$$

$|\alpha|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. $D^{(0, \dots, 0)}u = u$ olur.

Tanım 3.1.15. Eğer $G \subset \mathbb{R}^n$ ise $\mathbb{R}^n$ de G nin kapamışı $\overline{G}$ ile belirtilir. $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$, $\mathbb{R}^n$ in kompakt (kapalı ve sınırlı) altkütmesi ise $G \subset \subset \Omega$ şeklinde gösterilir. u , G de tanımlı bir fonksiyon ise, u fonksiyonun desteği

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

şeklinde tanımlanır. $\text{supp } u \subset\subset \Omega$ ise u fonksiyonu Ω da *kompakt desteğe sahiptir* denir.

Tanım 3.1.16. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. Negatif olmayan her m tamsayısı için Ω bölgesinde sürekli bütün ϕ fonksiyonları ve $|\alpha| \leq m$ mertebesine kadar bütün $D^\alpha \phi$ kısmi türevleri sürekli olan vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ olur. $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarına ait ve kompakt desteğe sahip olan fonksiyonların oluşturduğu uzaylar sırasıyla $C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.17. Ω açık bir bölge olduğundan, $C^m(\Omega)$ deki fonksiyonların Ω bölgesinde sınırlı olması gerekmeyebilir. $C_B^m(\Omega)$ ile $0 \leq |\alpha| \leq m$ için Ω bölgesinde $D^\alpha \phi$ lerin sınırlı olduğu $\phi \in C^m(\Omega)$ fonksiyonları belirtilir. $C_B^m(\Omega)$ uzayı

$$\|\phi\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \phi(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

3.2. Lebesgue Uzayı ($L^p(\Omega)$)

Tanım 3.2.1. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de bir bölge ve p pozitif gerçel sayı olsun. Ω bölgesinde tanımlı bütün ölçülebilir u fonksiyonlar sınıfına aşağıdaki koşul altında

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

$L^p(\Omega)$ uzayı denir. Bu uzay bir vektör uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bu uzay

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.2.2. Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa u fonksiyonuna hemen hemen sınırlıdır denir. Böyle K ların en büyük alt sınırına da $|u|$ nın Ω bölgesindeki esas (essential) supremumu denir ve $\text{ess sup}_{x \in \Omega}$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarıyla tanımlanan uzaya $L^\infty(\Omega)$ uzayı denir. $L^\infty(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.2.3. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de bir bölge ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt altkümesinde p . kuvveti integrallenebilen bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayına $L^p_{loc}(\Omega)$ uzayı denir.

Tanım 3.2.4. X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer

- (i) X, Y nin bir alt uzayı,
- (ii) Her $x \in X$ için X den Y ye $Ix = x$ ile tanımlanan I birim operatörü sürekli ise, X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir.

I birim operatörü doğrusal olduğundan (ii) koşulu

$$\|Ix\|_Y \leq M \|x\|_X, \quad x \in X$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabitinin varlığına denktir.

Tanım 3.2.5. $vol(\Omega) = \int_{\Omega} 1dx$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L^q(\Omega)$ ise o zaman $u \in L^p(\Omega)$ dır ve

$$\|u\|_p \leq (vol(\Omega))^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_q$$

olur. Bu nedenle

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 3.2.6. $L^2(\Omega)$ uzayı

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 3.2.7. $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olsun. $\|u(\cdot)\|_X \in L^p(a, b)$ koşulunu sağlayan (a, b) aralığından X uzayına tanımlanmış ölçülebilir u fonksiyonları uzayına $L^p(a, b; X)$ uzayı denir. $L^p(a, b; X)$ uzayı

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{t \in (a,b)} \|u(t)\|_X, & p = \infty \end{cases}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Benzer şekilde $a < c < d < b$ olmak üzere her bir c, d için $u \in L^p(c, d; X)$ ise, o zaman $u \in L^p(a, b; X)$ yazılır ve $p = 1$ için u *lokal integrallenebilirdir* denir.

Tanım 3.2.8. Her $t \in [0, T]$ için $[0, T]$ den X uzayına tanımlanmış ve m . mertebeden türevleri sürekli olan u fonksiyonları uzayına $C^m([0, T]; X)$ *uzay*ı denir. $C^m([0, T]; X)$ uzayı

$$\|u\|_{C^m([0, T]; X)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{t \in [0, T]} \|D^\alpha u(t)\|_X$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

3.3. Sobolev Uzayı ($W^{m,p}(\Omega)$)

Tanım 3.3.1. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ olsun. Bir α çoklu-indisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx$$

eşitliği sağlanırsa, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α . *zayıf türevi* denir. v fonksiyonu, u fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi olarak da adlandırılır ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Eğer u fonksiyonu, klasik anlamda $D^\alpha u$ sürekli kısmi türevlere sahip olacak şekilde yeterince düzgün ise, o zaman $D^\alpha u$ aynı zamanda u fonksiyonunun zayıf kısmi türevidir. Elbette $D^\alpha u$ klasik anlamda olmaksızın zayıf anlamda mevcut olabilir.

Tanım 3.3.2. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de bir bölge, m herhangi bir pozitif tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzay*ı denir. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad p = \infty$$

tanımlanan bu normlar ile bir Banach uzayıdır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir.

Aşikâr olarak $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır. Herhangi bir m pozitif tamsayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmeleri geçerlidir.

Tanım 3.3.3. Eğer $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ olur ve $H^m(\Omega)$ uzayında norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

ile verilir.

Tanım 3.3.4. $H^m(\Omega)$ uzayı

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır, burada $(u, v) = \int_\Omega u(x) \overline{v(x)} dx$ olup $L^2(\Omega)$ uzayındaki iç çarpımdır.

$H_0^1(\Omega)$ uzayı için iç çarpım

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$

olur.

Şimdi Sobolev Gömülme Teoremini ifade edelim.

Tanım 3.3.5. Sobolev Gömülme Teoremi. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de koni özeliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

(i) $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

gömülmesi elde edilir.

(ii) $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q < \infty$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q < \infty$$

gömülmesi elde edilir. Ayrıca $p = 1$ olarak alınırsa

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

elde edilir.

(iii) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q \leq p^*$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q \leq p^*$$

gömülmesi elde edilir.

Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-mp}, & n > mp \\ +\infty, & n \leq mp \end{cases}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki gömülmelerde W yerine W_0 uzayı alınırsa, Ω bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın yukarıdaki gömülmeler yine geçerli olur.

Teorem 3.3.6. Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömülmesi bazı $p \leq q$ değerleri için kompakt ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ dur.

Teorem 3.3.7. Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömülmesi $1 \leq q < p$ özelliğini sağlayan bazı p ve q değerleri için mevcut ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ dur.

3.4. Operatörler

Tanım 3.4.1. X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $A : D_A \subset X \rightarrow Y$ dönüşümü X deki bir x elemanını Y de bir tek elemana götürüyorsa A ya *operatör*, D_A ya da A operatörünün *tanım kümesi* denir.

Tanım 3.4.2. $D_A \subset X$, X in bir alt uzayı olmak üzere $A : D_A \subset X \rightarrow Y$ operatörüne her $x, y \in D_A$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

koşulıyla birlikte *doğrusal operatör* denir.

Tanım 3.4.3. Bir H Hilbert uzayında tanımlı A operatörüne her $x, y \in D_A$ için

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

eşitliği ile birlikte *simetrik operatör* denir.

Tanım 3.4.4. $A : D_A \subset X \rightarrow Y$ operatörüne belli bir $M \geq 0$ sayısı ve her $x \in D_A$ için

$$\|Ax\| \leq M \|x\|$$

eşitsizliği ile birlikte *sınırlı operatör* denir.

Tanım 3.4.5. H Hilbert uzayında tanımlı doğrusal, simetrik bir A operatörüne her $x \in D_A \subset H$

$$(Ax, x) \geq 0$$

eşitsizliği ile birlikte *negatif olmayan operatör* denir. Negatif olmayan A operatörü için

$$(Ax, x) > 0 \Rightarrow x = 0$$

ile *pozitif operatör* denir.

Tanım 3.4.6. X ve Y iki Hilbert uzayı ve $(.,.)$ X uzayının, $[.,.]$ de Y uzayının iç çarpımı ve $A : X \rightarrow Y$ doğrusal, sınırlı operatörü tüm X Hilbert uzayında tanımlı olsun. Her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için

$$[Ax, y] = (x, A^*y)$$

koşulunu sağlayan $A^* : Y \rightarrow X$ operatörüne, A operatörünün *eş operatörü* denir. Eğer $A = A^*$ ise böyle bir operatöre *öz-eşlenik (self-adjoint) operatör* denir.

Tanım 3.4.7. H Hilbert uzayında tanımlı doğrusal ve öz-eşlenik bir A operatörüne her $x \in H$ için

$$(Ax, x) \geq C \|x\|_H^2, \quad C > 0$$

ile birlikte pozitif belirli bir operatör denir.

3.5. Eşitlikler ve Eşitsizlikler

Lemma 3.5.1 (Cauchy Eşitsizliği). Eğer $\varepsilon > 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ ise, o zaman

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.5.2 (Young Eşitsizliği). Eğer $\varepsilon > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği veya

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ dir.

Eğer

$$a = \delta X$$

ve

$$b = \frac{Y}{\delta}$$

olarak alınırsa ve

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\left| \delta X \frac{Y}{\delta} \right| \leq \frac{|\delta X|^p}{p} + \frac{\left| \frac{Y}{\delta} \right|^q}{q},$$

$$|X Y| \leq \frac{\delta^p |X|^p}{p} + \frac{\delta^{-q} |Y|^q}{q}$$

formatında da ifade edilir.

Lemma 3.5.3 (Hölder Eşitsizliği). $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $p \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman $uv \in L^1(\Omega)$ olup

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir. $p = 1$ durumunda, $q = \infty$ ve $\|v\|_{L^q(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |v|$ alırız.

$p = q = 2$ iken bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz-Bunyakowski eşitsizliği denir.

İspat.

$$a = \frac{|u|}{\|u\|_p} \text{ ve } b = \frac{|v|}{\|v\|_q}$$

olarak alalım. Young eşitsizliğinden

$$\frac{|u| |v|}{\|u\|_p \|v\|_q} \leq \frac{|u|^p}{p \|u\|_p^p} + \frac{|v|^q}{q \|v\|_q^q}$$

her tarafın Ω bölgesi üzerinde integrali alınırsa

$$\frac{\int_{\Omega} |u| |v| dx}{\|u\|_p \|v\|_q} \leq \frac{\int_{\Omega} |u|^p dx}{p \|u\|_p^p} + \frac{\int_{\Omega} |v|^q dx}{q \|v\|_q^q}$$

$$\|u\|_p^p = \int_{\Omega} |u|^p dx \text{ ve } \|v\|_q^q = \int_{\Omega} |v|^q dx$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\Omega} |u| |v| dx}{\|u\|_p \|v\|_q} &\leq \frac{\int_{\Omega} |u|^p dx}{p \|u\|_p^p} + \frac{\int_{\Omega} |v|^q dx}{q \|v\|_q^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.5.4 (İnterpolasyon Eşitsizliği). $1 \leq p \leq q \leq r$ ve $0 < \lambda < 1$ için $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ ise $u \in L^q(\Omega)$ olur ve

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\lambda} \|u\|_{L^r(\Omega)}^{1-\lambda}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Lemma 3.5.5 (Minkowski Eşitsizliği). $u, v \in L^p(\Omega)$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.5.6 (Sobolev Eşitsizliği). $n > 1$ olmak üzere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık olsun. $n > p \geq 1$ ve $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ise, o zaman

$$\|u\|_{L^{np/(n-p)}(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

olacak şekilde $C = C(n, p)$ sabiti vardır.

$p > n$ ve Ω sınırlı ise, o zaman $u \in C(\overline{\Omega})$ ve

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C |\Omega|^{1/n-1/p} \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

olur.

Lemma 3.5.7 (Kısmi İntegral Alma Formülleri). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($\partial\Omega \in C^1$ sınıra sahip) bölgesinde tanımlı $A(x) = (A_1(x), \dots, A_n(x))$ vektörü $i = 1, \dots, n$ olmak üzere $A_i(x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ bileşenleri ile verilsin. $\operatorname{div} A(x) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$ fonksiyonu $\overline{\Omega}$ ($\mathbb{R}^n$ uzayında sınırlı bölge) bölgesinde sürekli veya Ω bölgesinde integrallenebilir ise,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} A(x) dx = \int_{\partial\Omega} A(x) n(x) dS$$

olup, burada $n(x)$; Ω bölgesine göre dışa yönlendirilmiş $\partial\Omega$ sınırı için birim normal vektördür. Bu formül, Ostrogradsky formülü olarak bilinmektedir.

$u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $v(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ ve $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$ fonksiyonu Ω bölgesinde integrallenebilir olsun. $v\Delta u = v \cdot \operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}(v\nabla u) - \nabla u \nabla v$, $\nabla u \nabla v = u_{x_1} v_{x_1} + \dots + u_{x_n} v_{x_n}$ olduğundan Ostrogradsky formülüne göre

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

elde edilir. Burada $\nabla u \cdot n|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}$ olup bu formül Green formülü olarak bilinmektedir.

Lemma 3.5.8. Gronwall Eşitsizliği (Diferansiyel Form).

$\eta(t)$ negatif olmayan, $[0, T]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon, $\phi(t)$ ve $\psi(t)$ negatif olmayan $[0, T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\eta'(t) \leq \phi(t) \eta(t) + \psi(t)$$

eşitizliği sağlanıyorsa bu durumda tüm $0 \leq t \leq T$ için

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right)$$

olur.

Lemma 3.5.9. Gronwall Eşitsizliği (İntegral Form).

(i) $\xi(t)$, hemen hemen her t ve $C_1, C_2 \geq 0$ sabitleri için

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds + C_2$$

integral eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan, $[0, T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyon olsun. O zaman hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi(t) \leq C_2 (1 + C_1 t e^{C_1 t})$$

olur.

(ii) Özel olarak, eğer hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds$$

ise, o zaman her yerde $\xi(t) = 0$ dır.

3.6. Daralma Dönüşüm Prensibi

Tanım 3.6.1. X banach uzayından D kümesinde tanımlanan bir dönüşüm

$$A : D \rightarrow X$$

olsun. $\forall x, y \in D$ olmak üzere

$$\|Ax - Ay\| \leq k \|x - y\|$$

$0 \leq k < 1$ koşulunu sağlayan k sayısı varsa A dönüşümüne daralma (büzülme) dönüşümü denir. k sayısına da daralma katsayısı denir. Aynı zamanda bu ifade "Lipschitz koşulu" olarakta adlandırılır.

Teorem 3.6.2. D kapalı bir küme olmak üzere

$$A : D \rightarrow D$$

daralma operatörü D yi D ye çevirir. Bu durumda A operatörünün D de sabit bir tek noktası x^* olsun. Yani;

$$x^* = Ax^*$$

denkleminin tek bir $x^* \in D$ çözümü vardır ve bu çözüm

$$x_n = Ax_{n-1}, n = 1, 2, \dots$$

formülü ile tanımlanmış (x_n) dizisinin limiti gibi bulunabilir. x_0, D kümesinin herhangi bir vektörü olmak üzere (x_n) dizisinin x^* yaklaşma hızına

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\|$$

eşitsizliğiyle ulaşılabilir.

.



4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. LOKAL VARLIK

Bu bölümde

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u + |u_t|^{p-1} u_t = |u|^{q-1} u, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = \frac{\partial}{\partial \nu} u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

probleminin çözümlerinin lokal varlığını elde etmeye çalışacağız [Pişkin, 2015].

(H1) $M(s) = m_1 + m_2 s^\gamma$ pozitif lokal Lipschitz fonksiyonu ve L Lipschitz sabiti olsun. Ayrıca $s \geq 0$ için

$$M(s) \geq m_0 > 0$$

dır.

(H2) p ve q

$$\begin{cases} 1 < p < \infty, & n \leq 2 \\ 1 < p \leq \frac{n+2}{n-2}, & n > 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < q < \infty, & n \leq 2 \\ 1 < q \leq \frac{n}{n-2}, & n > 2 \end{cases}$$

şartları sağlansın.

Şimdi (4.1.1.) denkleminin lokal varlığını gösterelim.

Teorem 4.1.1. (H1) ve (H2) sağlansın. Ayrıca

$$(u_0, u_1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

olsun. Bu durumda (4.1.1) denkleminin

$$u \in C([0, T]; H_0^2(\Omega)),$$

$$u_t \in C([0, T]; L^2(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega \times (0, T)))$$

uzayında bir tek çözümü vardır.

Ayrıca aşağıdaki ifadelerden en az biri doğrudur.

(i) $T = \infty$ (Global Varlık),

(ii) $t \rightarrow T^-$ için $\|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 \rightarrow \infty$ (Blow up).

İspat.

$$T > 0$$

ve

$$R_0 > 0$$

olmak üzere; iki parametreye bağlı uzayı aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$X_{T,R_0} = \left\{ v \in C([0, T]; H_0^2(\Omega)), v_t \in C([0, T]; L^2(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega \times (0, T))) \right\} \\ e(v(t)) \leq R_0^2, t \in [0, T], v(0) = u_0, v_t(0) = u_1$$

burada

$$e(v(t)) = \|v_t\|^2 + \|\Delta v\|^2 \quad (4.1.2)$$

dır.

Bu durumda X_{T,R_0} uzayı

$$d(u, v) = \sup_{0 \leq t \leq T} e(u(t) - v(t))$$

uzaklığı ile tam metrik uzaydır.

Şimdi doğrusal olmayan

$$v \in X_{T,R_0}, u = Sv$$

dönüşümünü tanımlayalım. Burada,

$$u = Sv$$

fonksiyonu

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla v\|^2) \Delta u + |u_t|^{p-1} u_t = |v|^{q-1} v, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = \frac{\partial}{\partial \nu} u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1.3)$$

denkleminin tek çözümü olsun.

Şimdi

$$T > 0$$

ve

$$R_0 > 0$$

olmak üzere şu ifadeleri göstermeye çalışacağız;

- (i) $S : X_{T,R_0} \rightarrow X_{T,R_0}$, (S, X_{T,R_0}) uzayından X_{T,R_0} uzayına içine bir dönüşümdür).
- (ii) S, X_{T,R_0} uzayında $d(.,.)$ metriği ile büzülme (daralma) dönüşümüdür.

İlk olarak (i) önermesinin doğruluğunu gösterelim. Bunun için

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla v\|^2) \Delta u + |u_t|^{p-1} u_t = |v|^{q-1} v$$

denklemini $2u_t$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} & 2u_t u_{tt} + 2u_t \Delta^2 u - M(\|\nabla v\|^2) 2u_t \Delta u + 2u_t |u_t|^{p-1} u_t \\ &= 2u_t |v|^{q-1} v \end{aligned}$$

denklemini elde etmiş oluruz.

Şimdi bu denklemin $\Omega \times (0, t)$ üzerinde integralini alırsak

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 2u_t u_{tt} dx + \int_{\Omega} 2u_t \Delta^2 u dx + \int_{\Omega} 2u_t |u_t|^{p-1} u_t dx - \int_{\Omega} -M(\|\nabla v\|^2) 2u_t \Delta u \\ &= \int_{\Omega} 2u_t |v|^{q-1} v dx \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 + M(\|\nabla v\|^2) \|\nabla u\|^2) + 2 \|u_t\|_{p+1}^{p+1} \\ &= \left(\frac{d}{dt} M(\|\nabla v\|^2) \right) \|\nabla u\|^2 + \int_{\Omega} 2u_t |v|^{q-1} v dx \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Elde ettiğimiz denklemi

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} e_1(u(t)) + 2 \|u_t\|_{p+1}^{p+1} \\ &= \left(\frac{d}{dt} M(\|\nabla v\|^2) \right) \|\nabla u\|^2 + \int_{\Omega} 2u_t |v|^{q-1} v dx \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

şeklinde ifade edersek (4.1.4) denkleminde

$$e_1(u(t)) = \|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 + M(\|\nabla v\|^2) \|\nabla u\|^2 \quad (4.1.5)$$

olarak alınmıştır.

Şimdi I_1 ve I_2 için kestirim yapabilmek için L Lipschitz katsayısı olmak üzere;

$$\begin{aligned} I_1 &= 2M'(\|\nabla v\|^2) \int_{\Omega} \nabla v \nabla v_t dx \|\nabla u\|^2 \\ &\leq 2L \|\nabla v\| \|v_t\| \|\nabla u\|^2 \\ &\leq LR_0^2 e_1(u(t)) \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

I_2 için Hölder ve Sobolev-Poincare eşitsizliklerin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2 \|v\|_{2q}^q \|u_t\| \\ &\leq 2C_*^q \|\Delta v\|^q \|u_t\| \\ &\leq 2C_*^q R_0^q [e_1(u(t))]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

şeklinde yazılabilir.

Elde edilen (4.1.6) ve (4.1.7) ifadeleri (4.1.4) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e_1(u(t)) + 2 \|u_t\|_{p+1}^{p+1} &= I_1 + I_2 \\ &\leq LR_0^2 e_1(u(t)) + 2C_*^q R_0^q [e_1(u(t))]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

elde edilir.

Yukarıda elde edilen bu eşitsizliğin $[0, T]$ aralığında integrali alınır ve Gronwall eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt} e_1(u(t)) + 2 \|u_t\|_{p+1}^{p+1} \right) dt \leq \int_0^T \left(LR_0^2 e_1(u(t)) + 2C_*^q R_0^q [e_1(u(t))]^{\frac{1}{2}} \right) dt$$

olur. Buradan Gronwall eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} e_1(u(t)) + 2 \int_0^T \|u_t\|_{p+1}^{p+1} dt &\leq \left(e_1(u_0)^{\frac{1}{2}} + 2C_*^q R_0^q T \right) e^{LR_0^2 T} \\ &= C(u_0, u_1, R_0, T) e^{LR_0^2 T} \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

elde edilir. (4.1.2) ve (4.1.5) ifadelerinden

$$e(u(t)) \leq e_1(u(t))$$

olduğundan dolayı (4.1.9) dan

$$e(u(t)) + 2 \int_0^T \|u_t\|_{p+1}^{p+1} dt \leq C(u_0, u_1, R_0, T) e^{LR_0^2 T} \quad (4.1.10)$$

eşitsizliği yazılabilir.

Bu eşitsizlikte $e(u(t))$ değeri yerine yazılırsa

$$\|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 + 2 \int_0^T \|u_t\|_{p+1}^{p+1} dt \leq C(u_0, u_1, R_0, T) e^{LR_0^2 T}$$

olur. Böylece

$$u \in L^\infty([0, T]; H_0^2(\Omega)),$$

$$u_t \in C([0, T]; L^\infty(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega \times (0, T)))$$

dır. Buradan da

$$u \in C([0, T]; H_0^2(\Omega))$$

sonucuna ulaşılır.

Ayrıca S dönüşümünün (i) özelliğini sağlayabilmesi için T ve R_0 parametrelerinin

$$C(u_0, u_1, R_0, T) e^{LR_0^2 T} \leq R_0^2 \quad (4.1.11)$$

eşitsizliğine uygun olarak seçilmesi yeterlidir.

Bu aşamada

$$u_t \in C([0, T]; L^2(\Omega))$$

olduğunu göstereceğiz.

İlk olarak $\forall t_0 \in [0, T]$

$$\begin{aligned} w(t) &= u(t) - u(t_0) \\ &= S(v(t)) - S(v(t_0)) \end{aligned}$$

şeklinde bir tanımlama yapalım. Bu durumda w

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{tt} + \Delta^2 w - M(\|\nabla v(t)\|^2) \Delta w + |u_t(t)|^{p-1} u_t(t) - |u_t(t_0)|^{p-1} u_t(t_0) \\ \quad = [M(\|\nabla v(t)\|^2) - M(\|\nabla v(t_0)\|^2)] \Delta u(t_0) \\ \quad + (|v(t)|^{q-1} v(t) - |v(t_0)|^{q-1} v(t_0)), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \\ u(x, t) = \frac{\partial}{\partial \nu} u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (4.1.12)$$

denklemini sağlar.

Bu denklemin her iki tarafını $2w_t$ ile çarpıp $\Omega \times (0, t)$ üzerinde integralini alırsak

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} e_2(w(t)) + 2 \int_{\Omega} (|u_t(t)|^{p-1} u_t(t) - |u_t(t_0)|^{p-1} u_t(t_0)) (u_t(t) - u_t(t_0)) dx \\ &= 2 [M(\|\nabla v(t)\|^2) - M(\|\nabla v(t_0)\|^2)] \int_{\Omega} \Delta u(t_0) w_t dx \\ & \quad + \left(\frac{d}{dt} M(\|\nabla v(t)\|^2) \right) \|\nabla w\|^2 + 2 \int_{\Omega} (|v(t)|^{q-1} v(t) - |v(t_0)|^{q-1} v(t_0)) w_t dx \\ &= I_3 + I_4 + I_5 \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada

$$\begin{aligned} e_2(w(t)) &= (\|w_t\|^2 + \|\Delta w\|^2 + M(\|\nabla v(t)\|^2) \|\nabla w\|^2), \\ I_3 &= 2 [M(\|\nabla v(t)\|^2) - M(\|\nabla v(t_0)\|^2)] \int_{\Omega} \Delta u(t_0) w_t dx, \\ I_4 &= \left(\frac{d}{dt} M(\|\nabla v(t)\|^2) \right) \|\nabla w\|^2, \\ I_5 &= 2 \int_{\Omega} (|v(t)|^{q-1} v(t) - |v(t_0)|^{q-1} v(t_0)) w_t dx \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

olarak alınmıştır.

(4.1.13) ün $[t_0, t]$ aralığında integrali alınır ve

$$e_2(w(t_0)) = 0$$

olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} & e_2(w(t)) + 2 \int_{t_0}^t \int_{\Omega} (|u_t(t)|^{p-1} u_t(t) - |u_t(t_0)|^{p-1} u_t(t_0)) (u_t(t) - u_t(t_0)) dx dt \\ &= \int_{t_0}^t (I_3 + I_4 + I_5) dt \end{aligned}$$

olur. (4.1.11) dikkate alınarak

$$\begin{aligned} I_3 &\leq 4L \|\Delta v\| \|\Delta v_t\| \|\Delta w\|^2 \\ &\leq 4LR_0^4, \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

$$I_4 \leq 4LR_0^4 \tag{4.1.16}$$

ve

$$\begin{aligned} I_5 &\leq 2 \left\| (|v(t)|^{q-1} v(t) - |v(t_0)|^{q-1} v(t_0)) \right\| \|w_t\| \\ &\leq 2 \left(\|v\|_{2q}^q + \|v(t_0)\|_{2q}^q \right) \|w_t\| \\ &\leq 2 (\|\nabla v\|^q + \|\nabla v(t_0)\|^q) \|w_t\| \\ &\leq 4R_0^{q+1} \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

olur. Bu eşitsizliklere bağlı olarak

$$I_3 + I_4 + I_5 \leq 8LR_0^4 + 4R_0^{q+1} = C(R) \tag{4.1.18}$$

yazılabilir. $t > t_0$ için

$$|u(t)|^{p-1} u(t)$$

monoton olduğundan

$$t \rightarrow t_0^+ \text{ iken } e_2(w(t)) \leq C(R) (t - t_0) \rightarrow 0$$

dır.

Diğer taraftan $t < t_0$ ve $u_t \in L^{p+1}((0, T) \times \Omega)$ olduğundan

$$t \rightarrow t_0^-$$

için

$$\begin{aligned} e_2(w(t)) &\leq C(R)(t - t_0) + 2 \int_{t_0}^t \int_{\Omega} (|u_t(t)|^{p-1} u_t(t) - |u_t(t_0)|^{p-1} u_t(t_0)) \\ &\quad (u_t(t) - u_t(t_0)) dx dt \rightarrow 0 \end{aligned}$$

olur.

Böylece

$$t \rightarrow t_0$$

için

$$e(w(t)) \leq C e_2(w(t)) \rightarrow 0$$

Sonuç olarak

$$u_t \in C([0, T]; L^2(\Omega))$$

olur. Buradan

$$u(t) \in X_{T, R_0}$$

olduğu açıkça görülmektedir.

Şimdi (ii) önermesinin doğruluğunu, yani S dönüşümünün $d(., .)$ metriğine göre büzülme dönüşümü olduğunu gösterelim. Bunun için

$$v_1, v_2 \in X_{T, R_0}$$

ayrıca

$$u_1 = S v_1 \text{ ve } u_2 = S v_2$$

olarak alalım.

Şimdi

$$d(S v_1, S v_2) = d(u_1, u_2) \leq C d(v_1, v_2),$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermeye çalışacağız. (4.1.11) sağlandığında

$$u_1, u_2 \in X_{T, R_0}$$

olduğu görülür. Daha sonra

$$w = u_1 - u_2$$

olarak alınırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{tt} + \Delta^2 w - M(\|\nabla v_1\|^2) \Delta w + |u_{1t}|^{p-1} u_{1t} - |u_{2t}|^{p-1} u_{2t} \\ = [M(\|\nabla v_1\|^2) - M(\|\nabla v_2\|^2)] \Delta u_2 + (|v_1|^{q-1} v_1 - |v_2|^{q-1} v_2), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \\ u(x, t) = \frac{\partial}{\partial \nu} u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (4.1.19)$$

olur.

(4.1.19) denklemini $2w_t$ ile çarpıp, $\Omega \times (0, t)$ aralığında integral alırsak

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [\|w(t)\|^2 + \|\Delta w\|^2 + M(\|\nabla v_1\|^2) \|\Delta w\|^2] \\ & + 2 \int_{\Omega} (|u_{1t}|^{p-1} u_{1t} - |u_{2t}|^{p-1} u_{2t}) (u_{1t} - u_{2t}) dx \\ & = 2 [M(\|\nabla v_1\|^2) - M(\|\nabla v_2\|^2)] \int_{\Omega} \Delta u_2 w(t) dx \\ & + \left(\frac{d}{dt} M(\|\nabla v_1\|^2) \right) \|\nabla w\|^2 + 2 \int_{\Omega} (|v_1|^{q-1} v_1 - |v_2|^{q-1} v_2) w_t dx \\ & = I_6 + I_7 + I_8 \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

olur.

I_6 , I_7 ve I_8 için bazı kestirimler yapalım:

$$\begin{aligned} I_6 &= 2 [M(\|\nabla v_1\|^2) - M(\|\nabla v_2\|^2)] \int_{\Omega} \Delta u_2 w(t) dx \\ &\leq 2L (\|\nabla v_1\|^2 + \|\nabla v_2\|^2) \|\nabla v_1 - \nabla v_2\| \|w_t\| \\ &\leq 4LC_0 R_0^2 [e(v_1 - v_2)]^{\frac{1}{2}} [e(w_t)]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

$$\begin{aligned} I_7 &= \left(\frac{d}{dt} M(\|\nabla v_1\|^2) \right) \|\nabla w\|^2 \\ &\leq 2L \|\nabla v_1\| \|\nabla v_{1t}\| \|\nabla w\|^2 \\ &\leq LR_0^2 e(w(t)) \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

ve

$$\begin{aligned}
 I_8 &= 2 \int_{\Omega} (|v_1|^{q-1} v_1 - |v_2|^{q-1} v_2) w_t dx \\
 &\leq 2q \int_{\Omega} (|v_1|^q + |v_2|^q) |v_1 - v_2| w_t dx \\
 &\leq 2q \| |v_1| + |v_2| \|_{n(q-1)}^{q-1} \|v_1 - v_2\|_{\frac{2n}{n-2}} \|w_t\| \\
 &\leq 2q C_* \left(\| |v_1| \|_{n(q-1)}^{q-1} + \| |v_2| \|_{n(q-1)}^{q-1} \right) \|\nabla (v_1 - v_2)\|_{n(q-1)}^{q-1} \\
 &\leq 2q C_* R_0^{q-1} [e(v_1 - v_2)]^{\frac{1}{2}} [e(w_t)]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

şeklinde yazılabilir.

Elde ettiğimiz bu eşitsizlikleri (4.1.20) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} [\|w(t)\|^2 + \|\Delta w\|^2 + M(\|\nabla v_1\|^2) \|\Delta w\|^2] \\
 &+ 2 \int_{\Omega} (|u_{1t}|^{p-1} u_{1t} - |u_{2t}|^{p-1} u_{2t}) (u_{1t} - u_{2t}) dx \\
 &= I_6 + I_7 + I_8 \\
 &= 4LC_0 R_0^2 [e(v_1 - v_2)]^{\frac{1}{2}} [e(w_t)]^{\frac{1}{2}} + LR_0^2 e(w(t)) \\
 &\quad + 2q C_* R_0^{q-1} [e(v_1 - v_2)]^{\frac{1}{2}} [e(w_t)]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

$(0, t)$ aralığında integral alır ve başlangıç koşullarını kullanırsak

$$e(w(t)) \leq [4LC_0 R_0^2 + 2q C_* R_0^{q-1}]^2 T^2 e^{LR_0^2 T} \sup_{0 \leq t \leq T} e(v_1 - v_2)$$

olur.

$d(u, v)$ tanımından

$$d(u_1, u_2) \leq C(T, R_0) d(v_1, v_2)$$

elde edilir. Burada

$$C(T, R_0) = C^2 \left[[4LC_0 R_0^2 + 2q C_* R_0^{q-1}]^2 T^2 e^{LR_0^2 T} \right]$$

dir.

Eğer

$$C(T, R_0) < 1$$

alımırca S büzölme dönüşümü olur.

Sonuç olarak T ve R_0 yeterince küçük seçilirse (i) ve (ii) sağlanır. Böylece Banach büzölme dönüşümü teoreminden lokal çözüm elde edilir.



.



4.2. NEGATİF BAŞLANGIÇ ENERJİSİ İÇİN ÇÖZÜMÜN PATLAMASI

Bu kısımda

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u + |u_t|^{p-1} u_t = |u|^{q-1} u, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = \frac{\partial}{\partial \nu} u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

probleminin çözümünün patlamasını başlangıç enerjisi negatif iken elde edeceğiz [Pişkin 2015]. Burada $p, q \geq 1$ ve Ω, R^n de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge ayrıca

$$m_1, m_2 \geq 0, \gamma \geq 1$$

olmak üzere;

$$M(s) = m_1 + m_2 s^\gamma$$

tanımlanmış bir fonksiyondur. Burada $m_1 = m_2 = 1$ olsun.

Lemma 4.2.1. $2 \leq s \leq p$ ise

$$\|u\|_p^s \leq C \left(\|\nabla u\|^2 + \|u\|_p^p \right)$$

dır (Messaoudi 2001).

İspat. Eğer

$$\|u\|_p \leq 1$$

ise

$$\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^2$$

olur. Sobolev gömme teoreminden dolayı

$$\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^2 \leq C \|\nabla u\|^2$$

olarak bulunur. Eğer

$$\|u\|_p \geq 1$$

ise, bu durumda

$$\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^p$$

olur. Elde edilen eşitsizlikler birlikte alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.2.2. $E(t)$ enerji fonksiyoneli $t \geq 0$ için artmayandır. Yani;

$$E'(t) = -\|u_t\|_{p+1}^{p+1} \leq 0$$

dır.

İspat. (4.2.1) denklemini u_t ile çarpalım.

$$u_{tt}u_t + \Delta^2 uu_t - M(\|\nabla u\|^2) \Delta uu_t + |u_t|^{p-1} u_t u_t = |u|^{q-1} uu_t$$

elde edilir.

Şimdi bu denklemin Ω bölgesi üzerinde integralini alıp, Green özdeşliği kullanılırsa

$$\int_{\Omega} [u_{tt}u_t + \Delta^2 uu_t - M(\|\nabla u\|^2) \Delta uu_t + |u_t|^{p-1} u_t u_t] dx = \int_{\Omega} |u|^{q-1} uu_t dx,$$

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \right) \right] = -\|u_t\|_{p+1}^{p+1},$$

$$\frac{d}{dt} (E(t)) = -\|u_t\|_{p+1}^{p+1},$$

$$E'(t) = -\|u_t\|_{p+1}^{p+1} \quad (4.2.2)$$

olduğu görülür.

Burada enerji fonksiyoneli

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \quad (4.2.3)$$

şeklinde dir.

Lemma 4.2.3. $1 \leq p < \infty$ ve $X, Y \geq 0$ olmak üzere

$$(X + Y)^p \leq 2^{p-1} (X^p + Y^p)$$

dır (Adams and Fournier 2003).

İspat. $p = 1$ için

$$(X + Y) = (X + Y)$$

olduğundan eşitsizliğin doğruluğu açıktır.

$p > 1$ için $[0, \infty)$ aralığında t^p fonksiyonu konveks olduğundan grafik (X, X^p) ve (Y, Y^p) noktalarının kesiştiği giriş noktalarına uzanır. Böylece,

$$\left(\frac{X+Y}{2}\right)^p \leq \frac{X^p + Y^p}{2}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.4. Kabul edelim ki (H1) ve (H2) sağlansın. Ayrıca

$$q > \max \{2\gamma + 1, p\}$$

ve

$$E(0) < 0$$

olsun. Bu durumda denklemin çözümü sonlu bir T^* zamanda patlar. Burada

$$T^* \leq \frac{1 - \sigma}{\xi \sigma \psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)}$$

dır.

İspat. Çözümün bütün zamanlar için var olduğunu kabul edip buradan çelişki elde edeceğiz.

Bu amaçla

$$H(t) = -E(t) \tag{4.2.4}$$

olarak tanımlayalım. Lemma 4.2.2, (4.2.4) ve $E(0) < 0$ kabulünden

$$\begin{aligned} 0 < H(0) &\leq H(t) = - \left[\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \|u_t\|^2 - \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) \\ &\quad - \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

olur. Böylece

$$H(t) \leq \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1}$$

olduğu görülür.

ε daha sonra belirlenecek yeterince küçük bir sayı olmak üzere

$$\psi(t) = H^{(1-\sigma)}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t dx \quad (4.2.6)$$

ve

$$0 < \sigma < \min \left\{ \frac{q-p}{p(q+1)}, \frac{q-1}{2(q+1)} \right\} \quad (4.2.7)$$

şeklinde tanımlansın.

Amacımız

$$\psi'(t) \geq \xi \psi^{\zeta}(t), \quad \zeta > 1 \quad (4.2.8)$$

olduğunu göstermektir.

Böylece çözümün sonlu bir zamanda patlayacağı sonucuna ulaşabiliriz. (4.2.6) nın türevini alır ve (4.2.1) denklemini kullanırsak

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \left[H^{(1-\sigma)}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t dx \right]' \\ &= (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \left(\int_{\Omega} uu_{tt} + u_t^2 dx \right) \\ &= (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) \\ &\quad + \varepsilon \left(\int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{\Omega} u (-\Delta^2 u + M(\|\nabla u\|^2) \Delta u - |u_t|^{p-1} u_t + |u|^{q-1} u) dx \right) \\ &= (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \|u_t\|^2 - \varepsilon \|\Delta u\|^2 - \varepsilon \|\nabla u\|^2 \\ &\quad - \varepsilon \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \varepsilon \|u\|_{q+1}^{q+1} - \varepsilon \int_{\Omega} uu_t |u_t|^{p-1} dx \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

elde edilir. $H(t)$ nin tanımından

$$\begin{aligned} H(t) &= - \left[\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \right], \\ - \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} &= H(t) + \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) - \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1}, \\ - \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} &= 2(\gamma+1) H(t) + (\gamma+1) (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|u_t\|^2) - \frac{2(\gamma+1)}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

olur. Bu ifadeyi (4.2.9) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \|u_t\|^2 - \varepsilon \|\Delta u\|^2 \\
&\quad - \varepsilon \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \|u\|_{q+1}^{q+1} - \varepsilon \int uu_t |u_t|^{p-1} dx \\
&\quad + \varepsilon \left(2(\gamma+1) H(t) + (\gamma+1) (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|u_t\|^2) - \frac{2(\gamma+1)}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \right) \\
&= (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon (\gamma+2) \|u_t\|^2 \\
&\quad + \varepsilon \gamma (\|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2) + 2\varepsilon (\gamma+1) H(t) \\
&\quad + \varepsilon \left(1 - \frac{2(\gamma+1)}{q+1} \right) \|u\|_{q+1}^{q+1} - \varepsilon \int_{\Omega} uu_t |u_t|^{p-1} dx
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

ifadesi elde edilir. (4.2.11) in son terimiyle ilgili bir kestirim yapabilmek için

$$X, Y \geq 0, \delta > 0$$

$$k, l \in \mathbb{R}^+ \text{ ve } \frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$$

olmak üzere

$$XY \leq \frac{\delta^k X^k}{k} + \frac{\delta^{-l} Y^l}{l}$$

şeklinde ifade edilen Young eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_{\Omega} uu_t |u_t|^{p-1} dx \leq \frac{\delta^{p+1}}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} + \frac{p \delta^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} \|u_t\|_{p+1}^{p+1} \tag{4.2.12}$$

yazılabilir. $H(t)$ tanımından

$$H'(t) = -E'(t) = \|u_t\|_{p+1}^{p+1}$$

olur. Bu (4.2.12) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} uu_t |u_t|^{p-1} dx &\leq \frac{\delta^{p+1}}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} + \frac{p \delta^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} \|u_t\|_{p+1}^{p+1} \\
&= \frac{\delta^{p+1}}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} + \frac{p \delta^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} H'(t)
\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

bulunur.

δ daha sonra belirlenecek t ye bağlı sabitlerdir. Bunu (4.2.11) denkleminde yerine

yazarsak

$$\begin{aligned}
 \psi'(t) &= (1 - \sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon (\gamma + 2) \|u_t\|^2 \\
 &+ \varepsilon \gamma (\|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2) + 2\varepsilon (\gamma + 1) H(t) \\
 &+ \varepsilon \left(1 - \frac{2(\gamma + 1)}{q + 1}\right) \|u\|_{q+1}^{q+1} \\
 &- \varepsilon \left(\frac{\delta^{p+1}}{p + 1} \|u\|_{p+1}^{p+1} + \frac{p \delta^{-\frac{p+1}{p}}}{p + 1} H'(t)\right)
 \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

ifadesine dönüştür.

$k > 0$ daha sonra belirlenecek bir sabit olmak üzere

$$\delta^{-\frac{p+1}{p}} = k H^{-\sigma}(t) \tag{4.2.15}$$

olsun. Böylece,

$$\delta^{p+1} = k^{-p} H^{\sigma p}(t) \tag{4.2.16}$$

olarak yazılabilir.

Elde edilen ifadeler (4.2.14) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 \psi'(t) &= \left((1 - \sigma) - \varepsilon \frac{pk}{p + 1}\right) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon (\gamma + 2) \|u_t\|^2 \\
 &+ \varepsilon \gamma (\|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2) + 2\varepsilon (\gamma + 1) H(t) \\
 &+ \varepsilon \left(1 - \frac{2(\gamma + 1)}{q + 1}\right) \|u\|_{q+1}^{q+1} - \varepsilon \left(\frac{k^{-p} H^{\sigma p}}{p + 1} \|u\|_{p+1}^{p+1}\right)
 \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

elde edilir.

Teoremdaki kabülümüzden

$$q > p$$

olduğundan

$$H(t) \leq \frac{1}{q + 1} \|u\|_{q+1}^{q+1}$$

eşitsizliğinin σp . kuvvetini alır $\|u\|_{p+1}^{p+1}$ ile çarparsak ve $L^{q+1}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ gömülmesi uygularsak

$$H^{\sigma p}(t) \|u\|_{p+1}^{p+1} \leq C' \left(\frac{1}{q + 1}\right)^{\sigma p} \|u\|_{q+1}^{(q+1)\sigma p + p+1} \tag{4.2.18}$$

şeklinde ifade edilir.

(4.2.18) ifadesi (4.2.17) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\psi'(t) \geq & \left((1 - \sigma) - \varepsilon \frac{pk}{p+1} \right) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon (\gamma + 2) \|u_t\|^2 \\
& + \varepsilon \gamma (\|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2) + 2\varepsilon (\gamma + 1) H(t) \\
& + \varepsilon \left(1 - \frac{2(\gamma + 1)}{q+1} \right) \|u\|_{q+1}^{q+1} \\
& - \varepsilon \left(\frac{k^{-p}}{p+1} C' \left(\frac{1}{q+1} \right)^{\sigma p} \|u\|_{q+1}^{(q+1)\sigma p + p+1} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

olur. (4.2.7) den dolayı

$$\begin{aligned}
(q+1)\sigma p + p + 1 & \leq (q+1) \frac{q-p}{p(q+1)} p + p + 1 \\
& \leq q + 1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
p & \geq 1, \\
p+1 & \geq 2, \\
(q+1)\sigma p + p + 1 & \geq 2
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizliklerin birlikte ele alınmasıyla

$$2 \leq (q+1)\sigma p + p + 1 \leq q + 1$$

olur.

Böylece $\|u\|_{q+1}^{(q+1)\sigma p + p+1}$ terimine Lemma 4.2.1 uygulanır ve elde edilen ifadeye $\|\Delta u\|^2$ terimi eklenirse

$$\begin{aligned}
\|u\|_{q+1}^{(q+1)\sigma p + p+1} & \leq C \left(\|\nabla u\|^2 + \|u\|_{q+1}^{q+1} \right) \\
& \leq C \left(\|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|u\|_{q+1}^{q+1} \right)
\end{aligned}$$

olur.

Bu ifade (4.2.19) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\psi'(t) \geq & \left((1 - \sigma) - \varepsilon \frac{pk}{p+1} \right) H^{-\sigma}(t) H'(t) \\
& + \eta \left(\|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + H(t) + \|u\|_{q+1}^{q+1} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

şeklinde bir ifade elde edilir.

Burada $\eta > 0$

$$\eta = \min \left\{ \varepsilon (\gamma + 2), 2\varepsilon (\gamma + 1), \varepsilon \left(\gamma - \frac{k^{-p}}{p+1} C C' \left(\frac{1}{q+1} \right)^{\sigma p} \right), \varepsilon \left(\frac{q-2\gamma-1}{q+1} - \frac{k^{-p}}{p+1} C C' \left(\frac{1}{q+1} \right)^{\sigma p} \right) \right\}$$

olarak alınmıştır.

ε yeterince küçük alınırsa

$$(1 - \sigma) - \varepsilon \frac{pk}{p+1} \geq 0 \quad (4.2.21)$$

yazılabilir. Böylece (4.2.20) ifadesinin Ω sınırlı bölgesi üzerinde integrali alınırsa $\forall t \geq 0$ için

$$\psi(t) \geq \psi(0) = H^{(1-\sigma)}(0) + \varepsilon \int_{\Omega} u_0 u_1 dx > 0, \quad (4.2.22)$$

yazılır.

Şimdi $\psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t)$ yi elde etmek için $\int_{\Omega} u u_t dx$ terimine Hölder eşitsizliğini ve $L^{q+1}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ gömülmesi uygularsak

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} &\leq \|u\|^{\frac{1}{1-\sigma}} \|u_t\|^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &\leq C \left(\|u\|^{\frac{1}{q+1}} \|u_t\|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right) \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

olur.

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$$

olacak şekilde (4.2.23) terimine Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} &\leq C \left(\|u\|^{\frac{1}{q+1}} \|u_t\|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right) \\ &\leq C \left(\|u\|^{\frac{\mu}{q+1}} + \|u_t\|^{\frac{\theta}{1-\sigma}} \right) \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

olur. Burada

$$\theta = 2(1 - \sigma)$$

olarak alınır

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} &= 1 \\ \frac{1}{\mu} &= 1 - \frac{1}{2(1-\sigma)} \\ \mu &= \frac{2(1-\sigma)}{(1-2\sigma)}\end{aligned}$$

olarak yazılır.

Elde edilen ifadeler (4.2.24) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} &\leq C \left(\|u\|_{q+1}^{\frac{\mu}{1-\sigma}} + \|u_t\|_{\frac{\theta}{1-\sigma}} \right) \\ &= C \left(\|u\|_{q+1}^{\frac{\frac{2(1-\sigma)}{(1-2\sigma)}}{1-\sigma}} + \|u_t\|_{\frac{\theta}{1-\sigma}}^{\frac{2(1-\sigma)}{1-\sigma}} \right) \\ &= C \left(\|u\|_{q+1}^{\frac{2}{1-2\sigma}} + \|u_t\|^2 \right)\end{aligned}\tag{4.2.25}$$

olur.

(4.2.25) ifadesinin $\|u\|_{q+1}^{\frac{2}{1-2\sigma}}$ terimine Lemma 4.2.1 uygulanırsa

$$\left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C \left(\|u\|_{q+1}^{q+1} + \|\nabla u\|^2 + \|u_t\|^2 \right)\tag{4.2.26}$$

şeklinde yazılır.

(4.2.6) ya

$$(X + Y)^p \leq 2^{p-1} (X^p + Y^p)$$

eşitsizliği uygulanır ve (4.2.26) da elde edilen eşitsizlik kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 \psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) &= \left[H^{(1-\sigma)}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t dx \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \\
 &\leq 2^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \left(H(t) + \varepsilon^{\frac{1}{1-\sigma}} \left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right) \\
 &\leq C \left(H(t) + \|u\|_{q+1}^{q+1} + \|\nabla u\|^2 + \|u_t\|^2 \right) \\
 &\leq C \left(H(t) + \|u\|_{q+1}^{q+1} + \|\nabla u\|^2 + \|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 \right) \quad (4.2.27)
 \end{aligned}$$

ifadesine döndürür.

(4.2.20) ve (4.2.27) ten elde edilenlerin birlikte ele alınmasıyla

$$\psi'(t) \geq \xi \psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \quad (4.2.28)$$

olur.

Burada $\xi > 0$ şeklindeki bir sabittir. (4.2.28) in $(0, t)$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
 \frac{d\psi}{dt} &\geq \xi \psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t), \\
 \int_0^t \frac{d\psi}{\psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t)} &\geq \int_0^t \xi dt, \\
 \frac{\psi^{-\frac{1}{1-\sigma}+1}}{-\frac{1}{1-\sigma}+1} \Big|_0^t &\geq \xi t \Big|_0^t, \\
 \psi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) - \psi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0) &\leq -\frac{\sigma}{1-\sigma} \xi t, \\
 \psi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) &\leq \psi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0) + -\frac{\sigma}{1-\sigma} \xi t, \\
 \psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) &\geq \frac{1}{\psi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0) - \frac{\xi \sigma t}{1-\sigma}}
 \end{aligned}$$

bulunur.

Buradan çözüm sonlu bir T^* zamanında patlar ve

$$T^* \leq \frac{1-\sigma}{\xi \sigma \psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)}$$

dır. Böylece ispatımız tamamlanmıştır.

4.3. POZİTİF BAŞLANGIÇ ENERJİSİ İÇİN ÇÖZÜMÜN PATLAMASI

Bu kısımda

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u + |u_t|^{p-1} u_t = |u|^{q-1} u, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = \frac{\partial}{\partial \nu} u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.3.1)$$

probleminin çözümünün patlamasını başlangıç enerjisi pozitif iken elde edeceğiz [Pişkin ve İrkil]. Burada $p, q \geq 1$, Ω, R^n de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge

$$M(s) = m_1 + m_2 s^\gamma,$$

$$m_1, m_2 \geq 0, \gamma \geq 1$$

şeklinde tanımlanmış bir fonksiyondur.

İspatlarımızda genelliği bozmadan

$$m_1 = m_2 = 1$$

olarak alabiliriz. Ayrıca

$$B = \beta^{\frac{1}{q+1}}, \quad \alpha_1 = B^{-\frac{q+1}{q-1}}, \quad E_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \alpha_1^2 \quad (4.3.2)$$

olarak tanımlayacağız. Burada β ,

$$\|u\|_{q+1}^{q+1} \leq \beta \|\nabla u\|^{q+1} \quad (4.3.3)$$

eşitsizliğini sağlayan en iyi sabittir.

Lemma 4.3.1. $2 \leq s \leq p$ iken

$$\|u\|_p^s \leq C \left(\|\nabla u\|^2 + \|u\|_p^p \right)$$

dır. Öyle ki C eşitsizliği sağlayan bir sabittir.

Lemma 4.3.2. Kabul edelim ki (H1) ve (H2) sağlansın. Ve u , (4.3.1) denkleminin bir çözümü olsun. Ayrıca

$$E(0) < E_1$$

ve

$$\left(\|\nabla u_0\|^2 + \|\Delta u_0\|^2 + \frac{1}{\gamma+1} \|\nabla u_0\|^{2(\gamma+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \geq \alpha_1 \quad (4.3.4)$$

olsun.

Bu durumda

$$\alpha_2 > \alpha_1$$

olacak şekilde α_2 sabiti vardır.

$\forall t \in [0, T)$ için

$$\left(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{\gamma+1} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \geq \alpha_2, \quad (4.3.5)$$

$$\left(\|u\|_{q+1}^{q+1} \right)^{\frac{1}{q+1}} \geq B\alpha_2 \quad (4.3.6)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. Enerji denklemi

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \quad (4.3.7)$$

şeklindedir.

$E(t)$, (4.3.3) ve B nin tanımından

$$\begin{aligned} E(t) &\geq \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \\ &\geq \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q+1} \beta (\|\nabla u\|^{q+1}) \\ &= \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{\beta}{q+1} (\|\nabla u\|^2)^{\frac{q+1}{2}} \\ &\geq \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\ &\quad - \frac{B^{q+1}}{q+1} \left(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right)^{\frac{q+1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right) \\ &\quad - \frac{B^{q+1}}{q+1} \left(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right)^{\frac{q+1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \alpha^2 - \frac{B^{q+1}}{q+1} \alpha^{q+1} \\ &= G(\alpha) \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

olur. Burada

$$\alpha = \left(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{\gamma+1} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3.9)$$

olarak alınır. $G(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{B^{q+1}}{q+1}\alpha^{q+1}$ fonksiyonunun birinci türevi alınır ve kökleri incelenirse G nin $0 < \alpha < \alpha_1$ aralığında artan ve $\alpha > \alpha_1$ aralığında azalan olduğu görülür. Yani

$$\begin{aligned} G(\alpha_1) &> G(\alpha), & 0 < \alpha < \alpha_1 \\ G(\alpha) &< G(\alpha_1), & \alpha > \alpha_1 \end{aligned}$$

olmalıdır.

Ayrıca $\alpha \rightarrow \infty$ için $G(\alpha) \rightarrow -\infty$ ve

$$G(\alpha_1) = \frac{1}{2}\alpha_1^2 - \frac{B^{q+1}}{q+1}\alpha_1^{q+1} = E_1 \quad (4.3.10)$$

dir.

$$E(0) < E_1$$

olduğundan

$$G(\alpha_2) = E(0)$$

olacak şekilde

$$\alpha_2 > \alpha_1$$

sabiti vardır.

$$\left(\|\nabla u_0\|^2 + \|\Delta u_0\|^2 + \frac{1}{\gamma+1} \|\nabla u_0\|^{2(\gamma+1)} \right)^{\frac{1}{2}} = \alpha_0$$

ve

$$E(t) \geq G(\alpha)$$

olduğundan

$$G(\alpha_0) \leq E(0) = G(\alpha_2)$$

yazılabilir. Bu da $\alpha_0 \geq \alpha_2$ olmasını gerektirir.

Ayrıca kabul edelim ki (4.3.5) doğru olmasın yani bazı $t_0 > 0$ için

$$\left(\|\nabla u_0\|^2 + \|\Delta u_0\|^2 + \frac{1}{\gamma+1} \|\nabla u_0\|^{2(\gamma+1)} \right)^{\frac{1}{2}} < \alpha_2$$

olsun.

$$\left(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{\gamma+1} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ifadesinin sürekliliğinden

$$\left(\|\nabla u_0\|^2 + \|\Delta u_0\|^2 + \frac{1}{\gamma+1} \|\nabla u_0\|^{2(\gamma+1)} \right)^{\frac{1}{2}} > \alpha_1$$

olacak şekilde t_0 sayısı seçebiliriz.

Tekrar (4.3.8) i kullanırsak

$$\begin{aligned} E(t_0) &\geq G \left(\|\nabla u_0\|^2 + \|\Delta u_0\|^2 + \frac{1}{\gamma+1} \|\nabla u_0\|^{2(\gamma+1)} \right) \\ &> G(\alpha_2) \\ &= E(0) \end{aligned}$$

olur.

Bu da $\forall t \in [0, T)$ için

$$E(t) \leq E(0)$$

olduğundan mümkün değildir. Böylece,

$$\left(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{\gamma+1} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \geq \alpha_2$$

sağlanır.

Şimdi $\left(\|u\|_{q+1}^{q+1} \right)^{\frac{1}{q+1}} \geq B\alpha_2$ olduğunu göstermek için (4.3.7) den dolayı

$$\frac{1}{2} \left(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{\gamma+1} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right) \leq E(t) + \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1}$$

şeklinde yazılabilir.

$$E(t) \leq E(0)$$

olduğundan

$$\frac{1}{2} \left(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{\gamma+1} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right) \leq E(0) + \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1}$$

yazılabilir.

Buna göre

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} &\geq \frac{1}{2} \left(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{\gamma+1} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right) - E(0) \\
&\geq \frac{1}{2} \alpha_2^2 - E(0) \\
&\geq \frac{1}{2} \alpha_2^2 - G(\alpha_2) \\
&= \frac{1}{2} \alpha_2^2 - \left(\frac{1}{2} \alpha_2^2 - \frac{B^{q+1}}{q+1} \alpha_2^{q+1} \right) \\
&= \frac{B^{q+1}}{q+1} \alpha_2^{q+1}
\end{aligned}$$

ifadesine dönüştür.

Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} &\geq \frac{B^{q+1}}{q+1} \alpha_2^{q+1} \\
\|u\|_{q+1}^{q+1} &\geq (B\alpha_2)^{q+1} \\
\left(\|u\|_{q+1}^{q+1} \right)^{\frac{1}{q+1}} &\geq B\alpha_2
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.3.1. Kabul edelim ki (H1) ve (H2) sağlansın. Ayrıca

$$q > \max \{2\gamma + 1, p\}$$

$$\left(\|\nabla u_0\|^2 + \|\Delta u_0\|^2 + \frac{1}{\gamma+1} \|\nabla u_0\|^{2(\gamma+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \geq \alpha_1$$

ve

$$E(0) < E_1$$

olsun.

Bu durumda denklemin çözümü sonlu bir zamanda patlar. Burada α_1 ve E_1 (4.3.2) de tanımlanmıştır.

İspat. Çözümün bütün zamanlar için var olduğunu kabul edip buradan çelişki elde edeceğiz.

Bu amaçla

$$H(t) = E_1 - E(t) \tag{4.3.11}$$

olarak tanımlayalım.

(4.3.7) ve (4.3.11) in ve

$$E(0) < E_1$$

kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} 0 < H(0) \leq H(t) = E_1 - \left[\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \right] \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

olur.

$\alpha_2 > \alpha_1$ olarak verildiğinden

$$\begin{aligned} H(t) &\leq E_1 - \frac{1}{2} \left(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \right) + \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \\ &\leq E_1 - \frac{1}{2} \alpha_2^2 + \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \\ &\leq \frac{1}{2} \alpha_1^2 - \frac{1}{q+1} \alpha_1^2 - \frac{1}{2} \alpha_1^2 + \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \\ &= -\frac{1}{q+1} \alpha_1^2 + \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \\ &\leq \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

olur.

(4.3.12) ve (4.3.13) ten dolayı

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \quad (4.3.14)$$

şeklinde yazılabilir.

ε sonradan belirlenecek yeterince küçük bir sayı olmak üzere

$$\psi(t) = H^{(1-\sigma)}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t dx \quad (4.3.15)$$

ve

$$0 < \sigma < \min \left\{ \frac{q-p}{p(q+1)}, \frac{q-1}{2(q+1)} \right\} \quad (4.3.16)$$

şeklinde tanımlansın. Amacımız

$$\psi'(t) \geq \xi \psi^{\zeta}(t), \zeta > 1 \quad (4.3.17)$$

olduğunu göstermektir. Böylece çözümün sonlu bir zamanda patlayacağı sonucuna

ulaşabiliriz.

(4.3.15) in türevini alır ve (4.3.1) denklemini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= \left[H^{(1-\sigma)}(t) + \varepsilon \left(\int_{\Omega} uu_t dx \right) \right]' \\
&= (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \left(\int_{\Omega} uu_{tt} + (u_t)^2 dx \right) \\
&= (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \left(\int_{\Omega} (u_t)^2 dx \right) \\
&\quad + \varepsilon \left(\int_{\Omega} u (-\Delta^2 u + M(\|\nabla u\|^2) \Delta u - |u_t|^{p-1} u_t + |u|^{q-1} u) dx \right) \\
&= (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \|u_t\|^2 - \varepsilon \|\Delta u\|^2 - \varepsilon \|\nabla u\|^2 \\
&\quad - \varepsilon \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \varepsilon \|u\|_{q+1}^{q+1} - \varepsilon \int_{\Omega} uu_t |u_t|^{p-1} dx
\end{aligned} \tag{4.3.18}$$

$H(t)$ nin tanımından

$$\begin{aligned}
H(t) &= E_1 - \left[\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1} \right], \\
&\quad - \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\
&= H(t) - E_1 + \frac{1}{2} \|u_t\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) - \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} &= 2(\gamma+1) H(t) - 2(\gamma+1) E_1 \\
&\quad + (\gamma+1) (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|u_t\|^2) \\
&\quad - \frac{2(\gamma+1)}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1}
\end{aligned} \tag{4.3.19}$$

olur.

Bu ifadeyi (4.3.18) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
 \psi'(t) &= (1 - \sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \|u_t\|^2 - \varepsilon \|\Delta u\|^2 \\
 &\quad - \varepsilon \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \|u\|_{q+1}^{q+1} - \varepsilon \int u u_t |u_t|^{p-1} dx \\
 &\quad + \varepsilon (2(\gamma + 1) H(t) - 2(\gamma + 1) E_1 \\
 &\quad + (\gamma + 1) (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|u_t\|^2) - \frac{2(\gamma + 1)}{q + 1} \|u\|_{q+1}^{q+1}) \\
 &= (1 - \sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon (\gamma + 2) \|u_t\|^2 \\
 &\quad + \varepsilon \gamma (\|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2) + 2\varepsilon (\gamma + 1) H(t) \\
 &\quad + \varepsilon \left(1 - \frac{2(\gamma + 1)}{q + 1} - \frac{2(\gamma + 1)}{\|u\|_{q+1}^{q+1}} E_1 \right) \|u\|_{q+1}^{q+1} - \varepsilon \int_{\Omega} u u_t |u_t|^{p-1} dx
 \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

ifadesi elde edilir.

Daha sonra (4.3.6) dan

$$\begin{aligned}
 \psi'(t) &\geq (1 - \sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon (\gamma + 2) \|u_t\|^2 \\
 &\quad + \varepsilon \gamma (\|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2) + 2\varepsilon (\gamma + 1) H(t) \\
 &\quad + \varepsilon C' \|u\|_{q+1}^{q+1} - \varepsilon \int_{\Omega} u u_t |u_t|^{p-1} dx
 \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

olur.

Burada

$$C' = \left(1 - \frac{2(\gamma + 1)}{q + 1} - 2(\gamma + 1) E_1 (B\alpha_2)^{-(q+1)} \right)$$

olarak alınmıştır.

$$\alpha_2 > \alpha_1 = B^{-\frac{q+1}{q-1}}$$

olduğundan

$$C' > 0$$

olduğu açıktır. (4.3.21) in son terimi için bir kestirimde bulunabilmek için

$$X, Y \geq 0, \delta > 0$$

$$k, l \in R^+ \text{ ve } \frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$$

olmak üzere

$$XY \leq \frac{\delta^k X^k}{k} + \frac{\delta^{-l} X^l}{l}$$

şeklinde ifade edilen Young eşitsizliği son terime uygulanırsa

$$\int_{\Omega} uu_t |u_t|^{p-1} dx \leq \frac{\delta^{p+1}}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} + \frac{p}{p+1} \delta^{-\frac{p+1}{p}} \|u_t\|_{p+1}^{p+1} \quad (4.3.22)$$

olarak ifade edilir. $H(t)$ tanımından

$$H'(t) = E'_1 - E'(t) = E'_1 + \|u_t\|_{p+1}^{p+1}$$

olarak yazılabilir. Bu ifade (4.3.22) eşitsizliğinde $\|u_t\|_{p+1}^{p+1}$ teriminin yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} uu_t |u_t|^{p-1} dx &\leq \frac{\delta^{p+1}}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} + \frac{p}{p+1} \delta^{-\frac{p+1}{p}} \|u_t\|_{p+1}^{p+1} \\ &\leq \frac{\delta^{p+1}}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} + \frac{p}{p+1} \delta^{-\frac{p+1}{p}} H'(t) \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

bulunur.

δ daha sonra belirlenecek t ye bağlı sabitlerdir. (4.3.23) ifadesini (4.3.21) eşitsizliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \psi'(t) &\geq (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon (\gamma+2) \|u_t\|^2 \\ &\quad + \varepsilon \gamma (\|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2) + 2\varepsilon (\gamma+1) H(t) \\ &\quad + \varepsilon C' \|u\|_{q+1}^{q+1} - \varepsilon \left(\frac{\delta^{p+1}}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} + \frac{p}{p+1} \delta^{-\frac{p+1}{p}} H'(t) \right) \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

ifadesine dönüştür.

$k > 0$ daha sonra belirlenecek bir sabit olmak üzere

$$\delta^{-\frac{p+1}{p}} = k H^{-\sigma} \quad (4.3.25)$$

olsun. Böylece,

$$\delta^{p+1} = k^{-p} H^{\sigma p} \quad (4.3.26)$$

olur.

(4.3.25) ve (4.3.26) ifadeleri (4.3.24) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \psi'(t) \geq & \left((1 - \sigma) - \varepsilon \frac{pk}{p+1} \right) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon (\gamma + 2) \|u_t\|^2 \\ & + \varepsilon \gamma (\|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2) + 2\varepsilon (\gamma + 1) H(t) \\ & + \varepsilon C' \|u\|_{q+1}^{q+1} - \varepsilon \left(\frac{k^{-p} H^{\sigma p}}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} \right) \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

yazılır.

Teoremdaki kabülümüzden

$$q > p$$

olduğundan ve

$$H(t) \leq \frac{1}{q+1} \|u\|_{q+1}^{q+1}$$

olarak elde edildiğinden eşitsizliğin (σp) kuvvetini alır, $\|u\|_{p+1}^{p+1}$ ile çarparsak ve $L^{q+1}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ gömülmesi uygularsak

$$H^{\sigma p} \|u\|_{p+1}^{p+1} \leq C_1 \left(\frac{1}{q+1} \right)^{\sigma p} \|u\|_{q+1}^{(q+1)\sigma p + p+1} \quad (4.3.28)$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.3.28) ifadesi (4.3.27) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \psi'(t) \geq & \left((1 - \sigma) - \varepsilon \frac{pk}{p+1} \right) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon (\gamma + 2) \|u_t\|^2 \\ & + \varepsilon \gamma (\|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2) + 2\varepsilon (\gamma + 1) H(t) \\ & + \varepsilon C' \|u\|_{q+1}^{q+1} - \varepsilon \left(\frac{k^{-p}}{p+1} C_1 \left(\frac{1}{q+1} \right)^{\sigma p} \|u\|_{q+1}^{(q+1)\sigma p + p+1} \right) \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

olur. (4.3.29) eşitsizliğinin son terimi için bir kestirim bulalım. (4.3.16) dan

$$\begin{aligned} (q+1)\sigma p + p+1 & \leq (q+1) \frac{q-p}{p(q+1)} p + p+1 \\ & \leq q+1 \end{aligned}$$

dır. Ve $p \geq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} p+1 & \geq 2, \\ (q+1)\sigma p + p+1 & \geq 2 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$2 \leq (q+1)\sigma p + p+1 \leq q+1$$

yazılabilir. $\|u\|_{q+1}^{(q+1)\sigma p+p+1}$ ifadesine Lemma 4.3.1 uygular ve $\|\Delta u\|^2$ terimini eklersek

$$\begin{aligned}\|u\|_{q+1}^{(q+1)\sigma p+p+1} &\leq C \left(\|\nabla u\|^2 + \|u\|_{q+1}^{q+1} \right) \\ &\leq C \left(\|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|u\|_{q+1}^{q+1} \right)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ifade (4.3.29) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\psi'(t) &\geq \left((1-\sigma) - \varepsilon \frac{pk}{p+1} \right) H^{-\sigma}(t) H'(t) \\ &\quad + \eta \left(\|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + H(t) + \|u\|_{q+1}^{q+1} \right)\end{aligned}\quad (4.3.30)$$

olarak yazılır.

Burada

$$\eta = \min \left\{ \varepsilon(\gamma+2), 2\varepsilon(\gamma+1), \varepsilon \left(\gamma - Ck^{-p} \left(\frac{1}{q+1} \right)^{\sigma p} \right), \varepsilon(C' - C) \right\} > 0,$$

dır. ε yeterince küçük seçilirse

$$(1-\sigma) - \varepsilon \frac{pk}{p+1} \geq 0$$

olur. (4.3.30) ifadesinin integrali alınırsa

$$\psi(t) \geq \psi(0) = H^{(1-\sigma)}(0) + \varepsilon \int_{\Omega} u_0 u_1 dx > 0, \forall t \geq 0$$

elde edilir.

Şimdi $\psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t)$ yi elde etmek için $\int_{\Omega} uu_t dx$ terimine Hölder eşitsizliğini ve $L^{q+1}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ gömülmesi uygularsak

$$\begin{aligned}\left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} &\leq \|u\|^{\frac{1}{1-\sigma}} \|u_t\|^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &\leq C \left(\|u\|_{q+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} \|u_t\|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right)\end{aligned}\quad (4.3.31)$$

yazılır.

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$$

olacak şekilde Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} &\leq C \left(\|u\|_{q+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} + \|u_t\|_{\frac{1}{1-\sigma}} \right) \\ &\leq C \left(\|u\|_{q+1}^{\frac{\mu}{1-\sigma}} + \|u_t\|_{\frac{\theta}{1-\sigma}} \right) \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

olur. Burada

$$\theta = 2(1 - \sigma)$$

olarak alınır

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} &= 1 \\ \frac{1}{\mu} &= 1 - \frac{1}{2(1-\sigma)} \\ \mu &= \frac{2(1-\sigma)}{(1-2\sigma)} \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

Elde edilen ifadeler (4.3.32) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} &\leq C \left(\|u\|_{q+1}^{\frac{\mu}{1-\sigma}} + \|u_t\|_{\frac{\theta}{1-\sigma}} \right) \\ &= C \left(\|u\|_{q+1}^{\frac{\frac{2(1-\sigma)}{(1-2\sigma)}}{1-\sigma}} + \|u_t\|_{\frac{2(1-\sigma)}{1-\sigma}} \right) \\ &= C \left(\|u\|_{q+1}^{\frac{2}{1-2\sigma}} + \|u_t\|^2 \right) \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

dir. $\|u\|_{q+1}^{\frac{2}{1-2\sigma}}$ terimine Lemma 4.3.1 uygulanırsa

$$\left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C \left(\|u\|_{q+1}^{q+1} + \|\nabla u\|^2 + \|u_t\|^2 \right) \quad (4.3.34)$$

olur. (4.3.15) ifadesine

$$(X + Y)^p \leq 2^{p-1} (X^p + Y^p)$$

eşitsizliği uygulanır ve (4.3.34) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) &= \left[H^{(1-\sigma)}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t dx \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \\
&\leq 2^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \left(H(t) + \varepsilon^{\frac{1}{1-\sigma}} \left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right) \\
&\leq C \left(H(t) + \|u\|_{q+1}^{q+1} + \|\nabla u\|^2 + \|u_t\|^2 \right) \\
&\leq C \left(H(t) + \|u\|_{q+1}^{q+1} + \|\nabla u\|^2 + \|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 \right) \quad (4.3.35)
\end{aligned}$$

olur. (4.3.30) ve (4.3.35) ten elde edilenlerin birlikte ele alınmasıyla

$$\psi'(t) \geq \xi \psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \quad (4.3.36)$$

ifadesi elde edilir. Burada $\xi > 0$ şeklindeki bir sabittir.

(4.3.36) nın $(0, t)$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dt} &\geq \xi \psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t), \\
\int_0^t \frac{d\psi}{\psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t)} &\geq \int_0^t \xi dt, \\
\frac{\psi^{-\frac{1}{1-\sigma}+1}}{-\frac{1}{1-\sigma}+1} \Big|_0^t &\geq \xi t \Big|_0^t, \\
\frac{\psi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) - \psi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)}{-\frac{\sigma}{1-\sigma}} &\geq \xi t, \\
\psi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) - \psi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0) &\leq -\frac{\sigma}{1-\sigma} \xi t, \\
\psi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) &\leq \psi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0) - \frac{\sigma}{1-\sigma} \xi t, \\
\psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) &\geq \frac{1}{\psi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0) - \frac{\xi \sigma t}{1-\sigma}}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan çözüm sonlu bir T^* zamanında patlar ve

$$T^* \leq \frac{1-\sigma}{\xi \sigma \psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)}$$

dır. Böylece ispatımız tamamlanmıştır.



5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tez çalışmamın esas kısmını oluşturan bölüm pozitif başlangıca sahip iken problemin global çözümünün yokluğudur.

Ele alınan denklemin patlaması farklı metotlarla çalışılabilir. Ayrıca problemin farklı matematiksel davranışları ele alınabilir. Problemin bazı değişkenleri için özel değerler seçilerek nümerik çalışmalar yapılabilir. Sınırlı bölgede çalıştığımız problem sınırsız bir bölgede genişletilebilir.





6. KAYNAKLAR

Adams, R.A., Fournier, J.J.F., 2003, Sobolev Spaces. Academic Press. New York.

Antman, S.S., 2005, Nonlinear Problems of Elasticity, Springer, New York.

Astaburuaga, M. A., Fernandez, C., Menzala, G. P., 1994, Local smoothing effects for a nonlinear Timoshenko type equation. *Nonlinear Analysis*, 23, 1091-1103.

Bainov, D., Minchev, E., 1997, Upper estimate of the interval of existence of solutions of a nonlinear Timoshenko equation. *J. Georgian Mathematical*, 4, 219-222.

Ball, J.M., 1973, Stability theory for an extensible beam. *Journal of Differential Equations*, 14:399-418.

Brezis, H., 2011, Functional analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations. Springer.

Chen, H., Liu, G., 2013, Global existence, uniform decay and exponential growth for a class of semilinear wave equation with strong damping. *ActaMath. Sci.*, 33B(1):41-58.

Dickey, R.W., 1970, Free vibrations and dynamic buckling of the extensible beam. *J. Math. Anal. Appl.*, 29, 443-454.

Dickey, R.W., 1970, Infinite systems of nonlinear oscillation equations with linear damping. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 19:208–214

Esquivel-Avila, J.A., 2010, Dynamic analysis of a nonlinear Timoshenko equation. *Abstract and Applied Analysis*, 2010: 1-36

Esquivel-Avila, J.A., 2013, Global attractor for a nonlinear Timoshenko equation with source terms. *Mathematical Sciences*, 2013: 1-8.

Evans, L. C., 1998, Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics: vol. 19.

Georgiev, V., Todorova, G., 1994, Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source term. Journal of Differential Equations, 109: 295-308.

Kesavan, S., 1989, Topics in functional analysis and applications. John Wiley Sons. India.

Levine, H.A., 1974, Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations. SIAM Journal on Applied Mathematics, 5: 138-146

Levine, H.A., 1974, Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} + Au = F(u)$. Trans. Amer. Math. Soc., 192: 1-21.

Medeiros, L.A., 1979, On a new class of nonlinear wave equations. J. Math. Anal. Appl. 69, 252-262.

Medeiros, L A., Miranda, M. Milla, 1999, Existence and boundary stabilization of solutions for the kirchhoff equation: Existence and boundary stabilization Math. Apl. Comput., 6, 257-267.

Messaoudi, S.A., 2001, Blow up in a nonlinearly damped wave equation. Mathematische Nachrichten, 231: 105-111.

Messaoudi, S.A., 2001, Global nonexistence in a nonlinearly damped wave equation. Applicable Analysis, 80: 269-277.

Meyvacı, M., 2005, Lineer olmayan başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümlerinin uzun zaman davranışı, Doktora Tezi, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi.

Ono, K., 1997, On global solutions and blow up solutions of nonlinear Kirchhoff strings with nonlinear dissipation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 216: 321-342.

Ono, K., 1997, On global existence, asymptotic stability and blowing up of solutions for some degenerate nonlinear wave equations of Kirchhoff type with a strong dissipation, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 20: 151-177.

Pişkin, E., 2013, Doğrusal olmayan evölüsyon denklemlerin çözümlerinin azalması ve patlaması, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi.

Pişkin, E., 2015, Existence, decay and blow up of solutions for the extensible beam equation with nonlinear damping and source terms, *Open Math.* 13: 408–42.

Pişkin, E., Irkıl N., (in press), Blow up of positive initial-energy solutions for the extensible beam equation with nonlinear damping and source terms, *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*.

Polat, N., 2005, Doğrusal olmayan parabolik veya hiperbolik diferansiyel denklemlerde global çözümlerin yokluğu, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi.

Runzhang, X., Jihong, S., 2009, Some generalized results for global well-posedness for wave equations with damping and source terms. *Math. Comput. Simulat.*, 80: 804–807.

Sattinger, D.H, 1968, On Global Solution of Nonlinear Hyperbolic Equation, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 30, 148-172.

Timoshenko, S., Young, D. H., Weaver, W., 1974, *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley, New York.

Taskesen, H., Polat, N., 2015, Existence results for a nonlinear Timoshenko equation with high initial energy, *AIP Conf. Proc.*, 1676.

Vitillaro, E., 1999, Global Nonexistence Theorems for A Class of Evolution Equations with Dissipation, *Archive Rational Mech. Anal.*, 149, 155-182

Woinowsky-Krieger, S., 1950, The effect of axial force on the vibration of hinged bars, *Journal Applied Mechanics*, 17: 35-36.

Yu, S., 2009, On the strongly damped wave equation with nonlinear damping and source terms, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., 39: 1-18.



ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Mardin ilinin Artuklu ilçesinde doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Mardin’de tamamladım. 2014 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi OFMAE Bölümü Matematik Anabilim Dalında lisans öğrenimimi birincilikle tamamladım. 2014 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığı’na bağlı okullarda öğretmenlik yapmaktayım.

Çalışmaları

Makaleler

E. Pişkin, N. Irkıl, Blow up of positive initial-energy solutions for the extensible beam equation with nonlinear damping and source terms, Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics, (Baskıda)

Bildiriler

E. Pişkin, N. Irkıl, Blow up of positive initial-energy solutions for the extensible beam equation, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2016), 12-14 May 2016, Fırat University, Elazığ, Turkey, pp 285.

Projeler

Doğrusal Olmayan Timoshenko Denkleminin Çözümlerinin Matematiksel Davranışı, ZGEF.16.007 (Proje Yürütücüsü: Erhan Pişkin, Araştırmacı: Nazlı Irkıl).



T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS / DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI İNTİHAL RAPORU
FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ

ADI VE SOYADI	Nazlı IRKIL
ÖĞRENCİ NO	14804002
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2015-2016
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	☒ Yüksek Lisans ☐ Doktora ☐ Tezsiz Yüksek Lisans (Dönem Projesi)
TEZ KONUSU	DOĞRUSAL OLMAYAN TİMOSHENKO DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ

RAPOR TÜRÜ	☒ Tez Savunma Sınavı Öncesi ☐ Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	66+vi
BENZERLİK ORANI	%17
RAPORLAMA TARİHİ	29/06/ 2016

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 67+vi sayfalık kısmına ilişkin, 29/06/2016 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 17 'dir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☒ Kabul/Onay sayfaları hariç,
- ☐ Kaynakça hariç
- ☐ Alıntılar hariç/dâhil
- ☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Nazlı İRKIL

(Öğrencinin Adı Soyadı)

11/07/2016

Doç.Dr. Erhan PİŞKİN
Tez Danışmanı

...11../07./2016

Prof.Dr. H. Özlem GÜNEY
Anabilim Dalı Başkanı