

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Cansu BİÇİCİ

DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA - 2022

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA

Cansu BİÇİCİ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
Yıl: 2022, Sayfa: 95
Jüri : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Doç. Dr. Belgin ÖZER
: Doç. Dr. Leyla BUGAY

Bu tezde dönüşüm yarıgruplarında çarpanlara ayırma ile ilgili çalışmalar ve sonuçlar araştırılmış ve derlenmiştir. Permütasyonların ayrık devirlerin çarpımı olarak yazıldığı klasik çarpanlara ayrılış yönteminin, patika-devirler ve verilen çarpanlara ayrılış yöntemi ile daha genel dönüşümlere genişletilebileceği gözlemlenmiştir. Bu algoritma $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ üzerindeki tüm singüler dönüşümlerin yarıgrubu için doğuray kümeler hakkında bilgi edinmek için kullanılır. S_n simetrik grup ve $|im(\alpha)| \leq r$ olacak şekilde $\alpha : X_n \rightarrow X_n$ dönüşümlerinin kümesi $K_{n,r}$ olmak üzere $T_{n,r} = S_n \cup K_{n,r}$ olsun.

$$\text{cont}(T_{n,r}) = \min\{|G| : G \subseteq K_{n,r} \text{ ve } \langle G \cup S_n \rangle = T_{n,r}\}$$

ve $p_r(n)$, n pozitif tam sayısının r terimli parçalanışlarının sayısı olmak üzere

$$\text{cont}(T_{n,r}) = p_r(n)$$

olduğu gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Patika, patika-devir, relative rank, contingent rank

ABSTRACT

MSc. THESIS

FACTORISATIONS IN TRANSFORMATION SEMIGROUPS

Cansu BİÇİCİ

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Prof.Dr.Hayrullah AYIK
Year: 2022, Pages: 95
Jury : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Assoc. Prof. Dr.Belgin ÖZER
: Assoc. Prof. Dr.Leyla BUGAY

In this thesis, studies and results related to factorization in transformation semigroups are investigated and compiled. It has been observed that the classical decomposition of permutations into disjoint cycles can be extended to more general mappings by means of path-cycles, and an algorithm is given to obtain the decomposition. The device is used to obtain information about generating sets for the semigroup of all singular selfmaps of $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Let $T_{n,r} = S_n \cup K_{n,r}$, where S_n is the symmetric group and $K_{n,r}$ is the set of maps $\alpha : X_n \rightarrow X_n$ such that $|im(\alpha)| \leq r$. It is shown that

$$\text{cont}(T_{n,r}) = p_r(n)$$

where $\text{cont}(T_{n,r}) = \min\{|G| : G \subseteq K_{n,r} \text{ ve } \langle G \cup S_n \rangle = T_{n,r}\}$, $p_r(n)$ is the partition the positive integer n with r terms.

Key Words: Path, path-cycles, relative rank, contingent rank

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Yarıgruplar matematiğin nispeten yeni çalışma alanlarından birisidir. Cebirsel yaklaşımlarla yarıgrup teorisinin temellerinin başlangıcı bundan 60 yıl öncesine dayanmaktadır. Yarıgruplar incelenirken grup teorisindeki kavramlara paralellik gösteren kavramlar olmasının yanında yapısal özellikler bakımından oldukça farklılık gösterir. Bu sebeple 60 yılı aşkın bir süre boyunca çalışılmasının temel sebeplerinde bir tanesi diğer cebirsel yapılardan farklı olan yapısal özelliklerinin yeni teknik ve yöntemleri ortaya koymasıdır.

Yarıgrupların, grup teorisindeki kavramlara paralellik ve farklılık gösteren yönlerini dönüşüm yarıgruplarının çarpanlara ayrılış bakış açısı ile değerlendirdik. Bu değerlendirmeye geçmeden önce dönüşüm yarıgrupunu ve çarpanlara ayrılış tekniklerinden bahsedelim. Boştan farklı sonlu bir $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesinden yine X_n kümesi üzerine birebir örten tüm dönüşümlere permütasyonlar denir. Tüm permütasyonların kümesini S_n ile gösterelim. S_n kümesi fonksiyonların bileşke işlemi ile bir grup olup bu gruba simetrik grup ya da permütasyonlar grubu denir. Grup teorisinde Cayley teoremi sayesinde her grubun bir permütasyon grubuna izomorfik olduğunu biliyoruz. Bu yüzden permütasyon gruplarının yapısal özelliklerini incelemek önemlidir. X_n kümesinden yine X_n kümesi üzerine tüm dönüşümlerin kümesini T_n ile gösterelim. T_n fonksiyonların bileşke işlemi ile bir yarıgruptur ve bu yarıgruba dönüşüm yarıgrubu denir. Gruplardaki Cayley teoreminin benzeri yarıgruplarda da vardır. Yani her yarıgrup, bir dönüşüm yarıgrupunun alt yarı grubuna izomorfiktir. Bu yüzden dönüşüm yarıgrupları yarıgrup teorisinde çalışılan önemli konulardan birisidir.

Permütasyonlar grubunda klasik çarpanlara ayrılış yöntemi, her permütasyon ayrık devirlerin (ayrık permütasyonların) çarpımı olarak yazılabilir şeklindedir. Yarıgruplarda da benzer çarpanlara ayrılış yöntemleri bulunmuştur. Biz bu tezde dönüşüm yarıgruplarında doğuraylar ve çarpanlara ayırma üzerine ilgili çalışmaları derledik. Yarıgruplarda çarpanlara ayrılış yöntemlerinin olduğu çalışmalardan bir

tanisi Lipscomb (1996) tarafından geliştirilen yöntemdir. Bu yöntem dönüşümün grafik temsili ile çarpanlara ayırma arasında bir köprü oluşturmaktadır. Sayesinde dönüşümün grafik temsilini oluşturup dönüşüm yarıgrubunun bazı özellikleri incelenmiştir. Fakat bu yöntemde T_n nin bir elemanı için yazılan çarpanların her biri T_n nin bir elemanı değildir. Daha sonra Ayık G., Ayık H., Howie J. M. (2005) tarafından yapılan çalışmada, T_n yarıgrubunun bir elemanı için yazılan çarpanların her biri yine T_n nin bir elemanı olacak şekilde bir çarpanlara ayrılış yöntemi geliştirilmiştir. Bu çarpanlara ayrılış yöntemi sayesinde bazı dönüşüm yarıgruplarının doğuray kümeleri bulunarak rankları hesaplanmıştır.

Bu tezde dönüşüm yarıgruplarında çarpanlara ayırma ile ilgili çalışmalar ve sonuçlar araştırılmış ve derlenmiştir. $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ bir sonlu küme olmak üzere S_n permütasyonlar grubu, T_n de dönüşümler yarıgrubu olmak üzere $K_{n,r}$ kümesini

$$K_{n,r} = \{\alpha \in T_n : |im(\alpha)| \leq r\}$$

olarak tanımlayalım. $T_{n,r} = S_n \cup K_{n,r}$ olsun. Ayrıca permütasyon olmayan T_n nin elemanlarına singüler dönüşümler denir ve tüm singüler dönüşümlerin kümesini ST_n ile göstereceğiz. Yani $ST_n = T_n \setminus S_n$ kümesidir. Böylece $K_{n,n} = T_{n,n} = T_{n,n-1} = T_n$ ve $K_{n,n-1} = ST_n$ olur. Dikkat edilirse $\lambda, \mu \in T_n$ için

$$def(\lambda\mu) \geq \max\{def(\lambda), def(\mu)\}$$

olduğundan $K_{n,r}$ ve $T_{n,r}$ kümeleri T_n nin alt yarıgrubudur.

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subseteq X_n \text{ olmak üzere herhangi bir } \alpha \in T_n \text{ elemanı}$$

$$x_1\alpha = x_2, x_2\alpha = x_3, \dots, x_{m-1}\alpha = x_m, x_m\alpha = x_r \text{ ve } x\alpha = x \text{ (} x_r \in X, x \in X_n \setminus X \text{)}$$

ise α elemanına uzunluğu m ve periyodu r olan bir patika-devir (path-cycle) veya $(m, r) - \text{patika} - \text{devir}$ denir ve

$$\alpha = [x_1, x_2, \dots, x_m | x_r]$$

şeklinde yazılır. $\alpha \in T_n$ elemanı birim olmayan bir eleman ve $x \in X_n$ olsun. O zaman X_n sonlu olduğundan $(x, x\alpha, x\alpha^2, \dots)$ dizisi bir tekrara sahip olur. Böylece $x, x\alpha, \dots, x\alpha^k$ hepsi farklı fakat $x\alpha^{kx+1} \in \{x, x\alpha, \dots, x\alpha^{kx}\}$ olacak şekilde bir tek $k_x \in \mathbb{N}$ vardır. Her bir $\alpha_x = [x, x\alpha, \dots, x\alpha^{k_x} | x\alpha^{k_x+1}]$ patika-devirine α nın bir böleni/çarpanı(divisor) denir. α nın ilk çarpanı α nın en uzun çarpanlarından biri olup bu çarpanı α_1 ile göstereceğiz. Eğer birden fazla en uzun çarpan var ise bunlardan X_n deki sıralamaya göre en küçük ilk girdiye sahip olanı ilk çarpan olarak seçebiliriz. X_n deki sıralamaya göre $[x_1, x_2, \dots, x_k | x_1]$ devir (cycle) $x_1 = \min\{x_1, \dots, x_k\}$ olacak şekilde yazıldığını kabul edebiliriz. $\alpha^{(1)}: X_n \rightarrow X_n$ dönüşümünü

$$x\alpha^{(1)} = \begin{cases} x, & x \in r_1(\alpha_1) \text{ ise} \\ x\alpha, & x \notin r_1(\alpha_1) \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlarız ve $\alpha^{(1)}$ dönüşümüne α nın ilk rezüdüsü denir.

$$\alpha = \alpha_1 \alpha^{(1)}$$

olduğu açıktır. Şimdi benzer prosedürü $\alpha^{(1)}$ dönüşümüne uygulayarak α nın ikinci çarpanı α_2 yi ve α nın ikinci rezüdüsü $\alpha^{(2)}$ yi buluruz.

$$\alpha^{(1)} = \alpha_2 \alpha^{(2)} \Rightarrow \alpha = \alpha_1 \alpha^{(1)} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha^{(2)}$$

elde edilir. Bu prosedüre

$$\alpha_p \neq [1|1], \alpha^{(p)} = [1|1]$$

olana kadar devam edilirse $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p$ şeklinde çarpanlarına ayrılmış olur.

Yukarıda anlatılan çarpanlara ayrılış algoritması kullanılarak ST_n yarıgrubunun çeşitli doğuray kümeleri bulunmuştur. Örneğin her bir $m \in \{2, \dots, n\}$ için, ST_n deki uzunluğu m olan patika-devirlerin, ST_n yarıgrubunu doğurduğu gösterilmiştir. $1 \leq r \leq n - 1$ için

$$\text{cont}(T_{n,r}) = \min\{|G| : G \subseteq K_{n,r} \text{ ve } \langle G \cup S_n \rangle = T_{n,r}\}$$

şeklinde tanımlanan pozitif tamsayıya $T_{n,r}$ yarıgrubunun contingent rankı denir. T_n yarıgrubunun minimal doğuray kümesinin $A = \{(12), (12 \dots n), ||12||\}$ olduğu hatırlanırsa $T_{n,n-1} = ST_n$ için $\text{cont}(ST_n) = 1$ olduğu açıktır.

$$\text{cont}(T_{n,r}) = \min\{|G| : G \subseteq K_{n,r} \text{ ve } \langle G \cup S_n \rangle = T_{n,r}\}$$

ve $p_r(n)$, n pozitif tam sayısının r terimli parçalanışlarının sayısı olmak üzere

$$\text{cont}(T_{n,r}) = p_r(n)$$

olduğu gösterilmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimim süresince bilgi ve birikimleriyle çalışmalarımı yönlendiren ve her daim akademik yönden kendimi geliştirmeme katkı sağlayan danışmanım Sayın Prof. Dr. Hayrullah AYIK'a, değerli zamanını bana ayırarak tezimde ilerlememe yardımcı olan Prof. Dr. Gonca AYIK'a ve tez aşamasında tecrübesiyle bana bu yolda rehberlik ederek motivasyon kaynağı olan Ar. Gör. Ayşegül DAĞDEVİREN'e ayrıca okul ders programımın yüksek lisans yapmamı aksatmayacak şekilde düzenlenmesine olanak sağlayan Milli Eğitim Bakanlığına ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT.....	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR.....	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	5
3. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	11
3.1. Yarıgruplar, Bağıntılar, Denklikler ve Kongrüanslar	11
3.2. Dönüşüm Yarıgrupları	26
3.3. Grafik ve Orbit.....	34
3.4. Doğuray Kümeleri	37
3.5. Green Denklik Bağıntıları ve Regüler Yarıgruplar	50
4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA	63
4.1. Patika-Devir	63
4.2. Çarpanlara Ayırma.....	64
4.3. Doğuray Kümeleri	71
4.4. Ranklar.....	75
5. SONUÇ	91
KAYNAKLAR	93
ÖZGEÇMİŞ	95



1. GİRİŞ

Yarıgruplar matematiğin nispeten yeni çalışma alanlarından birisidir. Cebirsel yaklaşımlarla yarıgrup teorisinin temellerinin başlangıcı bundan 60 yıl öncesine dayanmaktadır. Yarıgruplar incelenirken grup teorisindeki kavramlara paralellik gösteren kavramlar olmasının yanında yapısal özellikler bakımından oldukça farklılık gösterir. Bu sebeple 60 yılı aşkın bir süre boyunca çalışılmasının temel sebeplerinde bir tanesi diğer cebirsel yapılardan farklı olan yapısal özelliklerinin yeni teknik ve yöntemleri ortaya koymasıdır.

Yarıgrupların, grup teorisindeki kavramlara paralellik ve farklılık gösteren yönlerini dönüşüm yarıgruplarının çarpanlara ayrılış bakış açısı ile değerlendirdik. Bu değerlendirmeye geçmeden önce dönüşüm yarıgrupunu ve çarpanlara ayrılış tekniklerinden bahsedelim. Boştan farklı sonlu bir $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesinden yine X_n kümesi üzerine birebir örten tüm dönüşümlere permütasyonlar denir. Tüm permütasyonların kümesini S_n ile gösterelim. S_n kümesi fonksiyonların bileşke işlemi ile bir grup olup bu gruba simetrik grup ya da permütasyonlar grubu denir. Grup teorisinde Cayley teoremi sayesinde her grubun bir permütasyon grubuna izomorfik olduğunu biliyoruz. Bu yüzden permütasyon gruplarının yapısal özelliklerini incelemek önemlidir. X_n kümesinden yine X_n kümesi üzerine tüm dönüşümlerin kümesini T_n ile gösterelim. T_n fonksiyonların bileşke işlemi ile bir yarıgruptur ve bu yarıgruba dönüşüm yarıgrubu denir. Gruplardaki Cayley teoreminin benzeri yarıgruplarda da vardır. Yani her yarıgrup, bir dönüşüm yarıgrupunun alt yarıgrupuna izomorfiktir. Bu yüzden dönüşüm yarıgrupları yarıgrup teorisinde çalışılan önemli konulardan birisidir. Permütasyonlar grubunda klasik çarpanlara ayrılış yöntemi, her permütasyon ayrık devirlerin (ayrık permütasyonların) çarpımı olarak yazılabilir şeklindedir. Yarıgruplarda da benzer çarpanlara ayrılış yöntemleri bulunmuştur. Biz bu tezde dönüşüm yarıgruplarında doğuraylar ve çarpanlara ayırma üzerine ilgili çalışmaları derledik. Yarıgruplarda

çarpanlara ayrılış yöntemlerinin olduğu çalışmalardan bir tanesi Lipscomb (1996) tarafından geliştirilen yöntemdir. Bu yöntem dönüşümün grafik temsili ile çarpanlara ayırma arasında bir köprü oluşturmaktadır. Fakat bu yöntemde T_n nin bir elemanı için yazılan çarpanların her biri T_n nin bir elemanı değildir. Daha sonra Ayık G., Ayık H., Howie J. M. Tarafından 2005 yılında yapılan çalışmada yöntemde T_n nin bir elemanı için yazılan çarpanların her biri yine T_n nin bir elemanı olacak şekilde bir çarpanlara ayrılış yöntemi geliştirilmiştir.

Sonra T_n deki üreteçler hakkında bilgi elde etmek için bu çarpanlara ayrılış tekniğini kullandılar, özel olarak Howie (1966) daki bir teoreminin yeni bir ispatını verdiler, yani $ST_n = T_n \setminus S_n$ deki her dönüşüm (S_n simetrik grup) 2-patıkların çarpımı olarak ifade edildi.

V bir S yarıgrubunun alt kümesi ise S yarıgrubunda V alt kümesinin relative rankı $r(S : V)$ ile gösterilir ve

$$r(S : V) = \min\{|G| : G \subseteq S \text{ ve } \langle V \cup G \rangle = S\}$$

olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca $r(S : V)$ ye modülo V ye göre S nin rankı da denir.

Eğer X sonsuz bir küme ise T_X dönüşümler yarıgrubunun alt kümesinin rankı ya sayılamaz ya da en fazla 2 olduğu biliniyor. Benzer sonuç X üzerindeki ikili bağıntı kümesi B_X içinde geçerlidir. Higgins, Howie, Mitchell ve Ruskuc (2003) çalışmalarında T_N yarıgrubunun dominated alt kümesi sayılamaz relative ranka sahip olduğunu gösterdiler.

$$1 \leq r \leq n - 1 \text{ olmak üzere}$$

$$K_{n,r} = \{\alpha \in T_n : |im(\alpha)| \leq r\} \text{ ve } T_{n,r} = K_{n,r} \cup S_n$$

olarak tanımlayalım. $T_{n,r}$ nin contingent rankı $\text{cont}(T_{n,r})$ olarak gösterilir ve

$$\text{cont}(T_{n,r}) = \min\{|G| : G \subseteq K_{n,r} \text{ ve } \langle G \cup S_n \rangle = T_{n,r}\}$$

olarak tanımlanır. T_n yarıgrubunun minimal doğuray kümesinin $A = \{(12), (12 \dots n), ||12||\}$ olduğu hatırlanırsa $T_{n,n-1} = ST_n$ için $\text{cont}(ST_n) = 1$ olduğu açıktır.

$$\text{cont}(T_{n,r}) = \min\{|G| : G \subseteq K_{n,r} \text{ ve } \langle G \cup S_n \rangle = T_{n,r}\}$$

ve $p_r(n)$, n pozitif tam sayısının r terimli parçalanışlarının sayısı olmak üzere

$$\text{cont}(T_{n,r}) = p_r(n)$$

olduğu gösterilmiştir.



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Boştan farklı sonlu bir $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesinden yine X_n kümesi üzerine birebir örten tüm dönüşümlere permütasyonlar denir. Tüm permütasyonların kümesini S_n ile gösterelim. S_n kümesi fonksiyonların bileşke işlemi ile bir grup olup bu gruba simetrik grup ya da permütasyonlar grubu denir. Grup teoride Cayley teoremi sayesinde her grubun bir permütasyon grubuna izomorfik olduğunu biliyoruz. Bu yüzden permütasyon gruplarının yapısal özelliklerini incelemek önemlidir. X_n kümesinden yine X_n kümesi üzerine tüm dönüşümlerin kümesini T_n ile gösterelim. T_n fonksiyonların bileşke işlemi ile bir yarıgruptur ve bu yarıgruba dönüşüm yarıgrubu denir. Gruplardaki Cayley teoreminin benzeri yarıgruplarda da vardır. Yani her yarıgrup, bir dönüşüm yarıgrubunun alt yarıgrubuna izomorfiktir. Bu yüzden dönüşüm yarıgrupları yarıgrup teoride çalışılan önemli konulardan birisidir.

Özellikle dönüşüm yarıgruplarında doğuray kümesi bulmak ve rank hesaplamak bu alanda çalışılan önemli konulardan biri olmuştur. S bir yarıgrup ve A da S yarıgrubunun boştan farklı alt kümesi olmak üzere

$$rank(S) = \min\{|A| : A \subseteq S \text{ ve } \langle A \rangle = S\}$$

pozitif tamsayısına S yarıgrubunun rankı denir. S bir yarıgrup olmak üzere S yarıgrubunun tüm idempotentlerinin kümesini $E(S)$ ile gösterelim.

$$idrank(S) = \min\{|A| : A \subseteq E(S) \text{ ve } \langle A \rangle = S\}$$

pozitif tamsayısına S yarıgrubunun idempotent rankı denir. $ST_n = T_n \setminus S_n$ olmak üzere

$$\text{rank}(ST_n) = \text{idrank}(ST_n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

olduğu Gomes ve Howie (1987) tarafından gösterildi. Ayrıca O_n sıra koruyan dönüşümler yarıgrubu olmak üzere

$$\text{rank}(O_n) = n \text{ ve } \text{idrank}(O_n) = 2n - 2$$

olduğu Gomes ve Howie (1992) tarafından gösterildi. Ayrıca $S(n, r)$ Stirling sayısı ve $K_{n,r} = \{\alpha \in T_n : |\text{im}(\alpha)| \leq r\}$ olmak üzere

$$\text{rank}(K_{n,r}) = \text{idrank}(K_{n,r}) = S(n, r)$$

olduğu Howie ve Mc Fadden (1990) tarafından gösterildi.

V bir S yarıgrubunun alt kümesi ise S yarıgrubunda V alt kümesinin relative rankı $r(S : V)$ ile gösterilir ve

$$r(S : V) = \min\{|G| : G \subseteq S \text{ ve } \langle V \cup G \rangle = S\}$$

olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca $r(S : V)$ ye modülo V ye göre S nin rankı da denir.

Higgins, Howie ve Ruskuc (1998) tarafından X sonsuz bir küme olmak üzere T_x in modülo S_x alt kümesine göre relative rankının $r(T_x : S_x) = 2$ olduğu gösterilmiştir. Ayrıca Higgins, Howie ve Ruskuc (1998) tarafından X sonsuz bir küme ve T_x yarıgrubunun tüm idempotentlerinin kümesi $E(T_x)$ olmak üzere modülo $E(T_x)$ alt kümesine göre relative rankının $r(T_x : E(T_x)) = 2$ olduğu gösterilmiştir.

B_X, T_X, I_X ve S_X sırasıyla bağıntılar yarıgrubu, tam dönüşümler yarıgrubu, simetrik inverse yarıgrup ve simetrik grup olsun. Eğer X sonsuz bir küme ise T_X dönüşümler yarıgrubunun alt kümesinin rankı ya sayılamaz ya da en fazla 2 olduğu biliniyor. Benzer sonuç X üzerindeki ikili bağıntı kümesi B_X içinde geçerlidir. Higgins, Howie, Mitchell ve Ruskuc (2003) çalışmalarında T_N yarıgrubunun dominated alt kümesi sayılamaz relative ranka sahip olduğunu gösterdiler. Ayrıca yine aynı çalışmada $r(B_X: T_X) = 1$, $r(B_X: I_X) = 1$ ve $r(B_X: S_X) = 1$ olduğu gösterilmiştir.

Permütasyonlar grubunda klasik çarpanlara ayrılış yöntemi, her permütasyon ayrık devirlerin (ayrık permütasyonların) çarpımı olarak yazılabilir şeklindedir. Yarıgruplarda da benzer çarpanlara ayrılış yöntemleri bulunmuştur. Biz bu tezde dönüşüm yarıgruplarında doğuraylar ve çarpanlara ayırma üzerine ilgili çalışmaları derledik. Yarıgruplarda çarpanlara ayrılış yöntemlerinin olduğu çalışmalardan bir tanesi Lipscomb (1996) tarafından geliştirilen yöntemdir. Bu yöntem dönüşümün grafik temsili ile çarpanlara ayırma arasında bir köprü oluşturmaktadır. Fakat bu yöntemde T_n nin bir elemanı için yazılan çarpanların her biri T_n nin bir elemanı değildir. Daha sonra Ayık G., Ayık H., Howie J. M. (2005) tarafından yapılan çalışmada, T_n yarıgrubunun bir elemanı için yazılan çarpanların her biri yine T_n nin bir elemanı olacak şekilde bir çarpanlara ayrılış yöntemi geliştirilmiştir. Bu çarpanlara ayrılış yöntemi sayesinde bazı dönüşüm yarıgruplarının doğuray kümeleri bulunarak rankları hesaplanmıştır.

Bu çarpanlara ayrılış yöntemi ile bazı dönüşüm yarıgruplarının yukarıda bahsedilen rankları ve relative rankları Ayık, Ayık ve Howie (2005) tarafından hesaplanmıştır.

Şimdi kısaca Ayık, Ayık ve Howie (2005) tarafından T_n yarıgrubunun elemanlarının çarpanlara ayrılış yönteminden ve bu yöntem kullanılarak hesaplanan ranklardan bahsedelim.

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subseteq X_n \text{ olmak üzere herhangi bir } \alpha \in T_n \text{ elemanı}$$

$$x_1\alpha = x_2, x_2\alpha = x_3, \dots, x_{m-1}\alpha = x_m, x_m\alpha = x_r \text{ ve } x\alpha = x \ (x_r \in X, x \in X_n \setminus X)$$

ise α elemanına uzunluğu m ve periyodu r olan bir patika-devir (path-cycle) veya (m, r) -patika-devir denir ve

$$\alpha = [x_1, x_2, \dots, x_m | x_r]$$

şeklinde yazılır. $\alpha \in T_n$ elemanı birim olmayan bir eleman ve $x \in X_n$ olsun. O zaman X_n sonlu olduğundan $(x, x\alpha, x\alpha^2, \dots)$ dizisi bir tekrara sahip olur. Böylece $x, x\alpha, \dots, x\alpha^k$ hepsi farklı fakat $x\alpha^{kx+1} \in \{x, x\alpha, \dots, x\alpha^{kx}\}$ olacak şekilde bir tek $k_x \in \mathbb{N}$ vardır. Her bir $\alpha_x = [x, x\alpha, \dots, x\alpha^{k_x} | x\alpha^{k_x+1}]$ patika-devirine α nın bir böleni/çarpanı (divisor) denir. α nın ilk çarpanı α nın en uzun çarpanlarından biri olup bu çarpanı α_1 ile göstereceğiz. Eğer birden fazla en uzun çarpan var ise bunlardan X_n deki sıralamaya göre en küçük ilk girdiye sahip olanı ilk çarpan olarak seçebiliriz. X_n deki sıralamaya göre $[x_1, x_2, \dots, x_k | x_1]$ devir (cycle) $x_1 = \min\{x_1, \dots, x_k\}$ olacak şekilde yazıldığını kabul edebiliriz. $\alpha^{(1)}: X_n \rightarrow X_n$ dönüşümünü

$$x\alpha^{(1)} = \begin{cases} x, & x \in r_1(\alpha_1) \text{ ise} \\ x\alpha, & x \notin r_1(\alpha_1) \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlarız ve $\alpha^{(1)}$ dönüşümüne α nın ilk rezüdüsü denir.

$$\alpha = \alpha_1 \alpha^{(1)}$$

olduğu açıktır. Şimdi benzer prosedürü $\alpha^{(1)}$ dönüşümüne uygulayarak α nın ikinci çarpanı α_2 yi ve α nın ikinci rezüdüsü $\alpha^{(2)}$ yi buluruz.

$$\alpha^{(1)} = \alpha_2 \alpha^{(2)} \Rightarrow \alpha = \alpha_1 \alpha^{(1)} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha^{(2)}$$

elde edilir. Bu prosedüre

$$\alpha_p \neq [1|1], \alpha^{(p)} = [1|1]$$

olana kadar devam edilirse $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p$ şeklinde çarpanlarına ayrılmış olur.

Yukarıda anlatılan çarpanlara ayrılış algoritması kullanılarak ST_n yarıgrubunun çeşitli doğuray kümeleri bulunmuştur. Örneğin her bir $m \in \{2, \dots, n\}$ için, ST_n deki uzunluğu m olan patika-devirlerin, ST_n yarıgrubunu doğurduğu gösterilmiştir. $1 \leq r \leq n - 1$ için

$$\text{cont}(T_{n,r}) = \min\{|G| : G \subseteq K_{n,r} \text{ ve } \langle G \cup S_n \rangle = T_{n,r}\}$$

şeklinde tanımlanan pozitif tamsayıya $T_{n,r}$ yarıgrubunun contingent rankı denir. T_n yarıgrubunun minimal doğuray kümesinin $A = \{(12), (12 \dots n), ||12||\}$ olduğu hatırlanırsa $T_{n,n-1} = ST_n$ için $\text{cont}(ST_n) = 1$ olduğu açıktır.

$$\text{cont}(T_{n,r}) = \min\{|G| : G \subseteq K_{n,r} \text{ ve } \langle G \cup S_n \rangle = T_{n,r}\}$$

ve $p_r(n)$, n pozitif tam sayısının r terimli parçalanışlarının sayısı olmak üzere

$$\text{cont}(T_{n,r}) = p_r(n)$$

olduğu gösterilmiştir.



3. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

3.1. Yarıgruplar, Bağıntılar, Denklikler ve Kongrüanslar

Tanım 3.1.1. $S \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere, Y üzerindeki bir “.” ikili işlemi birleşme özelliğine sahip, yani $\forall a, b, c \in Y$ için

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

ise $(Y, \cdot)$ ikilisine bir **yarıgrup** denir.

S üzerindeki ikili işlem sözün gelişinden belli ise

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

yerine kısaca $(ab)c = a(bc)$ şeklinde gösterilebilir.

Tanım 3.1.2. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer

$$e \cdot e = e^2 = e$$

oluyor ise e elemanına S yarıgrupunun bir **idempotent elemanı** denir.

S yarıgrupunun tüm idempotent elemanlarının kümesi $E(S)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.3. S bir yarıgrup olmak üzere, $\forall s, t \in S$ için $st = ts$ oluyorsa S yarıgrubuna bir **değişmeli yarıgrup** denir.

Tanım 3.1.4. S yarıgrubunun her elemanı bir idempotent eleman ($\forall s \in S$ için $s^2 = s$) ise S yarıgrubuna bir **band** denir.

Tanım 3.1.5. Eğer S yarıgrubu hem değişmeli hem de bir band ise S yarıgrubuna bir **yarılatis** denir.

Tanım 3.1.6. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $\forall s \in S$ için $es = s$ ise e elemanına S yarıgrubunun bir **sol birim elemanı** denir. Eğer $\forall s \in S$ için $se = s$ oluyor ise elemanına S yarıgrubunun **sağ birim elemanı** denir. Eğer e hem sol, hem de sağ birim eleman ise e elemanına S yarıgrubunun bir **birim elemanı** denir.

Bir yarıgrubun birden fazla sağ birim ve/veya sol birim elemanı olabilir. Eğer bir yarıgrupta birim elemanı var ise tektir. Bu teklikten dolayı birim eleman 1 ile gösterilir.

Tanım 3.1.7. S bir yarıgrup olsun. Eğer S nin birim elemanı var ise S ye bir **monoid** denir.

S bir yarıgrup olmak üzere

$$S^1 = \begin{cases} S, & S \text{ bir monoid ise} \\ S \cup \{1\}, & S \text{ monoid değilse} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

Tanım 3.1.8. S^1 monoidine “ S ye, gerekirse birim eleman eklenerek elde edilen monoid” denir.

Benzer şekilde S bir yarıgrup olmak üzere

$$S^0 = \begin{cases} S, & 0 \in S \text{ ise} \\ S \cup \{0\}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.9. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $\forall s \in S$ için $es = e$ oluyor ise e ye S nin bir **sol sıfır elemanı** denir. Eğer $\forall s \in S$ için $se = e$ oluyor ise e ye S nin **sağ sıfır elemanı** denir. Eğer e hem sağ, hem de sol sıfır eleman ise e ye S nin **sıfır elemanı** denir.

Bir yarıgrupun birden fazla sağ sıfır ve/veya sol sıfır elemanı olabilir. Eğer bir yarıgrupta sıfır elemanı var ise tektir. Bu teklikten dolayı sıfır elemanı 0 ile gösterilir.

Tanım 3.1.10. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme olmak üzere X üzerinde, $\forall x, y \in X$ için $xy = x$ şeklinde tanımlanan ikili işlem ile X bir yarıgruptur. Bu yarıgruba **sol sıfır yarıgrup (left zero semigroup)** denir ve L_X ile gösterilir.

$\forall a, b \in L_X$ için $ba = b$ olup L_X in her elemanı sağ birim eleman olur.

Tanım 3.1.11. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme olmak üzere X üzerinde, $\forall x, y \in X$ için $x \cdot y = y$ şeklinde tanımlanan ikili işlem ile X bir yarıgruptur. Bu yarıgruba **sağ sıfır yarıgrup (right zero semigroup)** denir ve R_X ile gösterilir.

$\forall a, b \in R_X$ için $ab = b$ olup R_X in her elemanı sol birim eleman olur.

Tanım 3.1.12. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme olmak üzere ve $z \in X$ olsun. $\forall x, y \in X$ için X üzerindeki çarpma işlemi $xy = z$ olarak tanımlanırsa X bir yarıgrup olup ve bu yarıgruba **sıfır yarıgrubu** denir ve Z_X ile gösterilir.

S birim elemanı olmayan bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Bu durumda $a \in Sa$ olmayabilir. Ancak aS yerine aS^1 alırsak $a \in aS^1$ olur.

Tanım 3.1.13. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun.

$$\begin{aligned} S^1a &= \{a\} \cup Sa, \\ aS^1 &= \{a\} \cup aS, \\ S^1aS^1 &= \{a\} \cup aS \cup Sa \cup SaS \end{aligned}$$

olarak tanımlanan kümelere sırası ile a tarafından doğrulan **sağ/sol/iki taraflı esas ideal** denir.

Tanım 3.1.14. S bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall a \in S$ için

$$Sa = S \text{ ve } aS = S$$

bu şekilde oluyor ise S ye bir **grup** denir.

Tanım 3.1.15. S bir monoid ve $a \in S$ olsun. O zaman

$$ba = 1$$

olacak şekilde bir $b \in S$ var ise b ye a nın **sol tersi** ve

$$ab = 1$$

olacak şekilde $b \in S$ varsa b ye a nın **sağ tersi** denir. Burada b hem sağ hem sol ters ise b elemanına a elemanının **tersi** denir.

Kolayca gösterileceği üzere tektir. Bu teklikten dolayı a elemanının tersi a^{-1} ile gösterilir. İşlem çarpma olarak düşünüldüğünde a elemanının tersi a^{-1} ile, işlem toplama olarak düşünüldüğünde a elemanının tersi $-a$ ile gösterileceğine dikkat edelim.

Tanım 3.1.16. S bir sıfır eleman içeren yarıgrup olsun. Eğer $G = S \setminus \{0\}$ bir grup ise S yarıgrubuna bir (0-grup) **sıfır grup veya sıfırlı grup** denir.

Bu yarıgrup $S = G^0 = G \cup \{0\}$ ile gösterilir. Sıfırlı bir yarıgrup en az iki elemanlı kabul edilir.

Tanım 3.1.17. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq T \subseteq S$ olsun. Eğer $\forall x, y \in T$ için $xy \in T$ oluyorsa T alt kümesine S yarıgrubunun bir **alt yarıgrubu** denir ve $T \leq S$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.18. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq T \subseteq S$ olsun. Eğer $\forall s \in S$ ve $\forall t \in T$ için

- i) $st \in T$ yani $ST \subseteq T$ oluyor ise T ye S nin **sol ideali**,
- ii) $ts \in T$ yani $TS \subseteq T$ oluyor ise T ye S nin **sağ ideali**,

denir. Eğer T, S nin hem sol hem sağ ideali ise ($ST \subseteq T$ ve $TS \subseteq T$) T ye S nin bir **ideali** denir ve $T \trianglelefteq S$ şeklinde gösterilir.

Dikkat edilirse sol idealler, sağ idealler ve idealler birer alt yarıgruptur. Bir S yarıgrubunda sıfır eleman var ise $\{0\}$ kümesi S yarıgrubunun bir idealidir.

Tanım 3.1.19. $T \neq S$ ve $T \neq \{0\}$ olacak şekilde T kümesi, S yarıgrubunun bir ideali ise T ye S yarıgrubunun bir **öz ideali** denir.

Tanım 3.1.20. S ile T iki yarıgrup ve $\phi: S \rightarrow T$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall m, n \in S$ için

$$(mn)\phi = (m\phi) \cdot (n\phi)$$

oluyor ise ϕ dönüşümüne bir **(yarıgrup) homomorfizmi** denir. $\phi: S \rightarrow T$ (yarıgrup) homomorfizm olmak üzere

$$1_S\phi = 1_T$$

ise ϕ ye bir **monoid homomorfizmi** denir.

Tanım 3.1.21. S ile T iki yarıgrup ve $\phi: S \rightarrow T$ bir yarıgrup homomorfizmi olsun. Eğer ϕ hem bire-bir ve hem de örten ise ϕ homomorfizmine bir **izomorfizm** denir. Eğer S den T ye bir izomorfizm mevcut ise S ile T ye **izomorfik yarıgruplar** denir ve $S \cong T$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.22. S, T iki yarıgrup ve $S \times T = \{(s, t): s \in S \text{ ve } t \in T\}$ olsun. $\forall (s_1, t_1), (s_2, t_2) \in S \times T$ için

$$(s_1, t_1), (s_2, t_2) = (s_1 s_2, t_1 t_2)$$

olarak tanımlanan ikili işlem ile $S \times T$ bir yarıgrup olup, $S \times T$ yarıgrupuna S ve T yarıgruplarının **direkt çarpımı** denir.

Tanım 3.1.23. S ve T iki yarıgrup olsun. $\phi: S \rightarrow T$ bir homomorfizm olmak üzere

$$\text{im}\phi = \{s\phi: s \in S\} \text{ ve } \ker\phi = \{(x, y) \in S \times S: x\phi = y\phi\}$$

şeklinde tanımlanan kümelere sırasıyla ϕ nin **görüntü (imaj) kümesi** ve **çekirdek (kernel) kümesi** denir.

Tanım 3.1.24. S bir yarıgrup olsun. $\forall a, b \in S$ için $aba = a$ oluyorsa S yarıgrupuna **dikdörtgensel band** denir.

Örnek 3.1.25. Burada bazı yarıgrup ve monoid örnekleri verelim.

- Herhangi bir $(R, +, \cdot)$ halkasında $(R, \cdot)$ bir yarıgruptur.
- $(\mathbb{N}, \cdot)$ bir monoiddir.
- $(\mathbb{N}, +)$ bir yarıgruptur.
- $(\mathbb{N}^0, \cdot)$ ve $(\mathbb{N}^0, +)$ birer monoiddir.
- $(\mathbb{Z}, +)$ bir değişmeli monoiddir. Ayrıca $(\mathbb{Z}, +)$ monoidinin sıfır elemanı yoktur.
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ bir değişmeli monoiddir. Ayrıca $(\mathbb{Z}, \cdot)$ monoidinin sıfır elemanı vardır.
- $\oplus$ işlemi modülön toplama işlemi olmak üzere $(\mathbb{Z}, \oplus)$ bir değişmeli monoiddir. Ayrıca $(\mathbb{Z}, \oplus)$ monoidinin sıfır elemanı yoktur.

- $\odot$ işlemi modülün çarpma işlemi olmak üzere $(\mathbb{Z}, \odot)$ bir değişmeli monoiddir. Ayrıca $(\mathbb{Z}, \odot)$ monoidinin sıfır elemanı vardır.

Tanım 3.1.26. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer

$$aba = a$$

olacak şekilde bir $b \in S$ varsa a elemanına S yarıgrupunun bir regüler elemanı denir. Eğer S yarıgrupunun her elemanı regüler ise S yarıgrupuna **regüler yarıgrup** denir.

Tanım 3.1.27. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $X \times X$ kartezyen çarpımının her alt kümesine X üzerinde bir **bağıntı** denir.

X üzerindeki tüm bağıntıların kümesi B_X ile gösterilir. Yani $B_X = \{\rho : \rho \subseteq X \times X\}$ ile gösterilir. $X \neq \emptyset$ bir küme ve ρ da X üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer $(x, y) \in \rho$ ise $x\rho y$ şeklinde de gösterilebilir.

Tanım 3.1.28. $\emptyset$ bağıntısına X üzerinde **boş bağıntı** denir. $X \times X$ in kendisi X üzerinde bir bağıntı olup bu bağıntıya **evrensel bağıntı** denir.

$$1_X = \Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$$

kümesine **birim/eşitlik/köşegen/bağıntı** denir.

B_X üzerinde $\forall \alpha, \beta \in B_X$ için

$$\alpha \circ \beta = \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X \text{ için } (x, z) \in \alpha \text{ ve } (z, y) \in \beta\}$$

olarak tanımlanan bağıntıya α ile β nin bileşkesi denir. Kolayca gösterileceği üzere $\forall \alpha, \beta, \gamma \in B_X$ için $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$ olur. Ayrıca $\forall \alpha \in B_X$ için $\emptyset \circ \alpha = \emptyset = \alpha \circ \emptyset$ ve $1_X \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ 1_X$ olup $(B_X, \circ)$ birim elemanı 1_X olan bir monoid olur. Ayrıca sıfır elemanı $\emptyset$ mevcuttur.

Tanım 3.1.29. $(B_X, \circ)$ yarıgrubuna, X üzerindeki **bağıntılar yarıgrubu** denir.

$\forall \alpha \in B_X$ için α nın **ters bağıntısı** α^{-1} ile gösterilir ve

$$\alpha^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \alpha\}$$

olarak tanımlanır. $\sigma, \rho, \tau \in B_X$ olsun. Eğer $\rho \subseteq \sigma$ ise

$$\rho \circ \tau \subseteq \sigma \circ \tau \text{ ve } \tau \circ \rho \subseteq \tau \circ \sigma$$

olur. Genellikle $\rho \circ \rho$ yerine ρ^2 yazılır.

Tanım 3.1.30. $\alpha \in B_X$ için

$$\text{dom}(\alpha) = \{x \in X : \exists y \in X \text{ için } (x, y) \in \alpha\}$$

ve

$$\text{im}(\alpha) = \{y \in X : \exists x \in X \text{ için } (x, y) \in \alpha\}$$

şeklinde tanımlanan X kümesinin alt kümelerine sırasıyla α bağıntısının **tanım** ve **görüntü (imaj) kümesi** denir. $X\alpha$ kümesinin eleman sayısına α bağıntısının **rankı** ya da **yüksekliği** denir.

Ayrıca $\text{im}(\alpha)$ yerine $X\alpha$ yazılabilir. Herhangi $\rho, \tau \in B_X$ için eğer $\rho \subseteq \tau$ ise

$$\text{dom}(\rho) \subseteq \text{dom}(\tau) \text{ ve } \text{im}(\rho) \subseteq \text{im}(\tau)$$

olduğu açıktır. Eğer $\rho \in B_X$, $x \in X$ ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ ise

$$x\rho = \{y \in X : (x, y) \in \rho\} \text{ ve } A\rho = \bigcup_{x \in A} x\rho = \bigcup \{x\rho : x \in A\}$$

olarak tanımlanır. Dolayısıyla, $x\rho \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul $x \in \text{dom}(\rho)$ olmasıdır.

Tanım 3.1.31. $\emptyset \neq X$ bir küme ve ρ , X üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere

- 1) $\Delta_X \subseteq \rho$ ise ρ bağıntısına **yansımali bağıntı**,
- 2) $\rho = \rho^{-1}$ ise ρ bağıntısına **simetrik bağıntı**,
- 3) $\rho \cap \rho^{-1} = \Delta_X$ ise ρ bağıntısına **ters simetrik bağıntı** ve
- 4) $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ ise ρ bağıntısına **geçişmeli bağıntı**

denir. Eğer ρ bağıntısı yansımali, ters simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise ρ bağıntısına X üzerinde bir **kısmi sıralama bağıntısı** denir.

ρ bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. $\forall x, y \in X$ için, $(x, y) \in \rho$ ise $x \leq_\rho y$ veya $x \leq y$ yazılır. ρ , X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun.

Tanım 3.1.32. Eğer $\forall x, y \in X$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise ρ ya **tam sıralı bağıntı** denir.

X üzerinde bir kısmi veya tam sıralı bağıntı varsa $(X, \leq)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.33. $\emptyset \neq X$ bir küme ve ρ , X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Eğer ρ yansımali, simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise ρ ya X üzerinde bir **denklik bağıntısı** denir. ρ , X üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in X$ olmak üzere

$$x\rho = \{y \in X : (x, y) \in \rho\}$$

kümesine x **elemanının denklik sınıfı** denir. X in tüm denklik sınıflarının ailesi

$$X/\rho = \{x\rho : x \in X\}$$

kümesi olup X/ρ kümesine X kümesinin ρ ile elde edilen **bölüm kümesi** denir.

$\{\rho_i : i \in I\}$, X kümesi üzerindeki denklik bağıntılarının boştan farklı bir ailesi olsun. Kolayca gösterilebileceği üzere $\cap\{\rho_i : i \in I\}$ kümesi de X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $\alpha : X \rightarrow Y$ herhangi bir dönüşüm olsun. $\alpha \circ \alpha^{-1}$, X üzerinde bir denklik bağıntısı olduğunu biliyoruz.

Dikkat edilirse kernel kümesi olarak tanımlanmış olup $\ker\varphi = \{(x, y) \in X \times X : x\varphi = y\varphi\}$ olup

$$\begin{aligned} \ker\varphi &= \{(x, y) \in X \times X : x\varphi = y\varphi\} \\ &= \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in Y (x, z) \in \varphi \text{ ve } (z, y) \in \varphi\} \\ &= \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in Y (x, z) \in \varphi \text{ ve } (y, z) \in \varphi^{-1}\} \\ &= \varphi \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

olacağından $\ker\varphi = \varphi \circ \varphi^{-1}$ elde edilir.

Tanım 3.1.34. $\emptyset \neq X$ bir küme ve ρ , X üzerinde herhangi bir denklik bağıntı olsun. $\rho^\# : X \rightarrow X/\rho$ her $x \in X$ için $x\rho^\# = x\rho$ olarak tanımlanan dönüşüme **ρ -doğal dönüşümü** denir.

Dikkat edilirse $\rho^\#$ dönüşümünün çekirdeği ρ olup $\ker \rho^\# = \rho$ olduğu açıktır.

$\emptyset \neq X$ bir küme, R de X üzerinde bir bağıntı olsun. $R \subseteq X \times X$ ve $X \times X$ de, X üzerinde bir denklik bağıntısı olup R yi içeren bir denklik bağıntısı vardır. O halde

$$\{\rho : R \subseteq \rho \text{ ve } \rho, X \text{ üzerinde bir denklik bağıntısı}\}$$

kümesi boştan farklıdır.

Tanım 3.1.35. $\emptyset \neq X$ bir küme, R de X üzerinde bir bağıntı olmak üzere

$$R^e = \bigcap \{\rho : R \subseteq \rho \text{ ve } \rho, X \text{ üzerinde bir denklik bağıntısı}\}$$

şeklinde tanımlanan R^e kümesine **R tarafından doğurulan denklik bağıntısı** denir ve R^e ile gösterilir.

Dikkat edilirse R^e , R yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır. Ayrıca,

- 1) $R = \emptyset \Rightarrow R^e = \Delta_X$,
- 2) R denklik bağıntısı ise $R^e = R$ ve
- 3) $R^e = (R^{-1})^e$ olur.

olduğu kolayca gösterilir.

$X \neq \emptyset$ bir küme ve S kümesi de X üzerinde yansılmalı bir bağıntı olsun. S^∞ kümesini $S^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} S^n$ olarak tanımlayalım.

Önerme 3.1.36. $X \neq \emptyset$ bir küme ve S kümesi de X üzerinde yansılmalı bir bağıntı ise $S^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} S^n$ kümesi, X üzerinde S kümesini içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır.

İspat: Howie (1995), Lemma 1.4.8'e bakınız. $\square$

Önerme 3.1.37. $X \neq \emptyset$ bir küme ve R kümesi de X üzerinde herhangi bir bağıntı ise R tarafından doğurulan denklik bağıntısı R^e ,

$$R^e = [R \cup R^{-1} \cup 1_X]^\infty$$

şeklindedir.

İspat: Howie (1995), Lemma 1.4.9'a bakınız. $\square$

Cebirsel yapılarda homomorfizmin çekirdeğinin yapısal özelliği önemlidir. Grup homomorfizminin çekirdeği normal alt grup olduğundan, gruplarda bölüm grubu, grubu normal alt gruba bölerek elde ederiz. Benzer şekilde halka homomorfizminin çekirdeği ideal olduğundan, halkalarda bölüm halkası, halkayı ideale bölerek elde ederiz. Yarıgrup homomorfizminin çekirdeği kongrüans olduğundan yarıgruplarda bölüm yarıgrubu, yarıgrubu kongrüansa bölerek elde edeceğimizden, kongrüanslar ve özellikleri yarıgruplar için çok önemlidir.

Tanım 3.1.38. S bir yarıgrup ve R , S üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer $\forall a \in S$ ve $\forall (s, t), (s', t') \in R$ için

- i. $(as, at) \in R$ ise R bağıntısına **sol uyumlu**;
- ii. $(sa, ta) \in R$ ise R bağıntısına **sağ uyumlu**;
- iii. $(ss', tt') \in R$ ise R bağıntısına **uyumlu**

bağıntı denir. Ayrıca, sol uyumlu bir denklik bağıntısına **sol kongrüans**, sağ uyumlu bir denklik bağıntısına **sağ kongrüans** ve uyumlu bir denklik bağıntısına **kongrüans** denir.

Önerme 3.1.39. S bir yarıgrup ve R, S üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. R nin bir kongrüans olması için gerek ve yeter koşul R nin hem sol hem de sağ kongrüans olmasıdır.

İspat: Howie (1995), Proposition 1.5.1'e bakınız. $\square$

S bir yarıgrup ve R, S üzerinde bir denklik bağıntısı olmak üzere tanımdan kolayca görülüyor ki R nin bir kongrüans olması için gerek ve yeter koşul R nin $S \times S$ nin bir alt yarıgrubu olmasıdır.

Tanım 3.1.40. O halde $S \times S$ nin alt yarıgrubu olan Δ_S ve $S \times S, S$ üzerinde birer kongrüanstır. Bu kongrüanslara sırasıyla S nin **aşikâr kongrüansı** ve **evrensel kongrüansı** denir.

Tanım 3.1.41. S bir yarıgrup ve ρ, S üzerinde bir kongrüans olsun. S nin ρ ile elde edilen bölüm kümesi S/ρ üzerinde bir çarpma işlemi $\forall x\rho, y\rho \in S/\rho$ için

$$(x\rho)(y\rho) = (xy)\rho$$

şeklinde tanımlansın. S/ρ bu çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba S nin ρ ile elde edilen **bölüm yarıgrubu** denir.

Önerme 3.1.42. S, T iki yarıgrup ve $\varphi: S \rightarrow T$ bir homomorfizm olsun. Bu durumda

$$\ker\varphi = \varphi \circ \varphi^{-1} = \{(x, y) \in X \times X: x\varphi = y\varphi\}$$

S üzerinde bir kongrüanstır.

İspat: Howie (1995), Theorem 1.5.2'ye bakınız. $\square$

Teorem 3.1.43.(1. İzomorfizm Teoremi) S, T iki yarıgrup ve $\varphi: S \rightarrow T$ bir örten homomorfizm ise $S/\ker\varphi \cong T$ olur.

İspat: $\alpha: S/\ker\varphi \rightarrow T$ dönüşümü $(sker\varphi)\alpha = s\varphi$ olarak tanımlansın.

Bu dönüşümün $im\alpha = im\varphi$ olacak şekilde bir homomorfizm olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca φ örten olduğundan $im\alpha = im\varphi = T$ olup α dönüşümü de örten bir homomorfizmdir.

Her $x, y \in S$ için $(xker\varphi)\alpha = (yker\varphi)\alpha$ olsun. Bu durumda $x\varphi = y\varphi$ olup $(x, y) \in \ker\varphi$ ve buradan $y \in xker\varphi$ dir. Ayrıca $y \in yker\varphi$ olup $xker\varphi = yker\varphi$ elde edilir. O halde α bire-birdir. Böylece $S/\ker\varphi \cong T$ olup ispat biter. $\square$

S bir yarıgrup ve R, S üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O halde $R \subseteq S \times S$ olup S üzerinde R yi içeren en az bir kongrüans vardır yani en azından $S \times S$ kongrüansı vardır.

Tanım 3.1.44. S üzerinde R yi içeren tüm kongrüansların arakesiti de R yi içeren bir kongrüans olup bu kongrüansa R tarafından doğurulan kongrüans denir ve $R^\#$ ile gösterilir.

S bir yarıgrup ve R, S üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere R^c kümesi

$$R^c = \{(xay, xby): x, y \in S^1, (a, b) \in R\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda kolayca görülüyor ki R^c, R yi içeren en küçük sol ve sağ uyumlu bağıntıdır.

Teorem 3.1.45. S bir yarıgrup ve R, S üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere $R^\# = (R^c)^e$ olur.

İspat: Howie (1995), Proposition 1.5.8'e bakınız. $\square$

3.2. Dönüşüm Yarıgrupları

Tanım 3.2.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\alpha \in B_X$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $|x\alpha| = 0$ veya $|x\alpha| = 1$ yani $|x\alpha| \leq 1$ ise α ya bir **kısmi dönüşüm** denir.

B_X in tüm kısmi dönüşümlerinin kümesi P_X ile gösterilir. Açıkça $\emptyset, 1_X \in P_X$ olur.

Tanım 3.2.2. P_X dönüşümlerin bileşke işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba **kısmi dönüşümler yarıgrubu** denir.

Örnek 3.2.3. $X = \{1,2,3,4\}$ olmak üzere $\alpha, \beta \in B_X$ elemanları

$$\alpha = \{(1,2), (2,2), (3,4), (3,3)\} \text{ ve } \beta = \{(1,2), (2,2), (3,4)\}$$

olsun. Dikkat edilirse

$$\text{dom}\alpha = \{1,2,3\}, \text{im}\alpha = \{2,3,4\} \text{ ve } \text{dom}\beta = \{1,2,3\}, \text{im}\beta = \{2,4\}$$

olur. Ayrıca $|3\alpha| = |\{4,3\}| = 2 \not\leq 1$ olduğundan $\alpha \notin P_X$ olur.

$|1\beta| = |\{2\}| = 1, \quad |2\beta| = |\{2\}| = 1, \quad |3\beta| = |\{4\}| = 1 \quad \text{ve} \quad |4\beta| = |\emptyset| = 0$ olduğundan $\beta \in P_X$ olur.

$\alpha \in P_X \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $x\alpha = \emptyset$ veya $x\alpha$ sadece 1 elemanlı kümedir. Bu nedenle $\alpha \in P_X$ ve $x \in \text{dom}(\alpha)$ ise $x\alpha = \{y\}$ olacak şekilde bir tek $y \in X$ mevcut olduğundan $x\alpha = \{y\}$ yerine $x\alpha = y$ yazılır. Bazen $x \notin \text{dom}(\alpha)$ ise $x\alpha = -$ yazılır.

Önerme 3.2.4. P_X, B_X in bir alt yarıgrubudur.

İspat: $\alpha, \beta \in P_X$ alalım. $\alpha \circ \beta \in P_X$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $(x, y_1), (x, y_2) \in \alpha \circ \beta$ olsun. O halde

$$(x, z_1), (x, z_2) \in \alpha \text{ ve } (z_1, y_1), (z_2, y_2) \in \beta$$

olacak şekilde $z_1, z_2 \in X$ vardır. $\alpha \in P_X$ olduğundan $(x, z_1), (x, z_2) \in \alpha$ ise $z_1 = z_2$ olur. $z_1 = z_2$ ve $\beta \in P_X$ olduğundan $(z_1, y_1), (z_1, y_2) \in \beta$ ise $y_1 = y_2$ olur. $y_1 = y_2$ olduğundan her $x \in X$ için $[(x)\alpha \circ \beta] \leq 1$ olup $\alpha \circ \beta \in P_X$ elde edilir. Böylece P_X, B_X in bir alt yarıgrubudur. $\square$

Tanım 3.2.5. B_X yarıgrubunun P_X alt yarıgrubuna **(tüm) kısmi dönüşümler yarıgrubu** denir.

Önerme 3.2.6. $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere ve $\alpha, \beta \in P_X$ elemanları için

$$\text{i. } \text{dom}(\alpha \circ \beta) = [\text{ima} \cap \text{dom}\beta]\alpha^{-1},$$

$$\text{ii. } \text{im}(\alpha \circ \beta) = [\text{ima} \cap \text{dom}\beta]\beta,$$

olur.

İspat: Howie (1995), Proposition 1.4.3'e bakınız. $\square$

$\alpha \in P_X$ elemanı için

$$\begin{aligned} \ker \alpha &= \{(x, y) \in X \times X : x, y \in \text{dom}(\alpha) \text{ ise } x\alpha = y\alpha\} \\ &\cup \{(x, y) \mid x, y \in X \setminus \text{dom}(\alpha)\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanan bağıntıya α dönüşümünün **çekirdek kümesi** olduğunu hatırlayalım.

Örnek 3.2.7. $X_5 = \{1,2,3,4,5\}$ olmak üzere $\alpha = \begin{pmatrix} 12345 \\ 13322 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda $\alpha \in P_X$ elemanı

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1\} & \{4,5\} & \{2,3\} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. $\alpha \in P_X$ elemanı için

$$\begin{aligned} \ker \alpha &= \{(x, y) \in X \times X : x, y \in \text{dom}(\alpha) \text{ ise } x\alpha = y\alpha\} \\ &\cup \{(x, y) \mid x, y \in X \setminus \text{dom}(\alpha)\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanan bağıntıya α dönüşümünün çekirdek kümesi olduğunu hatırlayalım. $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{4,5\}$, $A_3 = \{2,3\}$ olup

$$\begin{aligned} A_1 \times A_1 &= \{1\} \times \{1\} = \{(1,1)\} \\ A_2 \times A_2 &= \{4,5\} \times \{4,5\} = \{(4,4), (4,5)(5,4), (5,5)\} \\ A_3 \times A_3 &= \{2,3\} \times \{2,3\} = \{(2,2), (2,3)(3,2), (3,3)\} \\ \ker \alpha &= \{(1,1), (4,4), (4,5)(5,4), (5,5), (2,2), (2,3)(3,2), (3,3)\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 3.2.8. $\alpha \in P_X$ olsun. Eğer $\text{dom}(\alpha) = X$ ise α dönüşümüne bir **(tam) dönüşüm** denir.

X üzerindeki tüm (tam) dönüşümlerin kümesi T_X ile gösterilir. Dikkat edilirse $\alpha \in T_X \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $|x\alpha| = 1$ olur.

Teorem 3.2.9. T_X, P_X yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur.

İspat: Herhangi iki $\alpha, \beta \in T_X$ elemanlarını alalım. $\alpha, \beta \in T_X$ ise $\text{dom}\alpha = \text{dom}\beta = X$ olur. $\alpha \circ \beta \in T_X$ olduğunu gösterelim. O halde $\text{dom}(\alpha \circ \beta) = X$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\text{dom}(\alpha \circ \beta) \subseteq X$ olduğu açıktır. $\text{dom}(\alpha \circ \beta) \supseteq X$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $x \in X$ alalım. $x \in \text{dom}\alpha$ olup $(x, y) \in \alpha$ olacak şekilde $y \in X$ vardır. $y \in \text{dom}\beta$ olup $(y, z) \in \beta$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. $(x, y) \in \alpha$ ve $(y, z) \in \beta$ olup $(x, z) \in \alpha \circ \beta$ olduğundan $x \in \text{dom}(\alpha \circ \beta)$ olur. $\text{dom}(\alpha \circ \beta) \supseteq X$ elde edilir. $\text{dom}\beta = X$ olup $\alpha \circ \beta \in T_X$ elde edilir. Böylece T_X, P_X yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olur. $\square$

Tanım 3.2.10. $\alpha \in P_X$ olsun. Eğer $\text{dom}(\alpha) \neq \emptyset$ ve her $x_1, x_2 \in \text{dom}(\alpha)$ için $x_1\alpha = x_2\alpha$ olduğunda $x_1 = x_2$ oluyor ise α ya bir **kısmi bire-bir dönüşüm** denir.

Ayrıca boş dönüşüm (bağıntı) de bir kısmi bire-bir dönüşüm kabul edilir. Tüm kısmi bire-bir dönüşümlerin kümesi I_X ile gösterilir.

Tanım 3.2.11. I_X dönüşümlerin bileşke işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba **kısmi bire-bir dönüşümler yarıgrubu** (veya **simetrik inverse yarıgrubu**) denir.

Ayrıca $I_X \leq P_X$ olduğu açıktır.

Tanım 3.2.12. $\alpha \in P_X$ olsun. Eğer her $y \in \text{im}\alpha$ için $x\alpha = y$ olacak şekilde bir $x \in \text{dom}(\alpha)$ mevcut ise α dönüşümüne bir **örten dönüşüm** denir.

Tanım 3.2.13. $\alpha \in T_X$ olsun. Eğer α hem bire-bir hem örten ise α dönüşümüne X üzerinde bir **permütasyon** denir.

X üzerindeki tüm permütasyonların kümesi S_X ile gösterilir.

Tanım 3.2.14. S_X dönüşümlerin bileşke işlemi ile bir grup olup bu gruba **simetrik dönüşümler grubu (simetrik grup)** veya **permütasyonlar grubu** denir.

Ayrıca $S_X \leq I_X$, $S_X \leq T_X$ olduğu görülür. Biz çalışmamız boyunca $X = X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu kümesini ele alacağız. B_X , P_X , T_X , I_X , S_X yerine sırasıyla B_n , P_n , T_n , I_n , S_n kullanılır. Böylece $S_n \subseteq I_n$, $T_n \subseteq P_n \subseteq B_n$ olur.

Ayrıca $\alpha \in B_n$ için $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \subseteq X_n$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada bazı Y_i ler boş küme olabilir. Eğer $\alpha \in PT_n$ ise her $x \in \text{dom}(\alpha)$ için $|x\alpha| \leq 1$ olacağından $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ kümelerine ihtiyaç yoktur. Bunların yerine $x \in \text{dom}(\alpha)$ ise $x\alpha$ yazılır ve $x \notin \text{dom}(\alpha)$ ise hiçbir şey yazılmaz. Dolayısıyla $\alpha \in T_n$ ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\alpha & 2\alpha & \dots & n\alpha \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır.

Buradan

- $|X_n \times X_n| = n^2$,
- $|B_n| = 2^{n^2}$,
- $|PT_n| = (n+1)^n$,
- $|T_n| = n^n$,
- $|I_n| = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 r!$
- $|S_n| = n!$

olduğu kolayca görülmektedir.

Tanım 3.2.15. $\alpha \in P_n$ olmak üzere

$$Fix(\alpha) = \{x \in dom(\alpha) : x\alpha = x\}$$

$$Shift(\alpha) = \{x \in dom(\alpha) : x\alpha \neq x\}$$

kümelerine sırasıyla α nın **sabit noktalarının kümesi** ve α nın **sabit olmayan noktalarının kümesi** denir.

$Fix(\alpha)$ yerine $F(\alpha)$ da yazılabilir. $Shift(\alpha)$ kümesinin eleman sayısı $shift(\alpha)$ ile gösterilir.

Örnek 3.2.16. $X = \{1,2,3,4\}$ olsun. $\alpha = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1123 \end{pmatrix} \in T_4$ ise

$$Fix(\alpha) = \{1\}$$

$$Shift(\alpha) = \{2,3,4\}$$

olur.

Teorem 3.2.17. $\alpha, \beta \in T_n$ için

$$im(\alpha \circ \beta) \subseteq im(\beta)$$

$$ker(\alpha) \subseteq ker(\alpha \circ \beta)$$

olur.

İspat: $im(\alpha \circ \beta) \subseteq im(\beta)$ olduğunu gösterelim. $y \in im(\alpha \circ \beta)$ ise $(x, y) \in \alpha \circ \beta$ olacak şekilde bir $x \in X_n$ vardır. Dolayısıyla $(x, z) \in \alpha$ ve $(z, y) \in \beta$ olacak şekilde bir $z \in X_n$ vardır. Böylece $y \in im(\beta)$ olup, $im(\alpha \circ \beta) \subseteq im(\beta)$ elde edilir.

$ker(\alpha) \subseteq ker(\alpha \circ \beta)$ olduğunu gösterelim. $(x, y) \in ker(\alpha)$ ise $x\alpha = y\alpha$ olup, $(x\alpha)\beta = (y\alpha)\beta$ yani $x(\alpha \circ \beta) = y(\alpha \circ \beta)$ olduğundan $(x, y) \in ker(\alpha \circ \beta)$ olur. Böylece $ker(\alpha) \subseteq ker(\alpha \circ \beta)$ elde edilir. $\square$

Örnek 3.2.18. T_5 de $\alpha = \begin{pmatrix} 12345 \\ 13322 \end{pmatrix}$ ve $\beta = \begin{pmatrix} 12345 \\ 44455 \end{pmatrix}$ elemanlarını alalım.

$im(\alpha) = \{1,2,3\}$, $im(\beta) = \{4,5\}$ ise $\alpha.\beta = \begin{pmatrix} 12345 \\ 13322 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12345 \\ 44455 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345 \\ 44444 \end{pmatrix}$ olup $im(\alpha.\beta) = \{4\} \subseteq im(\beta)$ olur.

Tanım 3.2.19. $T_n \setminus S_n = ST_n = Sing_n = \{\alpha \in T_n : |im(\alpha)| \leq n-1\}$ olarak tanımlanan ST_n kümesinin elemanlarına **singüler dönüşümler** ve ST_n kümesine **singüler dönüşümler yarıgrubu** denir.

Ayrıca $S_n \leq T_n$ ancak $S_n \not\leq T_n$ olduğu ve $ST_n \leq T_n$ olduğu kolayca görülür.

Tanım 3.2.20. X_n kısmi sıralı bir küme ve $\alpha \in T_n$ olmak üzere her $x, y \in X_n$ için $x \leq y$ olduğunda $x\alpha \leq y\alpha$ oluyor ise α ya bir **sıra koruyan dönüşüm** denir.

Tüm sıra koruyan dönüşümlerin kümesini O_n ile gösterilir. Sıra koruyan dönüşümlere örnek olarak $\beta = \begin{pmatrix} 12345 \\ 11234 \end{pmatrix} \in O_5$ elemanını verilebilir.

Teorem 3.2.21. O_n, T_n nin bir alt monoidi olur.

İspat: $\alpha, \beta \in O_n$ olsun. Eğer $x \leq y$ ise $\alpha \in O_n$ olduğundan $x\alpha \leq y\alpha$ olur. $\beta \in O_n$ olduğundan $(x\alpha)\beta \leq (y\alpha)\beta$ olur. Böylece $x \leq y$ ise $(x\alpha)\beta \leq (y\alpha)\beta$ olduğundan $\alpha \circ \beta \in O_n$ elde edilir. O halde O_n, T_n nin bir alt monoidi olur.

$\alpha \in O_n$ ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1\alpha \leq & 2\alpha \leq & 3\alpha \leq \dots & \leq n-1\alpha \leq & n\alpha \end{pmatrix}$$

olacağından x_1 tane 1, x_2 tane 2, ..., x_n tane n olup

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n, (x_i \geq 0)$$

denkleminin farklı çözüm sayısı O_n , yarıgrupunun eleman sayısıdır. O halde

$$|O_n| = \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n}$$

elde edilir. $\square$

Tanım 3.2.22. $\alpha \in PT_n$ olsun. Eğer $\forall x, y \in \text{dom}(\alpha)$ için $x \leq y$ iken $x\alpha \leq y\alpha$ oluyorsa α ya bir **kısmi sıra koruyan dönüşüm** denir.

Tüm kısmi sıra koruyan dönüşümlerin kümesini PO_n ile gösterelim. Kısmi sıra koruyan dönüşümlere örnek olarak $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & - & 4 & 5 & - \end{pmatrix} \in PO_5$ verilebilir.

Benzer şekilde PO_n nin eleman sayısını bulalım: $\alpha \in PO_n$ olsun. Eğer $|\text{dom}(\alpha)| = n$ ise $\alpha \in O_n$ olduğundan $|\text{dom}(\alpha)| = n$ olacak şekilde $\binom{2n-1}{n}$ tane kısmi sıra koruyan vardır. Eğer $1 \leq r \leq n-1$ için $|\text{dom}(\alpha)| = r$ ise $\binom{n}{r}$ farklı tanım kümesi vardır. Ayrıca, her bir tanım kümesi için

$$\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r-1}{n}$$

tane kısmi sıra koruyan dönüşüm vardır. Boş dönüşümde sıra koruyan olduğundan

$$|PO_n| = 1 + \left(\sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} \binom{n+r-1}{n} \right) + \binom{2n-1}{n} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \binom{n+r-1}{n}$$

elde edilir.

3.3. Grafik ve Orbit

Tanım 3.3.1. Köşeler kümesi olarak adlandırılan boş olmayan sonlu bir küme ve kenarlar listesi olarak adlandırılan köşeler kümesinin sırasız ikililerinin oluşturduğu listeden oluşan yapıya **grafik** denir.

Bir G grafiğinin köşeler kümesi $V(G)$ ile kenarların listesi $E(G)$ olmak üzere $G = (V(G), E(G))$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.2. Eğer bir kenarın iki ucunda aynı köşe ise bu kenara **halka** (loop ya da aşık devir) denir. u ve v köşelerini birleştiren birden fazla kenar varsa bu kenara **kathı kenar** denir. G grafiğinde halka ve kathı kenar yok ise bu grafiğe **basit grafik** denir.

Tanım 3.3.3. Köşeler kümesi olarak adlandırılan boş olmayan sonlu bir küme ve oklar (yönlendirilmiş kenarlar) listesi olarak adlandırılan köşeler kümesinin sıralı ikililerinin oluşturduğu listeden oluşan grafiğe **yönlendirilmiş grafik** veya **diyagram (directedgraph, digraph)** denir. G bir yönlü grafik olsun. G nin oklarının yönü silindiğinde (yani sıralı ikilileri sırasız kabul edildiğinde) elde edilen grafiğe G nin **öz grafiği** denir.

Bir G yönlü grafiği köşeler kümesi $V(G)$ ile okların listesi $A(G)$ olmak üzere $G = (V(G), A(G))$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.4. G bir (yönlü) grafik olsun. $v_1, v_2, \dots, v_{k+1} \subseteq V(G)$ olmak üzere $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_kv_{k+1}$ şeklindeki G nin kenarlarından (oklarından) elde edilen

diziye uzunluğu k olan bir **yol** denir ve $v_1 v_2 \dots v_{k+1}$ ile gösterilir. Bir yolda tüm kenarlar (oklar) birbirinden farklı ise bu yola bir **iz** denir. Tüm köşeleri farklı olan bir ize **patika** denir. $uv_1, v_1 v_2, \dots, v_{k-1} v_k, v_k u$ şeklinde u dan u ya olan bir yola **kapalı yol** denir. Tüm kenarları (okları) birbirinden farklı olan bir kapalı yola bir **kapalı iz** ve ayrıca, $u, v_1, v_2, \dots, v_k$ köşeleri de birbirinden farklı ise bu kapalı ize bir **devir** denir.

Tanım 3.3.5. Bir G grafiğinde her farklı iki köşe arasında bir patika var ise G grafiğine **bağlantılı grafik** denir. G bir yönlü grafik olsun. Eğer G nin öz grafiği bağlantılı ise G grafiğine **bağlantılı yönlü grafik** denir. Eğer G yönlü grafiğinin herhangi iki köşesini birleştiren bir yönlü patika var ise G grafiğine **sıkı bağlantılı yönlü grafik** denir.

Tanım 3.3.6. Köşe kümesi X_n ve yönlü kenar listesi $\{(x, x\alpha) : x \in X_n\}$ olan yönlü grafiğe **α dönüşümünün yönlü grafiği** denir. Ayrıca α nın yönlü grafiğinin bağlantılı bileşenlerinin köşelerine **α dönüşümünün orbitleri** denir.

$\alpha \in T_n, x, y \in X_n$ olsun. X_n üzerindeki $\equiv_\alpha$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlayalım.

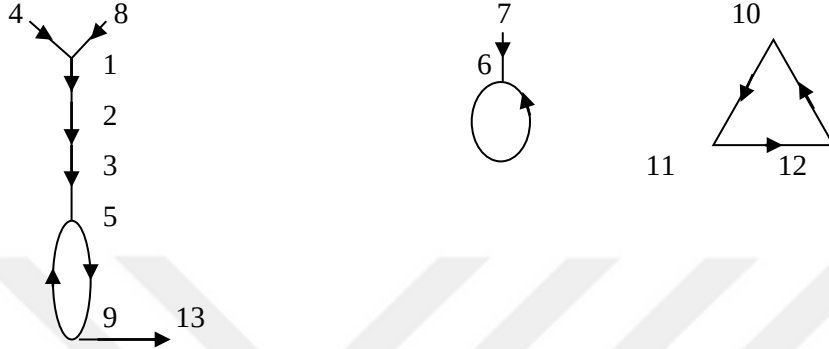
$$x \equiv_\alpha y \Leftrightarrow x\alpha^r = y\alpha^q$$

olacak şekilde $r, q \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ mevcut olmasıdır. $\equiv_\alpha$ bağıntısı X_n üzerinde denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısının denklik sınıflarına **α dönüşümünün orbitleri** denir.

α dönüşümünün orbitleri $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ şeklinde semboller ile gösterilir.

Tanım 3.3.7. $\emptyset \neq A \subseteq X_n$ olsun. Eğer $x, y, z \in X_n$ için $x, z \in A$ ve $x < y < z$ olduğunda $y \in A$ ise A ya bir **konveks küme** denir.

Örnek 3.3.8. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 9 & 6 & 6 & 1 & 5 & 11 & 12 & 10 & 9 \end{pmatrix} \in T_{13}$ elemanının orbit grafiğini gösterelim.



Böylece α dönüşümünün orbitleri;

$$\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,8,9,13\}, \Omega_2 = \{6,7\}, \Omega_3 = \{10,11,12\}$$

olur.

$\alpha \in T_n$ için $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m | \Omega_i| = r_i, 1 \leq i \leq m$ olsun. Γ_α nın m tane bağlantılı bileşeni vardır. Bu bağlantılı bileşenler $\Gamma_{\alpha, \Omega_i}$ olmak üzere

$$V(\Gamma_{\alpha, \Omega_i}) = \Omega_i \text{ kümesi köşeleri,}$$

$$E(\Gamma_{\alpha, \Omega_i}) = \{(x, x\alpha) : x \in \Omega_i\} \text{ kümesi kenarların kümesidir.}$$

Ayrıca her $1 \leq i \leq n$ için $\Gamma_{\alpha, \Omega_i}$ bağlantılı bileşeni r_i köşeli ve r_i kenarlı bağlantılı bir grafik olup bir ağaç grafiği olamaz.

Önerme 3.3.9. Bir $\alpha \in T_n$ elemanının grafiğinin her bir bağlantılı bileşeni $\Gamma_{\alpha, \Omega_i}$ devir, loop veya devir/loop ekli ağaçlardan oluşur.

İspat: İspat için Higgins (1993) bakınız. $\square$

Önerme 3.3.10. $\alpha \in O_n$ olsun. α nın her bir orbiti bir tek sabit nokta içerir. Ayrıca her bir orbit konvektir.

İspat: Higgins (1993), Proposition 1.5. e bakınız. $\square$

3.4. Doğuray Kümeleri

Tanım 3.4.1. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ olsun. S nin A kümesini içeren en küçük alt yarıgrubuna **A tarafından doğurulan alt yarıgrup** denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir. Eğer $\langle A \rangle = S$ ise **A kümesine S yarıgrubunun bir doğurayı** denir.

Eğer $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ise $\langle A \rangle = \langle \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \rangle$ yerine $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ yazılır. Eğer $A = \{a\}$ ise $\langle A \rangle = \langle \{a\} \rangle$ yerine $\langle a \rangle$ yazılır.

Tanım 3.4.2. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. $\langle a \rangle$ yarıgrubuna **tek doğuraylı (monogenic) alt yarıgrup** denir.

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots\} = \{a^k : k \in \mathbb{Z}^+\}$$

kümesi sonsuz sayıda farklı eleman içeriyor (diğer bir ifade ile $a^k = a^l \Rightarrow k = l$) ise $\langle a \rangle$ yarıgrubuna **sonsuz monogenic yarıgrup** denir.

Aksi halde $\{a, a^2, \dots\}$ kümesi sonlu olur. Gerçekten $a^k = a^l$ olacak şekilde farklı iki pozitif tamsayı mevcut ise

$$A = \{k \in \mathbb{N} : a^k = a^l \text{ ve } k \neq l \in \mathbb{N}\}$$

kümesi boş olmayıp minimum elemanı mevcuttur. $\min(A) = m$ ise

$$B = \{ k \in \mathbb{N} : a^{m+k} = a^m (k \in \mathbb{N}) \}$$

kümesi de boş olmayıp minimum elemanı mevcuttur. $\min(B) = r$ ise

$$\langle a \rangle = \{ a, a^2, a^3, \dots, a^{m-1}, a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1} \}$$

olur.

Tanım 3.4.3. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olmak üzere

$$\langle a \rangle = \{ a, a^2, a^3, \dots, a^{m-1}, a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1} \}$$

ise m pozitif tamsayısına a nın **indeksi** ve r pozitif tamsayısına da a nın **periyodu** denir.

Ayrıca bu monogenic yarıgrup $M_{m,r}(a)$ ile gösterilir. Yani

$$\langle a \rangle = M_{m,r}(a) = \{ a, a^2, a^3, \dots, a^{m-1}, a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1} \}$$

olup, $m + r - 1$ elemanlı ve $a^{m+r} = a^m$ olur.

Teorem 3.4.4. S bir yarıgrup $a \in S$ ve a elemanının indeksi m , periyodu r olsun.

$k, l \in \{0, 1, 2, \dots, r - 1\}$ elemanları

$$m + k \equiv 0(\text{mod } r) \text{ ve } m + l \equiv 1(\text{mod } r)$$

olacak şekilde seçilirse

$$K_a = \{ a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1} \}$$

kümesi birim elemanı a^{m+k} olan ve a^{m+l} tarafından doğurulan bir devirli gruptur.

İspat: Howie (1995) Bölüm 1.2'ye bakınız. $\square$

Tanım 3.4.5. S bir yarıgrup olsun. Her $a \in S$ için $\langle a \rangle$ monogenic yarıgrubu sonlu ise S ye **periyodik yarıgrup** denir.

Her sonlu yarı grubun periyodik olduğu açıktır.

Tanım 3.4.6. $\langle A \rangle = S$ olacak şekilde S yarı grubunun bir sonlu A alt kümesi mevcut ise S yarı grubuna **sonlu doğuraylı yarıgrup** denir. Eğer S sonlu doğuraylı yarıgrup ise

$$rank(S) = \min\{|A| : \langle A \rangle = S \text{ ve } A \subseteq S \text{ sonlu}\}$$

sayısına S nin **rankı** denir. Eğer S idempotentlerden oluşan sonlu bir küme tarafından doğruluyor ise S yarı grubunun **idempotent rankı**

$$idrank(S) = \min\{|A| : \langle A \rangle = S \text{ ve } A \subseteq E(S) \text{ sonlu}\}$$

olarak tanımlanır. Eğer S nilpotentlerden oluşan sonlu bir küme tarafından doğruluyor ise S yarı grubunun **nilpotent rankı**

$$nilrank(S) = \min\{|A| : \langle A \rangle = S \text{ ve } A \subseteq N(S) \text{ sonlu}\}$$

olarak tanımlanır.

Bu tanımlardan açıkça görüleceği üzere

$$\text{rank}(S) \leq \text{idrank}(S), \text{rank}(S) \leq \text{nilrank}(S)$$

olur.

Tanım 3.4.7. $\alpha \in S_n$ ve $a_1, a_2, \dots, a_r \in X_n$ farklı elemanlar olmak üzere her $i = 1, 2, \dots, r-1$ için $a_i \alpha = a_{i+1}$, $a_r \alpha = a_1$ ve her $x \in X_n \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ için $x\alpha = x$ ise α ya bir **r -devir** denir; ve $\alpha = (a_1 a_2 \dots a_r)$ yazılır. Bir 2-devire $(a_1 a_2)$ bir **transpozisyon** denir.

Tanım 3.4.8. $k, l \in \mathbb{Z}^+$ için eğer $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ve $\{b_1, b_2, \dots, b_l\}$ iki ayrık küme ise $(a_1 a_2 \dots a_k)$ ve $(b_1 b_2 \dots b_l)$ devirlerine **ayrık devir** denir.

Permütasyon grubu S_n ($n \geq 2$) ayrık devirlerin çarpımı olarak yazılabilir. Her devir transpozisyonların çarpımı olduğundan S_n , transpozisyonlarının oluşturduğu küme tarafından doğrudur. $(a_1 a_2) = (a_2 a_1)$ olduğundan S_n de $\frac{n(n-1)}{2}$ tane transpozisyon vardır. Şimdi $\alpha = (12)$ ve $\beta = (12 \dots n)$ olarak alalım. O zaman

$$\begin{aligned} \beta^{-1} &= \beta^{n-1}, \\ \beta^{-1} \circ \alpha \circ \beta &= (23) \end{aligned}$$

olur. Daha genel olarak her $i = 1, 2, \dots, n-1$ için

$$\beta^{-i+1} \circ \alpha \circ \beta^{i-1} = (i \ i+1)$$

olur. Ayrıca, her $j = 2, 3, \dots, n-1$ için

$$(j \ j+1) \circ (j-1 \ j) \circ \dots \circ (23) \circ (12) \circ (23) \circ \dots \circ (j \ j+1) = (1 \ j+1)$$

olur. Yani $(12), (23), \dots, (n-1 n)$ transpozisyonları ile $(12), (13), \dots, (1n)$ transpozisyonları, α ve β permütasyonlarının çarpımı olarak yazılabilir. Son olarak; her $1 \leq i < j \leq n$ için

$$(1 j) \circ (1 i) \circ (1 j) = (i j)$$

olur. Böylece her transpozisyon α ve β permütasyonlarının çarpımı olarak yazılabilir. Dolayısıyla her $n \geq 2$ için

$$S_n = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olur.

Sonuç 3.4.9. $n \geq 3$ için $\text{rank}(S_n) = 2$ olur.

İspat: $\alpha = (12)$ ve $\beta = (12 \dots n)$ olarak alalım. Yukarıdaki bilgilerden dolayı her $n \geq 2$ için

$$S_n = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca, $n \geq 3$ için S_n değişmeli olmadığından devirli olamaz. S_n devirli olmadığından $\text{rank}(S_n) \geq 2$ olur. Ayrıca $A = \{\alpha, \beta\}$ olmak üzere iki elemanlı A kümesi S_n permütasyonlar grubunu doğuruyor olup $\text{rank}(S_n) = 2$ olur. $\square$

Teorem 3.4.10. $n \geq 3$ için $\text{rank}(T_n) = 3$ olur.

İspat: Her farklı $i, j \in X_n$ için $i\delta_{i,j} = j$ ve her $i \neq x \in X_n$ için $x\delta_{i,j} = x$ olarak tanımlanan $\delta_{i,j}$ dönüşümleri $\|ij\|$ ile gösterelim. Ayrıca, $\delta = \delta_{1,2} = \|12\| \in T_n$, $\alpha = (12)$ ve $\beta = (12 \dots n)$ olarak alalım. O zaman

$$(1 \ i) \circ \|12\| \circ (1 \ i) = \|i2\| (i \geq 3)$$

$$(2 \ j) \circ \|12\| \circ (2 \ j) = \|1j\| (j \geq 3)$$

$$(1 \ i) \circ (2 \ j) \circ \|12\| \circ (2 \ j) \circ (1 \ i) = \|ij\| (i, j \geq 3, i \neq j)$$

$$(i \ j) \circ \|ij\| \circ (i \ j) = \|ji\| (i, j \geq 1, i \neq j)$$

olur. Şimdi kabul edelim ki $\phi \in T_n$ ve $|im(\phi)| = r \leq n - 1$ olsun. O zaman $i\phi = j\phi$ olacak şekilde $i \neq j$ ve $k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus im(\phi)$ vardır. Eğer $\hat{\phi}$ dönüşümünü $i\hat{\phi} = k$ ve her $l \neq i$ için $l\hat{\phi} = l\phi$ olarak tanımlanır ise

$$|im(\hat{\phi})| = r + 1 \text{ ve } \|ij\|\hat{\phi} = \phi$$

olur. Eğer $\hat{\phi} \in S_n$ ise açıkça $\hat{\phi} \in \langle \alpha, \beta, \delta \rangle$ olur. Aksi halde benzer şekilde devam edilir. Böylece $T_n = \langle \alpha, \beta, \delta \rangle$ olur. Ayrıca $T_n \setminus S_n$ yani singüler dönüşümler yarıgrubu T_n in ideali olduğundan T_n in her doğuray kümesi S_n in bir doğuray kümesini içermek zorundadır. Bununla birlikte S_n in herhangi bir doğuray kümesi singüler dönüşümleri doğuramayacağından en az bir singüler dönüşüm doğuray kümesinde olmalıdır. Böylece $rank(S_n) = 2$ olduğundan $rank(T_n) \geq 3$ olmalıdır. Böylece $T_n = \langle \alpha, \beta, \delta \rangle$ olduğundan $rank(T_n) = 3$ olup ispat tamamlanır. $\square$

J.M.Howie (1978) tarafından singüler dönüşümler yarıgrubunun idempotent rankının $\frac{n(n-1)}{2}$ ve Gomes ve Howie (1987) tarafından yapılan çalışmada singüler dönüşümler yarıgrubunun rankının, idempotent rankına eşit olduğunu göstermiştir. Yani

$$\text{rank}(ST_n) = \text{rank}(ST_n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

olur.

Tanım 3.4.11. $\text{Def}(\alpha) = X_n \setminus \text{im}(\alpha)$ olsun. $\text{def}(\alpha) = |\text{Def}(\alpha)|$ sayısına α dönüşümünün **noksanlığı (defecti)** denir.

Teorem 3.4.12. $n \geq 2$ için T_n nin noksanlığı sıfır olmayan idempotentler tarafından üretilen alt yarıgrubu $ST_n = T_n \setminus S_n$ olur. Diğer bir ifade ile $ST_n = \langle E(ST_n) \rangle$ olur. Ayrıca, ST_n nin her elemanı noksanlığı 1 olan idempotentlerin bir çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: $n \geq 2$ için aşikâr. $n \geq 3$ olduğunu varsayalım. Noksanlığı 1 olan herhangi bir α elemanını ele alalım. Eğer $\text{shift}(\alpha) = 1$ ise α zaten noksanlığı 1 olan bir idempotent olup ispat biter. Genelliği bozmaksızın

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} \quad (r \geq 2)$$

ve her $1 \leq i \leq r$ için $a_i \neq i$ olacak şekilde alalım. Ayrıca, $\text{Def}(\alpha) = \{z\}$ olsun. O halde 4 farklı durum vardır:

- (i) $1 \leq i \leq r$ için $a_i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $a_1 = a_2 \notin \{1, 2\}$, $z \notin \{1, 2\}$;
- (ii) $1 \leq i \leq r$ için $a_i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $a_1 = a_2 \notin \{1, 2\}$, $z = 1$;
- (iii) $a_r = r+1$, $z \in \{1, 2, \dots, r-1\}$;
- (iv) $a_r = r+1$, $z = r$.

(i) durumunda; eğer

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ a_1 & 2 & a_3 & \dots & a_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} \text{ ve } \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

alınır ise ε noksanlığı 1 olan idempotent, β noksanlığı 1 ve $shift(\beta) = r - 1$ olan dönüşüm ve $\alpha = \varepsilon\beta$ elde edilir.

(ii) durumunda; eğer

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & 1 & a_3 & \dots & a_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} \text{ ve } \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

alınır ise ε noksanlığı 1 olan idempotent, β noksanlığı 1 ve $shift(\beta) = r - 1$ olan dönüşüm ve $\alpha = \beta\varepsilon$ elde edilir.

(iii) durumunda; eğer

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r-1 & r & \dots & n \\ a_1 & \dots & a_{r-1} & r & \dots & n \end{pmatrix} \text{ ve } \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & r-1 & r+1 & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

alınır ise ε noksanlığı 1 olan idempotent, β noksanlığı 1 ve $shift(\beta) = r - 1$ olan dönüşüm ve $\alpha = \beta\varepsilon$ elde edilir.

(iv) durumunda eğer

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & \dots & n \\ r & a_2 & \dots & a_{r-1} & r & \dots & n \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & r-1 & r+1 & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & r-1 & a_1 & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

alınırsa ε ve η noksanlığı 1 olan idempotentler, β noksanlığı 1 ve $shift(\beta) = r - 1$ olan dönüşüm ve $\alpha = \varepsilon\beta\eta$ elde edilir.

Eğer $r - 1 = 1$ ise β da noksanlığı 1 olan idempotent olup, ispat tamamlanır. Aksi halde benzer işlemler β için yapılır; her seferinde $shift(\alpha)$ bir azalacağından α , noksanlığı 1 olan idempotentlerin çarpımı olarak yazılır. $\square$

Teorem 3.4.13. $n \geq 3$ için $\alpha = (1\ 2)$, $\beta = (1\ 2 \cdots n)$, $\delta = \|12\|$ ve $\xi = \begin{pmatrix} 2 & 3 \cdots n \\ 2 & 3 \cdots n \end{pmatrix} \in PT_n$ ($dom(\xi) = \{2, \dots, n\}$ ve her $x \in dom(\xi)$ için $\xi x = x$) olsun.

$$PT_n = \langle \alpha, \beta, \delta, \xi \rangle$$

olur.

İspat: $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ nin her bir öz altkümesi Y için $X_n \setminus Y$ kümesi üzerinde tanımlı birim dönüşümünü $1_{X_n \setminus Y}$ yerine ξ_Y ile gösterelim. Böylece $\xi = \xi_{\{1\}}$ olur.

Bu durumda her $i = 2, 3, \dots, n$ için

$$(1i)\xi(1i) = \xi_{\{i\}}$$

ve ayrıca, her boş olmayan öz altkümesi Y için

$$\xi_Y = \prod_{i \in Y} \xi_{\{i\}}$$

olur. Her bir $\alpha \in PT_n$ için $\hat{\alpha}$ tam dönüşümü

$$x\hat{\alpha} = \begin{cases} x\alpha, & \text{eğer } x \in dom(\alpha) \\ x, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda eğer $X_n \setminus dom(\alpha) = Y$ alınırsa ise $\alpha = \xi_Y \hat{\alpha}$ olur. Dolayısıyla $T_n = \langle \alpha, \beta, \delta \rangle$ olduğundan $PT_n = \langle \alpha, \beta, \delta, \xi \rangle$ olur.

Sonuç 3.4.14. $n \geq 3$ olmak üzere $rank(PT_n) = 4$ olur.

İspat: $PT_n \setminus T_n$ mutlak kısmi dönüşümler yarıgrubu PT_n in bir ideali olduğundan PT_n in her doğuray kümesi T_n in bir doğuray kümesini içermek zorundadır. Ayrıca,

T_n in herhangi bir doğuray kümesi mutlak kısmi dönüşümleri doğuramayacağından en az bir mutlak kısmi dönüşüm doğuray kümesinde olmalıdır. Böylece $rank(T_n) = 3$ olduğundan $rank(PT_n) \geq 4$ olup, $PT_n = \langle \alpha, \beta, \delta, \xi \rangle$ olur. Böylece $rank(PT_n) = 4$ elde edilir. $\square$

Teorem 3.4.15. O_n yarıgrubunun her elemanı O_n de ki idempotentlerin bir çarpımı olarak ifade edilebilir. Yani $O_n = \langle E(O_n) \rangle$ olur.

İspat: $Def(\alpha)$ kümesi Tanım 3.4.12. de tanımlandığı gibi olsun. O_n nin noksanlığı sıfır olan tek elemanı birim eleman ve birim elemanda bir idempotent olduğundan noksanlığı sıfırdan farklı olan elemanları inceleyeceğiz. O halde bu teoremin ispatı için aşağıdaki durumları inceleyelim.

- I. O_n yarıgrubunun noksanlığı 1 den büyük olan bir elemanı, noksanlığı 1 olan idempotentlerin ve noksanlığı 1 olan bir tek elemanın çarpımı olarak ifade edilebilir.
- II. O_n yarıgrubunun noksanlığı 1 olan bir elemanı, noksanlığı 1 olan idempotentlerin bir çarpımı olarak ifade edilebilir olduğunu göstermemiz yeterlidir.
- I. $\alpha \in O_n$ ve $def(\alpha) = k > 1$ olsun.

$$\mathcal{P}(\alpha) = \{y \in X_n \alpha : |y\alpha^{-1}| \geq 2\}$$

$$d_\alpha = \min\{|z - p| : z \in Def(\alpha), p \in \mathcal{P}(\alpha)\}$$

olarak alalım. α bire-bir olmadığından $\mathcal{P}(\alpha) \neq \emptyset$ ve $Def(\alpha) \cap \mathcal{P}(\alpha) = \emptyset$ olur; ve dolayısıyla $d_\alpha \geq 1$ olur. d_α üzerine tümevarım uygulayalım.

Eğer $d_\alpha = 1$ ise genelliği kaybetmeksizin $p + 1 \in Def(\alpha)$ ve $p \in \mathcal{P}(\alpha)$ varsayabiliriz.

$$q = \max\{x \in X_n : x\alpha = p\}$$

olsun. $p\alpha^{-1}$, birden fazla eleman içerdiğinden dolayı $q'\alpha = p$ olacak şekilde $q' \leq q - 1$ vardır. Bu durumda $p = q'\alpha \leq (q - 1)\alpha \leq q\alpha = p$ olduğundan $(q - 1)\alpha = p$ olur. O zaman $\varepsilon: X_n \rightarrow X_n$ dönüşümü

$$q\varepsilon = q - 1, x\varepsilon = x(x \neq q)$$

olarak tanımlansın. Bu dönüşüm O_n de defecti 1 olan bir idempotent olur. Ayrıca, $\beta: X_n \rightarrow X_n$ dönüşümü de

$$q\beta = p + 1 \text{ ve } x\beta = x\alpha(x \neq q)$$

olarak tanımlansın. O halde $\beta \in O_n$, $|Def(\beta)| = |Def(\alpha)| - 1 = k - 1$ ve $\alpha = \varepsilon\beta$ olur.

Eğer $d_\alpha > 1$ ise genelliği kaybetmeksizin

$$z + 1, \dots, z + d_\alpha - 1 \in X_n\alpha - \mathcal{P}(\alpha) \text{ ve } z + d_\alpha \in \mathcal{P}(\alpha)$$

olacak şekilde $z \in Def(\alpha)$ olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda $(z + 1)\alpha^{-1} = t$ ve $(t + 1)\alpha = z + 2$ olur. Eğer $\gamma: X_n \rightarrow X_n$ dönüşümü

$$t\gamma = z \text{ ve } x\gamma = x\alpha(x \neq t)$$

olarak tanımlanırsa $\gamma \in O_n$ ve $|Def(\gamma)| = |Def(\alpha)| = k$ olur. Ayrıca

$$(z + 1) \in Def(\gamma) \text{ ve } z + d_\alpha \in \mathcal{P}(\gamma),$$

ve dolayısıyla $d_\gamma = d_\alpha - 1$ olur. Ayrıca $\eta: X_n \rightarrow X_n$ dönüşümü de

$$z\eta = z + 1, x\eta = x(x \neq z)$$

olarak tanımlansın. Bu dönüşüm O_n de noksanlığı 1 olan bir idempotent olup $\gamma\eta = \alpha$ olur.

Tümevarım hipotezinden $\gamma = \varepsilon_1\beta\varepsilon_2 \dots \varepsilon_s$ olacak şekilde noksanlığı $k - 1$ olan β ve O_n de noksanlığı 1 olan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s$ idempotentlerinin var olduğunu varsayarsak $\alpha = \varepsilon_1\beta\varepsilon_2 \dots \varepsilon_s\eta$ olur.

$\beta \in O_n$ ve eğer $def(\beta) = k - 1 > 1$ ise yukarıdaki gibi noksanlığı 1 olan idempotentlerin ve noksanlığı $k - 2$ olan δ nın çarpımı şeklinde yazarız. Bu şekilde devam edilirse $\alpha \in O_n$ ve $def(\alpha) = k > 1$ elemanı noksanlığı 1 olan idempotentlerin ve noksanlığı 1 olan bir tek elemanın çarpımı olarak ifade edilebilir.

II. $\alpha \in O_n$ için $S(\alpha) = \{x \in X_n: x\alpha \neq x\}$ kümesinin eleman sayısını s_α ile gösteririz. $s_\alpha = 1$ ise α defecti 1 olan bir idempotenttir. Bunu görmek için $S(\alpha) = \{u\}$ alalım. O halde $u\alpha \neq u$ olup $u\alpha^2 = u\alpha$ olur. Eğer $x \neq u$ ise $x\alpha = x\alpha^2 = x$ olur. Böylece α idempotentir ve α nın görüntü kümesi X_n nin u hariç tüm elemanlarını içerdiğinden noksanlığı 1 olur.

α dönüşümünün noksanlığı 1 ve $s_\alpha > 1$ olsun. O halde $u\alpha = (u + 1)\alpha$ olacak şekilde bir tek $u \in X_n$ vardır. (α sıra koruyan olduğu için X_n nin ardışık iki elemanının görüntüsü aynı olur.) Ayrıca $Def(\alpha) = \{v\}$ olduğunu varsayalım.

$$u < v \text{ ise}$$

$$x\alpha = x(x \leq u), x\alpha = x - 1(u + 1 \leq x \leq v) \text{ ve } x\alpha = x(x \geq v + 1)$$

olur. Şimdi $\varepsilon_1: X_n \rightarrow X_n$ ve $\beta: X_n \rightarrow X_n$ dönüşümleri sırası ile

$$(u + 1)\varepsilon_1 = u \text{ ve } x\varepsilon_1 = x(x \neq u + 1)$$

$$(u + 1)\beta = u + 1 \text{ ve } x\beta = x\alpha(x \neq u + 1)$$

olarak tanımlanırsa ε_1 ve β nın her ikisinde O_n de ve noksanlığı 1 olur. Ayrıca ε_1 bir idempotent, $s_\beta = s_\alpha - 1$ ve $\alpha = \varepsilon_1\beta$ olur.

$$u \geq v \text{ ise}$$

$$x\alpha = x(x < v), x\alpha = x + 1(v \leq x \leq u) \text{ ve } x\alpha = x(x \geq u + 1)$$

olur. Şimdi de $\varepsilon_1: X_n \rightarrow X_n$ ve $\beta: X_n \rightarrow X_n$ dönüşümleri sırası ile

$$u\varepsilon_1 = u + 1 \text{ ve } x\varepsilon_1 = x(x \neq u)$$

$$u\beta = u \text{ ve } x\beta = x\alpha(x \neq u)$$

olarak tanımlanırsa ε_1 ve β nın her ikisinde O_n de ve noksanlığı 1 olur. Ayrıca ε_1 bir idempotent, $s_\beta = s_\alpha - 1$ ve $\alpha = \varepsilon_1\beta$ olur.

Böylece $\alpha \in O_n$ noksanlığı 1 ve $s_\alpha > 1$ ise $\alpha = \varepsilon_1\beta$ ve $s_\beta = s_\alpha - 1$ olacak şekilde O_n de noksanlığı 1 olan bir β elemanı ve O_n de noksanlığı 1 olan bir ε_1 idempotent vardır. $\beta \in O_n$ noksanlığı 1 ve $s_\beta > 1$ ise yukarıdaki gibi $\beta = \varepsilon_2\eta$ ve $s_\eta = s_\beta - 1$ olacak şekilde O_n de noksanlığı 1 olan ε_2 idempotent ve O_n de noksanlığı 1 olan bir η elemanı vardır. Bu şekilde devam edilirse $\alpha \in O_n$ noksanlığı 1 ve $s_\alpha > 1$ olan elemanı

$$\alpha = \varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_r\varepsilon \text{ ve } s_\varepsilon = 1$$

olacak şekilde O_n de noksanlığı 1 olan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$ idempotentleri ve O_n de noksanlığı 1 olan ε elemanı vardır. Ayrıca $s_\varepsilon = 1$ olup, ε idempotent olur.

Böylece O_n nin noksanlığı 1 olan bir elemanı noksanlığı 1 olan idempotentlerin bir çarpımı olarak yazılabilir. $O_n = \langle E(O_n) \rangle$ elde edilir. $\square$

Teorem 3.4.16. $n \geq 2$ ve $O_n = \{\alpha \in \text{Sing}_n : (\forall x, y \in X_n) x \leq y \Rightarrow x\alpha \leq y\alpha\}$ olsun. O halde $\text{rank}(O_n) = n$ olur.

İspat: Gomes, Howie (1992), Theorem 2.7. ye bakınız. $\square$

Teorem 3.4.17. $n \geq 2$ ve $O_n = \{\alpha \in \text{Sing}_n : (\forall x, y \in X_n) x \leq y \Rightarrow x\alpha \leq y\alpha\}$ olsun. O halde $\text{idrank}(O_n) = 2n - 2$ dir.

İspat : Gomes, Howie (1992), Theorem 2.8. e bakınız. $\square$

3.5. Green Denklik Bağlılıkları ve Regüler Yarıgruplar

S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun.

$$S^1 a = Sa \cup \{a\} = \{xa : x \in S^1\}$$

$$aS^1 = aS \cup \{a\} = \{ay : y \in S^1\}$$

$$S^1 a S^1 = SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\} = \{xay : x, y \in S^1\}$$

kümelerine sırasıyla, S yarıgrupunun a elemanını içeren en küçük sol, sağ ve iki taraflı ideali olduğunu hatırlayalım.

Tanım 3.5.1. S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun.

$$\mathcal{L} = \{(a, b) \in S \times S : S^1 a = S^1 b\}$$

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in S \times S : aS^1 = bS^1\}$$

$$\mathcal{J} = \{(a, b) \in S \times S : S^1 a S^1 = S^1 b S^1\}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$ bağıntılarına sırasıyla **sol-Green ($\mathcal{L}$ –Green)**, **sağ-Green ($\mathcal{R}$ –Green)** ve **Green bağıntısı ($\mathcal{J}$ –Green)** denir. $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$ Green bağıntılarının birer denklik bağıntısı olduğu açıktır.

Önerme 3.5.2. S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun.

- 1) $(a, b) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow xa = b$ ve $yb = a$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ mevcut olmasıdır.
- 2) $(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow au = b$ ve $bv = a$ olacak şekilde $u, v \in S^1$ mevcut olmasıdır.
- 3) $(a, b) \in \mathcal{J} \Leftrightarrow xau = b$ ve $ybv = a$ olacak şekilde $x, y, u, v \in S^1$ mevcut olmasıdır.

İspat: Tanım 3.4.1 den dolayı ispat açıktır. $\square$

Önerme 3.5.3. $\mathcal{L}$ bir sağ kongrüans ve $\mathcal{R}$ bir sol kongrüanstır.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.2. e bakınız. $\square$

Önerme 3.5.4. $\mathcal{L}$ ile $\mathcal{R}$ Green bağıntıları değişmelidir. Yani $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ olur.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.3. e bakınız. $\square$

Tanım 3.5.5. S bir yarıgrup $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ bağıntıları da S üzerinde sol-Green ve sağ-Green bağıntıları olsun. $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ olarak tanımlanan denklik bağıntısına **$\mathcal{H}$ –Green denklik bağıntısı** denir. $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ yi içeren en küçük denklik bağıntısına da **$\mathcal{D}$ –Green denklik bağıntısı** denir.

Dikkat edilirse $\mathcal{D} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$ olur.

O halde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} &= (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^e = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} [(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^{-1} \cup 1_S]^n = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^n \\
 &= (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup [(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \circ (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})] \cup [(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \circ (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \circ (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})] \cup \dots \\
 &= (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup [(\mathcal{L} \circ \mathcal{L}) \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{R} \circ \mathcal{L}) \cup (\mathcal{R} \circ \mathcal{R})] \cup (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^3 \cup \dots \\
 &= (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup [\mathcal{L} \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup \mathcal{R}] \cup (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^3 \cup \dots \\
 &= (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup [(\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^2 \circ (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})] \dots \\
 &= (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \dots \\
 &\quad \vdots \\
 &= \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Bir S yarıgrubu üzerindeki $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}, \mathcal{H}$ ve $\mathcal{D}$ –Green denklik bağıntıları için $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{J} \subseteq S \times S$ olur.

Örnek 3.5.6.

- 1) S bir grup ise $\mathcal{H} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{J} = S \times S$
- 2) S bir değişmeli yarıgrup ise $\mathcal{H} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{J}$ olur.

Önerme 3.5.7. S bir periyodik yarıgrup ise $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ olur.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.4.e bakınız. $\square$

Teorem 3.5.8. S yarıgrubu T_n ve PT_n yarıgruplarından herhangi biri ve $\alpha, \beta \in S$ olsun.

- (i) $\alpha\mathcal{R}\beta$ olması için gerek ve yeter koşul $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olmasıdır.
- (ii) $\alpha\mathcal{L}\beta$ olması için gerek ve yeter koşul $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ olmasıdır.
- (iii) $\alpha\mathcal{H}\beta$ olması için gerek ve yeter koşul $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ ve $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olmasıdır.

(iv) $\alpha \mathcal{D} \beta$ olması için gerek ve yeter koşul $|im(\alpha)| = |im(\beta)|$ olmasıdır.

olur.

İspat: Ganyushkin, Mazorchuk (2009), Theorem 4.5.1. e bakınız. $\square$

Tanım 3.5.9. $m \geq n$ olmak üzere m farklı nesneyi n tane özdeş kutuya kutular boş kalmayacak şekilde dağıtmanın sayısına **(ikinci Tip) Stirling Sayısı** denir ve $S(m, n)$ ile gösterilir.

O halde

$$S(m, n) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m$$

olur. Ayrıca, $S(m, 1) = S(m, m) = 1$ ve $1 < n \leq m$ olmak üzere

$$S(m, n) = S(m-1, n-1) + nS(m-1, n)$$

indirgeme bağıntısı sağlanır.

Önerme 3.5.10. T_n yarıgrupunda

- i. $2^n - 1$ tane $\mathcal{L}$ –Green denklik sınıfı
- ii. $\sum_{r=1}^n S(n, r)$ tane $\mathcal{R}$ –Green denklik sınıfı
- iii. $1 \leq r \leq n$ için $D_r = \{\alpha \in T_n : |im(\alpha)| = r\}$ olacak şekilde n tane $\mathcal{D}$ –Green denklik sınıfı vardır.

İspat: Ganyushkin, Mazorchuk (2009), Proposition 4.6.1. e bakınız. $\square$

S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. a yı içeren $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{H}$ ve $\mathcal{D}$ –Green denklik sınıflarını L_a , R_a , J_a , H_a ve D_a ile göstereceğiz. Denklik sınıfları ayrık olduğundan $\mathcal{D}$ –Green denklik sınıfı ayrık $\mathcal{R}$ –Green denklik sınıflarının (ve $\mathcal{L}$ –Green denklik sınıflarının) birleşimidir. $a \mathcal{D} b$ olsun. O halde $(a, b) \in D = L \circ R$ olup, $(a, c) \in L$ ve $(c, b) \in R$ olacak şekilde $c \in S$ vardır. $c \in L_a$ ve $c \in R_b$ olup $c \in L_a \cap R_b$ dir. O halde $L_a \cap R_b \neq \emptyset$ olur. $a \in \mathcal{D}$ olmak üzere H_a Green denklik sınıfını alalım. O zaman

$$\begin{aligned} b \in H_a &\Leftrightarrow (a, b) \in H = L \cap R \Leftrightarrow (a, b) \in L \text{ ve } (a, b) \in R \\ &\Leftrightarrow b \in L_a \text{ ve } b \in R_a \Leftrightarrow b \in L_a \cap R_a \end{aligned}$$

olduğundan $H_a = L_a \cap R_a$ olur. Böylece bir $\mathcal{D}$ –Green denklik sınıfı bir yumurta kutusu (eggbox) şeklindedir. Her bir satır $\mathcal{R}$ –Green denklik sınıfını, her bir sütun $\mathcal{L}$ –Green denklik sınıfını ve her bir hücre $\mathcal{H}$ –Green denklik sınıfını gösterir.

L_a

	H_a			

$D_a : \quad R_a$

Teorem (Green Teoremi) 3.5.11. S bir yarıgrup $a, b \in S$ olsun.

- $(a, b) \in R$ ise $as = b$ ve $bt = a$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ vardır.

$$\begin{aligned} \rho_s: L_a &\rightarrow L_b, \rho_t: L_b \rightarrow L_a \\ x &\rightarrow xsy \rightarrow yt \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan bire-bir ve örten olan ρ_s ve ρ_t fonksiyonları birbirlerinin tersidir. Ayrıca her ikisi de bir H –sınıfını yine bir H –sınıfına götürür.

- $(a, b) \in L$ ise $sa = b$ ve $tb = a$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ vardır.

$$\begin{aligned}\lambda_s: R_a &\rightarrow R_b \lambda_t: R_b \rightarrow R_a \\ x &\rightarrow sxy \rightarrow ty\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan bire-bir ve örten olan λ_s ve λ_t fonksiyonları birbirlerinin tersidir. Ayrıca her ikisi de bir H –sınıfını yine bir H –sınıfına götürür.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.1.ve Lemma 2.2.2. ye bakınız. $\square$

Sonuç 3.5.12.

- i. S bir yarıgrup ve a, b elemanları aynı $\mathcal{D}$ –Green denklik sınıfı D nin elemanları olsun. O zaman $|L_a| = |L_b|$ ve $|R_a| = |R_b|$ olur.
- ii. $L, R \subseteq D$ ve $|D| < \infty$ ise $|L|$ ve $|R|$ sayıları $|D|$ sayısını böler. $\square$

Sonuç 3.5.13. S bir yarıgrup ve a, b elemanları aynı $\mathcal{D}$ –Green denklik sınıfının elemanları ise $|H_a| = |H_b|$ olur.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.3. e bakınız. $\square$

Teorem 3.5.14. H bir S yarıgrubunun $\mathcal{H}$ –sınıfı ise ya $H^2 \cap H = \emptyset$ ya da $H^2 = H$ ve H , S nin bir alt grubu olur.

İspat: Howie (1995), Theorem 2.2.5. e bakınız. $\square$

Sonuç 3.5.15. Eğer e , S nin bir idempotenti ise H_e , S nin bir alt grubudur. Dolayısıyla bir $\mathcal{H}$ –sınıfında birden fazla idempotent bulunmaz. $\square$

Tanım 3.5.16. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer $aba = a$ olacak şekilde bir $b \in S$ varsa a ya S nin bir **regüler elemanı** denir. Eğer S nin her elemanı regüler ise S ye **regüler yarıgrup** denir.

Örnek 3.5.17.

- Bandlar ve dolayısıyla yarılatılar regüler yarıgruptur.
- Her dikdörtgen band bir regüler yarıgruptur.
- Gruplar regüler yarıgruplardır.
- PT_n ve T_n dönüşüm yarıgrupları regüler yarıgruptur.

Teorem 3.5.18. O_n bir regüler yarıgruptur.

İspat: Herhangi bir $\alpha \in O_n$ alalım. Eğer $im(\alpha) = Y = \{y_1 < \dots < y_r\}$ ise her $i = 1, \dots, r$ için $y_i \alpha^{-1} = A_i$ ve $\min(A_i) = x_i$ olsun. Her $y \in Y$ için $x\alpha = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X_n$ vardır. Her bir $y \in Y$ için $x_y \alpha = y$ olacak şekilde en küçük $x_y \in X_n$ alalım. Yani $x_y \alpha = y$ ve $x\alpha = y$ ise $x_y \leq x$ olsun. O zaman her $x \in X_n$ için

$$x\beta = \begin{cases} 1 = x_1 & 1 \leq x \leq y_2 - 1 \\ x_i y_i \leq x \leq y_{i+1} & \text{her } i = 2, \dots, r-1 \\ x_r y_r \leq x \leq n \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\beta: X_n \rightarrow X_n$ dönüşümünü sıra-koruyan olur. Her $i = 1, \dots, r$ için

$$A_i(\alpha\beta\alpha) = (A_i\alpha)\beta\alpha = (y_i\beta)\alpha = x_i\alpha = y_i = A_i\alpha$$

olup, $\alpha\beta\alpha = \alpha$ olur. O halde $\alpha \in O_n$ elemanı regülerdir. Dolayısıyla O_n bir regüler yarıgruptur. $\square$

Tanım 3.5.19. S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun. Eğer

$$aba = a, bab = b$$

ise b ye **a nın tersi** denir.

Bir S yarıgrupunda $a \in S$ elemanının tüm terslerinin kümesini $V^S(a)$ ile gösterelim. Özellikle S yarıgrupunu ayrıca belirtmek gerekmiyor ise $V^S(a)$ yı $V(a)$ olarak kısaca yazabiliriz.

Bir $a \in S$ elemanının birden fazla tersi olabilir. Örneğin dikdörtgen bandlarda herhangi bir elemanın tersi diğer tüm elemanlar olur. Yani S bir dikdörtgen band ve $a \in S$ ise $V(a) = S$ olur.

Teorem 3.5.20. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. a nın bir tersi olması için gerek ve yeter koşul a elemanının regüler olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) Aşikâr.

($\Leftarrow$) $a \in S$ regüler olsun. O halde $axa = a$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. O zaman $b = xax$ alınır ise

$$bab = (x \underbrace{ax}_a) a (xax) = x \underbrace{axa}_a x = xax = b$$

ve

$$aba = a(\underbrace{xa}_a x) a = axa = a$$

olup b, a nın tersi olur. $\square$

S bir yarıgrup, $a \in S$ bir regüler eleman ve $b \in L_a$ olsun. O zaman $axa = a$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Ayrıca, $ua = b$ ve $vb = a$ olacak şekilde $u, v \in S^1$ vardır. Dolayısıyla

$$b = ua = u(axa) = (ua)xa = bxa = bx(vb) = b(xv)b$$

olup b regülerdir. Böylece, a regüler ise L_a nın her elemanı regülerdir. Benzer şekilde a regüler ise R_a nın her elemanı regülerdir. Böylece aşağıdaki önermeye sahibiz.

Önerme 3.5.21. S bir yarıgrup ve $a \in S$ bir regüler eleman ise D_a nın tüm elemanları regülerdir.

İspat: $a \in S$ regüler ve $b \in D_a$ olsun. O zaman $(a, b) \in D = L \circ R$ olup, $(a, c) \in L$ ve $(c, b) \in R$ olacak şekilde $c \in S$ vardır. Bu durumda $c \in L_a$ olduğundan c regüler ve $b \in R_c$ olduğundan b de regüler olur. $\square$

Dolayısıyla bir D –sınıfı, D nin ya tüm elemanları regülerdir ya da hiçbir elemanı regüler değildir. Tüm elemanları regüler ise D –sınıfına **regüler** denir.

Sonuç 3.5.22. $e \in S$ bir idempotent ise $eee = e$ olacağından e regüler olur. Böylece bir D –sınıfı bir idempotent içeriyor ise D –sınıfı regüler olur. Ayrıca, her regüler D –sınıfı en az bir idempotent içerir. $\square$

Önerme 3.5.23. Bir regüler D –sınıfında her $\mathcal{L}$ –sınıfı ve $\mathcal{R}$ –sınıfı bir idempotent içerir.

İspat: a bir regüler D –sınıfının elemanı olsun. a regüler olacağından $axa = a$ olacak şekilde S yarıgrubunda bir x elemanı vardır. Böylece

- 1) xa idempotent ve $xa\mathcal{L}a$
- 2) ax idempotent ve $ax\mathcal{R}a$

olur. Gerçekten;

- 1) $axa = a$ ve $xa = xa$ olduğundan $(a, xa) \in L$ olup $xa \in L_a$ dır.

$$(xa)^2 = (xa)(xa) = x(axa) = xa \text{ olup } xa \text{ idempotenttir.}$$

2) Benzer şekilde ispat edilir. $\square$

Önerme 3.5.24. Eğer e bir idempotent ise e , R_e için bir sol ve L_e için bir sağ birim eleman olur.

İspat: Eğer $a \in R_e$ ise $ex = a$ olacak şekilde $x \in S^1$ vardır. Dolayısıyla,

$$ea = e(ex) = (ee)x = ex = a$$

olup e , R_e nin sol birimidir. Eğer $b \in L_e$ ise $ye = b$ olacak şekilde $y \in S^1$ vardır. Benzer şekilde $be = (ye)e = y(ee) = ye = b$ olup e , L_e nin sağ birimidir. $\square$

$\mathcal{D}$ –sınıflarının yumurta kutusu resmi ters elemanın yerini belirlemek için faydalı olacaktır. Dikkat edilirse a bir regüler $\mathcal{D}$ –sınıfı D nin bir elemanı ise a nın her a' tersi D nin içindedir ve $a\mathcal{R}aa'$ ve $aa'\mathcal{L}a'$ olur.

Teorem 3.5.25. a bir S yarıgrubunda regüler $\mathcal{D}$ –sınıfı D nin bir elemanı olsun.

- 1) Eğer $a' \in V(a)$ ise $a' \in D$ ve iki $\mathcal{H}$ –sınıfı $H_1 = R_a \cap L_{a'}$ ve $H_2 = L_a \cap R_{a'}$ sırasıyla aa' ve $a'a$ idempotentlerini içerir.
- 2) Eğer $R_a \cap L_b$ ve $L_a \cap R_b$ sırasıyla e ve f idempotentlerini içerecek şekilde $b \in D$ ise H_b ,

$$aa^* = e, a^*a = f$$

olacak şekilde a nın a^* tersini içerir.

- 3) $\mathcal{H}$ –sınıfı a nın birden fazla tersini içermez.

İspat: Howie (1995) Teorem 2.3.4'e bakınız. $\square$

Sonuç 3.5.26. Böylece bu teorem bize regüler bir $\mathcal{D}$ –sınıfında bir a elemanının tersini $\mathcal{L}$ deki bir idempotenti ve $\mathcal{R}$ deki bir idempotenti kullanarak inşa edebileceğimizi gösteriyor ($a^* = fxe$). O halde bir sonlu yarıgrupta

$$|V(a)| = |E(L_a)||E(R_a)|$$

olur. $\square$

Önerme 3.5.27. e ve f bir S yarıgrubunda idempotent olsunlar. O zaman $(e, f) \in \mathcal{D}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$aa' = e, a'a = f$$

olacak şekilde bir $a \in S$ ve a nın tersi a' elemanının mevcut olmasıdır.

İspat: Howie (1995) Önerme 2.3.5'e bakınız. $\square$

Önerme 3.5.28. Eğer H ve K aynı (regüler) $\mathcal{D}$ –sınıfında iki grup olan $\mathcal{H}$ –sınıfları ise H ve K izomorfiktir.

İspat: Howie (1995) Önerme 2.3.6'e bakınız. $\square$

Önerme 3.5.29. a ve b bir $\mathcal{D}$ –sınıfı D nin elemanları olsunlar. $ab \in R_a \cap L_b$ olması için gerek ve yeter koşul $L_a \cap R_b$ nin bir idempotent elemana sahip olmasıdır.

İspat: Howie (1995) Önerme 2.3.7'e bakınız. $\square$

Sonuç 3.5.30. H, S nin bir $\mathcal{H}$ –sınıfı olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

- i) H bir idempotent içerir;
- ii) Her $a, b \in H$ için $ab \in H$ olur;

iii) H, S yarıgrubunun bir maksimal alt grubudur.

İspat: Higgins (1992), Corollary 1.2.6. ya bakınız. $\square$





4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA

4.1. Patika-Devir

$X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu bir küme olmak üzere T_n dönüşüm yarıgrubu ve S_n simetrik grup olsun. Tüm singüler dönüşümlerin kümesini

$$ST_n = T_n \setminus S_n$$

ile gösterelim.

Tanım 4.1.1. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subseteq X_n$ olmak üzere $\alpha \in T_n$ elemanı

$$x_1\alpha = x_2, x_2\alpha = x_3, \dots, x_{m-1}\alpha = x_m, x_m\alpha = x_r \\ x\alpha = x \quad (x_r \in X, x \in X_n \setminus X)$$

şeklinde tanımlı ise α ya **uzunluğu m ve periyodu r olan bir patika-devir (path-cycle)** veya **(m, r) -patika devir** denir ve

$$\alpha = [x_1, x_2, \dots, x_m | x_r]$$

şeklinde yazılır. Ayrıca:

- eğer $r = m$ ise α elemanına X_m de **m -patika**,
- eğer $m \geq 2$ ve $r = 1$ ise α elemanına **m -devir**,
- eğer $m = r = 1$ ise α elemanına bir **halka (loop)** denir.

Tanım 4.1.2. Bir (m, r) -patika devir de $r \neq 1$ ise α elemanına **öz-patika-devir (proper path-cycle)** denir.

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

Dikkat edilirse $I = [1|1]$ birim dönüşüm olarak adlandırılan bir tek halka (loop) vardır.

Eğer $\alpha = [x_1, x_2, \dots, x_m | x_r]$ elemanı bir (m, r) -patika devir ise

$$r_1(\alpha) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$$

olarak tanımlayalım.

Tanım 4.1.3. α, β dönüşümleri T_n de iki patika-devir olsun. Eğer $r_1(\alpha) \cap r_1(\beta) = \emptyset$ ise α ve β dönüşümlerine **ayrık** denir. Eğer $r_1(\alpha) \cap r_1(\beta)$ kümesi sadece 1 eleman içeriyor ise α ve β dönüşümlerine **1-ortaklı (1-Joint)** denir.

4.2. Çarpanlara Ayırma

Permütasyonlar grubunda klasik çarpanlara ayrılış yöntemi, her permütasyon ayrık devirlerin (ayrık permütasyonların) çarpımı olarak yazılabilir şeklindedir. Yarıgruplarda da benzer çarpanlara ayrılış yöntemleri bulunmuştur. Biz bu tezde dönüşüm yarıgruplarında doğuraylar ve çarpanlara ayırma üzerine ilgili çalışmaları derledik. Yarıgruplarda çarpanlara ayrılış yöntemlerinin olduğu çalışmalardan bir tanesi Lipscomb (1996) tarafından geliştirilen yöntemdir. Bu yöntem dönüşümün grafik temsili ile çarpanlara ayırma arasında bir köprü oluşturmaktadır. Fakat bu yöntemde T_n nin bir elemanı için yazılan çarpanların her biri T_n nin bir elemanı değildir. Daha sonra Ayık G., Ayık H., Howie J. M. (2005) tarafından yapılan çalışmada T_n nin bir elemanı için yazılan çarpanların her biri yine T_n nin bir elemanı olacak şekilde bir çarpanlara ayrılış yöntemi geliştirilmiştir.

Aşağıdaki algoritmayı kullanarak her $\alpha \in T_n$ elemanını patika-devirlerin çarpımı olarak yazabileceğimizi göstereceğiz.

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

$\alpha \in T_n$ elemanı birim olmayan bir eleman ve $x \in X_n$ olsun. O zaman $(x, x\alpha, x\alpha^2, \dots)$ dizisi X_n sonlu olduğundan bir tekrara sahip olur. Böylece $x, x\alpha, \dots, x\alpha^{k_x}$ hepsi ayrık fakat $x\alpha^{k_x+1} \in \{x, x\alpha, \dots, x\alpha^{k_x}\}$ olacak şekilde bir tek $k_x \in \mathbb{N}$ vardır.

Tanım 4.2.1. Her bir $\alpha_x = [x, x\alpha, \dots, x\alpha^{k_x} | x\alpha^{k_x+1}]$ patika-devirine α elemanının bir **böleni** denir.

α elemanının ilk çarpanı α elemanının en uzun bölenlerinden biri olup bu ilk çarpanı α_1 ile göstereceğiz. Eğer birden fazla en uzun çarpan var ise bunlardan X_n deki sıralamaya göre en küçük ilk girdiye sahip olanı ilk çarpan olarak seçebiliriz. X_n deki sıralamaya göre $[x_1, x_2, \dots, x_k | x_1]$ devirinin $x_1 = \min\{x_1, \dots, x_k\}$ olacak şekilde yazıldığını kabul edebiliriz.

Tanım 4.2.2. $\alpha^{(1)}: X_n \rightarrow X_n$ dönüşümünü

$$x\alpha^{(1)} = \begin{cases} x, & x \in r_1(\alpha_1) \text{ ise} \\ x\alpha, & x \notin r_1(\alpha_1) \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlarız ve $\alpha^{(1)}$ dönüşümüne α elemanının **ilk rezüdüsü** denir.

$$\alpha = \alpha_1 \alpha^{(1)}$$

olduğu açıktır. Şimdi benzer prosedürü $\alpha^{(1)}$ dönüşümüne uygulayarak α elemanının ikinci çarpanı α_2 yi ve α nın ikinci rezüdüsü $\alpha^{(2)}$ yi buluruz.

$$\alpha^{(1)} = \alpha_2 \alpha^{(2)} \Rightarrow \alpha = \alpha_1 \alpha^{(1)} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha^{(2)}$$

elde edilir. Bu prosedüre

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

$$\alpha_p \neq [1|1], \alpha^{(p)} = [1|1]$$

olana kadar devam edilirse $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p$ elde edilir. Buradaki p tamsayısına α nın patika-devir rankı denir ve $pcr(\alpha)$ ile gösterilir. Dikkat edilirse $\alpha \in S_n$ ise bu algoritma $\alpha \in S_n$ elemanı için “ayrık devirlerin çarpımı” algoritmasını verir.

Örnek 4.2.3. $\alpha = \begin{pmatrix} 12345678910 \\ 47967410437 \end{pmatrix} \in T_{10}$ elemanını alalım. Her $x \in X_{10}$ elemanı için tüm patika devirler

$$[1,4,6|4], [2,7,10|7], [3,9|3], [4,6|4], [5,7,10|7], \\ [6,4|6], [7,10|7], [8,4,6|4], [9,3|9], [10,7|10]$$

şeklinde olup bunlardan en uzun ve en küçük ilk girdiye sahip olanı

$$\alpha_1 = [1,4,6|4]$$

patika-deviri ilk çarpan olur. α_1 dönüşümünden dolayı $r_1(\alpha_1) = \{1,4,6\}$ olup ilk rezüdü $\alpha^{(1)}$ dönüşümü

$$\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 7 & 9 & 4 & 7 & 6 & 10 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Benzer algoritmayı $\alpha^{(1)}$ dönüşümüne uygularsak ikinci çarpan $\alpha_2 = [2,7,10|7]$ patika-deviri olur. α_2 dönüşümünden dolayı $r_1(\alpha_2) = \{2,7,10\}$ olup ikinci rezüdü

$$\alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 9 & 4 & 7 & 6 & 7 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

şeklinde elde edilir. Böylece devam edilirse

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= [3,9|3], r_1(\alpha_3) = \{3,9\}, \alpha^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \mathbf{9} & 10 \\ 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 & 7 & 6 & 7 & 4 & \mathbf{9} & 10 \end{pmatrix} \\ \alpha_4 &= [5,7|7], r_1(\alpha_4) = \{5,7\}, \alpha^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \mathbf{5} & 6 & \mathbf{7} & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \mathbf{5} & 6 & \mathbf{7} & 4 & 9 & 10 \end{pmatrix} \\ \alpha_5 &= [8,4|4], r_1(\alpha_5) = \{8,4\}, \alpha^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & 5 & 6 & 7 & \mathbf{8} & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & 5 & 6 & 7 & \mathbf{8} & 9 & 10 \end{pmatrix} = I\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece α dönüşümü

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 = [1,4,6|4][2,7,10|7][3,9|3][5,7|7][8,4|4]$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. Dikkat edilirse

$$\begin{aligned}Def(\alpha) &= \{1,2,5,8\}, \\ im(\alpha) &= \{3,4,6,7,9,10\}, \\ pcr(\alpha) &= 5\end{aligned}$$

olur.

Bir dönüşümün patika-devirlerin çarpımı olarak yazılışı tek türlü değildir.

Örnek 4.2.3. deki α dönüşümü

$$[8,4,6|4][5,7,10|7][1,4|4][2,7|7][3,9|3].$$

şeklinde de çarpanlarına ayrılır. Fakat çarpanlardaki ilk girdinin X_n deki sıralama göz önüne alınarak yapılırsa bu çarpanlara ayrılış tektir.

Bu çarpanlara ayrılıştaki devir sayısı tektir ve bu sayı $cycl(\alpha)$ ile gösterilir.

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

Teorem 4.2.4. $\alpha \in T_n$ olsun.

- i) $pcr(\alpha) = \text{def}(\alpha) + \text{cycl}(\alpha)$ olur.
- ii) Eğer $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ dönüşümleri α dönüşümünün çarpanları ise her bir $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $i < j$ olmak üzere α_i ve α_j patika-devirleri ya ayrıktır ya da 1-ortaklı olur.

α_i ve α_j çarpanlarının 1-ortaklı olması durumunda, yani $r_1(\alpha_i) \cap r_1(\alpha_j) = \{x\}$ olması yalnızca

- a) α_i ve α_j öz patika-devir ve
- b) x in α_i nin ilk girdisi değil, α_j de x de bir patika

durumlarının olması halinde ortaya çıkar.

İspat: (i) Tanımdan dolayı bir çarpan

$$\alpha_i = [x_1, x_2, \dots, x_k | x_r]$$

şeklinde öz patika-devir ise $x_1 \notin \text{im}(\alpha)$ olur. $\alpha \in T_n$ elemanının her bir çarpanı α_i ya öz patika-devir ya da bir devirdir. Ayrıca öz patika devirlerin sayısı $\text{def}(\alpha)$ kadardır. Böylece

$$pcr(\alpha) = \text{def}(\alpha) + \text{cycl}(\alpha)$$

elde edilir.

(ii) $p = 1$ ise ispat edecek bir şey yok. $p \geq 2$ için $1 \leq i < j \leq p$ olmak üzere

$$\alpha_i = [y_1, \dots, y_k | y_r] \text{ ve } \alpha_j = [z_1, \dots, z_l | z_s]$$

çarpanlarını göz önünde bulunduralım.

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

$\alpha^{(i)}$ nin tanımından $y_1, \dots, y_k$ elemanlarını sabit tutuyor olup α_j nin α_i den ayrık olmasından kaçınmak için $z_l \in \{y_1, \dots, y_k\}$ olmak üzere α_j , z_l de bir l -patika (yani $s = l$) olmalıdır. Eğer α_i bir devir değil ise o zaman $z_l \in \text{im}(\alpha)$ ve $y_1 \notin \text{im}(\alpha)$ olup böylece $z_l = y_1$ olamaz.

α_i nin devir olduğunu kabul edelim. z_l yi x olarak yazarsak α_i nin ilk elemanının x olduğunu kabul edelim. O zaman $[z_1, \dots, z_{l-1}, x, y_2, \dots, y_k | x]$ patika-deviri α_i den daha uzundur. Bu durum algoritma gereği mümkün değildir. Böylece x , α_i nin ilk elemanı olamaz. O halde α_i ve α_j öz patika devir, x , α_i nin ilk elemanı değil ve α_j de x de bir patikadır. $\square$

Ayrık patika-devirlerin değişmeli olduğu açıktır.

Sonuç 4.2.5. α_i ve α_j çarpanları değişmeli olması için gerek ve yeter koşul ya α_i ve α_j ayrıktır ya da α_i ve α_j aynı x de birer patikadır. Özel olarak α_i ve α_j den bir tanesi devir ise α_i ve α_j değişmelidir.

İspat: Eğer α_i ve α_j öz patika devirleri ayrık değil ve aynı x de patika değiller ise α_i ve α_j değişmeli olmadığını ispatlamak geriye kalır. α_i ve α_j ayrık olmasın. Teorem 4.2.4.den dolayı α_j nin patika olduğunu biliyoruz. O zaman $i < j$ için $\alpha_i = [y_1, \dots, y_k | y_r] (r \neq 1)$ ve $\alpha_j = [z_1, \dots, z_l | z_l]$ olduğunu kabul edelim. Yine Teorem 4.2.4. den dolayı $1 < s \leq k$ olmak üzere $z_l = y_s$ olur.

$$\begin{array}{l} z_{l-1}\alpha_i\alpha_j = z_{l-1}\alpha_j = z_l \\ z_{l-1}\alpha_j\alpha_i = z_l\alpha_i = y_s\alpha_i \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} z_l = y_s\alpha_i \Leftrightarrow z_l = z_l\alpha_i \Rightarrow \alpha_i \end{array}$$

patikadır. $y_k = z_l$ ile α_i nin y_k da bir patika olmalıdır. Aksi halde $1 < s < k$ için $y_s = z_l$ olsa

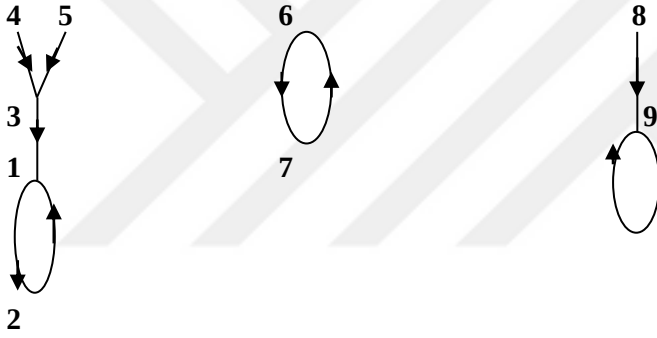
4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

$\alpha_i = [y_1, y_2, \dots, y_s = z_l | z_l]$ olup α_i nin uzunluğu k dan küçük olup α_i nin çarpan oluşu ile çelişir.

Not 4.2.6. Bir örnek ile Lipscomb'un yöntem ile buradaki çarpanlara ayrılış arasındaki farka dikkat çekelim. α dönüşümünü

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 7 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

olarak alalım. α dönüşümünü orbit grafiği



şeklindedir. Lipscomb notasyonu ile α dönüşümünü

$$\alpha = (4,3,1)(5,3,1)(1,2)(6,7)(8,9)(9)$$

olarak yazılır. $(4,3,1)$ gösterimine T_9 da bir eleman karşılık gelmez. Ayık G., Ayık H., Howie J. M. (2005) tarafından yapılan çalışmadaki çarpanlara ayrılış yöntemine göre

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 7 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

dönüşümünün çarpanlara ayrılışı

$$\alpha = [4,3,1,2|1][5,3|3][6,7|6][8,9|9]$$

şeklinde olup buradaki her bir çarpan T_9 yarıgrubun bir elemanıdır. Örneğin $[4,3,1,2|1]$ çarpanına karşılık

$$[4,3,1,2|1] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in T_9$$

elemanı elde edilir.

Dolayısıyla bu çarpanlara ayrılış yönteminde her bir çarpan yine T_n nin bir elemanıdır.

4.3. Doğuray Kümeleri

Derecesi n olan tüm singüler dönüşümler yarıgrubu $ST_n = T_n \setminus S_n$ yarıgrubunun, T_n deki 2-patikalar tarafından doğrulduğunu Howie (1966) tarafından yapılan makaleden dolayı biliyoruz.

T_n de herhangi bir 2 patika alalım. O zaman $i \neq j$, $i, j \in X_n$ için 2-patika $\alpha = [i, j|j]$ olup α bir idempotent ve $rank \alpha = |im(\alpha)| = n - 1$ olduğunu biliyoruz.

Dikkat edilirse Howie (1995) tarafından yazılan kitabın notasyonuyla $[i, j|j] = ||ij||$ olur. Böylece T_n , T_n yarıgrubundaki tüm 2-patika-devirlerin kümesi tarafından doğrulur. Bu bölümde patika-devirler kullanılarak ST_n ve T_n için yeni doğuray kümeleri için alternatif ispatları vereceğiz.

Teorem 4.3.1. $\alpha \in ST_n$ olsun. $\alpha = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_k$ olacak şekilde $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ öz-patika-devirleri vardır.

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

İspat: $\alpha \in ST_n$ ve $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$ şeklinde çarpanlarına ayrılıyor olsun. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ hepsi devir olsa $\alpha \in S_n$ olur. O halde α nın çarpanlarından bazıları devir olabilir fakat $\alpha \in ST_n$ olduğundan en az bir çarpanı, öz-patika-devir olmalıdır. Sonuç 4.2.5.den dolayı (yani α_i devir ise diğer çarpanlarla değişmeli olacağından) devir olan çarpanların öz-patika-devir olan çarpanlardan sonra geldiğini kabul edebiliriz. $x_r \neq x_1$ olmak üzere $\alpha_1 = [x_1, x_2, \dots, x_m | x_r]$ olsun. Eğer α nın bir devir çarpanı α_j

$$\alpha_j = [y_1, \dots, y_q | y_1]$$

şeklinde ise

$$\alpha_j' = [x_1, y_1, \dots, y_q | y_1]$$

olmak üzere $\alpha_1 \alpha_j = \alpha_1 \alpha_j'$ elde edilir. Böylece α dönüşümünün çarpanlara ayrılışındaki her bir α_j deviri yerine α_j' öz-patika-deviri yazılırsa, α da öz patika devirlerin çarpımı olarak yazılır. $\square$

Teorem 4.3.2. ST_n yarıgrubundaki tüm 2-patikalar ST_n yarıgrubunu doğurur.

İspat: $2 \leq r < m$ için

$$[x_1, \dots, x_r, \dots, x_m | x_r] = [x_m, x_{r-1} | x_{r-1}] [x_1, x_2, \dots, x_m | x_m], \quad (1)$$

ve $m \geq 3$ için,

$$[x_1, x_2, \dots, x_m | x_m] = [x_{m-1}, x_m | x_m] [x_1, x_2, \dots, x_{m-1} | x_{m-1}], \quad (2)$$

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

şeklindedir. Böylece (1) ve ardışık olarak (2) kullanarak herhangi bir öz patika-devir, 2-patikaların çarpımı olarak yazılır. Herhangi bir $\alpha \in ST_n$ alalım. Teorem 4.3.1. den dolayı $\alpha = \beta_1 \dots \beta_k$ olacak şekilde $\beta_1 \dots \beta_k$ öz patika devirlerin çarpımı olarak yazılabildiğinden ve şimdi her bir β_i ($1 \leq i \leq k$) öz patika-deviri 2-patikaların çarpımı olarak yazılabilir. O halde α , 2-patikaların çarpımı olarak yazılabilir. Böylece ST_n yarıgrubundaki tüm 2-patikalar ST_n yarıgrubunu doğurur. $\square$

Teorem 4.3.3. Her bir $m \in \{2, \dots, n\}$ için, ST_n yarıgrubu, ST_n deki uzunluğu m olan patika devirler tarafından doğurulur.

İspat: Öncelikle boyu k olan her öz-patika-devirin, boyu $k + 1$ olan öz-patika-devirlerin çarpımı olarak yazılabildiğini gösterelim. Herhangi bir boyu k olan bir

$$\alpha = [x_1, x_2, \dots, x_k | x_r] \quad (r \neq 1)$$

öz-patika-devirini alalım. Eğer k tek tamsayı ise

$$\beta = [x_1, x_3, \dots, x_{k-2}, x_k, x_2, x_4, \dots, x_{k-1}, x_{k+1} | x_r]$$

ve

$$\gamma = \begin{cases} [x_{k+1}, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_2, x_1, x_k | x_{r-2}] & , \quad r \geq 3 \text{ ise} \\ [x_{k+1}, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_2, x_1, x_k | x_k] & , \quad r = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $\alpha = \gamma\beta$ elde edilir.

Eğer k çift tamsayı ise

$$\beta = [x_1, x_3, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, x_2, x_4, \dots, x_{k-2}, x_k | x_r]$$

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

$$\gamma = \begin{cases} [x_k, x_{r-2}, x_{r-3}, \dots, x_2, x_1, x_{k+1}, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{r-1} | x_{r-2}] & , \quad r \geq 3 \text{ ise} \\ [x_k, x_{k+1}, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_2, x_1 | x_{k+1}] & , \quad r = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $\alpha = \gamma\beta$ elde edilir. Ardışık olarak istenildiği kadar yukarıdaki adımlar kullanılırsa 2-patikalar, uzunluğu m olan öz-patika-devirlerin çarpımı olarak yazılabilir. Böylece sonuç Teorem 4.3.2.den dolayı ispatlanmış olur. Yani ST_n , ST_n deki uzunluğu m olan patika devirler tarafından doğurulur. $\square$

Teorem 4.3.4. Her bir $m \in \{2, \dots, n\}$ için, ST_n yarıgrubu, ST_n deki uzunluğu m -patikalar tarafından doğurulur.

İspat: γ, β, m -patikalarını

$$\begin{aligned} \gamma &= [x_m, x_{m-1}, \dots, x_4, x_3, x_1, x_2 | x_2] \\ \beta &= [x_1, x_3, x_4, \dots, x_{m-1}, x_m, x_2 | x_2] \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. $\gamma\beta = [x_1, x_2 | x_2]$ olup Teorem 4.3.2. den dolayı ispat biter. $\square$

S_n deki 2-devirlerin S_n yi doğurduğunu, A_n deki 3-devirlerin A_n yi doğurduğunu biliyoruz. $ST_n \trianglelefteq T_n$ ideali olduğundan T_n yarıgrubunun her doğuray kümesi, $ST_n - T_n = S_n$ nin bir doğuray kümesini içermek zorunda olduğunu biliyoruz.

Teorem 4.3.5. Eğer $n \geq m \geq 2$ ve m çift tamsayı ise o zaman T_n deki tüm m -patika ve m -devirlerin kümesi T_n yi doğurur. Eğer $n \geq m \geq 3$ ve m tek tamsayı ise o zaman T_n deki tüm m -patika ve m -devirler $SA_n = ST_n \cup A_n$ yarıgrubunu doğurur.

İspat: $\alpha = [x_1, x_2, \dots, x_m | x_1] \in S_n$ olsun.

$$\begin{aligned} \beta &= [x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2} | x_1] \\ \gamma &= [x_1, x_{m+1}, x_m, \dots, x_2, x_{m+2} | x_1] \\ \lambda &= [x_1, x_3, \dots, x_m, x_{m+2}, x_2, x_4, \dots, x_{m-1}, x_{m+1} | x_1] \end{aligned}$$

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

olarak tanımlayalım.

$$\alpha = \begin{cases} \beta^2\gamma, & m \text{ çift ise} \\ \lambda, & m \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece her m -deviri, $m + 2$ -devirlerin bir çarpımı olarak yazabiliyoruz. Özel olarak yukarıdaki boyu iki artıran adımlar istenildiği kadar tekrar edilerek $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere 2-devirler $((k - 1)2 + 2)$ -devirlerin çarpımı, 3-devirler de $((k - 1)2 + 3)$ -devirlerin çarpımı olarak yazılabilir. S_n , 2-devirler tarafından doğuruluyor olup S_n , m -devirler (m çift ise) tarafından doğuruluyor ve ST_n de m -patikalar tarafından doğuruluyor olup T_n , m -patika ve m -devirler tarafından doğurulur. Benzer şekilde m -devirler (m tek) A_n yi, m -patikalar ST_n yi doğuruyor olup m -patikalar ve m -devirler $SA_n = ST_n \cup A_n$ yi doğurur. $\square$

4.4. Ranklar

Özellikle dönüşüm yarıgruplarında doğuray kümesi bulmak ve rank hesaplamak bu alanda çalışılan önemli konulardan biri olmuştur. S bir yarıgrup ve A da S yarı grubunun boştan farklı alt kümesi olmak üzere

$$\text{rank}(S) = \min\{|A| : A \subseteq S \text{ ve } \langle A \rangle = S\}$$

pozitif tamsayısına S yarı grubunun rankı denir. S bir yarıgrup olmak üzere S yarı grubunun tüm idempotentlerinin kümesini $E(S)$ ile gösterelim.

$$\text{idrank}(S) = \min\{|A| : A \subseteq E(S) \text{ ve } \langle A \rangle = S\}$$

pozitif tamsayısına S yarı grubunun idempotent rankı denir. $ST_n = T_n \setminus S_n$ olmak üzere

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

$$\text{rank}(ST_n) = \text{idrank}(ST_n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

olduğu Gomes ve Howie (1987) tarafından gösterildi. Ayrıca O_n sıra koruyan dönüşümler yarıgrubu olmak üzere

$$\text{rank}(O_n) = n \text{ ve } \text{idrank}(O_n) = 2n - 2$$

olduğu Gomes ve Howie (1992) tarafından gösterildi. Ayrıca $S(n, r)$ Stirling sayısı ve $K_{n,r} = \{\alpha \in T_n : |\text{im}(\alpha)| \leq r\}$ olmak üzere

$$\text{rank}(K_{n,r}) = \text{idrank}(K_{n,r}) = S(n, r)$$

olduğu Howie ve Mc Fadden (1990) tarafından gösterildi.

Ayık, Ayık ve Howie (2005) tarafından bulunan çarpanlara ayrılış yöntemi ile bazı dönüşüm yarıgruplarının yukarıda bahsedilen rankları ve relative rankları yine Ayık, Ayık ve Howie (2005) tarafından hesaplanmıştır. Bu bölümde Ayık, Ayık ve Howie (2005) tarafından bulunan bazı rank hesaplamaları anlatılacaktır.

$1 \leq r \leq n$ için $K_{n,r}$ ve $T_{n,r}$ kümesi

$$K_{n,r} = \{\alpha \in T_n : |\text{im}(\alpha)| \leq r\}, T_{n,r} = K_{n,r} \cup S_n$$

olarak tanımlansın. Dikkat edilirse

$$K_{n,n} = T_{n,n} = T_{n,n-1} = T_n \text{ ve } K_{n,n-1} = ST_n$$

olur. $\lambda, \mu \in T_n$ için

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

$$def(\lambda\mu) \geq \max\{def(\lambda), def(\mu)\}$$

olduğundan $K_{n,r}$ ve $T_{n,r}$ kümeleri T_n nin alt yarıgrubudur.

Hatırlatma 4.4.1. $\alpha, \beta \in K_{n,r}$ ise $|im(\alpha)| \leq r$, $|im(\beta)| \leq r$ ve $|im(\alpha\beta)| \leq |im(\beta)| \leq r$ olduğundan $\alpha\beta \in K_{n,r}$ dir. $K_{n,r} \leq T_n$ dir. $\square$

Her bir $\alpha \in T_n$ elemanı için α ve S_n yi içeren T_n yarıgrubunun en küçük alt yarıgrubunu $\langle\langle\alpha\rangle\rangle$ ile gösterelim. Dikkat edilirse $x \neq y$, $x, y \in X_n$ için $\langle[x, y|y] \cup S_n\rangle = T_n$ olduğundan $\langle\langle[x, y|y]\rangle\rangle = T_n$ olur. $\forall \alpha \in T_n$ elemanı bir $ker(\alpha)$ denklik bağıntısı belirler. Bu denklik bağıntısının denklik sınıflarının genişliği, n nin bir parçalanışını belirler ve biz bu parçalanışı $part(\alpha)$ ile gösteririz.

Örnek 4.4.2. Herhangi bir $\alpha \in T_n$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

olarak alalım. α dönüşümünü $A_1 = \{1,3\}, A_2 = \{2,4\}, A_3 = \{5\}$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1,3\} & \{2,4\} & \{5\} \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

olarak yazabiliyor olup $part(\alpha) = (|A_1|, |A_2|, |A_3|) = (2,2,1)$ olur.

Lemma 4.4.3. $\alpha, \beta \in T_n$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (i) $\beta = \gamma\alpha\delta$ olacak şekilde $\gamma, \delta \in S_n$ vardır.
- (ii) $|im(\alpha)| = |im(\beta)|$ ve $part(\alpha) = part(\beta)$ olur.

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\beta = \gamma\alpha\delta$ olacak şekilde $\gamma, \delta \in S_n$ olsun. O zaman $\alpha = \gamma^{-1}\beta\delta^{-1}$ olacak şekilde $\gamma^{-1}, \delta^{-1} \in S_n$ vardır. $\beta = \gamma\alpha\delta$ ve $\alpha = \gamma^{-1}\beta\delta^{-1}$ olduğundan $\alpha J \beta$ dır. Böylece $\alpha J \beta$ olup $|im(\alpha)| = |im(\beta)|$ olur. Ayrıca $\alpha\delta = \alpha\delta$, $\alpha\delta\delta^{-1} = \alpha$ olduğundan $\alpha\delta\mathcal{R}\alpha$ olur. $\alpha\delta\mathcal{R}\alpha$ olduğundan $ker(\alpha\delta) = ker(\alpha)$ olur. $ker(\alpha\delta) = ker(\alpha)$ ise $part(\alpha\delta) = part(\alpha)$ olur.

$$(x, y) \in ker(\alpha\delta) \Leftrightarrow (x\gamma^{-1}, y\gamma^{-1}) \in ker(\gamma\alpha\delta) = ker(\beta)$$

Böylece $ker(\alpha\delta) = ker(\alpha)$ olup $ker(\alpha) = ker(\alpha\delta) = ker(\gamma\alpha\delta) = ker(\beta)$ olur. O halde $ker(\alpha) = ker(\beta)$ olup $part(\alpha) = part(\beta)$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $|im(\alpha)| = |im(\beta)|$ ve $part(\alpha) = part(\beta)$ olsun. $i = 1, 2, \dots, k$ için $|A_i| = |C_i|$ olmak üzere standart gösterim ile

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_k \\ b_1 & b_2 & \dots & b_k \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_k \\ d_1 & d_2 & \dots & d_k \end{pmatrix}$$

şeklindedir. γ dönüşümü, $i = 1, 2, \dots, k$ için C_i ile A_i yi örten olarak eşleyen permütasyon olsun. δ dönüşümü de $i = 1, 2, \dots, k$ için b_i yi d_i ile, $X_n \setminus im(\alpha)$ ile $X_n \setminus im(\beta)$ ile eşleyen dönüşüm olsun. Dikkat edilirse $\gamma, \delta \in S_n$ olduğu açıktır. Böylece $\gamma, \delta \in S_n$ olmak üzere $\beta = \gamma\alpha\delta$ elde edilir. $\square$

Teorem 4.4.4. $\alpha, \beta \in T_n$ olsun.

(i) $\langle\langle\alpha\rangle\rangle = \langle\langle\beta\rangle\rangle \Leftrightarrow \beta = \gamma\alpha\delta$ olacak şekilde $\gamma, \delta \in S_n$ vardır.

(ii) $\langle\langle\alpha\rangle\rangle = T_n \Leftrightarrow def(\alpha) = 1$ olmasıdır.

İspat: (i) $(\Leftrightarrow) \beta = \gamma\alpha\delta$ olacak şekilde $\gamma, \delta \in S_n$ olsun. O halde $\beta \in \langle\langle\alpha\rangle\rangle$ olup $\langle\langle\beta\rangle\rangle \subseteq \langle\langle\alpha\rangle\rangle$ dır. $\beta = \gamma\alpha\delta \Rightarrow \alpha = \gamma^{-1}\beta\delta^{-1}$ olacak şekilde $\gamma^{-1}, \delta^{-1} \in S_n$ vardır. $\alpha \in \langle\langle\beta\rangle\rangle$ olup $\langle\langle\alpha\rangle\rangle \subseteq \langle\langle\beta\rangle\rangle$ olur. Böylece $\langle\langle\alpha\rangle\rangle = \langle\langle\beta\rangle\rangle$ elde edilir.

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

$(\Rightarrow) \langle\langle\alpha\rangle\rangle = \langle\langle\beta\rangle\rangle$ olsun. O zaman $\beta \in \langle\langle\alpha\rangle\rangle$ ve $\alpha \in \langle\langle\beta\rangle\rangle$ olur. Eğer $|im(\alpha)| < |im(\beta)|$ ise $\beta \notin \langle\langle\alpha\rangle\rangle$ olur. Benzer şekilde $|im(\beta)| < |im(\alpha)|$ ise $\alpha \notin \langle\langle\beta\rangle\rangle$ olur. O halde

$$|im(\alpha)| = |im(\beta)|$$

dir. Şimdi $part(\alpha) = part(\beta)$ olduğunu gösterelim. $\beta \in \langle\langle\alpha\rangle\rangle$ olduğundan

$$\beta = \gamma_1 \alpha \gamma_2 \alpha \gamma_3 \alpha \dots \gamma_m \alpha \gamma_{m+1}$$

olacak şekilde $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m+1} \in S_n$ vardır. $m = 1$ ise $\beta = \gamma_1 \alpha \gamma_2$ olup ispat biter. $m \geq 2$ ise

$$\delta = \gamma_1 \alpha \gamma_2 \alpha \gamma_3 \alpha \dots \gamma_m$$

olmak üzere $\beta = \delta \alpha \gamma_{m+1}$ şeklindedir. $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m \in S_n$ ve $\delta = \gamma_1 \alpha \gamma_2 \dots \gamma_{m-1} \alpha \gamma_m$ olduğundan $part(\delta) = part(\alpha)$ dır. O zaman

$$|im(\beta)| \leq |im(\delta)| \leq |im(\alpha)|$$

ve $|im(\alpha)| = |im(\beta)|$ olduğundan $|im(\delta)| = |im(\alpha)|$ elde edilir. Ayrıca $|im(\delta)| = |im(\alpha)| = |im(\beta)|$ olduğundan δ, α, β aynı $\mathcal{J}$ -sınıfındadır. δ, α, β nın ait olduğu $\mathcal{J}$ -sınıfının $J_r = \{\varepsilon \in T_n : |im(\varepsilon)| = r\}$ olduğunu kabul edelim. δ ve $\delta \alpha \gamma_{m+1}$ elemanları

$$P_{n,r} = K_{n,r} / (K_{n,r-1} \cup K_{n,r-2} \cup \dots \cup K_{n,1})$$

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

kümesinde sıfırdan farklı elemanlardır. T_n yarıgrubunda $\beta = \delta \alpha \gamma_{m+1} \mathcal{R} \delta$ olup $\ker(\beta) = \ker(\delta)$ dır.

$$part(\beta) = part(\delta) = part(\alpha)$$

elde edilir. Böylece $|im(\alpha)| = |im(\beta)|$ ve $part(\alpha) = part(\beta)$ olduğundan Lemma 4.4.3.dan dolayı $\beta = \gamma \alpha \delta$ olacak şekilde $\gamma, \delta \in S_n$ vardır.

(iii) $(\Rightarrow) \langle\langle \alpha \rangle\rangle = T_n$ olsun. Kabul edelim ki $def(\alpha) \geq 2$ olsun. $\alpha, \varepsilon \in T_n$ için

$$def(\alpha\varepsilon) \geq \max\{def(\alpha), def(\varepsilon)\}$$

olduğundan $1 \leq def(\varepsilon) < def(\alpha)$ olacak şekilde bir $\varepsilon \in T_n$ elemanı $\langle\langle \alpha \rangle\rangle$ kümesine ait olamaz. Bu durum $\langle\langle \alpha \rangle\rangle = T_n$ oluşu ile çelişir. $def(\alpha) = 0$ olsa $\alpha \in S_n$ olup $\langle\langle \alpha \rangle\rangle$, ST_n yarıgrubunun elemanlarını içeremez. O halde $def(\alpha) = 1$ olmalıdır.

$(\Leftarrow) def(\alpha) = 1$ olsun. Eğer $\gamma = [x_1, x_2, \dots, x_m | x_r]$ bir patika-devir ise

$$\bar{\gamma} = [x_1, x_m, x_{m-1}, \dots, x_2 | x_1] \in S_n$$

elemanını tanımlayalım. Eğer γ bir devir (cycle) ise $\bar{\gamma} = \gamma^{-1}$ olduğu açıktır. Eğer γ bir öz patika devir ise

$$\bar{\gamma}\gamma = [x_1, x_r | x_r], \bar{\gamma}\gamma = [x_m, x_{r-1} | x_{r-1}] \text{ ve } \gamma\bar{\gamma}\gamma = \gamma \text{ dir.}$$

Eğer $def(\alpha) = 1$ ve $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ de α nın tüm çarpanları ise bu çarpanlardan bir tanesi hariç diğer tüm çarpanlar birer devirdir. Sonuç 4.2.5. den dolayı α nın son çarpanı $\alpha_p = [x_1, x_2, \dots, x_m | x_r]$ öz patika-devir olmak üzere

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

$$\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_p$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. $\bar{\alpha} = \overline{\alpha_p}, \overline{\alpha_{p-1}}, \dots, \overline{\alpha_1}$ olsun. Yukarıdaki özelliklerden dolayı

$$\bar{\alpha}\alpha = \overline{\alpha_p} \dots \overline{\alpha_1} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p = \overline{\alpha_p} \alpha_p = [x_1, x_r | x_r]$$

olup

$$\langle\langle\alpha\rangle\rangle = \langle\langle\bar{\alpha}\alpha\rangle\rangle = \langle\langle[x_1, x_r | x_r]\rangle\rangle = T_n$$

elde edilir. $\square$

Teorem 4.4.5. $|im(\alpha)| = r$ ile $\alpha \in ST_n$ ve $m = n - r$ olsun. O zaman

$$im(\alpha\varepsilon) = \{m + 1, m + 2, \dots, n\}$$

olacak şekilde $\varepsilon \in S_n$ vardır.

İspat: $im(\alpha) = \{m + 1, \dots, n\}$ ise $\varepsilon = [1|1]$ birim dönüşüm olup ispat biter.

Aksi halde yani $im(\alpha) \neq \{m + 1, m + 2, \dots, n\}$ ise $\{m + 1, \dots, n\}$ kümesi r elemanlı ve $|im(\alpha)| = r$ olduğundan $\{i_1, \dots, i_k\} = im(\alpha) \cap \{1, 2, \dots, m\}$ olacak şekilde $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$ vardır. Böylece $im(\alpha) \cap \{m + 1, \dots, n\}$ kümesi $r - k$ tane eleman içerir. $j_1, \dots, j_k \notin im(\alpha)$ olacak şekilde $m + 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ vardır.

$$\zeta = [i_1, j_1 | i_1] \dots [i_k, j_k | j_k];$$

olarak tanımlanırsa $im(\alpha\zeta) = \{m + 1, m + 2, \dots, n\}$ elde edilir. $\square$

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

Teorem 4.4.6. $|im(\alpha)| = r$ ile $\alpha \in ST_n$ ve $m = n - r$ olsun. O zaman

$$\alpha\zeta = \gamma\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_m$$

olacak şekilde $x_i \geq m + 1$ ile $\gamma_i = [i, x_i | x_i]$ ve $\zeta, \gamma \in S_n$ vardır.

İspat: $\alpha \in ST_n, |im(\alpha)| = r$ ve $m = n - r$ olsun. Teorem 4.4.5. den dolayı

$$im(\alpha\zeta) = \{m + 1, m + 2, \dots, n\}$$

olacak şekilde $\zeta \in S_n$ vardır. Sonuç 4.2.5. den dolayı α nın tüm devir çarpanlarının çarpımı δ ve $\beta_i = [i, y_{i2}, y_{i3}, \dots, y_{iq_i} | y_{ir_i}] (y_{ir_i} \neq i, 1 \leq i \leq m)$ olmak üzere $\alpha\zeta = \delta\beta_1\beta_2 \dots \beta_m$ şeklindedir. β ve $\bar{\beta}$ dönüşümlerini

$$\beta = \beta_1\beta_2 \dots \beta_m, \bar{\beta} = \bar{\beta}_m \dots \bar{\beta}_2\bar{\beta}_1$$

olarak alalım. (Teorem 4.4.4.(ii) ispatındaki $\gamma = [x_1, \dots, x_m | x_r]$ ise $\bar{\gamma} = [x_1, x_m, x_{m-1}, \dots, x_2 | x_1] \in S_n$ için $\bar{\gamma}\gamma = [x_1, x_r | x_r]$ olduğunu hatırlayalım.)

$\bar{\beta} \in S_n$ olup

$$\begin{aligned} \alpha\zeta &= \delta\beta = \delta((\bar{\beta})^{-1}\bar{\beta})\beta = \delta(\bar{\beta})^{-1}\bar{\beta}_m \dots \bar{\beta}_2(\bar{\beta}_1\beta_1)\beta_2 \dots \beta_m \\ &= \delta(\bar{\beta})^{-1}\bar{\beta}_m \dots \bar{\beta}_2[1, y_{1r_1} | y_{1r_1}]\beta_2 \dots \beta_m \\ &= \delta(\bar{\beta})^{-1}[1, y_{1r_1} | y_{1r_1}]\bar{\beta}_m \dots (\bar{\beta}_2\beta_2) \dots \beta_m \\ &= \dots \\ &= \delta(\bar{\beta})^{-1}[1, y_{1r_1} | y_{1r_1}] \dots [m, y_{mr_m} | y_{mr_m}] \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\gamma = \delta(\bar{\beta})^{-1}, x_i = y_{ir_i} \text{ alınırsa}$$

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

$$\alpha\zeta = \delta(\bar{\beta})^{-1}[1, x_1|x_1] \dots [m, x_m|x_m] = \gamma[1, x_1|x_1] \dots [m, x_m|x_m]$$

elde edilir. O halde $\alpha\zeta = \gamma\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_m$ olacak şekilde $x_i \geq m + 1$ ile $\gamma_i = [i, x_i|x_i]$ ve $\zeta, \gamma \in S_n$ vardır. $\square$

$n \geq r$ ile $n, r \in \mathbb{Z}^+$ için $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_r \geq 1$ olmak üzere

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$$

denkleminin tamsayı çözümlerinin kümesini $P_r(n)$ ile gösterelim.

Tanım 4.4.7. Eğer $(n_1, n_2, \dots, n_r)$ sıralı r -li

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n, (x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_r \geq 1)$$

denkleminin bir çözümü ise $(n_1, n_2, \dots, n_r)$ sıralı r -li ye n pozitif tamsayısının r terimli parçalanışı diyeceğiz. Tamsayı çözümlerinin kümesi $P_r(n)$ kümesinin eleman sayısını $|P_r(n)| = p_r(n)$ ile göstereceğiz.

Örnek 4.4.8. $n \geq r$ ile $n, r \in \mathbb{Z}^+$ için $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_r \geq 1$ olmak üzere

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$$

denkleminin tamsayı çözümlerinin kümesini $P_r(n)$ bulalım. Örneğin $n = 5$ olarak alalım. $2 \leq r \leq 5$ için tüm çözümleri yazarsak

$$\underline{5}$$

$$4 + 1$$

$$3 + 2$$

$$3 + 1 + 1$$

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

$$2 + 2 + 1$$

$$2 + 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

elde edilir. Örneğin $r = 3$ için tüm çözümlerin kümesi

$$P_3(5) = \{3 + 1 + 1, 2 + 2 + 1\}$$

olup $|P_3(5)| = p_3(5) = 2$ olarak bulunur.

Örneğin $n = 7$ olarak alalım. $2 \leq r \leq 7$ için tüm çözümleri yazarsak

$$7$$

$$6 + 1$$

$$5 + 2$$

$$5 + 1 + 1$$

$$4 + 3$$

$$4 + 2 + 1$$

$$4 + 1 + 1 + 1$$

$$3 + 2 + 2$$

$$3 + 2 + 1 + 1$$

$$3 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$2 + 2 + 2 + 1$$

$$2 + 2 + 1 + 1 + 1$$

$$2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

elde edilir. Örneğin $r = 3$ için tüm çözümlerin kümesi

$$P_3(7) = \{5 + 1 + 1, 4 + 2 + 1, 3 + 2 + 2, \}$$

olup $|P_3(7)| = p_3(7) = 3$ olarak bulunur.

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

$P_r(n)$ kümesinin bir elemanı $(n_1, n_2, \dots, n_r)$ ye karşılık gelecek şekilde bir $\alpha_{(n_1, n_2, \dots, n_r)}$ dönüşümünü aşağıdaki yolla tanımlarız. Bunun için öncelikle $n \geq r$ ile $n, r \in \mathbb{Z}^+$ için $m = n - r$ ve $s = \min\{2m, n\}$ olsun. Eğer $(n_1, n_2, \dots, n_r)$ sıralı r -li n pozitif tamsayısının r terimli parçalanışı ise

$$\begin{aligned} m+1 &= x_1 = x_2 = \dots = x_{n_1-1} \\ m+2 &= x_{n_1} = x_{n_1+1} = \dots = x_{n_1+n_2-2} \\ &\vdots \\ s-1 &= X_{(n_1+n_2+\dots+n_{r-2})-r+3} = X_{(n_1+n_2+\dots+n_{r-2})-r+4} = \dots \\ &= X_{(n_1+n_2+\dots+n_{r-2})-r+3} \\ s &= X_{(n_1+n_2+\dots+n_{r-1})-r+2} = X_{(n_1+n_2+\dots+n_{r-1})-r+3} = \dots = X_{(n_1+n_2+\dots+n_r)-r} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\alpha_{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = [1, x_1 | x_1][2, x_2 | x_2] \dots [n, x_{n_1-1} | x_{n_1-1}] \dots [m, x_m | x_m] \in ST_n$$

olarak tanımlayalım. Yukarıdaki notasyonlarla $X_{n,r}$ kümesini

$$X_{n,r} = \{\alpha_{(n_1, n_2, \dots, n_r)} : (n_1, n_2, \dots, n_r), n - n \text{ in bir parçalanışıdır}\}$$

olarak tanımlayalım. Örneğin, 8 tamsayısının 4 terimli bir parçalanışı $(4, 2, 1, 1)$ ise $(4 - 1, 2 - 1, 1 - 1, 1 - 1) = (3, 1, 0, 0)$ olup 3 çarpan aynı sayıda patika olacağından

$$\alpha_{(4, 2, 1, 1)} = [1, 5 | 5][2, 5 | 5][3, 5 | 5][4, 6 | 6] \in X_{8,4}$$

elde edilir. Dikkat edilirse 1'lerin $\alpha_{(4, 2, 1, 1)}$ için bir çarpan olarak katkısı yoktur.

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

Örneğin $P_3(7) = \{(5,1,1), (4,2,1), (3,2,2)\}$ olup

$$\alpha_{(5,1,1)} = [1,5|5][2,5|5][3,5|5][4,5|5]$$

$$\alpha_{(4,2,1)} = [1,5|5][2,5|5][3,5|5][4,6|6]$$

$$\alpha_{(3,2,2)} = [1,5|5][2,5|5][3,6|6][4,7|7]$$

olacağından $X_{7,3}$ kümesi

$$X_{7,3} = \{\alpha_{(5,1,1)}, \alpha_{(4,2,1)}, \alpha_{(3,2,2)}\}$$

olarak bulunur. $(1,1,1, \dots, 1)$ parçalanışına karşılık $\alpha_{(1,1,1, \dots, 1)} = [1|1]$ dönüşümünü alacağız.

Lemma 4.4.9. $|im(\alpha)| = r$ ile $\alpha \in ST_n$ olsun. O zaman yukarıdaki notasyonlarla

$$\langle\langle\alpha\rangle\rangle = \langle\langle\alpha_{(n_1, n_2, \dots, n_r)}\rangle\rangle$$

olacak şekilde $\alpha_{(n_1, n_2, \dots, n_r)} \in X_{n,r}$ elemanı vardır.

İspat: $|im(\alpha)| = r$ ile $\alpha \in ST_n$ olsun. Teorem 4.4.6. den dolayı $\gamma_i = [i, x_i|x_i]$ ve $x_i \geq m+1$ ($1 \leq i \leq m$) olmak üzere

$$\alpha\zeta = \gamma\gamma_1 \dots \gamma_m \text{ ve } \alpha = \gamma\gamma_1 \dots \gamma_m\zeta^{-1}$$

olacak şekilde $\gamma, \zeta \in S_n$ ve $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, 2-patikaları vardır. O halde

$$\langle\langle\alpha\rangle\rangle = \langle\langle\gamma_1, \dots, \gamma_m\rangle\rangle$$

elde edilir. Sonuç 4.2.5. den dolayı γ_i leri yeniden sıralayarak

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

$$\begin{aligned} m+1 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{m_1} < x_{m_1+1} = \dots = x_{m_1+m_2} < x_{m_1+m_2+1} = \dots \\ = x_{m_1+\dots+m_{k-1}} < x_{m_1+\dots+m_{k-1}+1} = \dots = x_{m_1+\dots+m_k} \leq n \end{aligned}$$

ve $m_1 + m_2 + \dots + m_k = m$ elde edilir. Burada $k-1$ tane kesin eşitsizlik olduğundan

$$\begin{aligned} (m+1) + (k-1) &\leq m_1 + m_2 + \dots + m_k \leq n \\ m+k &\leq n \Rightarrow k \leq n-m=r \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $x_1 = x_2 = \dots = x_{m_1} = m+1$ ise $\beta_1 = [1|1]$ alınır. Aksi halde $\beta_1, \beta_1 = [m+1, x_1|m+1]$ olarak tanımlanır. β_1 dönüşümü bir transpozisyon olup $(\beta_1^{-1} = \beta_1), \gamma_j (j \geq m_1+1)$ dönüşümleri ile ayrık olacağından ve Sonuç 4.2.5. den dolayı

$$\beta_1^{-1} \beta_1 \gamma_1 \dots \gamma_m = \beta_1 (\gamma_1 \dots \gamma_m) \beta_1 = (\beta_1 \gamma_1 \beta_1) (\beta_1 \gamma_2 \beta_1) \dots (\beta_1 \gamma_m \beta_1) \gamma_{m+1} \dots \gamma_m$$

olur. $i = 1, 2, \dots, m_1$ için

$$\beta_1 \gamma_i \beta_1 = [m+1, x_1|m+1][i, x_1|x_1][m+1, x_1|m+1] = [i, m+1|m+1]$$

olup

$$\beta_1 \gamma_1 \dots \gamma_m \beta_1 = [1, m+1|m+1] \dots [m_1, m+1|m+1] \gamma_{m_1+1} \dots \gamma_m$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\beta_2 = \begin{cases} [1|1], & x_{m_1+1} = \dots = x_{m_1+m_2} = m+2 \\ [m+2, x_{m_1+1}|m+2], & \text{aksi halde} \end{cases}$$

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

şeklinde tanımlanır. Böylece devam edilirse, β_i dönüşümleri transpozisyon olacağından $\beta = \beta_1 \dots \beta_k = \beta_k \dots \beta_1 = \beta^{-1}$ permütasyonu tanımlanarak ($\alpha = \gamma\gamma_1 \dots \gamma_m\zeta^{-1}$ olduğu hatırlanırsa)

$$\begin{aligned}\beta(\gamma^{-1}\alpha\zeta)\beta &= \beta(\gamma_1 \dots \gamma_m)\beta = [1, m+1|m+1] \dots [m_1, m+1|m+1] \\ &\quad [m_1+1, m+2|m+2] \dots [m_1+m_2, m+2|m+2] \\ &\quad \vdots \\ &\quad [m_1+\dots+m_{k-1}+1, m+k|m+k] \dots [m, m+k|m+k]\end{aligned}$$

elde edilir. Dikkat edilirse $k = r$ ise

$$(m_1+1) + \dots + (m_k+1) = m_1 + \dots + m_k + 1 + \dots + 1 = m+k = m+r = n$$

olup $(m_1+1, m_2+1, \dots, m_k+1)$ sıralı k -lı n pozitif tamsayısının bir parçalanışı olur. Böylece $\beta\gamma^{-1}\alpha\epsilon\beta \in X_{n,r}$ elde edilir. O halde

$$\langle\langle\alpha\rangle\rangle = \langle\langle\alpha_{(m_1+1+\dots+m_k+1)}\rangle\rangle$$

olur. Eğer $k \neq r$ ise ($k \leq r$ olduğu hatırlanırsa) $n_{k+1} = \dots = n_r = 1$ olmak üzere

$(m_1+1, \dots, m_k+1, n_{k+1}, \dots, n_r)$ sıralı r -li n pozitif tamsayısının bir parçalanışı olup $\beta\gamma^{-1}\alpha\epsilon\beta \in X_{n,r}$ olur. Böylece Teorem 4.4.4 (i) den dolayı

$$\langle\langle\alpha\rangle\rangle = \langle\langle\alpha_{(m_1+1, \dots, m_k+1, n_{k+1}, \dots, n_r)}\rangle\rangle$$

elde edilir. $\square$

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

Tanım 4.4.10. $1 \leq r \leq n - 1$ için $K_{n,r} = \{\alpha \in T_n : |im(\alpha)| \leq r\}$ ve $T_{n,r} = K_{n,r} \cup S_n$ olmak üzere

$$cont(T_{n,r}) = \min\{|G| : G \subseteq K_{n,r} \text{ ve } \langle G \cup S_n \rangle = T_{n,r}\}$$

şeklinde tanımlanan pozitif tamsayıya $T_{n,r}$ yarıgrubunun **contingent rankı** denir.

Lemma 4.4.9.dan dolayı $\{\alpha_p : p \in P_r(n)\} \cup S_n$ kümesinin

$$T_{n,r} = \{\alpha \in T_n : |im(\alpha)| = r\}$$

kümesini doğuruyor olduğunu biliyoruz. O halde

$$G = \{\alpha_p : p \in P_r(n)\}$$

alınırsa $T_{n,r} = \langle G \cup S_n \rangle$ olup

$$cont(T_{n,r}) \leq |G| = |P_r(n)| = p_r(n)$$

olduğu açıktır.

Teorem 4.4.11. $n, r \in \mathbb{Z}^+$ ve $1 \leq r \leq n$ olmak üzere $cont(T_{n,r}) = p_r(n)$ olur.

İspat: Herhangi bir $\alpha \in T_{n,r}$ alalım. $|im(\alpha)| \leq r$ olacağından $|im(\alpha)| = r$ olacak şekildeki α dönüşümlerini doğurmak yeterli olacaktır. $\alpha \in J_r$ olsun. Herhangi bir $\zeta \in \langle \langle \alpha \rangle \rangle \cap J_r$ elemanı için $part(\zeta) = part(\alpha)$ olduğunu Teorem 4.4.4 den dolayı biliyoruz. Böylece $G \subseteq K_{n,r}$ kümesi için $\langle G \cup S_n \rangle = T_{n,r}$ ise G kümesi her bir $p \in P_r(n)$ elemanı için $part(\alpha) = p$ olacak şekilde en az bir α elemanı içermek zorundadır. O halde

4. DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA ÇARPANLARA AYIRMA Cansu BİÇİCİ

$$|P_r(n)| = p_r(n) \leq |G|$$

olup

$$p_r(n) \leq \text{cont}(T_{n,r})$$

olur. Böylece $G = X_{n,r}$ alınırsa $|G| = |X_{n,r}| = p_r(n)$ ve $\langle G \cup S_n \rangle = T_{n,r}$ olup

$$\text{cont}(T_{n,r}) = p_r(n)$$

elde edilir. $\square$

5. SONUÇ

Permütasyonlar grubunda klasik çarpanlara ayrılış yöntemi, her permütasyon ayrık devirlerin (ayrık permütasyonların) çarpımı olarak yazılabilir şeklindedir. Yarıgruplarda da benzer çarpanlara ayrılış yöntemleri bulunmuştur. Biz bu tezde dönüşüm yarıgruplarında doğuraylar ve çarpanlara ayırma üzerine ilgili çalışmaları derledik. Yarıgruplarda çarpanlara ayrılış yöntemlerinin olduğu çalışmalardan bir tanesi Lipscomb (1996) tarafından geliştirilen yöntemdir. Bu yöntem dönüşümün grafik temsili ile çarpanlara ayırma arasında bir köprü oluşturmaktadır. Sayesinde dönüşümün grafik temsilini oluşturup dönüşüm yarıgrubunun bazı özellikleri incelenmiştir. Fakat bu yöntemde T_n nin bir elemanı için yazılan çarpanların her biri T_n nin bir elemanı değildir. Daha sonra Ayık G., Ayık H., Howie J. M. (2005) tarafından yapılan çalışmada, T_n yarıgrubunun bir elemanı için yazılan çarpanların her biri yine T_n nin bir elemanı olacak şekilde bir çarpanlara ayrılış yöntemi geliştirilmiştir. Bu çarpanlara ayrılış yöntemi sayesinde bazı dönüşüm yarıgruplarının doğuray kümeleri bulunarak rankları hesaplanmıştır.

Ayık, Ayık ve Howie (2005) yöntemiyle singüler dönüşümler yarıgrubunun her elemanı 2-patikaların bir çarpımı olarak ifade edilir.

Ayık, Ayık ve Howie (2005) tarafından contingent rank tanımlanır ve n nin r li parçalanışlarının sayısı $p_r(n)$ olmak üzere $T_{n,r}$ nin contingent rankının olduğu $p_r(n)$ gösterilmiştir.

Ayık, Ayık ve Howie (2005) tarafından bulunan çarpanlara ayrılış yöntemi kullanılarak dönüşüm yarıgruplarının bazı alt yarıgrupları için de doğuray kümeleri bulunup rank hesapları yapılabilir.



KAYNAKLAR

- AYIK, G., AYIK, H. and HOWIE, J.M., 2005. On Factorisations and Generators in Transformation Semigroups. *Semigroup Forum*, 70: 225-237.
- AYIK, G., AYIK, H., BUGAY L., and KELEKÇİ O., 2013. Generating Sets of Finite Singular Transformation Semigroups. *Semigroup Forum*, 86 (no:1):59- -66.
- GANYUSHKIN, O., MAZORCHUK, V., 2009. Classical Finite Transformation Semigroups. Springer-Verlag, London, 314 s.
- GARBA, G. U., 1994. On the idempotent ranks of certain semigroups of order preserving transformations, *Portugaliae Mathematica* 51 , 185–204.
- GOMES, G.M.S., HOWIE, J.M., 1987. On The Ranks of Certain Finite Semigroups of Transformations. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 101: 395-403.
- _____, 1992. On the ranks of certain semigroups of orderpreserving transformations. *Semigroup Forum* 45, no. 3, 272–282.
- HOWIE, J.M., 1966. The Subsemigroup Generated By The Idempotents of a Full Transformation Semigroup. *Journal London Math. Soc.*, 41: 707-716.
- _____, 1978. Idempotent Generators in Finite Full Transformation Semigroups. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 81A: 317-323.
- _____, 1980. Products of idempotents in finite full transformation semigroups. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.*, 86A:243-254.
- _____, 1995. *Fundamentals of Semigroup Theory*. Oxford University Press, New York, 351 s.
- HOWIE, J. M., McFADDEN R. B., 1990. Idempotent rank in finite full transformation semigroups, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 114 , 161–167.
- HIGGINS, P.M., 1992. *Techniques of Semigroup Theory*, Oxford University Press, New York, 258 s.

- _____, 1993. Combinatorial Results for Semigroups of Order-preserving Mappings. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 113: 281-296.
- _____, 1998. Generators and factorisations of transformation semigroups. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 128A, 1355-1369.
- _____, 2019. Involution Matchings, the Semigroup of Orientation-preserving and Orientation-reversing Mappings, and Inverse Covers of The Full Transformation Semigroup. Semigroup Forum, 98: 669-6
- HIGGINS, P.M., HOWIE, J.M., MITCHELL, J.D. and RUSKUC, N. Countable Versus uncountable Ranks in infinite Semigroups of Transformations and Relations, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2003) 46, 531–544
- LIPSCOMB, S., (1996). “Symmetric Inverse Semigroups”, Math. Surveys and Monographs, Vol. 46, American Math Soc., Providence.
- KONIECZNYJ., Centralizers of full injective transformations in the symmetric inverse semigroup, Semigroup Forum (2018) 96:474–488
- _____, A new definition of conjugacy for semigroups, Journal of Algebra and Its Applications Vol. 17, No. 2 (2018) 1850032 (20 pages)

ÖZGEÇMİŞ

Cansu BİÇİCİ. İlköğretim ve ortaöğretim öğrenimini Adana’da tamamladıktan sonra Lisans öğrenimine 2008 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü’nde başladı ve 2012 yılında mezun oldu. Milli Eğitim Bakanlığına Matematik öğretmeni olarak atanmış olup halen görevini sürdürmekte iken 2019 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

