

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

Ebru YİĞİT

DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ GÖRECE RANKI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2017

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ GÖRECE RANKI

Ebru YİĞİT

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 22/09/2017 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

.....
Prof. Dr. Gonca AYIK
DANIŞMAN

.....
Prof. Dr. Hayrullah AYIK
ÜYE

.....
Yrd.Doç. Dr. Ersin KIRAL
ÜYE

.....
Yrd. Doç. Dr. Cennet ESKAL
ÜYE

.....
Yrd.Doç. Dr. Osman KELEKÇİ
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

**Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü**

Bu Çalışma TÜBİTAK-BİDEB Tarafından Desteklenmiştir.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir

ÖZ

DOKTORA TEZİ

DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ GÖRECE RANKI

Ebru YİĞİT

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Gonca AYIK
Yıl: 2017, Sayfa: 87
Jüri : Prof. Dr. Gonca AYIK
: Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL
: Yrd. Doç. Dr. Cennet ESKAL
: Yrd. Doç. Dr. Osman KELEKÇİ

$X_n = \{1, \dots, n\}$ kümesi üzerindeki kısmi dönüşümler yarıgrubu, tam dönüşümler yarıgrubu, permütasyon grubu ve alterne grubu sırasıyla P_n, T_n, S_n ve A_n olsun. $1 \leq r \leq n$ için

$$\begin{aligned} K_{n,r} &= \{\alpha \in T_n : \text{im}(\alpha) \leq r\}, & PK_{n,r} &= \{\alpha \in P_n : \text{im}(\alpha) \leq r\}, \\ T_{n,r} &= S_n \cup K_{n,r}, & PT_{n,r} &= S_n \cup PK_{n,r}, \\ A_{n,r} &= A_n \cup K_{n,r}, & PA_{n,r} &= A_n \cup PK_{n,r} \end{aligned}$$

olsun. $1 \leq r \leq n - 1$ için $PK_{n,r} (K_{n,r})$ nin herhangi bir alt kümesinin modulo S_n e göre $PT_{n,r} (T_{n,r})$ nin bir görece doğuray kümesi olması için gerekli ve yeterli koşullar bulunmuş ve bu yarıgrupların modulo S_n e göre görece rankı verilmiştir. Ayrıca S_n yerine A_n alterne grubu alınarak $PA_{n,r}$ ve $A_{n,r}$ yarıgrupları için benzer sonuçlar incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: (kısmi) dönüşüm yarıgrubu, (minimal) doğuray kümesi, görece rank.

ABSTRACT

PhD THESIS

RELATIVE RANK OF TRANSFORMATION SEMIGROUPS

Ebru YİĞİT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
ÇUKUROVA UNIVERSITY

Supervisor : Prof. Dr. Gonca AYIK
Year: 2017, Pages: 87
Jury : Prof. Dr. Gonca AYIK
: Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Asst Prof. Dr. Ersin KIRAL
: Asst Prof. Dr. Cennet ESKAL
: Asst Prof. Dr. Osman KELEKÇİ

Let P_n , T_n , S_n and A_n be the partial transformations semigroup, the full transformations semigroup, the symmetric group and the alternating group on a set $X_n = \{1, \dots, n\}$, respectively. For $1 \leq r \leq n$, let

$$\begin{aligned} K_{n,r} &= \{\alpha \in T_n : \text{im}(\alpha) \leq r\}, & PK_{n,r} &= \{\alpha \in P_n : \text{im}(\alpha) \leq r\}, \\ T_{n,r} &= S_n \cup K_{n,r}, & PT_{n,r} &= S_n \cup PK_{n,r}, \\ A_{n,r} &= A_n \cup K_{n,r}, & PA_{n,r} &= A_n \cup PK_{n,r}. \end{aligned}$$

For $1 \leq r \leq n - 1$, it is found that the necessary and sufficient conditions for any subset of $PK_{n,r}$ ($K_{n,r}$) to be a (minimal) relative generating set of $PT_{n,r}$ ($T_{n,r}$) modulo S_n and it is given that the relative rank of $PT_{n,r}$ and $T_{n,r}$ modulo S_n . Also, it is examined that the similar results for the semigroups $PA_{n,r}$ and $A_{n,r}$ by taking A_n instead of S_n .

Key Words: (partial) transformation semigroup, (minimal) generating set, relative rank.

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Bu çalışmada sonlu bir $X_n = \{1, \dots, n\}$ kümesi üzerinde kısmi dönüşümler yarıgrubu, tam dönüşümler yarıgrubu, permütasyon grubu ve alterne grubu ele alacağız ve bunları sırasıyla P_n , T_n , S_n ve A_n ile göstereceğiz.

$1 \leq r \leq n$ için

$$\begin{aligned} K_{n,r} &= \{\alpha \in T_n : \text{im}(\alpha) \leq r\}, \\ PK_{n,r} &= \{\alpha \in P_n : \text{im}(\alpha) \leq r\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanan $K_{n,r}$ ve $PK_{n,r}$ kümeleri sırasıyla T_n ve P_n yarıgruplarının bir alt yarıgruplarıdır. Howie ve McFadden (1990) $K_{n,r}$ alt yarı grubunun rankının $S(n, r)$ olduğunu göstermişlerdir. Burada $S(n, r)$, 2. tip Stirling sayısıdır ve $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ ve $2 \leq r \leq n - 1$ için $S(n, r) = S(n - 1, r - 1) + r \cdot S(n - 1, r)$ şeklinde tanımlıdır. Garba (1990) ise $PK_{n,r}$ alt yarı grubunun rankının $S(n + 1, r + 1)$ olduğunu göstermiştir. $1 \leq r \leq n$ için

$$\begin{aligned} T_{n,r} &= S_n \cup K_{n,r} \\ A_{n,r} &= A_n \cup K_{n,r} \\ PT_{n,r} &= S_n \cup PK_{n,r} \\ PA_{n,r} &= A_n \cup PK_{n,r} \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Ayık ve ark. (2005) T_n yarı grubunun bazı elemanları için ‘patika-devir’ olarak adlandırdıkları bir notasyon geliştirdiler ve T_n yarı grubundaki herhangi bir dönüşümün patika-devirlerin çarpımı olarak yazılabileceği çarpanlara ayrılış algoritması tanımladılar. Dönüşümlerin bu çarpanlara ayrılış yöntemini kullanarak, T_n yarı grubunun doğuray kümeleri ve rankları hakkında bazı sonuçları ispatladılar. Yine bu çalışmada $\text{rerank}(T_{n,r}, S_n) = p_r(n)$ olduğu gösterilmiştir.

Ayık ve Bugay (2015) D_r^P nin herhangi bir alt kümesinin $PK_{n,r}$ yarıgrubunun bir (minimal) doğuray kümesi ve D_r^T nin herhangi bir alt kümesinin $K_{n,r}$ yarıgrubunun bir (minimal) doğuray kümesi olabilmesi için gerekli ve yeterli koşulları belirlemişlerdir.

Bu çalışmada $1 \leq r \leq n - 1$ ve herhangi bir $U \subseteq PK_{n,r}$ olmak üzere, $U \cup S_n$ kümesinin $PK_{n,r}$ yarıgrubunun doğuray kümesi olması için U kümesinin sağladığı gerek ve yeter koşullar bulunmuştur. Bu bilgiler doğrultusunda

$$\text{rerank}(T_{n,r}, S_n) = p_r(n)$$

olduğunun farklı bir ispatı yapılmıştır. Ayrıca yine bu çalışmada $PT_{n,r}$ nin modulo S_n e göre görece rankının

$$\text{rerank}(PT_{n,r}, S_n) = \sum_{s=0}^{n-r} p_r(n-s)$$

olduğu gösterilmiştir.

Benzer düşünce ile, S_n permütasyon grubu yerine A_n alterne grubunu alarak $1 \leq r \leq n - 1$ için $PK_{n,r}$ nin herhangi bir alt kümesinin modulo A_n e göre $PA_{n,r}$ nin bir görece doğuray kümesi olması için gerekli ve yeterli koşullar belirlenip $PA_{n,r}$ yarıgrubunun modulo A_n e göre görece rankı ispatlanmıştır. Ayrıca $1 \leq r \leq n - 1$ için $K_{n,r}$ nin herhangi bir alt kümesinin modulo A_n e göre $A_{n,r}$ nin bir görece doğuray kümesi olması için gerekli ve yeterli koşullar belirlenip $A_{n,r}$ yarıgrubunun modulo A_n e göre görece rankı verilmiştir.

Son olarak bu çalışmada $T_{n,r}$ ve $PT_{n,r}$ yarıgruplarının görece idempotent rankları bulunmuştur.

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim boyunca değerli görüşlerinden ve birikiminden faydalandığım, çalışmalarım boyunca yardımını esirgemeyen değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Gonca Ayık’a teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve yardımını esirgemeyen tez jüri üyelerinden değerli hocam Prof. Dr. Hayrullah Ayık’a teşekkürlerimi sunarım. Tez jüri üyeleri Yrd. Doç. Dr. Ersin Kırıl, Yrd. Doç. Dr. Cennet Eskal ve Yrd. Doç. Dr. Osman Kelekci’ye destek ve teşviklerinden dolayı teşekkür ederim.

Her koşulda bana duydukları güvenle, desteklerini yanımda hissettiğim annem, babam ve kardeşime göstermiş oldukları sabır ve anlayıştan dolayı yürekten teşekkür ederim.

Ayrıca, doktora öğrenimim boyunca bana burs verip destek olan TÜBİTAK-BİDEB’e teşekkürü bir borç bilirim.

Ebru YİĞİT

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT.....	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR.....	V
İÇİNDEKİLER.....	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VII
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	7
2.1. Genel Kavramlar.....	7
2.2. Bağıntılar	10
2.3. Green Denklik Bağıntıları	13
2.4. Doğuray Kümeleri	20
2.5. Dönüşüm Yarıgrupları	22
2.6. $K_{n,r}$ ve $PK_{n,r}$ Yarıgrupları.....	37
3. $T_{n,r}$ ve $PT_{n,r}$ YARIGRUPLARININ GÖRECE RANKI.....	49
4. $A_{n,r}$ ve $PA_{n,r}$ YARIGRUPLARININ GÖRECE RANKI	61
5. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ DOĞURAY KÜMELERİ.....	67
5.1. D_r^P Sınıfı İle İlgili Bazı Özellikler	67
5.2. $K_{n,r} \cup S_n$ Yarı grubunun Doğuray Kümeleri	70
5.3. $PK_{n,r} \cup S_n$ Yarı grubunun Doğuray Kümeleri	76
KAYNAKLAR	83
ÖZGEÇMİŞ	87

ŞEKİLLER DİZİNİ

SAYFA

Şekil 2.1. Green denklik bağıntılarının Hasse diyagramı	16
Şekil 2.2. Bir D -Green denklik sınıfı örneği	18
Şekil 2.3. Bazı 2. Tip Stirling sayıları.....	32
Şekil 2.4. T_3 ün D_2^T sınıfı	35
Şekil 2.5. T_3 ün D_1^T sınıfı	35
Şekil 2.6. P_3 ün D_2^P sınıfı	36



1. GİRİŞ

Cisimler teorisindeki sonlu genişlemeleri açıklamak için gerekli olan grup yapısı teknik olarak ilk kez Fransız matematikçi Evariste Galois tarafından tanımlanmıştır.

1802 de Gauss'un "Theory of Forms" (Disquisitiones Arithmeticae) adlı eserini esin kaynağı olarak alan Cauchy 1815 de bir yazısında ilk kez devir için (a,b) notasyonunu bir permütasyonun transpozu için kullanarak tanıttı. Ayrıca Cauchy bir permütasyonun ayırık devirlerin çarpımı olarak yazıldığını ve S_n nin alterne alt grubu A_n i gösterdi. Bundan yaklaşık bir yüzyıl kadar sonra permütasyon grupları soyut olarak tanımlanarak, soyut grup teori için çeşitli aksiyom sistemleri formülize edilerek karşılaştırmalar yapıldı.

Sonraki yıllarda grup teorisindeki Cayley teoremi ile her grubun bir simetrik gruba gömülebilir olduğunun ispatlanması ile simetrik gruplar ayrıca önem kazanmıştır.

1922 de grup teoriye bu yaklaşımlarla, A.K. Suschkewitsch dönüşüm grupları ile grup teorisinin temel kavramlarını ilişkilendirdi ve dönüşüm yarıgrupları ile yarıgrup teorisinin temel kavramlarını ilişkilendirdi.

Ayrıca Cayley teoreminin benzeri yarıgrup teoride her sonlu yarıgrup bir sonlu dönüşüm yarıgrupuna (sonlu tam dönüşümler yarıgrupunun bir alt yarıgrupuna) izomorfik olduğunun ispatlanması ile (tam) dönüşüm yarıgrupları ayrıca önem kazanmış ve son 70 yıldır cebirsel yapılar için de yoğun olarak çalışılan bir araştırma konusu olmuştur.

Yarıgrup teorisinde de temel problemlerden biri, yarıgrupların sınıflandırılmasını sağlayacak ve onların yapısını tanımlayacak özellikleri bulmaktır. Bu özelliklere örnek olarak yarıgruplarda doğuray ve rank kavramlarını verebiliriz.

S , sonlu doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere

$$\text{rank}(S) = \min\{|X|: \langle X \rangle = S \text{ ve } X \subseteq S\}$$

tam sayısına S nin *rankı* denir ve $\text{rank}(S)$ ile gösterilir. $E(S)$ ile S yarı grubundaki tüm idempotentlerin kümesini gösterelim. Eğer $X \subseteq E(S)$ için $\langle X \rangle = S$ ise X e bir *idempotent doğuray* kümesi denir.

$$\text{idrank}(S) = \min\{|X|: \langle X \rangle = S \text{ ve } X \subseteq E(S)\}$$

tam sayısına S nin *idempotent rankı* denir ve $\text{idrank}(S)$ ile gösterilir.

$X_n = \{1, \dots, n\}$ sonlu kümesi olmak üzere X_n den X_n e tüm dönüşümlerin kümesini T_n ile X_n üzerindeki tüm permütasyonların kümesini S_n ile gösterelim. Tüm singüler dönüşümlerin kümesi ST_n ile gösterilir ve $ST_n = T_n \setminus S_n$ şeklindedir.

Dönüşüm yarıgruplarının doğurayları ile ilgili ilk çalışmalardan biri, Howie' nin, singüler dönüşümler yarı grubunun idempotentler tarafından doğurulduğunu gösteren (1966) yılında yayımlanan çalışması olmuştur. Daha sonra Howie, (1978) deki çalışmasıyla singüler dönüşümler yarı grubunun idempotent rankının $\frac{n(n-1)}{2}$ ve (1987) de de Gomes ile birlikte yaptığı çalışmada singüler dönüşümler yarı grubunun rankının idempotent rankına eşit olduğunu göstermiştir. Rank ve doğuray kümeleri ile ilgili çalışmalara ek olarak Ayık ve ark. (2005), Ayık ve ark. (2005), Ayık ve ark. (2008), Howie ve McFadden (1990), Howie ve

Marques Ribeiro (1999), (2000), Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Higgins (1992), (1993), Sanwong (2011), Sommnee ve Sanwong (2013) çalışmalarını verebiliriz.

Bu çalışmada sonlu bir $X_n = \{1, \dots, n\}$ kümesi üzerinde kısmi dönüşümler yarıgrubu, tam dönüşümler yarıgrubu, permütasyon grubu ve alterne grubu ele alacağız ve bunları sırasıyla P_n , T_n , S_n ve A_n ile göstereceğiz.

$1 \leq r \leq n$ için

$$\begin{aligned} K_{n,r} &= \{\alpha \in T_n : \text{im}(\alpha) \leq r\}, \\ PK_{n,r} &= \{\alpha \in P_n : \text{im}(\alpha) \leq r\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanan $K_{n,r}$ ve $PK_{n,r}$ kümeleri sırasıyla T_n ve P_n yarıgruplarının alt yarıgruplarıdır. Howie ve McFadden (1990) $K_{n,r}$ alt yarı grubunun rankının $S(n, r)$ olduğunu göstermişlerdir. Burada $S(n, r)$, 2. tip Stirling sayısıdır ve $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ ve $2 \leq r \leq n - 1$ için $S(n, r) = S(n - 1, r - 1) + r \cdot S(n - 1, r)$ şeklinde tanımlıdır. Garba (1990) ise $PK_{n,r}$ alt yarı grubunun rankının $S(n + 1, r + 1)$ olduğunu göstermiştir. $1 \leq r \leq n$ için

$$\begin{aligned} T_{n,r} &= S_n \cup K_{n,r} \\ A_{n,r} &= A_n \cup K_{n,r} \\ PT_{n,r} &= S_n \cup PK_{n,r} \\ PA_{n,r} &= A_n \cup PK_{n,r} \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım.

S bir yarıgrup ve G de S nin belirli bir alt kümesi olsun. Eğer $\langle X \cup G \rangle = S$ olacak şekilde S nin boştan farklı bir X alt kümesi var ise X kümesine *modulo G ye göre S yarı grubunun bir görece doğuray kümesi* denir.

S bir yarıgrup ve G de S nin belirli bir alt kümesi olsun. Eğer $\langle X \cup G \rangle = S$ olacak şekilde $E(S)$ nin boştan farklı bir X alt kümesi var ise X kümesine *modulo* G ye göre S yarıgrubunun bir *görece idempotent doğuray kümesi* denir.

S , sonlu doğuraylı bir yarıgrup ve G de S nin belirli bir alt kümesi olmak üzere

$$\min\{|X|: \langle X \cup G \rangle = S \text{ ve } X \subseteq S\}$$

sayısına *modulo* G ye göre S nin *görece rankı* denir ve $\text{rerank}(S, G)$ ile gösterilir.

Eğer S sonlu idempotent doğuraylı bir yarıgrup ve G de S nin belirli bir alt kümesi ise

$$\min\{|X|: \langle X \cup G \rangle = S \text{ ve } X \subseteq E(S)\}$$

sayısına *modulo* G ye göre S nin *görece idempotent rankı* denir ve $\text{idrerank}(S, G)$ ile gösterilir.

Ayık ve ark. (2005) T_n yarıgrubunun bazı elemanları için ‘*patika-devir*’ olarak adlandırdıkları bir notasyon geliştirdiler ve T_n yarıgrubundaki herhangi bir dönüşümün patika-devirlerin çarpımı olarak yazılabileceği çarpanlara ayrılış algoritması tanımladılar. Dönüşümlerin bu çarpanlara ayrılış yöntemini kullanarak, T_n yarıgrubunun doğuray kümeleri ve rankları hakkında bazı sonuçları ispatladılar. Yine bu çalışmada $\text{rerank}(T_{n,r}, S_n) = p_r(n)$ olduğu gösterilmiştir.

Ayık ve Bugay (2015) D_r^P nin herhangi bir alt kümesinin $PK_{n,r}$ yarıgrubunun bir (minimal) doğuray kümesi ve D_r^T nin herhangi bir alt kümesinin $K_{n,r}$ yarıgrubunun bir (minimal) doğuray kümesi olabilmesi için gerekli ve yeterli koşulları belirlemişlerdir.

Bu çalışmada $1 \leq r \leq n - 1$ ve herhangi bir $U \subseteq PK_{n,r}$ olmak üzere, $U \cup S_n$ kümesinin $PK_{n,r}$ yarıgrubunun doğuray kümesi olması için U kümesinin sağladığı gerek ve yeter koşullar bulunmuştur. Bu bilgiler doğrultusunda

$$\text{rerank}(T_{n,r}, S_n) = p_r(n)$$

olduğunun farklı bir ispatı yapılmıştır. Ayrıca yine bu çalışmada $PT_{n,r}$ nin modulo S_n e göre görece rankının

$$\text{rerank}(PT_{n,r}, S_n) = \sum_{s=0}^{n-r} p_r(n-s)$$

olduğu gösterilmiştir.

Benzer düşünce ile S_n permütasyon grubu yerine A_n alterne grubunu alarak $1 \leq r \leq n - 1$ için $PK_{n,r}$ nin herhangi bir alt kümesinin modulo A_n e göre $PA_{n,r}$ nin bir görece doğuray kümesi olması için gerekli ve yeterli koşulları belirleyip $PA_{n,r}$ yarıgrubunun modulo A_n e göre görece rankı ispatlanmıştır. Ayrıca $1 \leq r \leq n - 1$ için $K_{n,r}$ nin herhangi bir alt kümesinin modulo A_n e göre $A_{n,r}$ nin bir görece doğuray kümesi olması için gerekli ve yeterli koşulları belirleyip $A_{n,r}$ yarıgrubunun modulo A_n e göre görece rankı verilmiştir.

Son olarak bu çalışmada $T_{n,r}$ ve $PT_{n,r}$ yarıgruplarının görece idempotent rankları bulunmuştur.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan önemli tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Genel Kavramlar

S boştan farklı bir küme olmak üzere

$$\circ: S \times S \rightarrow S$$

şeklinde tanımlı dönüşüme S üzerinde bir *ikili işlem* ve S kümesine *grupoid* denir ve $(S, \circ)$ sıralı ikilisi ile gösterilir. S kümesi bir grupoid olmak üzere, $\forall x, y, z \in S$ için

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$$

ise S kümesine *yarıgrup* denir ve $(S, \circ)$ ile gösterilir.

Bundan sonra notasyon kolaylığı olması $x \circ y$ yerine de xy ifadeleri kullanılacaktır.

Tanım 2.1.1. S bir yarıgrup ve $z \in S$ olsun. Eğer $\forall x \in S$ için $zx = z$ oluyor ise z ye S nin bir *sol sıfır elemanı* ve eğer $\forall x \in S$ için $xz = z$ oluyor ise z ye S nin bir *sağ sıfır elemanı* denir. Eğer $z \in S$ hem sol hem de sağ sıfır eleman ise z ye S nin bir *sıfır elemanı* denir ve "0" ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. S bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall x \in S$ için $ex = x$ olacak şekilde bir $e \in S$ varsa e ye S nin bir *sol birim elemanı* ve eğer $\forall x \in S$ için $xe = x$ olacak şekilde bir $e \in S$ varsa e ye S nin bir *sağ birim elemanı* denir. Eğer $e \in S$ hem

sol hem de sağ birim eleman ise e ye S nin bir *birim elemanı* denir ve 1 ile gösterilir.

Bir yarıgrupun sıfır elemanı ve birim elemanı varsa tektir

Tanım 2.1.3. S bir yarıgrup olsun.

- i) Eğer $\forall x, y \in S$ için $xy = yx$ oluyorsa S yarı grubuna *değişmeli yarıgrup* denir.
- ii) Eğer S yarı grubu birim elemana sahip ise S ye *monoid* denir.

S bir yarıgrup olsun. O zaman

$$S^1 = \begin{cases} S & S \text{ bir monoid ise} \\ S \cup \{1\} & S \text{ bir monoid değil ise} \end{cases}$$

olmak üzere, $\forall x, y \in S^1$ için

$$xy = \begin{cases} xy & x \neq 1, y \neq 1 \\ x & y = 1 \\ y & x = 1 \\ 1 & x = 1, y = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile S^1 kümesi bir monoid olur ve bu monoide S ye *birim eleman eklenerek elde edilen monoid* denir.

Tanım 2.1.4. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer

$$e^2 = ee = e$$

ise e ye S nin bir *idempotent elemanı* denir. S nin tüm idempotent elemanlarının kümesi $E(S)$ ile ve genel olarak S nin boş olmayan bir A alt kümesindeki idempotentlerin kümesi $E(A)$ ile gösterilir.

Bir yarıgrupun varsa sol sıfır, sağ sıfır, sıfır, sol birim, sağ birim ve birim elemanları idempotent elemanlardır.

Örneğin; $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birer monoiddir.

$\mathbb{N}$ bilinen toplama işlemi ile bir yarıgruptur ve bilinen çarpma işlemi ile birim elemanı 1 olan bir monoiddir.

Tanım 2.1.5. S bir yarıgrup ve T de S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in T$ için $xy \in T$, yani $T^2 \subseteq T$ oluyor ise T ye S nin bir *alt yarıgrubu* denir ve $T \leq S$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6. S bir yarıgrup ve I de S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer

- i) $SI \subseteq I$, yani $\forall s \in S$ ve $\forall a \in I$ için $sa \in I$ ise I ya S nin bir *sol ideali*,
- ii) $IS \subseteq I$, yani $\forall s \in S$ ve $\forall a \in I$ için $as \in I$ ise I ya S nin bir *sağ ideali*

denir. I , S nin hem sol hem de sağ ideali ise I ya S nin bir *ideali* denir ve $I \trianglelefteq S$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7. S ve T iki yarıgrup ve $\phi: S \rightarrow T$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in S$ için

$$(xy)\phi = (x\phi)(y\phi)$$

oluyorsa ϕ ye bir *homomorfizm* denir.

Tanım 2.1.8. S ve T iki yarıgrup ve $\phi: S \rightarrow T$ bir homomorfizm olsun. Eğer

- i) ϕ bire-bir ise ϕ ye bir *monomorfizm*,
- ii) ϕ örten ise ϕ ye bir *epimorfizm*,
- iii) ϕ hem bire-bir hem de örten ise ϕ ye bir *izomorfizm*,
- iv) ϕ, S den S ye bir homomorfizm ise ϕ ye bir *endomorfizm*,
- v) ϕ, S den S ye bir izomorfizm ise ϕ ye bir *otomorfizm*

denir.

Eğer S den T ye bir izomorfizm varsa S ile T ye *izomorfik yarıgruplar* denir ve $S \cong T$ şeklinde gösterilir.

2.2. Bağlıntılar

Tanım 2.2.1. X ve Y boştan farklı iki küme olmak üzere $X \times Y$ nin her bir ρ alt kümesine X ten Y ye bir *bağıntı* ve özel olarak $X \times X$ in her bir ρ alt kümesine de X üzerinde bir *bağıntı* denir ve X üzerindeki tüm bağıntılarının kümesi B_X ile gösterilir. Yani

$$B_X = \{\rho: \rho \subseteq X \times X\}$$

dir. Ayrıca ρ, X üzerinde bir bağıntı olmak üzere $(x, y) \in \rho$ yerine $x\rho y$ yazılabilir.

$\emptyset, \Delta_X = 1_X = \{(x, x): x \in X\}$ kümesi ve $X \times X$ in kendisi de X üzerinde birer bağındır. Bu bağıntılara sırasıyla *boş bağıntı*, *birim bağıntı* ve *evrensel bağıntı* denir.

Ayrıca, $\rho \in B_X$ için

$$\rho^{-1} = \{(x, y) \in X \times X: (y, x) \in \rho\} \subseteq X \times X$$

bağıntısına ρ nun *ters bağıntısı* ve

$$\begin{aligned} \text{dom}(\rho) &= \{x \in X : \exists y \in X, (x, y) \in \rho\}, \\ \text{im}(\rho) &= \{y \in X : \exists x \in X, (x, y) \in \rho\}, \\ x\rho &= \{y \in X : (x, y) \in \rho\}, \\ y\rho^{-1} &= \{x \in X : (x, y) \in \rho\} \end{aligned}$$

kümelerine sırasıyla ρ nun *tanım kümesi*, ρ nun *görüntü kümesi*, $x \in X$ in ρ *altındaki görüntü kümesi* ve $y \in X$ in ρ *altındaki ters-görüntü kümesi* denir.

Tanım 2.2.2. X boştan farklı bir küme ve ρ , X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O zaman

- i) $1_X \subseteq \rho$ ise ρ ya *yansımali bağıntı*,
- ii) $\rho^{-1} = \rho$ ise ρ ya *simetrik bağıntı*,
- iii) $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq 1_X$ ise ρ ya *ters-simetrik bağıntı* ve
- iv) $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ ise ρ ya *geçişmeli bağıntı*

denir.

Eğer ρ bağıntısı yansımali, simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise ρ ya X üzerinde bir *denklik bağıntısı* denir.

Eğer $\{\rho_i : i \in I\}$ ailesi, X kümesi üzerindeki denklik bağıntılarının boştan farklı bir ailesi ise kolayca gösterilir ki, $\bigcap_{i \in I} \rho_i$ de X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

ρ , X üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in X$ olmak üzere

$$x\rho = \{y \in X : (x, y) \in \rho\}$$

kümesine x in *denklik sınıfı* denir ve X in tüm denklik sınıflarının ailesi

$$X/\rho = \{x\rho: x \in X\}$$

ile gösterilir. Ayrıca X/ρ kümesine X in ρ ile elde edilen *bölüm kümesi* denir.

X ve Y boştan farklı iki küme olsun. ϕ , X den Y ye bir dönüşüm olmak üzere

$$\phi \circ \phi^{-1} = \{(x, y) \in X \times Y: x\phi = y\phi\}$$

şeklinde tanımlı küme X üzerinde bir denklik bağıntısı olup bu bağıntıya ϕ nin *çekirdeği* denir ve $\ker\phi = \phi \circ \phi^{-1}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3. S bir yarıgrup ve R , S üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Eğer $\forall a \in S$ ve $\forall (s, t), (s', t') \in R$ için

- i) $(as, at) \in R$ ise R bağıntısına *sol uyumlu bağıntı*,
- ii) $(sa, ta) \in R$ ise R bağıntısına *sağ uyumlu bağıntı*,
- iii) $(ss', tt') \in R$ ise R bağıntısına *uyumlu bağıntı*

denir.

Tanım 2.2.4. S bir yarıgrup ve R , S üzerinde herhangi bir denklik bağıntısı olsun.

- i) R sol uyumlu ise R ye *sol kongruans*,
- ii) R sağ uyumlu ise R ye *sağ kongruans*,
- iii) R uyumlu ise R ye *kongruans*

denir.

Tanım 2.2.5. S bir yarıgrup ve ρ , S üzerinde herhangi bir kongruans olsun. S nin ρ ile bölümünden elde edilen S/ρ bölüm kümesi, her $x\rho, y\rho \in S/\rho$ için

$$(x\rho)(y\rho) = (xy)\rho$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba S nin ρ ile elde edilen *bölüm yarıgrubu* denir.

Teorem 2.2.6. S, T iki yarıgrup ve $\phi: S \rightarrow T$ bir homomorfizm olsun. O zaman

$$\ker\phi = \phi \circ \phi^{-1} = \{(a, b) \in S \times S: a\phi = b\phi\}$$

S üzerinde bir kongruanstır.

İspat: Howie (1995), Theorem 1.5.2. ■

Bağıntı ve kongruans ile ilgili özellikler için Howie (1995) e bakınız.

2.3. Green Denklik Bağlılıkları

S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. O zaman a yı içeren en küçük sol ideal, a yı içeren en küçük sağ ideal ve a yı içeren en küçük ideal sırasıyla,

$$\begin{aligned} S^1a &= Sa \cup \{a\} = \{xa: x \in S^1\}, \\ aS^1 &= aS \cup \{a\} = \{ay: y \in S^1\}, \\ S^1aS^1 &= SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\} = \{xay: x, y \in S^1\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve sırasıyla a nın *esas sol*, a nın *esas sağ* ve a nın *esas ideali* denir.

Tanım 2.3.1. S bir yarıgrup olsun. O zaman S üzerinde tanımlanan

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{(a, b) \in S \times S : S^1 a = S^1 b\}, \\ \mathcal{R} &= \{(a, b) \in S \times S : a S^1 = b S^1\}, \\ \mathfrak{S} &= \{(a, b) \in S \times S : S^1 a S^1 = S^1 b S^1\}\end{aligned}$$

bağıntılarına sırasıyla *sol-Green* ($\mathcal{L}$ -Green) *bağıntısı*, *sağ-Green* ($\mathcal{R}$ -Green) *bağıntısı* ve $\mathfrak{S}$ -Green *bağıntısı* denir ve üstelik bu bağıntıların her biri bir denklik bağıntısıdır.

Önerme 2.3.2. S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olmak üzere

- i) $a \mathcal{L} b \Leftrightarrow a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
- ii) $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a = bx$ ve $b = ay$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
- iii) $a \mathfrak{S} b \Leftrightarrow a = xby$ ve $b = uav$ olacak şekilde $x, y, u, v \in S^1$ vardır.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.1. ■

Önerme 2.3.3. S bir yarıgrup olsun. S üzerinde tanımlı $\mathcal{L}$ -Green bağıntısı bir sağ kongruans ve $\mathcal{R}$ -Green bağıntısı bir sol kongruanstır.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.2. ■

Önerme 2.3.4. S bir yarıgrup olsun. S üzerinde tanımlı $\mathcal{L}$ -Green bağıntısı ve $\mathcal{R}$ -Green bağıntısı değişmelidir.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.3. ■

Tanım 2.3.5. S bir yarıgrup olsun. $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ sırasıyla S yarıgrubu üzerindeki $\mathcal{L}$ -Green bağıntısı ve $\mathcal{R}$ -Green bağıntısı olmak üzere $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ denklik bağıntılarını içeren en küçük denklik bağıntısına D -Green bağıntısı denir, yani

$$D = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$$

dir.

$\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ denklik bağıntıları yansılmalı ve simetrik bağıntı olduğundan $(\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^{-1} = (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})$ ve $1_S \subseteq \mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ olup $(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^{-1} \cup 1_S = \mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ olur. Ayrıca $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ ve $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ olduğundan

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \circ (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) &= (\mathcal{L} \circ \mathcal{L}) \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{R} \circ \mathcal{L}) \cup (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) \\ &= \mathcal{L} \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup \mathcal{R} \\ &= \mathcal{L} \circ \mathcal{R} \end{aligned}$$

$$(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \circ (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) = [\mathcal{L} \circ (\mathcal{L} \circ \mathcal{R})] \cup [\mathcal{R} \circ (\mathcal{L} \circ \mathcal{R})] = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$$

ve

$$(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) = \mathcal{L} \cup [\mathcal{R} \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R})] = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla $\forall n \geq 2$ için $(\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^n = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ dir. O halde $D = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ olur.

Ayrıca $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ denklik bağıntılarının arakesiti de bir denklik bağıntısı olup bu denklik bağıntısına $\mathcal{H}$ -Green bağıntısı denir, yani

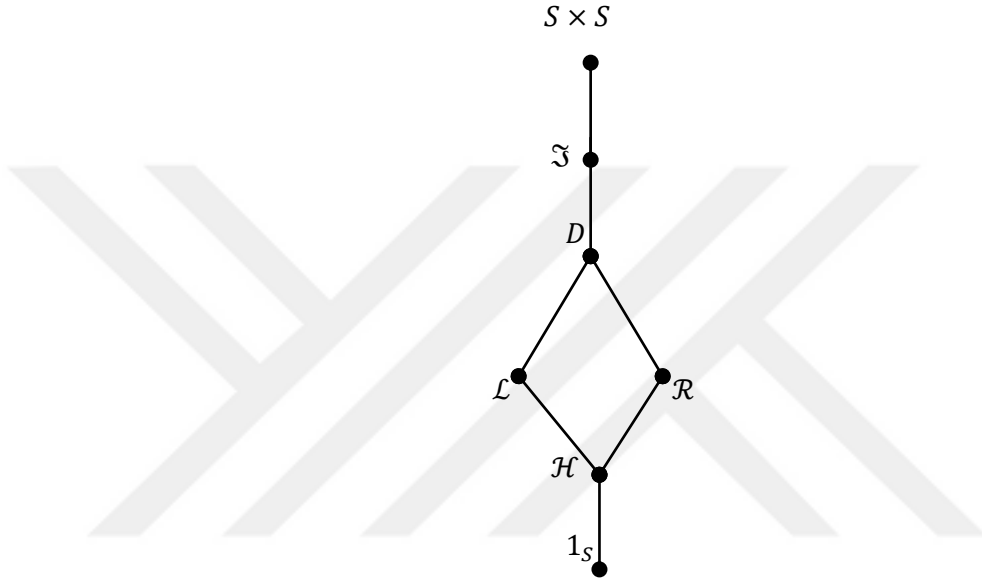
$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$$

dir.

Bir S yarıgrubu üzerindeki $\mathcal{L}$ -, $\mathcal{R}$ -, $\mathcal{H}$ -, D - ve $\mathfrak{J}$ -Green bağıntıları için

$$1_S \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}, \mathcal{R} \subseteq D \subseteq \mathfrak{S} \subseteq S \times S$$

olup bu bağıntıların aralarındaki ilişki aşağıdaki diyagram ile ifade edilebilir ve bu diyagrama *Hasse diyagramı* denir.



Şekil 2.1. Green denklik bağıntılarının Hasse diyagramı

Önerme 2.3.6. S bir grup ise $\mathcal{H} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = D = \mathfrak{S} = S \times S$ dir.

İspat: $\forall a, b \in S$ için $(ab^{-1})b = a$ ve $(ba^{-1})a = b$ olduğundan Önerme 2.3.2. den $(a, b) \in \mathcal{L}$ dir. Böylece $S \times S \subseteq \mathcal{L}$ olup $\mathcal{L} = S \times S$ olur. Benzer şekilde $\mathcal{R} = S \times S$ olduğu gösterilir ve böylece $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ ve $D = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ olduğundan $\mathcal{H} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = D = S \times S$ olur. Ayrıca $(a, b) \in S \times S$ ise $SaS = S$ ve $SbS = S$ olup $(a, b) \in \mathfrak{S}$ olur ve böylece $\mathfrak{S} = S \times S$ dir. ■

Önerme 2.3.7. S değişmeli bir yarıgrup ise $\mathcal{H} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = D$ dir.

İspat: $(a, b) \in \mathcal{L}$ olsun. O zaman Önerme 2.3.2. den $xb = a$ ve $ya = b$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır. Dolayısıyla S değişmeli olduğundan $ay = b$ ve $bx = a$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır ve Önerme 2.3.2. den $(a, b) \in \mathcal{R}$ olur. Böylece $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}$ dir. Benzer şekilde $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$ olup $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ dir ve böylece $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} = \mathcal{R}$ ve $D = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{L} = \mathcal{R}$ olduğu elde edilir. ■

S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. a yı içeren $\mathcal{H}$ -, $\mathcal{L}$ -, $\mathcal{R}$ -, D - ve $\mathfrak{J}$ -Green denklik sınıfları sırasıyla H_a , L_a , R_a , D_a ve J_a ile gösterilir. Böylece herhangi iki $a, b \in S$ için

$$\begin{aligned} S^1 a \subseteq S^1 b &\Rightarrow L_a \leq L_b \\ a S^1 \subseteq b S^1 &\Rightarrow R_a \leq R_b \\ S^1 a S^1 \subseteq S^1 b S^1 &\Rightarrow J_a \leq J_b \end{aligned}$$

şeklinde $S/\mathcal{L}$, $S/\mathcal{R}$ ve $S/\mathfrak{J}$ üzerinde bir sıralama bağıntısı tanımlanabilir.

S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H_a &\subseteq L_a \subseteq D_a \\ H_a &\subseteq R_a \subseteq D_a \\ H_a &= L_a \cap R_a \end{aligned}$$

ve

$$aDb \Leftrightarrow R_a \cap L_b \neq \emptyset \Leftrightarrow L_a \cap R_b \neq \emptyset$$

olduğu açıktır. Böylece bir D -Green denklik sınıfı, ayrık $\mathcal{L}$ -Green denklik sınıflarının ve ayrık $\mathcal{R}$ -Green denklik sınıflarının bir birleşimidir. Dolayısıyla bir

D -sınıfı, her satırı bir R -sınıfını, her sütunu bir L -sınıfını ve her hücresi de bir H -sınıfını temsil eden bir eggbox olarak düşünülmüştür.

	D_a		L_a	
R_a		H_a		

Şekil 2.2. Bir D -Green denklik sınıfı

Teorem 2.3.8. (Green Teoremi) S bir yarıgrup ve $a, b, s, t, u, v \in S$ olsun.

i) $a \mathcal{R} b$ ise $as = b$ ve $bt = a$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \rho_s: L_a &\rightarrow L_b \\ x &\mapsto xs \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_t: L_b &\rightarrow L_a \\ x &\mapsto xt \end{aligned}$$

olarak tanımlanan ρ_s ve ρ_t dönüşümleri birer bijeksiyon olup birbirlerinin tersidirler. Ayrıca ρ_s ve ρ_t dönüşümleri bir H -sınıfını yine bir H -sınıfına birebir eşlerler.

ii) $a \mathcal{L} b$ ise $ua = b$ ve $vb = a$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda_u: R_a &\rightarrow R_b \\ y &\mapsto uy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_v: R_b &\rightarrow R_a \\ y &\mapsto vy\end{aligned}$$

olarak tanımlanan λ_u ve λ_v dönüşümleri birer bijeksiyon olup birbirlerinin tersidirler. Ayrıca ρ_s ve ρ_t dönüşümleri bir H -sınıfını yine bir H -sınıfına birebir eşlerler.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.1. ve Lemma 2.2.2. ■

Lemma 2.3.9. Aynı D -sınıfındaki herhangi iki $\mathcal{H}$ -sınıfı ($\mathcal{L}$ -sınıfı ve $\mathcal{R}$ -sınıfı) eşit sayıda eleman içerir. Yani $(a, b) \in D$ ise $|H_a| = |H_b|$ ($|L_a| = |L_b|$ ve $|R_a| = |R_b|$) olur.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.3. ■

Teorem 2.3.10. S bir yarıgrup olsun. Eğer H, S de bir $\mathcal{H}$ -sınıfı ise H bir gruptur ya da $H^2 \cap H = \emptyset$ olur.

İspat: Howie (1995), Teorem 2.2.5. ■

Sonuç 2.3.11. S bir yarıgrup ve $e \in S$ bir idempotent eleman olsun. O zaman H_e, S nin bir alt grubudur. ■

Sonuç 2.3.12. S bir yarıgrup olsun. S nin bir H sınıfında en fazla bir tane idempotent vardır. ■

2.4. Doğuray Kümeleri

Tanım 2.4.1. S bir yarıgrup ve X kümesi de, S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. S nin X kümesini içeren en küçük alt yarıgrubuna S yarıgrubunun X tarafından doğurulan alt yarıgrubu denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir.

S bir yarıgrup ve X kümesi de S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. O zaman

$$\langle X \rangle = \cap \{T : X \subseteq T, T \leq S\}$$

dir. Ayrıca, $\langle X \rangle$ alt yarıgrubu X üzerindeki tüm sonlu çarpımların kümesi, yani

$$\langle X \rangle = \{x_1 x_2 \dots x_n : n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$$

şeklindedir.

S bir yarıgrup ve X ile Y de S nin boştan farklı iki alt kümesi olsun. Eğer $X \subseteq Y$ ise $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ olur.

Tanım 2.4.2. S bir yarıgrup olsun. $\langle X \rangle = S$ olacak şekilde S nin boştan farklı bir X alt kümesi var ise X kümesine S nin bir *doğuray kümesi*, X kümesinin elemanlarına S nin *doğurayları* ve S ye de X tarafından doğurulan yarıgrup denir.

Eğer $\langle X \rangle = S$ olacak şekilde S yarıgrubunun boştan farklı sonlu bir X alt kümesi varsa S yarıgrubuna *sonlu doğuraylı yarıgrup* denir. Özel olarak S bir sonlu yarıgrup ise $S = \langle S \rangle$ olduğundan S yarıgrubu bir sonlu doğuraylı yarıgruptur. Ayrıca $\langle \{a\} \rangle = S$ olacak şekilde bir $a \in S$ var ise S yarıgrubuna *monojenik yarıgrup* denir ve $S = \langle a \rangle$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.4.3. S bir yarıgrup olsun. Eğer $\langle X \rangle = S$ olacak şekilde $E(S)$ nin boştan farklı bir X alt kümesi var ise X kümesine S nin bir *idempotent doğuray kümesi*, X

kümesinin elemanlarına S yarıgrubunun *idempotent doğurayları* ve S yarıgrubuna da *idempotent doğuraylı yarıgrup* denir. Eğer X sonlu bir küme ise S yarıgrubuna *sonlu idempotent doğuraylı yarıgrup* denir.

Tanım 2.4.4. S bir yarıgrup ve G de S nin belirli bir alt kümesi olsun. Eğer $\langle X \cup G \rangle = S$ olacak şekilde S nin boştan farklı bir X alt kümesi var ise X kümesine *modulo G ye göre S yarıgrubunun bir görece doğuray kümesi* denir.

Tanım 2.4.5. S bir yarıgrup ve G de S nin belirli bir alt kümesi olsun. Eğer $\langle X \cup G \rangle = S$ olacak şekilde $E(S)$ nin boştan farklı bir X alt kümesi var ise X kümesine *modulo G ye göre S yarıgrubunun bir görece idempotent doğuray kümesi* denir.

Tanım 2.4.6. S , sonlu doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere

$$\min\{|X|: \langle X \rangle = S \text{ ve } X \subseteq S\}$$

sayısına S yarıgrubunun *rankı* denir ve $\text{rank}(S)$ ile gösterilir. Ayrıca, S nin $\text{rank}(S)$ elemanlı bir doğuray kümesine de S yarıgrubunun *minimal doğuray kümesi* denir.

Eğer S sonlu idempotent doğuraylı bir yarıgrup ise

$$\min\{|X|: \langle X \rangle = S \text{ ve } X \subseteq E(S)\}$$

sayısına S yarıgrubunun *idempotent rankı* denir ve $\text{idrank}(S)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.7. S , sonlu doğuraylı bir yarıgrup ve G de S nin belirli bir alt kümesi olmak üzere

$$\min\{|X|: \langle X \cup G \rangle = S \text{ ve } X \subseteq S\}$$

sayısına *modulo* G ye göre S yarıgrubunun *görece rankı* denir ve $\text{rerank}(S, G)$ ile gösterilir.

Eğer S sonlu idempotent doğuraylı bir yarıgrup ve G de S nin belirli bir alt kümesi ise

$$\min\{|X|: \langle X \cup G \rangle = S \text{ ve } X \subseteq E(S)\}$$

sayısına *modulo* G ye göre S yarıgrubunun *görece idempotent rankı* denir ve $\text{idrerank}(S, G)$ ile gösterilir.

Teorem 2.4.8. S bir yarıgrup ve $T \leq S$ olsun. $S \setminus T$, S nin bir ideali ise S nin her doğuray kümesi X için $X \cap T$ de T nin bir doğuray kümesidir.

İspat: Bir $X \subseteq S$ için $\langle X \rangle = S$ olsun. $t \in T$ alalım. O zaman $t \in S$ olup $t = x_1 \dots x_{i-1} x_i x_{i+1} \dots x_n$ olacak şekilde $x_1, \dots, x_n \in X$ vardır. Eğer bir $1 \leq i \leq n$ için $x_i \in S \setminus T$ olsaydı $y = x_1 \dots x_{i-1}$ ve $z = x_{i+1} \dots x_n$ olmak üzere $t = y x_i z \in S \setminus T$ çelişkisi elde edilir. O halde her $1 \leq i \leq n$ için $x_1, \dots, x_n \in T$ olup $x_1, \dots, x_n \in X \cap T$ olur. Böylece $t = x_1 \dots x_n \in \langle X \cap T \rangle$ olduğundan $T = \langle X \cap T \rangle$ olur. ■

2.5. Dönüşüm Yarıgrupları

İkinci kısımda herhangi bir X kümesi üzerindeki tüm bağıntıların kümesini B_X ile göstermiştik. Şimdi B_X üzerinde bir ikili işlem tanımlayalım.

Her $\alpha, \beta \in B_X$ için

$$\alpha\beta = \{(x, y) \in X \times X: z \in X \text{ için } (x, z) \in \alpha \text{ ve } (z, y) \in \beta\}$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile B_X bir yarıgruptur. Bu yarıgruba X üzerindeki *bağıntılar yarıgrubu* denir. Ayrıca

$$1_X = \{(x, x) : x \in X\}$$

bağıntısı B_X in birim elemanı olup B_X bir monoiddir.

$P_X = \{\alpha \in B_X : \forall x \in X \text{ için } |x\alpha| \leq 1\}$ kümesi, B_X in bir alt yarıgrubudur. Gerçekten $\alpha, \beta \in P_X$ olsun. O zaman her $x \in X$ için $|x\alpha| = 0$ ise $|x(\alpha\beta)| = 0$ olur. Eğer $|x\alpha| = 1$ ise $(x, y) \in \alpha$ olacak şekilde bir tek $y \in X$ vardır. $|y\alpha| \leq 1$ olduğundan $|x(\alpha\beta)| = |y\beta| \leq 1$ olup P_X bir yarıgruptur ve bu yarıgruba X üzerindeki *kısmi dönüşümler yarıgrubu* denir.

$T_X = \{\alpha \in B_X : \forall x \in X \text{ için } |x\alpha| = 1\}$ kümesi B_X in bir alt yarıgrubudur. Gerçekten $\alpha, \beta \in T_X$ olsun. O zaman her $x \in X$ için $(x, y) \in \alpha$ ($(x, y) \in \alpha$ yerine $x\alpha = y$ de yazılır.) olacak şekilde bir tek $y \in X$ ve $(y, z) \in \beta$ olacak şekilde bir tek $z \in X$ vardır. Böylece $(x, z) \in \alpha\beta$ yani $|x(\alpha\beta)| = 1$ olup T_X bir yarıgruptur ve bu yarıgruba X üzerindeki *tam dönüşümler yarıgrubu* denir.

Buradan $\alpha \in P_X$ için $\emptyset \subseteq \text{dom}(\alpha) \subseteq X$ ve $\text{dom}(\alpha) = X$ ise $\alpha \in T_X$ olur.

Ayrıca $\alpha \in P_X$, $x \in \text{dom}(\alpha)$ ve $x\alpha = \{y\}$ ise genel olarak $x\alpha = y$ şeklinde yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} \text{dom}(\alpha) &= \{x : \exists y \in X \text{ için } x\alpha = y\} \\ \text{im}(\alpha) &= \{y : \exists x \in X \text{ için } x\alpha = y\} \end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Tanım 2.5.1. $\alpha \in T_X$ için $|x\alpha^{-1}| = 1$ ise α ya bir *permütasyon* denir. X kümesi üzerindeki tüm permütasyonların kümesi S_X ile gösterilir. S_X , T_X in bir alt

yarıgrup budur ve S_X bir grup olup bu gruba *simetrik grup* veya *permütasyonlar grubu* denir.

Böylece yukarıdaki tanımlardan

$$S_X \leq T_X \leq P_X \leq B_X$$

olduğu elde edilir.

Önerme 2.5.2. $\varphi, \phi \in P_X$ olsun. O zaman

- i) $\text{dom}(\varphi\phi) = [\text{im}\varphi \cap \text{dom}\phi]\varphi^{-1}$
- ii) $\text{im}(\varphi\phi) = [\text{im}\varphi \cap \text{dom}\phi]\phi$

dir.

İspat: i) $x \in \text{dom}(\varphi\phi)$ olsun. O zaman $(x, y) \in \varphi\phi$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. O halde $(x, z) \in \varphi$ ve $(z, y) \in \phi$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Böylece $z \in \text{im}\varphi \cap \text{dom}\phi$ olup $(z, x) \in \varphi^{-1}$ olduğundan $x \in [\text{im}\varphi \cap \text{dom}\phi]\varphi^{-1}$ olur. Ters de benzer şekilde gösterilir.

ii) $y \in \text{im}(\varphi\phi)$ olsun. O halde $(x, y) \in \varphi\phi$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Böylece $(x, z) \in \varphi$ ve $(z, y) \in \phi$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Dolayısıyla $z \in \text{im}\varphi \cap \text{dom}\phi$ olup $(z, y) \in \phi$ olduğundan $y \in [\text{im}\varphi \cap \text{dom}\phi]\phi$ olur. Ters de benzer şekilde gösterilir. ■

Tanım 2.5.3. S bir yarıgrup ve $X = S^1$ olsun. Her $a \in S$ için $\rho_a: X \rightarrow X$ dönüşümü $\forall x \in X$ için $x\rho_a = xa$ şeklinde tanımlansın. O zaman kolayca görüleceği gibi $\rho_a \in T_X$ olur.

Teorem 2.5.4. (Cayley Teoremi) Her yarıgrup bir tam dönüşümler yarıgrupunun bir homomorfik imajıdır.

İspat: S bir yarıgrup ve $X = S^1$ olsun. Tanım 2.5.3 deki notasyonlarla her $a \in S$ için $\phi: S \rightarrow T_X$ dönüşümünü $a\phi = \rho_a$ olarak tanımlayalım. O zaman her $a, b \in S$ için

$$\begin{aligned} a = b &\Rightarrow \forall x \in X \text{ için } xa = xb \\ &\Rightarrow \forall x \in X \text{ için } x\rho_a = x\rho_b \\ &\Rightarrow a\phi = b\phi \end{aligned}$$

olup ϕ iyi tanımlıdır. Şimdi

$$\begin{aligned} a\phi = b\phi &\Rightarrow \rho_a = \rho_b \\ &\Rightarrow \text{özel olarak } 1\rho_a = 1\rho_b \\ &\Rightarrow a = b \end{aligned}$$

olur ve böylece ϕ birebirdir. Son olarak her $a, b \in S$ ve her $x \in X$ için

$$x(\rho_a \rho_b) = (x\rho_a)\rho_b = (xa)\rho_b = xab = x\rho_{ab}$$

olup $(ab)\phi = (a\phi)(b\phi)$ olur. Böylece ϕ bir monomorfizmadır, yani S, T_X in bir homomorfik imajıdır. ■

Bu çalışma boyunca sonlu bir $X = X_n = \{1, \dots, n\}$ kümesini ele alacağız ve bu durumda B_X, P_X, T_X ve S_X yerine sırasıyla B_n, P_n, T_n ve S_n yazılır.

Tanım 2.5.5. Permütasyon olmayan tam dönüşümler yarıgrupunun elemanlarına *singüler dönüşüm* denir ve tüm singüler dönüşümlerin kümesi ST_n ile gösterilir.

Tanım 2.5.6. S_n permütasyonlar grubunda çift permütasyonların kümesi S_n nin bir alt grubudur, bu alt gruba *alterne grup* denir ve A_n ile gösterilir.

Önerme 2.5.7. $\alpha \in P_n$ olsun. α nın bir idempotent olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in \text{im}(\alpha)$ için $x\alpha = x$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\alpha \in P_n$ bir idempotent olsun. Kabul edelim ki bir $x \in \text{im}(\alpha)$ için $x\alpha \neq x$ olsun. O halde bir $x \neq y \in X_n$ için $y\alpha = x$ olup

$$y\alpha^2 = (y\alpha)\alpha = x\alpha \neq x = y\alpha$$

olur. Bu ise α nın bir idempotent olması ile çelişir. Böylece $\forall x \in \text{im}(\alpha)$ için $x\alpha = x$ olmalıdır.

$(\Leftarrow)$ $\alpha \in P_n$ ve $\forall x \in \text{im}(\alpha)$ için $x\alpha = x$ olsun. O halde $\forall x \in \text{im}(\alpha) \subseteq \text{dom}(\alpha)$ için

$$x\alpha^2 = (x\alpha)\alpha = x\alpha$$

ve $\forall y \in \text{dom}(\alpha) \setminus \text{im}(\alpha)$ için $y\alpha = x$ olacak şekilde bir $x \in \text{im}(\alpha)$ vardır ve böylece

$$y\alpha^2 = (y\alpha)\alpha = x\alpha = x = y\alpha$$

olup α bir idempotenttir. ■

Tanım 2.5.8. $\alpha \in P_n$ olmak üzere

$$h(\alpha) = |\text{im}(\alpha)|$$

sayısına α nın *yüksekliği* denir.

Tanım 2.5.9. Her $\alpha \in P_n$ için

$$\ker(\alpha) = \{(x, y) \in X_n \times X_n : (x, y \in \text{dom}(\alpha) \text{ ve } x\alpha = y\alpha) \text{ veya } (x, y \in X_n \setminus \text{dom}(\alpha))\}$$

şeklinde tanımlanan $\ker(\alpha)$ bağıntısına α nın *çekirdeği* denir. Özel olarak; $\alpha \in T_n$ için

$$\ker(\alpha) = \{(x, y) \in X_n \times X_n : x\alpha = y\alpha\}$$

olur.

Her $\alpha \in P_n$ için $\ker(\alpha)$ nın $\text{dom}(\alpha)$ üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu kolayca gösterilebilir. Bu denklik bağıntısının denklik sınıflarının kümesi

$$\{x\alpha^{-1} : x \in \text{im}(\alpha)\}$$

olur. Ayrıca bu kümenin $\text{dom}(\alpha)$ nın bir parçalanışı olduğu açıktır. Dolayısıyla

$$\{x\alpha^{-1} : x \in \text{im}(\alpha)\} \cup \{X_n \setminus \text{dom}(\alpha)\}$$

ailesi X_n nin bir parçalanışı olur. Yani $\alpha \in P_n$ için $\text{im}(\alpha) = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ ($1 \leq r \leq n$) olsun. $A_1 = a_1\alpha^{-1}, \dots, A_r = a_r\alpha^{-1}$ olmak üzere $\{x\alpha^{-1} : x \in \text{im}(\alpha)\}$ ailesi $\text{dom}(\alpha)$ nın bir parçalanışı olduğundan $\{A_1, \dots, A_r\}$, $\text{dom}(\alpha)$ nın bir parçalanışı olur. Eğer $\alpha \in T_n$ ise $\text{dom}(\alpha) = X_n$ olup $\{A_1, \dots, A_r\}$, X_n nin bir parçalanışı olur.

$\alpha \in P_n$ için $\text{im}(\alpha) = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ ($1 \leq r \leq n$) ise $A_1 = a_1\alpha^{-1}, \dots, A_r = a_r\alpha^{-1}$ ve $A_{r+1} = X_n \setminus (\cup_{i=1}^r A_i) = X_n \setminus \text{dom}(\alpha)$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_r & A_{r+1} \\ a_1 & \cdots & a_r & - \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda $\ker(\alpha) = \cup_{i=1}^{r+1} (A_i \times A_i)$ olur. Eğer $\alpha \in T_n$ ise $\text{dom}(\alpha) = X_n$ olup

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_r \\ a_1 & \cdots & a_r \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır ve bu durumda $\ker(\alpha) = \cup_{i=1}^r (A_i \times A_i)$ olur. Ayrıca açıkça α nın bir idempotent olması için gerek ve yeter koşul $\forall 1 \leq i \leq r$ için $a_i \in A_i$ olmasıdır.

Bundan sonra genelliği bozmaksızın $\alpha \in P_n$ ise α yı $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_r & A_{r+1} \\ a_1 & \cdots & a_r & - \end{pmatrix}$ formunda ve $\alpha \in T_n$ ise α yı $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_r \\ a_1 & \cdots & a_r \end{pmatrix}$ formunda yazacağız.

Örneğin;

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & - & 4 & 2 & 4 & - \end{pmatrix} \in P_7$$

için $\text{im}(\alpha) = \{2,4\}$, $A_1 = 2\alpha^{-1} = \{1,2,5\}$, $A_2 = 4\alpha^{-1} = \{4,6\}$ ve $A_3 = \{3,7\}$ olup

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1,2,5\} & \{4,6\} & \{3,7\} \\ 2 & 4 & - \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Üstelik α bir idempotenttir.

$\alpha \in P_n$ ise $X_n \setminus \text{dom}(\alpha) \neq \emptyset$ olup $\text{codom}(\alpha) = X_n \setminus \text{dom}(\alpha)$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.5.10. $n, r \in \mathbb{Z}^+$ için $r \leq n$ olmak üzere $x_1 \geq \dots \geq x_r \geq 1$ olacak şekilde $x_1 + \dots + x_r = n$ denkleminin tüm tamsayı çözümlerinin kümesini $P_r(n)$ ile gösterelim ve $p_r(n) = |P_r(n)|$ olsun. Eğer $(n_1, \dots, n_r)$ r -lisi $x_1 + \dots + x_r = n$ denkleminin bir çözümü ise o zaman $(n_1, \dots, n_r)$ ye n nin bir r -li parçalanışı denir. Bu durumda n nin r -li parçalanışlarının sayısı $p_r(n)$ olur.

Tanım 2.5.11. $\{A_1, \dots, A_r\}$ ve $\{B_1, \dots, B_r\}$ X_n nin iki r -li parçalanışı olsun. Eğer her bir $1 \leq i \leq r$ için

$$|A_i| = |B_{i\sigma}|$$

olacak şekilde bir $\sigma \in S_r$ permütasyonu var ise $\{A_1, \dots, A_r\}$ ile $\{B_1, \dots, B_r\}$ ye aynı tipte parçalanışlar denir.

Tanım 2.5.12. $\{A_1, \dots, A_r\}$ X_n nin bir r -li parçalanışı olsun. Eğer

$$|A_1| \geq \dots \geq |A_r|$$

ise $\{A_1, \dots, A_r\}$ ye X_n nin bir sıralı r -li parçalanışı denir ve $(A_1, \dots, A_r)$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.5.13. $\alpha \in T_n$ olsun. O zaman $(|A_{1\sigma}|, \dots, |A_{r\sigma}|)$ n nin bir r -li parçalanışı olacak şekilde bir $\sigma \in S_r$ permütasyonu vardır. Bu durumda $(|A_{1\sigma}|, \dots, |A_{r\sigma}|)$ ya α nın parçalanışı denir ve $\text{part}(\alpha)$ ile gösterilir. Yani

$$\text{part}(\alpha) = (|A_{1\sigma}|, \dots, |A_{r\sigma}|)$$

olur.

Örnek 2.5.14. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \in T_6$ elemanı için $\text{part}(\alpha)$ yı bulalım.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{1\} & \{2,3\} & \{4,5,6\} \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazalım. Daha sonra $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2,3\}$ ve $A_3 = \{4,5,6\}$ olmak üzere $(|A_{1\sigma}|, |A_{2\sigma}|, |A_{3\sigma}|) = (3,2,1)$, 6'nın 3'lü parçalanışı olacak şekilde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ permütasyonu vardır. Böylece $\text{part}(\alpha) = (3,2,1)$ olur.

Tanım 2.5.15. $\alpha \in P_n$ ve $|\text{codom}(\alpha)| = |A_{r+1}| = s$ olsun. O zaman $(|A_{1\sigma}|, \dots, |A_{r\sigma}|)$ $n-s$ nin bir r -li parçalanışı olacak şekilde bir $\sigma \in S_r$ permütasyonu vardır. Bu durumda $(|A_{1\sigma}|, \dots, |A_{r\sigma}|: |A_{r+1}|)$ ya α nın *co-parçalanışı* denir ve $\text{copart}(\alpha)$ ile gösterilir. Yani

$$\text{copart}(\alpha) = (|A_{1\sigma}|, \dots, |A_{r\sigma}|: |A_{r+1}|)$$

olur. Ayrıca $|\text{codom}(\alpha)| = |A_{r+1}| = s = 0$ ise notasyon kolaylığı için $\text{copart}(\alpha) = (|A_{1\sigma}|, \dots, |A_{r\sigma}|: 0)$, $\text{part}(\alpha)$ olarak alınır. Başka bir deyişle $\text{copart}(\alpha) = \text{part}(\alpha)$ olur.

Örnek 2.5.16. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 6 & - & - & 6 \end{pmatrix} \in P_7$ elemanı için $\text{copart}(\alpha)$ yı bulalım.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 6 & - & - & 6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \{1,2\} & \{3\} & \{4,7\} & \{5,6\} \\ 3 & 1 & 6 & - \end{array} \right)$$

şeklinde yazalım. $|\text{codom}(\alpha)| = |A_4| = s = 2$. Daha sonra $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{3\}$, $A_3 = \{4,7\}$ ve $A_4 = \{5,6\}$ olmak üzere $(|A_{1\sigma}|, |A_{2\sigma}|, |A_{3\sigma}|) = (2,2,1)$, $n - s = 7 - 2 = 5$ in bir 3 lü parçalanışı olacak şekilde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$ permütasyonu vardır. Böylece $\text{copart}(\alpha) = (2,2,1:2)$ olur.

$n, r \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq r$ ise n elemanlı bir kümeden r elemanlı bir kümeye tanımlı örten fonksiyon sayısı

$$\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r}{k} (r-k)^n$$

şeklindedir.

Tanım 2.5.17. $n, r \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq r$ olsun. O zaman

$$S(n, r) = \frac{1}{r!} \left[\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r}{k} (r-k)^n \right]$$

sayısına 2. Tip Stirling sayısı denir.

Dikkat edilirse $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ dir. Ayrıca $2 \leq r \leq n - 1$ için

$$S(n, r) = S(n-1, r-1) + rS(n-1, r)$$

indirgeme bağıntısı sağlanır.

$S(n, r)$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$
$n = 1$	1			
$n = 2$	1	1		
$n = 3$	1	3	1	
$n = 4$	1	7	6	1

Şekil 2.3. Bazı 2. Tip Stirling sayıları

Önerme 2.5.18. $\alpha, \beta \in P_n$ olsun. O halde

- i) $\text{dom}(\alpha\beta) \subseteq \text{dom}(\alpha)$
- ii) $\text{im}(\alpha\beta) \subseteq \text{im}(\beta)$
- iii) $\text{ker}(\alpha) \subseteq \text{ker}(\alpha\beta)$

olur.

İspat: i) $x \in \text{dom}(\alpha\beta)$ olsun. O halde $x(\alpha\beta) = y$ olacak şekilde $y \in X_n$ vardır. $x(\alpha\beta) = y = (x\alpha)\beta$ olup $x\alpha \in \text{dom}(\beta) \subseteq X_n$ ve dolayısıyla $x \in \text{dom}(\alpha)$ olur. Böylece $\text{dom}(\alpha\beta) \subseteq \text{dom}(\alpha)$ olduğu elde edilir.

ii) $x \in \text{im}(\alpha\beta)$ olsun. O halde $y(\alpha\beta) = x$ olacak şekilde $y \in X_n$ vardır. $x = y(\alpha\beta) = (y\alpha)\beta$ olup $x \in \text{im}(\beta)$ olur. Böylece $\text{im}(\alpha\beta) \subseteq \text{im}(\beta)$ olduğu elde edilir.

iii) $(x, y) \in \text{ker}(\alpha)$ olsun. O halde $(x, y \in \text{dom}(\alpha)$ ve $x\alpha = y\alpha$) veya $(x, y \in \text{codom}(\alpha))$ olur. 1. durumda; $x, y \in \text{dom}(\alpha)$ ve $x\alpha = y\alpha$ ise $(x\alpha)\beta = (y\alpha)\beta$, yani $x(\alpha\beta) = y(\alpha\beta)$ olur. Eğer $x\alpha, y\alpha \in \text{dom}(\beta)$ ise $x, y \in \text{dom}(\alpha\beta)$ olup $(x, y) \in \text{ker}(\alpha\beta)$ olur. Eğer $x\alpha, y\alpha \notin \text{dom}(\beta)$ ise $x, y \in \text{codom}(\alpha\beta)$ olup

$(x, y) \in \ker(\alpha\beta)$ olur. 2. durumda; $x, y \in \text{codom}(\alpha)$ ise $x, y \in \text{codom}(\alpha\beta)$ olup $(x, y) \in \ker(\alpha\beta)$ olur. Böylece $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\alpha\beta)$ olduğu elde edilir. ■

Teorem 2.5.19. Her $\alpha, \beta \in P_n$ için

- i) $\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$
- ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta)$ ve $\text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\beta)$
- iii) $\alpha \mathcal{D} \beta \Leftrightarrow h(\alpha) = h(\beta)$
- iv) $\alpha \mathcal{H} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta), \ker(\alpha) = \ker(\beta)$ ve $\text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\beta)$

olur.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 4.5.1. ■

Teorem 2.5.20. Her $\alpha, \beta \in T_n$ için

- i) $\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$
- ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta)$
- iii) $\alpha \mathcal{D} \beta \Leftrightarrow h(\alpha) = h(\beta)$
- iv) $\alpha \mathcal{H} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ ve $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$

olur.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 4.5.1. ■

Böylece P_n de $n + 1$ tane D -Green sınıfı vardır. Bunlar, her $0 \leq r \leq n$ için

$$D_r^P = \{\alpha \in P_n : h(\alpha) = r\}$$

şeklinde olur.

$\alpha \in P_n$ olsun. Eğer $|\text{dom}(\alpha)| = k$ ve $h(\alpha) = r$ ise $k \geq r$ olur. Böylece her $1 \leq r \leq k \leq n$ için

$$[k, r] = \{\alpha \in P_n : |\text{dom}(\alpha)| = k \text{ ve } h(\alpha) = r\}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece $D_r^P = \bigcup_{k=r}^n [k, r]$ ve özel olarak $D_{n-1}^P = [n-1, n-1] \cup [n, n-1]$ olur.

Benzer şekilde, T_n de n tane D -Green sınıfı vardır. Bunlar, her $1 \leq r \leq n$ için

$$D_r^T = \{\alpha \in T_n : h(\alpha) = r\}$$

şeklindedir.

Önerme 2.5.21.

- i) $0 \leq r \leq n$ olmak üzere P_n nin D_r^P sınıfı, $\binom{n}{r}$ tane $\mathcal{L}$ -Green sınıfı ve $S(n+1, r+1)$ tane $\mathcal{R}$ -Green sınıfı içerir.
- ii) $1 \leq r \leq n$ olmak üzere T_n nin D_r^T sınıfı, $\binom{n}{r}$ tane $\mathcal{L}$ -Green sınıfı ve $S(n, r)$ tane $\mathcal{R}$ -Green sınıfı içerir.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Proposition 4.6.3 ve Proposition 4.6.4. ■

Örnek 2.5.22. T_3 ün 3 tane D -Green sınıfı vardır, bunlar

D_3^T sınıfında $\binom{3}{3}$ tane $\mathcal{L}$ -Green sınıfı ve $S(3,3)$ tane $\mathcal{R}$ -Green sınıfı olup

$$D_3^T = S_3$$

olur.

D_2^T sınıfında $\binom{3}{2}$ tane $\mathcal{L}$ –Green sınıfı ve $S(3,2)$ tane $\mathcal{R}$ –Green sınıfı vardır. D_2^T sınıfındaki elemanlar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

D_2^T	$L_{\{1,2\}}$	$L_{\{1,3\}}$	$L_{\{2,3\}}$
$R_{\{1/23\}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
$R_{\{13/2\}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$R_{\{12/3\}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Şekil 2.4. T_3 ün D_2^T sınıfı

D_1^T sınıfında $\binom{3}{1}$ tane $\mathcal{L}$ –Green sınıfı ve $S(3,1)$ tane $\mathcal{R}$ –Green sınıfı vardır. D_1^T sınıfında 3 eleman vardır ve bu elemanlar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

D_1^T	$L_{\{1\}}$	$L_{\{2\}}$	$L_{\{3\}}$
$R_{\{123\}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Şekil 2.5. T_3 ün D_1^T sınıfı

Örnek 2.5.23. P_3 ün D_2^P sınıfını inceleyelim.

D_2^P sınıfında $\binom{3}{2}$ tane $\mathcal{L}$ -Green sınıfı ve $S(4,3)$ tane $\mathcal{R}$ -Green sınıfı vardır.

Şekil 2.4. deki T_3 ün D_2^T sınıfı elemanları D_2^P sınıfının da elemanlarıdır. Ayrıca P_3 ün elemanlarından yüksekliği 2 olan elemanlar vardır. Bu elemanlar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

D_2^P	$L_{\{1,2\}}$	$L_{\{1,3\}}$	$L_{\{2,3\}}$
$R_{\{1/23\}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
$R_{\{13/2\}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$R_{\{12/3\}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$R_{\{1/2/3\}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & - \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & - \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & - \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & - \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & - \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & - \end{pmatrix}$
$R_{\{1/3/2\}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & - & 2 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & - & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & - & 3 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & - & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & - & 3 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & - & 2 \end{pmatrix}$
$R_{\{2/3/1\}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 1 & 2 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 1 & 3 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 2 & 3 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Şekil 2.6. P_3 ün D_2^P sınıfı

Teorem 2.5.24.

- i) $0 \leq r \leq n$ olmak üzere P_n nin D_r^P sınıfının her bir $\mathcal{H}$ -Green sınıfı $r!$ tane eleman içerir.
- ii) $1 \leq r \leq n$ olmak üzere T_n nin D_r^T sınıfının her bir $\mathcal{H}$ -Green sınıfı $r!$ tane eleman içerir.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 4.6.6. ■

2.6. $K_{n,r}$ ve $PK_{n,r}$ Yarıgrupları

Bu kısımda T_n nin alt yarıgrubu $K_{n,r}$ ve P_n nin alt yarıgrubu $PK_{n,r}$ ile ilgili tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.6.1. $1 \leq r \leq n$ için

$$\begin{aligned} K_{n,r} &= \{\alpha \in T_n : h(\alpha) \leq r\}, \\ PK_{n,r} &= \{\alpha \in P_n : h(\alpha) \leq r\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Herhangi iki $\alpha, \beta \in P_n$ için $\text{im}(\alpha\beta) \subseteq \text{im}(\beta)$ ve $T_n \leq P_n$ olduğundan $K_{n,r}$ ve $PK_{n,r}$ sırasıyla T_n ve P_n nin alt yarıgrubudur. Üstelik birer idealdir. Ayrıca

$$K_{n,n} = T_n, K_{n,n-1} = ST_n \text{ ve } PK_{n,n} = P_n$$

dir.

Teorem 2.6.2. $2 \leq r \leq n - 1$ ve $\alpha, \beta \in PK_{n,r}$ için

- i) $\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$
- ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta)$ ve $\text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\beta)$
- iii) $\alpha \mathcal{D} \beta \Leftrightarrow h(\alpha) = h(\beta)$
- iv) $\alpha \mathcal{H} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta), \ker(\alpha) = \ker(\beta)$ ve $\text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\beta)$

olur.

İspat: $2 \leq r \leq n - 1$ olsun.

i) $(\Rightarrow) \alpha, \beta \in PK_{n,r}$ için $\alpha \mathcal{L} \beta$ olsun. O zaman $\alpha = \lambda\beta$ ve $\beta = \gamma\alpha$ olacak şekilde $\lambda, \gamma \in PK_{n,r}^1$ vardır. $\alpha, \beta \in P_n$ olduğundan

$$\text{im}(\alpha) = \text{im}(\lambda\beta) \subseteq \text{im}(\beta) \text{ ve } \text{im}(\beta) = \text{im}(\gamma\alpha) \subseteq \text{im}(\alpha)$$

olup $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ olur.

$(\Leftarrow) \alpha, \beta \in PK_{n,r}$ için $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ olsun. $2 \leq k \leq r$ için $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta) = \{a_1, \dots, a_k\}$ diyelim. O zaman $\text{dom}(\alpha)$ nın bir $\{A_1, \dots, A_k\}$ parçalanışı ve $\text{dom}(\beta)$ nın bir $\{B_1, \dots, B_k\}$ parçalanışı vardır, $A_{k+1} = X_n \setminus \text{dom}(\alpha) = \text{codom}(\alpha)$ ve $B_{k+1} = X_n \setminus \text{dom}(\beta) = \text{codom}(\beta)$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_k & A_{k+1} \\ a_1 & \dots & a_k & - \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_k & B_{k+1} \\ a_1 & \dots & a_k & - \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Şimdi $1 \leq i \leq k$ için $b_i \in A_i$ ve $c_i \in B_i$ olmak üzere λ ve γ dönüşümlerini

$$\lambda = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_k & A_{k+1} \\ c_1 & \dots & c_k & - \end{pmatrix} \text{ ve } \gamma = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_k & B_{k+1} \\ b_1 & \dots & b_k & - \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece $\lambda, \gamma \in PK_{n,r}$ olup $\alpha = \lambda\beta$ ve $\beta = \gamma\alpha$ olur. Böylece $\alpha \mathcal{L} \beta$ dır.

ii) $(\Rightarrow) \alpha, \beta \in PK_{n,r}$ için $\alpha \mathcal{R} \beta$ olsun. O halde $\alpha = \beta\lambda$ ve $\beta = \alpha\gamma$ olacak şekilde $\lambda, \gamma \in PK_{n,r}^{-1}$ vardır. $\alpha, \beta \in P_n$ olduğundan

$$\ker(\alpha) \subseteq \ker(\alpha\gamma) = \ker(\beta) \text{ ve } \ker(\beta) \subseteq \ker(\beta\lambda) = \ker(\alpha)$$

olup $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olur. Ayrıca

$$\text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\beta\lambda) \subseteq \text{dom}(\beta) \text{ ve } \text{dom}(\beta) = \text{dom}(\alpha\gamma) \subseteq \text{dom}(\alpha)$$

olup $\text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\beta)$ olur.

$(\Leftarrow) \alpha, \beta \in PK_{n,r}$ için $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ ve $\text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\beta)$ olsun. O zaman bir $2 \leq k \leq r$ için $A_{k+1} = X_n \setminus \text{dom}(\alpha) = \text{codom}(\alpha)$ olmak üzere $\ker(\alpha) = \ker(\beta) = \bigcup_{i=1}^{k+1} (A_i \times A_i)$, $\text{im}(\alpha) = \{a_1, \dots, a_k\}$ ve $\text{im}(\beta) = \{b_1, \dots, b_k\}$ için

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_k & A_{k+1} \\ a_1 & \dots & a_k & - \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_k & A_{k+1} \\ b_1 & \dots & b_k & - \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Şimdi λ ve γ dönüşümlerini

$$x\lambda = \begin{cases} a_i & x = b_i, \ i = 1, \dots, k \\ a_1 & x \in X_n \setminus \{b_1, \dots, b_k\} \end{cases},$$

$$x\gamma = \begin{cases} b_i & x = a_i, \ i = 1, \dots, k \\ b_1 & x \in X_n \setminus \{a_1, \dots, a_k\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Yani

$$\lambda = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_k & X_n \setminus \{b_1, \dots, b_k\} \\ a_1 & \cdots & a_k & a_1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_k & X_n \setminus \{a_1, \dots, a_k\} \\ b_1 & \cdots & b_k & b_1 \end{pmatrix}$$

ise $\lambda, \gamma \in PK_{n,r}$ olup $\alpha = \beta\lambda$ ve $\beta = \alpha\gamma$ olur. Böylece $\alpha \mathcal{R} \beta$ dır.

iii) $(\Rightarrow) 2 \leq r \leq n-1$ ve $\alpha, \beta \in PK_{n,r}$ için $\alpha D \beta$ olsun. O zaman $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ olup $\alpha \mathcal{L} \gamma$ ve $\gamma \mathcal{R} \beta$ olacak şekilde bir $\gamma \in PK_{n,r}$ vardır. Böylece i) ve ii) den

$$\text{im}(\alpha) = \text{im}(\gamma), \text{ker}(\gamma) = \text{ker}(\beta) \text{ ve } \text{dom}(\gamma) = \text{dom}(\beta)$$

olup $h(\alpha) = |\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\gamma)| = |\text{im}(\beta)| = h(\beta)$ olur.

$(\Leftarrow) \alpha, \beta \in PK_{n,r}$ için $h(\alpha) = h(\beta)$ olsun. O zaman bir $2 \leq k \leq r$ için $A_{k+1} = X_n \setminus \text{dom}(\alpha) = \text{codom}(\alpha)$ ve $B_{k+1} = X_n \setminus \text{dom}(\beta) = \text{codom}(\beta)$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_k & A_{k+1} \\ a_1 & \cdots & a_k & - \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_k & B_{k+1} \\ b_1 & \cdots & b_k & - \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Şimdi γ kısmi dönüşümünü her $1 \leq i \leq k$ için $B_i\gamma = a_i$ şeklinde tanımlayalım. Yani

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_k & B_{k+1} \\ a_1 & \cdots & a_k & - \end{pmatrix}$$

ise $\gamma \in PK_{n,r}$ olur. Üstelik

$$\text{im}(\alpha) = \text{im}(\gamma), \text{ker}(\gamma) = \text{ker}(\beta) \text{ ve } \text{dom}(\gamma) = \text{dom}(\beta)$$

olup i) ve ii) den $\alpha \mathcal{L} \gamma$ ve $\gamma \mathcal{R} \beta$ olur. Böylece $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ olup $\alpha D \beta$ olur.

iv) $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ olduğundan istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 2.6.3. $2 \leq r \leq n - 1$ ve $\alpha, \beta \in K_{n,r}$ için

- i) $\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$
- ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta)$
- iii) $\alpha D \beta \Leftrightarrow h(\alpha) = h(\beta)$
- iv) $\alpha \mathcal{H} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta) \text{ ve } \ker(\alpha) = \ker(\beta)$

olur.

İspat: $2 \leq r \leq n - 1$ olsun.

i) $(\Rightarrow)$ $\alpha, \beta \in K_{n,r}$ için $\alpha \mathcal{L} \beta$ olsun. O zaman $\alpha = \lambda\beta$ ve $\beta = \gamma\alpha$ olacak şekilde $\lambda, \gamma \in K_{n,r}^1$ vardır. $\alpha, \beta \in T_n$ olduğundan

$$\text{im}(\alpha) = \text{im}(\lambda\beta) \subseteq \text{im}(\beta) \text{ ve } \text{im}(\beta) = \text{im}(\gamma\alpha) \subseteq \text{im}(\alpha)$$

olup $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ olur.

$(\Leftarrow)$ $\alpha, \beta \in K_{n,r}$ için $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ olsun. O zaman bir $2 \leq k \leq r$ için $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta) = \{a_1, \dots, a_k\}$ olsun. Böylece $\{A_1, \dots, A_k\}$, $\text{dom}(\alpha)$ nın bir parçalanışı ve $\{B_1, \dots, B_k\}$, $\text{dom}(\beta)$ nın bir parçalanışı olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_k \\ a_1 & \dots & a_k \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_k \\ a_1 & \dots & a_k \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Şimdi $1 \leq i \leq k$ için $b_i \in A_i$ ve $c_i \in B_i$ olmak üzere λ ve γ dönüşümlerini her $1 \leq i \leq k$ için $A_i\lambda = c_i$ ve $B_i\gamma = b_i$ olarak tanımlayalım. Yani

$$\lambda = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_k \\ c_1 & \cdots & c_k \end{pmatrix} \text{ ve } \gamma = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_k \\ b_1 & \cdots & b_k \end{pmatrix}$$

ise $\lambda, \gamma \in K_{n,r}$ olup $\alpha = \lambda\beta$ ve $\beta = \gamma\alpha$ olur. Böylece $\alpha \mathcal{L} \beta$ dır.

ii) $(\Rightarrow) \alpha, \beta \in K_{n,r}$ için $\alpha \mathcal{R} \beta$ olsun. O zaman $\alpha = \beta\lambda$ ve $\beta = \alpha\gamma$ olacak şekilde $\lambda, \gamma \in K_{n,r}^1$ vardır. $\alpha, \beta \in T_n$ olduğundan

$$\ker(\alpha) \subseteq \ker(\alpha\gamma) = \ker(\beta) \text{ ve } \ker(\beta) \subseteq \ker(\beta\lambda) = \ker(\alpha)$$

olup $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olur.

$(\Leftarrow) \alpha, \beta \in K_{n,r}$ için $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olsun. O zaman bir $2 \leq k \leq r$ için $\ker(\alpha) = \ker(\beta) = \cup_{i=1}^k (A_i \times A_i)$ diyelim. Böylece $\text{im}(\alpha) = \{a_1, \dots, a_k\}$ ve $\text{im}(\beta) = \{b_1, \dots, b_k\}$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_k \\ a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_k \\ b_1 & \cdots & b_k \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Şimdi λ ve γ dönüşümlerini

$$x\lambda = \begin{cases} a_i & x = b_i, \ i = 1, \dots, k \\ a_1 & x \in X_n \setminus \{b_1, \dots, b_k\} \end{cases},$$

$$x\gamma = \begin{cases} b_i & x = a_i, \ i = 1, \dots, k \\ b_1 & x \in X_n \setminus \{a_1, \dots, a_k\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Yani

$$\lambda = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_k & X_n \setminus \{b_1, \dots, b_k\} \\ a_1 & \cdots & a_k & a_1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k & X_n \setminus \{a_1, \dots, a_k\} \\ b_1 & \dots & b_k & b_1 \end{pmatrix}$$

ise $\lambda, \gamma \in K_{n,r}$ olup $\alpha = \beta\lambda$ ve $\beta = \alpha\gamma$ olur. Böylece $\alpha \mathcal{R} \beta$ dır.

iii) $(\Rightarrow) \alpha, \beta \in K_{n,r}$ için $\alpha D \beta$ olsun. O zaman $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ olup $\alpha \mathcal{L} \gamma$ ve $\gamma \mathcal{R} \beta$ olacak şekilde bir $\gamma \in K_{n,r}$ vardır. Böylece i) ve ii) den $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\gamma)$ ve $\ker(\gamma) = \ker(\beta)$ olup $h(\alpha) = |\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\gamma)| = |\text{im}(\beta)| = h(\beta)$ olur.
 $(\Leftarrow) \alpha, \beta \in K_{n,r}$ için $h(\alpha) = h(\beta)$ olsun. O zaman bir $2 \leq k \leq r$ için

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_k \\ a_1 & \dots & a_k \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_k \\ b_1 & \dots & b_k \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Şimdi γ dönüşümü her $1 \leq i \leq k$ için $B_i\gamma = a_i$ şeklinde tanımlayalım. Yani

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_k \\ a_1 & \dots & a_k \end{pmatrix}$$

ise $\gamma \in K_{n,r}$ olur. Üstelik

$$\text{im}(\alpha) = \text{im}(\gamma) \text{ ve } \ker(\gamma) = \ker(\beta)$$

olup i) ve ii) den $\alpha \mathcal{L} \gamma$ ve $\gamma \mathcal{R} \beta$ olur. Böylece $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ olup $\alpha D \beta$ olur.

iv) $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ olduğundan istenilen sonuç elde edilir. ■

Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.6.4. $2 \leq r \leq n - 1$ olmak üzere $PK_{n,r}$ nin $r + 1$ tane D -Green sınıfı vardır. Bunlar $0 \leq k \leq r$ olmak üzere

$$D_k^P = \{\alpha \in PK_{n,r} : h(\alpha) = k\}$$

şeklindedir. Benzer şekilde $2 \leq r \leq n - 1$ olmak üzere $K_{n,r}$ nin r tane D -Green sınıfı vardır. Bunlar $1 \leq k \leq r$ olmak üzere

$$D_k^T = \{\alpha \in K_{n,r} : h(\alpha) = k\}$$

şeklindedir.

Evseen ve Podran (1972), $2 \leq r \leq n - 1$ olmak üzere T_n deki D -Green sınıfı D_r^T nin, kendi idempotentleri tarafından doğrulduğunu göstermişlerdir.

Lemma 2.6.5. $r \leq n - 2$ olmak üzere α , T_n nin yüksekliği r olan bir elemanı olsun. O zaman $\alpha = \beta\gamma$ olacak şekilde yüksekliği $r + 1$ olan $\beta, \gamma \in T_n$ vardır.

İspat: Howie ve McFadden (1990), Lemma 4. ■

Howie ve McFadden (1990), bu lemmanın bir sonucu olarak, $2 \leq r \leq n - 1$ için $K_{n,r} = \langle E(D_r^T) \rangle$ olduğunu gösterdiler. $K_{n,r}$ de herhangi bir $\alpha \in D_k^T$ ($1 \leq k \leq r$) dönüşümü yüksekliği k dan küçük olan dönüşümlerin bir çarpımı şeklinde yazılamaz. Bundan sonra $K_{n,r}$ nin bir doğuray kümesini araştırırken sadece $K_{n,r}$ deki D -Green sınıfı D_r^T nin alt kümelerini ele almak yeterlidir. Böylece D_r^T nin bir A alt kümesinin $K_{n,r}$ nin bir doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul $E(D_r^T) \subseteq \langle A \rangle$ olmasıdır. Ayrıca kolaylığı sağlamak için 3. Bölümde Teorem 3.3. ün ispatında D_r^T nin bir A alt kümesinin $K_{n,r}$ nin bir doğuray kümesi olduğunu göstermek için $D_r^T \subseteq \langle A \rangle$ olduğunu ispatlayacağız.

Teorem 2.6.6. $2 \leq r \leq n - 1$ için $K_{n,r}$ yarıgrupunun rankı $S(n, r)$ dir.

İspat: Howie ve McFadden (1990), Theorem 5. ■

P_n^* ile $X_{n+1} = X_n \cup \{n+1\}$ kümesi üzerinde tanımlı $(n+1)\alpha = n+1$ olacak şekildeki tüm α tam dönüşümlerinin kümesini gösterelim. Vagner (1956)' in çok iyi bilinen bir sonucuna göre P_n^* kümesi T_{n+1} yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur ve P_n ile P_n^* arasında bir izomorfizm vardır. Vagner (1956)' in sonucu, Garba (1990), Theorem 2.1' de şöyle ifade edilmiştir. Herhangi bir $\alpha \in P_n$ için $\alpha^*: X_{n+1} \rightarrow X_{n+1}$ dönüşümü

$$x\alpha^* = \begin{cases} x\alpha, & x \in \text{dom}(\alpha) \\ n+1, & x \notin \text{dom}(\alpha) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanıyor. O zaman $\alpha^* \in P_n^*$ dır. Ayrıca $\forall \alpha \in P_n$ için $\alpha\beta = \alpha^*$ şeklinde tanımlanan $\beta: P_n \rightarrow P_n^*$ dönüşümü bir izomorfizmdir. Böylece P_n yarıgrubundaki bazı problemler bu izomorfizm sayesinde T_n yarıgrubundaki gibi ele alınarak çözülebilir. P_n ile P_n^* arasındaki bu izomorfizm Vagner (1956) da tanımlanmıştır ve P_n de yüksekliği r ($1 \leq r \leq n$) olan bir elemanı P_n^* da yüksekliği $r+1$ olan bir elemana eşler. Buradan aşağıdaki izomorfizm elde edilir.

$$PK_{n,r} \cong K_{n+1,r+1}^* = \{\alpha \in P_n^*: h(\alpha) \leq r+1\}.$$

Örnek 2.6.7. P_n^* da yüksekliği n olan bir idempotent, ya $[n, n-1]$ de ya da $[n-1, n-1]$ de bir idempotent olacaktır. Şöyle ki; P_3^* için

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^* \in P_3^* \text{ idempotenti } [3,2] \text{ de ve } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^* \text{ idempotenti } [2,2] \text{ de bir idempotenttir.}$$

Lemma 2.6.8. $r \leq n - 1$ olmak üzere α, P_n^* in yüksekliği r olan bir elemanı olsun. O zaman $\alpha = \beta\gamma$ olacak şekilde yüksekliği $r + 1$ olan $\beta, \gamma \in P_n^*$ vardır.

İspat: Garba (1990), Lemma 2.6. ■

Lemma 2.6.9. P_n^* in yüksekliği r olan her elemanı, yüksekliği r olan idempotentlerinin bir çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: Garba (1990), Lemma 2.7. ■

$2 \leq r \leq n - 1$ ve $D_r^* = \{\alpha \in P_n^* : h(\alpha) = r\}$ olmak üzere Garba (1990), Lemma 2.6 ve 2.7'nin bir sonucu olarak $K_{n+1,r}^* = \langle E(D_r^*) \rangle$ olduğunu göstermiştir.

P_n ile P_n^* arasındaki izomorfizmden dolayı $K_{n,r}$ deki gibi $K_{n+1,r+1}^*$ in bir doğuray kümesini araştırırken sadece $K_{n+1,r+1}^*$ deki D -Green sınıfı D_{r+1}^* in alt kümelerini ele almak yeterlidir. Böylece D_{r+1}^* in bir A alt kümesinin $K_{n+1,r+1}^*$ in bir doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul $E(D_{r+1}^*) \subseteq \langle A \rangle$ olmasıdır. P_n ile P_n^* arasındaki izomorfizmden, $2 \leq r \leq n - 1$ olmak üzere, $PK_{n,r}$ yarıgrubunun bir doğuray kümesini araştırırken sadece $PK_{n,r}$ deki D -Green sınıfı D_r^P nin alt kümelerini ele almak yeterli olacaktır ve böylece D_r^P nin bir A alt kümesinin $PK_{n,r}$ nin bir doğuray kümesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul $E(D_r^P) \subseteq \langle A \rangle$ olmasıdır. Ayrıca kolaylığı sağlamak için 3. Bölümde Teorem 3.3. ün ispatında D_r^P nin bir A alt kümesinin $PK_{n,r}$ nin bir doğuray kümesi olduğunu göstermek için $D_r^P \subseteq \langle A \rangle$ olduğunu ispatlayacağız.

Teorem 2.6.10. $2 \leq r \leq n - 1$ için $PK_{n,r}$ yarıgrubunun rankı $S(n + 1, r + 1)$ dir.

İspat: Garba (1990), Theorem 4.1 ve Theorem 4.2. ■

Şimdi $K_{n,r}$ ve $PK_{n,r}$ yarıgruplarını kullanarak aşağıdaki yarıgrupları tanımlayalım.

$$1 \leq r \leq n \text{ için}$$

$$T_{n,r} = S_n \cup K_{n,r}$$

$$A_{n,r} = A_n \cup K_{n,r}$$

$$PT_{n,r} = S_n \cup PK_{n,r}$$

$$PA_{n,r} = A_n \cup PK_{n,r}$$

şeklinde tanımlansın.

Diğer bölümlerde $T_{n,r}$ ve $PT_{n,r}$ yarıgruplarının her birinin herhangi bir alt kümesinin modulo S_n e göre bir (minimal) görece doğuray kümesi olabilmesi için gerekli ve yeterli olan koşulları bulacağız. Buna paralel olarak $A_{n,r}$ ve $PA_{n,r}$ yarıgruplarının her birinin herhangi bir alt kümesinin modulo A_n e göre bir (minimal) görece doğuray kümesi olabilmesi için gerekli ve yeterli olan koşulları vereceğiz. Ayrıca bu yarıgrupların görece ranklarını da hesaplayacağız.

Ayrıca $D_n^P = D_n^T = S_n$ olduğundan sadece $1 \leq r \leq n - 1$ durumunu ele alacağız.

Bundan sonra aksi söylenmedikçe $\alpha \in P_n$ kabul edeceğiz ve α elemanın $1 \leq k \leq n - 1$ için

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_k & A_{k+1} \\ a_1 & \cdots & a_k & - \end{pmatrix}$$

formunda yazacağız.



3. $T_{n,r}$ ve $PT_{n,r}$ YARIGRUPLARININ GÖRECE RANKI

Bu bölümde $1 \leq r \leq n - 1$ için $K_{n,r}$ nin herhangi bir U alt kümesinin modulo S_n e göre $T_{n,r}$ nin bir (minimal) görece doğuray kümesi, yani

$$\langle U \cup S_n \rangle = T_{n,r}$$

olması için gerekli ve yeterli koşulları bulacağız. Daha sonra Ayık ve ark. (2005) ile Levi ve McFadden (1994) deki çalışmalarda gösterilen her bir $1 \leq r \leq n - 1$ için

$$\text{rerank}(T_{n,r}, S_n) = p_r(n)$$

eşitliğinin farklı bir yaklaşımla farklı bir ispatını burada vereceğiz. Fakat bu bölümde esas göstermek istediğimiz; $1 \leq r \leq n - 1$ için $PK_{n,r}$ nin herhangi bir U alt kümesinin modulo S_n e göre $PT_{n,r}$ nin bir (minimal) görece doğuray kümesi, yani

$$\langle U \cup S_n \rangle = PT_{n,r}$$

olması için gerekli ve yeterli koşulları bulmaktır. Böylece bu sonucu kullanarak her bir $1 \leq r \leq n - 1$ için

$$\text{rerank}(PT_{n,r}, S_n) = \sum_{s=0}^{n-r} p_r(n-s)$$

olduğunu göstereceğiz.

$PK_{n,r}$, $PT_{n,r}$ nin bir ideali olduğundan $PT_{n,r}$ nin herhangi bir doğuray kümesi S_n nin bir doğuray kümesini içermek zorundadır. Böylece $1 \leq r \leq n-1$ için eğer $W \subseteq PT_{n,r}$ alt kümesi, $PT_{n,r}$ nin bir doğuray kümesi ise o zaman $\langle V \rangle = S_n$ ve $\langle U \cup V \rangle = \langle U \cup S_n \rangle = PT_{n,r}$ olacak şekilde $U \subseteq D_r^P \cap W$ ve $V \subseteq S_n \cap W$ alt kümeleri vardır. Böylece her bir $1 \leq r \leq n-1$ için modulo S_n e göre $PT_{n,r}$ nin herhangi bir minimal görece doğuray kümesi D_r^P nin bir alt kümesi olmalıdır. Benzer şekilde $K_{n,r}$, $T_{n,r}$ nin bir ideali olduğundan $T_{n,r}$ nin herhangi bir doğuray kümesi S_n nin bir doğuray kümesini içermek zorundadır. Böylece $1 \leq r \leq n-1$ için eğer $W \subseteq T_{n,r}$ alt kümesi, $T_{n,r}$ nin bir doğuray kümesi ise o zaman $\langle V \rangle = S_n$ ve $\langle U \cup V \rangle = \langle U \cup S_n \rangle = T_{n,r}$ olacak şekilde $U \subseteq D_r^T \cap W$ ve $V \subseteq S_n \cap W$ alt kümeleri vardır. Böylece her bir $1 \leq r \leq n-1$ için modulo S_n e göre $T_{n,r}$ nin herhangi bir minimal görece doğuray kümesi D_r^T nin bir alt kümesi olmalıdır.

Şimdi daha sonra da kullanacağımız iki özelliği ispatlayalım.

Önerme 3.1. $1 \leq r \leq n-1$ için $\alpha, \beta \in D_r$ olsun. O zaman $\alpha\beta \in D_r$ olması için gerek ve yeter koşul $\ker(\alpha\beta) = \ker(\alpha)$ olmasıdır. Üstelik $\alpha\beta \in D_r$ ise $\text{codom}(\alpha\beta) = \text{codom}(\alpha)$ dir.

İspat: $1 \leq r \leq n-1$ için $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_r & A_{r+1} \\ a_1 & \cdots & a_r & - \end{pmatrix}$ ve $\beta = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_r & B_{r+1} \\ b_1 & \cdots & b_r & - \end{pmatrix}$ şeklinde olsun.

$(\Rightarrow)$ $\alpha\beta \in D_r$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\alpha\beta \in D_r$ olduğundan her $1 \leq i \leq r$ için $a_i \in B_{i\sigma}$ olacak şekilde bir $\sigma \in S_r$ vardır. Aksi halde $h(\alpha\beta) < r$ olur, bu ise $\alpha\beta \in D_r$ olmasıyla çelişir. Böylece

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_r & A_{r+1} \\ b_{1\sigma} & \cdots & b_{r\sigma} & - \end{pmatrix}$$

olup $\ker(\alpha\beta) = \cup_{i=1}^{r+1} (A_i \times A_i)$ olur. Dolayısıyla $\ker(\alpha\beta) = \ker(\alpha)$ ve $\text{codom}(\alpha\beta) = A_{r+1} = \text{codom}(\alpha)$ olur.

($\Leftarrow$) $\ker(\alpha\beta) = \ker(\alpha)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $A_{r+1} = \text{codom}(\alpha) \subseteq \text{codom}(\alpha\beta)$ olduğundan $\alpha\beta \in D_r$ olur. ■

Lemma 3.2. $1 \leq r \leq n-1$ için $\alpha, \beta \in D_r$ olsun. O zaman $\text{copart}(\alpha) = \text{copart}(\beta)$ olması için gerek ve yeter koşul $\beta = \lambda\alpha\mu$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in S_n$ olmasıdır.

Özel olarak $\alpha, \beta \in T_n$ ise, $\text{part}(\alpha) = \text{part}(\beta)$ olması için gerek ve yeter koşul $\beta = \lambda\alpha\mu$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in S_n$ olmasıdır.

İspat: $1 \leq r \leq n-1$ için $\alpha, \beta \in D_r$ olsun.

($\Rightarrow$) $\text{copart}(\alpha) = \text{copart}(\beta)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda genelliği bozmaksızın

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_r & A_{r+1} \\ a_1 & \cdots & a_r & - \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_r & B_{r+1} \\ b_1 & \cdots & b_r & - \end{pmatrix}$$

ve her bir $1 \leq i \leq r+1$ için $|A_i| = |B_i|$ şeklinde olduğunu kabul edebiliriz. O zaman her bir $1 \leq i \leq r+1$ için $B_i\lambda = A_i$ olacak şekilde bir $\lambda \in S_n$ vardır. Üstelik $X_n \setminus \text{im}(\alpha) = \{a_{r+1}, \dots, a_n\}$ ve $X_n \setminus \text{im}(\beta) = \{b_{r+1}, \dots, b_n\}$ olmak üzere her bir $1 \leq i \leq n$ için $a_i\mu = b_i$ şeklinde tanımlı dönüşüm bir permütasyon olup $\mu \in S_n$ olur. Böylece her bir $1 \leq i \leq r$ için $B_i(\lambda\alpha\mu) = b_i = B_i\beta$ ve $\text{codom}(\lambda\alpha\mu) = B_{r+1}$ olduğundan $\beta = \lambda\alpha\mu$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $\beta = \lambda\alpha\mu$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in S_n$ elemanları mevcut olsun. Bu durumda β nın

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1\lambda^{-1} & \cdots & A_r\lambda^{-1} & A_{r+1}\lambda^{-1} \\ a_1\mu & \cdots & a_r\mu & - \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğu açıktır. Böylece $\lambda \in S_n$ olduğundan her bir $1 \leq i \leq r+1$ için $|A_i| = |A_i \lambda^{-1}|$ olup tanımı gereği $\text{copart}(\alpha) = \text{copart}(\beta)$ olur.

Herhangi bir $\gamma \in T_n$ için $\text{copart}(\gamma) = \text{part}(\gamma)$ olarak tanımlanmıştı. Bu durumda lemmanın son kısmı benzer şekilde ispatlanır. ■

Teorem 3.3. $1 \leq r \leq n-1$ ve $U \subseteq PK_{n,r}$ olsun. O zaman $PT_{n,r} = \langle U \cup S_n \rangle$ olması için gerek ve yeter koşul her bir $(n_1, \dots, n_r) \in \bigcup_{s=0}^{n-r} P_r(n-s)$ parçalanışı için $\text{copart}(\alpha) = (n_1, \dots, n_r; s)$ olacak şekilde bir $\alpha \in U$ olmasıdır. (Burada $s = |\text{codom}(\alpha)|$ dir.)

Özel olarak, eğer $U \subseteq K_{n,r}$ ise o zaman $T_{n,r} = \langle U \cup S_n \rangle$ olması için gerek ve yeter koşul her bir $p \in P_r(n)$ parçalanışı için $\text{part}(\alpha) = p$ olacak şekilde bir $\alpha \in U$ olmasıdır.

İspat: $1 \leq r \leq n-1$ ve $U \subseteq PK_{n,r}$ olsun.

($\Rightarrow$) $PT_{n,r} = \langle U \cup S_n \rangle$ olduğunu kabul edelim. O zaman herhangi bir $(n_1, \dots, n_r) \in \bigcup_{s=0}^{n-r} P_r(n-s)$ parçalanışı için $\text{copart}(\beta) = (n_1, \dots, n_r; s)$ olacak şekilde herhangi bir $\beta \in D_r^P$ elemanını alalım. $PT_{n,r} = \langle U \cup S_n \rangle$ olduğundan

$$\beta = \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \beta_m \alpha_{m+1}$$

olacak şekilde $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1} \in S_n$ ve $\beta_1, \dots, \beta_m \in U$ vardır. Böylece her bir $1 \leq i \leq m$ için $h(\beta_i) \geq h(\beta) = r$ ve $\beta_i \in U \subseteq PK_{n,r}$ olduğundan $h(\beta_i) = r$ ve $|\text{codom}(\beta_i)| \leq s$ elde edilir. Şimdi $\gamma = \alpha_1 \beta_1$ ve $\delta = \alpha_2 \beta_2 \cdots \alpha_m \beta_m \alpha_{m+1}$ olarak alalım. Bu durumda $\gamma \in D_r^P$ ve $\delta \in D_r^P \cup S_n$ olur. Eğer $\delta \in S_n$ ise Lemma 3.2. den

$$(n_1, \dots, n_r; s) = \text{copart}(\beta) = \text{copart}(\alpha_1 \beta_1 \delta) = \text{copart}(\beta_1)$$

olup $\text{copart}(\beta_1) = (n_1, \dots, n_r: s)$ olacak şekilde bir $\beta_1 \in U$ vardır. Diğer durumda yani $\delta \in D_r^P$ ise o zaman Önerme 3.1. den

$$\ker(\gamma\delta) = \ker(\gamma)$$

$$s = |\text{codom}(\beta)| = |\text{codom}(\gamma\delta)| = |\text{codom}(\alpha_1\beta_1)| = |\text{codom}(\beta_1)|$$

olur ve böylece

$$\text{copart}(\beta) = \text{copart}(\gamma\delta) = \text{copart}(\gamma) = \text{copart}(\beta_1)$$

elde edilir. Dolayısıyla her iki durumda $\text{copart}(\beta_1) = (n_1, \dots, n_r: s)$ olacak şekilde bir $\beta_1 \in U$ vardır. O halde her bir $(n_1, \dots, n_r) \in \bigcup_{s=0}^{n-r} P_r(n-s)$ parçalanışı için $\text{copart}(\beta_1) = (n_1, \dots, n_r: s)$ olacak şekilde en az bir $\beta_1 \in U$ vardır.

Eğer $U \subseteq K_{n,r}$ ve $T_{n,r} = \langle U \cup S_n \rangle$ ise o zaman her bir $p \in P_r(n)$ parçalanışı için $\text{part}(\alpha) = p$ olacak şekilde bir $\alpha \in U$ elemanının varlığını yukarıdaki ispata paralel olarak yapabiliriz. Çünkü herhangi bir $\alpha \in T_n$ için $\text{copart}(\alpha) = \text{part}(\alpha)$ olarak tanımlanmıştı.

($\Leftarrow$) Her bir $(n_1, \dots, n_r) \in \bigcup_{s=0}^{n-r} P_r(n-s)$ parçalanışı için $\text{copart}(\alpha) = (n_1, \dots, n_r: s)$ olacak şekilde bir $\alpha \in U$ elemanının var olduğunu kabul edelim. O zaman $\text{copart}(\beta) = (m_1, \dots, m_r: s_0)$ olmak üzere herhangi bir $\beta \in D_r^P$ elemanı için $\text{copart}(\alpha_0) = (m_1, \dots, m_r: s_0)$ olacak şekilde $\alpha_0 \in U$ vardır. Bu durumda $\text{copart}(\beta) = \text{copart}(\alpha_0)$ olup Lemma 3.2. den $\beta = \lambda\alpha_0\mu$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in S_n$ vardır. O halde $\beta = \lambda\alpha_0\mu \in \langle U \cup S_n \rangle$ olup $D_r^P \subseteq \langle U \cup S_n \rangle$ olur ve böylece $U \cup S_n$ kümesi D_r^P yi doğurur. Böylece Lemma 2.6.8. nin bir sonucu olarak $U \cup S_n$ kümesi $PT_{n,r}$ nin bir doğuray kümesi olur.

Eğer $U \subseteq K_{n,r}$ ve her bir $p \in P_r(n)$ parçalanışı için $\text{part}(\alpha) = p$ olacak şekilde bir $\alpha \in U$ var ise yukarıda yaptıklarımıza paralel olarak Lemma 2.6.5. den $U \cup S_n$ kümesi $T_{n,r}$ nin bir doğuray kümesi olur. ■

Her bir $1 \leq r \leq n - 1$ ve her bir $p \in P_r(n)$ parçalanışı için

$$\text{part}(\beta_p) = p$$

olacak şekilde keyfi bir $\beta_p \in D_r^T$ elemanı seçelim ve bu elemanların kümesini

$$U_{n,r,0} = \{\beta_p : p \in P_r(n)\}$$

ile gösterelim. Böylece Teorem 3.3. den $U_{n,r,0}$ kümesi, modulo S_n e göre $T_{n,r} = S_n \cup K_{n,r}$ nin bir minimal görece doğuray kümesidir. O halde aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 3.4. Her bir $1 \leq r \leq n - 1$ için

$$\text{rerank}(T_{n,r}, S_n) = p_r(n)$$

olur.

İspat: $U_{n,r,0}$ kümesi, her bir $1 \leq r \leq n - 1$ ve her bir $p \in P_r(n)$ parçalanışı için $\text{part}(\beta_p) = p$ olacak şekilde bir $\beta_p \in D_r^T$ elemanı seçilerek oluşturuldu ve $|P_r(n)| = p_r(n)$ olduğundan ispat tamamlanır. ■

$1 \leq r \leq n-1$ ve $1 \leq s \leq n-r$ olsun. O zaman her bir $(n_1, \dots, n_r) \in P_r(n-s)$ parçalanışı için

$$\text{copart}(\beta_{(n_1, \dots, n_r:s)}) = (n_1, \dots, n_r:s)$$

olacak şekilde herhangi bir $\beta_{(n_1, \dots, n_r:s)} \in D_r^P$ elemanı seçelim ve bu elemanların kümesini

$$U_{n,r,s} = \{\beta_{(n_1, \dots, n_r:s)} : (n_1, \dots, n_r) \in P_r(n-s)\}$$

ile gösterelim. Böylece $U_{n,r,0}, \dots, U_{n,r,n-r}$ kümeleri ayrık kümeler olup Teorem 3.3 den

$$U = \bigcup_{s=0}^{n-r} U_{n,r,s}$$

kümesi modulo S_n e göre $PT_{n,r} = S_n \cup PK_{n,r}$ nin bir minimal görece doğuray kümesidir. O halde aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 3.5. Her bir $1 \leq r \leq n-1$ için

$$\text{rerank}(PT_{n,r}, S_n) = \sum_{s=0}^{n-r} p_r(n-s)$$

olur.

İspat: Her bir $0 \leq s \leq n-r$ için $U_{n,r,s}$ kümeleri, her bir $(n_1, \dots, n_r) \in P_r(n-s)$ parçalanışı için

$$\text{copart}(\beta_{(n_1, \dots, n_r: s)}) = (n_1, \dots, n_r: s)$$

olacak şekilde bir $\beta_{(n_1, \dots, n_r: s)} \in D_r^P$ elemanı seçilerek oluşturuldu ve her bir $0 \leq s \leq n - r$ için $|P_r(n - s)| = p_r(n - s)$ olduğundan ispat tamamlanır. ■

$0 \leq s \leq n - r$ için yukarıda tanımlanan $U_{n,r,s}$ kümelerinin idempotentlerin bir kümesi olarak da seçilebileceğini belirtelim. Bu durumda modulo S_n e göre $T_{n,r}$ ve $PT_{n,r}$ nin görece idempotent ranklarını tanımlayabiliriz. Üstelik, modulo S_n e göre $T_{n,r}$ ve $PT_{n,r}$ yarıgruplarının görece idempotent rankları sırasıyla, $p_r(n)$ ve $\sum_{s=0}^{n-r} p_r(n - s)$ olur. Ayrıca $n \geq 3$ için $\text{rank}(S_n) = 2$ olduğundan $1 \leq r \leq n - 1$ için

$$\text{rank}(T_{n,r}) = p_r(n) + 2 \text{ ve } \text{rank}(PT_{n,r}) = \sum_{s=0}^{n-r} p_r(n - s) + 2$$

elde edilir.

Örnek 3.6. $n = 4$ ve $r = 2$ için $PT_{4,2}$ nin eleman sayısını bulalım. Daha sonra $PT_{4,2}$ nin bir doğuray kümesini belirleyelim.

$PT_{4,2} = S_4 \cup PK_{4,2}$ ve $PK_{4,2} = \{\alpha \in P_4 : h(\alpha) \leq 2\}$ idi. O zaman P_4 ün elemanlarından görüntü kümesinde 2 ve 2 den az sayıda elemanı olan elemanlarını saymalıyız. Önce görüntü kümesinde 2 elemanı bulunan kısmi dönüşümleri sayalım:

Tanım kümesinde 4 elemanı bulunan kısmi dönüşümlerin sayısı için, $\binom{4}{4}$ tane tanım kümesi vardır. Görüntü kümesinde 2 eleman istediğimiz için $\binom{4}{2}$ tane farklı seçim olur. Bu seçtiğimiz iki eleman aralarında $2!$ şekilde yer değiştirebilir. Sonra tanım kümesindeki 4 elemandan görüntü kümesindeki 2 elamana örten

fonksiyon sayısı $S(4,2)$ kadar dönüşüm yazılır. Bu durumda toplam $\binom{4}{4} \binom{4}{2} 2! S(4,2)$ tane dönüşüm vardır.

Tanım kümesinde 3 elemanı bulunan kısmi dönüşümlerin sayısı için, $\binom{4}{3}$ tane tanım kümesi vardır. Görüntü kümesinde 2 eleman istediğimiz için $\binom{4}{2}$ tane farklı seçim olur. Bu seçtiğimiz iki eleman aralarında $2!$ şekilde yer değiştirebilir. Sonra tanım kümesindeki 3 elemandan görüntü kümesindeki 2 elemana örten fonksiyon sayısı $S(3,2)$ kadar dönüşüm yazılır. Bu durumda toplam $\binom{4}{3} \binom{4}{2} 2! S(3,2)$ tane dönüşüm vardır.

Tanım kümesinde 2 elemanı bulunan kısmi dönüşümlerin sayısı için, $\binom{4}{2}$ tane tanım kümesi vardır. Görüntü kümesinde 2 eleman istediğimiz için $\binom{4}{2}$ tane farklı seçim olur. Bu seçtiğimiz iki eleman aralarında $2!$ şekilde yer değiştirebilir. Sonra tanım kümesindeki 2 elemandan görüntü kümesindeki 2 elemana örten fonksiyon sayısı $S(2,2)$ kadar dönüşüm yazılır. Bu durumda toplam $\binom{4}{2} \binom{4}{2} 2! S(2,2)$ tane dönüşüm vardır.

Şimdi görüntü kümesinde 1 elemanı bulunan kısmi dönüşümleri sayalım:

Tanım kümesinde 4 elemanı bulunan kısmi dönüşümlerin sayısı için, $\binom{4}{4}$ tane tanım kümesi vardır. Görüntü kümesinde 1 eleman istediğimiz için $\binom{4}{1}$ tane farklı seçim olur. Sonra tanım kümesindeki 4 elemandan görüntü kümesindeki 1 elemana örten fonksiyon sayısı $S(4,1)$ kadar dönüşüm yazılır. Bu durumda toplam $\binom{4}{4} \binom{4}{1} S(4,1)$ tane dönüşüm vardır.

Tanım kümesinde 3 elemanı bulunan kısmi dönüşümlerin sayısı için, $\binom{4}{3}$ tane tanım kümesi vardır. Görüntü kümesinde 1 eleman istediğimiz için $\binom{4}{1}$ tane

farklı seçim olur. Sonra tanım kümesindeki 3 elemandan görüntü kümesindeki 1 elemana örten fonksiyon sayısı $S(3,1)$ kadar dönüşüm yazılır. Bu durumda toplam $\binom{4}{3} \binom{4}{1} S(3,1)$ tane dönüşüm vardır.

Tanım kümesinde 2 elemanı bulunan kısmi dönüşümlerin sayısı için, $\binom{4}{2}$ tane tanım kümesi vardır. Görüntü kümesinde 1 eleman istediğimiz için $\binom{4}{1}$ tane farklı seçim olur. Sonra tanım kümesindeki 2 elemandan görüntü kümesindeki 1 elemana örten fonksiyon sayısı $S(2,1)$ kadar dönüşüm yazılır. Bu durumda toplam $\binom{4}{2} \binom{4}{1} S(2,1)$ tane dönüşüm vardır.

Tanım kümesinde 1 elemanı bulunan kısmi dönüşümlerin sayısı için, $\binom{4}{1}$ tane tanım kümesi vardır. Görüntü kümesinde 1 eleman istediğimiz için $\binom{4}{1}$ tane farklı seçim olur. Sonra tanım kümesindeki 1 elemandan görüntü kümesindeki 1 elemana örten fonksiyon sayısı $S(1,1)$ kadar dönüşüm yazılır. Bu durumda toplam $\binom{4}{1} \binom{4}{1} S(1,1)$ tane dönüşüm vardır.

Buradan P_4 ün bir D_r sınıfındaki eleman sayısı, $|dom(\alpha)| = r + k$ olmak üzere

$$|D_r| = \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n}{r+k} \binom{n}{r} r! S(r+k, r) = P(n, r) \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n}{r+k} S(r+k, r)$$

olarak yazılabilir.

Böylece $PT_{4,2}$ yarıgrubunun eleman sayısı yukarıda hesapladığımız eleman sayılarının toplamı kadardır, yani

$$|PT_{4,2}| = \binom{4}{4} \binom{4}{2} 2! S(4,2) + \binom{4}{3} \binom{4}{2} 2! S(3,2) + \binom{4}{2} \binom{4}{2} 2! S(2,2) +$$

$$\begin{aligned}
& \binom{4}{4} \binom{4}{1} S(4,1) + \binom{4}{3} \binom{4}{1} S(3,1) + \binom{4}{2} \binom{4}{1} S(2,1) + \\
& \binom{4}{1} \binom{4}{1} S(1,1) + 4! + 1 \\
& = 285
\end{aligned}$$

olur. Bu toplamı kısaca

$$|PT_{4,2}| = \sum_{r=1}^2 \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n}{r+k} \binom{n}{r} r! S(r+k, r) + 4! + 1$$

şeklinde ifade edebiliriz. O halde genel olarak,

$$|PT_{n,r}| = \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{i+k} \binom{n}{i} i! S(i+k, i) + n! + 1$$

şeklinde yazılır.

Şimdi modulo S_4 e göre $PT_{4,2}$ nin görece doğuray kümesini Teorem 3.3. yardımıyla bulalım. Teorem 3.3. e göre $U \subseteq PK_{4,2}$ olsun. O zaman $PT_{4,2} = \langle U \cup S_4 \rangle$ olması için gerek ve yeter koşul her bir $(n_1, \dots, n_r) \in \cup_{s=0}^{4-2} P_2(4-s)$ parçalanışı için $\text{copart}(\alpha) = (n_1, \dots, n_r; s)$ olacak şekilde bir $\alpha \in U$ olmasıdır. (Burada $s = |\text{codom}(\alpha)|$ dır.)

Burada $s = 1$ ya da $s = 2$ durumu olur. $s = 0$ durumu ise Teorem 3.3. ün ikinci kısmı olan $K_{4,2}$ nin elemanlarından her bir $P_2(4)$ parçalanışı için birer eleman seçmektir. Bu durumda modulo S_4 e göre $T_{4,2}$ nin minimal görece doğuray kümesini bulmuş oluruz. Böylece 4 ün 2 li parçalanışları 3+1 ve 2+2 şeklinde olup bu parçalanışa sahip elemanlardan birer tane seçmeliyiz. O zaman $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ elemanlarını alalım. 3 ün 2 li parçalanışı 2+1 şeklinde olup bu

parçalanışa sahip elemanlardan bir tane seçmeliyiz. O zaman $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & - \end{pmatrix}$ elemanını alalım. Son olarak, 2 nin 2 li parçalanışı 1+1 şeklinde olup bu parçalanışa sahip elemanlardan bir tane seçmeliyiz. O zaman $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & - & - \end{pmatrix}$ elemanını alalım. O halde Teorem 3.3. gereğince

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & - & - \end{pmatrix} \right\}$$

kümesi modulo S_4 e göre $PT_{4,2}$ nin minimal görece doğuray kümesi olur.

Ayrıca $p_2(4) = 2$, $p_2(3) = 1$ ve $p_2(2) = 1$ olduğuna dikkat edelim.

Böylece

$$\text{rerank}(PT_{4,2}, S_4) = 4 = 2 + 1 + 1 = p_2(4) + p_2(3) + p_2(2) = \sum_{s=0}^{4-2} p_2(4-s)$$

bulunur.

4. $A_{n,r}$ ve $PA_{n,r}$ YARIGRUPLARININ GÖRECE RANKI

Bir önceki bölümde $1 \leq r \leq n - 1$ için $PK_{n,r}$ nin herhangi bir U alt kümesinin modulo S_n e göre $PT_{n,r} = S_n \cup PK_{n,r}$ nin bir (minimal) görece doğuray kümesi olması için gerekli ve yeterli koşulları bulduk. Ayrıca $1 \leq r \leq n - 1$ için $K_{n,r}$ nin herhangi bir U alt kümesinin modulo S_n e göre $T_{n,r} = S_n \cup K_{n,r}$ nin bir (minimal) görece doğuray kümesi olması için gerekli ve yeterli koşulları verdik ve her bir $1 \leq r \leq n - 1$ için

$$\text{rerank}(PT_{n,r}, S_n) = \sum_{s=0}^{n-r} p_r(n-s)$$

ve

$$\text{rerank}(T_{n,r}, S_n) = p_r(n)$$

sonuçlarına ulaştık. Bu bölümde ise S_n permütasyon grubu yerine A_n alterne grubunu alacağız ve $A_{n,r} = A_n \cup K_{n,r}$ ve $PA_{n,r} = A_n \cup PK_{n,r}$ yarıgruplarında benzer özellikleri inceleyeceğiz. Yani $1 \leq r \leq n - 1$ için $PK_{n,r}$ nin herhangi bir U alt kümesinin modulo A_n e göre $PA_{n,r}$ nin bir (minimal) görece doğuray kümesi, yani

$$\langle U \cup A_n \rangle = PA_{n,r}$$

olması için gerekli ve yeterli koşulları bulacağız. Ayrıca $1 \leq r \leq n - 1$ için $K_{n,r}$ nin herhangi bir U alt kümesinin modulo A_n e göre $A_{n,r}$ nin bir (minimal) görece doğuray kümesi, yani

$$\langle U \cup A_n \rangle = A_{n,r}$$

olması için gerekli ve yeterli koşulları bulacağız. Böylece bu sonuçları kullanarak her bir $1 \leq r \leq n - 1$ için

$$\text{rerank}(PA_{n,r}, A_n) = \sum_{s=0}^{n-r} p_r(n-s)$$

ve özel olarak

$$\text{rerank}(A_{n,r}, A_n) = p_r(n)$$

olduğunu göstereceğiz.

Öncelikle Lemma 3.2. ye benzer olarak aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 4.1. $1 \leq r \leq n - 2$ için $\alpha, \beta \in D_r$ olsun. O zaman $\text{copart}(\alpha) = \text{copart}(\beta)$ olması için gerek ve yeter koşul $\beta = \lambda\alpha\mu$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in A_n$ olmasıdır.

Özel olarak $\alpha, \beta \in T_n$ ise, $\text{part}(\alpha) = \text{part}(\beta)$ olması için gerek ve yeter koşul $\beta = \lambda\alpha\mu$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in A_n$ olmasıdır.

İspat: $1 \leq r \leq n - 2$ için $\alpha, \beta \in D_r$ olsun.

$(\Rightarrow)$ $\text{copart}(\alpha) = \text{copart}(\beta)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda genelliği bozmaksızın

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_r & A_{r+1} \\ a_1 & \cdots & a_r & - \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_r & B_{r+1} \\ b_1 & \cdots & b_r & - \end{pmatrix}$$

ve her bir $1 \leq i \leq r+1$ için $|A_i| = |B_i|$ şeklinde olduğunu kabul edebiliriz. O zaman Lemma 3.2. den $\beta = \lambda_1 \alpha \mu_1$ olacak şekilde $\lambda_1, \mu_1 \in S_n$ vardır ve bu lemmanın ispatından her bir $1 \leq i \leq r+1$ için $B_i \lambda_1 = A_i$ ve $X_n \setminus \text{im}(\alpha) = \{a_{r+1}, \dots, a_n\}$ ve $X_n \setminus \text{im}(\beta) = \{b_{r+1}, \dots, b_n\}$ olmak üzere her bir $1 \leq i \leq n$ için $a_i \mu_1 = b_i$ şeklindedir. Eğer $\lambda_1 \in A_n$ ise $\lambda = \lambda_1$ alırız. Şimdi $\lambda_1 \notin A_n$ olduğunu kabul edelim. $r \leq n-2$ olduğundan $|B_k| \geq 2$ olacak şekilde bir $1 \leq k \leq r+1$ vardır. O zaman $a \neq b$ ve $a, b \in B_k$ olmak üzere $\lambda_2 = (ab)$ transpozisyonunu ele alalım. Böylece $\lambda = \lambda_2 \lambda_1$ alınırsa $\lambda \in A_n$ olup her bir $1 \leq i \leq r+1$ için $B_i \lambda = A_i$ olur. Eğer $\mu_1 \in A_n$ ise $\mu = \mu_1$ alırız. O halde $\mu_1 \notin A_n$ olduğunu kabul edelim. Benzer şekilde $r \leq n-2$ olduğundan $c \neq d$ olacak şekilde $c, d \in X_n \setminus \text{im}(\alpha)$ elemanları vardır. Bu durumda $\mu_2 = (cd)$ transpozisyonunu ele alalım. Eğer $\mu = \mu_2 \mu_1$ alırsak $\mu \in A_n$ olup her bir $1 \leq i \leq r$ için $a_i \mu = b_i$ olur. Böylece her bir $1 \leq i \leq r$ için $B_i(\lambda \alpha \mu) = b_i = B_i \beta$ ve $\text{codom}(\lambda \alpha \mu) = B_{r+1}$ olduğundan $\lambda, \mu \in A_n$ olmak üzere $\beta = \lambda \alpha \mu$ elde edilir.

($\Leftarrow$) Lemma 3.2. ye paralel olarak ispat tamamlanır. ■

Şimdi D_{n-1}^P sınıfındaki idempotent elemanları inceleyelim. Bu sınıftaki elemanlar, D_{n-1}^T sınıfındaki elemanlar ile D_{n-1}^T sınıfında olmayan kısmi dönüşümlerdir. Eğer $\alpha \in D_{n-1}^T$ sınıfında bir idempotent ise o zaman her bir $k \in X_n \setminus \{i\}$ için $k\alpha = k$ ve $i\alpha = j$ olacak şekilde birbirinden farklı iki $i, j \in X_n$ vardır, ve bu eleman $\alpha = \alpha_{i,j} = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ şeklinde gösterilir. Eğer $\beta \in D_{n-1}^P \setminus D_{n-1}^T$ sınıfında bir idempotent ise o zaman her bir $i \in X_n \setminus \{k\}$ için $i\beta = i$ ve $\text{dom}(\beta) = X_n \setminus \{k\}$ olacak şekilde bir $k \in X_n$ vardır, ve bu eleman $\beta = \beta_k = \begin{pmatrix} k \\ - \end{pmatrix}$ şeklinde gösterilir.

Lemma 4.2. $n \geq 3$ ve $\alpha, \beta \in D_{n-1}$ için $h(\alpha) = h(\alpha^2)$ ve $h(\beta) = h(\beta^2)$ olsun.

- i) $\alpha \in T_n$ ise $K_{n,n-1} \subseteq \langle \{\alpha\} \cup A_n \rangle$
- ii) $\alpha \in T_n$ ve $\beta \notin T_n$ ise $PK_{n,n-1} \subseteq \langle \{\alpha, \beta\} \cup A_n \rangle$

olur.

İspat: i) $\alpha \in T_n$ ve $h(\alpha) = h(\alpha^2)$ olduğunu kabul edelim. $h(\alpha) = h(\alpha^2)$ ise α yı içeren H -sınıfında idempotent elemanlar vardır. O zaman genelliği bozmaksızın $\alpha = \alpha_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ seçebiliriz. O halde birbirinden farklı $i, j, l \in X_n$ elemanları için $(i \ j \ l)$, A_n deki 3-devirler olmak üzere, her bir $3 \leq j \leq n$ için

$$(j \ j-1 \ j-2) \begin{pmatrix} j-2 \\ j-1 \end{pmatrix} (j-2 \ j-1 \ j) = \begin{pmatrix} j-1 \\ j \end{pmatrix} = \alpha_{j-1,j}$$

ve

$$(1 \ n \ n-1) \begin{pmatrix} n-1 \\ n \end{pmatrix} (n-1 \ n \ 1) = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$n = 3$ için yukarıdaki iki denklemden

$$\alpha_{2,3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (3 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3)$$

$$\alpha_{3,1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} (2 \ 3 \ 1)$$

olup $\alpha_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_{2,3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_{3,1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \langle \{\alpha\} \cup A_n \rangle$ olur. Üstelik $\alpha_{i,j}$ formundaki elemanları ve Ayık ve ark. (2013) deki hesaplamaları kullanarak

$$[\alpha_{1,2}\alpha_{3,1}\alpha_{2,3}]^2 = \alpha_{2,1}$$

$$[\alpha_{2,3}\alpha_{1,2}\alpha_{3,1}]^2 = \alpha_{3,2}$$

$$[\alpha_{3,1}\alpha_{2,3}\alpha_{1,2}]^2 = \alpha_{1,3}$$

olup, D_2^T sınıfındaki $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,2}$ ve $\alpha_{1,3}$ idempotentleri $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,3}$ ve $\alpha_{3,1}$ idempotentleri cinsinden yazılır. Böylece $E(D_2^T) \subseteq \langle \{\alpha\} \cup A_3 \rangle$ olur. Şimdi $n \geq 4$ olduğunu kabul edelim. O zaman $i \neq j, j-1$ olacak şekilde her bir $1 \leq i, j \leq n$ ikilisi ve herhangi bir $k \in X_n \setminus \{i, j-1, j\}$ için

$$(j-1 \ k \ i)\alpha_{j-1,j}(i \ k \ j-1) = \alpha_{i,j}$$

elde edilir. Bu eşitlikte eğer $j=1$ ise $j-1=n$ alınır. Böylece $E(D_{n-1}^T) \subseteq \langle \{\alpha\} \cup A_n \rangle$ olup Lemma 2.6.5. in bir sonucu olarak $K_{n,n-1} \subseteq \langle \{\alpha\} \cup A_n \rangle$ elde edilir.

ii) $\alpha \in T_n, \beta \notin T_n, h(\alpha) = h(\alpha^2)$ ve $h(\beta) = h(\beta^2)$ olduğunu kabul edelim. Yine i) ye benzer olarak β yı içeren H -sınıfında idempotent elemanlar vardır. O zaman genelliği bozmaksızın $\beta = \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix}$ seçebiliriz. Bu durumda her bir $2 \leq k \leq n$ ve herhangi bir $j \in X_n \setminus \{1, k\}$ için

$$(k \ 1 \ j)\beta_1(j \ 1 \ k) = \beta_k$$

elde edilir. Böylece i) den $E(D_{n-1}^P) \subseteq \langle \{\alpha, \beta\} \cup A_n \rangle$ olup Lemma 2.6.8. ve Lemma 2.6.9. in bir sonucu olarak $PK_{n,n-1} \subseteq \langle \{\alpha, \beta\} \cup A_n \rangle$ olur. ■

Şimdi 3. Bölümdeki teoreme paralel olarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 4.3. $1 \leq r \leq n - 1$ ve $U \subseteq PK_{n,r}$ olsun. O zaman $PA_{n,r} = \langle U \cup A_n \rangle$ olması için gerek ve yeter koşul her bir $(n_1, \dots, n_r) \in \bigcup_{s=0}^{n-r} P_r(n-s)$ parçalanışı için $\text{copart}(\alpha) = (n_1, \dots, n_r; s)$ olacak şekilde bir $\alpha \in U$ olmasıdır. (Burada $s = |\text{codom}(\alpha)|$ dir.)

Özel olarak, eğer $U \subseteq K_{n,r}$ ise o zaman $A_{n,r} = \langle U \cup A_n \rangle$ olması için gerek ve yeter koşul her bir $p \in P_r(n)$ parçalanışı için $\text{part}(\alpha) = p$ olacak şekilde bir $\alpha \in U$ olmasıdır.

İspat: Lemma 4.1. ve Lemma 4.2. kullanılarak Teorem 3.3. e paralel olarak ispat tamamlanır. ■

Böylece Teorem 4.3. ü kullanarak aşağıdaki sonuçlar bulunur.

Sonuç 4.4. Her bir $1 \leq r \leq n - 1$ için

$$\text{rerank}(PA_{n,r}, A_n) = \sum_{s=0}^{n-r} p_r(n-s)$$

olur. ■

Sonuç 4.5. Her bir $1 \leq r \leq n - 1$ için

$$\text{rerank}(A_{n,r}, A_n) = p_r(n)$$

olur. ■

5. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ DOĞURAY KÜMELERİ

Bu bölümde D_r^P sınıfındaki elemanlarla ilgili bazı özellikler verip $T_{n,r}$ ve $PT_{n,r}$ yarıgruplarının görece idempotent doğuray kümelerini inceleyeceğiz.

5.1. D_r^P Sınıfı İle İlgili Bazı Özellikler

$\alpha \in P_n$ için $f(\alpha)$ sayısını aşağıdaki gibi tanımlayalım. $1 \leq r \leq n-1$ için

$$f(\alpha) = |\{i \in X_r : A_i \cap X_r = \emptyset\}|$$

şeklindedir. $\alpha \in D_r^P$ için, eğer $\alpha \in T_n$ ise $0 \leq f(\alpha) \leq r-1$, aksi halde yani $\alpha \in P_n \setminus T_n$ ise $0 \leq f(\alpha) \leq r$ olur.

Önerme 5.1.1. $1 \leq r \leq n-1$ için $\alpha \in D_r^P$ olsun. Eğer $\text{codom}(\alpha) \neq \emptyset$ ise $\text{codom}(\sigma^{-1}\alpha\sigma) \cap X_r = \emptyset$ ve $\text{copart}(\sigma^{-1}\alpha\sigma) = \text{copart}(\alpha)$ olacak şekilde bir $\sigma \in S_n$ vardır.

İspat: $\text{codom}(\alpha) \neq \emptyset$ ve $|\text{codom}(\alpha) \cap X_r| = t$ olduğunu kabul edelim. İspatı t üzerinden tümevarımla yapalım. $t = 0$ ise sonuç açıktır, σ birim permütasyon alınır. $t \geq 1$ ve $t-1$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. O halde bir $i \in A_{r+1} \cap X_r$ vardır ve böylece $A_j \cap X_r = \emptyset$ olacak şekilde bir $j \in X_r$ vardır. Şimdi herhangi bir $k \in A_j$ için $\mu = (i k) \in S_n$ transpozisyonunu ele alırsak

$$A_l\mu = \begin{cases} (A_j \setminus \{k\}) \cup \{i\} & l = j \\ (A_{r+1} \setminus \{i\}) \cup \{k\} & l = r + 1 \\ A_l & \text{diğer} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\mu^{-1}\alpha\mu = \begin{pmatrix} A_1\mu & \dots & A_j\mu & \dots & A_r\mu & A_{r+1}\mu \\ a_1\mu & \dots & a_j\mu & \dots & a_r\mu & - \end{pmatrix}$$

olup $|\text{codom}(\mu^{-1}\alpha\mu) \cap X_r| = t - 1$ olur. Üstelik her bir $1 \leq i \leq r + 1$ için $|A_i\mu| = |A_i|$ olduğundan $\text{copart}(\mu^{-1}\alpha\mu) = \text{copart}(\alpha)$ dır. Böylece tümevarım hipotezinden

$$\text{codom}(\rho^{-1}(\mu^{-1}\alpha\mu)\rho) \cap X_r = \text{codom}((\mu\rho)^{-1}\alpha(\mu\rho)) \cap X_r = \emptyset$$

olacak şekilde $\rho \in S_n$ vardır ve benzer şekilde, $\text{copart}((\mu\rho)^{-1}\alpha(\mu\rho)) = \text{copart}(\alpha)$ olur. ■

Önerme 5.1.2. $1 \leq r \leq n - 1$ için $\alpha \in D_r^P$ olsun. O zaman $f(\sigma^{-1}\alpha\sigma) = 0$ olacak şekilde bir $\sigma \in S_n$ vardır.

İspat: $1 \leq r \leq n - 1$ için $\alpha \in D_r^P$ olsun. Önerme 5.1.1. den $\text{codom}(\alpha) \cap X_r = \emptyset$ olduğunu yani $X_r \subseteq \text{dom}(\alpha)$ olduğunu kabul edebiliriz. $f(\alpha) = s$ alalım ve ispatı s üzerinden tümevarımla yapalım. $s = 0$ ise sonuç açıktır, σ birim permütasyon alınır. $s \geq 1$ ve $s - 1$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. O halde $s \geq 1$ olduğundan $A_l \cap X_r = \emptyset$ olacak şekilde bir $l \in X_r$ vardır ve dolayısıyla $|A_k \cap X_r| \geq 2$ olacak şekilde bir $k \in X_r$ vardır. Şimdi genelliği bozmaksızın $k < l$,

5.BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ DOĞURAY KÜMELERİ

Ebru YİĞİT

$b_1, b_2 \in A_k \cap X_r$ ve $b_3 \in A_l$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\mu = (b_1 b_3) \in S_n$ transpozisyonunu ele alırsak

$$A_i \mu = \begin{cases} (A_k \setminus \{b_1\}) \cup \{b_3\} & i = k \\ (A_l \setminus \{b_3\}) \cup \{b_1\} & i = l \\ A_i & \text{diğer} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\mu^{-1} \alpha \mu = \begin{pmatrix} A_1 \mu & \dots & A_k \mu & \dots & A_l \mu & \dots & A_r \mu & A_{r+1} \mu \\ a_1 \mu & \dots & a_k \mu & \dots & a_l \mu & \dots & a_r \mu & - \end{pmatrix}$$

olup $f(\mu^{-1} \alpha \mu) = s - 1$ olur. Böylece tümevarım hipotezinden $f(\rho^{-1}(\mu^{-1} \alpha \mu) \rho) = f((\mu \rho)^{-1} \alpha (\mu \rho)) = 0$ olacak şekilde bir $\rho \in S_n$ elemanı mevcut olup ispat tamamlanır. ■

Böylece eğer $\alpha \in D_r^P$ ($1 \leq r \leq n - 1$) ise her bir $1 \leq i \leq r$ için $i\lambda \in A_i \sigma$ olacak şekilde bir $\sigma \in S_n$ ve bir $\lambda \in S_r$ permütasyonlarının var olduğunu gösterdik.

Eğer $\alpha \in E(D_r^P)$ ise her bir $\sigma \in S_n$ için $\sigma^{-1} \alpha \sigma \in E(D_r^P)$ olduğunu hatırlatalım.

Herhangi bir $\alpha \in D_r^P$ ($1 \leq r \leq n - 1$) için açıkca $\text{im}(\alpha \lambda) = X_r$ olacak şekilde bir $\lambda \in S_n$ vardır.

Örneğin $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in D_2^T$ için $\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$ alınırsa $\alpha \lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ yani $\text{im}(\alpha \lambda) = X_2$ olur. Şimdi aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 5.1.3. $1 \leq r \leq n - 1$ için $\alpha \in D_r^P$ olsun. O zaman $\text{im}(\beta\alpha\gamma) = X_r$ ve $\beta\alpha\gamma \in E(D_r^P)$ olacak şekilde $\beta, \gamma \in S_n$ vardır.

İspat: Önce $f(\alpha) = 0$ durumunu ele alalım. Bu durumda her bir $1 \leq i \leq r$ için $A_i \cap X_r = \{i\lambda\}$ olacak şekilde bir $\lambda \in S_r$ vardır. $X_n \setminus \text{im}(\alpha) = \{a_{r+1}, \dots, a_n\}$ olmak üzere $\mu \in S_n$ elemanını

$$a_i\mu = \begin{cases} i\lambda & 1 \leq i \leq r \\ i & i \geq r+1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece her bir $1 \leq i \leq r$ için

$$A_i(\alpha\mu) = (A_i\alpha)\mu = a_i\mu = i\lambda$$

olup $\text{im}(\alpha\mu) = X_r$ olur. Üstelik her bir $1 \leq i \leq r$ için $i\lambda \in A_i$ olduğundan $\alpha\mu \in E(D_r^P)$ olur. Şimdi $f(\alpha) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman Önerme 5.1.2. den $f(\sigma^{-1}\alpha\sigma) = 0$ olacak şekilde bir $\sigma \in S_n$ vardır. Böylece ispat, $f(\alpha) = 0$ durumuna benzer olarak tamamlanır. ■

5.2. $K_{n,r} \cup S_n$ Yarıgrubunun Doğuray Kümeleri

$E(D_r^T)$ kümesinin, görüntü kümesi sadece X_r den oluşan elemanlarının kümesini $E^\#(D_r^T)$ ile gösterelim. Yani

$$E^\#(D_r^T) = \{\alpha \in E(D_r^T) : \text{im}(\alpha) = X_r\}$$

olur.

Teorem 5.2.1. $1 \leq r \leq n-1$ için $\alpha \in D_r^T$ olsun. O zaman $\text{part}(\alpha) = \text{part}(\gamma)$, $\alpha = \beta\gamma\lambda$ ve $|1\gamma^{-1}| \geq |2\gamma^{-1}| \geq \dots \geq |r\gamma^{-1}| \geq 1$ olacak şekilde $\beta, \lambda \in S_n$ ve $\gamma \in E^\#(D_r^T)$ vardır.

İspat: $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_r \\ a_1 & \dots & a_r \end{pmatrix} \in D_r^T$ olsun. Genelliği bozmaksızın $|A_1| \geq |A_2| \geq \dots \geq |A_r| \geq 1$ olduğunu kabul edelim. Her bir $1 \leq i \leq r$ için $|A_i| = k_i$ alalım ve X_n nin $B_1, \dots, B_r$ alt kümelerini

$$\begin{aligned} B_1 &= \{1\} \cup \{r+1, r+2, \dots, r+k_1-1\} \\ B_2 &= \{2\} \cup \{r+k_1, r+k_1+1, \dots, r+k_1+k_2-2\} \\ &\vdots \\ B_r &= \{r\} \cup \{r+k_1+\dots+k_{r-1}-(r-2), \dots, n\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_r)$, X_n nin bir r li sıralı parçalanışı olup her bir $1 \leq i \leq r$ için $|A_i| = |B_i|$ olduğundan $(A_1, \dots, A_r)$ ile $\mathcal{B}$, X_n nin aynı tip parçalanışı olur. Dolayısıyla her bir $1 \leq i \leq r$ için $A_i\beta = B_i$ olacak şekilde bir $\beta \in S_n$ permütasyonu vardır. Şimdi γ ve λ yı, $X_n \setminus \text{im}(\alpha) = \{a_{r+1}, \dots, a_n\}$ olmak üzere

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix}$$

ve

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ a_1 & \dots & a_r & a_{r+1} & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

5.BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ DOĞURAY KÜMELERİ

Ebru YİĞİT

şeklinde tanımlayalım. O zaman $\text{part}(\alpha) = \text{part}(\gamma)$, $\lambda \in S_n$ ve her bir $1 \leq i \leq r$ için $i \in B_i$ olduğundan $\gamma \in E^\#(D_r^T)$ olduğu açıktır. Her bir $1 \leq i \leq r$ için $|i\gamma^{-1}| = |B_i| = k_i$ ve $k_1 \geq \dots \geq k_r \geq 1$ olduğundan $|1\gamma^{-1}| \geq |2\gamma^{-1}| \geq \dots \geq |r\gamma^{-1}| \geq 1$ olur. Üstelik her bir $1 \leq i \leq r$ için

$$A_i(\beta\gamma\lambda) = (A_i\beta)\gamma\lambda = (B_i\gamma)\lambda = i\lambda = a_i$$

olup $\alpha = \beta\gamma\lambda$ olur. ■

Bu teoremden D_r^T yi doğurmak için n nin her bir parçalanışını temsil eden bir eleman (ispattaki γ , γ yı da $B_1, \dots, B_r$ alt kümelerini seçerek belirledik.) seçmenin yeterli olduğunu gösterdik. Şimdi teoremin ispatındaki $B_1, \dots, B_r$ kümelerinden kaç tane olduğunu ve $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_r)$ kümesinin kaç farklı şekilde seçilebileceğini hesaplayalım.

$$B_1 = \{1\} \cup \{r+1, r+2, \dots, r+k_1-1\} = \{1\} \cup C_1 \text{ ise}$$

$$|C_1| = k_1 - 1 \text{ olup } \binom{n-r}{k_1-1} = c_1$$

tane farklı C_1 kümesi vardır.

$$B_2 = \{2\} \cup \{r+k_1, r+k_1+1, \dots, r+k_1+k_2-2\} = \{2\} \cup C_2 \text{ ise}$$

$$|C_2| = k_2 - 1 \text{ olup } \binom{n-r-(k_1-1)}{k_2-1} = c_2$$

tane farklı C_2 kümesi vardır.

Böyle devam edersek,

$$B_{r-1} = \{r-1\} \cup C_{r-1} \text{ ise } |C_{r-1}| = k_{r-1} - 1 \text{ olup}$$

$$\binom{n-r-(k_1-1)-\dots-(k_{r-2}-1)}{k_{r-1}-1} = c_{r-1}$$

tane farklı C_{r-1} kümesi vardır.

$$B_r = \{r\} \cup C_r \text{ ise } |C_r| = k_r - 1 \text{ olup}$$

$$\binom{n-r-(k_1-1)-\dots-(k_{r-1}-1)}{k_r-1} = c_r$$

tane farklı C_r kümesi vardır.

Dolayısıyla $B_1, \dots, B_r$ kümelerinden kaç tane olduğunu bulmuş olduk.

Böylece $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_r)$ nin farklı seçimlerinin sayısı

$$c_1 c_2 \dots c_{r-1} c_r = \frac{(n-r)!}{(k_1-1)! (k_2-1)! \dots (k_r-1)!} = \binom{n-r}{k_1-1, k_2-1, \dots, k_r-1}$$

olur.

Teorem 5.2.2. $1 \leq r \leq n-1$ için

$$\text{idrerank}(T_{n,r}, S_n) = p_r(n)$$

dir.

İspat: Her bir $(n_1, \dots, n_r) \in P_r(n)$ parçalanışı için

$$|1\mu_{(n_1, \dots, n_r)}^{-1}| = n_1, \dots, |r\mu_{(n_1, \dots, n_r)}^{-1}| = n_r$$

olacak şekilde herhangi bir $\mu_{(n_1, \dots, n_r)} \in E^\#(D_r^T)$ idempotenti seçelim ve bu tür elemanların kümesini

$$E = E_{n,r,0} = \{\mu_{(n_1, \dots, n_r)} : (n_1, \dots, n_r) \in P_r(n)\}$$

ile gösterelim.

Teorem 5.2.1. den her bir $\alpha \in D_r^T$ için $\alpha = \beta\gamma\lambda$ ve $|1\gamma^{-1}| \geq |2\gamma^{-1}| \geq \dots \geq |r\gamma^{-1}| \geq 1$ olacak şekilde $\beta, \lambda \in S_n$ ve $\gamma \in E^\#(D_r^T)$ vardır. Eğer $\gamma \in E$ ise $\alpha \in \langle E \cup S_n \rangle$ olduğu açıktır. Aksi halde, yani

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix} \notin E$$

ise o zaman her bir $1 \leq i \leq r$ için $|B_i| = |A_i|$ olacak şekilde bir

$$\mu = \mu_{(n_1, \dots, n_r)} = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix} \in E$$

vardır. Bu durumda her bir $1 \leq i \leq r$ için $B_i\delta = C_i$ olacak şekilde $\delta \in S_n$ elemanı vardır. O halde $\alpha = \beta\gamma\lambda = \beta\delta\mu\lambda$ olup $\alpha \in \langle E \cup S_n \rangle$ elde edilir. Böylece $E \cup S_n$ kümesi D_r^T yi doğurur. O zaman Lemma 2.6.5. den $E \cup S_n$ kümesi $T_{n,r}$ nin bir doğuray kümesi olur. O halde

$$\text{idrerank}(T_{n,r}, S_n) \leq p_r(n)$$

olduğu elde edilir.

$K_{n,r}$, $T_{n,r}$ nin bir ideali olduğundan $T_{n,r}$ nin herhangi bir doğuray kümesinin, S_n nin bir doğuray kümesini içermek zorunda olduğunu hatırlatalım. Böylece $1 \leq r \leq n-1$ için eğer $A \subseteq T_{n,r}$ alt kümesi, $T_{n,r}$ nin bir doğuray kümesi ise o zaman $\langle C \rangle = S_n$ ve $\langle B \cup C \rangle = \langle B \cup S_n \rangle = T_{n,r}$ olacak şekilde $B \subseteq D_r^T \cap A$ ve $C \subseteq S_n \cap A$ alt kümeleri vardır.

$A \subseteq E(D_r^T)$ olmak üzere $T_{n,r} = \langle A \cup S_n \rangle$ olsun. O zaman her bir $\gamma \in E^\#(D_r^T)$ için

$$\gamma = \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \dots \beta_m \alpha_{m+1}$$

olacak şekilde $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1} \in S_n$ ve $\beta_1, \dots, \beta_m \in A$ vardır. Eğer

$$\lambda = \alpha_1 \beta_1 \text{ ve } \xi = \alpha_2 \beta_2 \dots \beta_m \alpha_{m+1}$$

olarak alınırsa $\lambda \in D_r^T$ ve $\xi \in D_r^T \cup S_n$ olur. $\xi \in S_n$ durumunda

$$\text{part}(\gamma) = \text{part}(\alpha_1 \beta_1 \xi) = \text{part}(\beta_1)$$

olduğu açıktır. Eğer $\xi \in D_r^T$ ise o zaman Önerme 3.1. den $\ker(\lambda \xi) = \ker(\lambda)$ ve böylece

$$\text{part}(\gamma) = \text{part}(\lambda \xi) = \text{part}(\lambda) = \text{part}(\beta_1)$$

olur. O halde her bir $\gamma \in E^\#(D_r^T)$ için $\text{part}(\gamma) = \text{part}(\beta_1)$ olacak şekilde bir $\beta_1 \in A$ elemanı vardır, yani her bir $p \in P_r(n)$ parçalanışı için $\text{part}(\beta_1) = p$ olacak şekilde bir $\beta_1 \in A$ elemanı var olup

$$\text{idrerank}(T_{n,r}, S_n) \geq p_r(n)$$

elde edilir. O halde

$$\text{idrerank}(T_{n,r}, S_n) = p_r(n)$$

dir. ■

5.3. $PK_{n,r} \cup S_n$ Yarıgrubunun Doğuray Kümeleri

Birinci kısımda verdiğimiz lemma ve önermeleri de kullanarak $PK_{n,r} \cup S_n$ yarıgrubunun görece idempotent rankını bulacağız.

$E(D_r^P)$ kümesinin, görüntü kümesi sadece X_r den oluşan elemanlarının kümesini $E^\#(D_r^P)$ ile gösterelim. Yani

$$E^\#(D_r^P) = \{\alpha \in E(D_r^P) : \text{im}(\alpha) = X_r\}$$

olur.

Önerme 5.3.1. $1 \leq r \leq n-1$ için $\alpha \in D_r^P$ olsun. O zaman $\alpha\beta \in E(D_r^P)$ olacak şekilde bir $\beta \in S_n$ vardır.

İspat: $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_r & A_{r+1} \\ a_1 & \dots & a_r & - \end{pmatrix} \in D_r^P$ olsun. O zaman her bir $1 \leq i \leq r$ için A_i den herhangi bir eleman seçelim ve bu elemana b_i diyelim. $X_n \setminus \text{im}(\alpha) = \{a_{r+1}, \dots, a_n\}$ ve $X_n \setminus \{b_1, \dots, b_r\} = \{b_{r+1}, \dots, b_n\}$ olmak üzere $\beta: X_n \rightarrow X_n$ dönüşümünü her bir $1 \leq i \leq n$ için $a_i\beta = b_i$ şeklinde tanımlayalım. Böylece $\beta \in S_n$, her bir $1 \leq i \leq r$ için $A_i(\alpha\beta) = (A_i\alpha)\beta = a_i\beta = b_i$ ve $b_i \in A_i$ olup $\alpha\beta \in E(D_r^P)$ olur. ■

Başka bir deyişle $1 \leq r \leq n-1$ için $\alpha \in D_r^P$ ise $\alpha = \gamma\mu$ olacak şekilde bir $\mu \in S_n$ permütasyonu ve bir $\gamma \in E(D_r^P)$ idempotenti vardır.

Teorem 5.3.2. $1 \leq r \leq n-1$ için $\alpha \in D_r^P$ ve $|\text{codom}(\alpha)| = s \geq 1$ olsun. O zaman $\alpha = \beta\gamma\lambda$, $\text{dom}(\gamma) = \{1, \dots, n-s\}$ ve $|1\gamma^{-1}| \geq |2\gamma^{-1}| \geq \dots \geq |r\gamma^{-1}| \geq 1$ olacak şekilde $\beta, \lambda \in S_n$ ve $\gamma \in E^\#(D_r^P)$ vardır.

İspat: $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_r & A_{r+1} \\ a_1 & \dots & a_r & - \end{pmatrix} \in D_r^P$ ve $|\text{codom}(\alpha)| = |A_{r+1}| = s \geq 1$ olsun.

Genelliği bozmaksızın $|A_1| \geq |A_2| \geq \dots \geq |A_r| \geq 1$ olduğunu kabul edelim. O zaman X_n nin $B_1, \dots, B_{r-1}$ alt kümelerini Teorem 5.2.1. in ispatındaki gibi, yani

$$\begin{aligned} B_1 &= \{1\} \cup \{r+1, r+2, \dots, r+k_1-1\} \\ B_2 &= \{2\} \cup \{r+k_1, r+k_1+1, \dots, r+k_1+k_2-2\} \\ &\vdots \\ B_{r-1} &= \{r-1\} \cup \{r+k_1+\dots+k_{r-2}-(r-3), \dots, r+k_1+\dots+k_{r-1}-(r-1)\} \end{aligned}$$

ve X_n nin B_r, B_{r+1} alt kümelerini de

$$\begin{aligned} B_r &= \{r\} \cup \{r+k_1+\dots+k_{r-1}-(r-2), \dots, n-s\} \\ B_{r+1} &= \{n-s+1, \dots, n\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Her bir $1 \leq i \leq r + 1$ için $|A_i| = |B_i|$ olduğundan

$$A_i \beta = B_i$$

olacak şekilde bir $\beta \in S_n$ permütasyonu vardır. Üstelik $\lambda \in S_n$ permütasyonu Teorem 5.2.1. in ispatındaki gibi yani, $X_n \setminus \text{im}(\alpha) = \{a_{r+1}, \dots, a_n\}$ olmak üzere

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ a_1 & \dots & a_r & a_{r+1} & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

olsun ve $\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_r & B_{r+1} \\ 1 & \dots & r & - \end{pmatrix}$ alalım. O halde her bir $1 \leq i \leq r$ için $i \in B_i$ olduğundan $\gamma \in E^\#(D_r^P)$ olduğu açıktır ve böylece Teorem 5.2.1. in ispatına paralel olarak $\alpha = \beta\gamma\lambda$, $\text{dom}(\gamma) = \{1, \dots, n-s\}$ ve $|1\gamma^{-1}| \geq |2\gamma^{-1}| \geq \dots \geq |r\gamma^{-1}| \geq 1$ elde edilir. ■

Teorem 5.3.3. Her bir $1 \leq r \leq n-1$ için

$$\text{idrerank}(PT_{n,r}, S_n) = \sum_{s=0}^{n-r} p_r(n-s)$$

dir.

İspat: $\alpha \in D_r^P$ ve $|\text{codom}(\alpha)| = s$ olsun. Eğer $s = 0$ ise bu durumda $\alpha \in T_n$ olup Teorem 5.2.2. nin ispatından $p = (n_1, \dots, n_r) \in P_r(n)$ ve $E = E_{n,r,0} = \{\mu_p : p \in P_r(n)\}$ olmak üzere $\alpha \in \langle E \cup S_n \rangle$ olur.

5.BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ DOĞURAY KÜMELERİ

Ebru YİĞİT

Şimdi $1 \leq s \leq n - r$ olduğunu kabul edelim. O zaman her bir $(n_1, \dots, n_r) \in P_r(n - s)$ parçalanışı için

$$|1\xi_{(n_1, \dots, n_r:s)}^{-1}| = n_1, \dots, |r\xi_{(n_1, \dots, n_r:s)}^{-1}| = n_r \text{ ve } |\text{codom}(\xi)| = s$$

olacak şekilde herhangi bir $\xi = \xi_{(n_1, \dots, n_r:s)} \in E^\#(D_r^P)$ idempotenti seçelim. Her bir $1 \leq s \leq n - r$ için bu tür elemanların kümesini

$$E_{n,r,s} = \{\xi_{(n_1, \dots, n_r:s)} : (n_1, \dots, n_r) \in P_r(n - s)\}$$

ile gösterelim ve $E_{n,r,s}$ kümesi $P_n \setminus T_n$ nin bir alt kümesidir. Böylece

$$E' = \bigcup_{s=0}^{n-r} E_{n,r,s}$$

kümesini tanımlayalım.

Teorem 5.3.2. den $\alpha = \beta\gamma\lambda$, $\text{dom}(\gamma) = \{1, \dots, n - s\}$ ve $|1\gamma^{-1}| \geq |2\gamma^{-1}| \geq \dots \geq |r\gamma^{-1}| \geq 1$ olacak şekilde $\beta, \lambda \in S_n$ ve $\gamma \in E^\#(D_r^P)$ vardır. Eğer $\gamma \in E_{n,r,s}$ ise $\alpha \in \langle E' \cup S_n \rangle$ olduğu açıktır. Aksi halde, yani

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_r & B_r \\ 1 & \dots & r & - \end{pmatrix} \notin E_{n,r,s}$$

ise o zaman her bir $1 \leq i \leq r + 1$ için $|B_i| = |A_i|$ olacak şekilde bir

$$\xi = \xi_{(n_1, \dots, n_r:s)} = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_r & C_{r+1} \\ 1 & \dots & r & - \end{pmatrix} \in E_{n,r,s}$$

vardır. Bu durumda her bir $1 \leq i \leq r+1$ için $B_i\delta = C_i$ olacak şekilde $\delta \in S_n$ elemanı vardır. O halde $\alpha = \beta\gamma\lambda = \beta\delta\xi\lambda$ olup $\alpha \in \langle E' \cup S_n \rangle$ elde edilir. Böylece $E' \cup S_n$ kümesi D_r^P yi doğurur. O zaman Lemma 2.6.8. ve Lemma 2.6.9. in bir sonucu olarak $E' \cup S_n$ kümesi $PT_{n,r}$ nin bir doğuray kümesidir. O halde

$$\text{idrerank}(PT_{n,r}, S_n) \leq \sum_{s=0}^{n-r} p_r(n-s)$$

olduğu elde edilir.

$PK_{n,r}$, $PT_{n,r}$ nin bir ideali olduğundan $PT_{n,r}$ nin herhangi bir doğuray kümesinin, S_n nin bir doğuray kümesini içermek zorunda olduğunu hatırlatalım. Böylece $1 \leq r \leq n-1$ için eğer $A \subseteq PT_{n,r}$ alt kümesi, $PT_{n,r}$ nin bir doğuray kümesi ise o zaman $\langle C \rangle = S_n$ ve $\langle B \cup C \rangle = \langle B \cup S_n \rangle = PT_{n,r}$ olacak şekilde $B \subseteq D_r^P \cap A$ ve $C \subseteq S_n \cap A$ alt kümeleri vardır.

$A \subseteq E(D_r^P)$ olmak üzere $PT_{n,r} = \langle A \cup S_n \rangle$ olsun. O zaman her bir $\gamma \in E^\#(D_r^P)$ için

$$\gamma = \alpha_1\beta_1\alpha_2 \dots \beta_m\alpha_{m+1}$$

olacak şekilde $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1} \in S_n$ ve $\beta_1, \dots, \beta_m \in A$ vardır. Eğer

$$\lambda = \alpha_1\beta_1 \text{ ve } \xi = \alpha_2\beta_2 \dots \beta_m\alpha_{m+1}$$

olarak alınırsa $\lambda \in D_r^P$ ve $\xi \in D_r^P \cup S_n$ olur. $\xi \in S_n$ ise

$$\text{copart}(\gamma) = \text{copart}(\alpha_1\beta_1\xi) = \text{copart}(\beta_1)$$

olduğu açıktır. Eğer $\xi \in D_r^P$ ise o zaman Önerme 3.1. den $\ker(\lambda\xi) = \ker(\lambda)$ ve $\text{codom}(\lambda\xi) = \text{codom}(\lambda)$ olup

$$\text{copart}(\gamma) = \text{copart}(\lambda\xi) = \text{copart}(\lambda) = \text{copart}(\beta_1)$$

olur. O halde her bir $\gamma \in E^\#(D_r^P)$ için $\text{copart}(\gamma) = \text{copart}(\beta_1)$ olacak şekilde bir $\beta_1 \in A$ elemanı vardır. Böylece her bir $0 \leq s \leq n - r$ ve her bir $(n_1, \dots, n_r) \in P_r(n - s)$ için $\text{copart}(\beta_1) = (n_1, \dots, n_r)$ olacak şekilde bir $\beta_1 \in A$ elemanı var olup

$$\text{idrerank}(PT_{n,r}, S_n) \geq \sum_{s=0}^{n-r} p_r(n - s)$$

elde edilir. O halde

$$\text{idrerank}(PT_{n,r}, S_n) = \sum_{s=0}^{n-r} p_r(n - s)$$

dir. ■

5.BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ DOĞURAY KÜMELERİ

Ebru YİĞİT



KAYNAKLAR

- Ayık, G., Ayık, H., Howie, J.M., 2005. On factorisations and generators in transformation semigroups. *Semigroup Forum*, 70(2): 225-237.
- Ayık, G., Ayık, H., Ünlü, Y., Howie, J.M., 2005. The structure of elements in finite full transformation semigroups. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 70(1): 69-74.
- Ayık, G., Ayık, H., Howie, J.M., Ünlü, Y., 2008. Rank properties of the semigroup of singular transformations on a finite set. *Comm. Algebra*, 36: 2581-2587.
- Ayık, G., Ayık, H., Bugay, L., Kelekci, O., 2013. Generating sets of finite singular transformation semigroups. *Semigroup Forum*, 86:59-66.
- Ayık, H., Bugay, L., 2015. Generating sets of finite transformation semigroups $PK(n, r)$ and $K(n, r)$. *Comm. Algebra*, 43:412-422.
- Catarino, P., Levi, I., 2008. D_n -normal semigroups of transformations. *Semigroup Forum*, 76 (2):368–378.
- Cauchy, A. L., 1815. Memoire ur le nombre des valeurs quune fonction peut acquerir, lorsqu on y permute de toutes les manieres possibles les quantites qu'elle renferme, *J. Ecole Polytech*, 10:1-28.
- East, J., 2014. Infinite partition monoids. *Internat. J. Algebra Comput.*, 24:429-460.
- Evseen, A. E., Podran, N. E., 1972. Semigroups of transformations generated by idempotents of given defect. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Math.* 117:44-50.
- Gauss, C. F., 1801. *Disquisitiones Arithmeticae*, Apud G.Fleischer, Lipsiae.
- Ganyushkin, O., Mazorchuk, V., 2009. Classical finite transformation semigroups, An introduction. *Algebra and Applications*, 9. Springer-Verlag London, Ltd., London, 314s.
- Garba, G. U., 1990. Idempotents in partial transformation semigroups. *Proc. Royal Soc. Edinburg*. 116A:359-366.
- Gomes, G. M. S., Howie, J. M., 1987. On the ranks of certain finite semigroups of transformations. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 101: 395-403.

- Hardy, G. M., Wright, E. M., 1979. An introduction to the theory of numbers. Fifth Edition, Oxford University Press.
- Higgins, P.M., 1992. Techniques of semigroup theory. With a foreword by G. B. Preston. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 258s.
- _____, 1993. Combinatorial results for semigroups of order-preserving mappings. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 113:281-296.
- _____, 2012. The product of the idempotents and $\mathcal{H}$ –class of the finite full transformation semigroup. Semigroup Forum, 84:216-228.
- Howie, J. M., 1966. The subsemigroup generated by the idempotents of a full transformation semigroup. J. London Math. Soc., 41:707-716.
- _____, 1978. Idempotent generators in finite full transformation semigroups. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect., 81A:317-323.
- _____, 1980. Products of idempotents in finite full transformation semigroups. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect., 86A:243-254.
- _____, 1995. Fundamentals of semigroup theory. Oxford University Press, New York, 351s.
- Howie, J. M., Mcfadden, R. B., 1990. Idempotent rank in finite full transformation semigroups. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 114(3-4): 161-167.
- Howie, J. M., Lusk, Ewing L., Mcfadden, R. B., 1990. Combinatorial results relating to products of idempotents in finite full transformation semigroups. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 115:289-299.
- Howie, J. M., Ruskuc, N., Higgins, P. M. 1998. On relative ranks of full transformation semigroups. Comm. Algebra, 26(3):733–748.
- Howie, J. M., Marques Ribeiro, M. I., 1999. Rank properties in finite semigroups. Comm. Algebra, 27:5333-5347.
- _____, 2000. Rank properties in finite semigroups II: the small rank and the large rank. Southeast Asian Bull. Mat., 24: 231-237.

- Kearnes, K. A., Szendrei, A. and Wood, J., 2001. Generating singular transformations. *Semigroup Forum*, 63: 441-448.
- Levi, I., 1998. Green's relations and G -semigroups. *Math. Japon*, 47(2):305-310.
- _____, 1999. On groups associated with transformation semigroups. *Semigroup Forum*, 59(3): 342-353.
- _____, 2000. Congruences on normal transformation semigroups. *Math. Japon*, 52(2): 247-261.
- Levi, I., Mcalister, D. B., Mcfadden, R. B., 2000. Groups associated with finite transformation semigroups. *Semigroup Forum*, 61(3):453-467.
- _____, 2001. A_n -normal semigroups. *Semigroup Forum*, 62(2): 173-177.
- Levi, I., Mcfadden, R. B., 1994. S_n -normal semigroups. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 37:471-476.
- Levi, I., Seif, S., 1998. Finite normal semigroups. *Semigroup Forum* 57(1):69-74.
- Sanwong, J., 2011. The regular part of a semigroup of transformations with restricted range. *Semigroup Forum* 83(1), 134-146.
- Sommanee W., Sanwong, J., 2013. Rank and idempotent rank of finite full transformation semigroups with restricted range. *Semigroup Forum*. Online first article.
- Vagner, V. V., 1956. Representations of ordered semigroups. *Mat. Sb. (N.S.)* 38: 203-240. Translated in 1964 *Amer. Math. Soc. Transl.* 36:295-336.
- Yiğit, E. Ayık, G. and Ayık, H., 2017. Minimal relative generating sets of some partial transformation semigroups. *Comm. Algebra*, 45:1239-1245.



ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında İzmir-Foça'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Foça ve Menemen'de tamamladı. 2005 yılında girdiği Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Teorik Matematik Ağırlıklı Matematik Lisans Öğretim Programından 2009 yılında bölüm üçüncüsü olarak mezun oldu. Aynı yıl Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı ve 2011 yılında matematik yüksek lisans derecesini aldı. Daha sonra Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne araştırma görevlisi olarak atandı ve Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora öğrenimine başladı.