

DOMINATED OPERATÖRLER

Abdullah AYDIN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ARALIK 2009

ANKARA

Abdullah AYDIN tarafından hazırlanan DOMİNATED OPERATÖRLER
adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Bahri TURAN
(Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı)

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliğiyle MATEMETİK Anabilim Dalında Yüksek
Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Bahri TURAN
Matematik Ana Bilim Dalı Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Şafak ALPAY
Matematik Ana Bilim Dalı ODTÜ

Prof. Dr. Nurhaya TİSPİR
Matematik Ana Bilim Dalı Gazi Üniversitesi)

Tarih : 08.12.2009

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini
onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Abdullah AYDIN

DOMINATED OPERATÖRLER**(Yüksek Lisans Tezi)****Abdullah AYDIN****GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Kasım 2009****ÖZET**

Gerçel veya kompleks değerli sınırlı fonksiyonlar için Hahn-Banach Teoremi iyi bilinmektedir. Daha sonra Riesz uzayları arasında tanımlı pozitif operatörler için pozitif genişlemeler elde edilmiştir. Bu çalışmada X vektör normlu uzay olmak üzere X üzerinde E -sınırlı operatörler tanımlayarak X üzerinde E değerli ve E -sınırlı operatörler için Hahn-Banach Teoremi ve bazı sonuçları elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.095
Anahtar Kelimeler : Riesz uzayı, lattice, pozitif operatörler, domine edilmiş operatörler
Sayfa Adedi : 67
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Bahri TURAN

DOMINATED OPERATÖRLER**(M.Sc. Thesis)****Abdullah AYDIN****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****November 2009****ABSTRACT**

The Hahn-Banach Theorem on extensions of linear functionals is well-known classical. These considerations are also generalized to positive operators between Riesz spaces. In this study a vector lattice E valued E -bound linear operators is considered on a Hahn-Banach Theorem is proved.

Science Code : 204.1.095**Key Words : Riesz space, lattice, positive operators, dominated operator****Page Number : 67****Adviser : Prof. Dr. Bahri TURAN**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren ve bana yol gösteren hocam Sayın Prof. Dr. Bahri TURAN’a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca çalışmalarım boyunca maddi ve manevi desteğini esirgemeyen değerli aileme şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER**Sayfa**

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL TANIM VE ÖNERMELER	2
3. DOMİNATED OPERATÖRLER	15
4. HAHN BANACH TEOREMİ VE SONUÇLARI	56
5. SONUÇ	65
KAYNAKLAR	66
ÖZGEÇMİŞ	67

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan başlıca simgeler ve kısaltmalar açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Simge	Açıklama
E^+	E'nin pozitif kısmı
E^-	E'nin negatif kısmı
$x \vee y$	x ve y'nin supremumu
$x \wedge y$	x ve y'nin infumumu
x^+	x ve 0'ın (vektör uzayının sıfırı) supremumu
x^-	-x ve 0'ın supremumu
$ x $	x ve -x'nin supremumu
$x \perp y$	$ x $ ve $ y $ 'nin infumumu sıfırdır
$[x,y]$	Sıralı aralık
$L(E,F)$	E'den F'ye tüm operatörlerin uzayı
$L_b(E,F)$	Sıra sınırlı operatörlerin uzayı
$L_r(E,F)$	Regüler operatörlerin uzayı
$x_\alpha \downarrow x$	$\{x_\alpha\}$ aşağı yönlendirilmiş olup infumumu x dir.
$x_\alpha \uparrow x$	$\{x_\alpha\}$ yukarı yönlendirilmiş olup supremumu x dir.
$\text{maj}(T)$	T'nin bütün majorantları
$\text{m}(X,Y)$	X'den Y'ye domine edilebilen tüm operatörler
$\text{Orth}(X,Y)$	X'den Y'ye tüm ortomorfizmalar
A^d	A kümesinin dik tümleyenlerin kümesi
B_x	x'in ürettiği band
$P(X)$	X üzerindeki projeksiyonların kümesi

1. GİRİŞ

E ve F Riesz uzayları olmak üzere E 'den F 'ye sıra sınırlı dönüşümlerin kümesi $L_b(E, F)$

$$S \leq T \Leftrightarrow \forall x \in E^+ \text{ için } S(x) \leq T(x)$$

sıralaması ile bir sıralı vektör uzayıdır.

S ve T olduğundan yukarda da söylendiği gibi sıralama tanımlanırken karşılaştırmayı E^+ 'nın noktalarında yapmak yeterlidir. Fakat S ve T doğrusal olmadığında verilen bağıntı sıralama bağıntısı olmayabilir.

X bir vektör uzayı ve E bir Riesz uzayı olmak üzere X 'den E 'ye bir norm tanımlanabilir ve böylece (X, E) bir normlu uzay olur. Gerçel sayılar bir Riesz uzayı olduğunda E yerine özel olarak gerçel sayılar alınınca (X, i) de bir normlu uzay olur. i Ayrışım uzayı şartlarını da sağladığından (X, i) bir Ayrışım uzayı olur. Daha önce (X, i) 'de Hahn Banach Teoreminin varlığı iyi bilinmektedir.

Üçüncü bölümde sınırlanmış dönüşümün sınır dönüşümlerinin varlığı için gerekli koşulların ne oldukları incelenmiş, ayrıca verilen bir dönüşümün sınır dönüşümüne eşiti olan denklemlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde sınırlanmış dönüşümler üzerinde E -sınırlılık tanımlanarak buradan Hahn Banach teoreminin (X, E) uzayında da sağlandığı gösterilmiş. Hatta (X, i) uzayında sağlanan Hahn Banach teoremin (X, E) 'de bulunan Hahn Banach teoreminin bir özel hali olduğu da sonuç olarak verilmiştir.

2. GENEL TANIM VE ÖNERMELER

Bu tezde tanıtılan Dominated Dönüşümleri verebilmek için bazı temel kavramların tanıtılması gerekmektedir. Bu nedenle bu bölümde Pozitif Dönüşümler, Riesz Uzayları, Dedekind Tam Riesz Uzayları ve Vektör Normlu Uzaylar ile ilgili gerekli tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Tanım

E , üzerinde “ $\leq$ ” sıralama bağıntısı olan bir gerçel vektör uzayı olsun. Eğer her $x, y \in E$ için;

$$(i) \quad x \leq y \text{ iken her bir } z \in E \text{ için } x + z \leq y + z$$

$$(ii) \quad x \leq y \text{ iken her bir } 0 \leq a \in \mathbb{R} \text{ için } a.x \leq a.y$$

şartları sağlanırsa, E uzayına sıralı vektör uzayı denir. E sıralı vektör uzayının $0 \leq x$ bağıntısını sağlayan elemanlarına pozitif elemanlar denir ve E^+ ile gösterilir. E ve F iki sıralı vektör uzayı olmak üzere bir $T: E \rightarrow F$ doğrusal dönüşümü kısaca dönüşüm olarak adlandırılacaktır. Ayrıca her bir $x \in E^+$ için $0 \leq T(x)$ oluyorsa T dönüşümüne pozitif dönüşüm denilecek ve $0 \leq T$ şeklinde gösterilecektir [1].

2.2. Tanım

E bir sıralı küme ve E 'nin boştan farklı bir alt kümesi A olsun. Eğer her $a \in A$ için $a \leq x$ olacak şekilde $x \in E$ varsa A 'ya üsten sınırlı, eğer her $a \in A$ için $x \leq a$ olacak şekilde $x \in E$ varsa A 'ya alttan sınırlı küme denir. A kümesi hem alttan hem de üsten sınırlı ise A 'ya sıra sınırlı küme denir [1].

2.3. Tanım

E bir sıralı vektör uzayı, A da bu uzayın herhangi bir alt uzayı olsun.

(i) Her $x \in A$ için $x \leq z$

(ii) Her $x \in A$ için $x \leq y$ olacak şekildeki her $y \in E$ için $z \leq y$

koşullarını sağlayacak şekilde bir $z \in E$ varsa buna A kümesinin supremumu denir ve $\sup(A)=z$ biçiminde gösterilir. Özel olarak $A = \{x, y\} \subset E$ ise $z = \sup\{x, y\} = x \vee y$ şeklinde gösterilir [2].

2.4. Tanım

E bir sıralı vektör uzayı, A da bu uzayın herhangi bir alt uzayı olsun.

(i) Her $x \in A$ için $z \leq x$

(ii) Her $x \in A$ için $y \leq x$ olacak şekildeki her $y \in E$ için $y \leq z$

koşullarını sağlayacak şekilde bir $z \in E$ varsa buna A kümesinin infumumu denir ve $\inf(A)=z$ biçiminde gösterilir. Özel olarak $A = \{x, y\} \subset E$ ise $z = \inf\{x, y\} = x \wedge y$ şeklinde gösterilir [2].

2.5. Tanım

E sıralı bir küme olsun. Eğer üzerindeki sıralamaya göre her x, y elemanın supremumu ve infumumu da E 'ye ait ise E uzayına bir örgü (örgü) denir. E vektör uzayı ise E 'ye vektör örgüsü veya Riesz uzayı adı verilir.

E bir Riesz uzayı ve $x \in E$ olsun. $x^+ = x \vee 0$, $x^- = (-x) \vee 0$ ve $|x| = (-x) \vee x$ elemanlarına sırası ile $x \in E$ elemanının pozitif kısmı, negatif kısmı ve modülü

(mutlak değeri) denir. Eğer $x, y \in E$ için $|x| \wedge |y| = 0$ ise x ile y elemanları birbirine diktir denir ve $x \perp y$ ile gösterilir. A, E 'nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere, $\{x \in E : \text{her } y \in A \text{ için } x \perp y\}$ kümesine A kümesinin dik tümleyeni denir ve A^d ile gösterilir [2].

2.6. Önerme

E bir Riesz uzayı ve $x, y, z \in E$ olsun. O zaman aşağıdaki önermeler doğrudur.

$$(i) \quad x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)] \quad \text{ve} \quad x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$$

$$(ii) \quad x + y = x \vee y + x \wedge y$$

$$(iii) \quad x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z) \quad \text{ve} \quad x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$$

$$(iv) \quad \text{Her } 0 \leq a \in \mathbb{I} \text{ için } a.(x \vee y) = a.x \vee a.y \quad \text{ve} \quad a.(x \wedge y) = a.x \wedge a.y$$

$$(v) \quad x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^- \quad \text{ve} \quad x^+ \wedge x^- = 0$$

$$(vi) \quad x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \quad \text{ve} \quad x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

$$(vii) \quad |x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|) \quad \text{ve} \quad |x| \wedge |y| = \frac{1}{2}||x + y| - |x - y||$$

$$(viii) \quad ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

$$(ix) \quad |x \vee z - y \vee z| \leq |x - y| \quad \text{ve} \quad |x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$$

(x) Eğer $x, y, z \in E^+$ ise $x \wedge (y + z) = (x \wedge y) + (x \wedge z)$ [1].

2.7. Tanım

E sıralı vektör uzayı, $A \subseteq E$ olsun.

(i) Her $x, y \in A$ için $x \leq z$ ve $y \leq z$ olacak şekilde bir $z \in A$ varsa A 'ya yukarı yönlendirilmiş küme denir ve $A \uparrow$ biçiminde gösterilir. A yukarı yönlendirilmiş küme ve E içinde $\sup(A)=a$ varsa bu $A \uparrow a$ biçiminde gösterilir.

(ii) Her $x, y \in A$ için $z \leq x$ ve $z \leq y$ olacak şekilde bir $z \in A$ varsa A 'ya aşağı yönlendirilmiş küme denir ve $A \downarrow$ biçiminde gösterilir. A aşağı yönlendirilmiş küme ve E içinde $\inf(A)=a$ varsa bu $A \downarrow a$ biçiminde gösterilir.

A yerine herhangi bir (x_a) neti alındığında benzer şekilde $x_a \uparrow$, $x_a \uparrow a$, $x_a \downarrow$ ve $x_a \downarrow b$ tanımları verilebilir [1].

2.8. Tanım

E Riesz uzayında her $x \in E^+$ için $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $n^{-1}.x \downarrow 0$ ise E 'ye Arşimedian Riesz uzayı denir [1].

2.9. Tanım

$(E, \leq)$ örgü $a \leq b$ ve $a, b \in E$ olmak üzere $\{x \in E : a \leq x \leq b\}$ kümesine sıralı aralık denilir ve $[a, b]$ ile gösterilir. $(E, \leq)$ örgü ve $A \subseteq E$ olsun. Eğer $A \subseteq [a, b]$ olacak şekilde $a, b \in E$ varsa A 'ya sıra sınırlı küme denir [2].

2.10. Tanım

E bir Riesz uzayı olsun. E 'nin boştan farklı ve üsten sınırlı her alt kümesinin (sayılabilir altkümesinin) supremumu ya da altan sınırlı her altkümesinin (sayılabilir altkümesinin) infimumu varsa E Riesz uzayına Dedekind tam (σ -Dedekind tam) Riesz uzayı denir.

Her dizi aynı zamanda bir ağ olduğundan E uzayı Dedekind tam ise σ -Dedekind tamdır. E Riesz uzayının Dedekind tam olması için gerekli ve yeterli koşul $0 \leq x_a \uparrow$ ve üsten sınırlı olacak şekilde her ağın E içinde supremumunun var olmasıdır [1].

2.11. Teorem

E ve F Riesz uzayları ve F Dedekind tam olsun. Bu durumda $L_b(E, F)$ sıralı vektör uzayı, bir Dedekind tam Riesz uzayı olur. Her $x \in E^+$ ve her bir $S, T \in L_b(E, F)$ için,

$$(S \vee T)(x) = \sup \{S(y) + T(z) : y, z \in E^+, y + z = x\}$$

$$(S \wedge T)(x) = \inf \{S(y) + T(z) : y, z \in E^+, y + z = x\}$$

$$|T|(x) = \sup \{T(y) : 0 \leq y \leq x\}$$

$$T^+(x) = \sup \{T(y) : 0 \leq y \leq x\}$$

$$T^-(x) = \sup \{-T(y) : 0 \leq y \leq x\}$$

eşitlikleri gerçekleşir [1].

2.12. Tanım

E , gerçel vektör uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. $0 \leq \lambda \leq 1$ koşulunu sağlayan her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve her $x, y \in A$ için $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ oluyorsa A kümesine konveks (dışbükey) küme denir.

2.13. Teorem

E ve F Riesz uzayları ve F Dedekind tam Riesz uzayı olsun. $\emptyset \neq A \subseteq L_b(E, F)$ ve $A \downarrow$ verildiğinde;

$\inf(A)$, $L_b(E, F)$ içinde vardır $\Leftrightarrow$ Her $x \in E^+$ için $\{T(x) : T \in A\}$ alttan sınırlıdır [1].

2.14. Teorem (Riesz Ayrışım Teoremi)

E Riesz uzayı $x, y_1, y_2, \dots, y_n \in E$ olsun. Eğer $|x| \leq |y_1 + y_2 + \dots + y_n|$ ise $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ve her $i = 1, 2, \dots, n$ için $|x_i| \leq |y_i|$ olacak şekilde $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ vardır [1].

2.15. Tanım

E bir Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun.

(i) Her $y \in E$ ve $x \in A$ için $|y| \leq |x|$ iken $y \in A$ ise A 'ya solid küme denir. Solid altuzaya ideal denir.

(ii) A , E 'nin ideali olmak üzere A 'nın E de supremumu olan her alt kümesinin A da supremumu varsa A 'ya band denir. Başka bir deyişle,

A band $\Leftrightarrow (x_\alpha) \subseteq A$, $0 \leq x_\alpha \uparrow |x|$ iken $x \in A$ [1].

2.16. Tanım

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ altvektör uzayı her $x, y \in A$ için $x \vee y \in A$ ise A 'ya E 'nin Riesz altuzayıdır denir.

2.17. Tanım

E vektör uzayı $p: E \rightarrow E$ doğrusal dönüşümü olsun. Eğer $p^2 = p$ ise p 'ye projeksiyon denir.

B , E 'nin bir bandı olmak üzere; eğer $E = B \oplus B^d$ ($x \in E$ olsun. $x=y+z$ için $y \in B$ ve $z \in B^d$ dir.) oluyorsa B 'ye projeksiyon band denir. Eğer E de her band, projeksiyon band ise E 'ye projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzayı denir.

2.18. Teorem

E Dedekind tam Riesz uzayı ise her B bandı için $E = B \oplus B^d$ olur [1].

2.19. Önerme

E ve F sıralı vektör uzayları $x, y \in E$ ve $T: E \rightarrow F$ dönüşümü için aşağıdaki önerme sağlanır.

$$T \text{ pozitif} \Leftrightarrow x \leq y \text{ için } T(x) \leq T(y)$$

Kanıt : T pozitif olsun.

$$\begin{aligned}
x \leq y &\Rightarrow 0 \leq y - x &\Rightarrow T(0) \leq T(y - x) \\
&&\Rightarrow 0 \leq T(y - x) \\
&&\Rightarrow 0 \leq T(y) - T(x) \\
&&\Rightarrow T(x) \leq T(y)
\end{aligned}$$

Şimdi $x \leq y$ iken $T(x) \leq T(y)$ olsun.

$$0 \leq x \Rightarrow T(0) \leq T(x) \Rightarrow 0 \leq T(x)$$

olduğundan T pozitifdir.

2.20. Teorem (Riesz Kantorovich Teoremi)

E bir Riesz uzayı, F bir Arşimedyan Riesz uzayı ve $T: E^+ \rightarrow F^+$ toplamsal (Her $x, y \in E^+$ için $T(x + y) = T(x) + T(y)$) olsun. O zaman T, E'den F'nin içine bir tek pozitif dönüşüme genişler. Bu genişlemeyi $\tilde{T}$ ile gösterirsek;

$$\begin{aligned}
&\tilde{T}: E \rightarrow F \\
&x \rightarrow \tilde{T}(x) = \tilde{T}(x^+) - \tilde{T}(x^-)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Bir E Riesz uzayından F Riesz uzayına tanımlı dönüşümlerin vektör uzayı $L(E, F)$ olsun. Her bir $S, T \in L(E, F)$ için;

$$S \leq T \Leftrightarrow 0 \leq T - S \quad (\text{her } x \in E^+ \text{ için } S(x) \leq T(x))$$

sıralaması ile sıralı bir vektör uzayıdır.

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ bir dönüşüm olsun. Eğer $L(E, F)$ sıralı vektör uzayında her $T \in L(E, F)$ için $\{-T, T\}$ kümesinin supremumu varsa T dönüşümünün modülü var denir ve $|T| = T \vee (-T)$ ile gösterilir [1].

2.21. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü E Riesz uzayının sıra sınırlı kümelerini F 'nin sıra sınırlı kümelerine dönüştürüyor ise T dönüşümüne sıra sınırlı dönüşüm denir. E 'den F 'ye tüm sıra sınırlı dönüşümlerin uzayı $L_b(E, F)$ ile gösterilir [1].

2.22. Tanım

İki pozitif dönüşümün farkı şeklinde yazılabilen dönüşüme regüler dönüşüm denir. Bir E Riesz uzayından bir F Riesz uzayı içine tanımlanan bütün regüler dönüşümlerin uzayını $L_r(E, F)$ ile gösteririz.

Açık olarak;

$$L_r(E, F) \subseteq L_b(E, F) \subseteq L(E, F)$$

kapsamaları sağlanır [1].

2.23. Tanım

E bir Riesz uzayı $T: E \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun. E 'nin her bir B bandı için $T(B) \subseteq B$ oluyorsa T 'ye band koruyan dönüşüm denir. Aynı zamanda $x \perp y$ iken $T(x) \perp T(y)$ oluyorsa T 'ye dikliği koruyan dönüşüm denir [1].

2.24. Teorem

E bir Riesz uzayı $T : E \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) T band koruyan
- (ii) $x \perp y$ iken $T(x) \perp y$
- (iii) Her $x \in E$ için $T(x) \in B_x = \{x \in E : \exists (x_\alpha) \subseteq B^+ \text{ için } 0 \leq x_\alpha \uparrow |x|\}$ [1].

2.25. Teorem

E ve F birer Riesz uzayı ve $T : E \rightarrow F$ sıra sınırlı ve dikliği koruyan dönüşüm olmak üzere her $x \in E$ için T 'nin modülü var ve

$$|T|(|x|) = |T(|x|)| = |T(x)|$$

sağlanır [1].

2.26. Tanım

Sıra sınırlı band koruyan dönüşümlere ortomorfizma denir ve bunların kümesi $\text{Ort}(E)$ ile gösterilir. E bir Riesz uzayı $T : E \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun.

T ortomorfizmadır $\Leftrightarrow x \perp y$ iken $T(x) \perp y$ [1].

2.27. Tanım

E Riesz uzayı, B de E 'nin bir projeksiyon bandı ($E = B \oplus B^d$) olsun. $x \in E$, $y \in B$ ve $z \in B^d$ için $x = y + z$ olmak üzere;

$$p_B : E \rightarrow E$$

$$x \rightarrow p_B(x) = y$$

şeklinde tanımlanan projeksiyona band projeksiyonu denir [1].

2.28. Tanım

E bir Riesz uzay olsun. $e \in E^+$ olmak üzere $x \wedge (e - x) = 0$ olacak şekilde $x \in E^+$ varsa x 'e e 'in bileşeni denir.

E bir Riesz uzayı ve F Dedekind tam Riesz uzayı olsun. P, E üzerinde bir sıra projeksiyon(sıra koruyan projeksiyon) ve Q da F üzerinde bir sıra projeksiyon olarak alırsak $T : E \rightarrow F$ pozitif dönüşümü için QTP bir bileşendir. [1].

2.29. Teorem

E bir Riesz uzayı, F Dedekind tam Riesz uzayı ve $S, T : E \rightarrow F$ pozitif dönüşümler olsun. Eğer $0 \leq S \leq T$ şartı sağlanırsa, her $\varepsilon > 0$ için;

$$0 \leq S - \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i \leq \varepsilon.T$$

olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$ gerçel sayıları ve T'in $C_1, C_2, \dots, C_n$ componentleri vardır [1].

2.30. Tanım

E gerçel vektör uzayı, F Riesz uzayı ve $T : E \rightarrow F$ bir fonksiyon olsun.

$$(1) \quad x, y \in E \text{ için, } T(x + y) \leq T(x) + T(y)$$

$$(2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, x \in E \text{ için } T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

sağlanırsa T 'ye alt doğrusal dönüşüm denir.

2.31. Tanım

X vektör uzayı, E vektör örgü olsun.

$\| \cdot \| : X \rightarrow E^+$ dönüşümü için;

$$1) \quad \forall x \in X \text{ için } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$2) \quad \forall x \in X \text{ için } \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$3) \quad \forall x \in X \text{ için } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

koşulları sağlanırsa, bu dönüşüme vektör normu ve (X, E) 'ye de vektör normlu uzaylar denir. Bunlarla birlikte eğer;

$$4) \quad \text{Her } e_1, e_2 \in E^+ \text{ ve } x \in X \text{ için } \|x\| = e_1 + e_2 \text{ ise } x = x_1 + x_2 \text{ ve } \|x_1\| = e_1, \|x_2\| = e_2 \text{ olacak şekilde } x_1, x_2 \in X \text{ vardır.}$$

koşulları sağlanırsa verilen dönüşüme Kantorovich (Ayrışım) normu denir [3].

2.32. Tanım

(X, E) vektör normlu uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $\|x\| \leq e$ olacak şekilde bir $e \in E^+$ varsa, yani $\|A\|$, E içinde sıra sınırlı ise A 'ya X de norm sıra sınırlıdır denir [3].

2.33. Tanım

(X, E) ve (Y, F) iki vektör normlu uzaylar ve $T : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü X 'deki norm sıra sınırlı dönüşümleri Y 'deki norm sıra sınırlı dönüşümlere götürüyorsa T dönüşümüne norm sıra sınırlı dönüşüm [3].

2.34. Tanım

X bir normlu uzay, $x \in X$ ve $(x_\alpha) \subseteq X$ net olsun. E 'deki her $(e_\alpha) \downarrow 0$ olacak şekilde e_α neti için ve her $\gamma \in \eta$ için $\alpha_\gamma \leq \alpha$ iken $\|x_\alpha - x\| \leq e_\alpha$ olacak şekilde α_γ varsa x_α neti x 'e bo-yakınsaktır denir. Eğer X uzayı bu yakınsamaya göre kapalı olursa X uzayına da bo-kapalı uzay denir [3].

3. DOMİNATED DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde kullanılan bilgiler, Kusraev, A.G' nin , “Dominated Operators” adlı kitabının 44-62 ve 142-156 sayfaları arasındaki çalışmadan alınmıştır.

3.1. Tanım

(X,E) ve (Y,F) iki vektör normlu uzay olsunlar. $T : X \rightarrow Y$ doğrusal dönüşümünü alalım. Her $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq S(\|x\|)$ olacak şekilde $S : E \rightarrow F$ pozitif-doğrusal dönüşümü varsa; S , T 'yi domine (sınırlar) veya majore eder ve S , T için dominant(sınır dönüşüm) veya majoranttır denir. Aynı zamanda T ye domine edilmiş(sınırlanmış) dönüşüm denir. T 'nin tüm sınır dönüşümlerinin kümesini $\text{maj}(T)$ ve X 'den Y 'ye tüm sınırlanabilen dönüşümlerin kümesini $m(X,Y)$ ile gösterilir.

Her pozitif dönüşüm sıra sınırlı olduğundan $\text{maj}(T) \subseteq L_b(E, F)$ dir. Böylece $\text{maj}(T)$, $L_b(E, F)$ içinde konvektir. Gerçekten;

Her $\alpha \in \mathbb{R}$ $0 \leq \alpha \leq 1$ ve $S, R \in \text{maj}(T)$ için;

$$\begin{aligned} S, R \in \text{maj}(T) &\Rightarrow \forall x \in X \text{ için } \|T(x)\| \leq S(\|x\|) \text{ ve } \|T(x)\| \leq R(\|x\|) \\ &\Rightarrow \forall x \in X \text{ için } \alpha \|T(x)\| \leq \alpha S(\|x\|) \text{ ve } (1-\alpha) \|T(x)\| \leq (1-\alpha) R(\|x\|) \\ &\Rightarrow \alpha \|T(x)\| + (1-\alpha) \|T(x)\| \leq \alpha S(\|x\|) + (1-\alpha) R(\|x\|) \\ &\Rightarrow \|T(x)\| \leq \alpha S(\|x\|) + (1-\alpha) R(\|x\|) \end{aligned}$$

Böylece $\alpha S + (1-\alpha) R \in \text{maj}(T)$ bulunur.

Eğer $L_b(E, F)$ deki sıralamaya göre $\text{maj}(T)$ 'nin en küçük elemanı varsa; buna T 'nin en küçük (exact) sınır dönüşümü denir. Bu da $\|T\|$ ile gösterilir. Ayrıca $\|T\|: E \rightarrow F$ bir pozitif dönüşümdür.

Dahası;

$$\|T\| = \inf \{ \text{maj}(T) \in \text{maj}(T) \text{ olmak üzere; } x \in X \text{ için; } \|T(x)\| \leq \|T\|(\|x\|) \}.$$

3.2. Teorem

(X, E) ayrışım uzayı, (Y, F) vektör normlu uzay ve F Dedekind tam Riesz uzayı olsun. $T: X \rightarrow Y$ sınırlanmış her dönüşümün en küçük sınır dönüşümü $\|T\|$ vardır.

Kanıt: Önce $\text{maj}(T)$ 'nin alttan yarı örgü yani her $S_1, S_2 \in \text{maj}(T)$ için $S_1 \wedge S_2 \in \text{maj}(T)$ olduğunu gösterelim. $x \in X$ ve $e_1, e_2 \in E^+$, $\|x\| = e_1 + e_2$ olsun. Dolayısıyla $x = x_1 + x_2$ ve $\|x_1\| = e_1$, $\|x_2\| = e_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in X$ vardır.

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \|T(x_1) + T(x_2)\| \leq \|T(x_1)\| + \|T(x_2)\| \leq S_1(\|x_1\|) + S_2(\|x_2\|) \leq S_1 e_1 + S_2 e_2 \\ &\Rightarrow \|T(x)\| \leq \inf \{ S_1(\|x_1\|) + S_2(\|x_2\|) : \|x_1\| + \|x_2\| = \|x\|, \|x_1\|, \|x_2\| \in E^+ \} \\ &= (S_1 \wedge S_2)(\|x\|) \\ &\Rightarrow S_1 \wedge S_2 \in \text{maj}(T) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $S_1, S_2 \in \text{maj}(T)$ için $S_1 \wedge S_2 \in \text{maj}(T)$ olur. Buradanda $S_1, S_2 \in \text{maj}(T)$ den $S_1 \wedge S_2 \leq S_1$ ve $S_1 \wedge S_2 \leq S_2$ olur ki; $\text{maj}(T) \downarrow$ dir. Şimdi $A = \{H(x) : H \in \text{maj}(T)\}$ için;

$$S: E^+ \rightarrow F^+$$

$$x \rightarrow S(x) = \inf(A)$$

olarak S dönüşümünü tanımlayalım. Her $x \in E^+$ için $0 \leq H(x)$ olduğundan A kümesi alttan sınırlıdır. F Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan S anlamlıdır.

Her $x, y \in E^+$ için;

$$\begin{aligned} S(x+y) &= \inf \{ H(x+y) : H \in \text{maj}(T) \} \\ &= \inf \{ H(x) : H \in \text{maj}(T) \} + \inf \{ H(y) : H \in \text{maj}(T) \} \quad (2.13. \text{ Teorem}) \\ &= S(x) + S(y) \end{aligned}$$

dolayısıyla S toplamsaldır. Böylece S 'nin bir $\mathcal{S}' E \rightarrow F$ genişlemesi vardır ve $\mathcal{S}'|_{E^+} = S$ (2.20 Teorem.).

$\{ H(x) : H \in \text{maj}(T) \}$ altan sınırlı ve $\text{maj}(T) \downarrow$ olduğundan $\inf(\text{maj}(T))$ vardır (2.13 Teorem.).

Şimdi $\mathcal{S}' = \inf \text{maj}(T)$ olduğunu gösterelim.

(1) Her $H \in \text{maj}(T)$ ve her $x \in E^+$ için;

$$\mathcal{S}'(x) = S(x) = \inf \{ R(x) : R \in \text{maj}(T) \} \leq H(x)$$

(2) Her $H \in \text{maj}(T)$ ve $R \in \text{maj}(T)$ için $R \leq H$ iken $R \leq \mathcal{S}'$ olacağını gösterelim.

Her $x \in E^+$ için $R(x) \leq H(x)$ olduğundan $H \in \text{maj}(T)$ üzerinden infimum alınırsa $R(x) \leq S(x) \leq \mathcal{S}'(x)$ bulunur. (1) ve (2)'den $\mathcal{S}' = \inf \text{maj}(T)$ olur.

$H \in maj(T)$ ve $x \in X$ için;

$$\begin{aligned} \|T(x)\| \leq H(\|x\|) &\Rightarrow \|T(x)\| \leq \inf \{H(\|x\|) : H \in maj(T)\} = S^*(\|x\|) \\ &\Rightarrow S^* \in maj(T) \text{ ve } S^* = \|T\| \end{aligned}$$

3.3. Örnekler

Özel durumlar için aşağıdaki örnekleri irdeleyelim.

3.3.1. Örnek

$E = F = \mathbb{R}$ olarak alınırsa;

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad \|\cdot\| : Y \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \|x\| \quad \quad \quad x \rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

klasik normlar olsunlar. Dolayısıyla (X, E) ve (Y, F) vektör normlu uzayları için aşağıdakiler sağlanır.

(a) $L(X, Y)$, X 'den Y 'ye tüm norm sınırlı dönüşümlerin kümesi olmak üzere $m(X, Y) = L(X, Y)$.

(b) $T \in m(X, Y)$ için en küçük sınır dönüşüm $\|T\| = \sup \{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$

Çözüm (a) : $T \in L(X, Y)$ olsun.

$T \in L(X, Y) \Rightarrow T$ doğrusal ve norm sınırlıdır.

$$\Rightarrow \forall x \in X \text{ için } \|T(x)\| \leq m\|x\| \text{ olacak şekilde } m \in \mathbb{R}^+ \text{ vardır.}$$

Şimdi;

$$S: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$$

$$\lambda \rightarrow S(\lambda) = m\lambda$$

olarak tanımlanırsa, S pozitif ve T 'yi sınırlayan doğrusal bir dönüşümdür. Dolayısıyla $T \in m(X, Y)$ olur.

Şimdi; $T \in m(X, Y)$ olsun.

$T \in m(X, Y) \Rightarrow T$ 'yi sınırlayan $S: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ doğrusal ve pozitif

dönüşümü vardır ve her $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq S(\|x\|)$

$$(L(\mathbb{I}, \mathbb{I})) = \{f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I} : f \text{ doğrusal}\} = \{f(x) = a.x : a \in \mathbb{I}\}$$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{I}^+ \text{ var } \ni S(x) = m.x$$

$$\Rightarrow \forall x \in X \text{ için } \|T(x)\| \leq S(\|x\|) = m\|x\|$$

$$\Rightarrow T \in L(X, Y)$$

Çözüm (b) : $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{I}$ alınırsa $(X, \mathbb{I})$ bir ayrışım uzayı olur. Dolayısıyla $\mathbb{I}$ 'nin Dedekind tam Riesz uzayı olmasından T 'nin en küçük sınır dönüşümü vardır.

$\|T\| = \inf \text{maj}(T)$. Gerçekten;

$\text{maj}(T) = \{m \geq 0 : \|T(x)\| \leq m\|x\|\}$ olduğunu gösterelim.

$$\text{maj}(T) = \{S | S: \mathbb{I}R \rightarrow \mathbb{I}R \text{ doğrusal-pozitif, } \forall x \in X, \text{ için } \|T(x)\| \leq S(\|x\|)\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} m: \mathbb{I}R \rightarrow \mathbb{I}R \\ x \rightarrow m(x) = mx \end{array} : \forall x \in X \text{ için } \|T(x)\| \leq m\|x\| \right\} \quad (= A)$$

Her iki tarafın infumumu alınırsa;

$$\begin{aligned}\inf \text{maj}(T) = \inf (A) &\Rightarrow \|T\| = \inf \{m \geq 0 : \forall x \in X \text{ için } \|T(x)\| \leq m\|x\|\} \\ &\Rightarrow \|T\| = \sup \{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}\end{aligned}$$

3.3.2. Örnek

$X=E$ ve $Y=F$ alınırsa;

$$\begin{array}{c} | : X \rightarrow E \\ x \rightarrow |x| \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{c} | : Y \rightarrow F \\ x \rightarrow |x| \end{array}$$

modül normları olsunlar. (X,E) ve (Y,F) birer vektör normlu uzaylardır. Aynı zamanda Riesz Ayrışım Teoremi özelliğinden (X,E) ayrışım özelliğini sağlar. Dolayısıyla aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$(a) \quad m(X,Y) = L_r(E,F)$$

(b) F Dedekind tam Riesz uzayı ise $T \in m(X,Y)$ dönüşümünün en küçük sınır dönüşümü $|T|$ olur.

Çözüm (a) : $T \in m(X,Y)$ olsun.

$$\begin{aligned}T \in m(X,Y) &\Rightarrow \exists S \in L_b^+(E,F) \text{ var } \ni |T(x)| \leq S(|x|) \\ &\Rightarrow x \in E^+ \text{ için } |T(x)| \leq S(|x|) \\ &\Rightarrow T(x) \leq |T(x)| \leq S(|x|) \\ &\Rightarrow T \leq S\end{aligned}$$

Dolayısıyla $T = S - (S - T)$ yazarsak $T \in L_r(E,F)$ bulunur.

Şimdi $T \in L_r(E, F)$ olarak alalım.

$T \in L_r(E, F)$ ise T doğrusal ve $S, R: E \rightarrow F$ şeklinde iki pozitif dönüşüm için $T=S-R$ olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} \text{Her } x \in E^+ \text{ için} \quad T(x) &= (S - R)(x) \leq (S + R)(x) \\ T(-x) &= (R - S)(x) \leq (S + R)(x) \end{aligned}$$

dolayısıyla her $x \in E^+$ için $T(x) \vee T(-x) = |T(x)| \leq (S + T)(x)$ olur.

$$\begin{aligned} |T(x^+)| &\leq (S + R)(x^+) \text{ ve } |T(x^-)| \leq (S + R)(x^-) \text{ olduğundan} \\ |T(x)| &\leq |T(x^+)| + |T(x^-)| \leq (S + R)(|x|) \text{ ve böylece } T \in m(X, Y) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Çözüm (b) : F Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan $|T|$ vardır. $T \in m(X, Y)$ dönüşümü için $\inf maj(T) = |T|$ olacağını gösterelim.

Her $x \in X$ için $|T(x)| \leq |T|(|x|)$ olduğundan $|T| \in maj(T)$ olur.

Şimdi $S \in maj(T)$ için $|T| \leq S$ olacağını gösterelim.

$$\begin{aligned} x \in E^+ \text{ için} \quad T(x) \leq |T(x)| \leq S(x) &\rightarrow T \leq S \\ T(-x) \leq |T(x)| \leq S(x) &\rightarrow -T \leq S \end{aligned} \Rightarrow |T| \leq S \Rightarrow |T| = \inf maj(T)$$

dolayısıyla istenen elde edilmiş olur.

3.3.3. Örnek

(X, E) ve (Y, F) vektör normlu uzaylar ve $E = \|\cdot\|$, $Y=F$ olsun.

$$\begin{array}{ccc} \|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R} & & |\cdot| : Y \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \|x\| & \text{ve} & x \rightarrow |x| \end{array}$$

normlarını alalım. (X, E) ve (Y, F) vektör normlu uzayları için aşağıdakiler sağlanır.

(a) $T \in m(X, Y) \Leftrightarrow \{T(x) : x \in X, \|x\| \leq 1\}$ kümesi F içinde sıra sınırlıdır.

(b) Eğer F Dedekind tam Riesz uzay ise T 'in en küçük sınır dönüşümü

$$\|T\| = \sup \{T(x) : \|x\| \leq 1\}.$$

Çözüm (a) : $T \in m(X, Y)$ olsun. Dolayısıyla $S : \mathbb{R} \rightarrow F$ pozitif dönüşümü vardır ve $x \in X$ için $|T(x)| \leq S(\|x\|)$ şartını sağlar.

$A = \{T(x) : x \in X, \|x\| \leq 1\}$ olarak alalım. $\|x\| \leq 1$ olduğundan $S(\|x\|) \leq S(1) = m \in F$ (S pozitif) olur. Böylece;

$$\begin{aligned} |T(x)| \leq S(\|x\|) \leq m &\Rightarrow |T(x)| \leq m \\ &\Rightarrow -m \leq T(x) \leq m \\ &\Rightarrow T(x) \in [-m, m] \\ &\Rightarrow A \text{ sıra sınırlıdır.} \end{aligned}$$

Tersine $\{T(x) : x \in X, \|x\| \leq 1\}$, F de sıra sınırlı olsun. Keyfi $x \in X$ için $y = \frac{x}{\|x\|}$

alırsak $\|y\| \leq 1$ olur. Böylece;

$$\{T(y) : y \in X, \|y\| \leq 1\} \text{ sıra sınırlı} \Rightarrow \exists z \in F^+ \text{ var } \ni T(y) \leq z$$

$$\Rightarrow T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq z$$

$$\Rightarrow T(x) \leq z \cdot \|x\|$$

$$S : IR \rightarrow F$$

$$\lambda \rightarrow S(\lambda) = \lambda \cdot z$$

pozitif ve doğrusal dönüşümdür. $\lambda = \|x\|$ alınırsa $S(\|x\|) = \|x\| \cdot z$ dır. $T(x) \leq S(\|x\|)$ ve $T(-x) \leq S(\|x\|)$ olduğundan $|T(x)| \leq S(\|x\|)$ olur. Böylece $T \in m(X, Y)$ bulunur.

Çözüm (b) : $A = \{T(x) : x \in X, \|x\| \leq 1\}$ kümesi F de sıra sınırlı ve F Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan $\sup(A)$ vardır. $\sup(A) = u$ olsun.

$$S : IR \rightarrow F$$

$$\lambda \rightarrow S(\lambda) = \lambda \cdot u$$

olarak tanımlayalım. $x = 0$ için $T(0) = 0$ olduğundan $0 \in A$ olur. Böylece $\sup(A) \geq 0$ yani $u \geq 0$ olur. Buradan da $\lambda \geq 0$ için $\lambda \cdot u \geq 0$ yani S pozitiftir. Aynı zamanda doğrusaldır. $T(-x), T(x) \in A$ olduğundan bir önceki Kanıtta z yerine u alırsak S, T 'yi sınırlar.

$$H \in maj(T) \text{ alalım. Her } x \in X \text{ için } |T(x)| \leq H(\|x\|) \text{ olduğundan}$$

$$\sup_{\|x\| \leq 1} |T(x)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} H(\|x\|) \text{ olur.}$$

Dolayısıyla $\|x\| \leq 1$ için;

$$S(\|x\|) \leq \|x\|.u = \|x\|. \sup \{T(x) : x \in X \text{ ve } \|x\| \leq 1\} \leq \|x\|. \sup_{\|x\| \leq 1} H(\|x\|)$$

Böylece $\|x\| \leq 1$ için $S(\|x\|) \leq H(\|x\|)$ olur. Şimdi her $\lambda \geq 0$ için $S(\lambda) \leq H(\lambda)$ olacağını gösterelim.

$\lambda = 0$ için açık

$\lambda \neq 0$ için $\lambda \in (0, 1]$ için $\exists x \in X : \|x\| = \lambda$ olacağını görelim

$$0 \neq y \in X, \quad z = \frac{y}{\|y\|} \quad \text{ve} \quad x = \lambda.z \quad \text{alınırsa} \quad \|x\| = \|\lambda.z\| = \left\| \lambda \cdot \frac{y}{\|y\|} \right\| = \lambda.1 \quad \text{olduğundan}$$

$$S(\lambda) = S(\|x\|) \leq H(\|x\|) = H(\lambda).$$

$$\begin{aligned} \text{Keyfi } \lambda > 1 \text{ için } S\left(\frac{1}{\lambda}\right) &\leq H\left(\frac{1}{\lambda}\right) \Rightarrow \lambda^2.S\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq \lambda^2.H\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &\Rightarrow S(\lambda) \leq H(\lambda) \\ &\Rightarrow \forall \lambda \geq 0 \text{ için } S(\lambda) \leq H(\lambda) \\ &\Rightarrow S \leq H \end{aligned}$$

Böylece S, T'nin en küçük sınır dönüşümüdür.

3.3.4. Örnek

$X=E$ ve $F = \mathbb{R}$ alalım.

$$\begin{array}{ccc} | : X \rightarrow E & & | : Y \rightarrow IR \\ x \rightarrow |x| & \text{ve} & x \rightarrow |x| \end{array}$$

normlarını alalım. (X,E) ve (Y,F) birer vektör normlu uzay olurlar. $T : X \rightarrow Y$ dönüşümünün sınırlanmasının anlamı E üzerinde öyle bir pozitif e^* dönüşümü vardır ki; $\|T(e)\| \leq e^*(|e|)$. T'nin en küçük sınır dönüşümü;

$$\|T\|(e) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|T(e_k)\| : e_1, e_2, \dots, e_n \in E^+, \sum_{k=1}^n e_k = e \text{ ve } n \in \mathbb{N} \right\} \quad (e \in E^+).$$

Çözüm:

$$S : E^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$e \rightarrow S(e) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|T(e_k)\| : e_1, e_2, \dots, e_n \in E^+, \sum_{k=1}^n e_k = e \text{ ve } n \in \mathbb{N} \right\}$$

S anlamlı ve pozitif bir dönüşümdür.

S'nin toplamsal olduğunu gösterelim.

$$e = e_1 + e_2 + \dots + e_n, \quad f = f_1 + f_2 + \dots + f_m, \quad e_1, e_2, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_m \in E^+ \quad \text{ için}$$

$$e + f = \sum_{k=1}^n e_k + \sum_{k=1}^m f_k = \sum_{k=1}^{n+m} z_k \quad \left(\begin{array}{ll} z_k = e_k & 1 \leq k \leq n \\ z_k = f_k & n+1 \leq k \leq n+m \end{array} \right).$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+m} \|T(z_k)\| &= \sum_{k=1}^n \|T(e_k)\| + \sum_{k=1}^m \|T(f_k)\| \leq \sup \left\{ \sum_{k=1}^{m+n} \|T(z_k)\| : z_1, z_2, \dots, z_{m+n} \in E^+, \sum_{k=1}^{m+n} z_k = e + f \right\} \\ &= S(e+f) \end{aligned}$$

$$\text{Böylece } S(e)+S(f) \leq S(e+f) \quad (3.1)$$

$$e + f = \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{olarak alınırsa Riesz Ayrışım Teoremi'den}$$

$$e \leq \sum_{k=1}^n x_k \Rightarrow e = e_1 + e_2 + \dots + e_n : \quad e_k \leq x_k \quad \text{olacak şekilde } e_1, e_2, \dots, e_n \in E^+ \quad \text{ vardır.}$$

$$f \leq \sum_{k=1}^m x_k \Rightarrow f = f_1 + f_2 + \dots + f_m : \quad f_k \leq x_k \quad \text{olacak şekilde } f_1, f_2, \dots, f_m \in E^+$$

vardır. Dolayısıyla;

$$e = \sum_{k=1}^n e_k, \quad f = \sum_{k=1}^n f_k \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n e_k + \sum_{k=1}^n f_k.$$

Buradan;

$$\sum_{k=1}^n \|T(x_k)\| \leq \sum_{k=1}^n \|T(e_k)\| + \sum_{k=1}^n \|T(f_k)\| \leq S(e) + S(f)$$

$$\text{Böylece } S(e+f) \leq S(e) + S(f) \quad (3.2)$$

(3.1) ve (3.2)'den S toplamsaldır. Dolayısıyla Riesz Kantorovich teoreminden S'nin $\mathcal{S}_{E^+}^0 = S$ genişlemesi vardır.

$e \in E^+$ için $\mathcal{S}(e)$, $\left\{ \sum_{k=1}^n \|T(e_k)\| : e_1, e_2, \dots, e_n \in E^+, \sum_{k=1}^n e_k = e, n \in \mathbb{N} \right\}$ için bir üst sınırdır. H başka bir üst sınır olsun ($H \in \text{maj}(T)$).

$$\begin{aligned} H \in \text{maj}(T) &\Rightarrow \|T(e)\| \leq H(e) \\ &\Rightarrow \|T(e_1) + T(e_2) + \dots + T(e_n)\| \leq H(e) \\ &\Rightarrow \mathcal{S}(e) \leq H(e) \end{aligned}$$

supremum alırsak. $\mathcal{S}(e) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|T(e_k)\| : e_1, e_2, \dots, e_n \in E^+, \sum_{k=1}^n e_k = e, n \in \mathbb{N} \right\}$ olur.

S, T'yi sınırladığından $\mathcal{S} = \|T\|$ bulunur.

3.3.5: Örnek

$E=F$ ve $\wedge \subseteq \text{ort}(E)$ bir alt halka ve alt örgü olsun. Eğer her $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq \pi(\|x\|)$ şartını sağlayan $0 \leq \pi \in \wedge$ olacak şekilde ortomorfizm varsa $T: X \rightarrow Y$ dönüşümü $\wedge$ ile sınırlanmış dönüşüm denir. $\wedge$ ile sınırlanmış dönüşümlerin kümesi $L_{\wedge}(X, Y)$ ile gösterilir.

$x \in X$ ve $y \in Y$ için $\|x\| \wedge \|y\| = 0$ ise x ile y diktir denir ve $x \perp y$ ile gösterilir.

$x \in X$ ve $y \in Y$ için $x \perp y$ iken $T(x) \perp y$ ise T band koruyandır denir.

$A \subseteq X$ norm sıra sınırlı iken $T(A) \subseteq Y$ norm sıra sınırlı ise T 'ye norm sıra sınırlı dönüşüm denir.

Bir T dönüşümü band koruyan ve sıra sınırlı ise T 'ye ortomorfizm denir ve bunların kümesi (X, Y) ile gösterilir.

(1) X den Y 'ye tüm ortomorfizmlerin kümesi $\text{ort}(X, Y)$ olarak gösterelim. Eğer E Dedekind Tam Riesz Uzayı ise $\text{ort}(X, Y) \subseteq m(X, Y)$ olur.

(2) $L_{\text{ort}}(X, Y) = \text{ort}(X, Y)$ ve $e \in E^+$ için;

$$\|T\|(e) = \sup \{ \|T(x)\| : x \in X, \|x\| \leq e \}$$

Çözüm (1) : $T \in \text{ort}(X, Y)$ olsun. T band koruyan ve norm sıra sınırlıdır. $T \in m(X, Y)$ olacağını gösterelim (3.9. Teorem).

$$U(e) = \left\{ \sum_{k=1}^n \pi_k(x) \pi_k(y) : x \in X, \|x\| \leq e, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \in P(X), \pi_k \circ \pi_t = 0 (k \neq t) \right\}$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \pi_k = I_x, n \in \mathbb{N} \right\}$$

kümesinin E içinde sıra sınırlı olduğunu gösterelim. Her k için $\pi_k \in P(X)$ dır.

Böylece her k için $\pi'_k \in P(E^0 = \mathfrak{S}X^{\bullet, id})$ vardır ve $x \in X$ için $\|\pi_k(x)\| = \pi'_k(\|x\|)$

olur.

$$\sum_{k=1}^n \|\pi_k(x)\| = \sum_{k=1}^n \pi'_k(\|x\|) = \left(\sum_{k=1}^n \pi'_k \right) (\|x\|) = \|x\| \leq e \text{ olur ki;}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \pi_k = I_x &\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n \pi_k \right) (x) = x \\ &\Rightarrow \left\| \left(\sum_{k=1}^n \pi_k \right) (x) \right\| \leq \|x\| \leq e \end{aligned}$$

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^n \pi_k(x) : x \in X, \|x\| \leq e, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \in P(X), \pi_k \circ \pi_t = 0 (k \neq t), \sum_{k=1}^n \pi_k = I_x \right\}$$

kümesi X içinde sıra sınırlıdır. Böylece yukarıdaki eşitsizlikten norm sıra sınırlıdır.

Dolayısıyla T(A) , Y içinde norm sıra sınırlı olacaktır. Yani; $\|T(A)\|$, E içinde norm sıra sınırlıdır.

$$T\left(\sum_{k=1}^n \pi_k(x)\right) = \sum_{k=1}^n T(\pi_k(x)) \text{ olduğundan } \left\| \sum_{k=1}^n T\pi_k(x) \right\| = \sum_{k=1}^n \|T\pi_k(x)\| \leq z \text{ olacak}$$

şekilde $z \in E^+$ vardır. Dolayısıyla $U(e)$ sıra sınırlıdır. Böylece $T \in m(X, Y)$

bulunur. Sonuç olarak $ort(X, Y) \subseteq m(X, Y)$ olur.

Çözüm (2) : $T \in L_{ort}(X, Y)$ olsun. $T \in L_{ort}(X, Y)$ ise her $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq \pi(\|x\|)$ olacak şekilde $0 \leq \pi \in \text{ort}(E)$ vardır.

Şimdi $x \perp y$ iken $T(x) \perp y$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \|x\| \wedge \|y\| = 0 &\Rightarrow \pi(\|x\|) \wedge \|y\| = 0 && (\pi \text{ ortomorfizm}) \\ &\Rightarrow 0 \leq \|T(x)\| \wedge \|y\| \leq \pi(\|x\|) \wedge \|y\| = 0 \\ &\Rightarrow T(x) \perp y \end{aligned}$$

dolayısıyla T band koruyandır.

$A \subseteq X$ norm sıra sınırlı bir küme olsun. $T(A)$ 'nın norm sıra sınırlı olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \|A\|, E \text{ içinde norm sıra sınırlı} &\Rightarrow \exists e \in E^+ : \forall x \in X \text{ için } \|x\| \leq e \\ &\Rightarrow \pi(\|x\|) \leq \pi(e) \\ &\Rightarrow \forall x \in X \text{ için } \|T(x)\| \leq \pi(\|x\|) \leq \pi(e) \\ &\Rightarrow T(A) \text{ norm sıra sınırlıdır.} \end{aligned}$$

Dolayısıyla T norm sıra sınırlı kümeleri norm sıra sınırlı kümelere götürür. Böylece $T \in \text{ort}(X, Y)$ bulunur.

Şimdi $T \in \text{ort}(X, Y)$ olsun. Böylece $\|T\|: E \rightarrow F$ pozitif doğrusal ve $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq \|T\|(\|x\|)$ olacak şekilde $\|T\|$ dönüşümü vardır.

$\|T\| \in \text{ort}(E_0^+)$ olduğunu gösterelim.

- (i) $\|T\| \in L_b(E_0^+, F)$ olduğundan $\|T\|$ sıra sınırlıdır.
- (ii) $e, f \in E_0^+$ olmak üzere $e \perp f$ iken $\|T\|(e) \perp f$ olacağını gösterelim.

$$\|T\|(\|x\|) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|T\pi_k(x)\| : x \in X, \|x\| \leq e, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \in P(X), \pi_k \circ \pi_t = 0 (k \neq t), \right. \\ \left. \sum_{k=1}^n \pi_k = I_x, n \in \mathbb{N} \right\}$$

içindeki her bir ögenin f'ye dik olacağını gösterelim. Her k için $\pi_k \in P(X)$ olduğundan her k için $\pi'_k \in P(E_0^+)$ var ve her $x \in X$ için $\|\pi_k(x)\| = \pi'_k(\|x\|)$ olur. Böylece;

$$\|\pi_k(x)\| = \pi'_k(\|x\|) \leq \|x\| \leq e \Rightarrow \|\pi_k(x)\| \wedge f = 0.$$

$$\begin{aligned} f \in E_0^+ &\Rightarrow z \in X \text{ var ve } \|z\| = f \\ &\Rightarrow \|\pi_k(x)\| \wedge \|z\| = 0 \\ &\Rightarrow T \text{ band koruyan dönüşüm olduğundan } \|T\pi_k(x)\| \wedge \|z\| = 0 \\ &\Rightarrow \|T\|(e) \perp f \end{aligned}$$

buradan $\|T\| \in \text{ort}(E_0^+)$.

Şimdi; B_0, E_0^+ 'nin ürettiği band olsun. Keyfi $e \in B_0$ için $0 \leq e_\alpha \subseteq E_0^+$ var $e_\alpha \uparrow e$.

$$\begin{aligned} \|P\|: B_0 &\rightarrow E \\ e &\rightarrow \|P\|(e) = \sup(\|T\|(e_\alpha)) \quad \text{ve} \quad P: E \rightarrow B_0 \end{aligned}$$

band projeksiyonu vardır ve $E \xrightarrow{P} B_0 \xrightarrow{\|\cdot\|} E$ olur.

$$\text{Her } x \in X \text{ için } \|T(x)\| \leq (\|\cdot\| \circ P)(\|x\|) = \|\cdot\|(\|x\|) \quad (P(\|x\|) = \|x\|)$$

Böylece; her $e, f \in E$ ve $e \perp f$ aldığımızda

$$\begin{aligned} P(e) \in B_0 &\Rightarrow \exists 0 \leq e_\alpha \subseteq E_0^+ \text{ var } \ni e_\alpha \uparrow e \\ &\Rightarrow \forall \alpha \text{ için } e_\alpha \perp f \\ &\Rightarrow |e_\alpha| \wedge |f| = 0 \\ &\Rightarrow \|T\|(|e_\alpha|) \perp f \\ &\Rightarrow \sup_\alpha \|T\|(|e_\alpha|) \perp f \\ &\Rightarrow \|\cdot\| \circ P(e) \perp f \\ &\Rightarrow \|\cdot\| \circ P \text{ band koruyandır.} \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\|\cdot\| \circ P \in \text{ort}(E)$ ve her $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq \|\cdot\| \circ P(\|x\|)$ olduğundan $T \in L_{\text{ort}}(X, Y)$ bulunur.

3.4. Teorem

(X, E) ve (Y, F) vektör normlu uzaylar, X Ayırışım ve F Dedekind tam Riesz uzayları olsunlar. $\|X\| = \{\|x\| : x \in X\}$ kümesinin “Conich Hull”u

$$E_0^+ = \left\{ \sum_{k=1}^n \|x_k\| : x_1, x_2, \dots, x_n \in X, n \in \mathbb{N} \right\} \text{ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.}$$

(a) E_0^+, E^+ içinde solidtir.

(b) E projeksiyon özelliğine sahip ise $E_0^+ = \|X\|$ olur.

Kanıt (a) : Her $e \in E^+$ ve $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ için $e \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_n\| \in E_0^+$ olsun. $e \in E_0^+$ olacağını gösterelim.

Riesz Ayrışım Teoremi'den $e = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ ve $0 \leq e_k \leq \|x_k\|$ olacak şekilde $e_1, e_2, \dots, e_n \in E^+$ vardır. Şimdi X 'in ayrışım olmasından dolayı $y_1, y_2, \dots, y_n \in X$ var ve $k = 1, 2, \dots, n$ için $\|y_k\| = e_k$ olarak yazılabilir. Dolayısıyla $e \in E_0^+$ olur.

Kanıt (b) : $x \in \|X\|$ için $n=1$ alınırsa $x \in E_0^+$ olur. Böylece $\|X\| \subseteq E_0^+$ (3.3)

$E_0^+ \subseteq \|X\|$ olacağını gösterelim.

$e \in E_0^+$ ise $n \in \mathbb{N}$ var ve $e = \sum_{k=1}^n \|x_k\| : x_1, x_2, \dots, x_n \in X$

$n=2$ için;

$e = \|x_1\| + \|x_2\|$, $x_1, x_2 \in X$ vardır. $\|x_1\| = e_1$, $\|x_2\| = e_2$ olarak alalım.

$e = e_1 + e_2 \leq e_1 \vee e_2 + e_1 \vee e_2 = 2(e_1 \vee e_2)$ olduğundan $e_1 \vee e_2 \in \|X\|$ göstermek yeterlidir.

E 'de $B = (e_1 - e_1 \wedge e_2)^{dd}$ bandını alalım. $\pi_B : E \rightarrow B$ band projeksiyonu (E projeksiyon özelliğine sahip olduğundan) vardır.

Şimdi $e_1 \vee e_2 = \pi_B e_1 + \pi_B^\perp e_2$ eşitliğinin olduğunu gösterelim.

$e_1 = e_1 \vee e_2 + e_1 \wedge e_2 - e_2$ ve $e_2 = e_1 \vee e_2 + e_1 \wedge e_2 - e_1$ yazabiliriz (2.6. Önerme (ii)).

$$\begin{aligned} \pi_B e_1 + \pi_B^\perp e_2 &= \pi_B (e_1 \vee e_2 + e_1 \wedge e_2 - e_2) + \pi_B^\perp (e_1 \vee e_2 + e_1 \wedge e_2 - e_1) \\ &= \pi_B (e_1 \vee e_2) + \pi_B (e_1 \wedge e_2 - e_2) + \pi_B^\perp (e_1 \vee e_2) + \pi_B^\perp (e_1 \wedge e_2 - e_1) \\ &= \pi_B (e_1 \vee e_2) + \pi_B^\perp (e_1 \vee e_2) = e_1 \vee e_2 \end{aligned}$$

Böylece;

$$\begin{aligned} e_1 \vee e_2 &= \pi_B e_1 + \pi_B^\perp e_2 = \pi_B \|x_1\| + \pi_B^\perp \|x_2\| \\ &= \|\pi'_B(x_1)\| + \|\pi'^{\perp}_B(x_2)\| \\ &= \|\pi'_B(x_1) + \pi'^{\perp}_B(x_2)\| \in X \end{aligned}$$

böylece $e \in \|X\|$ olur.

Keyfi n için $e = \|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_n\| = \sum_{k=1}^{n-1} \|x_k\| + \|x_n\|$ olarak yazılarak yukarıdaki

yolun aynısı takip edilirse $e \in \|X\|$ bulunur. Dolayısıyla $E_0^+ \subseteq \|X\|$ (3.4)

Eş.(3.3) ve Eş. (3.4)'den $E_0^+ = \|X\|$ bulunur.

3.5. Teorem

Keyfi bir $T \in m(X, Y)$ dönüşümünün en küçük sınır dönüşümü aşağıdaki formüller ile verilebilir.

$$\|T\|(e) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|T(x_k)\| : x_1, x_2, \dots, x_n \in X, \sum_{k=1}^n \|x_k\| = e, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (e \in E_0^+)$$

$$\|T\|(e) = \sup \{ \|T\|(e_0) : e_0 \leq e, e_0 \in E_0^+ \} \quad (e \in E^+)$$

$$\|T\|(e) = \|T\|(e^+) - \|T\|(e^-) \quad (e \in E)$$

Kanıt : İlk eşitliğin sağ tarafındaki eşitliği S(e) ile gösterelim.

$$S : E_0^+ \rightarrow F$$

$$e \rightarrow S(e) = \sup \|T\|(e) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|T(x_k)\| : x_1, x_2, \dots, x_n \in X, \sum_{k=1}^n \|x_k\| = e, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ elemanları için $e = \sum_{k=1}^n \|x_k\|$ olarak alalım.

$$\sum_{k=1}^n \|T(x_k)\| \leq \sum_{k=1}^n \|T\|(\|x_k\|) = \|T\|\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|\right) = \|T\|(e)$$

Böylece $\left\{ \sum_{k=1}^n \|T(x_k)\| : x_1, x_2, \dots, x_n \in X, \sum_{k=1}^n \|x_k\| = e, n \in \mathbb{N} \right\}$ üsten sınırlı ve F

Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan S anlamlıdır.

Eğer $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m \in X$ ve $e = \sum_{k=1}^n \|u_k\|$, $f = \sum_{k=1}^m \|v_k\|$

$$\Rightarrow e + f = \sum_{k=1}^n \|u_k\| + \sum_{k=1}^m \|v_k\| = \sum_{k=1}^{m+n} \|z_k\| \quad \begin{pmatrix} z_k = u_k & 1 \leq k \leq n \\ z_k = v_k & n \leq k \leq m+n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m+n} \|T(z_k)\| = \sum_{k=1}^n \|T(u_k)\| + \sum_{k=1}^m \|T(v_k)\|$$

$$\leq \sup \left\{ \sum_{k=1}^{m+n} \|T(z_k)\| : z_1, z_2, \dots, z_{m+n} \in X, \sum_{k=1}^{m+n} \|z_k\| = e + f \right\} = S(e + f)$$

$$\Rightarrow S(e) + S(f) \leq S(e + f) \quad (3.5)$$

$e + f = \sum_{k=1}^n \|x_k\|$ olarak alınırsa Riesz Ayrışım Teoreminden

$e \leq \sum_{k=1}^n x_k \Rightarrow e = e_1 + e_2 + \dots + e_n : e_k \leq x_k$ olacak şekilde $e_1, e_2, \dots, e_n \in E^+$ ve

$f \leq \sum_{k=1}^n x_k \Rightarrow f = f_1 + f_2 + \dots + f_m : f_k \leq x_k$ olacak şekilde $f_1, f_2, \dots, f_n \in E^+$ vardır.

Böylece;

$$e + f = e_1 + e_2 + \dots + e_n + f_1 + f_2 + \dots + f_m = \sum_{k=1}^n \|z_k\| \text{ olacaktır.}$$

$$e \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\| \Rightarrow \exists u_k \in X \text{ için } \|u_k\| = e_k \quad (\|X\|, solid)$$

$$\Rightarrow e = \sum_{k=1}^n \|u_k\|$$

$$f \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\| \Rightarrow \exists v_k = x_k - u_k \in X \text{ için } \|v_k\| = f_k \quad (\|X\|, solid)$$

$$\Rightarrow f = \sum_{k=1}^n \|v_k\|$$

$$T(x_k) = T(u_k + v_k) \Rightarrow \|T(x_k)\| \leq \|T(u_k)\| + \|T(v_k)\|$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \|T(x_k)\| \leq \sum_{k=1}^n \|T(u_k)\| + \sum_{k=1}^n \|T(v_k)\| \leq S(e) + S(f)$$

$$\Rightarrow S(e + f) \leq S(e) + S(f) \quad (3.6)$$

Eş.(3.5) ve Eş.(3.6)'den S toplamsaldır. Böylece Kantorovich Teoreminden S 'nin genişlemesi vardır.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^0 E^+ &\rightarrow F \\ e &\rightarrow \mathcal{S}^0(e) = \sup \{ S(e_0) : e_0 \leq e, e_0 \in E_0^+ \} \quad \text{ve} \quad (B = \{ S(e_0) : e_0 \leq e, e_0 \in E_0^+ \}) \end{aligned}$$

olarak alalım. $S(0) \in B$ olduğundan $B \neq \emptyset$. $S(e_0) \leq \|T\|(e_0) \leq \|T\|(e)$ olduğundan $\sup(B)$ vardır. Böylece $\mathcal{S}^0$ anlamlıdır.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^0(e+f) &= \sup \{ S(z_0) : z_0 \leq e+f, z_0 \in E_0^+ \} \\ &= \sup \{ S(e_0 + f_0) : 0 \leq e_0 \leq e, 0 \leq f_0 \leq f, e_0, f_0 \in E_0^+ \} \\ &= \sup \{ S(e_0) : 0 \leq e_0 \leq e, e_0 \in E_0^+ \} + \sup \{ S(f_0) : 0 \leq f_0 \leq f, f_0 \in E_0^+ \} \\ &= \mathcal{S}^0(e) + \mathcal{S}^0(f) \end{aligned}$$

Kantorovich Teoreminden $H : E \rightarrow F$ pozitif genişlemesi vardır. Aynı zamanda $H|_{E^+} = \mathcal{S}^0$ ve $H(e) = \mathcal{S}^0(e^+) - \mathcal{S}^0(e^-)$ olur.

Şimdi $H \leq \|T\|$ olacağını gösterelim.

Her $e \in E^+$ için $H(e) = \mathcal{S}^0(e) \leq \|T\|(e)$. Her $x \in X$ için $\|x\| = e$ olsun. Böylece

$$e \in E_0^+ \quad \text{olur.} \quad \|T(x)\| \in \left\{ \sum_{k=1}^n \|T(x_k)\| : x_1, x_2, \dots, x_n \in X, \sum_{k=1}^n \|x_k\| = e, n \in \mathbb{N} \right\}$$

olduğundan $\|T(x)\| \leq S(e) = S(\|x\|) = \mathcal{S}^0(\|x\|) = H(\|x\|)$ ise $\|T\| \leq H$.

Böylece $\|T\| = H$.

3.6. Teorem

$T: X \rightarrow Y$ dönüşümü için;

$$T \in m(X, Y) \Leftrightarrow U(e) = \left\{ \sum_{k=1}^n \|T(x_k)\| : x_1, x_2, \dots, x_n \in X, \sum_{k=1}^n \|x_k\| \leq e, n \in \mathbb{N} \right\}$$

sıra sınırlıdır. Bu durumda $\|T\|(e) = \sup U(e)$.

Kanıt : Eğer T sınırlanmış dönüşüm ise $S: E \rightarrow F$ pozitif dönüşümü vardır ki;

her $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq S(\|x\|)$ olur. Dolayısıyla

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \|T(x_k)\| : x_1, x_2, \dots, x_n \in X, \sum_{k=1}^n \|x_k\| \leq e, n \in \mathbb{N} \right\}, S(e) \text{ ile sınırlıdır.}$$

kabul edelim her bir $e \in E^+$ için $U(e)$ sıra sınırlı olsun. $u(e) = \sup U(e)$ olarak alalım.

$$S: E^+ \rightarrow F^+$$

$$e \rightarrow S(e) = \sup \{S(e_0) : e_0 \leq e, e_0 \in E_0^+\}$$

dönüşümü Teorem 3.5.'deki gibi tanımlanırsa $U(e)$ 'in sıra sınırlı olmasından her $e \in E^+$ için $S(e) \leq u(e)$ olarak yazılabilir. Çünkü $\{S(e_0) : e_0 \leq e, e_0 \in E_0^+\} \subseteq U(e)$.

$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m \in X$ ve $e \in E^+$ için;

$$\|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_n\| \leq \|y_1\| + \|y_2\| + \dots + \|y_m\| = e$$

olduğunu kabul edelim. Her $k = 1, 2, \dots, m$ için $f_k \leq \|y_k\|$ koşuluyla

$f = e - \|x_1\| - \|x_2\| - \dots - \|x_n\|$ elemanını $f = f_1 + f_2 + \dots + f_m$ olarak alalım. X

ayrışım uzayı olduğundan; $z_1, z_2, \dots, z_m \in X$ vardır ve her $k = 1, 2, \dots, m$ için

$f_k = \|z_k\|$ dir. Böylece; $U(e)$ içinde $u = \|T(x_1)\| + \|T(x_2)\| + \dots + \|T(x_n)\|$ için;

$$u \leq u + \|T(z_1)\| + \|T(z_2)\| + \dots + \|T(z_n)\| \leq S(e).$$

$u \in U(e)$ seçimi keyfi olduğundan her bir $e \in E_0^+$ için $u(e) \leq S(e)$. Aynı zamanda E^+ üzerinde $u(e) = \sup U(e)$ olduğundan $S = u$ olur.

Her $x \in X$ için $\|x\| \leq \|x\|$ ve S 'in tanımından $\|T(x)\| \leq u(\|x\|)$ olur. Yani $T \in m(X, Y)$ olur.

3.7. Teorem

E , Dedekind tam olmak üzere $S : E^+ \rightarrow F$ dönüşümü için;

- (a) S , pozitif homojen; $\lambda \in IR$, $e \in E^+$ için $S(\lambda e) = \lambda S(e)$
- (b) S , alt toplamsal ; $e, f \in E^+$ için $S(e + f) \leq S(e) + S(f)$
- (c) S , ortogonal toplamsal ; $e, f \in E^+$ ve $e \perp f$ için $S(e + f) = S(e) + S(f)$
- (d) S , doğrusal bir $U : E \rightarrow F$ sınır dönüşüme sahiptir ki; $e \in E^+$ için $S(e) \leq U(e)$ olur.

şartları sağlanırsa S toplamsal olur.

Kanıt : Keyfi $e, f \in E^+$ ve $c = e + f$ alalım.

$$F(c) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k \pi_k(c) : e, f \in E^+, c = e + f, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in IR^+, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \in P(E), \right. \\ \left. \pi_i \circ \pi_k = 0 (k \neq i), \sum_{k=1}^n \pi_k = I_E \right\}$$

$\pi = I_E$, $\lambda = 0$ alırsak $0 \in F(c)$ olur. Yani $F(c) \neq \emptyset$.

Şimdi $e' = \sum_{k=1}^n \lambda'_k \pi_k(c)$, $e'' = \sum_{k=1}^n \lambda''_k \pi_k(c) \in F(c)$ alalım. Acaba $e' \leq e''$ iken her $k=1,2,\dots,n$ için $\lambda' \leq \lambda''$ olacağını gösterelim.

$x > 0$ olmak üzere $\lambda.x \geq 0$ için $\lambda \geq 0$ olacağını gösterelim.

$$x_k \geq 0 \text{ , } x_i \perp x_j \text{ (} i \neq j \text{) , } \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} p_i : E \rightarrow B_{x_i} \\ x_i \rightarrow p_i(x_i) = x_i \end{array} \quad \text{ve} \quad p_i(x_j) = 0 : i \neq j \text{ band projeksiyonu}$$

$$\text{için; } p_i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i p_i(x_i) = \lambda_i x_i \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i \geq 0$$

$$\text{böylece, } e' \leq e'' \Rightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^n (\lambda'' - \lambda') \pi_k(c)$$

$$\Rightarrow \lambda'' - \lambda' \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda'' \geq \lambda'$$

$\lambda' \leq \lambda''$ iken $S(e') \leq S(e'')$ olacağını gösterelim.

$$k = 1, 2, \dots, n \text{ için ; } \pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \pi_1(c) \perp \pi_2(c)$$

$$\Rightarrow \lambda_k \pi_1(c) \perp \lambda_k \pi_2(c)$$

$$S(e') = S\left(\sum_{k=1}^n \lambda'_k \pi_k(c)\right) = \sum_{k=1}^n S(\lambda'_k \pi_k(c)) \quad ((c)' \text{den } \lambda'_k \pi_k(c) \text{ ikişer şekilde dik})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \lambda'_k S(\pi_k(c)) && \text{(a)'dan} \\
&\leq \sum_{k=1}^n \lambda''_k S(\pi_k(c)) \\
&= \sum_{k=1}^n S(\lambda''_k \pi_k(c)) && \text{(a)'dan} \\
&= S\left(\sum_{k=1}^n \lambda''_k \pi_k(c)\right) && \text{((c)'den } \lambda''_k \pi_k(c) \text{ ikişer şekilde dik)} \\
&= S(e'')
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $e' \leq e''$ iken $S(e') \leq S(e'')$ olur. Yani $S, F(c)$ de sıra koruyan olur. Her $\varepsilon > 0$ için $e' \leq e \leq e''$, $e - e' \leq \varepsilon.c$ ve $e'' - e \leq \varepsilon.c$ olacak şekilde $e', e'' \in F(c)$ vardır (2.29. Teorem). Şimdi;

$$S(e) = S(e - e' + e') \leq S(e - e') + S(e') \quad \text{(b)'den}$$

$$\text{Böylece } S(e) - S(e') \leq S(e - e') *$$

bulunur. Bunu kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$S(e) - S(e') \leq S(e - e') \leq U(e - e') \leq U(\varepsilon.c) = \varepsilon U(c) \quad (3.7)$$

Benzer şekilde $S(e'') - S(e) \leq \varepsilon U(c)$ de bulunur.

$$S(e') - S(e) \leq S(e'') - S(e) \leq \varepsilon U(c) \quad (3.8)$$

Eş.(3.7) ve Eş.(3.8)'den $|S(e) - S(e')| \leq \varepsilon U(c)$ bulunur. Benzer şekilde $|S(e) - S(e'')| \leq \varepsilon U(c)$ de bulunur.

$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$, ikişer şekilde dik ve $\sum_{k=1}^n \pi_k = I_E$ olan projeksiyonlar ve

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in \mathbb{R}^+ \text{ için; } e' = \sum_{k=1}^n \lambda_k \pi_k(c), \quad f' = \sum_{k=1}^n \omega_k \pi_k(c) \in F(c)$$

elemanlarını aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde seçelim.

$$e' \leq e, \quad e - e' \leq \varepsilon.c \text{ ve } f' \leq f, \quad f - f' \leq \varepsilon.c \text{ vardır (2.29. Teorem).}$$

Şimdi;

$$\begin{aligned} |S(e+f) - S(e'+f')| &\leq |S((e+f) - (e'+f'))| & (*)'dan \\ &= |S((e-e') + (f-f'))| \\ &\leq |S(e-e') + S(f-f')| & (b)'den \\ &\leq |S(e-e')| + |S(f-f')| \\ &\leq 2.\varepsilon U(c) \end{aligned}$$

Diğer taraftan (a) ve (c) özelliklerinden;

$$\begin{aligned} S(e'+f') &= S\left(\sum_{k=1}^n (\lambda_k + \omega_k) \pi_k(c)\right) = \sum_{k=1}^n S((\lambda_k + \omega_k) \pi_k(c)) & (\pi_k(c) \text{ ikişer dik}) \\ &= \sum_{k=1}^n (\lambda_k + \omega_k) S(\pi_k(c)) & (a)'dan \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k S(\pi_k(c)) + \sum_{k=1}^n \omega_k S(\pi_k(c)) \\ &= S(e') + S(f') \end{aligned}$$

Buradan da;

$$|S(e+f) - S(e) - S(f)| = |S(e+f) + S(e') + S(f') - S(e') - S(f') - S(e) - S(f)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |S(e) - S(e')| + |S(f) - S(f')| + |S(e+f) - S(e'+f')| \\
&\leq 4.\varepsilon U(c)
\end{aligned}$$

ε keyfi olduğundan $S(e+f) = S(e) + S(f)$ bulunur.

3.8. Teorem

E, Frudenthal özelliğine sahip bir vektör örgüsü, X ayrışım uzayı ve F Dedekind tam Riesz uzayı olsun. Her bir $T \in m(X, Y)$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır. $e \in E_0^+$ için;

$$\begin{aligned}
\|T\|(e) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|T\pi_k(x)\| : x \in X, \|x\| = e, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \in P(X), \pi_k \circ \pi_t = 0 (k \neq t), \right. \\
\left. \sum_{k=1}^n \pi_k = I_x, n \in \mathbb{N} \right\}
\end{aligned}$$

Kanıt : $x \in X$ $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$, ikişer şekilde dik ve $e \in E_0^+$ için;

$$\sum_{k=1}^n \pi_k(x) = \left(\sum_{k=1}^n \pi_k \right)(x) = I(x) = x \Rightarrow \|x\| = e = \left\| \sum_{k=1}^n \pi_k(x) \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|\pi_k(x)\|.$$

Teoremden verilen eşitliğin sağındaki kümeyi A ile gösterelim.

$$\begin{aligned}
S : E_0^+ &\rightarrow F \\
e &\rightarrow S(e) = \sup(A)
\end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım.

S'nin fonksiyon olduğunu gösterelim.

E_0^+ , E^+ içinde solid ve E 'in Frudenthal özelliğinden projeksiyon özelliğine de sahiptir. Böylece $E_0^+ = \|X\|$ olur. Böylece her $e \in E_0^+$ için $e = \|x\|$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. $T \in m(X, Y)$ olduğundan T 'yi sıra sınırlı ve pozitif dönüşüm ile sınırlayabiliriz. Böylece her $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq H(\|x\|)$ olacak şekilde $H \in L_b(E, F)$ vardır.

Her $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq H(\|x\|)$ ise $\pi_k(x) \in X$ olduğundan $\|T\pi_k(x)\| \leq H(\|\pi_k(x)\|)$ olur. Her $k=1,2,\dots,n$ için $\pi_k \in P(X)$ olacağından dolayı her $x \in X$ için $\|\pi_k(x)\| = \pi'_k(\|x\|)$ olacak şekilde bir $\pi'_k \in P(E_0)$ vardır. Böylece;

$$\sum_{k=1}^n \|\pi_k(x)\| = \sum_{k=1}^n \pi'_k(\|x\|) = \left(\sum_{k=1}^n \pi'_k \right) (\|x\|) = \|x\| = e$$

bulunur. Dolayısıyla $H(e)$, A 'yı üstten sınırlar ve F Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan S anlamlıdır.

S 'nin iyi tanımlılığı açıktır.

Şimdi S 'nin (a),(b),(c) ve (d) şartlarını sağladığını gösterelim.

(a) S 'nin pozitif homojenliği vardır. Gerçekten;

$\lambda = 0$ için açık

$\lambda \neq 0$ için

$$S(\lambda.e) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|T\pi_k(x)\| : x \in X, \|x\| = \lambda e, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \in P(X), \pi_k \circ \pi_t = 0 (k \neq t), \right. \\ \left. \sum_{k=1}^n \pi_k = I_x, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda \left\| T \pi_k \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right\| : x \in X, \frac{\|x\|}{\lambda} = e, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \in P(X), \pi_k \circ \pi_t = 0 (k \neq t) \right. \\
&\quad \left. \sum_{k=1}^n \pi_k = I_x, n \in \mathbb{N} \right\} \\
&= \lambda \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \left\| T \pi_k \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right\| : x \in X, \frac{\|x\|}{\lambda} = e, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \in P(X), \pi_k \circ \pi_t = 0 (k \neq t) \right. \\
&\quad \left. \sum_{k=1}^n \pi_k = I_x, n \in \mathbb{N} \right\} \\
&= \lambda S(e)
\end{aligned}$$

(d) S'nin tanımından her $e \in E_0^+$ için $S(e) \leq \mathfrak{S}^{**}(e)$ olur. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
\|T \pi_k(x)\| &\leq \|T\|(\|\pi_k(x)\|) \Rightarrow \sum_{k=1}^n \|T \pi_k(x)\| \leq \sum_{k=1}^n \|T\|(\|\pi_k(x)\|) \\
&= \|T\|\left(\sum_{k=1}^n \|\pi_k(x)\|\right) = \|T\|(e)
\end{aligned}$$

(b) $e, f \in E_0^+$ ve $x \in X$ için $\|x\| = e + f$ olsun. X 'nin Ayrışım uzayı olmasından $x = y + z$ ve $\|y\| = e, \|z\| = f$ olacak şekilde $y, z \in X$ vardır. İkişer şekilde dik ve

$\sum_{k=1}^n \pi_k = I_X$ projeksiyonları için;

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \|T \pi_k(x)\| &\leq \sum_{k=1}^n \|T \pi_k(y)\| + \sum_{k=1}^n \|T \pi_k(z)\| \leq S(e) + S(f) \\
&\Rightarrow S(e + f) \leq S(e) + S(f)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

(c) Bu eşitsizliğin diğer tarafını e ve f dik iken sağlandığını gösterelim.

$\pi(e) = e$, $\pi^\perp(f) = f$ ve $p = \pi^\perp$ olacak şekilde bir π projeksiyonunu alalım. Eğer $p_1, p_2, \dots, p_n \in P(X)$ projeksiyonları ikişer şekilde dik ve $\sum_{k=1}^n p_k = I_X$ ise $\pi' \pi_k$ ve $p' p_t$ ($k=1, 2, \dots, n$ $t=1, 2, \dots, m$) ikişer şekilde dik ve toplamaları birimi verirler. Aynı zamanda $\pi'(x) = y$ ve $p'(x) = z$ olur. Gerçekten;

$\|x\| = e + f$ ve $e \perp f$ için $x = y + z$ ve $\|y\| = e$, $\|z\| = f$ olacak şekilde $y, z \in X$ vardır. $e \perp f$ olduğundan $x \perp y$ olur.

$$\begin{array}{lll} \pi : E \rightarrow B_e & p = \pi^\perp : E \rightarrow B_e^\perp & h : P(E_0) \rightarrow P(X) \\ e \rightarrow \pi(e) = e & \text{ve} & e \rightarrow p(e) = 0 \quad \text{için} \\ f \rightarrow \pi(f) = 0 & & f \rightarrow p(f) = f \end{array} \quad \begin{array}{l} \pi_B \rightarrow h(\pi_B) = \pi'_{h(B)} \end{array}$$

düşünüldüğünde $\pi' \in P(X)$ ve $p' \in P(X)$ vardır ve $\pi' : X \rightarrow h(B_e)$,
 $p' : X \rightarrow h(B_e^\perp) = [h(B_e)]^\perp$ olurlar. Buradan da;

$$\begin{aligned} \pi'(x) = \pi'(y + z) = \pi'(y) + \pi'(z) & \Rightarrow \begin{array}{l} \|y\| = e \in B_e \Rightarrow y \in h(B_e) \Rightarrow \pi'(y) = y \\ \|z\| = f \in B_e^\perp \Rightarrow z \in h(B_e^\perp) \Rightarrow \pi'(z) = 0 \end{array} \\ & \Rightarrow \pi'(x) = y \end{aligned}$$

Benzer şekilde $p'(x) = z$ bulunur.

Şimdi;

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \|T\pi_k(y)\| + \sum_{t=1}^m \|Tp_t(z)\| &= \sum_{k=1}^n \|T\pi_k\pi'(x)\| + \sum_{t=1}^m \|Tp_t p'(x)\| \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^m (\|T\pi_k\pi'(x)\| + \|Tp_t p'(x)\|) \end{aligned}$$

$$\leq S(e+f)$$

$$\text{böylece } S(e)+S(f)\leq S(e+f) \quad (3.10)$$

Sonuç olarak Eş.(3.9) ve Eş.(3.10)'den S toplamsaldır. S'yi 3.5. Teorem'deki gibi tüm E üzerine genişletebiliriz. S pozitif bir dönüşüm ve $S \leq \|T\|$ bulunur. S'nin tanımından her $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq S(\|x\|)$. En küçük sınır dönüşümü tanımı gereği $\|T\| \leq S$.

Sonuç olarak $\|T\| = S$ olur.

3.9. Teorem

(X,E) ve (Y,F) teoremdeki özellikleri sağlasın. $T : X \rightarrow Y$ dönüşümü için;

$$T \in m(X,Y) \Leftrightarrow U(e) = \left\{ \sum_{k=1}^n \|T\pi_k(x)\| : x \in X, \|x\| \leq e, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \in P(X), \right.$$

$$\left. \pi_k \circ \pi_t = 0 (k \neq t), \sum_{k=1}^n \pi_k = I_x, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (e \in E^+)$$

kümesi F içinde sıra sınırlıdır. Ayrıca T'nin en küçük sınır dönüşümü 3.8. Teorem'deki gibi verilebilir.

Kanıt : $T \in m(X,Y)$ olsun. Dolayısıyla her $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq S(\|x\|)$ olacak şekilde $S \in L_b^+(E,F)$ dönüşümü vardır. Her $k=1,2,\dots,n$ için $\pi_k \in P(X)$ olduğundan her $x \in X$ için $\|\pi_k(x)\| = \pi'_k(\|x\|)$ olacak şekilde $\pi'_k \in P(E_0)$ vardır. Buradan da;

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \|\pi_k(x)\| &= \sum_{k=1}^n \pi'_k(\|x\|) = \left(\sum_{k=1}^n \pi'_k \right) (\|x\|) = \|x\| \leq e \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n \|T\pi_k(x)\| &\leq S \left(\sum_{k=1}^n \|\pi_k(x)\| \right) \leq S(e)\end{aligned}$$

olur ki her $e \in E^+$ için $U(e)$, $S(e)$ ile sınırlıdır.

Her $e \in E^+$ için $U(e)$ sınırlı olsun.

$$\begin{aligned}S: E^+ &\rightarrow F \\ e &\rightarrow S(e) = \sup \{U(e)\}\end{aligned}$$

S , anlamlı ve iyi tanımlıdır.

S 'nin 3.7. Teorem'in (a),(b),(c) ve (d) şartlarını sağladığını gösterelim.

(a) S 'nin pozitif homojenliği vardır. Gerçekten;

$\lambda = 0$ için açık

$\lambda \neq 0$ için inceleyelim.

$$\begin{aligned}S(\lambda.e) &= \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|T\pi_k(x)\| : x \in X, \|x\| \leq \lambda e, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \in P(X), \pi_k \circ \pi_t = 0 (k \neq t) \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=1}^n \pi_k = I_x, n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda \left\| T\pi_k \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right\| : x \in X, \frac{\|x\|}{\lambda} \leq e, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \in P(X), \pi_k \circ \pi_t = 0 (k \neq t) \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=1}^n \pi_k = I_x, n \in \mathbb{N} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \left\| T \pi_k \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right\| : x \in X, \left\| \frac{x}{\lambda} \right\| \leq e, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \in P(X), \pi_k \circ \pi_t = 0 (k \neq t) \right. \\
&\quad \left. \sum_{k=1}^n \pi_k = I_x, n \in \mathbb{N} \right\} \\
&= \lambda.S(e)
\end{aligned}$$

(d) Her $e \in E$ için $u = \sup U(e^+)$ olarak alınırsa u , S 'yi sınırlayan alt doğrusal ve sıra koruyan bir dönüşümdür. Gerçekten;

$u(e+f) = \sup \{U(e^+ + f^+)\} \leq \sup \{U(e^+)\} + \sup \{U(f^+)\} = u(e) + u(f)$ ise u alt doğrusal.

$$e \leq f \Rightarrow U(e^+) \subseteq U(f^+) \Rightarrow u(e) \leq u(f)$$

Yani u sıra koruyandır. Her $e \in E^+$ için $S(e) = u(e) \Rightarrow S(e) \leq u(e)$ olur.

$$\begin{aligned}
(b) \quad S(e+f) &= \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \left\| T \pi_k(x) \right\| : x \in X, \|x\| \leq e+f, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \in P(X), \right. \\
&\quad \left. \pi_k \circ \pi_t = 0 (k \neq t), \sum_{k=1}^n \pi_k = I_x, n \in \mathbb{N} \right\}
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} &\|x\| \leq e+f \Rightarrow \text{Riesz A.T'den } \|x\| = e_1 + e_2 \text{ ve } e_1 \leq e, e_2 \leq f \text{ o.ş. } e, e_2 \in E^+ \text{ vardır.} \\ &\|x\| = e_1 + e_2 \Rightarrow x = y + z \text{ ve } \|y\| = e_1, \|z\| = e_2 \text{ o.ş. } y, z \in X \text{ vardır.} \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \left\| T \pi_k(y) \right\| : y \in X, \|y\| \leq e, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \in P(X), \right. \\
&\quad \left. \pi_k \circ \pi_t = 0 (k \neq t), \sum_{k=1}^n \pi_k = I_x, n \in \mathbb{N} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|T\pi_k(z)\| : z \in X, \|z\| \leq e, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \in P(X), \right. \\
& \quad \left. \pi_k \circ \pi_t = 0 (k \neq t), \sum_{k=1}^n \pi_k = I_x, n \in \mathbb{N} \right\} \\
& \leq S(e) + S(f) \\
& \Rightarrow S(e+f) \leq S(e) + S(f) \tag{3.11}
\end{aligned}$$

(c) Bu eşitsizliğin diğer tarafını e ve f dik iken sağlanacağını gösterelim.

$\pi(e) = e$, $\pi^\perp(f) = f$ ve $p = \pi^\perp$ olacak şekilde bir π projeksiyonu alalım. Eğer $p_1, p_2, \dots, p_n \in P(X)$ projeksiyonları ikişer şekilde dik ve $\sum_{k=1}^n p_k = I_X$ ise $\pi' \pi_k$, $p' p_t$ ($k=1, 2, \dots, n$ $t=1, 2, \dots, m$) ikişer şekilde dik ve toplamaları birimi verirler. Aynı zamanda $\pi'(x) = y$, $p'(x) = z$. (3.8. Teorem (c)'deki gibi gösterilebilir)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \|T\pi_k(y)\| + \sum_{t=1}^m \|Tp_t(y)\| &= \sum_{k=1}^n \|T\pi_k\pi'(x)\| + \sum_{t=1}^m \|Tp_t p'(y)\| \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^m (\|T\pi_k\pi'(x)\| + \|Tp_t p'(y)\|) \\
&\leq S(e+f) \\
&\Rightarrow S(e) + S(f) \leq S(e+f) \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Dolayısıyla S toplamsaldır.

S'yi 3.5. Teorem'deki gibi tüm E'ye genişletebiliriz. S pozitif bir dönüşüm ve $S \leq \|T\|$. S'nin tanımından her $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq S(\|x\|)$. En küçük sınır dönüşümü sınır dönüşüm tanımı gereği $\|T\| \leq S$.

Sonuç olarak $\|T\| = S$ ve S, T 'yi sınırladığından $T \in m(X, Y)$.

3.10. Tanım

$p: E \rightarrow F$ dönüşümü alt doğrusal ve sıra koruyan olsun. Eğer her $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq p(\|x\|)$ sağlanırsa p 'ye T 'nin alt sınırı denir. Eğer her $e \in E$ için $p(e) = p(e^+)$ ise p 'ye normal sınır dönüşüm denir.

3.11. Teorem

X ayrışım uzayı ve F Dedekind tam Riesz uzayı ise her alt sınırlanmış T dönüşümünün en küçük normal alt sınırı $[T]$ vardır. Aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$[T](e) = \sup \{ \|T(x)\| : \|x\| \leq e^+ \} \quad (e \in E).$$

Kanıt:

$$S: E \rightarrow F$$

$$e \rightarrow S(e) = \sup \{ \|T(x)\| : \|x\| \leq e^+ \}$$

P, T 'yi alt sınırlayan bir dönüşüm olsun. P sıra koruyan ve alt doğrusaldır. Ayrıca her $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq p(\|x\|) \leq p(e)$. Böylece $\{ \|T(x)\| : \|x\| \leq e^+ \}$ sınırlı yani S anlamlıdır.

S , sıra koruyan ve alt doğrusaldır.

S 'nin T 'yi sınırlayacağını gösterelim.

$$\|x\| \leq \|x\| \quad (\|x\| = e^+) \Rightarrow \|T(x)\| \in \{ \|T(y)\| : \|y\| \leq \|x\| \}$$

$$\Rightarrow \|T(x)\| \leq S(\|x\|) = \sup \{ \|T(y)\| : \|y\| \leq \|x\| \}$$

$$\Rightarrow \|T(x)\| \leq S(\|x\|)$$

böylece S , T 'yi sınırlar eder. T 'nin başka bir normal alt sınırı U olsun. Her $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq U(\|x\|)$. Her iki tarafın $\|x\| \leq e^+$ için supremumu alınır;

$$\sup \{ \|T(x)\| : \|x\| \leq e^+ \} \leq \sup \{ \|U(x)\| : \|x\| \leq e^+ \} = U(e^+) = U(e)$$

Dolayısıyla $S \leq U$ ve böylece $[T] = S$. Buradanda $S(e) = \sup \{ \|T(x)\| : \|x\| \leq e^+ \} = S(e^+)$.

Sonuç olarak; aynı varsayımlar altında her $e \in E^+$ için, $\{ \|T(x)\| : \|x\| \leq e^+ \}$ kümesi sınırlı ise T alt sınırlandırılmış dönüşüm olduğu elde edilmiştir.

3.12. Teorem

X ayrışım uzayı, F Dedekind tam Riesz uzayı ve $T: X \rightarrow Y$ dönüşüm olsun. Aşağıdakilerin biri sağlansın.

(1) $Y = F$

(2) T dikliği koruyan ve E projeksiyon özelliğine sahiptir.

T alt sınırlanmış ise T sınırlandırılmıştır ve her $e \in E^+$ için $\|T\|(e) = [T](e)$.

Kanıt : (1)'nin sağlanması durumu

$[T](e) = \sup \{ \|T(x)\| : \|x\| \leq e \}$ ($e \in E^+$) olduğu bilinmekte.

$$\begin{aligned} \text{Eğer } \|x_1\| \leq e_1, \|x_2\| \leq e_2 \text{ ve } x = x_1 + x_2, e = e_1 + e_2 &\Rightarrow \|x\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \leq e_1 + e_2 = e \\ &\Rightarrow T(x_1) + T(x_2) = T(x) \leq [T](e) \end{aligned}$$

Her iki tarafın supremumu alınırsa

$$[T](e_1) + [T](e_2) \leq [T](e) \quad (3.13)$$

Diğer taraftan;

$$[T](e) = [T](e_1 + e_2) \leq [T](e_1) + [T](e_2) \quad (3.14)$$

Eş.(3.13) ve Eş.(3.14)'den $[T](e) = [T](e_1 + e_2) = [T](e_1) + [T](e_2)$ elde edilir. Yani $[T]$ toplamsaldır. Dolayısıyla $[T]$ 'nin E üzerine genişlemesi vardır ve bu da T için bir sınır dönüşümdür.

(2)'nin sağlanması durumu

3.9. Teorem'de $T \in m(X, Y)$ olması için gerek ve yeteri şart $U(e)$ 'nin sıra sınırlı olmasıydı. Dolayısıyla T 'nin domine edildiğini göstermek için $U(e)$ 'nin sıra sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.

$$[T](e) = \sup \{ \|T(x)\| : \|x\| \leq e^+ \} \quad (e \in E)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \|\pi_k(x)\| &= \sum_{k=1}^n \pi'_k(\|x\|) = \|x\| \leq e \Rightarrow \sum_{k=1}^n \|T\pi_k(x)\| = \left\| T \left(\sum_{k=1}^n \pi_k(x) \right) \right\| \\ &\leq [T] \left(\left\| \sum_{k=1}^n \pi_k(x) \right\| \right) = [T](\|x\|) \leq [T](e^+) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U(e) \quad \text{üsten sınırlı}$$

$$\Rightarrow T \in m(X, Y).$$

Şimdi $\|T\| = [T]$ eşitliğine bakalım.

$\|T(x)\| \in U(e)$ ve $\|T\|(e) = \sup\{U(e)\}$ olmaktadır. Aynı zamanda her $\|x\| \leq e^+$ için $\|T(x)\| \leq \sup\{U(e)\} = \|T\|(e)$ olur. Buradan da supremum alınırsa

$$[T](e) \leq \|T\|(e) \quad (3.15)$$

bulunur. Benzer şekilde $\sum_{k=1}^n \|T\pi_k(x)\| = \left\| T\left(\sum_{k=1}^n \pi_k\right)(x) \right\| = \|T(x)\|$. 3.9. Teorem'dan aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \|T\|(e) &= \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|T\pi_k(x)\| : x \in X, \|x\| \leq e + f, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \in P(X), \right. \\ &\quad \left. \pi_k \circ \pi_t = 0 (k \neq t), \sum_{k=1}^n \pi_k = I_x, n \in \mathbb{N} \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \langle T(x) \rangle_{\mathbb{R}}^{\bullet} \leq e \right\} = [T](e) \quad (3.16) \end{aligned}$$

Eş.(3.15) ve Eş. (3.16) 'den eşitlik çıkar.

3.13. Teorem

$$\begin{aligned} \| \cdot \| : m(X, E) &\rightarrow E'_+ = L_b^+(E, i) \\ f &\rightarrow \|f\| = \inf \left\{ S \in L_b^+(E, i) : \forall x \in X \text{ için } \|f(x)\| \leq S(\|x\|) \right\} \end{aligned}$$

dönüşümü bir normdur.

Kanıt : $0 \leq S$ ve i Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan anlamlı ve aynı zamanda iyi tanımlı bir fonksiyondur.

Teoremdaki eşitliğin sağını A olarak alalım ve norm olma şartlarını sağlayacağını gösterelim.

$N_1)$ $\|f\|$ pozitiftir.

$$f = 0 \Rightarrow S = 0 \in A \Rightarrow 0 \leq \inf(A) \leq 0 \Rightarrow \|f\| = 0$$

$\inf(A) = 0$ olsun. Her $x \in X$ için;

$$\begin{aligned} \|f(x)\| \leq \inf(A)(\|x\|) &\Rightarrow 0 \leq \|f(x)\| \leq \inf(A)(\|x\|) = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in X \text{ için } f(x) = 0 \end{aligned}$$

$N_2)$ $\lambda \in i$ için $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ olacağını gösterelim.

$$\begin{aligned} \|\lambda f\| &= \inf \left\{ S \in L_b^+(E, IR) : \forall x \in X \text{ için } \|(\lambda f)(x)\| \leq S(\|x\|) \right\} \\ &= \inf \left\{ S \in L_b^+(E, IR) : \forall x \in X \text{ için } |\lambda| \|f\| \leq S(\|x\|) \right\} \\ &= \inf \left\{ |\lambda| \cdot \frac{S}{|\lambda|} : S \in L_b^+(E, IR), \forall x \in X \text{ için } \|f\| \leq \frac{S}{|\lambda|}(\|x\|) \right\} \\ &= |\lambda| \cdot \inf \left\{ \frac{S}{|\lambda|} : S \in L_b^+(E, IR), \forall x \in X \text{ için } \|f\| \leq \frac{S}{|\lambda|}(\|x\|) \right\} \\ &= |\lambda| \cdot \|f\| \end{aligned}$$

$N_3)$ $f, g \in m(X, E)$ için $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ olacağını gösterelim.

$$f, g \in m(X, E) \Rightarrow f + g \in m(X, E) \Rightarrow \|f + g\| \text{ vardır.}$$

$$f, g \in m(X, E) \Rightarrow \|f\| \text{ ve } \|g\| \text{ vardır.}$$

$$\|(f + g)(x)\| \leq \|f + g\|(\|x\|) \quad (3.17)$$

$$\|(f + g)(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\|(\|x\|) + \|g\|(\|x\|) \leq (\|f\| + \|g\|)(\|x\|) \quad (3.18)$$

Eş.(3.17) ve Eş.(3.18) göz önüne alındığında en küçük sınır dönüşümü sınır dönüşüm tanımından

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

4. HAHN BANACH TEOREMİ VE SONUÇLARI

4.1. Teorem (Hahn Banach Teoremi)

$(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay $Y \subseteq X$ alt uzay olsun. Her $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli doğrusal fonksiyonun her $x \in Y$ için $f(x) = F(x)$ ve $\|f\| = \|F\|$ olacak şekilde bir $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ doğrusal ve sürekli genişlemesi vardır.

4.2. Teorem (Pozitif Dönüşümlerde Hahn Banach Teoremi)

E gerçel vektör uzayı, F Dedekind tam Riesz uzayı ve $T: E \rightarrow F$ alt doğrusal dönüşüm olsun. $Y \subseteq E$ alt uzayı, $f: Y \rightarrow F$ bir dönüşüm ve her $x \in Y$ için $f(x) \leq T(x)$ ise

(1) Y üzerinde $f = S$

(2) Her $x \in E$ için $S(x) \leq T(x)$

olacak şekilde $S: E \rightarrow F$ dönüşümü vardır.

4.3. Zorn Lema

A kısmi sıralı bir küme olsun. A 'nın tam sıralı her alt kümesinin bir üst sınırı varsa A 'nın maksimal elemanı vardır.

4.4. Tanım

X vektör uzay, E Riesz uzayı ve $F: X \rightarrow E$ doğrusal bir dönüşüm olsun. Eğer $x \in X$ için $|F(x)| \leq S(\cdot)$ olacak şekilde $S: E \rightarrow E$ pozitif-doğrusal dönüşümü varsa F 'ye E -sınırlıdır denir.

4.5. Teorem (Hahn Banach Teoremi)

(X, E) vektör uzay, E Dedekind tam Riesz uzayı ve $Y \subseteq X$ alt uzay olsun. Her $f: Y \rightarrow E$ E -sınırlı fonksiyonların her $x \in Y$ için $F(x) = f(x)$ ve $\|f\| = \|F\|$ olacak şekilde $F: X \rightarrow E$ bir genişlemesi vardır.

Kanıt: $f=0$ ise $F=0$ alınır veya $X=Y$ ise $F=f$ alınırsa kanıt açıktır.

$Y \subsetneq X$ olduğunda $x_0 \in X$ elemanı vardır ki $x_0 \notin Y$ dir.

$Y_1 = sp\{Y, x_0\} = \{x + \lambda x_0 : x \in Y, \lambda \in \mathbb{I}\}$ ve $S = \|f\|$ olarak alalım. $x_1, x_2 \in Y$ için;

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &\leq |f(x_1 + x_2)| \leq S(\|x_1 + x_2\|) = S(\|x_1 + x_0 - x_0 + x_2\|) \\ &\leq S(\|x_1 - x_0\|) + S(\|x_2 + x_0\|) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x_1) - S(\|x_1 - x_0\|) \leq S(\|x_2 + x_0\|) - f(x_2)$$

$$\Rightarrow \sup \{f(x_1) - S(\|x_1 - x_0\|) : x_1 \in Y\} \leq u \leq \inf \{S(\|x_2 + x_0\|) - f(x_2) : x_2 \in Y\}$$

olacak şekilde $u \in E$ vardır. Çünkü E Dedekind tam Riesz uzay ve $\{f(x_1) - S(\|x_1 - x_0\|) : x_1 \in Y\}$ ile $\{S(\|x_2 + x_0\|) - f(x_2) : x_2 \in Y\}$ kümesi birbirini sınırlar.

$$f_1: Y_1 \rightarrow E$$

$$x + \lambda x_0 \rightarrow f_1(x + \lambda x_0) = f(x) + \lambda u$$

f_1 anlamlı, iyi tanımlı ve doğrusal bir fonksiyondur.

$\lambda > 0$ için;

$$\begin{aligned} f_1(y) &= f_1(x + \lambda x_0) = f(x) + \lambda u = \lambda \left[f\left(\frac{x}{\lambda}\right) + u \right] \\ &\leq \lambda \left[f\left(\frac{x}{\lambda}\right) + S\left(\left\|\frac{x}{\lambda} + x_0\right\|\right) - f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right] \\ &= \lambda \left[S\left(\left\|\frac{x}{\lambda} + x_0\right\|\right) \right] = S(\|x + \lambda x_0\|) \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\lambda > 0$ ve $y \in Y_1$ için $f_1(y) \leq S(\|y\|)$. Aynı zamanda $-f_1(y) = f_1(-y) \leq S(\|-y\|) \leq S(\|y\|)$ olduğundan $|f_1(y)| \leq S(\|y\|)$ olur.

$\lambda < 0$ için $\delta = -\lambda > 0$ alalım;

$$\begin{aligned} f_1(y) &= f_1(x + \lambda x_0) = f_1(x - \delta x_0) = f(x) - \delta u = \delta \left[f\left(\frac{x}{\delta}\right) + u \right] \\ &\leq \delta \left[f\left(\frac{x}{\delta}\right) + S\left(\left\|\frac{x}{\delta} - x_0\right\|\right) - f\left(\frac{x}{\delta}\right) \right] \\ &= \delta \left[S\left(\left\|\frac{x}{\delta} - x_0\right\|\right) \right] \\ &= S(\|x - \delta x_0\|) \\ &= S(\|x + \lambda x_0\|) \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\lambda < 0$ ve $y \in Y_1$ için $f_1(y) \leq S(\|y\|)$. Aynı zamanda $-f_1(y) = f_1(-y) \leq S(\|-y\|) \leq S(\|y\|)$ olduğundan $|f_1(y)| \leq S(\|y\|)$ olur.

$\lambda = 0$ için;

$$\left. \begin{aligned} f_1(y) = f(x) &\leq |f(x)| \leq S(\|x\|) \\ -f_1(y) = f(-x) &\leq |f(x)| \leq S(\|x\|) \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f_1(y)| \leq S(\|y\|)$$

olur. Sonuç olarak her λ gerçel sayı değeri için $|f_1(y)| \leq S(\|y\|)$ eşitsizliği sağlandığından f_1 E-sınırlı ve S, f_1 için bir sınır dönüşümdür. En küçük sınır dönüşümü sınır dönüşüm tanımından $\|f_1\| \leq \|f\|$ (4.1)

$$\left. \begin{aligned} \|f\| &= \inf \{ S \in L_b^+(E) : \forall x \in Y \text{ için } \|f(x)\| \leq S(\|x\|) \} \\ \|f_1\| &= \inf \{ S \in L_b^+(E) : \forall x \in Y_1 \text{ için } \|f_1(x)\| \leq S(\|x\|) \} \end{aligned} \right\} \quad \text{ve} \quad \text{her } x \in Y$$

için $f(x) = f_1(x)$ sağlanır.

$$\begin{aligned} Y \subset Y_1 &\Rightarrow \{ S \in L_b^+(E) : \forall x \in Y_1 \text{ için } \|f_1(x)\| \leq S(\|x\|) \} \\ &\subseteq \{ S \in L_b^+(E) : \forall x \in Y \text{ için } \|f(x)\| \leq S(\|x\|) \} \\ &\Rightarrow \inf \{ S \in L_b^+(E) : \forall x \in Y \text{ için } \|f(x)\| \leq S(\|x\|) \} \\ &\leq \inf \{ S \in L_b^+(E) : \forall x \in Y_1 \text{ için } \|f_1(x)\| \leq S(\|x\|) \} \\ &\Rightarrow \|f\| \leq \|f_1\| \end{aligned} \quad (4.2)$$

Eş.(4.1) ve Eş.(4.2) ' den $\|f\| = \|f_1\|$ bulunur.

* $X \setminus Y$ doğrusal bağımsız eleman sayısı sonlu tane ise yukarıdaki yol ile istenen elde edilir.

** $X \setminus Y$ sonsuz tane elemana sahip olacağı durumu inceleyelim.

$$A = \{(Z, g) : Z \subseteq X, \forall x \in Y \text{ için } f(x) = g(x), \|f\| = \|g\| \\ g : Z \rightarrow E \text{ doğrusal ve } E\text{-sınırlı}\}$$

kümesini alalım. $A \neq \emptyset$ çünkü $(Y_1, f_1) \in A$. $(Z_1, g_1) \subseteq (Z_2, g_2) \Leftrightarrow Z_1 \subseteq Z_2$ ve $\forall x \in Z_1$ için $g_1(x) = g_2(x)$

Bu bir sıralama bağıntısıdır. B, A'nın tam sıralı bir alt kümesi olsun. $H = \bigcup_{(Z,g) \in B} Z$

ailesi X'in bir alt uzayıdır. Gerçekten;

$$x, y \in H \text{ ise } (Z_1, g_1), (Z_2, g_2) \in B : x \in Z_1 \text{ ve } y \in Z_2$$

B, tam sıralı olduğundan $(Z_1, g_1) \subseteq (Z_2, g_2)$ veya $(Z_2, g_2) \subseteq (Z_1, g_1)$ olur.

$$\begin{array}{lll} Z_1 \subseteq Z_2 & & Z_2 \subseteq Z_1 \\ x + y \in Z_2 & \text{ya da} & x + y \in Z_1 \\ x + y \in H & & x + y \in H \end{array}$$

$x \in H$ için (Z, g) var ve $x \in Z$ dir. Böylece $\lambda \in \mathbb{I}$ için $\lambda.x \in Z$. Dolayısıyla $\lambda.x \in H$ olur.

$$\begin{array}{ll} G : H \rightarrow E & \\ x \rightarrow G(x) = g(x) & (x \in H \Rightarrow \exists (Z, g) \in B : g : Z \rightarrow E) \end{array}$$

dönüşümünü tanımlayalım. $x \in H$ için $g(x) \in E$ ise G anlamlıdır.

G'nin iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$x, y \in G$ ise $(Z_1, g_1), (Z_2, g_2) \in B$ vardır ki; $x \in Z_1$ ve $y \in Z_2$. B tam sıralı olduğundan $(Z_1, g_1) \subseteq (Z_2, g_2)$ veya $(Z_2, g_2) \subseteq (Z_1, g_1)$.

$x = y$ ise $x, y \in Z_1$ ve $x, y \in Z_2$. Böylece $Z_1 \subseteq Z_2$ veya $Z_2 \subseteq Z_1$. Her iki durumda da $g_1(x) = g_2(y)$ bulunur. Böylece $G(x) = G(y)$ olur.

G doğrusal ve sınırlıdır.

(H, G) , B 'nin bir üst sınırı olduğunu gösterelim.

Her $(Z, g) \in B$ için $Z \subseteq H$ ve $G(x) = g(x)$ ($x \in Z$) olduğundan $(Z, g) \subseteq (H, G)$.

O zaman (H, G) , B 'nin bir üst sınırı olduğundan A 'nın maksimal elemanı vardır (4.3. Zorn Lema) ve bu maksimal eleman (L, F) olsun. Maksimal eleman kümeye düşeceğinden $x \in Y$ için $F(x) = f(x)$, $\|f\| = \|F\|$ ve $F: L \rightarrow E$ doğrusal ve E -sınırlıdır.

$L = X$ olacağını gösterelim.

$x_0 \in X \setminus Y$ olsun. $L_1 = sp\{L, x_0\}$ Kanıtın ilk kısmından (L_1, F_1) vardır ve $(L_1, F_1) \in A$ olur ki bu da (L, F) 'nin maksimal eleman olması ile çelişir. O halde $X = L$ olmalıdır.

4.6. Örnek

Eğer $E = \mathbb{R}$ alınırsa klasik Hahn Banach Teoremini elde etmiş oluruz.

4.7. Örnek

$X = E$ alınırsa;

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\rightarrow E \\ x &\rightarrow \|x\| = |x| \end{aligned}$$

vektör normudur. $G \subseteq E$ alt uzay ve $f : G \rightarrow E$ E -sınırlı bir fonksiyon (her $x \in G$ için $|f(x)| \leq S(|x|)$ olacak şekilde $S \in L_b^+(E)$ vardır.) olsun. Bu durumda $F : E \rightarrow E$, $F|_G = f$ ve $|F| = |f|$ olacak şekilde doğrusal F fonksiyonu vardır.

4.8. Sonuç: Hahn-Banach Teoremi şartları altında her $0 \neq x_0 \in X$ için $F : X \rightarrow E$ var $F(x_0) = \|x_0\|$ ve $\|F\| \leq I$.

Kanıt : $Y = sp\{x_0\} = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ olsun.

$$\begin{aligned} f : Y &\rightarrow E \\ \lambda x_0 &\rightarrow f(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\| \end{aligned}$$

doğrusal bir fonksiyondur.

F 'nin sınırlı olduğunu gösterelim.

$$|f(\lambda x_0)| = |\lambda \|x_0\|| = |\lambda| \|x_0\| = \|\lambda x_0\| = I(\|\lambda x_0\|) \Rightarrow |f| \leq I$$

dolayısıyla f sınırlıdır. Böylece f 'nin $F : X \rightarrow E$ genişlemesi vardır (4.5. Hahn Banach Teoremi) ve $y \in Y$ için;

$$f(y) = F(y), \quad \|F\| = \|f\| \quad \text{ve} \quad F(x_0) = \|x_0\| \text{ olur.}$$

$$z \in X \text{ için } |F(z)| = \|F\|(\|z\|) \leq I(\|z\|). \text{ Böylece } \|F\| \leq I.$$

4.9. Sonuç: (X, E) vektör örgü, $Y \subseteq X$ bo-kapalı ve $x_0 \notin Y$ olan bir nokta olsun. $F(Y) = 0$ ve $F(x_0) = u$, $u > 0$ olacak şekilde $F: X \rightarrow E$ E-sınırlı dönüşümü ve $u \in E$ vardır.

Kanıt : $Y_1 = sp\{x_0, Y\} = \{x + \lambda x_0 : x \in Y, \lambda \in \mathbb{I}\}$ ve $u = \inf \{\|x_0 + y\| : y \in Y\} \geq 0$ olarak tanımlayalım. Önce $u \neq 0$ olduğunu gösterelim.

$u=0$ olduğunu varsayalım.

$A = \{\|x_0 - y\| : y \in Y\}$ için A'nın aşağı yönlendirilmiş bir küme olduğunu gösterelim.

Bunun için alınan her $a_1, a_2 \in A$ için $a_1 \wedge a_2 \in A$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. E'de $B = (a_1 - a_1 \vee a_2)^{dd}$ bandını alalım. $\pi_B: E \rightarrow B$ band projeksiyonu vardır.

$$a_1 = (a_1 \vee a_2) + (a_1 \wedge a_2) - a_2, \quad a_2 = (a_1 \vee a_2) + (a_1 \wedge a_2) - a_1 \quad \text{ve} \quad \pi_B \in p(E)$$

olduğundan $\pi'_B \in p(X)$ var ve $x \in X$ için $\pi_B(\|x\|) = \|\pi'_B(x)\|$. Dolayısıyla;

$$\begin{aligned} \pi_B(a_1) + \pi_B^d(a_2) &= \pi_B(a_1 \vee a_2 + a_1 \wedge a_2 - a_2) + \pi_B^d(a_1 \vee a_2 + a_1 \wedge a_2 - a_1) \\ &= \pi_B(a_1 \wedge a_2) + \pi_B(a_1 \vee a_2 - a_2) + \pi_B^d(a_1 \wedge a_2) + \pi_B^d(a_1 \vee a_2 - a_1) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} (a_1 \vee a_2 - a_1) \wedge (a_1 \vee a_2 - a_2) &= (a_1 \vee a_2 - a_1) \wedge (a_1 - a_1 \vee a_2) & (a_1 - a_1 \vee a_2 &= a_1 \vee a_2 - a_2) \\ &= [0 \vee (a_2 - a_1)] \wedge [a_1 + (-a_1 \vee a_2)] & (a_1 \wedge a_2 &= -(-a_1 \vee -a_2)) \\ &= (a_2 - a_1)^+ \wedge (0 \vee a_1 - a_2) \\ &= (a_2 - a_1)^+ \wedge [0 \vee -(a_2 - a_1)] \\ &= (a_2 - a_1)^+ \wedge (a_2 - a_1)^- \\ &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$= \pi_B(a_1 \wedge a_2) + \pi_B^d(a_1 \wedge a_2)$$

$$= a_1 \wedge a_2$$

$a_1, a_2 \in A$ olduğundan $a_1 = [x_0 - y_1]$ ve $a_2 = [x_0 - y_2]$ olacak şekilde $y_1, y_2 \in Y$ vardır. Buradan da;

$$\begin{aligned} a_1 \wedge a_2 &= \pi_B(a_1) + \pi_B^\perp(a_2) \\ &= \pi_B(\|x_0 - y_1\|) + \pi_B^\perp(\|x_0 - y_2\|) \\ &= \|\pi'_B(x_0 - y_1)\| + \|\pi'^{\perp}_B(x_0 - y_2)\| \\ &= \|\pi'_B(x_0 - y_1) + \pi'^{\perp}_B(x_0 - y_2)\| \\ &= \|x_0 + (\pi'_B(y_1) + \pi'^{\perp}_B(y_2))\| \end{aligned}$$

elde edilir. $\pi'_B(y_1) + \pi'^{\perp}_B(y_2) \in Y$ olduğundan $a_1 \wedge a_2 \in A$ olur. Böylece $a_1, a_2 \in A$ için $a_1 \wedge a_2 \in A$ var ve $a_1 \wedge a_2 < a_1$ ve $a_1 \wedge a_2 < a_2$ dır. Yani A aşağı yönlendirilmiş bir kümedir. Böylece A'yı E içinde bir net olarak düşünebiliriz. $\|y_\alpha - x_0\| = \|x_0 - y_\alpha\| \downarrow 0$ olacağından $y_\alpha \rightarrow x_0$ olur. Her band, bo-kapalı olduğundan $x_0 \in Y$ çıkar ki bu çelişkidir.

$$\begin{aligned} f: Y_1 &\rightarrow E \\ y + \lambda x_0 &\rightarrow f(y + \lambda x_0) = \lambda u \end{aligned}$$

f doğrusal, E-sınırlı, $f(y) = 0$ ve $f(x_0) = u$ olan bir fonksiyondur. Hahn Banach Teoreminden $F: X \rightarrow E$ genişlemesi var ki; $F(Y) = 0$ ve $F(x_0) = u$ olur.

SONUÇ

(X, E) vektör normlu uzaylarında Hahn Banach Teoreminin sağlandığı verildi. Bunun gerçel sayılardaki Hahn Banach Teoremini de kapsandığı verildi. Uğraştığımız bir konu da (X, E) vektör normlu uzayının ikinci dualini tanımlayıp Hahn-Banach Teoreminin uygulamalarını elde etmektir. Örneğin (X, E) uzayı ile ikinci duali arasındaki ilişkiyi çıkarmaktır. Ancak henüz önemli diyeceğimiz sonuçları elde edemedik.

KAYNAKLAR

1. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., “Positive Operators”, *Academic Press*, New York and London, 1-86, 106-123 (1985)
2. Luxemburg, W.A.J., and Zaanen A.C., “Riesz Space I”, *North Holland*, Amsterdam, 1-7, 29-35 (1971)
3. Kusraev, A.G., “Dominated Operators”, *Kluwer Academic*, The Netherlands, 44-62, 142-156 (1999)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : AYDIN, Abdullah
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 31.12.1986 Adıyaman
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (436) 213 00 13
e-mail : aba-aya@hotmail.com.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Adıyaman Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2007
Lise	Kahta Lisesi	2003

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Tenis, Bilgisayar teknolojileri, Basketbol