

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ GENEL LİNEER KARMA
MODELLER ALTINDA BLUP İLİŞKİLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hacer KAPUSUZ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Nesrin GÜLER

Haziran 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ GENEL LİNEER KARMA MODELLER ALTINDA BLUP İLİŞKİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hacer KAPUSUZ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK

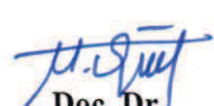
Bu tez 25 / 06 /2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.



Doç. Dr.
Ayşe SÖNMEZ
Jüri Başkanı



Doç. Dr.
Nesrin GÜLER
Üye



Doç. Dr.
Mahpeyker ÖZTÜRK
Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Hacer KAPUSUZ

10.06.2019

TEŞEKKÜR

Çalışmamın tüm aşamaları boyunca bana yoğun bir ilgi ile yardımcı olan, yeni bilgilerle ufkumu açan, sıkılmadan sonsuz bir sebatla yön gösteren ve moral veren saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Nesrin GÜLER'e teşekkürlerimi sunarım.

Lisans eğitimim süresince bana değer veren ve kendimi geliştirmeme yardımcı olan Hacettepe Üniversitesi Öğretim Görevlisi hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca beni maddi ve manevi destekleyen ve desteklemeye devam edeceklerini bildiğim, her şekilde yanımda olan, beni ben yapan annem Ümmügül KAPUSUZ'a, babam Abdullah KAPUSUZ'a, abim Fuat KAPUSUZ'a, benden yardımlarını esirgemeyen, her ihtiyacıma koşturan, daima bana kol kanat geren, canım kardeşlerim Muhammed Nurettin KAPUSUZ ve İsmet KAPUSUZ'a sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iv
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2.	
GENEL BİLGİLER	6
2.1. Lineer Denklem Sistemleri	6
2.2. Lineer Bağımlılık	7
2.3. Satır /Sütun Uzayı ve Rank	7
2.4. Matris Tersi.....	8
2.5. Dik İzdüşüm Matrisi	9
2.6. Matris Denklemleri	10
2.7. Kuadratik Form.....	10
2.8. Matrisler, Sütun Uzayları ve Ranklar İle İlgili Bazı Özellikler	11
2.9. Bazı İstatistiksel İfadeler	13
BÖLÜM 3.	
DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ GENEL LİNEER KARMA MODELLERİN BLUP/BBLUE	
DENKLEMLERİ	15
3.1. Genel Lineer Karma Model ve Bu Modelin Dönüştürülmüş Modelleri	15
3.2. En İyi Lineer Yansız Ön Tahmin/Tahmin Edici (BLUP/BBLUE)	16

BÖLÜM 4.

DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ GENEL LİNEER KARMA MODELLER ALTINDA BLUP

İLİŞKİLERİ..... 34

BÖLÜM 5.

SONUÇ VE ÖNERİLER 44

KAYNAKLAR..... 46

ÖZGEÇMİŞ..... 52



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{n \times 1}$	: n boyutlu reel vektörler kümesi
$\mathbb{R}^{m \times n}$	: $m \times n$ boyutlu reel matrisler kümesi
$A, B, \dots$	: Matrisler
$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$	: Parçalanmış matris
$\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$	: Elemanları a_{ij} olan matris
$x, y, z, \dots$	: Vektörler $x = (x_i) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
I_n	: $n \times n$ boyutlu birim matris
A'	: A matrisinin transpozu
A^{-1}	: A matrisinin tersi
A^-	: A matrisinin genelleştirilmiş tersi
A^+	: A matrisinin Moore-Penrose genelleştirilmiş tersi
$A^\perp$	: A matrisinin ortogonal (dik) tümleyeni
$r(A)$	: A matrisinin rankı
$\mathcal{R}(A)$	: A matrisinin sütun uzayı
$\mathcal{R}(A)^\perp$	: $\mathcal{R}(A)$ sütun uzayının dik tümleyeni
E_A, F_A, P_A	: A matrisinin dik izdüşüm matrisleri
$\in$	: Elemanıdır
$\subseteq$	: Alt kümesidir/Kapsar
$E(\cdot)$	: Beklenen değer operatörü

$Cov(.)$: Kovaryans operatörü

$\Leftrightarrow$: Gerek ve yeter koşul

$\sum$: Toplam

ve ark. : Ve arkadaşları

$\square$: İspat sonu



ÖZET

Anahtar kelimeler: BLUE, BLUP, dönüştürülmüş genel lineer karma model, genel lineer karma model, rank.

Bir genel lineer karma model hem sabit hem rasgele etkileri içeren modeldir. Bazı durumlarda bu modeller üzerinde farklı dönüşümleri ele almak gerekebilir. En basit ve dolaysız dönüşümlerden biri, verilen modelin lineer dönüşümü denilen, modelde eşitliğin her iki tarafının da uygun bir matrisle soldan çarpılmasıyla elde edilen dönüşümdür. Çalışmada, rasgele etkiler üzerinde ve modellerdeki matrislerin rankları ile ilgili herhangi bir kısıtlama olmaksızın iki genel lineer dönüştürülmüş karma model ele alınmıştır. Bu modelleri elde etmek için kullanılan uygun boyutlu matrisler tam sütun ranklı olmadıkları sürece, bu her iki dönüştürülmüş model denk olmak zorunda değildir. Dolayısıyla bu iki dönüştürülmüş model altındaki bilinmeyen parametrelerin ön tahmin/tahmin edicileri aynı olmak zorunda değildir. Bu tahmin ediciler farklı cebirsel ifadeler ve dolayısı ile farklı özelliklere sahip olmalarına rağmen bazı koşullar altında benzer özellikler gösterebilirler. Bu çalışmada, iki lineer dönüştürülmüş genel lineer karma model altında ortak olan bilinmeyen parametrelerin en iyi lineer yansız ön tahmin edicilerinin (best linear unbiased predictors-BLUPs) karşılaştırılması problemine genel bir yaklaşım sunularak, BLUP'ların aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Özellikle, sonuçlar elde edilirken karşılaşılan matris denklemleri, matrislerin Moore-Penrose genelleştirilmiş terslerini içermekte ve oldukça karmaşık bir yapıyla karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle, matrislerin sütun uzayları ve rankları ile ilgili bazı özellikler kullanılarak elde edilen denklemler ve ifadeler daha sade bir forma getirilerek sonuçlar elde edilmiştir. Ele alınan lineer dönüştürülmüş karma modeller altında ortak bilinmeyen parametrelerin ön tahmin/tahmin edicileri ile ilgili bazı özel durumların da sonuçları verilmiştir.

İlk bölümde, genel lineer karma model ve onun dönüştürülmüş modeli tanıtılmış ve bu modeller altında parametre tahmini ile ilgili kısa bir literatür taraması yapılmıştır. Bazı temel kavram ve teoremler ikinci bölümde verilmiştir. Üçüncü bölümde, genel lineer karma model ve dönüştürülmüş genel lineer karma modellerde ön tahmin/tahmin edilebilme, BLUP ve en iyi lineer yansız tahmin edicileri (best linear unbiased estimator-BLUE) ile ilgili matris denklemleri, ön tahmin/tahmin edicilerin analitik ifadeleri ve özellikleri ele alınmıştır. Dördüncü bölümde, ele alınan dönüşüm modelleri altında ortak bilinmeyen parametre vektörlerinin BLUP'larının eşitlikleri incelenmiştir. Sonuçlar bazı matris rank ve sütun uzayı özellikleri kullanılarak elde edilmiştir. Beşinci bölüm ise, sonuç ve önerilerden oluşmaktadır.

RELATIONSHIPS OF BLUP UNDER TRANSFORMED GENERAL LINEAR MIXED MODELS

SUMMARY

Keywords: BLUE, BLUP, general linear mixed model, transformed general linear mixed model, rank.

A general linear mixed model includes both fixed and random effects. In some cases, we need to take various transformations over these models. One of the most simple and direct transformations is to pre-multiply a certain matrix to both sides of given the model, which is called a linear transformation of the model. In this study, two transformed general linear mixed models are considered without making any restrictions regarding random effects and matrix ranks in models. These two transformed models are not have to be equal unless proper dimensional matrices, which are used to obtain these models, are in full column rank. Therefore, predictors/estimators of unknown parameters under these two transformed models do not have to be similar. Although these estimators have different algebraic expressions and different properties, they might show similar features in some circumstances. In this study, the relations among best linear unbiased predictors (BLUPs) of joint unknown parameters have been analyzed by presenting an overall approach to the problem of comparing BLUPs under two transformed general linear mixed models. Matrix equations encountered while the results are obtained particularly include Moore-Penrose generalized inverse of matrices and come up with a very complex structure. Consequently, equations and expressions obtained from column spaces and ranks of matrices have been simplified to reach solutions. The results of some special conditions regarding predictors/estimators of joint unknown parameters under transformed linear mixed models have been given.

In the first chapter, general linear mixed model and its transformed model have been given. Some basic concepts and theorems are mentioned in the second chapter. In the third chapter, predictability/estimability in general linear mixed models and transformed general linear mixed models, matrix equations concerning BLUP and best linear unbiased estimator (BLUE), analytic expressions and properties of predictors/estimators have been reviewed. In the fourth chapter, equality of BLUPs of vectors of joint unknown parameter under transformed general linear mixed models have been examined. The results are obtained by using some matrix ranks and column space properties. The fifth chapter consists of conclusion and recommendations.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Gerçek hayatta karşılaşılan karmaşık problemleri anlamak, çözmek ve anlatmak için bazı varsayımlar altında basitleştirici somut temsillere ihtiyaç vardır ve bu temsillere model denir. Modellerin kullanıldığı başlıca bilimler matematik ve istatistiktir. İstatistiğin konusunu özellikle stokastik (olasılığa dayalı) yani rasgelelik içeren modeller oluşturur. Bu tip modeller için en çok kullanılanı lineer modellerdir.

Genel olarak bir lineer model

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (1.1)$$

ile gösterilir. Bu modelde, y gözlemler vektörü, X bilinenler matrisi, β sabit etkilerin vektörü olarak da adlandırılan bilinmeyen parametreler vektörü ve ε gözlenemeyen rasgele hataların vektörünü göstermektedir. Örneğin, belirli bir tür elmadaki meyve suyu miktarı sadece elmanın ağırlığına bağlı değildir, ama ağırlık ile meyve suyu arasında bir bağıntı vardır. Bu bağıntı bir lineer model ile ifade edilebilir ve bu model aracılığı ile ağırlığa bağlı meyve suyu miktarı tahmin edilebilir. Bu durumda, ε hata terimi X bilinenler matrisinin belli bir değeri için y vektöründeki rasgeleliği ve ayrıca model belirlenmesindeki hatayı da içermektedir.

Bazı durumlarda (1.1) lineer modelindeki sabit etkilerle birlikte rasgele etkilerinde bulunduğu modelleri ele almak gerekebilir. Bu genellikle gözlemlerin birbirleriyle ilişkili olduğu durumlarda ortaya çıkar. Hem sabit hem de rasgele etkilerin bulunduğu ve

$$y = X\beta + Zu + \varepsilon \quad (1.2)$$

olarak ifade edilen bu tip modeller genel lineer karma modeller olarak adlandırılır. (1.2) modeli, (1.1) lineer modeline u rasgele etkilerinin eklenmesiyle elde edilmiştir. Bu modelde, y gözlemler vektörü, X ve Z bilinen matrisler, β bilinmeyen sabit etkiler vektörü, u rasgele etki vektörü ve ε rasgele hata vektörüdür. Bazı çalışmalarda gözlemler aynı birimler üzerinden elde edilebilir. Örneğin, hayvancılıkta ineklerin süt verimi üst soyları ile ilişkilendirilebilir veya bir eğitim araştırmasında bir öğrencinin sınav sonuçlarının birbirleri ile bağlantılı olduğu açıktır (Jiang., 2007). Böyle durumlarda genel lineer karma modellerin kullanımı uygundur.

Genel lineer karma modeller ile ilgili literatür incelendiğinde, bu modellerin tanımlamalarının ilk olarak Eisenhart (1947) tarafından yapıldığı görülmektedir. Ancak genel lineer karma modellerle ilgili hesaplamalar öncelikle insanlara karmaşık gelmiş, daha sonra teknolojinin gelişmesi ile birlikte özellikle 1970'li yıllardan sonra bu modellerle ilgili çalışmalar daha fazla yapılmıştır. Hatta özellikle hayvancılıkta damızlık, süt sığırları yetiştiriciliği ve sonrasında çiftlik hayvanlarının geneli ile yapılan çalışmalarda sıklıkla bu modeller kullanılmıştır.

İstatistiksel sonuç çıkarmak için kullanılan genel lineer karma modellerde matris ve vektörlerin çeşitli dönüşümleri ile karşılaşılabilir. Bu durumda bilinmeyen parametrelerle ilgili tahminleri yapabilmek için uygun bir dönüşüm gerçekleştirilerek model yeniden düzenlenir. En basit ve dolaysız dönüşümlerden biri, genellikle verilen modelin lineer dönüşümü olarak ifade edilen, modelde eşitliğin her iki tarafının da belirli ve uygun olan bir matrisle soldan çarpılmasıyla elde edilen dönüşümdür. Buna uygun olarak (1.2) ile verilen genel lineer karma modelin her iki tarafı keyfi ranklı ve uygun boyutlu bir T matrisi ile soldan çarpılarak

$$Ty = TX\beta + TZu + T\varepsilon \quad (1.3)$$

modeli elde edilir ve bu model (1.2) genel lineer karma modelinin dönüştürülmüş modeli olarak adlandırılır. Dönüştürülmüş lineer modelleri kullanmak uygulamalarda sıklıkla karşılaşılan bir durumdur. Örneğin, çevresel araştırmalarda, gözlenen verilerin niteliğinden dolayı logaritmik dönüşümler kullanılabilir. Dönüşümün

seçimi, genellikle önceki deneyimlere ya da farklı dönüştürülmüş modellerin karşılaştırılmasına dayanarak yapılır. Panel veri modelleri için normallik elde etmede en sık başvurulanan yöntem, yine dönüşümlerdir. Dodd ve arkadaşları (2006) ile Tooze ve arkadaşları (2006) tarafından ele alınan 24 saatlik yiyecek alımı hatırlamalarından gıda alımının doğru bir şekilde ölçülmesi ile ilgili yapılan araştırma, normallik elde etme yöntemlerinin kullanıldığı bir örnek olarak verilebilir. Bağımsız ve özdeş dağılmış hata terimlerinin olduğu varsayımı altında lineer modellerde gözlenebilir rasgele değişkenlerin dönüşümü için Box-Cox yöntemi olarak bilinen yöntem, Box ve Cox (1964) tarafından ortaya atılmış ve geliştirilmiştir. Box-Cox dönüşümünün genel lineer karma model üzerinde genişletilmesi için genel bir yaklaşım Gurka ve arkadaşları (2006, 2007) elde etmişlerdir. Özellikle Gurka ve arkadaşları (2006) çalışmasında, genel lineer karma modeldeki iki rasgele etkinin bağımsız olduğu varsayımında, tek bir dönüşüm parametresinin aynı anda hem rasgele etkiler hem de hata için normalliğin sağlandığı gösterilmiştir. Diğer bir deyişle, Box-Cox yöntemi, genel lineer karma modeldeki rasgele etkilerin normalliğini sağlamanın da basit bir yoludur.

Dönüştürülmüş model, orijinal modele eşit olmak zorunda değildir. Ancak orijinal modelden elde edilen sonuçlarla dönüşüm modellerinden elde edilen sonuçların bazı koşullar altında denk olması beklenebilir. Çünkü orijinal modeldeki y gözlenebilir rasgele vektörünün Ty lineer dönüşümünde, parametre uzayının tahmin edicileri ile ilgili gerekli bilgilerin korunduğu durumlar olabilir. Böylece orijinal model ve onun dönüştürülmüş modeli arasında ilişkilerin belirlenmesi ve incelenmesini araştırmak doğaldır. Bununla ilgili olarak aşağıdaki problemler ele alınabilir:

- a) $y = X\beta + Zu + \varepsilon$ modelinin tüm bilgilerini T lineer dönüşümü ile elde edilen dönüştürülmüş model ne zaman içerir?
- b) $y = X\beta + Zu + \varepsilon$ ve $Ty = TX\beta + TZu + T\varepsilon$ modelleri altında parametrelerin tahminleri ne zaman eşit olur?

Bu tür problemlere literatürde rastlamak mümkündür. Orijinal modeller ve onların lineer dönüşümleri altında tahmin edicilerin arasındaki ilişkilerini belirlemek ile ilgili

problemler, lineer yeterlilik problemleri olarak adlandırılır. Lineer yeterlilik problemleri ile ilgili tanımlamalar ilk olarak Barnard (1963), Baksalary ve Kala (1981) ve Drygas (1983) çalışmalarında yapılmıştır. Konu ile ilgili ayrıca Baksalary ve Kala (1986), Müller (1987), Gross (1988) ve Isotalo ve Puntanen (2006) çalışmaları örnek olarak verilebilir.

Genel lineer karma modellerden istatistiksel sonuç çıkarmanın temel problemlerinden biri, bu modeller altında bilinmeyen parametrelerin tahminlerini elde etmektir. Genel olarak kullanılan tahmin ediciler, yansızlık ve diğer tahmin ediciler arasında en küçük kovaryansa sahip olma özelliklerini birlikte sağlayan en iyi lineer yansız ön tahmin edici (best linear unbiased predictor-BLUP) olarak bilinen tahmin edicilerdir. Bu tip tahmin ediciler matematiksel olarak uygun işlemlere sahiptir. Karma modeller altında BLUP hesaplamaları ilk olarak Henderson'ın karma model denklemleri olarak bilinen denklemler vasıtasıyla yapılmıştır. Bu denklemler Henderson (1950, 1963)'ın çalışmalarında model matrisinin tam ranklı olduğu durumda karma modellerden elde edilen kuadratik formun sabit etki ve sabit kabul edilen rasgele etkiye göre minimumlaştırılmasıyla elde edilmiştir. Henderson'ın elde ettiği sonuçlar Harville (1976, 1979) tarafından farklı bir yaklaşım kullanılarak tekrar ele alınmıştır. Ayrıca bu sonuçlar herhangi bir rank kısıtlaması olmadan rasgele etkilerin ilişkisiz olduğu durumda Haslett ve Puntanen (2010a, b) tarafından genelleştirilmiştir. BLUP'ların karma modeldeki çeşitli özellikleri için ayrıca Robinson (1991), Searle (1997) ve Rao ve arkadaşlarının (2008) çalışmalarına bakılabilir. Tian (2015) çalışmasında ise, genel lineer karma modeller altında bilinmeyen parametreler vektörünün genel lineer kombinasyonu için sonuçların en genel hali elde edilmiştir. Dönüşüm modelleri altında BLUP denklemi ile bu denklemin özellikleri ve orijinal model ile dönüştürülmüş model karşılaştırmaları Tian (2017c) tarafından detaylı incelenmiştir. Dönüştürülmüş modellerle ilgili olarak ayrıca Henderson (1975), Drygas (1985), Baksalary ve Mathew (1986), Oktaba ve arkadaşlarının (1988), Heiligers ve Markiewicz (1996), Liski ve arkadaşlarının (1997), Morell ve arkadaşlarının (1997), Kornacki (1995, 1997, 2007), Gross (1998), Markiewicz (1998), Ip ve arkadaşlarının (2005), Isotalo ve Puntanen (2006a, b), Kala ve Pordzik (2009), Markiewicz ve Puntanen (2009), Tian ve Puntanen (2009), Dong

ve arkadaşlarının (2014), Arendacka ve Puntanen (2015), Haslett ve arkadaşlarının (2015), Shao ve Zhang (2015), Kala ve arkadaşlarının (2017), Kapusuz ve Güler (2019) çalışmaları örnek olarak verilebilir.

Çalışmada rasgele etkiler üzerinde ve modellerdeki matrislerin rankları ile ilgili herhangi bir kısıtlama olmaksızın iki dönüştürülmüş genel lineer karma model ele alınmıştır. Bu dönüştürülmüş modelleri elde etmek için kullanılan uygun boyutlu matrisler tam sütun ranklı olmadıkları sürece, bu her iki dönüştürülmüş model denk olmak zorunda değildir. Dolayısıyla bu iki dönüştürülmüş model altındaki bilinmeyen parametrelerin tahmin edicileri aynı olmak zorunda değildir. Bu tahmin ediciler farklı cebirsel ifadeler ve dolayısı ile farklı özelliklere sahip olmalarına rağmen bazı koşullar altında benzer özellikler gösterebilirler. Bu nedenle, çalışmada iki dönüştürülmüş genel lineer karma model altında ortak olan bilinmeyen parametrelerin BLUP'larının karşılaştırılması problemine genel bir yaklaşım sunularak, BLUP'ların aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Elde edilen ifadeler ve matris denklemleri matrislerin Moore-Penrose genelleştirilmiş terslerini içermekte ve oldukça karmaşık bir yapıyla karşımıza çıkmaktadır. Bu karmaşık denklemleri basitleştirmek ve bazı özelliklerini karakterize etmek zor bir iştir. Bu nedenle, matrislerin sütun uzayları ve rankları ile ilgili bazı özellikler kullanılarak elde edilen denklemler ve ifadeler daha sade bir forma getirilerek sonuçlar elde edilmiştir. Ele alınan dönüştürülmüş genel lineer karma modeller altında ortak bilinmeyen parametrelerin tahmin edicileri ile ilgili bazı özel durumların da sonuçları verilmiştir.

BÖLÜM 2. GENEL BİLGİLER

2.1. Lineer Denklem Sistemleri

Bir lineer denklem sistemi genel olarak

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklinde yazılır. Bu sistemin i . denklemi $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ 'dir. (2.1)'deki a_{ij} ve $b_1, b_2, \dots, b_m$ değerleri bilinen sabitlerdir, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. (2.1)'deki her bir denklemi sağlayan $x_1, x_2, \dots, x_n$ değerlerini bulabilmek için (2.1) lineer denklem sisteminde x_1 yerine s_1 , x_2 yerine s_2 , ..., x_n yerine s_n yazıldığında, sistemdeki tüm denklemler sağlanırsa $s_1, s_2, \dots, s_n$ sayı dizisine sistemin çözümüdür denir. (2.1)'deki lineer sistem çözüme sahip değilse sistem tutarsız, sahipse tutarlıdır denir. Eğer (2.1) denklem sisteminin sağındaki b_i sabitlerinin hepsi sıfır ise bu denklem sistemine homojen denklem sistemi adı verilir, $i = 1, 2, \dots, m$. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ daima homojen denklem sistemi için bir çözümdür. Bu çözüme aşıkâr çözüm denir. $x_1, x_2, \dots, x_n$ değerlerinin hepsi birden sıfır değilse bu çözüme de aşıkâr olmayan çözüm denir (Akın, 2016).

2.2. Lineer Bağımlılık

Tanım 2.2.1. $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ vektörleri için $\sum_{j=1}^n a_j x_j = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$

olacak şekilde tamamı sıfıra eşit olmayan bazı $a_1, a_2, \dots, a_n$ sabitleri bulunabiliyorsa bu vektörlere lineer bağımlıdır denir. Bunun yanı sıra; $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörleri için $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ oluyorsa bu vektörlere lineer bağımsızdır denir (Akın, 2016).

2.3. Satır /Sütun Uzayı ve Rank

Tanım 2.3.1. A matrisi $m \times n$ boyutlu ve $a_1, a_2, \dots, a_n$ sütunlarına sahip olan bir matris olsun. Bileşenleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ olan x vektörü için $Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$ ifadesi A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonunu gösterir. A matrisinin sütunlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilen tüm vektörlerin kümesine A matrisinin sütun uzayı denir ve $\mathcal{R}(A)$ ile gösterilir. $\mathcal{R}(A)$, A matrisinin sütunları tarafından gerilen bir vektör uzayıdır. A matrisinin satır uzayı da $\mathcal{R}(A')$ olarak tanımlanır (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.3.2. $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin satır (sütun) uzayının boyutuna matrisinin satır (sütun) rankı denir (Akın, 2016).

Teorem 2.3.3. $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin satır ve sütun rankı eşittir. Bu değer aynı zamanda A matrisinin rankıdır (Akın, 2016) ve $r(A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.4. A ve B $m \times n$ tipinde iki matris olsun. Eğer B , A 'ya sonlu sayıda elementer satır (sütun) işlemlerinin uygulanması ile elde edilen bir matris ise, B matrisi A matrisine satırca (sütunca) denktir denir (Akın, 2016).

Teorem 2.3.5. Sıfırdan farklı $m \times n$ tipindeki her A matrisi, satır (sütun) indirgenmiş eşelon biçimindeki matrisine satırca (sütunca) denktir (Akın, 2016).

Tanım 2.3.6. Bir A matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimindeki sıfırdan farklı satırlarının sayısına A matrisinin rankını verir (Venit ve Bishop, 1985).

2.4. Matris Tersi

Tanım 2.4.1. Eğer $AB = BA = I_n$ olacak şekilde nxn tipinde bir B matrisi mevcut ise, nxn tipindeki A matrisine terslenebilir (singüler olmayan) matris denir. Böyle bir B matrisine ise A matrisinin tersi denir. Aksi takdirde, A 'ya singülerdir denir (Akın, 2016).

Tanım 2.4.2. mxn tipindeki bir A matrisi için $AGA = A$ denklemini sağlayan nxm boyutlu G matrisine A 'nın genelleştirilmiş tersi denir ve $G = A^-$ ile gösterilir. Her matris en az bir genelleştirilmiş terse sahiptir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.4.3. mxn tipindeki bir A matrisi için aşağıdaki özellikleri sağlayan nxm boyutlu G matrisine A matrisinin Moore-Penrose genelleştirilmiş tersi denir ve $G = A^+$ ile gösterilir:

$$AGA = A$$

$$GAG = G$$

$$AG = (AG)'$$

$$GA = (GA)'$$

Her matrisin bir tek Moore-Penrose genelleştirilmiş tersi vardır. A tersinir ise $G = A^+ = A^{-1}$ 'dir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Teorem 2.4.4. $(A')^+ = (A^+)'$ 'dir (Harville, 1997).

Tanım 2.4.5. A , nxn tipinde bir matris ve $A^2 = A$ ise, A matrisine idempotent matris denir (Kolman ve Hill, 2007).

2.5. Dik İzdüşüm Matrisi

Bir S vektör uzayı, herhangi a ve b reel sayıları için $u, v \in S$ olmak üzere, $au + bv \in S$ olacak şekildeki vektörlerin boştan farklı bir kümesidir. Bir u vektörü eğer $u'v = 0$ eşitliğini sağlıyorsa bu vektöre v vektörünün dikedir denir. Eğer bir vektör S vektör uzayına ait tüm vektörlere dikse bu vektör S vektör uzayına diktir. S_1 ve S_2 vektör uzayları olmak üzere eğer S_1 'deki her vektör S_2 'ye dik (ortogonal) ise o zaman bu iki vektör uzayı birbirine diktir denir. S_1 ve S_2 birbirine dikse toplamları $S_1 \oplus S_2$ ile gösterilir. Eğer $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^n$ sağlanıyorsa S_1 ve S_2 'ye birbirinin dik tümleyeni denir. Bu durumda $S_1 = S_2^\perp$ ve $S_2 = S_1^\perp$ olarak yazılır. Açıkça bir S vektör uzayı için $(S^\perp)^\perp = S$ 'dir.

$n \times 1$ boyutlu vektörleri içeren herhangi S vektör uzayı için $S \oplus S^\perp = \mathbb{R}^n$ 'dir. Bundan dolayı $n \times 1$ boyutlu her v vektörü $v_1 \in S$ ve $v_2 \in S^\perp$ olmak üzere $v = v_1 + v_2$ olarak yazılabilir. Bu iki parça birbirinin dikedir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.5.1. Her $v \in S$ ve $Pv \in S$ için $Pv = v$ ise P matrisine S vektör uzayı için izdüşüm matrisi denir. Bu durumda Pv tüm v vektörleri için S üzerine izdüşümdür. Herhangi bir v vektörü için $PPv = Pv$ olduğundan P matrisi, $P^2 = P$ özelliğini sağlar. Yani her izdüşüm matrisi idempotenttir. Eğer P idempotent ise $I - P$ de idempotenttir. $I - P$, $S^\perp$ vektör uzayının bir izdüşüm matrisi olacak şekilde, S vektör uzayının izdüşüm matrisi P , S vektör uzayı için dik izdüşüm matrisi olarak tanımlanır (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Herhangi bir A matrisi için $P_A = AA^+$ matrisi $\mathcal{R}(A)$ için bir dik izdüşüm matrisidir.

$E_A = A^\perp = I_m - P_A = I_m - AA^+$ ve $F_A = I_n - A^+A$ matrisleride sırasıyla $\mathcal{R}(A)^\perp$ ve $\mathcal{R}(A')^\perp$ üzerine dik izdüşüm matrisleridir (Tian 2010). Ayrıca $E_A = F_{A'}$ ve $E_A = F_{A'}$ olduğu açıktır. Dik izdüşüm matrislerinin ranklarıyla ilgili $r(E_A) = m - r(A)$ ve $r(F_A) = n - r(A)$ eşitlikleri de mevcuttur (Tian 2017c).

2.6. Matris Denklemleri

Teorem 2.6.1. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times t}$ ve $C \in \mathbb{R}^{m \times t}$ bilinen matrisler olmak üzere $AXB = C$ matris denklem sisteminin tutarlı olmasının gerek ve yeter şartı $\mathcal{R}(C) \subseteq \mathcal{R}(A)$ ve $\mathcal{R}(C') \subseteq \mathcal{R}(B')$ olmasıdır (Graybill, 1969).

Teorem 2.6.2. $AXB = C$ matris denklem sistemi tutarlı ise uygun boyutlu keyfî U ve V matrisleri için $X = A^+CB^+ + (I - AA^+)U + V(I - BB^+)$ ile verilen X matrisi bu denklem sisteminin genel çözümüdür (Graybill, 1969).

$AXB = C$ matris denkleminde özel olarak B yerine I birim matrisi alınırsa $AX = C$ lineer denklem sistemi elde edilir ve aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.6.3. $AX = C$ matris denkleminin tutarlı olmasının gerek ve yeter koşulu $r[A \ C] = r(A)$ ya da denk olarak $AA^+C = C$ olmasıdır. Bu durumda keyfî bir U matrisi için $X = A^+C + (I - A^+A)U$, bu denklemin genel çözümüdür (Penrose, 1955).

2.7. Kuadratik Form

Tanım 2.7.1. $n \times 1$ boyutlu bir v vektörü ve $m \times n$ tipindeki bir A matrisi için

$$v'Av = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} v_i v_j$$

skalerine v vektörünün bir kuadratik formu, A matrisine de bu kuadratik formun matrisi denir. $v'Av = v' \left(\frac{1}{2} (A + A') \right) v$ olarak yazılır. Dolayısıyla kuadratik formun değerini değiştirmeksizin simetrik olmayan bir A matrisi, bu matrisin simetrik versiyonu olan $\frac{1}{2} (A + A')$ ile yer değiştirebilir. Bu nedenle, A matrisini simetrik

kabul etmek genelliği bozmaz. $v'Av$ kuadratik formu simetrik bir A matrisi vasıtasıyla aşağıda verildiği gibi karakterize edilir:

- a) $\forall v \neq 0$ için eğer $v'Av > 0$ ise A pozitif tanımlıdır.
- b) $\forall v \neq 0$ için eğer $v'Av < 0$ ise A negatif tanımlıdır.
- c) $\forall v$ için eğer $v'Av \geq 0$ ise A nonnegatif tanımlıdır.
- d) $\forall v$ için $v'Av \geq 0$ ve bazı $v \neq 0$ için $v'Av = 0$ ise A pozitif yarı tanımlıdır (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

Tanım 2.7.2. A ve B simetrik matrisleri için $A \leq_L B$ ifadesinde “ $\leq_L$ ” ile gösterilen kısmi sıralama Löwner kısmi sıralaması olarak tanımlanır (Bhatia, 2007).

Tanım 2.7.3. A ve B nonnegatif tanımlı matrisleri için $B - A$ farkı da nonnegatif tanımlı ise Löwner kısmi sıralamasına göre A , B ’den daha küçüktür denir ve $A \leq_L B$ veya $B \geq_L A$ ile gösterilir (Sengupta ve Jammalamadaka, 2003).

2.8. Matrisler, Sütun Uzayları ve Ranklar İle İlgili Bazı Özellikler

Buraya kadar verilmiş olan genel bilgilere göre çalışmada kullanılan bazı özellikler aşağıda verilmiştir.

Lemma 2.8.1. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ve $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- a) $r \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = r(A) + r(E_A B) = r(B) + r(E_B A).$
- b) $r \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) + r(CF_A) = r(C) + r(CF_C).$
- c) $r \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(A) + r(B) + r(E_B A F_C).$

$$d) \quad r \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) \Leftrightarrow \mathcal{R}(C') \subseteq \mathcal{R}(A') \Leftrightarrow CA^+A = C \Leftrightarrow CF_A = 0 \text{ 'dır}$$

(Marsaglia ve Styan, 1974).

Lemma 2.8.2. Uygun boyutlu A_1, A_2, A_3, B_1 ve B_2 matrisleri için kapsama ilişkisi

$$\mathcal{R}(A_1') \subseteq \mathcal{R}(B_1'), \mathcal{R}(A_2) \subseteq \mathcal{R}(B_1), \mathcal{R}(A_2') \subseteq \mathcal{R}(B_2') \text{ ve } \mathcal{R}(A_3) \subseteq \mathcal{R}(B_2) \text{ ise,}$$

$$r(A_1B_1^+A_2) = r \begin{bmatrix} B_1 & A_2 \\ A_1 & 0 \end{bmatrix} - r(B_1), \quad (2.2)$$

$$r(A_1B_1^+A_2B_2^+A_3) = r \begin{bmatrix} 0 & B_2 & A_3 \\ B_1 & A_2 & 0 \\ A_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(B_1) - r(B_2) \quad (2.3)$$

dır (Tian 2004).

Lemma 2.8.3. A, B, C, M ve N uygun boyutlu matrisler olsun. Bu durumda

- a) $\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(A)$.
- b) $\mathcal{R}(C) \subseteq \mathcal{R}(A) \Leftrightarrow$ Uygun boyutlu herhangi bir B matrisi için C matrisi AB biçimindedir. Eğer B singüler değilse $\mathcal{R}(C) = \mathcal{R}(A)$ 'dır.
- c) $\mathcal{R}(AA') = \mathcal{R}(A)$ ve sonuç olarak $r(AA') = r(A)$ 'dır.
- d) $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ ve $r(A) = r(B)$ ise $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ 'dir.
- e) $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ ise $\mathcal{R}(E_A) \subseteq \mathcal{R}(E_B)$ olur.
- f) $\mathcal{R}(M) \subseteq \mathcal{R}(A)$ ve $\mathcal{R}(N) \subseteq \mathcal{R}(B)$ ifadeleri sağlanıyorsa $\mathcal{R} \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} \subseteq \mathcal{R} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ olur.

g) $AA^-B = B \Leftrightarrow \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$ ve $BA^-A = B \Leftrightarrow \mathcal{R}(B') \subseteq \mathcal{R}(A')$ 'dir
(Sengupta ve Jammalamadaka, 2003; Akdeniz ve Öztürk, 1996).

Sonuç 2.8.4. A uygun boyutlu bir matris ve W pozitif yarı tanımlı matrisi için $\mathcal{R}(AWA') = \mathcal{R}(AW)$ 'dir (Seber, 2008).

2.9. Bazı İstatistiksel İfadeler

Rasgele vektör, elemanları rasgele değişkenler olan vektör ve rasgele matris ise, elemanları rasgele değişkenler olan matristir. Rasgele vektör ve matrislerle ilgili bazı tanımlar ve teoremler aşağıda verilmektedir. Bu tanım ve teoremler ile ilgili detaylı bilgi için Seber ve Lee (2012) ve Seber (2008) kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 2.9.1. $A = (a_{ij})$ $m \times n$ boyutlu rasgele bir matris olmak üzere, A matrisinin beklenen değeri $E(A) = E\left[\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}\right]$ 'dir.

Teorem 2.9.2. A rasgele bir matris, B, C ve D uygun boyutlu bilinen matrisler olmak üzere, $E(BAC + D) = BE(A)C + D$ 'dir.

Sonuç 2.9.3. A ve B uygun boyutlu bilinen matrisler, X ve Y uygun boyutlu rasgele matrisler olmak üzere $E(AX + BY) = AE(X) + BE(Y)$ 'dir.

Tanım 2.9.4. x rasgele vektörünün varyansı, $Var(x) = \sigma_x^2 = E(x - \mu)^2$ 'dir. Burada, $\mu = E(x)$ 'dir.

Tanım 2.9.5. x ve y rasgele vektörleri arasındaki kovaryans,

$$Cov(x, y) = \sigma_{xy} = E\left((x - \mu)(y - \nu)'\right)$$

dir. Burada $\mu = E(x)$, $v = E(y)$ 'dir.

Teorem 2.9.6. A ve B uygun boyutlu bilinen matrisler, X ve Y rasgele matrisler olsun. Bu durumda

$$\text{Cov}(AX, BY) = A\text{Cov}(X, Y)B' \quad (2.4)$$

dir. Ayrıca $D(X) = \text{Cov}(X, X)$ ve $\text{Cov}(Y, X) = \text{Cov}(X, Y)'$ şeklinde ifade edilir.

Matrisler farkının kovaryansı ise,

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y) - \text{Cov}(X, Y) - \text{Cov}(Y, X) \quad (2.5)$$

dir.

BÖLÜM 3. DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ GENEL LİNEER KARMA MODELLERİN BLUP/BLEU DENKLEMLERİ

3.1. Genel Lineer Karma Model ve Bu Modelin Dönüştürülmüş Modelleri

Hem sabit hem rasgele etkilerin bulunduğu modellere genel lineer karma modeller denir ve bu modeller genel olarak

$$\mathcal{M}: y = X\beta + Zu + \varepsilon \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilir. (3.1) modelinde, $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ gözlemler vektörü, $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ve $Z \in \mathbb{R}^{n \times q}$ bilinen matrisler, $\beta \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ bilinmeyen sabit etkiler (parametreler) vektörü, $u \in \mathbb{R}^{q \times 1}$ rasgele etki vektörü ve $\varepsilon \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ gözlenemeyen rasgele hata vektörüdür. Bu model için rasgele vektörlerin beklenen değer ve dağılım matrisi ile ilgili aşağıdaki varsayımlar kabul edilecektir:

$$E \begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 0 \text{ ve } D \begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \text{cov} \left(\begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} := \Sigma. \quad (3.2)$$

Burada $\Sigma_{11} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\Sigma_{12} = \Sigma'_{21} \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $\Sigma_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bilinen matrislerdir ve $\Sigma \in \mathbb{R}^{(q+n) \times (q+n)}$ keyfi ranklı pozitif yarı tanımlı bilinen bir matristir. Böylece $\begin{bmatrix} Z & I_n \end{bmatrix} := \tilde{Z}$ olmak üzere

$$D(y) = \text{cov}(Zu + \varepsilon, Zu + \varepsilon) = \begin{bmatrix} Z & I_n \end{bmatrix} \text{cov} \left(\begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Z & I_n \end{bmatrix}' = \tilde{Z} \Sigma \tilde{Z}' := V \quad (3.3)$$

olarak yazılabilir.

Bazı durumlarda, (3.1) modeli üzerinde farklı dönüşümleri ele almak gerekebilir. En basit ve dolaysız dönüşümlerden biri, verilen modelin lineer dönüşümü denilen, modelde eşitliğin her iki tarafının da uygun bir matrisle soldan çarpılmasıyla elde edilen dönüşümdür. Buna uygun (3.1) modelinin her iki tarafını da keyfî ranklı $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ ve $B \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ matrisleri ile ayrı ayrı soldan çarparak

$$\mathcal{A} : Ay = AX\beta + AZu + A\varepsilon \text{ ve } \mathcal{B} : By = BX\beta + BZu + B\varepsilon \quad (3.4)$$

dönüştürülmüş modelleri elde edilir. (3.4) modelleri ele alındığında gözlem vektörlerinin beklenen değerleri ve dağılım matrisleri

$$E(Ay) = AX\beta, \quad E(By) = BX\beta \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} D(Ay) &= \text{cov}(AZu + A\varepsilon, AZu + A\varepsilon) = [AZ \quad A] \text{cov} \left(\begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix} \right) [AZ \quad A]' \\ &= A[Z \quad I_n] \Sigma (A[Z \quad I_n])' = A\tilde{Z} \Sigma \tilde{Z}'A' = AVA' \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} D(By) &= \text{cov}(BZu + B\varepsilon, BZu + B\varepsilon) = [BZ \quad B] \text{cov} \left(\begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix} \right) [BZ \quad B]' \\ &= B[Z \quad I_n] \Sigma (B[Z \quad I_n])' = B\tilde{Z} \Sigma \tilde{Z}'B' = BVB' \end{aligned} \quad (3.7)$$

olarak elde edilir.

3.2 En İyi Lineer Yansız Ön Tahmin/Tahmin Edici (BLUP/BLUE)

(3.1) modeli altındaki parametre uzaylarının eş zamanlı ön tahmin/tahmin edicilerinin üzerine, genel sonuçlar elde etmek için bilinmeyen parametrelerin ortak bir vektörü olarak

$$m := K\beta + Gu + H\varepsilon \quad (3.8)$$

alınabilir. Burada $K \in \mathbb{R}^{sxp}$, $G \in \mathbb{R}^{sq}$ ve $H \in \mathbb{R}^{sxn}$ keyfi ranklı, bilinen matrislerdir. $J = \begin{bmatrix} G & H \end{bmatrix}$ olmak üzere, (3.2) varsayımlarına göre

$$E(m) = K\beta, \quad (3.9)$$

$$D(m) = \text{cov}(Gu + H\varepsilon, Gu + H\varepsilon) = \begin{bmatrix} G & H \end{bmatrix} \text{cov} \left(\begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} G & H \end{bmatrix}' = J\Sigma J', \quad (3.10)$$

$$\text{cov}(m, y) = \text{cov}(Gu + H\varepsilon, Zu + \varepsilon) = \begin{bmatrix} G & H \end{bmatrix} \text{cov} \left(\begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Z & I_n \end{bmatrix}' = J\Sigma\tilde{Z}' := C \quad (3.11)$$

elde edilir.

Dönüştürülmüş modeller birbirine ve orijinal modele eşit olmak zorunda değildir. Ancak bazı durumlarda modellerden elde edilen sonuçlar, özel koşullar altında denk olabilir. Çünkü gözlenebilir rasgele y vektörünün, Ay ve By lineer dönüşümlerinde, parametre uzayının ön tahmin/tahmin edicileri için gerekli bilgiler korunabilir. (3.1) ve (3.4) modelleri altındaki parametre uzaylarının eş zamanlı ön tahmin/tahmin edicilerinin üzerine genel sonuçlar elde etmek amacıyla, (3.8)'de verilen m alınabilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \text{cov}(m, Ay) &= \text{cov}(Gu + H\varepsilon, AZu + A\varepsilon) = \begin{bmatrix} G & H \end{bmatrix} \Sigma \left(A \begin{bmatrix} Z & I_n \end{bmatrix} \right)' = J\Sigma\tilde{Z}'A' = CA' \\ \text{cov}(m, By) &= \text{cov}(Gu + H\varepsilon, BZu + B\varepsilon) = \begin{bmatrix} G & H \end{bmatrix} \Sigma \left(B \begin{bmatrix} Z & I_n \end{bmatrix} \right)' = J\Sigma\tilde{Z}'B' = CB' \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir.

Belirtmek gerekir ki, (3.8) ifadesi (3.1) ve (3.4)'teki tüm vektör ve matris işlemlerini kapsar. Örneğin; eğer (3.8) modelinde $K = AX$, $G = AZ$ ve $H = A$ olursa gözlem vektörünün dönüşümü $m = AX\beta + AZu + A\varepsilon = Ay$ ve benzer şekilde; $K = BX$, $G = BZ$ ve $H = B$ olursa gözlem vektörün dönüşümü $m = BX\beta + BZu + B\varepsilon = By$ olur.

Teorik ve pratik araştırmalarda, (3.8)'in çeşitli olası tahmin edicileri üzerine sonuçlar mevcuttur. Bir tahmin edicinin yansızlığı ve bu tahmin edicinin en küçük kovaryans matrisine sahip olması, istatistiksel analizde tahmin ediciler için en çok tercih edilen ve değerli ölçütlerdir. Bu koşullara dayanarak ilk olarak Goldberger (1962) tarafından ortaya atılmış olan en iyi lineer yansız n tahmin edici (BLUP) tanımı, (3.8)'deki m vektörü için verilebilir. $L \in \mathbb{R}^{s \times m}$ olmak üzere, $E(Ly - m) = 0$ olacak şekilde bir Ly lineer istatistiği varsa, (3.8) ile verilen m parametreler vektörüne, (3.1) modeli altında n tahmin edilebilirdir denir ya da denk olarak, m vektörü, (3.1) modeli altında n tahmin edilebilirdir ancak ve ancak

$$\mathcal{R}(K') \subseteq \mathcal{R}(X') \quad (3.13)$$

sağlanır (Tian, 2015, Teorem 1). m vektörünün (3.1) modeli altında n tahmin edilebilir olduğu kabulü altında $E(Ly - m) = 0$ koşuluna bağlı olarak Löwner kısmi sıralamasına göre $\text{cov}(Ly - m) = \min$ olacak şekildeki bir vektör olan Ly , m parametreler vektörü için BLUP olarak tanımlanır ve

$$Ly = BLUP_{\mathcal{M}}(m) = BLUP_{\mathcal{M}}(K\beta + Gu + H\varepsilon) \quad (3.14)$$

ile gösterilir (Puntanen ve ark., 2011). Eğer zel olarak $G = 0$ ve $H = 0$ olarak alınırsa (3.10) ifadesi (3.1) modeli altında $K\beta$ vektörünün en iyi lineer yansız tahmin edicisi (BLUE) olarak ifade edilir ve

$$Ly = BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) \quad (3.15)$$

şeklinde gösterilir.

(3.13) ile verilen koşul (3.4) modelleri için

$$\mathcal{R}(K') \subseteq \mathcal{R}((AX)') \text{ ve } \mathcal{R}(K') \subseteq \mathcal{R}((BX)') \quad (3.16)$$

olarak ifade edilir. Yani m parametre vektörü, (3.4) modelleri altında ön tahmin edilebilirdir ancak ve ancak (3.16) sağlanır. Eğer (3.16) sağlanıyorsa, bu durumda (3.13) ifadesi de sağlanır (Tian, 2017c). m vektörünün (3.4) modeli altında ön tahmin edilebilir olduğu kabulü altında $E(L_a Ay - m) = 0$ koşuluna bağlı olarak Löwner kısmi sıralamasına göre $\text{cov}(L_a Ay - m) = \min$ olacak şekilde bir vektör olan $L_a Ay$, m parametreler vektörü için BLUP olarak tanımlanır ve

$$L_a Ay = BLUP_{\mathcal{A}}(m) = BLUP_{\mathcal{A}}(K\beta + Gu + H\varepsilon) \quad (3.17)$$

ile gösterilir (Puntanen ve ark., 2011). Eğer özel olarak $G = 0$ ve $H = 0$ olarak alınırsa (3.10) ifadesi (3.4) modeli altında $K\beta$ için BLUE

$$L_a Ay = BLUE_{\mathcal{A}}(K\beta) \quad (3.18)$$

şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde $\mathcal{B}$ modeli altında da m parametreler vektörü için BLUP/BBLUE ifadeleri yazılabilir.

Öncelikle aşağıdaki teoremin ispatı için kullanacağımız lemmayı verelim.

Lemma 3.2.1. $A \in \mathbb{R}^{pxq}$, $B \in \mathbb{R}^{nxq}$, $C \in \mathbb{R}^{pxm}$ ve $D \in \mathbb{R}^{nxm}$ olmak üzere, $M \in \mathbb{R}^{mxm}$ pozitif yarı tanımlı matrisi ve $LA = B$ matris denklemi tutarlı denklemi için

$$f(L) = (LC + D)M(LC + D)' \quad (3.19)$$

olsun. Bu durumda $L_0 A = B$ denkleminin daima bir L_0 çözümü vardır öyle ki $LA = B$ denkleminin tüm çözümleri için

$$f(L) \succeq_L f(L_0) \quad (3.20)$$

sağlanır. Böylece (3.20) eşitsizliğini sağlayan L_0 matrisi,

$$L_0 \begin{bmatrix} A & CMC'A^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & -DMC'A^\perp \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

tutarlı matris denklemi ile belirlenir.

Bu durumda $K = BA^+C + D$, $T = (A^\perp CMC'A^\perp)^+$ ve olmak üzere, L_0 matrisinin genel ifadesi ve $f(L)$ ile $f(L_0)$ 'a karşılık gelen eşitlikler

$$L_0 = \arg \min_{LA=B} f(L) = \begin{bmatrix} B & -DMC'A^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & CMC'A^\perp \end{bmatrix} + U \begin{bmatrix} A & CMC' \end{bmatrix}^\perp \quad (3.22)$$

$$f(L_0) = \min_{LA=B} f(L) = KMK' - KMC'TCMK' \quad (3.23)$$

$$f(L) = f(L_0) + (LCMC'A^\perp + DMC'A^\perp)T(LCMC'A^\perp + DMC'A^\perp)' \quad (3.24)$$

olarak verilir (Tian 2017c). Burada $U \in \mathbb{R}^{np}$ keyfi matristir.

Aşağıdaki teoremden dönüştürülmüş genel lineer karma model için temel BLUP denklemi ifade edilmiştir.

Teorem 3.2.2. (3.4)'te verilen $\mathcal{A}$ dönüştürülmüş genel lineer karma modeli ele alınsın. (3.8)'de verilen m vektörü $\mathcal{A}$ modeli altında ön tahmin edilebilir olsun, yani (3.16) sağlansın. Bu durumda

$$E(L_a Ay - m) = 0 \text{ ve } D(L_a Ay - m) = \min$$

$$\Leftrightarrow L_a \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & CA'(AX)^\perp \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

(3.25) matris denklemi temel BLUP denklemi olarak bilinir ve bu denklem daima tutarlıdır, yani

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} K & CVA'(AX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} K & CVA'(AX)^\perp \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

her zaman sağlanır. $U_1 \in \mathbb{R}^{s \times m_1}$ keyfi matris olmak üzere, $L_a \in \mathbb{R}^{s \times m_1}$ için m vektörünün BLUP'ına, yani $L_a Ay = BLUP_{\mathcal{A}}(m) = BLUP_{\mathcal{A}}(K\beta + Gu + H\varepsilon)$ ifadesine karşılık gelen genel çözüm aşağıdaki gibidir:

$$L_a Ay = \left(\begin{bmatrix} K & CA'(AX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix}^+ A + U_1 \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix} A \right) y. \quad (3.27)$$

İspat. (3.8)'de verilen m vektörünün $\mathcal{A}$ modeli altında ön tahmin edilebilir olduğu kabulü altında $E(L_a Ay - m) = 0$ koşuluna bağlı olarak Löwner kısmi sıralamasına göre $\text{cov}(L_a Ay - m) = \min$ olacak şekildeki bir vektör olan $L_a Ay$, m parametreler vektörü için BLUP olarak tanımlanır ve (3.17)'deki gibi gösterilir.

$$\begin{aligned} L_a Ay - m &= L_a A(X\beta + Zu + \varepsilon) - (K\beta + Gu + H\varepsilon) \\ &= L_a AX\beta + L_a AZu + L_a A\varepsilon - K\beta - Gu - H\varepsilon \\ &= (L_a AX - K)\beta + (L_a AZ - G)u + (L_a A - H)\varepsilon \end{aligned} \quad (3.28)$$

yazılır. $E(L_a Ay - m) = 0$ olduğundan ve ayrıca (3.9)'dan $(L_a AX - K)\beta = 0$ 'dır.

Buradan tüm β vektörleri için

$$L_a AX - K = 0, \text{ yani } L_a AX = K \quad (3.29)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
& D(L_a Ay - m) \\
&= \text{cov}(L_a Ay - m, L_a Ay - m) \\
&= \text{cov}((L_a AZ - G)u + (L_a A - H)\varepsilon, (L_a AZ - G)u + (L_a A - H)\varepsilon) \\
&= \text{cov}\left(\left([L_a AZ \quad L_a A] - [G \quad H]\right)\begin{pmatrix} u \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \left([L_a AZ \quad L_a A] - [G \quad H]\right)\begin{pmatrix} u \\ \varepsilon \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\left([L_a AZ \quad L_a A] - [G \quad H]\right)\right) \Sigma \left(\left([L_a AZ \quad L_a A] - [G \quad H]\right)\right)' \\
&= \left(\left(L_a A \begin{bmatrix} Z & I_q \end{bmatrix} - [G \quad H]\right)\right) \Sigma \left(\left(L_a A \begin{bmatrix} Z & I_q \end{bmatrix} - [G \quad H]\right)\right) \\
&= (L_a A \tilde{Z} - J) \Sigma (L_a A \tilde{Z} - J)'
\end{aligned} \tag{3.30}$$

bulunur. Lemma 3.2.1'den (3.19)'da L yerine $L_a A$ ve uygun ifadeler gerekli yerlere yazılırsa

$$f(L_a) = (L_a A \tilde{Z} - J) \Sigma (L_a A \tilde{Z} - J)' \tag{3.31}$$

olur ve (3.19) fonksiyon denkleminde göre $(L_a Ay - m)$ dağılım matrisinin minimum değeri bulunur. Buradan

$$L_a \begin{bmatrix} AX & A \tilde{Z} \Sigma \tilde{Z}' A' (AX)^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & J \Sigma \tilde{Z}' A' (AX)^\perp \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

matris denklemi elde edilir. Düzenleme yapılırsa,

$$L_a \begin{bmatrix} AX & A V A' (AX)^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & C A' (AX)^\perp \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

olur.

(3.31) ve (3.25) altında Lemma 3.2.1'den $L_a AX = K$ denkleminin daima bir L_a çözümü vardır öyle ki $LAX = K$ denkleminin tüm çözümleri için $f(L) \geq_L f(L_a)$ Löwner kısmi sıralaması sağlanır. (3.21)'den, (3.25)'teki matris denklemi ifade

edilir. (3.22) eşitliğinden de (3.27) ifadesi elde edilir.

$$\mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} K & CVA'(AX)^\perp \end{bmatrix}'\right) \subseteq \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix}'\right) \quad \text{olmasından dolayı bu}$$

denklem daima tutarlıdır, yani (3.26) her zaman sağlanır ve ispat biter. $\square$

Teorem 3.2.3. (3.4)'te verilen $\mathcal{A}$ dönüştürülmüş genel lineer karma modeli ele alınsın. (3.8)'de verilen m vektörü $\mathcal{A}$ modeli altında ön tahmin edilebilir olsun, yani (3.17) sağlansın. $U_1 \in \mathbb{R}^{sxm_1}$ keyfi matris olmak üzere, m vektörünün $BLUP$ 'ı (3.27)'de verildiği gibi olsun. (3.27) tutarlı olduğu için (3.16) altında L_a , (3.33) denkleminin genel bir çözümüdür. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- a) $r\begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} AX & A\tilde{Z}\Sigma \end{bmatrix}$, $\mathcal{R}\begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix} = \mathcal{R}\begin{bmatrix} AX & A\tilde{Z}\Sigma \end{bmatrix}$
ve $\mathcal{R}(AX) \cap \mathcal{R}(AVA'(AX)^\perp) = \{0\}$.
- b) L_a tektir $\Leftrightarrow r\begin{bmatrix} AX & A\tilde{Z}\Sigma \end{bmatrix} = m_1$.
- c) $L_a A$ tektir $\Leftrightarrow \mathcal{R}\begin{bmatrix} AX & A\tilde{Z}\Sigma \end{bmatrix} = \mathcal{R}(A)$.
- d) $BLUP_{\mathcal{A}}(m)$ 1 olasılıkla tektir $\Leftrightarrow$ (3.4) tutarlıdır.
- e) $BLUP_{\mathcal{A}}(m)$ 'ın dağılım matrisi:

$$\begin{aligned} & D(BLUP_{\mathcal{A}}(m)) \\ &= \left(\begin{bmatrix} K & CA'(AX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix}^+ \right) AVA' \\ & \quad \times \left(\begin{bmatrix} K & CA'(AX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix}^+ \right)', \end{aligned} \quad (3.34)$$

$BLUP_{\mathcal{A}}(m)$ ile m arasındaki kovaryans matrisi:

$$\text{cov}(BLUP_{\mathcal{A}}(m), m) = \begin{bmatrix} K & CA'(AX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix}^+ AC', \quad (3.35)$$

$BLUP_{\mathcal{A}}(m)$ 'nin dağılım matrisi ile m vektörünün dağılım matrisinin farkı:

$$\begin{aligned}
 & D(m) - D(BLUP_{\mathcal{A}}(m)) \\
 &= J \Sigma J' - \left(\begin{bmatrix} K & CA'(AX)^{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^{\perp} \end{bmatrix}^+ \right) AVA' \\
 & \quad \times \left(\begin{bmatrix} K & CA'(AX)^{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^{\perp} \end{bmatrix}^+ \right)', \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

$BLUP_{\mathcal{A}}(m)$ ve m vektörünün farkının dağılım matrisi:

$$\begin{aligned}
 & D(m - BLUP_{\mathcal{A}}(m)) \\
 &= \left(\begin{bmatrix} K & CA'(AX)^{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^{\perp} \end{bmatrix}^+ A\tilde{Z} - J \right) \Sigma \\
 & \quad \times \left(\begin{bmatrix} K & CA'(AX)^{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^{\perp} \end{bmatrix}^+ A\tilde{Z} - J \right)' \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

dır.

f) $BLUP_{\mathcal{A}}(m)$ için

$$BLUP_{\mathcal{A}}(m) = BLUE_{\mathcal{A}}(K\beta) + BLUP_{\mathcal{A}}(Gu) + BLUP_{\mathcal{A}}(H\varepsilon), \tag{3.38}$$

olarak yazılır ve

$$\text{cov}(BLUE_{\mathcal{A}}(K\beta), BLUP_{\mathcal{A}}(Gu + H\varepsilon)) = 0, \tag{3.39}$$

$$D[BLUP_{\mathcal{A}}(m)] = D[BLUE_{\mathcal{A}}(K\beta)] + D[BLUP_{\mathcal{A}}(Gu + H\varepsilon)]. \tag{3.40}$$

sağlanır.

g) Her $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ için Fm , $\mathcal{A}$ altında ön tahmin edilebilirdir ve $BLUP_{\mathcal{A}}(Fm) = FBLUP_{\mathcal{A}}(m)$ daima sağlanır.

İspat. (a)-(d) Puntanen ve arkadaşlarının (2011) çalışmasında gösterilmiştir.

(3.27) ifadesinin dağılım matrisi Teorem 2.7.6'dan (3.34) olarak elde edilir. Aynı teorem kullanılarak (3.11) ve (3.27)'den $BLUP_{\mathcal{A}}(m)$ ile m arasındaki kovaryans matrisi (3.35), (3.10) ve (3.34)'ten (3.36) elde edilir. Bunun yanı sıra $BLUP_{\mathcal{A}}(m)$ ve m vektörünün farkının dağılım matrisi (2.5) özelliğinden (3.37)'deki gibi bulunur. Sonuç olarak (e) şikkındaki ifadeler ispatlanmış olur.

$BLUP_{\mathcal{A}}(m) = BLUE_{\mathcal{A}}(K\beta) + BLUP_{\mathcal{A}}(Gu) + BLUP_{\mathcal{A}}(H\varepsilon)$ eşitliğini elde edebilmek için öncelikle aşağıdaki ifadeler ele alınsın:

$H = G = 0$ ise,

$$BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} K & [0 & 0] \Sigma \tilde{Z}' A' (AX)^{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AVA' (AX)^{\perp} \end{bmatrix}^+ \\ + U_1 \begin{bmatrix} AX & AVA' (AX)^{\perp} \end{bmatrix}^+ \end{pmatrix} y; \quad (3.41)$$

$K = H = 0$ ise,

$$BLUP(Gu) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & [G & 0] \Sigma \tilde{Z}' A' (AX)^{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AVA' (AX)^{\perp} \end{bmatrix}^+ \\ + U_2 \begin{bmatrix} AX & AVA' (AX)^{\perp} \end{bmatrix}^+ \end{pmatrix} y; \quad (3.42)$$

$K = G = 0$ ise,

$$BLUP(H\varepsilon) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & H \end{bmatrix} \Sigma \tilde{Z}' A' (AX)^\perp \\ + U_3 \begin{bmatrix} AX & AVA' (AX)^\perp \end{bmatrix}^+ \end{pmatrix} \begin{bmatrix} AX & AVA' (AX)^\perp \end{bmatrix}^+ y. \quad (3.43)$$

Buradan $U = U_1 + U_2 + U_3$ olacak şekilde (3.27) ifadesindeki keyfi U matrisi ve modelin tutarlı olması koşulundan (3.38) eşitliği açıkça görülür. Benzer şekilde $K=0$ için

$$\begin{aligned} BLUP(Gu + H\varepsilon) &= \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & G & H \end{bmatrix} \Sigma \tilde{Z}' A' (AX)^\perp \\ \end{pmatrix} \begin{bmatrix} AX & AVA' (AX)^\perp \end{bmatrix}^+ y \\ &= BLUP(Gu) + BLUP(H\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.44)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} &\text{cov}(BLUE_A(K\beta), BLUP_A(Gu + H\varepsilon)) \\ &= \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AVA' (AX)^\perp \end{bmatrix}^+ A \tilde{Z} \Sigma \tilde{Z}' A' \left(\begin{bmatrix} 0 & CA' (AX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AVA' (AX)^\perp \end{bmatrix}^+ \right)' \quad (3.45) \\ &= \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AVA' (AX)^\perp \end{bmatrix}^+ AVA' \left(\begin{bmatrix} 0 & CA' (AX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AX & AVA' (AX)^\perp \end{bmatrix}^+ \right)' \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu ifadenin rankını elde edebilmek için (3.45)'deki her bir ifade (2.3) eşitliğine uygun olarak

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} \\ B_1^+ &= \begin{bmatrix} AX & AVA' (AX)^\perp \end{bmatrix}^+ \\ A_2 &= AVA' \\ B_2^+ &= \left(\begin{bmatrix} AX & AVA' (AX)^\perp \end{bmatrix}^+ \right)' \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & CA' (AX)^\perp \end{bmatrix}' \end{aligned}$$

alınırsa ve $W := \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix}$ olarak gösterilirse

$$\begin{aligned}
& r \left(\begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} W^+ AVA' \left(\begin{bmatrix} 0 & CA'(AX)^\perp \end{bmatrix} W^+ \right)' \right) \\
&= r \left(\begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} W^+ AVA' (W^+)' \begin{bmatrix} 0 & CA'(AX)^\perp \end{bmatrix}' \right) \\
&= r \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & W' & \begin{bmatrix} 0 & CA'(AX)^\perp \end{bmatrix}' & \\ W & AVA' & 0 & \\ \hline \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & \end{array} \right] - r(W) - r(W') \\
&= r \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix}' & \begin{bmatrix} 0 \\ (AX)^\perp AC' \end{bmatrix} & \\ \hline \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix} & AVA' & 0 & \\ \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & \end{array} \right] - r(W) - r(W') \\
&= r \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & (AX)' & 0 \\ 0 & 0 & (AX)^\perp AVA' & (AX)^\perp AC' \\ \hline AX & AVA'(AX)^\perp & AVA' & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] - 2r \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix} \\
&= r \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & (AX)' & 0 \\ 0 & -(AX)^\perp AVA'(AX)^\perp & 0 & (AX)^\perp AC' \\ \hline AX & AVA'(AX)^\perp & AVA' & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] - 2r \begin{bmatrix} AX & AVA' \end{bmatrix} \\
&= r \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & (AX)' & 0 \\ 0 & -(AX)^\perp AVA'(AX)^\perp & 0 & (AX)^\perp AC' \\ \hline AX & 0 & AVA' & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] - 2r \begin{bmatrix} AX & AVA' \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (AX)' \\ 0 & -(AX)^\perp AVA'(AX)^\perp & (AX)^\perp AC' & 0 \\ AX & 0 & 0 & AVA' \\ K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2r[AX \quad AVA'] \\
&= r \begin{bmatrix} 0 & -(AX)^\perp AVA'(AX)^\perp & (AX)^\perp AC' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (AX)' \\ AX & 0 & 0 & AVA' \\ K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2r[AX \quad AVA'] \\
&= r \begin{bmatrix} 0 & 0 & (AX)^\perp AC' & -(AX)^\perp AVA'(AX)^\perp \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ AX & AVA' & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2r[AX \quad AVA'] \\
&= r \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(AX)^\perp AVA'(AX)^\perp & (AX)^\perp AC' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ AX & AVA' & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2r[AX \quad AVA'] \\
&= r \begin{bmatrix} -(AX)^\perp AVA'(AX)^\perp & (AX)^\perp AC' \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 & (AX)' \\ AX & AVA' \\ K & 0 \end{bmatrix} - 2r[AX \quad A\tilde{Z}\Sigma\tilde{Z}'A'] \\
&= r[AX \quad AVA'(AX)^\perp] - r(AX) + r \begin{bmatrix} 0 & (AX)' \\ AX & AVA' \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 \\ K(AX)^\perp \end{bmatrix} - 2r[AX \quad AVA'] \\
&= r[AX \quad AVA'] - r(AX) + r \begin{bmatrix} AVA' & AX \\ (AX)' & 0 \end{bmatrix} - 2r[AX \quad AVA'] \\
&= r[AX \quad AVA'] - r(AX) + r(AX) + r((AX)') + r((AX)^\perp AVA'(AX)^\perp) - 2r[AX \quad AVA'] \\
&= r[AX \quad AVA'] + r(AX) + r[AX \quad AVA'(AX)^\perp] - r(AX) - 2r[AX \quad AVA'] \\
&= r[AX \quad AVA'] + r[AX \quad AVA'] - 2r[AX \quad AVA'] \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.39) sağlanmış olur. (3.38) ve (3.39) ifadelerinden (3.40) elde edilir. (3.27)'den (g) şikkının ispatı kolayca görülür. Böylece Teorem 3.2.3'ün ispatı tamamlanır. $\square$

Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.2.3'te elde edilen sonuçlar, benzer olarak lineer rasgele etki modelleri için Tian (2017c, Lemma 1)'da verilmiştir.

$\mathcal{A}$ modeli yerine $\mathcal{B}$ alındığında Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.2.3'te elde edilen tüm denklemler ve eşitlikler aşağıda ifade edilmiştir.

(3.4)'te verilen $\mathcal{B}$ lineer dönüştürülmüş genel lineer karma modelinde (3.8)'de verilen m vektörü ön tahmin edilebilir olsun, yani (3.17) sağlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} E(L_b B y - m) &= 0 \text{ ve } D(L_b y - m) = \min \\ \Leftrightarrow L_b \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K & CB'(BX)^\perp \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.46)$$

dır.

Bu denklem daima tutarlıdır, yani

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K & CVB'(BX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} K & CVB'(BX)^\perp \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.47)$$

her zaman sağlanır. $U_2 \in \mathbb{R}^{sxm_2}$ keyfi matris olmak üzere, $L_b \in \mathbb{R}^{sxm_2}$ için m vektörünün BLUP'na, yani $L_b B y = BLUP_{\mathcal{B}}(m) = BLUP_{\mathcal{B}}(K\beta + Gu + H\varepsilon)$ ifadesine karşılık gelen genel çözümü aşağıdaki gibidir:

$$L_b B y = \left(\begin{bmatrix} K & CB'(BX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}^+ B + U_2 \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix} B \right) y. \quad (3.48)$$

Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- a) $r\begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} BX & B\tilde{Z}\Sigma \end{bmatrix}$, $\mathcal{R}\begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix} = \mathcal{R}\begin{bmatrix} BX & B\tilde{Z}\Sigma \end{bmatrix}$
ve $\mathcal{R}(BX) \cap \mathcal{R}(BVB'(BX)^\perp) = \{0\}$.
- b) L_b tektir $\Leftrightarrow r\begin{bmatrix} BX & B\tilde{Z}\Sigma \end{bmatrix} = m_2$.
- c) $L_b B$ tektir $\Leftrightarrow \mathcal{R}\begin{bmatrix} BX & B\tilde{Z}\Sigma \end{bmatrix} = \mathcal{R}(B)$.
- d) $BLUP_{\mathcal{B}}(m)$ 1 olasılıkla tektir $\Leftrightarrow$ (3.4) tutarlıdır.
- e) $BLUP_{\mathcal{B}}(m)$ ile ilgili dağılım matrisleri:

$$\begin{aligned} & D(BLUP_{\mathcal{B}}(m)) \\ &= \text{cov}\left(\begin{bmatrix} K & CB'(BX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}^+, \begin{bmatrix} K & CB'(BX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}^+\right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} K & CB'(BX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}^+\right) BVB' \\ &\quad \times \left(\begin{bmatrix} K & CB'(BX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}^+\right)', \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\text{cov}(BLUP_{\mathcal{B}}(m), m) = \begin{bmatrix} K & CB'(BX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}^+ BC', \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} & D(m) - D(BLUP_{\mathcal{B}}(m)) \\ &= J\Sigma J' - \left(\begin{bmatrix} K & CB'(BX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}^+\right) BVB' \\ &\quad \times \left(\begin{bmatrix} K & CB'(BX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}^+\right)', \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} D(m - BLUP_{\mathcal{B}}(m)) &= \left(\begin{bmatrix} K & CB'(BX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}^+ B\tilde{Z} - J\right) \Sigma \\ &\quad \times \left(\begin{bmatrix} K & CB'(BX)^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}^+ B\tilde{Z} - J\right)' \end{aligned} \quad (3.52)$$

olarak elde edilir.

f) $BLUP_{\mathcal{B}}(m)$ için

$$BLUP_{\mathcal{B}}(m) = BLUE_{\mathcal{B}}(K\beta) + BLUP_{\mathcal{B}}(Gu) + BLUP_{\mathcal{B}}(H\varepsilon), \quad (3.53)$$

$$\text{cov}(BLUE_{\mathcal{B}}(K\beta), BLUP_{\mathcal{B}}(Gu + H\varepsilon)) = 0, \quad (3.54)$$

$$D[BLUP_{\mathcal{B}}(m)] = D[BLUE_{\mathcal{B}}(K\beta)] + D[BLUP_{\mathcal{B}}(Gu + H\varepsilon)]. \quad (3.55)$$

sağlanır.

g) Her $F \in \mathbb{R}^{t \times s}$ için Fm , $\mathcal{B}$ altında ön tahmin edilebilirdir ve o halde $BLUP_{\mathcal{B}}(Fm) = FBLUP_{\mathcal{B}}(m)$ daima sağlanır.

Özel olarak $A = I_n$ alınırsa Teorem 3.2.2 ve 3.2.3'ten aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.2.4. m parametre vektörünün (3.1) modeli altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$Ly = BLUP_{\mathcal{M}}(m) \Leftrightarrow L[X : VX^{\perp}] = [K : CX^{\perp}] \quad (3.56)$$

dir. Buradan $U_1 \in \mathbb{R}^{s \times m_1}$ keyfi bir matris olmak üzere,

$$BLUP_{\mathcal{M}}(m) = Ly = \left([K : CX^{\perp}] [X : VX^{\perp}]^+ + U_1 [X : VA^{\perp}]^{\perp} \right) y \quad (3.57)$$

olarak yazılır.

Sonuç 3.2.5 m parametre vektörünün (3.1) modeli altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. $U_1 \in \mathbb{R}^{s \times m_1}$ keyfi bir matris olmak üzere, (3.57)'de verilen $BLUP_{\mathcal{M}}(m)$ için aşağıdaki sonuçlar sağlanır.

- a) $r[X \ VX^\perp] = r[X \ V]$, $\mathcal{R}[X \ VX^\perp] = \mathcal{R}[X \ V]$ ve $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{R}(VX^\perp) = \{0\}$.
- b) L tektir $\Leftrightarrow r[X \ V] = m_1$
- c) $BLUP_{\mathcal{M}}(m)$ 1 olasılıkla tektir $\Leftrightarrow$ (3.4) tutarlıdır.
- d) $BLUP_{\mathcal{M}}(m)$ ile ilgili dağılım matrisleri:

$$D(BLUP_{\mathcal{M}}(m)) = \text{cov}\left([K \ CX^\perp][X \ VX^\perp]^+, [K \ CX^\perp][X \ VX^\perp]^+\right) \quad (3.58)$$

$$= \left([K \ CX^\perp][X \ VX^\perp]^+\right) V \left([K \ CX^\perp][X \ VX^\perp]^+\right)',$$

$$\text{cov}(BLUP_{\mathcal{M}}(m), m) = [K \ CX^\perp][X \ VX^\perp]^+ C', \quad (3.59)$$

$$D(m) - D(BLUP_{\mathcal{A}}(m))$$

$$= J \Sigma J' - \left([K \ CX^\perp][X \ VX^\perp]^+\right) V \left([K \ CX^\perp][X \ VX^\perp]^+\right)', \quad (3.60)$$

$$D(m - BLUP_{\mathcal{M}}(m))$$

$$= \left([K \ CX^\perp][X \ VX^\perp]^+ \tilde{Z} - J\right) \Sigma \left([K \ CX^\perp][X \ VX^\perp]^+ \tilde{Z} - J\right)' \quad (3.61)$$

dır.

- e) $BLUP_{\mathcal{M}}(m)$ için

$$BLUP_{\mathcal{M}}(m) = BLUP_{\mathcal{M}}(K\beta) + BLUP_{\mathcal{M}}(Gu) + BLUP_{\mathcal{M}}(H\varepsilon), \quad (3.62)$$

$$\text{cov}(BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta), BLUP_{\mathcal{M}}(Gu + H\varepsilon)) = 0, \quad (3.63)$$

$$D[BLUP_{\mathcal{M}}(m)] = D[BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)] + D[BLUP_{\mathcal{M}}(Gu + H\varepsilon)]. \quad (3.64)$$

sağlanır.

f) Her $F \in \mathbb{R}^{n \times s}$ için Fm , $\mathcal{M}$ altında ön tahmin edilebilirdir ve $BLUP_{\mathcal{M}}(Fm) = FBLUP_{\mathcal{M}}(m)$ daima sağlanır.

Sonuç 3.2.4 ve Sonuç 3.2.5 benzer olarak lineer rasgele etki modelleri için Tian (2015, Teorem 1)'da verilmiştir.



BÖLÜM 4. DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ GENEL LİNEER KARMA MODELLER ALTINDA BLUP İLİŞKİLERİ

Bu bölümde (3.4)'teki dönüştürülmüş genel lineer karma modelleri altında ortak bilinmeyen parametrelerin BLUP'ları arasındaki ilişkiler ile ilgili teoremler ve sonuçlar verilecektir. Ele aldığımız konu çerçevesinde (3.1) modelinin tutarlı, yani 1 olasılıkla $y \in C[X \ V]$ olduğu kabul edilmektedir (Rao, 1973). Bu durumda (3.4) modelleri de tutarlıdır (Tian, 2017c).

Bu bölümdeki ana teoremlerin ispatları için kullanılacak olan lemma aşağıda verilmiştir.

Lemma 4.1. $A_1 \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{m \times n_2}$ ve $B_2 \in \mathbb{R}^{p \times n_2}$ olarak verilmiş olsun. Bu durumda,

a) $XA_1 = B_1$ ve $XA_2 = B_2$ matris denklemleri ortak bir çözüme sahiptir ancak ve

$$\text{ancak } \mathcal{R} \begin{pmatrix} B_1' \\ B_2' \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{R} \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \end{pmatrix} \text{ ya da denk olarak } r \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \text{ 'dir.}$$

b) $XA_2 = B_2$ matris denkleminin herhangi bir çözümü, $XA_1 = B_1$ matris denkleminin

$$\text{de bir çözümüdür ancak ve ancak } r \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix} = r(A_2) \text{ 'dir (Tian, 2009).}$$

Teorem 4.2. m parametreler vektörünün (3.4) modelleri altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin ve $BLUP_{\mathcal{A}}(m)$ ve $BLUP_{\mathcal{B}}(m)$ eşitlikleri sırasıyla (3.27) ve (3.48)'de verildiği gibi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $L_a \in \{L_b\}$.

b)
$$r \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp & BX & BVB'(BX)^\perp \\ K & CA'(AX)^\perp & K & CB'(BX)^\perp \end{bmatrix}$$

$$= r \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp & BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}.$$

c)
$$r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \\ K & CA' & K & CB' \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \end{bmatrix}$$

d)
$$\mathcal{R} \left(\begin{bmatrix} K & CA' & K & CB' \end{bmatrix}' \right) \subseteq \mathcal{R} \left(\begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \end{bmatrix}' \right).$$

İspat. Lemma 4.1'in (a) şikkından, (3.27) ve (3.48)'de verilen denklemlere göre (a) ile (b) arasındaki denklik görülür.

(b) de verilen

$$r \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp & BX & BVB'(BX)^\perp \\ K & CA'(AX)^\perp & K & CB'(BX)^\perp \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp & BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}$$

eşitliği ele alınırsa Lemma 2.8.1'in (b) şikkından:

$$\begin{aligned}
& r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \\ K & CA' & K & CB' \end{bmatrix} - r(AX) - r(BX) \\
& = r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \end{bmatrix} - r(AX) - r(BX)
\end{aligned}$$

$$r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \\ K & CA' & K & CB' \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \end{bmatrix}$$

olarak yazılır ve (b) ile (c) arasındaki denklik elde edilir.

Lemma 2.8.1'in (d) şikkından

$$\mathcal{R} \left(\begin{bmatrix} K & C & K & CA' \end{bmatrix}' \right) \subseteq \mathcal{R} \left(\begin{bmatrix} X & V & AX & AVA' \\ 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (AX)' \end{bmatrix}' \right)$$

olur. (c) ile (d) arasındaki denklik görülür ve ispat biter. $\square$

Eğer özel olarak, Teorem 4.2'de, $G=0$ ve $H=0$ olarak ele alınırsa, bu durumda $BLUE_{\mathcal{A}}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{B}}(K\beta)$ ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3. $BLUE_{\mathcal{A}}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{B}}(K\beta)$ için $K\beta$ parametreler vektörünün (3.4) modelleri altında tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

$$a) L_{a,K\beta} \in \{L_{b,K\beta}\}.$$

$$b) r \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp & BX & BVB'(BX)^\perp \\ K & 0 & K & 0 \end{bmatrix} \\ = r \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp & BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}.$$

$$c) r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \\ K & 0 & K & 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \end{bmatrix}.$$

$$d) \mathcal{R} \left(\begin{bmatrix} K & 0 & K & 0 \end{bmatrix}' \right) \subseteq \mathcal{R} \left(\begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \end{bmatrix}' \right).$$

Burada $G=0$ ve $H=0$ ise $J=0$ olur ve dolayısıyla $J\Sigma\tilde{Z}'=C=0$ olduğundan yukarıdaki sonuç kolayca görülür.

Özel olarak, Teorem 4.2'de, $K=0$ olarak ele alınırsa, bu durumda $BLUP_{\mathcal{A}}(Gu+H\varepsilon)$ ve $BLUP_{\mathcal{B}}(Gu+H\varepsilon)$ ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4. $BLUP_{\mathcal{A}}(Gu+H\varepsilon)$ ve $BLUP_{\mathcal{B}}(Gu+H\varepsilon)$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

$$a) L_{a,Gu+H\varepsilon} \in \{L_{b,Gu+H\varepsilon}\}.$$

$$b) r \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp & BX & BVB'(BX)^\perp \\ 0 & CA'(AX)^\perp & 0 & CB'(BX)^\perp \end{bmatrix} \\ = r \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp & BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \\ 0 & CA' & 0 & CB' \end{bmatrix} &= r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \end{bmatrix}. \\
\text{d) } \mathcal{R}([0 \quad CA' \quad 0 \quad CB']) &\subseteq \mathcal{R} \left(\begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \end{bmatrix}' \right).
\end{aligned}$$

Teorem 4.5. m parametreler vektörünün (3.4) modelleri altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. $BLUP_{\mathcal{A}}(m)$ ve $BLUP_{\mathcal{B}}(m)$ eşitlikleri sırasıyla (3.27) ve (3.48)'de verildiği gibi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

$$\text{a) } \{L_a\} \subseteq \{L_b\}.$$

$$\text{b) } r \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp & BX & BVB'(BX)^\perp \\ K & CA'(AX)^\perp & K & CB'(BX)^\perp \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ K & CA' & K & CB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} BVB' & BX \\ (BX)' & 0 \end{bmatrix} + r(AX).$$

$$\text{d) } r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ K & CA' & K & CB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} BX & BVB' \end{bmatrix} + r(AX) + r(BX).$$

İspat. Lemma 4.1'in (b) şikkından, (3.27) ve (3.48)'de verilen denklemlere göre (a) ile (b) arasındaki denklik görülür.

(b)'de verilen

$$r \begin{bmatrix} AV & AVA'(AX)^\perp & BX & BVB'(BX)^\perp \\ K & CA'(AX)^\perp & K & CB'(BX)^\perp \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}$$

eşitlik ele alınırsa Lemma 2.8.1'in (b) şikkından:

$$r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ K & CA' & K & CB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \end{bmatrix} - r(AX) - r(BX) = r \begin{bmatrix} BX & BVB' \\ 0 & (BX)' \end{bmatrix} - r(BX)$$

$$r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ K & CA' & K & CB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} BVB' & BX \\ (BX)' & 0 \end{bmatrix} + r(AX)$$

olarak yazılır ve (b) ile (c) arasındaki denklik elde edilir.

(c) ve (d) arasındaki denklik için Lemma 2.8.1'in (c) şikkından ve Sonuç 2.8.4'ten, (c) deki eşitliğin sağ tarafı:

$$\begin{aligned} r \begin{bmatrix} BVB' & BX \\ (BX)' & 0 \end{bmatrix} &= r(BX) + r((BX)') + r((BX)^\perp BVB'((BX)')^\perp) \\ &= 2r(BX) + r((BX)^\perp BVB') \\ &= 2r(BX) + r[BX \quad BVB'] - r(BX) \\ &= r(BX) + r[BX \quad BVB'] \end{aligned}$$

olarak yazılır. Böylece

$$r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ K & CA' & K & CB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \end{bmatrix} = r[BX \quad BVB'] + r(AX) + r(BX)$$

olduğu görülür ve ispat biter. $\square$

Eğer özel olarak, Teorem 4.5'te, $G=0$ ve $H=0$ olarak ele alınırsa, bu durumda $BLUE_{\mathcal{A}}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{B}}(K\beta)$ ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.6. $BLUE_{\mathcal{A}}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{B}}(K\beta)$ için $K\beta$ parametreler vektörünün (3.4) modelleri altında tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $\{L_{a,K\beta}\} \subseteq \{L_{b,K\beta}\}$

b) $r \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^{\perp} & BX & BVB'(BX)^{\perp} \\ K & 0 & K & 0 \end{bmatrix} = r[BX \quad BVB'(BX)^{\perp}]$

c) $r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ K & 0 & K & 0 \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} BVB' & BX \\ (BX)' & 0 \end{bmatrix} + r(AX)$

d) $r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ K & 0 & K & 0 \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \end{bmatrix} = r[BX \quad BVB'] + r(AX) + r(BX)$

Özel olarak, Teorem 4.2'de, $K=0$ olarak ele alınırsa, bu durumda $BLUP_{\mathcal{A}}(Gu + H\varepsilon)$ ve $BLUP_{\mathcal{B}}(Gu + H\varepsilon)$ ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.7. $BLUP_{\mathcal{A}}(Gu + H\varepsilon)$ ve $BLUP_{\mathcal{B}}(Gu + H\varepsilon)$ aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $\{L_{a,Gu+H\varepsilon}\} \subseteq \{L_{b,Gu+H\varepsilon}\}.$

b) $r \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp & BX & BVB'(BX)^\perp \\ 0 & CA'(AX)^\perp & 0 & CB'(BX)^\perp \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix}$

c) $r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ 0 & CA' & 0 & CB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} BVB' & BX \\ (BX)' & 0 \end{bmatrix} + r(AX)$

d) $r \begin{bmatrix} AX & AVA' & BX & BVB' \\ 0 & CA' & 0 & CB' \\ 0 & (AX)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (BX)' \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} BX & BVB' \end{bmatrix} + r(AX) + r(BX)$

Teorem 4.5'te ele alınan $\{L_a\} \subseteq \{L_b\}$ ifadesine benzer şekilde $\{L_b\} \subseteq \{L_a\}$ durumu da ele alındığında sonuç olarak $\{L_a\} = \{L_b\}$ elde edilir. Buradan $\{L_a\} = \{L_b\}$ eşitliğine denk durumlar için aşağıdaki sonuç verilmiştir.

Sonuç 4.8. L_a ve L_b verildiği gibi olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar denktir.

a) $\{L_a\} = \{L_b\}.$

b) $r \begin{bmatrix} BX & BVB'(BX)^\perp \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix}.$

c) $r \begin{bmatrix} BX & BVB' \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} AX & AVA' \end{bmatrix}.$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $B = I_n$ olmak üzere Teorem 4.2'ye göre aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.9. m parametreler vektörünün sırasıyla (3.4) ve (3.1) modelleri altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. $BLUP_{\mathcal{A}}(m)$ ve $BLUP_{\mathcal{M}}(m)$ sırasıyla (3.27) ve (3.57)'de verildiği gibi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $L_a \in \{L\}$.

b) $r \begin{bmatrix} X & VX^\perp & AX & AVA'(AX)^\perp \\ K & CX^\perp & K & CA'(AX)^\perp \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} X & VX^\perp & AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix}.$

c) $r \begin{bmatrix} X & V & AX & AVA' \\ 0 & X' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (AX)' \\ K & C & K & CA' \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} X & V & AX & AVA' \\ 0 & X' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (AX)' \end{bmatrix}.$

d) $\mathcal{R}([K \ C \ K \ CA']') \subseteq \mathcal{R} \left(\begin{bmatrix} X & V & AX & AVA' \\ 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (AX)' \end{bmatrix}' \right).$

$A \in \mathbb{R}^{m_h \times m}$ ve $B = I_n$ olmak üzere Teorem 4.5'e göre aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.10. m parametreler vektörünün sırasıyla (3.4) ve (3.1) modelleri altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. $BLUP_{\mathcal{A}}(m)$ ve $BLUP_{\mathcal{M}}(m)$ sırasıyla (3.27) ve (3.57)'de verildiği gibi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $\{L_a\} \subseteq \{L\}$.

b) $r \begin{bmatrix} X & VX^\perp & AX & AVA'(AX)^\perp \\ K & CX^\perp & K & CA'(AX)^\perp \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} AX & AVA'(AX)^\perp \end{bmatrix}.$

c) $r \begin{bmatrix} AVA' & AX & X & V \\ (AX)' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X' \\ CA' & K & K & C \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} AVA' & AX \\ (AX)' & 0 \end{bmatrix} + r(X).$

$$\text{d) } r \begin{bmatrix} AVA' & AX & X & V \\ 0 & X' & 0 & 0 \\ (AX)' & 0 & 0 & 0 \\ CA' & K & K & C \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} AX & AVA' \end{bmatrix} + r(AX) + r(X).$$

BÖLÜM 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada hem sabit hem rasgele etkileri içeren $\mathcal{M}: y = X\beta + Zu + \varepsilon$ genel lineer karma modeli ile bu modelin soldan sırasıyla uygun boyutlu A ve B matrisleri ile çarpılmasıyla elde edilen $\mathcal{A}: Ay = AX\beta + AZu + A\varepsilon$ ve $\mathcal{B}: By = BX\beta + BZu + B\varepsilon$ dönüştürülmüş genel lineer karma modelleri ele alınmıştır. Ele alınan modeller altında rasgele etkilerin ön tahmin ve tahmin edicileri ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Özellikle bu iki dönüştürülmüş genel lineer karma model altında $m = K\beta + Gu + H\varepsilon$ vektörünün BLUP ve BLUE eşitlikleri ile ilgili karşılaştırmalar yapılmıştır.

Bölüm 3'te ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilen m vektörünün $\mathcal{A}$ modeli altında temel BLUP denklemi verilmiştir. Ayrıca bu denklem ile ilgili özellikler detaylı ifade edilmiştir. Özel olarak $A = I_n$ alındığında elde edilen $\mathcal{M}$ modeline karşılık gelen benzer sonuçlar da verilmiştir.

Bölüm 4'te dönüştürülmüş modeller altında m vektörünün BLUP'ları ile ilgili ilişkiler incelenirken Tian (2009, Lemma 5)'da verilen ve bu çalışmada Lemma 4.1 olarak ifade edilen lemma dikkate alınmıştır. Buna göre;

- a) İki matris denkleminin ortak bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şartlar,
- b) Matris denklemlerinden birinin herhangi bir çözümünün diğer denkleminde bir çözümü olmasının gerek ve yeter şartları

ana sonuçlar olarak verilerek bununla ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. m vektörü için bazı özel durumlar ile ilgili sonuçlar da gösterilmiştir. Ayrıca $B = I_n$

alınarak dönüştürülmüş lineer karma model ve $\mathcal{M}$ modeli için sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışmada ele alınan konu da $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ modelleri altında incelendiği gibi aynı zamanda $\mathcal{M}$ modelinde model matrisinin $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ ifadesi dikkate alınarak elde edilen farklı modeller altında BLUP ilişkileri incelenebilir. Ayrıca A ve B matrisleri için $A = [A_1 \ A_2]$ ve $B = [B_1 \ B_2]$ alınarak BLUP ve BLUE tahminleriyle ilgili özel sonuçlar elde edilebilir.



KAYNAKLAR

- Arendacká, B., Puntanen, S. 2015. Further remarks on the connection between fixed linear model and mixed linear model. Stat Pap., 56: 1235–1247.
- Akbaş, Y. 1995. Seleksiyon indeksi ve farklı BLUP uygulamalarının karşılaştırılması. II.Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu, 393-406.
- Akbaş, A. 2013. Çiftlik Hayvanları Davranışlarının Genetik Parametreleri. Erciyes Üniversitesi Veteriner Fakültesi Dergisi, 10 (3).
- Akdeniz, F., Öztürk, F. 1996. Lineer Modeller, Ankara,.
- Baksalary, J. K., Kala, R., 1981. Linear transformation preserving best linear unbiased estimators in a general Gauss-Markoff model. Ann Stat 9: 913-916.
- Baksalary, J. K., Kala, R., 1986. Linear sufficiency with respect to a given vector of parametric functions. Journal of statistical planning and inference, 14 (2-3), 331-338.
- Baksalary, J. K., Mathew, T. 1986 Linear sufficiency and completeness in an incorrectly specified general Gauss-Markov model. Sankhya Ser A 48:169–180.
- Barnard, G. A. 1963. Contribution to the discussion of Prof. Bartlett's paper. J. R. Statist., Soc. B, 25: 294
- Bhatia, R., 2007. Positive definite matrices, Princeton series in applied mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Box, G. E., Cox, D. R. 1964. An analysis of transformations. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B 26:211–252.
- Dodd, K. W., Guenther, P. M., Freedman, L. S., Subar, A. F., Kipnis, V., Midthune, D., Tooze, J. A., Krebs-Smith, S. M. 2006. Statistical methods for estimating usual intake of nutrients and foods: a review of the theory. J. Amer. Dietetic Assoc. 106:1640–1650.
- Dong, B., Guo, W., Tian, Y. 2014. On relations between BLUEs under two transformed linear models. J Multivar Anal 131:279-292.

- Drygas, H. 1983. Sufficiency and completeness in the general Gauss-Markov model. *Sankhya Ser A* 45:88-98.
- Drygas, H. 1985. Linear sufficiency and some applications in multilinear estimation. *J Multivar Anal* 16: 71– 84.
- Eisenhart, C. 1947. The assumptions underlying the analysis of variance. *Biometrics*, 3 (1), 1-21.
- Goldberger, A. S. 1962. Best linear unbiased predictors in the generalized linear regression models. *J Am Stat Assoc* 57:369-375.
- Graybill, F. A. 1969. Introduction to matrices with applications in statistics, Wadworth Publishing Company inc., California.
- Groß, J. 1998. A note on the concepts of linear and quadratic sufficiency. *J Stat Plann Inference*, 70:69–76.
- Gurka, M. J., Edwards, L. J., Muller, K. E., Kupper, L. L. 2006. Extending the Box-Cox transformation to the linear mixed model. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. A*, 169:273–288.
- Gurka, M. J., Edwards, L. J., Nylander-French, L. 2007. Testing transformations for the linear mixed model. *Computational statistics & data analysis*, 51(9), 4297-4307.
- Gurka, M. J., Edwards, L. J. 2011. Estimating variance components and random effects using the Box-Cox transformation in the linear mixed model. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 40:3, 515-531.
- Harville, D. A. 1976. Extension of the Gauss Markov theorem to include the estimation of random effects. *Ann. Statist.* 4, 384-395.
- Harville, D. A. 1979. Some useful representations for constrained mixed-model estimation. *Journal of the American Statistical Association*, 74 (365), 200-206.
- Harville, D. A. 1997. *Matrix Algebra From a Statisticians Perspective*. Springer-Verlag, New York.
- Haslett, S. J., Puntanen, S., Arendacká, B. 2015. The link between the mixed and fixed linear models revisited. *Stat Pap* 56: 849–861.
- Haslett S. J., Puntanen, S. 2010a. Equality of BLUEs or BLUPs under two linear models using stochastic restrictions. *Stat. Papers*, 51 (2): 465-475.
- Haslett S. J., Puntanen, S. 2010b. A note on the equality of the BLUPs for new observations under two linear models. *Acta Comment Univ Tartu Math.*, 14: 27-33

- Haslett, S. J., Puntanen, S. 2011. On the equality of the BLUPs under two linear mixed models. *Metrika*, 74, 381–395.
- Heiligers, B., Markiewicz, A. 1996. Linear sufficiency and admissibility in restricted linear models. *Statistics probability letters*, 30 (2), 105-111.
- Henderson, C. R. 1950. Estimation of genetic parameters (abstract). *Ann. Math. Statist*, 21, 309-310.
- Henderson, C. R. 1963. Selection index and expected genetic advance, in: *Statistical Genetics and Plant Breeding* Nat. Acad. Sci., Nat. Res. Council, Publication 982, Washington, DC., pp. 141 163.
- Henderson, C. R. 1975. Best linear unbiased estimation and prediction under a selection model. *Biometrics*, 31:423–447.
- Ip, W. C., Wong, H., Liu, J. S. 2005. Sufficient and admissible estimators in general multivariate linear model. *J Stat Plann Inference*, 135:371–383.
- Isotalo, J., Puntanen, S. 2006a. Linear prediction sufficiency for new observations in the general Gauss Markov model. *Commun Stat Theory Methods*, 35 (6):1011–1023.
- Isotalo, J., Puntanen, S. 2006b. Linear sufficiency and completeness in the partitioned linear model. *Acta Comment Univ Tartu Math*, 10:53–67.
- Jammalamadaka, S. R., Sengupta, D. 2003. *Linear Models an Integrated Approach*. World Scientific, Singapore.
- Jiang, J. 2007. *Linear and Generalized Linear Mixed Models and Their Applications*. Springer, New York .
- Kapusuz, H., Güler, N. 2019. İki genel lineer dönüştürülmüş karma model altında ön tahmin ediciler arasındaki ilişkiler. 2. Uluslararası İstatistik Matematik ve Analitik Yöntemler Kongresi Tam Metin ve Özet Metin Kitabı, 152-159.
- Karabulut, O., Tekin, M. E. 2009. Damızlık koç seçiminde BLUP metodunun kullanılması. *Kafkas Üniversitesi Veteriner Fakültesi Dergisi*, 15 (6), 891-896.
- Kala, R., Pordzik, P. R. 2009. Estimation in singular partitioned, reduced or transformed linear models. *Stat Pap*, 50: 633–638.
- Kala, R., Puntanen, S., Tian, Y. 2017. Some notes on linear sufficiency. *Stat Pap*, 58: 1–17.
- Kolman, B., Hill, D. R. 2016. *Uygulamalı Lineer Cebir*. Çev., Akın, Ö., Palme Yayıncılık, Ankara.

- Kornacki, A. 1995. The linear sufficiency and invariant linear sufficiency in a multivariate Gauss-Markov model. *Metrika*, 42:240–241.
- Kornacki, A. 1997. Stability of invariant linearly sufficient statistics in the general Gauss-Markov model. *Appl Math*, 42:71–77.
- Kornacki, A. 2007. Different kinds of sufficiency in the general Gauss-Markov model. *Math Slov*, 57:389–392.
- Liski, E. P., Trenkler, G., Groß, J. 1997. Estimation from transformed data under the linear regression model. *Statistics*, 29: 205–219.
- Markiewicz, A. 1998. Comparison of linear restricted models with respect to the validity of admissible and linearly sufficient estimators. *Stat Prob Lett*, 38:347–354.
- Markiewicz, A., Puntanen, S. 2009. Admissibility and linear sufficiency in linear model with nuisance parameters. *Stat Pap*, 50:847–854.
- Marsaglia, G., Styan, G. P. H. 1974. Equalities and inequalities for ranks of matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 2, 269–292.
- Matthew, J. G., Lloyd J. E., Leena, N.-F. 2007. Testing transformations for the linear mixed model. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51, 4297–430.
- Morrell, C. H., Pearson, J. D., Brant, L. J. 1997. Linear transformations of linear mixed-effects models. *Am Stat*, 51: 338–343.
- Müller, J. 1987. Sufficiency and completeness in the linear model. *J Multivar Anal*, 21:312–323.
- Narınç, D., Karaman, E., Firat, M. Z., Aksoy, T. 2011. Japon bildircinlarında bazı yumurta verim özelliklerine ait varyans unsurlarının farklı tahmin yöntemleri kullanarak elde edilmesiyle çok özellikli genetik parametre ve BLUP tahminleri. *Kafkas Üniversitesi Veteriner Fakültesi Dergisi*, 17 (5). 117-123.
- Oktaba, W., Kornacki, A., Wawrzosek, J., 1988. Invariant linearly sufficient transformations of the general Gauss-Markoff model. *Estimation and testing*, *Scand J of Stat* 15, 117-124.
- Penrose, R. 1955. A generalized inverse for matrices. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 51, 406–413.
- Puntanen, S., Styan, G. P. H., Isotalo, J. 2011. *Matrix Tricks for Linear Statistical Models: Our Personal Top Twenty*. Springer, Berlin Heidelberg.

- Rao, C. R. 1973. Representations of best linear unbiased estimators in the Gauss-Markoff model with a singular dispersion matrix. *Journal of Multivariate Analysis*, 3: 276-292.
- Rao, C. R., Toutenburg, H., Shalabh, H. C. 2008. *Linear Models and Generalizations Least Squares and Alternatives*, 3rd edn. Springer, Heidelberg.
- Robinson, G. K. 1991. That BLUP is a good thing: the estimation of random effects. *Statistical Science*, 6 (1), 15-32.
- Sarı, M., 2009. Japon bıldırcınlarının (*Coturnix coturnix japonica*) kesim ve karkas özelliklerine ait genetik parametrelerinin REML metodu ile damızlık değerlerinin BLUP metodu ile tahmini. Doktora Tezi, Kafkas Üniversitesi Sağlık Bilimleri Enstitüsü, Kars.
- Sarı, M., Saatçı, M., Tilki, M. 2010. Japon bıldırcınlarında (*Coturnix coturnix japonica*) canlı ağırlığa ait özelliklerin genetik parametrelerinin REML metodu ile hesaplanması.
- Searle, S. R. 1997. The matrix handling of BLUE and BLUP in the mixed linear model. *Linear algebra and its applications*, 264, 291-311.
- Seber, G. A. F. 2008. *A Matrix Handbook for Statisticians*. Vol. 15. John Wiley & Sons. Inc., Hoboken, New Jersey
- Seber, G. A., Lee, A. J. 2012. *Linear Regression Analysis* (Vol. 329). John Wiley & Sons.
- Shao, J., Zhang, J. 2015. A transformation approach in linear mixed-effects models with informative missing responses. *Biometrika*, 102:107–119.
- Tian, Y. 2009. On equalities for blues under misspecified Gauss-Markov models. *Acta Mathematica Sinica English Series*, (25) 11:1907-1920.
- Tian, Y. 2010. Equalities and inequalities for inertias of Hermitian matrices with applications. *Linear Algebra Appl.*, 433, 263–296.
- Tian, Y. 2012. Solving optimization problems on ranks and inertias of some constrained nonlinear matrix functions via an algebraic linearization method. *Nonlinear Analysis*, 75, 717–734.
- Tian, Y. 2015. A new derivation of BLUPs under random-effects model. *Metrika*, 78, 905–918.
- Tian, Y. 2017a. Some equalities and inequalities for covariance matrices of estimators under linear models. *Stat. Papers*, 58, 467–484.

- Tian, Y. 2017b. Matrix rank and inertia formulas in the analysis of general linear models. *Open Math.*, 15, 126–150.
- Tian, Y. 2017c. Transformation approaches of linear random-effects models, *Stat. Methods Appl.*, 26 (4), 583-608.
- Tian, Y., Guo W. 2016. On comparison of dispersion matrices of estimators under a constrained linear model. *Stat. Methods Appl.*, 25, 623–649.
- Tian, Y., Jiang, B. 2016. Matrix rank/inertia formulas for least-squares solutions with statistical applications. *Spec. Matrices*, 4, 130–140.
- Tian, Y., Puntanen, S. 2009. On the equivalence of estimations under a general linear models and its transformed model. *Linear Algebra and its Applications*, 430, 2622-2641.
- Tooze, J. A., Midthune, D., Dodd, K. W., Freedman, L. S., Krebs-Smith, S. M., Subar, A. F., Guenther, P. M., Carroll, R. J., Kipnis, V. 2006. A new statistical method for estimating the usual intake of episodically consumed foods with application to their distribution. *J. Amer. Dietetic Assoc.*, 106:1575–1587.
- Venit, S., Bishop, W. (1985). *Elementary Linear Algebra*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston.

ÖZGEÇMİŞ

Hacer KAPUSUZ, 27 Haziran 1992 tarihinde İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini 2010 yılında İstanbul'da tamamladı. Aynı yıl Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Bölümü (OFMA) lisans öğrenimine başladı ve 2016 yılında mezun oldu. 2017 yılında Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında tezli yüksek lisans programına başladı. Şu anda özel sektörde matematik öğretmenliği yapmaktadır.