

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI



**DÖRDÜNCÜ DERECE DEN AYRIK ZAMANLI DOĞRUSAL
ZAMANLA DEĞİŞEN SİSTEMLERİN ARDIŞIK İKİNCİ
DERECE DEN DEĞİŞMELİ ÇİFTLERE AYRIŞIMI**

Yüksek Lisans Tezi

Türkay ER

Danışman

Prof. Dr. Mehmet Emir KÖKSAL

SAMSUN
2023

TEZ KABUL VE ONAYI

Türkey ER tarafından, Prof. Dr. Mehmet Emir KÖKSAL danışmanlığında hazırlanan “DÖRDÜNCÜ DERECEDEN AYRIK ZAMANLI DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞEN SİSTEMLERİN ARDIŞIK İKİNCİ DERECEDEN DEĞİŞMELİ ÇİFTLERE AYRIŞIMI” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 14.9.2023 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	Sonuç
Başkan	Prof. Dr. Mehmet Emir KÖKSAL Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	☐ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Mehmet ŞENOL Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	☐ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Ergin BAYRAM Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	☐ Kabul ☐ Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

Prof. Dr. Ahmet TABAK
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Yüksek Lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Etik Kurul Gerekli mi?

Evet ☐ (Gerekli ise ekler kısmına ekleyiniz)

Hayır ☒

20/06/2023
Türkay ER

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı: DÖRDÜNCÜ DERECEDEN AYRIK ZAMANLI DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞEN SİSTEMLERİN ARDIŞIK İKİNCİ DERECEDEN DEĞİŞMELİ ÇİFTLERE AYRIŞIMI

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 20.06.2023 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 16

Tek kaynak oranı : % 2 çıkmıştır.

20/06/2023
Prof. Dr. Mehmet Emir KÖKSAL

ÖZET

DÖRDÜNCÜ DERECEDEDEN AYRIK ZAMANLI DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞEN SİSTEMLERİN ARDIŞIK İKİNCİ DERECEDEDEN DEĞİŞMELİ ÇİFTLERE AYRIŞIMI

Türkay ER

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans, Haziran/2023

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Emir KÖKSAL

Bu tezde, dördüncü mertebeden ayrik zamanlı doğrusal zamanla değişen sistemler ele alınmıştır. Bu sistemler mertebeden bir lineer fark denklemi ile tanımlanmıştır. Dördüncü mertebeden ayrik zamanlı doğrusal zamanla değişen sistemlerin komütativite koşulları sunulmuştur. Tez konusunun dayanıklılık, hassasiyet ve kararlılık gibi özellikleri içeren mühendislik uygulaması açısından önemi belirtilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Komütativite, Fark Denklemleri, Ayrik Zamanlı Sistemler, Ayrıştırma

ABSTRACT

DECOMPOSITION OF A FOURTH-ORDER DISCRETE TIME LINEAR TIME VARYING SYSTEM BY CASCADED SECOND-ORDER COMMUTATIVE PAIRS

Türkay ER

Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics

Master, June/2023

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Emir KÖKSAL

In this thesis, fourth-order discrete-time linear time-varying systems are considered. These systems are described by an order one linear difference equation. Commutativity conditions for fourth-order discrete-time linear time-varying systems are presented. The importance of the thesis topic in terms of engineering application including properties such as robustness, sensitivity and stability is emphasized.

Keywords: Commutativity, Difference Equations, Discrete Time Systems, Decomposition

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca sabırlı rehberliği, değerli önerileri ve sürekli teşvikleriyle tezimin başarılı bir şekilde tamamlanmasını sağlayan, ilgisi, bilgeliği ve desteğini benden hiç esirgemeyen ülkemizin kıymetli hocalarından Prof. Dr. Mehmet Emir Köksal hocama teşekkürlerimi sunarım.

Hiç aklımda yokken beni bu yola iterek lisansüstü eğitimine başlamakla vesile olan Dr. Fırat Yerlikaya'ya ve Dr. Erdem Toksoy'a ve desteğini bir saniye bile esirgemeyen kıymetli bölüm başkanımız Prof. Dr. Emin Kasap'a derin şükranlarımı sunuyorum. Eğitim sürecim boyunca her ihtiyacım olduğunda yardımına koşan bölümümüzün değerli sekreteri Yeşim Günay ablamıza da teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olan canım aileme de sevgilerimle.

Haziran 2023

Türkay ER

İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAYI	i
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	ii
TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. BİRİNCİ, İKİNCİ VE ÜÇÜNCÜ DERECEDEKİ SİSTEMLERİN KOMÜTATİVİTESİ.....	6
2.1. Birinci Dereceden Sistemlerin Komütativitesi.....	6
2.2. İkinci Dereceden Sistemlerin Komütativitesi.....	8
2.3. Üçüncü Dereceden Sistemlerin Komütativitesi.....	11
3. AYRIŞTIRMA.....	25
3.1. İkinci Dereceden Sistemlerin Ayrıştırılması.....	25
3.2. Üçüncü Dereceden Sistemlerin Ayrıştırılması.....	34
4. DÖRDÜNCÜ DERECEDEKİ SİSTEMLERİN AYRIŞTIRMA.....	47
4.1. Dördüncü Dereceden Sistemlerin Komütativitesi.....	47
4.2. Dördüncü Dereceden Sistemlerin İkinci Dereceden Alt Sistemlere Ayrıştırılması...132	
4.3. İkinci Dereceden Bir A Sisteminin Dördüncü Dereceden Bir C Sisteminin Ayrıştırılmış Bir Parçasının Olabilirliği ve C Sisteminin Bulunması	133
5. SONUÇLAR.....	135
KAYNAKÇA.....	136
ÖZGEÇMİŞ	138

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. A ve B alt sistemlerinin ardışık bağlantıları.....	3
---	---



1. GİRİŞ

Çoğu mühendislik sistemi, daha temel sistemlerin sıralı olarak birbirine bağlanmasıyla oluşturulmaktadır. Dijital sistemlerin tasarımı söz konusu olduğunda, alt sistemlerin bağlanma sırası sistemin verimliliğini belirleyen kritik bir faktördür. Özellikle, alt sistemlerin bağlanma sırasını değiştirmenin sistem performansına olumlu etkileri olabilir (Nguyen vd, 2015; Arnol vd, 2017; Lyons, 2011). Bu bağlamda, alt sistemlerin bağlanma sırasının belirlenmesinde hassasiyet, kararlılık, gürültüye duyarlılık ve sağlamlık gibi faktörlerin dikkate alınması gerekmektedir. Bu faktörler, toplam sistem performansını etkileyen kritik yönlerdir. Haberleşme sistemleri gibi günümüz toplumunda büyük önem taşıyan sistem ve cihazların tasarımı, sıralı devrelerin kullanımına dayandığından, komütativitenin elektrik ve elektronik mühendisliği açısından pratik uygulamalar açısından önemi yadsınamaz. Bu yüzden komütativite alanında yapılan geliştirme çalışmalarının, toplam sistem performansını artırmaya yönelik yenilikler getirebileceği öngörülmektedir.

Komütativite konusu, ilk olarak 1977 yılında birinci dereceden zamanla değişen sıfır başlangıç koşullu analog sistemler üzerinde incelenmiştir (Marshall, 1977). Bu çalışmanın sonuçları, daha yüksek dereceli analog sistemler için sıfır olmayan başlangıç koşulları da dahil olmak üzere 1980'lerde genelleştirilmiştir (Koksal, 1982; Koksal, 1988). Komütative hakkındaki (Koksal ve Koksal, 2013, 2015; Koksal, 2019) çalışmalarının haricindeki literatürde yer alan diğer çalışmaların analog sistemlerin komütativitesi ile ilgili olduğu gözlemlenmiştir. Ancak, günümüzde dijital sistemlerin hızla yaygınlaşmasıyla birlikte (Nguven vd, 2013; Phat vd, 2011; Parlakçı vd, 2014; Shen vd, 2013; Tabataeipour, 2013; Yao vd, 2014; Zhang vd, 2014; Zhong vd, 2013), dijital sistemlerin komütativitesi hakkında yeterli çalışmalar yapılmadığı görülmektedir. Komütativite konusunda yapılan çalışmalar genellikle analog sistemler üzerine odaklanmıştır. Zamanla değişen doğrusal sistemlerin komütativitesi için genel koşullar belirlenmiş olsa da literatürde mevcut olan ve çoğu fiziksel olayları tanımlayan fark denklemlerinin özellikleri komütativite açısından yeterince araştırılmamıştır ve somut sonuçlar ortaya konulmamıştır. Bu nedenle, dijital sistemlerin komütativitesi üzerine daha fazla çalışma yapılması ve bu alanda literatürdeki boşluğun doldurulması önemlidir.

Çoğu mühendislik sistemi, birbirini etkileyen alt sistemlerin ardışık veya zincir bağlantılarından oluşur. Özellikle elektrik devrelerinde bu bağlantılar yaygın olarak

kullanılır ve dış etkilere daha az etkilenmeleri için bağlantı veya süreç sırasının nasıl olması gerektiği araştırma konusudur. Bu araştırmaların sonuçları, her bir sistemin özgün değerini oluşturur. Örneğin, belirli bir giriş-çıkış karakteristiğini sağlayan bir çift kademeli elektrik filtresinin tasarımında, hangi kademenin öncelikli olarak kullanılacağı gürültü, işaret/gürültü oranı veya eleman değerleri açısından daha avantajlı olacağı açısından önemlidir. Teorik olarak, alt sistemlerin birbirinden önce veya sonra yerleştirilmesi fonksiyonel olarak fark yaratmaz (ki bu komütativite şartları ile sağlanabilir), ancak pratik açıdan bozulmalara neden olabilirler. Somut örnekler, mühendisliğe veya endüstriye dayalı olarak yapılan incelemelerin teorik bulgularına ilaveten uygulamaya yönelik önemi artırabilir ve teknolojik katkıları değerlendirme imkânı sunar.

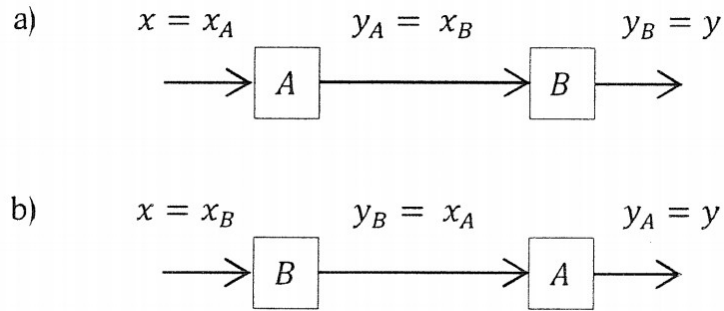
Öte yandan, sabit parametrelili sistemler genellikle gerçek fiziksel sistemlerde birtakım varsayımlar ve idealizasyonlar yaparak elde edilirler. Ancak, sabit olarak kabul edilen bir elemanın değeri zamanla değişebilir ve bu değişimler, sistem üzerinde ideal durumdan farklı gürültü ve benzeri bozulmalar veya sapmalar oluşturabilir. Özellikle ardışık bağlı sistemlerde, birinci kademede oluşan bozulmaların ikinci kademede kasıtlı olarak zaman bağımlı elemanlar kullanarak nasıl önlenmesi gerektiği, önceden oluşturulmuş komütativite teorileri kullanılarak çözülmeye çalışılabilir. Bu yaklaşım, yeni teorilerin ortaya çıkmasına ve mevcut teorilerin geliştirilmesine katkıda bulunacaktır. Ancak, komütativite koşulları ve teoremlerinin somut mühendislik sistemlerine uygulanması henüz yeterince incelenmemiştir ve bu önemli bir eksikliktir.

Komütativite konusu, fiziksel sistemlerin ve olayların incelenmesinde oldukça önemli bir kavramdır. Bu kavram, bir sistemin farklı bileşenleri arasındaki etkileşimlerin, bileşenlerin sırasının değiştirilmesiyle aynı sonuçları vermesi durumunu ifade eder. Bu tanım, iki şekilde ele alınabilir. İlk şekil, bir fiziksel sistem, komütativite tanımına uygun olarak iki ayrı alt sisteme ayrıştırılabiliyorsa, bu alt sistemlerin sıra değişim özelliği, alt sistemlerin komütativitesi olarak tanımlanır. Bu durumda, alt sistemlerin sırasının değiştirilmesi sonucunda sistemin çıkışında herhangi bir değişiklik olmaz. İkinci şekil ise, bir fiziksel sistem daha büyük bir sistemin alt sistemini oluşturuyorsa, bu alt sistemi takip eden diğer bileşenler ile etkileşim sırasının değiştirilmesi durumunda ana sistemin performansında meydana gelen değişikliklerin incelenmesi şeklindedir. Bu şekilde, alt sistem ile etkileşim halinde olan diğer

bileşenler arasındaki etkileşimin doğru bir şekilde analiz edilerek, sistemin performansının optimize edilmesi amaçlanır. Mühendislik açısından önemli olan ise, bir fiziksel sistemin giriş çıkış bağıntısının aynı kalmak üzere uygulamada önemli olan özelliklerinin değişiminin (hassasiyet, kararlılık, dayanıklılık, duyarlılık gibi) incelenmesi ve uygun sıranın kullanımıdır. Bu sayede, sistemlerin daha hassas, kararlı, dayanıklı ve duyarlı olması sağlanabilir.

Bu tezde ise, mevcut bir fiziksel sistemin komütatif eşlenik olan alt sistemlerinin araştırılması ve ardışık bağlandıklarında birlikte oluşturulacak sistemin sıra değişim özelliği ile mühendislik açısından önemli olan özelliklerinin (duyarlılık, dayanıklılık, hassasiyet vb.) incelenmesi hedeflenmektedir. Matematiksel modelin fiziksel sistemden elde edildiği doğrudur, ancak bir matematiksel modeli gerçekleyen fiziksel sistemin bulunması (tasarlanması) mühendislik açısından daha önemli ve zor bir iştir. Bu nedenle, farklı bağlantı yapılarında bir önceki sistem, alt sistem olarak ele alınacak ve bu sistemle komütatif eşlenik olan alt sistemler konu edilecektir. Alt sistemler arasındaki ilişki matematiksel olarak genel teoremler analog sistemler için daha önce (Koksal ve Koksal, 2011) referansında belirtildiği gibi zikredilmiştir.

Fiziksel sistemlere özgü uygulamalarla ilgili olarak aşağıdaki örnek ele alınabilir.



Şekil 1.1. A ve B alt sistemlerinin ardışık bağlantıları

Şekil 1.1’de gösterilen sistemde, A bir iletişim sisteminin vericisini, B ise alıcısını temsil etmektedir. Eğer A ve B komütatifse, AB ve BA aynı işlevi yerine getirecektir. Ancak, iletim ortamını temsil eden A ve B arasındaki hat üzerinde farklı sinyaller yayılacaktır. Sinyal, bazen A, bazen de B vericisinden yayınlanabilir. Bu durum, yayılım ortamında sinyalin farklılaşmasına neden olacaktır. Ancak, alıcı tarafında komütativite özelliği nedeniyle, herhangi bir sinyal kaybı veya yabancılaşma olmayacaktır. İletim ortamında farklı zaman dilimlerinde farklı sinyallerin yayılması

ve A ve B sistemlerinin komütatif eşlenik olmalarının tasarlayan tarafından bilinmeleri, iletilmek istenen bilginin gizlenmesine katkı sağlar.

Sayısal sistemler için, zamanla değişen bir A sisteminin, komütatif eşlenikleri yani B sistemleri yaygın değildir ve literatürde komütativite koşullarına ilişkin bir teorem bulunmamaktadır. Ancak, komütativite kriptolojide önemli bir rol oynayabilir. Komütativitenin kriptolojideki bu katkısı, kaotik sistemlerin kriptolojideki uygulaması ile birleştirildiğinde daha ileri bilimsel çalışmalar için bir konu olabilir. (bkz. Willigenburg vd, 2015; Li vd, 2016).

Elektrik devrelerindeki filtreler gibi kaskat (ardışık) bağlantılarla tasarlanan sistemler, diğer tasarım yöntemlerine göre daha kararlı, dayanıklı ve hassas olma eğilimindedir. Zamanla değişen bir sistemin, iki komütatif alt sistemin zaman içinde kaskat bağlantılarla birleştirilmesi, benzer özelliklere sahip sistemlerin tasarımı için önemlidir. Teorik olarak, bu özellikler simülasyonlarla gözlemlenebilir. Bununla birlikte, zamanla değişen bir sistemin komütatif eşlenikleri oldukça nadir ve özel sistemlerdir. Bu nedenle, bu eşleniklerin bir iletişim hattının ayrı taraflarında kullanılması, kriptografi alanındaki kaos yaklaşımına benzer bir yaklaşımın kullanılmasına olanak tanıyabilir. Ancak, bu eşlenikler hakkında yeterli araştırma yapılmamış ve bilim dünyasında yaygın olarak bilinmemektedir.

Ardışık olarak bağlanmış iki sürekli zaman sistemi A ve B , Şekil 1.1.a'da gösterildiği gibi bağlandığında, bağlantı sıraları AB 'dir. Ancak, bağlantı sıraları Şekil 1.1.b'deki gibi değiştirildiğinde ve BA bağlantısı kullanıldığında, AB ve BA sistemlerinin giriş-çıkış ilişkisinin değişmediği durumlarda, A ve B alt sistemleri sıra-değişim özelliğine sahip olarak tanımlanır.

Ayrık zamanlı bir sistemin fiziksel veya model yoluyla gerçekleştirilmesi, Şekil 1.1.a veya 1.1.b'deki gibi iki alt sistemin ardışık bağlantısı şeklinde sebep-sonuç ilişkisi olarak tanımlanabilir. Bu ayrışımın A ve B alt sistemleri üzerinde gerçekleştirilebileceği koşullar, komütativitenin genel koşulları ışığında incelenecektir. Bu ayrışimlardan biri, diğerine göre üstünlük gösterebilir, bu nedenle uygulama açısından önemlidir. Bu araştırmaların sonunda, en uygun sistem tasarımı ve kontrolü için önemli sonuçlar elde edilecektir. Bu sonuçlar, mühendislik uygulamaları için önemlidir.

Komütativite, elektrik, mekanik, hidrolik, sosyoekonomik, biyolojik gibi her

türlü alanda, zamanla değişen parametrelerin modellenmesinde uygulanabilir. Konu henüz yeni olduğu için somut uygulama örnekleri sınırlıdır. Ancak bazen teorik ve matematiksel çalışmalar, pratik uygulamalardan önce gelir ve uygulama örnekleri daha sonra ortaya çıkar. Örneğin, memristörün Chua tarafından tanımlanmasından sonra keşfedilmesi veya bulanık mantık uygulamalarının, Fetwies'in "discrete" mantığa alternatif olarak bulanık mantık fikrini ortaya atmasından sonra kontrol alanında yaygın olarak kullanılması gibi. Benzer şekilde, kaos teorisinin matematiksel temellerinin detaylı olarak incelenmesinden sonra kaosun kriptoloji alanında kullanılması gibi örnekler de mevcuttur.

Tezin bundan sonraki bölümleri şu şekilde devam etmektedir: İkinci bölümde 1., 2. ve 3. dereceden ayrık zaman sistemlerinin komütativitesi ile ilgili sonuçlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde ise 2. ve 3. dereceden sistemlerin ayrıştırılması konu edilmiştir. Dördüncü bölüm bu tezin ana bölümünü oluşturmakta olup, bu bölümde önce 4. dereceden ayrık zaman sistemlerinin komütativitesi incelenmiş, sonra da 4. dereceden sistemlerin ikinci dereceden sistemlere ayrıştırılması ele alınmıştır. Son bölüm olarak 5. bölümde sonuçlar sunulmuş ve ileride yapılacak çalışmalar belirtilmiştir.

2. BİRİNCİ, İKİNCİ VE ÜÇÜNCÜ DERECEDEKİ SİSTEMLERİN KOMÜTATİVİTESİ

2.1. Birinci Dereceden Sistemlerin Komütativitesi

Tek girişli ve tek çıkışlı olan n . ve m . mertebeden iki A ve B dijital sistemi

$$A: \sum_{i=0}^n a_i(k)y_A(k+i) = x_A(k), a_n(k) \neq 0: k = 0,1,2, \dots$$

$$B: \sum_{i=0}^m b_i(k)y_B(k+i) = x_B(k), b_m(k) \neq 0: k = 0,1,2, \dots$$

denklemleriyle tanımlasın; x sistem girişini, y sistem çıkışını temsil etmektedir. Burada $a_i(\bullet)$ katsayıları ve giriş fonksiyonu $x(\bullet)$, $Z^+ = \{0,1,2, \dots\}$ uzayından R uzayına sınırlı fonksiyonlardır. Başlangıç koşulları ise

$$[y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{n-1}] \in R^n; y(k) = y_k, k = 0,1,2, \dots, n-1$$

ile gösterilsin. Bu durumda n . mertebeden dijital bir sistemi temsil eden fark denklem sisteminin çözümü iteratif yöntemi ile

$$y(n+k) = \frac{1}{a_n(k)} \left[x(k) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(k)y(k+i) \right], \forall k \geq 0$$

formülüyle bulunabilir. Burada $y(n+k), \forall k \geq 0$ çözümünün verilen $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ başlangıç koşulları altında varlığı ve tekliği için gerekli ve yeterli şart $a_n(k) \neq 0, \forall k \geq 0$ olmasıdır. Çünkü sistem n . mertebeden olduğundan matematiksel olarak $a_n(k) = 0$ olması demek sistemin n . mertebeden olmadığını göstergesidir.

A ve B sistemleri Şekil 1.1'deki gibi ardışık bağlandıklarında birleşik sistem AB ve BA aynı giriş çıkış özelliğine sahipse A ve B komütatif sistemlerdir denilir. Bu durumda AB ardışık bağlı sistemi $(n+m)$. mertebeden

$$AB: \sum_{j=0}^n a_j(k) \sum_{i=0}^m b_i(k)y_B(k+i) = x(k) \quad (2.1.1)$$

fark denklemi ile modellenir. Bunun akabinde BA sistemi de gene aynı mertebeden

$$BA: \sum_{i=0}^m b_i(k) \sum_{j=0}^n a_j(k) y_A(k+j) = x(k) \quad (2.1.2)$$

fark denklemi ile modellenir. Burada sistemler ardışık bağlı olduğundan AB sisteminde A sisteminin çıkış fonksiyonu B sisteminin giriş fonksiyonuna eşittir yani $y_A = x_B, x = x_A, y = y_B$. Benzer şekilde BA sisteminde B sisteminin çıkış fonksiyonu A sisteminin giriş fonksiyonuna eşittir yani $y_B = x_A, x = x_B, y = y_A$ olmalıdır.

Denklem (2.1.1) ve (2.1.2)'de n ve m değerleri 1 alındığında birinci mertebeden zamanla değişen dijital sistemlerin modellenmesi

$$A: a_1(k)y_A(k+1) + a_0(k)y_A(k) = x_A(k), y_A(0) = y_{0A}$$

$$B: b_1(k)y_B(k+1) + b_0(k)y_B(k) = x_B(k), y_B(0) = y_{0B}$$

şeklindedir. Bu denklemlerden hareketle AB ve BA ardışık bağlı sistemler ikinci mertebeden fark denklemleri ile modellenip $y_B = x_A, x = x_B, y = y_A$ olması için komütativite koşulları

$$a_1(k)b_1(k+1) = b_1(k)a_1(k+1), k \geq 0$$

$$a_1(k)b_0(k+1) + a_0(k)b_1(k) = b_1(k)a_0(k+1) + b_0(k)a_1(k), k \geq 1$$

$$a_0(k)b_0(k) = b_0(k)a_0(k), k \geq 2$$

şeklindedir. Bu koşullar (Koksal, 2019) çözülmüş ve açık sonuçlar teoremler şeklinde (Koksal, 2019)'de elde edilmiştir.

Benzer şekilde ikinci mertebeden dijital sistemlerin modellenmesi ikinci mertebeden fark denklemleri ile yapıldığında AB ve BA ardışık sistemlerinin temsili dördüncü mertebeden olur ve $y_B = x_A, x = x_B, y = y_A$ koşulunu sağlaması için yukarıdaki üç denklem formatında ilave fark denklemleri gerekir. Bu şekilde üçüncü ve daha yüksek mertebeden sistemlerin komütativite koşulları elde edilebilir.

Daha önceki çalışmalar genel olarak komütativite koşullarını analog sistemler için ifade eden denklemlerin bulunması ve incelenmesi şeklinde olmuştur. Ancak yüksek mertebeden dijital sistemlerin komütativite teorileri henüz incelenmediği gibi bunların mühendislik uygulamaları için nasıl faydalı olabileceği ve kullanılabileceği de henüz açık olarak gösterilmemiştir. Bu konu da araştırma yapılması gereken açık

konulardan biridir. Bir sonraki bölümde ikinci dereceden ayrık zaman sistemlerinin komütatif olma koşulları incelenmiştir.

2.2. İkinci Dereceden Sistemlerin Komütativitesi

Varsayalım ayrık zamanlı doğrusal A ve B sistemleri aşağıdaki gibi ikinci mertebeden fark denklemleriyle modellensin:

$$a_2(k)y_A(k+2) + a_1(k)y_A(k+1) + a_0(k)y_A(k) = x_A(k), \quad k \geq 0, \quad (2.2.1)$$

$$y_A(0) = y_{A0}, y_A(1) = y_{A1}, \quad (2.2.2)$$

$$b_2(k)y_B(k+2) + b_1(k)y_B(k+1) + b_0(k)y_B(k) = x_B(k), \quad k \geq 0, \quad (2.2.3)$$

$$y_B(0) = y_{B0}, y_B(1) = y_{B1}. \quad (2.2.4)$$

Burada $k \geq 0$ için $a_2(k) \neq 0, b_2(k) \neq 0$. Şekil 1.1'deki gibi A, B sistemleri ardışık bağlandığında AB sistemini tanımlayan aşağıdaki dördüncü mertebeden fark denklemi çıkmaktadır:

$$\begin{aligned} c_4(k)y(k+4) + c_3(k)y(k+3) + c_2(k)y(k+2) + c_1(k)y(k+1) + c_0(k)y(k) \\ = x(k). \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Burada

$$c_4(k) = b_2(k+2)a_2(k), \quad (2.2.6)$$

$$c_3(k) = b_1(k+2)a_2(k) + b_2(k+1)a_1(k), \quad (2.2.7)$$

$$c_2(k) = b_0(k+2)a_2(k) + b_1(k+1)a_1(k) + b_2(k)a_0(k), \quad (2.2.8)$$

$$c_1(k) = b_0(k+1)a_1(k) + b_1(k)a_0(k), \quad (2.2.9)$$

$$c_0(k) = b_0(k)a_0(k). \quad (2.2.10)$$

Başlangıç koşulları ise aşağıdaki gibidir:

$$y(0) = y_B(0), \quad (2.2.11)$$

$$y(1) = y_B(1), \quad (2.2.12)$$

$$y(2) = \frac{1}{b_2(0)}y_A(0) - \frac{b_0(0)}{b_2(0)}y_B(0) - \frac{b_1(0)}{b_2(0)}y_B(1) \quad (2.2.13)$$

$$y(3) = \frac{b_1(1)}{b_2(1)b_2(0)}y_A(0) + \frac{1}{b_2(1)}y_A(1) - \frac{b_2(1)b_0(0)}{b_2(1)b_2(0)}y_B(0)$$

$$+ \left[\frac{b_2(1)b_1(0)}{b_2(1)b_2(0)} - \frac{b_0(1)}{b_2(1)} \right] y_B(1) \quad (2.2.14)$$

Benzer şekilde B, A sistemi ardışık bağlandığında, BA sistemini bunu tanımlayan aşağıdaki dördüncü mertebeden fark denklemi çıkmaktadır:

$$\begin{aligned} \bar{c}_4(k)y(k+4) + \bar{c}_3(k)y(k+3) + \bar{c}_2(k)y(k+2) + \bar{c}_1(k)y(k+1) + \bar{c}_0(k)y(k) \\ = x(k). \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Burada

$$\bar{c}_4(k) = a_2(k+2)b_2(k), \quad (2.2.16)$$

$$\bar{c}_3(k) = a_1(k+2)b_2(k) + a_2(k+1)b_1(k), \quad (2.2.17)$$

$$\bar{c}_2(k) = a_0(k+2)b_2(k) + a_1(k+1)b_1(k) + a_2(k)b_0(k), \quad (2.2.18)$$

$$\bar{c}_1(k) = a_0(k+1)b_1(k) + a_1(k)b_0(k), \quad (2.2.19)$$

$$\bar{c}_0(k) = a_0(k)b_0(k). \quad (2.2.20)$$

Başlangıç koşulları ise aşağıdaki gibidir:

$$y(0) = y_A(0), \quad (2.2.21)$$

$$y(1) = y_A(1), \quad (2.2.22)$$

$$y(2) = \frac{1}{a_2(0)}y_B(0) - \frac{a_0(0)}{a_2(0)}y_A(0) - \frac{a_1(0)}{a_2(0)}y_A(1), \quad (2.2.23)$$

$$\begin{aligned} y(3) = \frac{a_1(1)}{a_2(1)a_2(0)}y_B(0) + \frac{1}{a_2(1)}y_B(1) - \frac{a_1(1)a_0(0)}{a_2(1)a_2(0)}y_A(0) \\ + \left[\frac{a_1(1)a_1(0)}{a_2(1)a_2(0)} - \frac{a_0(1)}{a_2(1)} \right] y_A(1). \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Teorem 2.2.1 (Koksal ve Koksal, 2015): Denklem (2.2.1-2) ve (2.2.3-4) ile tanımlanan ikinci mertebeden ayrık zamanlı doğrusal zamanla değişen A ve B sistemlerinin sıfır başlangıç koşulları ile komütatif olabilmesi için aşağıdaki gerek ve yeterli koşullar sağlanmalıdır;

$$c_4(k) = \bar{c}_4(k), \quad k \geq 0 \text{ için},$$

$$c_3(k) = \bar{c}_3(k), \quad k \geq 1 \text{ için},$$

$$c_2(k) = \bar{c}_2(k), \quad k \geq 2 \text{ için},$$

$$c_1(k) = \bar{c}_1(k), \quad k \geq 3 \text{ için},$$

$$c_0(k) = \bar{c}_0(k), \quad k \geq 4 \text{ için};$$

veya daha açık ifadeyle denklem (2.2.5-2.2.10) ve (2.2.15-2.2.20) kullanılarak aşağıdaki eşitliklerin sağlanması gerekir:

$$b_2(k+2)a_2(k) = a_2(k+2)b_2(k), \quad k \geq 0 \text{ için}, \quad (2.2.25)$$

$$b_1(k+2)a_2(k) + b_2(k+1)a_1(k)$$

$$= a_1(k+2)b_2(k) + a_2(k+1)b_1(k), \quad k \geq 1 \text{ için}, \quad (2.2.26)$$

$$b_0(k+2)a_2(k) + b_1(k+1)a_1(k) + b_2(k)a_0(k) = a_0(k+2)b_2(k)$$

$$+ a_1(k+1)b_1(k) + a_2(k)b_0(k), \quad k \geq 2 \text{ için}, \quad (2.2.27)$$

$$b_0(k+1)a_1(k) + b_1(k)a_0(k) = a_0(k+1)b_1(k)$$

$$+ a_1(k)b_0(k), \quad k \geq 3 \text{ için}. \quad (2.2.28)$$

Teorem 2.2.2 (Koksal ve Koksal, 2015): Denklem (2.2.1) ve (2.2.3)'le tanımlanan A ve B sistemlerinin sıfır giriş fonksiyonu olduğu durumda sıfır olmayan başlangıç koşulları ile de komütatif olabilmesi için başlangıç koşullarının (2.2.25-28) denklemlerini sağlaması gerekir. Ayrıca $y_A(0) = y_B(0)$, $y_A(1) = y_B(1)$ eşit başlangıç koşullarının da aşağıda belirtilecek denklemleri sağlaması gerekir:

Sıfır olmayan başlangıç koşullu sistemlerin komütativitesini incelemek için AB ve BA sistemleri için $x(k)$ giriş fonksiyonu sıfır olsun. Denklemler (2.2.11-2.2.14) ve (2.2.21-2.2.24)'den $k = 0, 1, 2, 3$ için çıkış değerleri aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$k = 0$ için:

$$y_A(0) = y_B(0)$$

$k = 1$ için:

$$y_A(1) = y_B(1)$$

$k = 2$ için:

$$\frac{1}{b_2(0)} y_A(0) - \frac{b_0(0)}{b_2(0)} y_B(0) - \frac{b_1(0)}{b_2(0)} y_B(1)$$

$$= \frac{1}{a_2(0)} y_B(0) - \frac{a_0(0)}{a_2(0)} y_A(1) - \frac{a_1(0)}{a_2(0)} y_A(1)$$

$k = 3$ için:

$$\begin{aligned} & -\frac{b_1(1)}{b_2(1)b_2(0)} y_A(0) + \frac{1}{b_2(1)} y_A(1) + \frac{b_1(1)b_0(0)}{b_2(1)b_2(0)} y_B(0) \\ & + \left[\frac{b_1(1)b_1(0)}{b_2(1)b_2(0)} - \frac{b_0(1)}{b_2(1)} \right] y_B(1) \\ & = -\frac{a_1(1)}{a_2(1)a_2(0)} y_B(0) + \frac{1}{a_2(1)} y_B(1) + \frac{a_1(1)a_0(0)}{a_2(1)a_2(0)} y_A(0) \\ & + \left[\frac{a_1(1)a_1(0)}{a_2(1)a_2(0)} - \frac{a_0(1)}{a_2(1)} \right] y_A(1). \end{aligned}$$

2.3. Üçüncü Mertebeden Sistemlerin Komütativitesi

Şekil 1.1.'deki A ve B sistemleri doğrusal, zamanla değişen ayrık zaman sistemleri olsunlar.

$$\begin{aligned} A: a_3(k)y_A(k+3) + a_2(k)y_A(k+2) + a_1(k)y_A(k+1) + a_0(k)y_A(k) \\ = x_A(k), \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

$$\begin{aligned} B: b_3(k)y_B(k+3) + b_2(k)y_B(k+2) + b_1(k)y_B(k+1) + b_0(k)y_B(k) \\ = x_B(k), \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Şekil 1.1a ardışık bağlantısından

$$x(k) = x_A(k), \quad y_A(k) = x_B(k), \quad y_B(k) = y(k).$$

Dolayısıyla (2.3.2) denklemi

$$\begin{aligned} b_3(k)y_B(k+3) + b_2(k)y_B(k+2) + b_1(k)y_B(k+1) \\ + b_0(k)y_B(k) = x_B(k) = y_A(k) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır; k yerine sırayla $k+1$, $k+2$, $k+3$ yazılarak

$$\begin{aligned} b_3(k+1)y_B(k+4) + b_2(k+1)y_B(k+3) + b_1(k+1)y_B(k+2) \\ + b_0(k+1)y_B(k+1) = x_B(k+1) = y_A(k+1), \\ b_3(k+2)y_B(k+5) + b_2(k+2)y_B(k+4) + b_1(k+2)y_B(k+3) \\ + b_0(k+2)y_B(k+2) = x_B(k+2) = y_A(k+2), \\ b_3(k+3)y_B(k+6) + b_2(k+3)y_B(k+5) + b_1(k+3)y_B(k+4) \\ + b_0(k+3)y_B(k+3) = x_B(k+3) = y_A(k+3). \end{aligned}$$

elde edilir. $y_A(i)$ 'nin $i = k + 1, k + 2, k + 3$ için bulunan bu değerleri denklem (2.3.1)'da yerine konularak ve AB bağlantısı için $x_A(k) = x(k), x_B(k) = y_A(k), y_B(k) = y(k)$ olduğu göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
& a_3(k)[b_3(k+3)y_B(k+6) + b_2(k+3)y_B(k+5) + b_1(k+3)y_B(k+4) \\
& \quad + b_0(k+3)y_B(k+3)] \\
& + a_2(k)[b_3(k+2)y_B(k+5) + b_2(k+2)y_B(k+4) \\
& \quad + b_1(k+2)y_B(k+3) + b_0(k+2)y_B(k+2)] \\
& + a_1(k)[b_3(k+1)y_B(k+4) + b_2(k+1)y_B(k+3) \\
& \quad + b_1(k+1)y_B(k+2) + b_0(k+1)y_B(k+1)] \\
& + a_0(k)[b_3(k)y_B(k+3) + b_2(k)y_B(k+2) + b_1(k)y_B(k+1) + b_0(k)y_B(k)] \\
& = x_A(k),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_3(k)b_3(k+3)y_B(k+6) + a_3(k)b_2(k+3)y_B(k+5) \\
& \quad + a_3(k)b_1(k+3)y_B(k+4) \\
& + a_3(k)b_0(k+3)y_B(k+3) + a_2(k)b_3(k+2)y_B(k+5) \\
& \quad + a_2(k)b_2(k+2)y_B(k+4) \\
& + a_2(k)b_1(k+2)y_B(k+3) + a_2(k)b_0(k+2)y_B(k+2) \\
& \quad + a_1(k)b_3(k+1)y_B(k+4) \\
& + a_1(k)b_2(k+1)y_B(k+3) + a_1(k)b_1(k+1)y_B(k+2) \\
& \quad + a_1(k)b_0(k+1)y_B(k+1) \\
& + a_0(k)b_3(k)y_B(k+3) + a_0(k)b_2(k)y_B(k+2) + a_0(k)b_1(k)y_B(k+1) \\
& \quad + a_0(k)b_0(k)y_B(k) = x_A(k),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_3(k)b_3(k+3)y_B(k+6) + [a_3(k)b_2(k+3) + a_2(k)b_3(k+2)]y_B(k+5) \\
& \quad + [a_3(k)b_1(k+3) + a_2(k)b_2(k+2) + a_1(k)b_3(k+1)]y_B(k+4) \\
& + [a_3(k)b_0(k+3) + a_2(k)b_1(k+2) + a_1(k)b_2(k+1) + a_0(k)b_3(k)]y_B(k+3) \\
& \quad + [a_2(k)b_0(k+2) + a_1(k)b_1(k+1) + a_0(k)b_2(k)]y_B(k+2) \\
& \quad + [a_1(k)b_0(k+1) + a_0(k)b_1(k)]y_B(k+1) + a_0(k)b_0(k)y_B(k) = x_A(k),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
AB: & a_3(k)b_3(k+3)y(k+6) + [a_3(k)b_2(k+3) + a_2(k)b_3(k+2)]y(k+5) \\
& \quad + [a_3(k)b_1(k+3) + a_2(k)b_2(k+2) + a_1(k)b_3(k+1)]y(k+4) \\
& + [a_3(k)b_0(k+3) + a_2(k)b_1(k+2) + a_1(k)b_2(k+1) + a_0(k)b_3(k)]y(k+3) \\
& \quad + [a_2(k)b_0(k+2) + a_1(k)b_1(k+1) + a_0(k)b_2(k)]y(k+2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[a_1(k)b_0(k+1) + a_0(k)b_1(k)]y(k+1) \\
& +a_0(k)b_0(k)y(k) = x(k)
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

giriş-çıkış tanım denklemi elde edilir.

Şekil 1.1b'deki BA ardışık bağlantısı için ise benzer şekilde

$$x(k) = x_B(k), \quad y_B(k) = x_A(k), \quad y_A(k) = y(k),$$

$$\begin{aligned}
& a_3(k)y_A(k+3) + a_2(k)y_A(k+2) + a_1(k)y_A(k+1) \\
& +a_0(k)y_A(k) = x_A(k) = y_B(k),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_3(k+1)y_A(k+4) + a_2(k+1)y_A(k+3) + a_1(k+1)y_A(k+2) \\
& +a_0(k+1)y_A(k+1) = x_A(k+1) = y_B(k+1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_3(k+2)y_A(k+5) + a_2(k+2)y_A(k+4) + a_1(k+2)y_A(k+3) \\
& +a_0(k+2)y_A(k+2) = x_A(k+2) = y_B(k+2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_3(k+3)y_A(k+6) + a_2(k+3)y_A(k+5) + a_1(k+3)y_A(k+4) \\
& +a_0(k+3)y_A(k+3) = x_A(k+3) = y_B(k+3),
\end{aligned}$$

elde edilir. $y_A(i)$ 'nin $i = k+1, k+2, k+3$ için bulunan bu değerleri denklem (2.3.2)'da yerine konularak ve BA bağlantısı için $x_B(k) = x(k), x_A(k) = y_B(k), y_A(k) = y(k)$ olduğu göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
& b_3(k)[a_3(k+3)y_A(k+6) + a_2(k+3)y_A(k+5) + a_1(k+3)y_A(k+4) \\
& \quad +a_0(k+3)y_A(k+3)] \\
& +b_2(k)[a_3(k+2)y_A(k+5) + a_2(k+2)y_A(k+4) \\
& \quad +a_1(k+2)y_A(k+3) + a_0(k+2)y_A(k+2)] \\
& +b_1(k)[a_3(k+1)y_A(k+4) + a_2(k+1)y_A(k+3) \\
& \quad +a_1(k+1)y_A(k+2) + a_0(k+1)y_A(k+1)] \\
& +b_0(k)[a_3(k)y_A(k+3) + a_2(k)y_A(k+2) + a_1(k)y_A(k+1) + a_0(k)y_A(k)] \\
& \quad = x_B(k),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_3(k)a_3(k+3)y_A(k+6) + b_3(k)a_2(k+3)y_A(k+5) \\
& \quad +b_3(k)a_1(k+3)y_A(k+4) \\
& +b_3(k)a_0(k+3)y_A(k+3) + b_2(k)a_3(k+2)y_A(k+5) \\
& \quad +b_2(k)a_2(k+2)y_A(k+4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +b_2(k)a_1(k+2)y_A(k+3) + b_2(k)a_0(k+2)y_A(k+2) \\
& \quad +b_1(k)a_3(k+1)y_A(k+4) \\
& +b_1(k)a_2(k+1)y_A(k+3) + b_1(k)a_1(k+1)y_A(k+2) \\
& \quad +b_1(k)a_0(k+1)y_A(k+1) \\
& +b_0(k)a_3(k)y_A(k+3) + b_0(k)a_2(k)y_A(k+2) + b_0(k)a_1(k)y_A(k+1) \\
& \quad +b_0(k)a_0(k)y_A(k) = x_B(k),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_3(k)a_3(k+3)y_A(k+6) + [b_3(k)a_2(k+3) + b_2(k)a_3(k+2)]y_A(k+5) \\
& \quad +[b_3(k)a_1(k+3) + b_2(k)a_2(k+2) + b_1(k)a_3(k+1)]y_A(k+4) \\
& +[b_3(k)a_0(k+3) + b_2(k)a_1(k+2) + b_1(k)a_2(k+1) + b_0(k)a_3(k)]y_A(k+3) \\
& \quad +[b_2(k)a_0(k+2) + b_1(k)a_1(k+1) + b_0(k)a_2(k)]y_A(k+2) \\
& \quad +[b_1(k)a_0(k+1) + b_0(k)a_1(k)]y_A(k+1) + b_0(k)a_0(k)y_A(k) = x_B(k),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BA: & b_3(k)a_3(k+3)y(k+6) + [b_3(k)a_2(k+3) + b_2(k)a_3(k+2)]y(k+5) \\
& \quad +[b_3(k)a_1(k+3) + b_2(k)a_2(k+2) + b_1(k)a_3(k+1)]y(k+4) \\
& +[b_3(k)a_0(k+3) + b_2(k)a_1(k+2) + b_1(k)a_2(k+1) + b_0(k)a_3(k)]y(k+3) \\
& \quad +[b_2(k)a_0(k+2) + b_1(k)a_1(k+1) + b_0(k)a_2(k)]y(k+2) \\
& \quad +[b_1(k)a_0(k+1) + b_0(k)a_1(k)]y(k+1) \\
& \quad +b_0(k)a_0(k)y(k) = x(k)
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

tanım denklemi bulunur. Simetri nedeniyle (2.3.3)'dan (2.3.4)'e kadar olan denklemlerin, (2.3.2)'den (2.3.3)'e kadar olan denklemlerde A yerine B , B yerine de A yerleştirmek suretiyle elde edilebildiği görülmektedir.

İlk koşullar ile ilgili denklemler göz önüne alındığında AB bağlantısı için yukarıdaki denklemlerde açıkça görülmektedir ki $y(i) = y_A(i) = y_B(i)$, $i = 0,1,2,3,4,5$. Ancak $y(3), y(4), y(5)$, y_A ve y_B 'nin, ayrıca a_i ve b_i katsayılarının $k = 0,1,2$ 'deki değerleri cinsinden hesap edilebilir. Bu bölümde ilk koşulsuz sistemler konu edildiğinden daha detaylı inceleme kapsam dışı bırakılmış ve doğrudan (2.3.3) ve (2.3.4) denklemlerinin eşdeğerliliği incelenmiştir.

(2.3.3) ve (2.3.4) denklemleri karşılaştırılırsa, AB ve BA sistemlerinin özdeş olması (A ve B 'nin komütatif eşlenik olması) hasebiyle, aynı $y(i)$ değerlerinin katsayıları eşitlenerek,

$$a_3(k)b_3(k+3) = b_3(k)a_3(k+3), \quad k \geq 0, \tag{2.3.5}$$

$$\begin{aligned}
& a_3(k)b_2(k+3) + a_2(k)b_3(k+2) \\
& = b_3(k)a_2(k+3) + b_2(k)a_3(k+2), \quad k \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

$$\begin{aligned}
& a_3(k)b_1(k+3) + a_2(k)b_2(k+2) + a_1(k)b_3(k+1) \\
& = b_3(k)a_1(k+3) + b_2(k)a_2(k+2) + b_1(k)a_3(k+1), \quad k \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

$$\begin{aligned}
& a_3(k)b_0(k+3) + a_2(k)b_1(k+2) + a_1(k)b_2(k+1) + a_0(k)b_3(k) \\
& = b_3(k)a_0(k+3) + b_2(k)a_1(k+2) \\
& + b_1(k)a_2(k+1) + b_0(k)a_3(k), \quad k \geq 0
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

$$\begin{aligned}
& a_2(k)b_0(k+2) + a_1(k)b_1(k+1) + a_0(k)b_2(k) \\
& = b_2(k)a_0(k+2) + b_1(k)a_1(k+1) + b_0(k)a_2(k), \quad k \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

$$a_1(k)b_0(k+1) + a_0(k)b_1(k) = b_1(k)a_0(k+1) + b_0(k)a_1(k), \quad k \geq 0 \tag{2.3.10}$$

bulunur. Verilen bir A sisteminin komütatif eşleniklerini (B sistemi) ve bunların hangi koşullarda mevcut olduklarını bulabilmek için yukarıdaki denklemlerden dördü, $b_3(k), b_2(k), b_1(k), b_0(k)$ için $a_3(k), a_2(k), a_1(k), a_0(k)$ cinsinden çözülür; B 'nin hangi koşullarda mevcut olduğunu ortaya çıkarmak için çözümler diğer kalan iki denklemden yerlerine konarak $a_3(k), a_2(k), a_1(k), a_0(k)$ katsayıları arasında iki bağıntı elde edilir. A sisteminin komütatif eşleniklerinin var olması için A sisteminin katsayıları arasında bu iki bağıntının var olması gereklidir, aksi halde A 'nın B gibi herhangi bir komütatif eşleniği yoktur.

Denklem (2.2.5)'den elde edilen aşağıdaki denklem (2.2.11) fark denklemi $b_3(k)$ 'nin hesaplanmasına olanak verir.

$$b_3(k+3) = \frac{a_3(k+3)}{a_3(k)} b_3(k), \quad k \geq 0 \tag{2.3.11}$$

Aşağıdaki şekilde k 'ya sırayla $0, 1, 2, \dots$ değerleri verilerek ve her seferinde bir önceki sonuç kullanılarak:

$k = 0$ için:

$$b_3(3) = \frac{a_3(3)}{a_3(0)} b_3(0),$$

$k = 1$ için:

$$b_3(4) = \frac{a_3(4)}{a_3(1)} b_3(1),$$

$k = 2$ için:

$$b_3(5) = \frac{a_3(5)}{a_3(2)} b_3(2),$$

$k = 3$ için:

$$b_3(6) = \frac{a_3(6)}{a_3(3)} b_3(3) = \frac{a_3(6)a_3(3)}{a_3(3)a_3(0)} b_3(0) = \frac{a_3(6)}{a_3(0)} b_3(0),$$

$k = 4$ için:

$$b_3(7) = \frac{a_3(7)}{a_3(4)} b_3(4) = \frac{a_3(7)a_3(4)}{a_3(4)a_3(1)} b_3(1) = \frac{a_3(7)}{a_3(1)} b_3(1),$$

$k = 5$ için:

$$b_3(8) = \frac{a_3(8)}{a_3(5)} b_3(5) = \frac{a_3(8)a_3(5)}{a_3(5)a_3(2)} b_3(2) = \frac{a_3(8)}{a_3(2)} b_3(2),$$

$k = 6$ için:

$$b_3(9) = \frac{a_3(9)}{a_3(6)} b_3(6) = \frac{a_3(9)a_3(6)}{a_3(6)a_3(0)} b_3(0) = \frac{a_3(9)}{a_3(0)} b_3(0),$$

$k = 7$ için:

$$b_3(10) = \frac{a_3(10)}{a_3(7)} b_3(7) = \frac{a_3(10)a_3(7)}{a_3(7)a_3(1)} b_3(1) = \frac{a_3(10)}{a_3(1)} b_3(1),$$

$k = 8$ için:

$$b_3(11) = \frac{a_3(11)}{a_3(8)} b_3(8) = \frac{a_3(11)a_3(8)}{a_3(8)a_3(2)} b_3(2) = \frac{a_3(11)}{a_3(2)} b_3(2),$$

şeklinde ilerleyerek

$$b_3(n) = \begin{cases} \frac{a_3(n)}{a_3(0)} b_3(0), & n = 3, 6, 9, \dots \\ \frac{a_3(n)}{a_3(1)} b_3(1), & n = 4, 7, 10, \dots \\ \frac{a_3(n)}{a_3(2)} b_3(2), & n = 5, 8, 11, \dots \end{cases} \quad (2.3.12)$$

genel çözümü bulunur. Bu çözümde $b_3(0), b_3(1), b_3(2)$ şimdilik serbest seçilebilen sabit sayılardır.

Denklem (2.3.6)'den $b_2(k+3)$ çekilirse $b_2(n)$ için (2.3.13)'daki fark denklemi elde edilir.

$$b_2(k+3) = \frac{a_2(k+3)}{a_3(k)} b_3(k) - \frac{a_2(k)}{a_3(k)} b_3(k+2) + \frac{a_3(k+2)}{a_3(k)} b_2(k), k \geq 0 \quad (2.3.13)$$

Bu denklem (2.3.12)'de bulunan $b_3(n)$ değerleri de kullanılarak k 'ya sırayla $0, 1, 2, \dots$ değerleri verilmek suretiyle aşağıdaki sonuçları verir.

$k = 0$ için:

$$b_2(3) = \frac{a_2(3)}{a_3(0)} b_3(0) - \frac{a_2(0)}{a_3(0)} b_3(2) + \frac{a_3(2)}{a_3(0)} b_2(0)$$

$k = 1$ için:

$$\begin{aligned} b_2(4) &= \frac{a_2(4)}{a_3(1)} b_3(1) - \frac{a_2(1)}{a_3(1)} b_3(3) + \frac{a_3(3)}{a_3(1)} b_2(1) \\ &= \frac{a_2(4)}{a_3(1)} b_3(1) - \frac{a_2(1)a_3(3)}{a_3(1)a_3(0)} b_3(0) + \frac{a_3(3)}{a_3(1)} b_2(1) \end{aligned}$$

$k = 2$ için:

$$\begin{aligned} b_2(5) &= \frac{a_2(5)}{a_3(2)} b_3(2) - \frac{a_2(2)}{a_3(2)} b_3(4) + \frac{a_3(4)}{a_3(2)} b_2(2) \\ &= \frac{a_2(5)}{a_3(2)} b_3(2) - \frac{a_2(2)a_3(4)}{a_3(2)a_3(1)} b_3(1) + \frac{a_3(4)}{a_3(2)} b_2(2) \end{aligned}$$

$k = 3$ için:

$$\begin{aligned} b_2(6) &= \frac{a_2(6)}{a_3(3)} b_3(3) - \frac{a_2(3)}{a_3(3)} b_3(5) + \frac{a_3(5)}{a_3(3)} b_2(3) \\ &= \frac{a_2(6)a_3(3)}{a_3(3)a_3(0)} b_3(0) - \frac{a_2(3)a_3(5)}{a_3(3)a_3(2)} b_3(2) \\ &\quad + \frac{a_3(5)}{a_3(3)} \left[\frac{a_2(3)}{a_3(0)} b_3(0) - \frac{a_2(0)}{a_3(0)} b_3(2) + \frac{a_3(2)}{a_3(0)} b_2(0) \right] \\ &= \left[\frac{a_2(6)}{a_3(0)} + \frac{a_3(5)a_2(3)}{a_3(3)a_3(0)} \right] b_3(0) - \left[\frac{a_2(3)a_3(5)}{a_3(3)a_3(2)} - \frac{a_3(5)a_2(0)}{a_3(3)a_3(0)} \right] b_3(2) \end{aligned}$$

$$+ \frac{a_3(5)a_3(2)}{a_3(3)a_3(0)} b_2(0)$$

$k = 4$ için:

$$\begin{aligned} b_2(7) &= \frac{a_2(7)}{a_3(4)} b_3(4) - \frac{a_2(4)}{a_3(4)} b_3(6) + \frac{a_3(6)}{a_3(4)} b_2(4) \\ &= \frac{a_2(7)a_3(4)}{a_3(4)a_3(1)} b_3(1) - \frac{a_2(4)a_3(6)}{a_3(4)a_3(0)} b_3(0) \\ &\quad + \frac{a_3(6)}{a_3(4)} \left[\frac{a_2(4)}{a_3(1)} b_3(1) - \frac{a_2(1)a_3(3)}{a_3(1)a_3(0)} b_3(0) + \frac{a_3(3)}{a_3(1)} b_2(1) \right] \\ &= \left[\frac{a_2(7)}{a_3(1)} + \frac{a_3(6)a_2(4)}{a_3(4)a_3(1)} \right] b_3(1) - \left[\frac{a_2(4)a_3(6)}{a_3(4)a_3(0)} - \frac{a_3(6)a_2(1)a_3(3)}{a_3(4)a_3(1)a_3(0)} \right] b_3(0) \\ &\quad + \frac{a_3(6)a_3(3)}{a_3(4)a_3(1)} b_2(1) \end{aligned}$$

$k = 5$ için:

$$\begin{aligned} b_2(8) &= \frac{a_2(8)}{a_3(5)} b_3(5) - \frac{a_2(5)}{a_3(5)} b_3(7) + \frac{a_3(7)}{a_3(5)} b_2(5) \\ &= \frac{a_2(8)a_3(5)}{a_3(5)a_3(2)} b_3(2) - \frac{a_2(5)a_3(7)}{a_3(5)a_3(1)} b_3(1) \\ &\quad + \frac{a_3(7)}{a_3(5)} \left[\frac{a_2(5)}{a_3(2)} b_3(2) - \frac{a_2(2)a_3(4)}{a_3(2)a_3(1)} b_3(1) + \frac{a_3(4)}{a_3(2)} b_2(2) \right] \\ &= \left[\frac{a_2(8)}{a_3(2)} + \frac{a_3(7)a_2(5)}{a_3(5)a_3(2)} \right] b_3(2) - \left[\frac{a_2(5)a_3(7)}{a_3(5)a_3(1)} - \frac{a_3(7)a_2(2)a_3(4)}{a_3(5)a_3(2)a_3(1)} \right] b_3(1) \\ &\quad + \frac{a_3(7)a_3(4)}{a_3(5)a_3(2)} b_2(2) \end{aligned}$$

$k = 6$ için:

$$\begin{aligned} b_2(9) &= \frac{a_2(9)}{a_3(6)} b_3(6) - \frac{a_2(6)}{a_3(6)} b_3(8) + \frac{a_3(8)}{a_3(6)} b_2(6) \\ &= \frac{a_2(9)a_3(6)}{a_3(6)a_3(0)} b_3(0) - \frac{a_2(6)a_3(8)}{a_3(6)a_3(2)} b_3(2) \\ &\quad + \frac{a_3(8)}{a_3(6)} \left[\frac{a_2(6)}{a_3(3)} b_3(3) - \frac{a_2(3)}{a_3(3)} b_3(5) + \frac{a_3(5)}{a_3(3)} b_2(3) \right] \\ &= \left[\frac{a_2(9)}{a_3(0)} + \frac{a_3(8)a_2(6)}{a_3(6)a_3(0)} + \frac{a_3(8)a_3(5)a_2(3)}{a_3(6)a_3(3)a_3(0)} \right] b_3(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{a_2(6)a_3(8)}{a_3(6)a_3(2)} + \frac{a_3(8)a_2(3)a_3(5)}{a_3(6)a_3(3)a_3(2)} + \frac{a_3(8)a_3(5)a_2(0)}{a_3(6)a_3(3)a_3(0)} \right] b_3(2) \\
& + \frac{a_3(8)a_3(5)a_3(2)}{a_3(6)a_3(3)a_3(0)} b_2(0)
\end{aligned}$$

$k = 7$ için:

$$\begin{aligned}
b_2(10) &= \frac{a_2(10)}{a_3(7)} b_3(7) - \frac{a_2(7)}{a_3(7)} b_3(9) + \frac{a_3(9)}{a_3(7)} b_2(7) \\
&= \frac{a_2(10)a_3(7)}{a_3(7)a_3(1)} b_3(1) - \frac{a_2(7)a_3(9)}{a_3(7)a_3(0)} b_3(0) \\
&+ \frac{a_3(9)}{a_3(7)} \left[\frac{a_2(7)}{a_3(4)} b_3(4) - \frac{a_2(4)}{a_3(4)} b_3(6) + \frac{a_3(6)}{a_3(4)} b_2(4) \right] \\
&= \left[\frac{a_2(10)}{a_3(1)} + \frac{a_3(9)a_2(7)}{a_3(7)a_3(1)} + \frac{a_3(9)a_3(6)a_2(4)}{a_3(7)a_3(4)a_3(1)} \right] b_3(1) \\
&- \left[\frac{a_2(7)a_3(9)}{a_3(7)a_3(0)} + \frac{a_3(9)a_2(4)a_3(6)}{a_3(7)a_3(4)a_3(0)} + \frac{a_3(9)a_3(6)a_2(1)a_3(3)}{a_3(7)a_3(4)a_3(1)a_3(0)} \right] b_3(0) \\
&+ \frac{a_3(9)a_3(6)a_3(3)}{a_3(7)a_3(4)a_3(1)} b_2(1)
\end{aligned}$$

$k = 8$ için:

$$\begin{aligned}
b_2(11) &= \frac{a_2(11)}{a_3(8)} b_3(8) - \frac{a_2(8)}{a_3(8)} b_3(10) + \frac{a_3(10)}{a_3(8)} b_2(8) \\
&= \frac{a_2(11)a_3(8)}{a_3(8)a_3(2)} b_3(2) - \frac{a_2(8)a_3(10)}{a_3(8)a_3(1)} b_3(1) \\
&+ \frac{a_3(10)}{a_3(8)} \left[\frac{a_2(8)}{a_3(5)} b_3(5) - \frac{a_2(5)}{a_3(5)} b_3(7) + \frac{a_3(7)}{a_3(5)} b_2(5) \right] \\
&= \left[\frac{a_2(11)}{a_3(2)} + \frac{a_3(10)a_2(8)}{a_3(8)a_3(2)} + \frac{a_3(10)a_3(7)a_2(5)}{a_3(8)a_3(5)a_3(2)} \right] b_3(2) \\
&- \left[\frac{a_2(8)a_3(10)}{a_3(8)a_3(1)} + \frac{a_3(10)a_2(5)a_3(7)}{a_3(8)a_3(5)a_3(1)} + \frac{a_3(10)a_3(7)a_2(2)a_3(4)}{a_3(8)a_3(5)a_3(2)a_3(1)} \right] b_3(1) \\
&+ \frac{a_3(10)a_3(7)a_3(4)}{a_3(8)a_3(5)a_3(2)} b_2(2)
\end{aligned}$$

Bu sonuçlar incelendiğinde $b_2(n)$ için genel formül yazılabilir.

$$b_2(n) = b_2(0) \prod_{i=1}^{\frac{n}{3}} \frac{a_3(3i-1)}{a_3(3i-3)} + \frac{b_3(0)}{a_3(0)} \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}} \left[\prod_{k=0}^{i-2} \frac{a_3(n-1-3k)}{a_3(n-3-3k)} \right] a_2(n+3-3i)$$

$$-\frac{b_3(2)}{a_3(2)} \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}} \left[\prod_{k=0}^{i-1} \frac{a_3(n-1-3k)}{a_3(n-3-3k)} \right] a_2(n-3i), n = 0, 3, 6, \dots \text{ için} \quad (2.3.14)$$

$$b_2(n) = b_2(1) \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{3}} \frac{a_3(3i)}{a_3(3i-2)} - \frac{b_3(0)}{a_3(0)} \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{3}} \left[\prod_{k=0}^{i-1} \frac{a_3(n-1-3k)}{a_3(n-3-3k)} \right] a_2(n-3i) \\ + \frac{b_3(1)}{a_3(1)} \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{3}} \left[\prod_{k=0}^{i-2} \frac{a_3(n-1-3k)}{a_3(n-3-3k)} \right] a_2(n+3-3i), n = 1, 4, 7, \dots \text{ için} \quad (2.3.15)$$

$$b_2(n) = b_2(2) \prod_{i=1}^{\frac{n-2}{3}} \frac{a_3(3i+1)}{a_3(3i-1)} - \frac{b_3(1)}{a_3(1)} \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{3}} \left[\prod_{k=0}^{i-1} \frac{a_3(n-1-3k)}{a_3(n-3-3k)} \right] a_2(n-3i) \\ + \frac{b_3(2)}{a_3(2)} \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{3}} \left[\prod_{k=0}^{i-2} \frac{a_3(n-1-3k)}{a_3(n-3-3k)} \right] a_2(n+3-3i), n = 2, 5, 8, \dots \text{ için} \quad (2.3.16)$$

Gerçekten Denklem (2.3.14), $n = 0, 3, 6, 9$ için kullanıldığında sırayla

$$b_2(0) = b_2(0),$$

$$b_2(3) = b_2(0) \frac{a_3(2)}{a_3(0)} + b_3(0) \frac{a_2(3)}{a_3(0)} - b_3(2) \frac{a_3(2)a_2(0)}{a_3(2)a_3(0)},$$

$$b_2(6) = b_2(0) \prod_{i=1}^2 \frac{a_3(3i-1)}{a_3(3i-3)} + \frac{b_3(0)}{a_3(0)} \sum_{i=1}^2 \left[\prod_{k=0}^{i-2} \frac{a_3(5-3k)}{a_3(3-3k)} \right] a_2(9-3i)$$

$$-\frac{b_3(2)}{a_3(2)} \sum_{i=1}^2 \left[\prod_{k=0}^{i-1} \frac{a_3(5-3k)}{a_3(3-3k)} \right] a_2(6-3i)$$

$$= b_2(0) \frac{a_3(2)a_3(5)}{a_3(0)a_3(3)} + \frac{b_3(0)}{a_3(0)} \left[a_2(6) + \frac{a_3(5)a_2(3)}{a_3(3)} \right]$$

$$-\frac{b_3(2)}{a_3(2)} \left[\frac{a_3(5)a_3(2)a_2(0)}{a_3(3)a_3(0)} + \frac{a_3(5)a_2(3)}{a_3(3)} \right],$$

$$b_2(9) = b_2(0) \prod_{i=1}^3 \frac{a_3(3i-1)}{a_3(3i-3)} + \frac{b_3(0)}{a_3(0)} \sum_{i=1}^3 \left[\prod_{k=0}^{i-2} \frac{a_3(8-3k)}{a_3(6-3k)} \right] a_2(12-3i)$$

$$-\frac{b_3(2)}{a_3(2)} \sum_{i=1}^3 \left[\prod_{k=0}^{i-1} \frac{a_3(8-3k)}{a_3(6-3k)} \right] a_2(9-3i)$$

$$\begin{aligned}
&= b_2(0) \frac{a_3(2)a_3(5)a_3(8)}{a_3(0)a_3(3)a_3(6)} + \frac{b_3(0)}{a_3(0)} \left[a_2(9) + \frac{a_3(8)a_2(6)}{a_3(6)} + \frac{a_3(8)a_3(5)a_2(3)}{a_3(6)a_3(3)} \right] \\
&\quad - \frac{b_3(2)}{a_3(2)} \left[\frac{a_3(8)a_2(6)}{a_3(6)} + \frac{a_3(8)a_3(5)a_2(3)}{a_3(6)a_3(3)} + \frac{a_3(8)a_3(5)a_3(2)a_2(0)}{a_3(6)a_3(3)a_3(0)} \right]
\end{aligned}$$

değerlerini verir ve bu değerler daha öncekilerle uyum içindedir.

Benzer şekilde Denklem (2.3.15), $n = 1,4,7,10$ için kullanıldığında sırayla

$$b_2(1) = b_2(1),$$

$$b_2(4) = b_2(1) \prod_{i=1}^1 \frac{a_3(3i)}{a_3(3i-2)} + \frac{b_3(0)}{a_3(0)} \sum_{i=1}^1 \left[\prod_{k=0}^{i-1} \frac{a_3(3-3k)}{a_3(1-3k)} \right] a_2(4-3i)$$

$$\begin{aligned}
&\quad - \frac{b_3(1)}{a_3(1)} \sum_{i=1}^1 \left[\prod_{k=0}^{i-2} \frac{a_3(3-3k)}{a_3(1-3k)} \right] a_2(7-3i) \\
&= \frac{b_2(1)a_3(3)}{a_3(1)} - \frac{b_3(0)a_3(3)a_2(1)}{a_3(1)a_3(0)} + \frac{b_3(1)a_2(4)}{a_3(1)},
\end{aligned}$$

$$b_2(7) = b_2(1) \prod_{i=1}^2 \frac{a_3(3i)}{a_3(3i-2)} - \frac{b_3(0)}{a_3(0)} \sum_{i=1}^2 \left[\prod_{k=0}^{i-1} \frac{a_3(6-3k)}{a_3(4-3k)} \right] a_2(7-3i)$$

$$\begin{aligned}
&\quad + \frac{b_3(1)}{a_3(1)} \sum_{i=1}^2 \left[\prod_{k=0}^{i-2} \frac{a_3(6-3k)}{a_3(4-3k)} \right] a_2(10-3i) \\
&= \frac{b_2(1)a_3(3)a_3(6)}{a_3(1)a_3(4)} - \frac{b_3(0)}{a_3(0)} \left[\frac{a_3(6)a_2(4)}{a_3(4)} + \frac{a_3(6)a_3(3)a_2(1)}{a_3(4)a_3(1)} \right] \\
&\quad + \frac{b_3(1)}{a_3(1)} \left[a_2(7) + \frac{a_3(6)a_2(4)}{a_3(4)} \right],
\end{aligned}$$

$$b_2(10) = b_2(1) \prod_{i=1}^3 \frac{a_3(3i)}{a_3(3i-2)} - \frac{b_3(0)}{a_3(0)} \sum_{i=1}^3 \left[\prod_{k=0}^{i-1} \frac{a_3(9-3k)}{a_3(7-3k)} \right] a_2(10-3i)$$

$$\begin{aligned}
&\quad + \frac{b_3(1)}{a_3(1)} \sum_{i=1}^3 \left[\prod_{k=0}^{i-2} \frac{a_3(9-3k)}{a_3(7-3k)} \right] a_2(13-3i) \\
&= b_2(1) \frac{a_3(3)a_3(6)a_3(9)}{a_3(1)a_3(4)a_3(7)} \\
&\quad - \frac{b_3(0)}{a_3(0)} \left[\frac{a_3(9)a_2(7)}{a_3(7)} + \frac{a_3(9)a_3(6)a_2(4)}{a_3(7)a_3(4)} + \frac{a_3(9)a_3(6)a_3(3)a_2(1)}{a_3(7)a_3(4)a_3(1)} \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{b_3(1)}{a_3(1)} \left[a_2(10) + \frac{a_3(9)a_2(7)}{a_3(7)} + \frac{a_3(9)a_3(6)a_2(4)}{a_3(7)a_3(4)} \right]$$

değerlerini verir ve bu değerler de daha öncekilerle uyum içindedir.

Son olarak Denklem (2.3.16), $n = 2, 5, 8, 11$ için kullanıldığında sırayla

$$b_2(2) = b_2(2),$$

$$b_2(5) = b_2(2) \prod_{i=1}^1 \frac{a_3(3i+1)}{a_3(3i-1)} - \frac{b_3(1)}{a_3(1)} \sum_{i=1}^1 \left[\prod_{k=0}^{i-1} \frac{a_3(4-3k)}{a_3(2-3k)} \right] a_2(5-3i)$$

$$+ \frac{b_3(2)}{a_3(2)} \sum_{i=1}^1 \left[\prod_{k=0}^{i-2} \frac{a_3(4-3k)}{a_3(1-3k)} \right] a_2(8-3i)$$

$$= b_2(2) \frac{a_3(4)}{a_3(2)} - \frac{b_3(1)a_3(4)a_2(2)}{a_3(2)a_3(1)} + \frac{b_3(2)a_2(5)}{a_3(2)},$$

$$b_2(8) = b_2(2) \prod_{i=1}^2 \frac{a_3(3i+1)}{a_3(3i-1)} - \frac{b_3(1)}{a_3(1)} \sum_{i=1}^2 \left[\prod_{k=0}^{i-1} \frac{a_3(7-3k)}{a_3(5-3k)} \right] a_2(8-3i)$$

$$+ \frac{b_3(2)}{a_3(2)} \sum_{i=1}^2 \left[\prod_{k=0}^{i-2} \frac{a_3(7-3k)}{a_3(5-3k)} \right] a_2(11-3i)$$

$$= b_2(2) \frac{a_3(4)a_3(7)}{a_3(2)a_3(5)} - \frac{b_3(1)}{a_3(1)} \left[\frac{a_3(7)a_2(5)}{a_3(5)} - \frac{a_3(7)a_3(4)a_2(2)}{a_3(5)a_3(2)} \right]$$

$$+ \frac{b_3(2)}{a_3(2)} \left[a_2(8) + \frac{a_3(7)a_2(5)}{a_3(5)} \right],$$

$$b_2(11) = b_2(2) \prod_{i=1}^3 \frac{a_3(3i+1)}{a_3(3i-1)} - \frac{b_3(1)}{a_3(1)} \sum_{i=1}^3 \left[\prod_{k=0}^{i-1} \frac{a_3(10-3k)}{a_3(8-3k)} \right] a_2(11-3i)$$

$$+ \frac{b_3(2)}{a_3(2)} \sum_{i=1}^3 \left[\prod_{k=0}^{i-2} \frac{a_3(10-3k)}{a_3(8-3k)} \right] a_2(14-3i)$$

$$= \frac{b_2(2)a_3(4)a_3(7)a_3(10)}{a_3(2)a_3(5)a_3(8)}$$

$$- \frac{b_3(1)}{a_3(1)} \left[\frac{a_3(10)a_2(8)}{a_3(8)} + \frac{a_3(10)a_3(7)a_2(5)}{a_3(8)a_3(5)} + \frac{a_3(10)a_3(7)a_3(4)a_2(2)}{a_3(8)a_3(5)a_3(2)} \right]$$

$$+ \frac{b_3(2)}{a_3(2)} \left[a_2(11) + \frac{a_3(10)a_2(8)}{a_3(8)} + \frac{a_3(10)a_3(7)a_2(5)}{a_3(8)a_3(5)} \right]$$

değerlerini verir ve bu değerler de daha öncekilerle uyum içindedir.

(2.3.17) denkleminde çarpım ve toplam işaretleri ile ilgili olarak üst indis alt indisten küçük olursa aşağıdaki varsayımlar kabul edilmiştir; bu varsayımlar tezde geçen tüm benzer formüller için geçerlidir.

$$\prod_{k=a}^{k=b} C_k = 1, b < a \text{ ise } \text{Çarpım} = 1; \sum_{i=a}^{i=b} D_i = 0, b < a \text{ ise } \text{Toplam} = 0$$

Yukarıda doğruluğu test edilen $b_2(n)$ için bulunmuş genel (2.3.14,15,16) denklemleri daha düzgün bir şekilde ifade edilebilir.

$$= [A_0(n) \quad A_1(n) \quad A_2(n)] \begin{bmatrix} b_2(0) \\ b_2(1) \\ b_2(2) \end{bmatrix} + [B_0(n) \quad B_1(n) \quad B_2(n)] \begin{bmatrix} b_3(0) \\ b_3(1) \\ b_3(2) \end{bmatrix} \quad (2.3.17)$$

$n = 0,3,6,9, \dots$ için

$$A_0(n) = \prod_{i=1}^{\frac{n}{3}} \frac{a_3(3i-1)}{a_3(3i-3)}; \quad A_1(n) = 0; \quad A_2(n) = 0,$$

$$B_0(n) = \frac{1}{a_3(0)} \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}} \left[\prod_{k=0}^{i-2} \frac{a_3(n-1-3k)}{a_3(n-3-3k)} \right] a_2(n+3-3i),$$

$$B_1(n) = 0,$$

$$B_2(n) = -\frac{1}{a_3(2)} \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}} \left[\prod_{k=0}^{i-1} \frac{a_3(n-1-3k)}{a_3(n-3-3k)} \right] a_2(n-3i).$$

$n = 1,4,7,10, \dots$ için

$$A_0(n) = 0; A_1(n) = \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{3}} \frac{a_3(3i)}{a_3(3i-2)}; A_2(n) = 0,$$

$$B_0(n) = -\frac{1}{a_3(0)} \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{3}} \left[\prod_{k=0}^{i-1} \frac{a_3(n-1-3k)}{a_3(n-3-3k)} \right] a_2(n-3i),$$

$$B_1(n) = \frac{1}{a_3(1)} \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{3}} \left[\prod_{k=0}^{i-2} \frac{a_3(n-1-3k)}{a_3(n-3-3k)} \right] a_2(n+3-3i),$$

$$B_2(n) = 0.$$

$n = 2, 5, 8, 11, \dots$ için

$$A_0(n) = 0; A_1(n) = 0; A_2(n) = \prod_{i=1}^{\frac{n-2}{3}} \frac{a_3(3i+1)}{a_3(3i-1)},$$

$$B_0(n) = 0,$$

$$B_1(n) = -\frac{1}{a_3(1)} \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{3}} \left[\prod_{k=0}^{i-1} \frac{a_3(n-1-3k)}{a_3(n-3-3k)} \right] a_2(n-3i),$$

$$B_2(n) = \frac{1}{a_3(2)} \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{3}} \left[\prod_{k=0}^{i-2} \frac{a_3(n-1-3k)}{a_3(n-3-3k)} \right] a_2(n+3-3i),$$

$$\prod_{k=a}^{b} C_k = 1, b < a; \sum_{i=a}^{b} D_i = 0, b < a.$$

Denklem (2.3.7)'den $b_1(k+3)$ çekilirse $b_1(k)$ için

$$\begin{aligned} b_1(k+3) &= \frac{b_3(k)}{a_3(k)} a_1(k+3) + \frac{b_2(k)}{a_3(k)} a_2(k+2) + \frac{b_1(k)}{a_3(k)} a_3(k+1) \\ &\quad - \frac{a_2(k)}{a_3(k)} b_2(k+2) - \frac{a_1(k)}{a_3(k)} b_3(k+1) \\ &= \frac{a_1(k+3)}{a_3(k)} b_3(k) - \frac{a_1(k)}{a_3(k)} b_3(k+1) + \frac{a_2(k+2)}{a_3(k)} b_2(k) \\ &\quad - \frac{a_2(k)}{a_3(k)} b_2(k+2) + \frac{a_3(k+1)}{a_3(k)} b_1(k), \quad k \geq 0 \text{ için} \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

fark denklemi bulunur.

3. AYRIŞTIRMA

Ayrıştırma, birçok farklı sistemde mühendislik problemlerini çözmek ve sistemin relatif kararlılığını ve özelliklerini geliştirmek için kullanılan bir araçtır. Bu yöntem, yüksek dereceli doğrusal bir sistemi daha düşük dereceli komütatif çiftlere ayırarak karmaşık problemleri daha basit parçalara böler. Bu şekilde, azaltılmış parçalar daha kolay çözülebilir veya ayrı ayrı analiz edilebilir. Bütünsel bir sistemi çalışmak, onu alt bölümlere ayırarak ve her birini ayrı ayrı çözmekten daha zordur. Sistem alt parçalara ayrıldığında, her bir alt sistem daha ayrıntılı olarak incelenebilir. Ayrıca, ayrıştırma kullanıldığında karmaşık bir sistemin nasıl işlediğini anlamak kolaylaşır.

İlk olarak, 2016 yılında sürekli zamanla değişen doğrusal sistemlerin parçalanması üzerine bir çalışma yapılmıştır. İkinci dereceden sürekli zamanla değişen doğrusal sistemlerin birinci dereceden komütatif çiftlere ayrıştırılması için gerekli ve yeterli koşullar kanıtlanmıştır (Koksal, 2016). Daha sonra, üçüncü dereceden sürekli zamanla değişen doğrusal sistemlerin ardışık bağlantılı ikinci ve birinci dereceden komütatif çiftlere ayrıştırılması incelenmiş ve alt sistemlerin açık sonuçları sunulmuştur (Koksal ve Yakar, 2019). Son olarak, dördüncü dereceden sürekli zamanla değişen doğrusal sistemlerin ardışık bağlantılı ikinci dereceden komütatif çiftlere ve üçüncü ve birinci dereceden komütatif çiftlere ayrıştırılması incelenmiştir (İbrahim, 2019).

3.1. İkinci Dereceden Sistemlerin Ayrıştırılması

A ve B , denklem (3.1.1) ve (3.1.2) ile tanımlanan birinci dereceden iki doğrusal zamanla değişen ayırık zaman sistemi olsunlar.

$$a_1(k)y_A(k+1) + a_0(k)y_A(k) = x_A(k) = y_B(k), \quad (3.1.1)$$

$$b_1(k)y_B(k+1) + b_0(k)y_B(k) = x_B(k) = y_A(k). \quad (3.1.2)$$

Burada x_i (y_i)'ler giriş (çıkış) işaretlerini temsil etmekte a_j ve b_j 'ler de zamanla değişen katsayıları göstermektedir. Şekil 1.1'deki AB ardışık bağlantısından görüldüğü gibi

$$y(0) = y_B(0), \quad (3.1.3)$$

$$y(1) = y_B(1). \quad (3.1.4)$$

Şekil 1.1'deki AB bağlantısından, (3.1.1) ve (3.1.2) denklemlerinden

$$\begin{aligned} y(1) = y_B(1) = y(1) &= \frac{x_B(0) - b_0(0)y_B(0)}{b_1(0)} = \frac{y_A(0) - b_0(0)y_B(0)}{b_1(0)} \\ &= \frac{y(0) - b_0(0)y(0)}{b_1(0)} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

bulunur. Diğer taraftan (3.1.1) denkleminde k yerine $k + 1$ konup, $x_B(k + 1)$ yerine denklem (3.1.2) nedeniyle $y_A(k + 1)$ yazılarak, sırasıyla (3.1.1) ve (3.1.2) denklemleri kullanılarak aşağıdaki denklemler yazılır:

$$\begin{aligned} b_1(k + 1)y_B(k + 2) + b_0(k + 1)y_B(k + 1) &= x_B(k + 1) = y_A(k + 1) \\ &= \frac{x_A(k) - a_0(k)y_A(k)}{a_1(k)} = \frac{x_A(k)}{a_1(k)} - \frac{a_0(k)}{a_1(k)} [b_1(k)y_B(k + 1) + b_0(k)y_B(k)]. \end{aligned}$$

Son denklem $a_1(k)$ ile çarpılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} a_1(k)[b_1(k + 1)y_B(k + 2) + b_0(k + 1)y_B(k + 1)] \\ + a_0(k)[b_1(k)y_B(k + 1) + b_0(k)y_B(k)] &= x_A(k) \end{aligned}$$

elde edilir. Şekil 1.1'deki $y_B = y$, $x_A = x$ kullanılarak yukardaki denklem AB ardışık bağlantısı için denklem (3.1.6)'daki ikinci dereceden fark denklemine dönüşür:

$$\begin{aligned} a_1(k)b_1(k + 1)y_B(k + 2) + a_1(k)b_0(k + 1)y_B(k + 1) + a_0(k)b_1(k)y_B(k + 1) \\ + a_0(k)b_0(k)y_B(k) &= x_A(k). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Şekil 1.1'deki bağıntılardan ve (3.1.1-2)'deki denklemlerden hareketle (3.1.3-6)'daki denklemlerin elde edilişine benzer şekilde BA sistem bağlantısı için (3.1.7-10)'daki denklemler bulunur.

$$y(0) = y_A(0), \quad (3.1.7)$$

$$y(1) = y_A(1), \quad (3.1.8)$$

$$y(1) = y_A(1) = \frac{y_B(0) - a_0(0)y_A(0)}{a_1(0)}$$

$$y(1) = \frac{y(0) - a_0(0)y(0)}{a_1(0)} \quad (3.1.9)$$

$$b_1(k)a_1(k + 1)y(k + 2) + [b_1(k)a_0(k + 1) + b_0(k)a_1(k)]y(k + 1)$$

$$+b_0(k)a_0(k)y(k) = x(k) \quad (3.1.10)$$

Diğer taraftan AB ve BA sistemlerinin bağlantısının aynı bir C sistemine denk olması istendiğinden bu C sisteminin tanım denklemi

$$c_2(k)y(k+2) + c_1(k)y(k+1) + c_0(k)y(k) = x(k) \quad (3.1.11)$$

şeklinde gösterilsin. (3.1.6) ve (3.1.10) denklemleri (3.1.11) denklemi ile karşılaştırıldığında

$$c_2(k) = a_1(k)b_1(k+1) = b_1(k)a_1(k+1), \quad (3.1.12)$$

$$c_1(k) = a_1(k)b_0(k+1) + a_0(k)b_1(k) = b_1(k)a_0(k+1) + b_0(k)a_1(k), \quad (3.1.13)$$

$$c_0(k) = a_0(k)b_0(k) = b_0(k)a_0(k), \quad (3.1.14)$$

bağıntıları bulunur. Ayrıca (3.1.5) ve (3.1.9) denklemleri karşılaştırıldığında $y_A(0) \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{y(0) - b_0(0)y(0)}{b_1(0)} &= \frac{y(0) - a_0(0)y(0)}{a_1(0)}, \\ \frac{1 - b_0(0)}{b_1(0)} y(0) &= \frac{1 - a_0(0)}{a_1(0)} y(0), \\ \frac{1 - b_0(0)}{b_1(0)} &= \frac{1 - a_0(0)}{a_1(0)} \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

bağıntısı elde edilir.

Denklem (3.1.12)'den genel $k, k = 0$ ve $k = 1$ için sırasıyla

$$b_1(k+1) = \frac{a_1(k+1)}{a_1(k)} b_1(k),$$

$$b_1(1) = \frac{a_1(1)}{a_1(0)} b_1(0),$$

$$b_1(2) = \frac{a_1(2)}{a_1(1)} b_1(1) = \frac{a_1(2)a_1(1)}{a_1(1)a_1(0)} b_1(0) = \frac{a_1(2)}{a_1(0)} b_1(0),$$

$$b_1(3) = \frac{a_1(3)}{a_1(2)} b_1(1) = \frac{a_1(3)a_1(2)}{a_1(2)a_1(0)} b_1(0) = \frac{a_1(3)}{a_1(0)} b_1(0)$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler genelleştirilirse $b_1(k)$ 'nın genel değerleri

$$b_1(k) = \frac{b_1(0)}{a_1(0)} a_1(k), \quad k \geq 0 \quad (3.1.16)$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (3.1.16)'daki $b_1(k)$, denklem (3.1.12)'de yerine konularak

$$\begin{aligned} \frac{a_1(k)}{a_1(0)} b_1(0) a_1(k+1) &= c_2(k), \\ a_1(k+1) &= \frac{a_1(0) c_2(k)}{b_1(0) a_1(k)}, \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

bağıntısı bulunur. Bu denklemin $a_1(k+1)$ için genel çözümü $k = 0, 1, 2, 3 \dots$ verilerek

$$\begin{aligned} a_1(1) &= \frac{a_1(0) c_2(0)}{b_1(0) a_1(0)} = \frac{c_2(0)}{b_1(0)}, \\ a_1(2) &= \frac{a_1(0) c_2(1) b_1(0) a_1(0)}{b_1(0) a_1(0) c_2(0)} = \frac{a_1(0) c_2(1)}{c_2(0)} = a_1(0) \frac{c_2(1)}{c_2(0)}, \\ a_1(3) &= \frac{a_1(0) c_2(2) c_2(0)}{b_1(0) a_1(0) c_2(1)} = \frac{c_2(2) c_2(0)}{b_1(0) c_2(1)}, \\ a_1(4) &= \frac{a_1(0) c_2(3) b_1(0) c_2(1)}{b_1(0) c_2(2) c_2(0)} = a_1(0) \frac{c_2(3) c_2(1)}{c_2(2) c_2(0)}, \\ a_1(5) &= \frac{a_1(0) c_2(4)}{b_1(0) a_1(4)} = \frac{a_1(0) c_2(4) c_2(2) c_2(0)}{b_1(0) c_2(3) c_2(1)} = \frac{c_2(4) c_2(2) c_2(0)}{b_1(0) c_2(3) c_2(1)} \end{aligned}$$

ve genelleştirilerek

$$a_1(k) = \begin{cases} \frac{c_2(0)}{b_1(0)}, & k = 1, \\ a_1(0) \prod_{i=1}^{\frac{k}{2}} \frac{c_2(2i-1)}{c_2(2i-2)}, & k = 2, 4, 6, \dots, \\ \frac{c_2(0)}{b_1(0)} \prod_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \frac{c_2(2i)}{c_2(2i-1)}, & k = 3, 5, 7, \dots \end{cases} \quad (3.1.18)$$

elde edilir. Denklem (3.1.12)'den başlayarak genel $k, k = 0, k = 1$ için sırayla

$$\begin{aligned}
b_0(k+1) &= \frac{b_1(k)a_0(k+1) + b_0(k)a_1(k) - a_0(k)b_1(k)}{a_1(k)} \\
&= \frac{b_1(k)}{a_1(k)} [a_0(k+1) - a_0(k)] + b_0(k), \\
b_0(1) &= \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [a_0(1) - a_0(0)] + b_0(0), \\
b_0(2) &= \frac{b_1(1)}{a_1(1)} [a_0(2) - a_0(1)] + b_0(1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemde $b_0(1)$ yerine bir önceki denklemdeki değeri, $b_1(1)$ yerine de denklem (3.1.16)'dan $k = 1$ için bulunan değer kullanılırsa

$$\begin{aligned}
b_0(2) &= \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [a_0(2) - a_0(1)] + \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [a_0(1) - a_0(0)] + b_0(0) \\
&= \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [a_0(2) - a_0(0)] + b_0(0)
\end{aligned}$$

elde edilir; $b_0(1)$ ve $b_0(2)$ için bulunan ifadeler genelleştirilerek $b_0(k)$ için denklem (3.1.19)'daki genel ifade bulunur.

$$b_0(k) = \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [a_0(k) - a_0(0)] + b_0(0), \quad k \geq 0 \quad (3.1.19)$$

Denklem (3.1.13)'de ikinci eşitlikte $b_1(k)$ yerine denklem (3.1.6)'daki eşdeğeri, $b_0(k)$ yerine de denklem (3.1.19)'daki eşdeğeri konularak ve gerekli ilkel işlemler yapılarak

$$\frac{a_1(k)}{a_1(0)} b_1(0)a_0(k+1) + \left[\frac{b_1(0)}{a_1(0)} [a_0(k) - a_0(0)] + b_0(0) \right] a_1(k) = c_1(k),$$

$$a_1(k) \left[\frac{b_1(0)}{a_1(0)} a_0(k+1) + \frac{b_1(0)}{a_1(0)} a_0(k) - \frac{b_1(0)}{a_1(0)} a_0(0) + b_0(0) \right] = c_1(k),$$

$$a_0(k+1) + a_0(k) - a_0(0) + \frac{a_1(0)}{b_1(0)} b_0(0) = \frac{a_1(0)c_1(k)}{b_1(0)a_1(k)},$$

$$a_0(k+1) = \frac{a_1(0)c_1(k)}{b_1(0)a_1(k)} - \frac{a_1(0)}{b_1(0)} b_0(0) + a_0(0) - a_0(k) \quad (3.1.20)$$

genel denklemini bulunur. Bu denklem $k = 0, 1, 2, 3 \dots$ için sırasıyla

$$a_0(1) = \frac{a_1(0)c_1(0)}{b_1(0)a_1(0)} - \frac{a_1(0)}{b_1(0)} b_0(0) + a_0(0) - a_0(0) = \frac{c_1(0)}{b_1(0)} - \frac{a_1(0)}{b_1(0)} b_0(0),$$

$$\begin{aligned}
a_0(2) &= \frac{a_1(0)c_1(1)}{b_1(0)a_1(1)} - \frac{a_1(0)}{b_1(0)}b_0(0) + a_0(0) - a_0(1) \\
&= \frac{a_1(0)c_1(1)}{b_1(0)a_1(1)} - \frac{a_1(0)}{b_1(0)}b_0(0) + a_0(0) - \frac{c_1(0)}{b_1(0)} + \frac{a_1(0)}{b_1(0)}b_0(0) \\
&= \frac{a_1(0)c_1(1)}{b_1(0)a_1(1)} - \frac{c_1(0)}{b_1(0)} + a_0(0), \\
a_0(3) &= \frac{a_1(0)c_1(2)}{b_1(0)a_1(2)} - \frac{a_1(0)}{b_1(0)}b_0(0) + a_0(0) - a_0(2) \\
&= \frac{a_1(0)c_1(2)}{b_1(0)a_1(2)} - \frac{a_1(0)}{b_1(0)}b_0(0) + a_0(0) - \frac{a_1(0)c_1(1)}{b_1(0)a_1(1)} + \frac{c_1(0)}{b_1(0)} - a_0(0) \\
&= \frac{a_1(0)}{b_1(0)} \left[\frac{c_1(2)}{a_1(2)} - \frac{c_1(1)}{a_1(1)} \right] + \frac{c_1(0)}{b_1(0)} - \frac{a_1(0)}{b_1(0)}b_0(0), \\
a_0(4) &= \frac{a_1(0)c_1(3)}{b_1(0)a_1(3)} - \frac{a_1(0)}{b_1(0)}b_0(0) + a_0(0) - a_0(3) \\
&= \frac{a_1(0)c_1(3)}{b_1(0)a_1(3)} - \frac{a_1(0)}{b_1(0)}b_0(0) + a_0(0) - \frac{a_1(0)c_1(2)}{b_1(0)a_1(2)} + \frac{a_1(0)c_1(1)}{b_1(0)a_1(1)} \\
&\quad - \frac{c_1(0)}{b_1(0)} + \frac{a_1(0)}{b_1(0)}b_0(0) \\
&= \frac{a_1(0)}{b_1(0)} \left[\frac{c_1(3)}{a_1(3)} - \frac{c_1(2)}{a_1(2)} + \frac{c_1(1)}{a_1(1)} \right] - \frac{c_1(0)}{b_1(0)} + a_0(0)
\end{aligned}$$

sonuçlarını verir. Bu sonuçlar genelleştirilirse

$$a_0(k) = \begin{cases} \frac{a_1(0)}{b_1(0)} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{c_1(i)}{a_1(i)} - \frac{a_1(0)b_0(0)}{b_1(0)}, & k = 1, 3, 5, \dots, \\ \frac{a_1(0)}{b_1(0)} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{c_1(i)}{a_1(i)} + a_0(0), & k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Denklem (3.1.18)'deki $a_1(k)$ 'nın değerleri yukarıdaki denklemde yerine konulur ve düzenlenirse $a_0(k)$ için çözüm denklem (3.1.21)'deki gibi bulunur.

$$a_0(k) = \begin{cases} -\frac{b_0(0)}{b_1(0)}a_1(0) + A(0), & k = 1, \\ a_0(0) + A(k-1) - A(k-2), & k = 2, 4, 6, \dots, \\ -\frac{b_0(0)}{b_1(0)}a_1(0) + A(k-1) - A(k-2), & k = 3, 5, 7, \dots \end{cases} \quad (3.1.21)$$

$$A(k) = \begin{cases} \frac{c_1(0)}{b_1(0)}, & k = 0, \\ \frac{a_1(0)}{c_2(0)} c_1(1), & k = 1, \\ \frac{1}{b_1(0)} \left[c_1(0) + \sum_{i=1}^{k/2} c_1(2i) \prod_{m=1}^i \frac{c_2(2m-2)}{c_2(2m-1)} \right], & k = 2, 4, 6, \dots, \\ \frac{a_1(0)}{c_2(0)} \left[c_1(1) + \sum_{i=1}^{(k-1)/2} c_1(2i+1) \prod_{m=1}^i \frac{c_2(2m-1)}{c_2(2m)} \right], & k = 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

Şimdi, bulunan denklemler göz önüne alınarak ikinci dereceden C sisteminin birbirleriyle komütatif olan birinci dereceden A ve B sistemlerinin ardışık bağlantısı olarak nasıl gerçekleştirileceğinin adımları sıralanabilir, şöyle ki:

1. Adım: Aşağıdaki katsayılar gelişigüzel olmak üzere seçilir;

$$a_0(0), b_0(0),$$

$$a_1(0) \neq 0, b_1(0) \neq 0.$$

2. Adım: Denklem (3.1.18)'den

$$a_1(k) = \begin{cases} \frac{c_2(0)}{b_1(0)}, & k = 1, \\ a_1(0) \prod_{i=1}^{\frac{k}{2}} \frac{c_2(2i-1)}{c_2(2i-2)}, & k = 2, 4, 6, \dots, \\ \frac{c_2(0)}{b_1(0)} \prod_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \frac{c_2(2i)}{c_2(2i-1)}, & k = 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

3. Adım: Denklem (3.1.16)'da $a_1(k)$ 'nın denklem (3.1.18)'deki değeri yerine konularak

$$b_1(k) = \begin{cases} \frac{c_2(0)}{a_1(0)}, & k = 1, \\ b_1(0) \prod_{i=1}^{\frac{k}{2}} \frac{c_2(2i-1)}{c_2(2i-2)}, & k = 2, 4, 6, \dots, \\ \frac{c_2(0)}{a_1(0)} \prod_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \frac{c_2(2i)}{c_2(2i-1)}, & k = 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

4. Adım: Denklem (3.1.21)'den

$$a_0(k) = \begin{cases} -\frac{b_0(0)}{b_1(0)} a_1(0) + A(0), & k = 1, \\ a_0(0) + A(k-1) - A(k-2), & k = 2, 4, 6, \dots \\ -\frac{b_0(0)}{b_1(0)} a_1(0) + A(k-1) - A(k-2), & k = 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

5. Adım: Denklem (3.1.21)'deki $a_0(k)$ 'nın değeri denklem (3.1.19)'da yerine konup sadeleştirilerek

$$b_0(k) = \begin{cases} \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [A(0) - a_0(0)], & k = 1, \\ \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [A(k-1) - A(k-2)] + b_0(0), & k = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [A(k-1) - A(k-2) - a_0(0)], & k = 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

6. Adım: İlk koşulların seçimi:

6a. İlk koşullar sıfır ise, yani $y(0) = y(1) = 0$ ise

$$y_A(0) = y_B(0) = 0.$$

6b. İlk koşullar sıfır değilse, yani $y(0) \neq 0$ ve/veya $y(1) \neq 0$ ise

$$y_A(0) = y_B(0) = y(0),$$

$$y(1) = \frac{1 - a_0(0)}{a_1(0)} y(0), y(1) = \frac{1 - b_0(0)}{b_1(0)} y(0)$$

olmalıdır. Demek oluyor ki ilk koşulların sıfırdan farklı olma durumunda 1. adımdaki gelişigüzel olan $a_0(0), b_0(0), a_1(0) \neq 0, b_1(0) \neq 0$ seçimleri (6b) adımındaki koşulları sağlamalıdır. Buraya kadar bulunan sonuçlar Teorem 3.1.1 ile özetlenebilir. Bu teorem, ayrıca ayrıştırmanın nasıl yapılacağını gösterir.

Teorem 3.1.1 (S. Ar, 2020): Denklem (3.1.11) ile tanımlanan sıfır ilk koşullu ($y(0) = y(1) = 0$) ikinci dereceden zamanla değişen doğrusal bir ayrık zaman sisteminin (C) aynı tür birinci dereceden iki komütatif alt sistemin (Denklem (3.1.1) ve Denklem (3.1.2) ile tanımlanan A ve B sistemleri, $y_A(0) = y_B(0) = 0$) ardışık bağlantısı olarak ayrıştırılabilmesi için gerek ve yeter koşullar;

- i. $a_0(0), b_0(0), a_1(0) \neq 0, b_1(0) \neq 0$ uygun seçilmiş sabitler olmak üzere

$$a_1(k) = \begin{cases} \frac{c_2(0)}{b_1(0)}, & k = 1, \\ a_1(0) \prod_{i=1}^{\frac{k}{2}} \frac{c_2(2i-1)}{c_2(2i-2)}, & k = 2, 4, 6, \dots, \\ \frac{c_2(0)}{b_1(0)} \prod_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} \frac{c_2(2i)}{c_2(2i-1)}, & k = 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

$$a_0(k) = \begin{cases} -\frac{b_0(0)}{b_1(0)} a_1(0) + A(0), & k = 1, \\ a_0(0) + A(k-1) - A(k-2), & k = 2, 4, 6, \dots, \\ -\frac{b_0(0)}{b_1(0)} a_1(0) + A(k-1) - A(k-2), & k = 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

$$b_0(k) = \begin{cases} \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [A(0) - a_0(0)], & k = 1, \\ \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [A(k-1) - A(k-2)] + b_0(0), & k = 2, 4, 6, \dots, \\ \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [A(k-1) - A(k-2) - a_0(0)], & k = 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

formülleri ile ifade edilebilir olmalıdır.

- ii. $a_0(0), b_0(0), a_1(0) \neq 0, b_1(0) \neq 0$ 'nin uygunluğu Denklem (4.13),
yani

$$a_0(k)b_0(k) = c_0(k), k = 0, 1, 2, \dots$$

sağlanmalıdır.

Teorem 3.1.2 (S. Ar, 2020): Denklem (3.1.11) ile tanımlanan sıfırdan farklı ilk koşullu ($y(0) \neq 0$ ve/veya $y(1) \neq 0$) ikinci dereceden zamanla değişen lineer bir ayrık zaman sisteminin (C) aynı tür birinci dereceden iki komütatif alt sistemin (Denklem (3.1.1) ve Denklem (3.1.2) ile tanımlanan, $y_A(0), y_B(0)$ ilk koşullarına sahip A ve B sistemleri) ardışık bağlantısı olarak ayrıştırılabilmesi için gerek ve yeter koşullar Teorem 3.1.1'in tüm koşullarına ek olarak

- i. $a_0(0)$ ve $b_0(0)$, $\frac{1-a_0(0)}{a_1(0)} y(0) = \frac{1-b_0(0)}{b_1(0)} y(0)$ bağıntısını sağlamak üzere uygun,
ii. $y_A(0) = y_B(0) = y(0)$,
iii. i. koşulundan dolayı:

$$y(1) = \frac{1 - a_0(0)}{a_1(0)} y(0) (= \frac{1 - b_0(0)}{b_1(0)} y(0))$$

olmalıdır.

3.2. Üçüncü Dereceden Sistemlerin Ayrıştırılması

Şekil 1.1'deki A ve B alt sistemleri aşağıdaki doğrusal ayrık zamanlı zamanla değişen fark denklemleri ile tanımlansın:

$$A: a_1(k)y_A(k+1) + a_0(k)y_A(k) = x_A(k), k \geq 0 \quad (3.2.1)$$

$$y_A(0) = y_{A0}, \quad (3.2.2)$$

$$B: b_2(k)y_B(k+2) + b_1(k)y_B(k+1) + b_0(k)y_B(k) = x_B(k), k \geq 0 \quad (3.2.3)$$

$$y_B(0) = y_{B0}, y_B(1) = y_{B1}, \quad (3.2.4)$$

A ve B 'nin çözülebilirliği için $a_1(k)$ ve $b_2(k)$ 'nin tüm $k \geq 0$ için sıfır olmaması gerektiğine dikkat edin. Şekil 1.1a'da gösterilen AB bağlantısından

$$x(k) = x_A(k), \quad y_A(k) = x_B(k), \quad y_B(k) = y(k), k \geq 0 \quad (3.2.5)$$

sonucu çıkar. Bununla ve (3.2.1) ve (3.2.2) denklemleri ile $x(k)$ ve $y(k)$ arasındaki fark denklemi aşağıdaki gibi elde edilebilir: $k+1$ için (3.2.2)'yi yazarsak

$$\begin{aligned} b_2(k+1)y_B(k+3) + b_1(k+1)y_B(k+2) + b_0(k+1)y_B(k+1) \\ = x_B(k+1), k \geq 1 \end{aligned}$$

elde edilir ve (3.2.5)'ten $y_B(k) = y(k)$, $x_B(k) = y_A(k)$ leri yerine yazarsak;

$$b_2(k+1)y(k+3) + b_1(k+1)y(k+2) + b_0(k+1)y(k+1) = y_A(k+1), k \geq 1$$

ve (3.2.1), (3.2.5) denklemlerini kullanarak $y_A(k+1)$ 'i sadeleştirirsek,

$$\begin{aligned} b_2(k+1)y(k+3) + b_1(k+1)y(k+2) + b_0(k+1)y(k+1) \\ = \frac{x_A(k) - a_0(k)y_A(k)}{a_1(k)} = \frac{x(k) - a_0(k)y_A(k)}{a_1(k)} = \frac{x(k) - a_0(k)x_B(k)}{a_1(k)}, k \geq 1. \end{aligned}$$

Son olarak (3.2.2), (3.2.5) denklemlerini kullanarak

$$\begin{aligned} b_2(k+1)y(k+3) + b_1(k+1)y(k+2) + b_0(k+1)y(k+1) \\ = \frac{x(k) - a_0(k)[b_2(k)y_B(k+2) + b_1(k)y_B(k+1) + b_0(k)y_B(k)]}{a_1(k)} \\ = \frac{x(k) - a_0(k)[b_2(k)y(k+2) + b_1(k)y(k+1) + b_0(k)y(k)]}{a_1(k)}, k \geq 1 \end{aligned}$$

$a_1(k)$ ile çarpıp yeniden düzenleyince,

$$\begin{aligned} AB: a_1(k)b_2(k+1)y(k+3) + [a_1(k)b_1(k+1) + a_0(k)b_2(k)]y(k+2) \\ + a_0(k)b_0(k)y(k) = x(k) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

bulunur. (3.2.3), (3.2.4)'deki başlangıç koşulları ile (3.2.5) ve $k = 0$ için (3.2.1)'de $y(k)$ için başlangıç koşulları aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\begin{aligned} y(0) &= y_B(0) = y_{B0}, \\ y(1) &= y_B(1) = y_{B1}, \\ y(2) = y_B(2) &= \frac{x_B(0) - b_1(0)y_B(1) - b_0(0)y_B(0)}{b_2(0)} \\ &= \frac{y_{A0} - b_1(0)y_{B1} - b_0(0)y_{B0}}{b_2(0)} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Şekil 1.1b'de gösterilen BA bağlantısından,

$$x(k) = x_B(k), \quad y_B(k) = x_A(k), y_A(k) = y(k), k \geq 0 \quad (3.2.8)$$

elde edilir. Bununla ve (3.2.1) ve (3.2.3) ile $x(k)$ ve $y(k)$ arasındaki fark denklemini aşağıdaki gibi elde edilebilir: $k + 2$ için (3.2.1)'i yazabiliriz,

$$a_1(k+2)y_A(k+3) + a_0(k+2)y_A(k+2) = x_A(k+2), k \geq 2$$

(3.2.8)'ten $y_A(k) = y(k)$, $x_A(k) = y_B(k)$ koyarsak,

$$a_1(k+2)y(k+3) + a_0(k+2)y(k+2) = y_B(k+2), k \geq 2$$

ve (3.2.2)'den $y_B(k+2)$ buraya koyarsak;

$$\begin{aligned} &a_1(k+2)y(k+3) + a_0(k+2)y(k+2) \\ &= \frac{x_B(k) - b_1(k)y_B(k+1) - b_0(k)y_B(k)}{b_2(k)} \\ &= \frac{x(k) - b_1(k)x_A(k+1) - b_0(k)x_A(k)}{b_2(k)}, k \geq 2 \end{aligned}$$

(3.2.1) ve (3.2.8)'den $x_A(k)$ ve $x_A(k+1)$ koyarsak;

$$\begin{aligned} &a_1(k+2)y(k+3) + a_0(k+2)y(k+2) \\ &= \frac{x(k)}{b_2(k)} - \frac{b_1(k)[a_1(k+1)y(k+2) + a_0(k+1)y(k+1)]}{b_2(k)} \\ &\quad - \frac{b_0(k)[a_1(k)y(k+1) + a_0(k)y(k)]}{b_2(k)} \end{aligned}$$

Son olarak $b_2(k)$ ile çarpıp tekrar düzenlersek,

$$\begin{aligned} BA: &b_2(k)a_1(k+2)y(k+3) + [b_2(k)a_0(k+2) \\ &+ b_1(k)a_1(k+1)]y(k+2) + [b_1(k)a_0(k+1) + b_0(k)a_1(k)]y(k+1) \\ &+ b_0(k)a_0(k)y(k) = x(k) \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

elde edilir. Eşitlik (3.2.8), (3.2.1) ile $y(k)$ için başlangıç koşulları şu şekilde elde edilir;

$$\begin{aligned} y(0) &= y_A(0) = y_{A0}, \\ y(2) = y_A(2) &= \frac{x_A(1) - a_0(1)y_A(1)}{a_1(1)} = \frac{y_B(1) - a_0(1)y(1)}{a_1(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y_{B1} - a_0(1) \frac{y_{B0} - a_0(0)y_{A0}}{a_1(0)}}{a_1(1)} \\
&= \frac{a_1(0)y_{B1} - a_0(1)y_{B0} + a_0(1)a_0(0)y_{A0}}{a_1(0)a_1(1)} \quad (3.2.10)
\end{aligned}$$

Öte yandan, A ve B alt sistemlerinin AB ve BA bağlantılarının değişebilirlik nedeniyle aynı sisteme (diyelim ki C) denk olması istenir. C şu şekilde tanımlansın,

$$\begin{aligned}
&c_3(k)y(k+3) + c_2(k)y(k+2) + c_1(k)y(k+1) \\
&+ c_0(k)y(k) = x(k), k \geq 0, \quad (3.2.11)
\end{aligned}$$

$$y(2), y(1), y(0) \quad (3.2.12)$$

AB ve BA 'yı tanımlayan (3.2.6) ve (3.2.9) ve C 'yi tanımlayan Eşitlik (3.2.11) ile karşılaştırılırsa

$$c_3(k) = a_1(k)b_2(k+1) = b_2(k)a_1(k+2), \quad (3.2.13)$$

$$\begin{aligned}
c_2(k) &= a_1(k)b_1(k+1) + a_0(k)b_2(k) = b_2(k)a_0(k+2) \\
&+ b_1(k)a_1(k+1), \quad (3.2.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1(k) &= a_1(k)b_0(k+1) + a_0(k)b_1(k) = b_1(k)a_0(k+1) \\
&+ b_0(k)a_1(k), \quad (3.2.15)
\end{aligned}$$

$$c_0(k) = a_0(k)b_0(k) = b_0(k)a_0(k). \quad (3.2.16)$$

Buna ek olarak, (3.2.7) ve (3.2.10) denklemleri karşılaştırılırsa;

$$y(0) = y_{B0} = y_{A0},$$

$$y(1) = y_{B1} = \frac{y_{B0} - a_0(0)y_{A0}}{a_1(0)},$$

$$y(2) = \frac{y_{A0} - b_1(0)y_{B1} - b_0(0)y_{B0}}{b_2(0)} = \frac{a_1(0)y_{B1} - a_0(1)y_{B0} + a_0(1)a_0(0)y_{A0}}{a_1(1)a_1(0)}$$

Birinci ve ikinci denklemleri kullanarak, ikinci ve üçüncü denklemlerde sonucu şu şekilde yazarız;

$$y(0) = y_{B0} = y_{A0} \quad (3.2.17)$$

Son denklem, eğer $y_{A0} \neq 0$ ise, şu durumun doğru olması gerektiğini ima eder;

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1(0) - b_1(0) + b_1(0)a_0(0) - a_1(0)b_0(0)}{b_2(0)} \\
&= \frac{1 - a_0(0) - a_0(1) + a_0(1)a_0(0)}{a_1(1)} \quad (3.2.18)
\end{aligned}$$

(3.2.13)'ten

$$b_2(k+1) = \frac{b_2(k)a_1(k+2)}{a_1(k)};$$

$$k = 0$$

$$b_2(1) = \frac{b_2(0)a_1(2)}{a_1(0)} = \frac{b_2(0)}{a_1(0)} a_1(2),$$

$$k = 1$$

$$b_2(2) = \frac{b_2(1)a_1(3)}{a_1(1)} = \frac{a_1(3)}{a_1(1)} b_2(1) = \frac{b_2(0)a_1(2)a_1(3)}{a_1(0)a_1(1)},$$

$$k = 2$$

$$b_2(3) = \frac{a_1(4)}{a_1(2)} b_2(2) = \frac{b_2(0)a_1(2)a_1(3)a_1(4)}{a_1(0)a_1(1)a_1(2)} = \frac{b_2(0)a_1(3)a_1(4)}{a_1(0)a_1(1)},$$

$$k = 3$$

$$b_2(4) = \frac{b_2(3)a_1(5)}{a_1(3)} = \frac{a_1(5)}{a_1(3)} b_2(3) = \frac{b_2(0)a_1(3)a_1(4)a_1(5)}{a_1(0)a_1(1)a_1(3)} = \frac{b_2(0)a_1(4)a_1(5)}{a_1(0)a_1(1)},$$

$$k = 4$$

$$b_2(5) = \frac{b_2(4)a_1(6)}{a_1(4)} = \frac{a_1(6)}{a_1(4)} b_2(4) = \frac{b_2(0)a_1(4)a_1(5)a_1(6)}{a_1(0)a_1(1)a_1(4)} = \frac{b_2(0)a_1(5)a_1(6)}{a_1(0)a_1(1)}.$$

Genelleştirirsek;

$$b_2(k) = \frac{b_2(0)a_1(k)}{a_1(0)a_1(1)} a_1(k+1) \quad (3.2.19)$$

(3.2.13)'ü kullanarak ve (3.2.13)'teki $b_2(k)$ yerine (3.2.19)'deki karşılığını koyarsak

$$a_1(k+2) = \frac{c_3(k)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(k)a_1(k+1)};$$

$$k = 0,$$

$$a_1(2) = \frac{c_3(0)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(0)a_1(1)} = \frac{c_3(0)}{b_2(0)},$$

$$k = 1$$

$$a_1(3) = \frac{c_3(1)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(1)a_1(2)} = \frac{c_3(1)a_1(0)}{b_2(0)a_1(2)} = \frac{a_1(0)c_3(1)b_2(0)}{b_2(0)c_3(0)} = \frac{a_1(0)c_3(1)}{c_3(0)},$$

$$k = 2$$

$$a_1(4) = \frac{c_3(2)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(2)a_1(3)} = \frac{c_3(2)a_1(1)}{c_3(1)},$$

$$k = 3$$

$$a_1(5) = \frac{c_3(3)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(3)a_1(4)} = \frac{c_3(0)c_3(3)}{b_2(0)c_3(2)},$$

$$k = 4$$

$$a_1(6) = \frac{c_3(4)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(4)a_1(5)} = \frac{a_1(0)c_3(4)c_3(1)}{c_3(0)c_3(3)},$$

$k = 5$

$$\begin{aligned} a_1(7) &= \frac{c_3(5)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(5)a_1(6)} \\ &= \frac{c_3(5)a_1(0)a_1(1)b_2(0)c_3(2)c_3(0)c_3(3)}{b_2(0)c_3(0)c_3(3)a_1(0)c_3(4)c_3(1)} = \frac{a_1(1)c_3(5)c_3(2)}{c_3(1)c_3(4)}, \end{aligned}$$

$k = 6$

$$a_1(8) = \frac{c_3(6)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(6)a_1(7)} = \frac{c_3(0)c_3(6)c_3(3)}{b_2(0)c_3(5)c_3(2)},$$

$k = 7$

$$a_1(9) = \frac{c_3(7)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(7)a_1(8)} = \frac{a_1(0)c_3(7)c_3(4)c_3(1)}{c_3(0)c_3(6)c_3(3)},$$

$k = 8$

$$a_1(10) = \frac{c_3(8)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(8)a_1(9)} = \frac{a_1(1)c_3(8)c_3(5)c_3(2)}{c_3(1)c_3(7)c_3(4)},$$

$k = 9$

$$a_1(11) = \frac{c_3(9)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(9)a_1(10)} = \frac{c_3(0)c_3(9)c_3(6)c_3(3)}{b_2(0)c_3(8)c_3(5)c_3(2)}.$$

$a_1(k)$ 'yi genelleştirdikten sonra aşağıdaki denklem elde edilir.

$$a_1(k) = \begin{cases} \frac{c_3(0)}{b_2(0)}, & k = 2 \\ a_1(0) \prod_{i=1}^{\frac{k}{3}} \frac{c_3(3i-2)}{c_3(3i-3)}, & k = 3, 6, 9, \dots \\ a_1(1) \prod_{i=1}^{\frac{k-1}{3}} \frac{c_3(3i-1)}{c_3(3i-2)}, & k = 4, 7, 10, \dots \\ \frac{c_3(0)}{b_2(0)} \prod_{i=1}^{\frac{k-2}{3}} \frac{c_3(3i)}{c_3(3i-1)}, & k = 5, 8, 11, \dots \end{cases} \quad (3.2.20)$$

$b_1(k)$ değerini bulmak için, (3.2.14)'teki, $b_1(k+1)$ değerini çözüp, $b_2(k)$ değerini (3.2.19) ile değiştirelim.

$$b_1(k+1) = \frac{b_2(0)a_1(k+1)}{a_1(0)a_1(1)} [a_0(k+2) - a_0(k)] + \frac{a_1(k+1)}{a_1(k)} b_1(k),$$

$k = 0,$

$$b_1(1) = \frac{b_2(0)}{a_1(0)} [a_0(2) - a_0(0)] + \frac{b_1(0)}{a_1(0)} a_1(1),$$

$k = 1,$

$$\begin{aligned} b_1(2) &= \frac{b_2(0)a_1(2)}{a_1(0)a_1(1)} [a_0(3) - a_0(1)] + \frac{a_1(2)}{a_1(1)} b_1(1) \\ &= \frac{b_2(0)a_1(2)}{a_1(0)a_1(1)} [a_0(3) - a_0(2)] + \frac{a_1(2)}{a_1(1)} \frac{b_2(0)}{a_1(0)} [a_0(2) - a_0(0)] + \frac{b_1(0)}{a_1(0)} a_1(2) \\ &= \frac{b_2(0)a_1(2)}{a_1(0)a_1(1)} [a_0(3) - a_0(1) + a_0(2) - a_0(0)] + \frac{b_1(0)}{a_1(0)} a_1(2), \end{aligned}$$

Genel form;

$$\begin{aligned} b_1(k) &= \frac{b_2(0)a_1(k)}{a_1(0)a_1(1)} [a_0(k+1) - a_0(1) + a_0(k) - a_0(0)] \\ &\quad + \frac{b_1(0)}{a_1(0)} a_1(k) \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

$b_0(k)$ 'yi bulmak için (3.2.15)'deki $b_1(k+1)$ 'i çözüp, $b_1(k)$ 'yi (3.2.21) ile değiştirelim, ardından

$$\begin{aligned} b_0(k+1) &= \frac{b_2(0)}{a_1(0)a_1(1)} [a_0(k+1) - a_0(1) + a_0(k) - a_0(0)] [a_0(k+1) \\ &\quad - a_0(k)] + \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [a_0(k+1) - a_0(k)] + b_0(k) \end{aligned}$$

denklemini elde edilir.

$k = 0,$

$$\begin{aligned} b_0(1) &= \frac{b_2(0)}{a_1(0)a_1(1)} [a_0(1) - a_0(1) + a_0(0) - a_0(0)] [a_0(1) - a_0(0)] \\ &\quad + \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [a_0(1) - a_0(0)] + b_0(0) = \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [a_0(1) - a_0(0)] + b_0(0), \end{aligned}$$

$k = 1,$

$$\begin{aligned} b_0(2) &= \frac{b_2(0)}{a_1(0)a_1(1)} [a_0(2) - a_0(1) + a_0(1) - a_0(0)] [a_0(2) - a_0(1)] \\ &\quad + \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [a_0(2) - a_0(1)] + b_0(1) \\ &= \frac{b_2(0)}{a_1(0)a_1(1)} [a_0(2) - a_0(0)] [a_0(2) - a_0(1)] + \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [a_0(2) - a_0(1)] + b_0(1) \\ &= \frac{b_2(0)}{a_1(0)a_1(1)} [a_0(2) - a_0(0)] [a_0(2) - a_0(1)] + \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [a_0(2) - a_0(0)] + b_0(0). \end{aligned}$$

Genelleştirirsek;

$$\begin{aligned}
b_0(k) &= \frac{b_2(0)}{a_1(0)a_1(1)} [a_0(k) - a_0(0)][a_0(k) - a_0(1)] \\
&\quad + \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [a_0(k) - a_0(0)] + b_0(0)
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

elde edilir. $a_0(k)$ 'yi elde etmek için (3.2.15)'yi $a_0(k+2)$ için çözüp, $b_2(k)$ ve $b_1(k)$ değerlerini (3.2.19) ve (3.2.21)'de yerine koyalım.

$$\begin{aligned}
a_0(k+2) &= \frac{c_2(k)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(k)a_1(k+1)} - a_0(k+1) + a_0(1) - a_0(k) + a_0(0) \\
&\quad - \frac{b_1(0)}{b_2(0)} a_1(1);
\end{aligned}$$

$k = 0$,

$$a_0(2) = \frac{c_2(0)}{b_2(0)} - \frac{b_1(0)}{b_2(0)} a_1(1),$$

$k = 1$,

$$\begin{aligned}
a_0(3) &= \frac{a_1(0)c_2(1)}{b_2(0)a_1(2)} - a_0(2) + a_0(0) - \frac{b_1(0)}{b_2(0)} a_1(1) \\
&= \frac{a_1(0)c_2(1)}{b_2(0)a_1(2)} - \frac{c_2(0)}{b_2(0)} + a_0(0),
\end{aligned}$$

$k = 2$,

$$\begin{aligned}
a_0(4) &= \frac{c_2(2)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(2)a_1(3)} - a_0(3) - a_0(2) + a_0(1) + a_0(0) - \frac{b_1(0)}{b_2(0)} a_1(1) \\
&= \frac{a_1(0)c_2(2)a_1(1)}{b_2(0)a_1(2)a_1(3)} - \frac{a_1(0)c_2(1)}{b_2(0)a_1(2)} + a_0(1),
\end{aligned}$$

$k = 3$,

$$\begin{aligned}
a_0(5) &= \frac{c_2(3)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(3)a_1(4)} - a_0(4) - a_0(3) + a_0(1) + a_0(0) - \frac{b_1(0)}{b_2(0)} a_1(1) \\
&= \frac{c_2(3)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(3)a_1(4)} - \frac{a_1(0)c_2(2)a_1(1)}{b_2(0)a_1(2)a_1(3)} + \frac{c_2(0)}{b_2(0)} - \frac{b_1(0)}{b_2(0)} a_1(1),
\end{aligned}$$

$k = 4$,

$$\begin{aligned}
a_0(6) &= \frac{c_2(4)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(4)a_1(5)} - a_0(5) - a_0(4) + a_0(1) + a_0(0) - \frac{b_1(0)}{b_2(0)} a_1(1) \\
&= \frac{a_1(0)c_2(4)a_1(1)}{b_2(0)a_1(4)a_1(5)} - \frac{a_1(0)c_2(3)a_1(1)}{b_2(0)a_1(3)a_1(4)} + \frac{a_1(0)c_2(1)}{b_2(0)a_1(2)} - \frac{c_2(0)}{b_2(0)} + a_0(0),
\end{aligned}$$

$k = 5$,

$$a_0(7) = \frac{c_2(5)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(5)a_1(6)} - a_0(6) - a_0(5) + a_0(1) + a_0(0) - \frac{b_1(0)}{b_2(0)} a_1(1)$$

$$= \frac{a_1(0)c_2(5)a_1(1)}{b_2(0)a_1(5)a_1(6)} - \frac{a_1(0)c_2(4)a_1(1)}{b_2(0)a_1(4)a_1(5)} - \frac{a_1(0)c_2(1)}{b_2(0)a_1(2)} + \frac{a_1(0)c_2(2)a_1(1)}{b_2(0)a_1(2)a_1(3)} + a_0(1),$$

$k = 6,$

$$\begin{aligned} a_0(8) &= \frac{c_2(6)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(6)a_1(7)} - a_0(7) - a_0(6) + a_0(1) + a_0(0) - \frac{b_1(0)}{b_2(0)}a_1(1) \\ &= \frac{a_1(0)c_2(6)a_1(1)}{b_2(0)a_1(6)a_1(7)} - \frac{a_1(0)c_2(5)a_1(1)}{b_2(0)a_1(5)a_1(6)} + \frac{a_1(0)c_2(3)a_1(1)}{b_2(0)a_1(3)a_1(4)} \\ &\quad - \frac{a_1(0)c_2(2)a_1(1)}{b_2(0)a_1(2)a_1(3)} + \frac{c_2(0)}{b_2(0)} - \frac{b_1(0)}{b_2(0)}a_1(1), \end{aligned}$$

$k = 7,$

$$\begin{aligned} a_0(9) &= \frac{c_2(7)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(7)a_1(8)} - a_0(8) - a_0(7) + a_0(1) + a_0(0) - \frac{b_1(0)}{b_2(0)}a_1(1) \\ a_0(9) &= \frac{a_1(0)c_2(7)a_1(1)}{b_2(0)a_1(7)a_1(8)} - \frac{a_1(0)c_2(6)a_1(1)}{b_2(0)a_1(6)a_1(7)} - \frac{a_1(0)c_2(4)a_1(1)}{b_2(0)a_1(4)a_1(5)} \\ &\quad - \frac{a_1(0)c_2(3)a_1(1)}{b_2(0)a_1(3)a_1(4)} + \frac{a_1(0)c_2(1)}{b_2(0)a_1(2)} - \frac{c_2(0)}{b_2(0)} + a_0(0), \end{aligned}$$

$k = 8,$

$$\begin{aligned} a_0(10) &= \frac{c_2(8)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(8)a_1(9)} - a_0(9) - a_0(8) + a_0(1) + a_0(0) - \frac{b_1(0)}{b_2(0)}a_1(1) \\ &= \frac{a_1(0)c_2(8)a_1(1)}{b_2(0)a_1(8)a_1(9)} - \frac{a_1(0)c_2(7)a_1(1)}{b_2(0)a_1(7)a_1(8)} + \frac{a_1(0)c_2(4)a_1(1)}{b_2(0)a_1(4)a_1(5)} \\ &\quad - \frac{a_1(0)c_2(1)}{b_2(0)a_1(2)} + \frac{a_1(0)c_2(5)a_1(1)}{b_2(0)a_1(5)a_1(6)} + \frac{a_1(0)c_2(2)a_1(1)}{b_2(0)a_1(2)a_1(3)} + a_0(1), \end{aligned}$$

$k = 9,$

$$\begin{aligned} a_0(11) &= \frac{c_2(9)a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)a_1(9)a_1(10)} - a_0(10) - a_0(9) + a_0(1) + a_0(0) - \frac{b_1(0)}{b_2(0)}a_1(1) \\ &= \frac{a_1(0)c_2(9)a_1(1)}{b_2(0)a_1(9)a_1(10)} - \frac{a_1(0)c_2(8)a_1(1)}{b_2(0)a_1(8)a_1(9)} + \frac{a_1(0)c_2(6)a_1(1)}{b_2(0)a_1(6)a_1(7)} - \frac{a_1(0)c_2(5)a_1(1)}{b_2(0)a_1(5)a_1(6)} \\ &\quad + \frac{a_1(0)c_2(3)a_1(1)}{b_2(0)a_1(3)a_1(4)} - \frac{a_1(0)c_2(2)a_1(1)}{b_2(0)a_1(2)a_1(3)} \\ &\quad + \frac{c_2(0)}{b_2(0)} - \frac{b_1(0)}{b_2(0)}a_1(1). \end{aligned}$$

Genelleştirirsek,

$$a_0(k) = \begin{cases} \frac{c_2(0)}{b_2(0)} - \frac{b_1(0)}{b_2(0)} a_1(1), & k = 2 \\ \frac{a_1(0)}{b_2(0)} \sum_{i=0}^{\frac{k-3}{3}} \frac{c_2(3i+1)a_1(1)}{a_1(3i+1)a_1(3i+2)} - \frac{a_1(0)}{b_2(0)} \sum_{i=0}^{\frac{k-3}{3}} \frac{c_2(3i)a_1(1)}{a_1(3i)a_1(3i+1)} \\ \quad + a_0(0), & k = 3, 6, 9, \dots \\ \frac{a_1(0)}{b_2(0)} \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{3}} \frac{c_2(3i-1)a_1(1)}{a_1(3i-1)a_1(3i)} - \frac{a_1(0)}{b_2(0)} \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{3}} \frac{c_2(3i-2)a_1(1)}{a_1(3i-2)a_1(3i-1)} \\ \quad + a_0(1), & k = 4, 7, 10, \dots \\ \frac{a_1(0)}{b_2(0)} \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{3}} \frac{c_2(3i)a_1(1)}{a_1(3i)a_1(3i+1)} - \frac{a_1(0)}{b_2(0)} \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{3}} \frac{c_2(3i-1)a_1(1)}{a_1(3i-1)a_1(3i)} \\ \quad - \frac{b_1(0)}{b_2(0)} a_1(1), & k = 5, 8, 11, \dots \end{cases}$$

ifadesini elde ederiz. Son olarak düzenlersek

$$a_0(k) = \begin{cases} \frac{c_2(0)}{b_2(0)} - \frac{b_1(0)}{b_2(0)} a_1(1), & k = 2 \\ \frac{a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)} \sum_{i=0}^{\frac{k-3}{3}} \left[\frac{c_2(3i+1)}{a_1(3i+1)a_1(3i+2)} - \frac{c_2(3i)}{a_1(3i)a_1(3i+1)} \right] \\ \quad + a_0(0), & k = 3, 6, 9, \dots \\ \frac{a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)} \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{3}} \left[\frac{c_2(3i-1)}{a_1(3i-1)a_1(3i)} - \frac{c_2(3i-2)}{a_1(3i-2)a_1(3i-1)} \right] \\ \quad + a_0(1), & k = 4, 7, 10, \dots \\ \frac{a_1(0)a_1(1)}{b_2(0)} \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{3}} \left[\frac{c_2(3i)}{a_1(3i)a_1(3i+1)} - \frac{c_2(3i-1)}{a_1(3i-1)a_1(3i)} \right] \\ \quad - \frac{b_1(0)}{b_2(0)} a_1(1) + \frac{c_2(0)}{b_2(0)}, & k = 5, 8, 11, \dots \end{cases} \quad (3.2.23)$$

elde edilir. (3.2.20)'deki $a_1(k)$ değerleri (3.2.22)'ye konulup düzenlenirse, $a_0(k)$ için çözüm,

$$\begin{aligned}
& a_0(k) \\
& = \begin{cases} -\frac{b_1(0)}{b_2(0)}a_1(1) + A(0), & k = 2 \\ \frac{A(k-2)}{A(k-1)A(k-2)} - \frac{A(k-3)}{A(k-2)A(k-3)} + a_0(0), & k = 3,6,9, \dots \\ \frac{A(k-2)}{A(k-1)A(k-2)} - \frac{A(k-3)}{A(k-2)A(k-3)} + a_0(1), & k = 4,7,10, \dots \\ \frac{A(k-2)}{A(k-1)A(k-2)} - \frac{A(k-3)}{A(k-2)A(k-3)} - \frac{b_1(0)}{b_2(0)}a_1(1), & k = 5,8,11, \dots \end{cases} \quad (3.2.24)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Genel çözüm elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
& A(k) \\
& = \begin{cases} \frac{c_2(0)}{b_2(0)} - \frac{b_1(0)}{b_2(0)}a_1(1), & k = 2 \\ \sum_{i=0}^{\frac{k-3}{3}} \left[c_2(3i+1) \frac{a_1(0)}{c_3(0)} \prod_{m=1}^i \frac{c_3(3m-2)}{c_3(3m)} - \frac{1}{b_2(0)}c_2(3i) \prod_{m=1}^i \frac{c_3(3m-3)}{c_3(3m-1)} \right] \\ \quad + a_0(0), & k = 3,6,9, \dots \\ \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{3}} \left[c_2(3i-1) \frac{a_1(0)}{c_3(0)} \prod_{m=1}^i \frac{c_3(3m-1)}{c_3(3m-2)} - \frac{1}{b_2(0)}c_2(3i-2) \prod_{m=1}^{i-1} \frac{c_3(3m-2)}{c_3(3m)} \right] \\ \quad + a_0(1), & k = 4,7,10, \dots \\ \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{3}} \left[c_2(3i) \frac{1}{b_2(0)} \prod_{m=1}^i \frac{c_3(3m-3)}{c_3(3m-1)} - c_2(3i-1) \frac{a_1(1)}{c_3(1)} \prod_{m=1}^{i-1} \frac{c_3(3m-1)}{c_3(3i+1)} \right] \\ \quad + \frac{c_2(0)}{b_2(0)} - \frac{b_1(0)}{b_2(0)}a_1(1), & k = 5,8,11, \dots \end{cases} \quad (3.2.25)
\end{aligned}$$

Şimdi, bulunan denklemler göz önünde bulundurduğunda, birbirleriyle değişmeli olan birinci ve ikinci dereceden A ve B alt sistemlerinin ardışık bağlantısı olarak üçüncü dereceden C sisteminin nasıl gerçekleştirileceğinin adımları aşağıdaki gibi sıralanabilir;

Adım 1: $k = 0,1, \dots, 6$ için Adım 7'yi dikkate alarak 7 katsayı uygun şekilde seçilir.

$$a_0(0), a_0(1), a_1(0) \neq 0, a_1(1) \neq 0,$$

$$b_0(0), b_1(0), b_2(0) \neq 0.$$

Adım 2: (3.2.20) kullanılarak $a_1(k)$ hesaplanır.

$$a_1(k) = \begin{cases} \frac{c_3(0)}{b_2(0)}, & k = 2 \\ a_1(0) \prod_{i=1}^{\frac{k}{3}} \frac{c_3(3i-2)}{c_3(3i-3)}, & k = 3, 6, 9, \dots \\ a_1(1) \prod_{i=1}^{\frac{k-1}{3}} \frac{c_3(3i-1)}{c_3(3i-2)}, & k = 4, 7, 10, \dots \\ \frac{c_3(0)}{b_2(0)} \prod_{i=1}^{\frac{k-2}{3}} \frac{c_3(3i)}{c_3(3i-1)}, & k = 5, 8, 11, \dots \end{cases} \quad (3.2.26)$$

Adım 3: Bulunan $a_1(k)$ değerleri (3.2.19)'a eklenerek $b_2(k)$ hesaplanır.

$$b_2(k) = \begin{cases} \frac{c_3(0)}{a_1(0)}, & k = 1 \\ \frac{c_3(1)}{a_1(1)}, & k = 2 \\ b_2(0) \prod_{i=1}^{\frac{k}{3}} \frac{c_3(3i-1)}{c_3(3i-3)}, & k = 3, 6, 9, \dots \\ \frac{c_3(0)}{a_1(0)} \prod_{i=1}^{\frac{k-1}{3}} \frac{c_3(3i)}{c_3(3i-2)}, & k = 4, 7, 10, \dots \\ \frac{c_3(1)}{a_1(1)} \prod_{i=1}^{\frac{k-2}{3}} \frac{c_3(3i+1)}{c_3(3i-1)}, & k = 5, 8, 11, \dots \end{cases} \quad (3.2.27)$$

Adım 4: (3.2.20) ve (3.2.22)'yi (3.2.21)'de kullanarak $b_1(k)$ hesaplanır:

$$b_1(k) = \begin{cases} \frac{c_2(0)}{a_1(0)} - \frac{b_2(0)}{a_1(0)} a_0(0), & k = 1 \\ \frac{c_2(1)}{a_1(1)} - \frac{c_3(0)a_0(1)}{a_1(0)a_1(1)}, & k = 2 \\ \prod_{i=1}^{\frac{k}{3}} \frac{c_3(3i-2)}{c_3(3i-3)} \left\{ a_1(0) \sum_{i=1}^{\frac{k-3}{3}} \left[\frac{c_2(3i-1)}{a_1(3i-1)a_1(3i)} - \frac{c_2(3i)}{a_1(3i)a_1(3i+1)} \right] \right. \\ \quad \left. + \frac{b_2(0)b_1(0)}{a_1(1)} \prod_{i=1}^{\frac{k}{3}} \frac{c_3(3i-2)}{c_3(3i-3)} \right\}, & k = 3, 6, 9, \dots \\ \prod_{i=1}^{\frac{k-1}{3}} \frac{c_3(3i-1)}{c_3(3i-2)} \left\{ a_1(1) \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{3}} \left[\frac{c_2(3i)}{a_1(3i)a_1(3i+1)} - \frac{c_2(3i-2)}{a_1(3i-2)a_1(3i-1)} \right] \right. \\ \quad \left. + \frac{c_2(0)}{a_1(0)} - \frac{b_2(0)a_0(0)}{a_1(0)} \right\}, & k = 4, 7, 10, \dots \\ \prod_{i=1}^{\frac{k-2}{3}} \frac{c_3(3i)}{c_3(3i-1)} \left\{ \frac{c_2(1)}{a_1(1)} + \frac{c_3(0)}{b_2(0)} \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{3}} \left[\frac{c_2(3i+1)}{a_1(3i+1)a_1(3i+2)} - \frac{c_2(3i-1)}{a_1(3i-1)a_1(3i)} \right] \right. \\ \quad \left. - \frac{a_0(1)c_3(0)}{a_1(0)a_1(1)} \right\}, & k = 5, 8, 11, \dots \end{cases} \quad (3.2.28)$$

Adım 5: (3.2.23) veya (3.2.25)'den $a_2(k)$ hesaplanır:

$$a_0(k) = \begin{cases} -\frac{b_1(0)}{b_2(0)} a_1(1) + A(0), & k = 2 \\ \frac{A(k-2)}{A(k-1)A(k-2)} - \frac{A(k-3)}{A(k-2)A(k-3)} + a_0(0), & k = 3, 6, 9, \dots \\ \frac{A(k-2)}{A(k-1)A(k-2)} - \frac{A(k-3)}{A(k-2)A(k-3)} + a_0(1), & k = 4, 7, 10, \dots \\ \frac{A(k-2)}{A(k-1)A(k-2)} - \frac{A(k-3)}{A(k-2)A(k-3)} - \frac{b_1(0)}{b_2(0)} a_1(1), & k = 5, 8, 11, \dots \end{cases} \quad (3.2.29)$$

Adım 6: (3.2.23)'ü (3.2.20)'ye ekleyerek $b_0(k)$ hesaplanır:

$$\begin{aligned}
 & b_0(k) \\
 = & \left\{ \begin{aligned} & \frac{b_1(0)}{a_1(0)} [a_0(k) - a_0(0)] + b_0(0), \quad k = 1 \\ & \left[\frac{a_1(1)}{b_2(0)} \sum_{i=0}^{\frac{k-3}{3}} \left(\frac{c_2(3i+1)}{a_1(3i+1)a_1(3i+2)} - \frac{c_2(3i)}{a_1(3i)a_1(3i+1)} \right) \right] \left[\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{3}} \left(\frac{c_2(3i+1)}{a_1(3i+1)a_1(3i+2)} - \frac{c_2(3i)}{a_1(3i)a_1(3i+1)} \right) \right] \\ & + \frac{a_0(0)}{a_1(0)} \frac{b_2(0)}{a_1(1)} - \frac{a_0(1)}{a_1(0)} \frac{b_2(0)}{a_1(1)} \Big] + \frac{b_1(0)}{a_1(0)} \Big\} + b_0(0), k = 3, 6, 9, \dots \\ & \left[\frac{a_1(1)}{b_2(0)} \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{3}} \left(\frac{c_2(3i-1)}{a_1(3i-1)a_1(3i)} - \frac{c_2(3i-2)}{a_1(3i-2)a_1(3i-1)} \right) + \frac{a_0(1)}{a_1(0)} \right. \\ & \left. - \frac{a_0(0)}{a_1(0)} \right] \left\{ \left[\sum_{i=1}^{\frac{k-1}{3}} \left(\frac{c_2(3i-1)}{a_1(3i-1)a_1(3i)} - \frac{c_2(3i-2)}{a_1(3i-2)a_1(3i-1)} \right) \right] + \frac{b_1(0)}{a_1(0)} \right\} + b_0(0) k = 4, 7, \dots \quad (3.2.30) \\ & \left[\frac{a_1(1)}{b_2(0)} \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{3}} \left(\frac{c_2(3i)}{a_1(3i)a_1(3i+1)} - \frac{c_2(3i-1)}{a_1(3i-1)a_1(3i)} \right) - \frac{a_1(1)}{a_1(0)} \frac{b_1(0)}{b_2(0)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{a_1(0)} \frac{c_2(0)}{b_2(0)} - \frac{a_0(0)}{a_1(0)} \right] \left\{ \left[\sum_{i=1}^{\frac{k-2}{3}} \left(\frac{c_2(3i)}{a_1(3i)a_1(3i+1)} - \frac{c_2(3i-1)}{a_1(3i-1)a_1(3i)} \right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{b_1(0)}{a_1(1)} \frac{1}{a_1(0)} + \frac{c_2(0)}{a_1(0)} \right] + \frac{b_1(0)}{a_1(0)} \Big\} + b_0(0), \quad k = 2, 5, 8, \dots \end{aligned}
 \right.
 \end{aligned}$$

4. DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN SİSTEMLERİN AYRIŞTIRILMASI

4.1. Dördüncü Mertebeden Sistemlerin Komütativitesi

A ve B sistemleri aşağıdaki doğrusal dördüncü dereceden fark denklemleri ile tanımlansın:

$$A: a_4(k)y_A(k+4) + a_3(k)y_A(k+3) + a_2(k)y_A(k+2) + a_1(k)y_A(k+1) + a_0(k)y_A(k) = x_A(k) \quad (4.1)$$

$$B: b_4(k)y_B(k+4) + b_3(k)y_B(k+3) + b_2(k)y_B(k+2) + b_1(k)y_B(k+1) + b_0(k)y_B(k) = x_B(k). \quad (4.2)$$

Denklem (4.2)'de, k yerine $k+1$, $k+2$, $k+3$, $k+4$ yazarsak,

$$\begin{aligned} & b_4(k+1)y_B(k+5) + b_3(k+1)y_B(k+4) + b_2(k+1)y_B(k+3) \\ & + b_1(k+1)y_B(k+2) + b_0(k+1)y_B(k+1) = x_B(k+1) = y_A(k+1), \\ & b_4(k+2)y_B(k+6) + b_3(k+2)y_B(k+5) + b_2(k+2)y_B(k+4) \\ & + b_1(k+2)y_B(k+3) + b_0(k+2)y_B(k+2) = x_B(k+2) = y_A(k+2), \\ & b_4(k+3)y_B(k+7) + b_3(k+3)y_B(k+6) + b_2(k+3)y_B(k+5) \\ & + b_1(k+3)y_B(k+4) + b_0(k+3)y_B(k+3) = x_B(k+3) = y_A(k+3), \\ & b_4(k+4)y_B(k+8) + b_3(k+4)y_B(k+7) + b_2(k+4)y_B(k+6) \\ & + b_1(k+4)y_B(k+5) + b_0(k+4)y_B(k+4) = x_B(k+4) = y_A(k+4). \end{aligned}$$

Burada $y_A(i)$ değerlerini $i = k+1, k+2, k+3, k+4$ için denklem (4.1)'de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & a_4(k)[b_4(k+4)y_B(k+8) + b_3(k+4)y_B(k+7) + b_2(k+4)y_B(k+6) \\ & + b_1(k+4)y_B(k+5) + b_0(k+4)y_B(k+4)] + a_3(k)[b_4(k+3)y_B(k+7) \\ & + b_3(k+3)y_B(k+6) + b_2(k+3)y_B(k+5) + b_1(k+3)y_B(k+4) \\ & + b_0(k+3)y_B(k+3)] + a_2(k)[b_4(k+2)y_B(k+6) + b_3(k+2)y_B(k+5) \\ & + b_2(k+2)y_B(k+4) + b_1(k+2)y_B(k+3) + b_0(k+2)y_B(k+2)] \\ & + a_1(k)[b_4(k+1)y_B(k+5) + b_3(k+1)y_B(k+4) + b_2(k+1)y_B(k+3) \\ & + b_1(k+1)y_B(k+2) + b_0(k+1)y_B(k+1)] + a_0(k)[b_4(k)y_B(k+4) \\ & + b_3(k)y_B(k+3) + b_2(k)y_B(k+2) + b_1(k)y_B(k+1) + b_0(k)y_B(k)] = x_A(k). \\ & x_A(k) = x(k), x_B(k) = y_A(k), y_B(k) = y(k) \end{aligned}$$

eşitliğini kullanarak yeniden düzenlersek,

$$\begin{aligned} AB: & a_4(k) b_4(k+4)y(k+8) \\ & + [a_4(k) b_3(k+4) + a_3(k)b_4(k+3)]y(k+7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[a_4(k)b_2(k+4) + a_3(k)b_3(k+3) + a_2(k)b_4(k+2)]y(k+6) \\
& +[a_4(k)b_1(k+4) + a_3(k)b_2(k+3) + a_2(k)b_3(k+2) \\
& \quad + a_1(k)b_4(k+1)]y(k+5) \\
& +[a_4(k)b_0(k+4) + a_3(k)b_1(k+3) + a_2(k)b_2(k+2) + a_1(k)b_3(k+1) \\
& \quad + a_0(k)b_4(k)]y(k+4) \\
& +[a_3(k)b_0(k+3) + a_2(k)b_1(k+2) + a_1(k)b_2(k+1) + a_0(k)b_3(k)]y(k+3) \\
& +[a_2(k)b_0(k+2) + a_1(k)b_1(k+1) + a_0(k)b_2(k)]y(k+2) \\
& +[a_1(k)b_0(k+1) + a_0(k)b_1(k)]y(k+1) \\
& +a_0(k)b_0(k)y(k) = x(k). \tag{4.3}
\end{aligned}$$

AB bağlantısını tanımlayan fark denklemini elde etmek için, BA bağlantısı için yukarıdaki işlemleri takip edebiliriz, bunun yerine a_i ve b_i katsayılarını birbirleriyle değiştirebiliriz; böylece,

$$\begin{aligned}
& BA: b_4(k)a_4(k+4)y(k+8) \\
& +[b_4(k)a_3(k+4) + b_3(k)a_4(k+3)]y(k+7) \\
& +[b_4(k)a_2(k+4) + b_3(k)a_3(k+3) + b_2(k)a_4(k+2)]y(k+6) \\
& +[b_4(k)a_1(k+4) + b_3(k)a_2(k+3) + b_2(k)a_3(k+2) \\
& \quad + b_1(k)a_4(k+1)]y(k+5) \\
& +[b_4(k)a_0(k+4) + b_3(k)a_1(k+3) + b_2(k)a_2(k+2) + b_1(k)a_3(k+1) \\
& \quad + b_0(k)a_4(k)]y(k+4) \\
& +[b_3(k)a_0(k+3) + b_2(k)a_1(k+2) + b_1(k)a_2(k+1) + b_0(k)a_3(k)]y(k+3) \\
& +[b_2(k)a_0(k+2) + b_1(k)a_1(k+1) + b_0(k)a_2(k)]y(k+2) \\
& +[b_1(k)a_0(k+1) + b_0(k)a_1(k)]y(k+1) \\
& +b_0(k)y_B(k) = x_B(k). \tag{4.4}
\end{aligned}$$

AB ve BA bağlantıları için $y(i)$ katsayılarını $i = k+8, k+7, \dots, k+1$ ile karşılaştırdığımızda ($i = k$ durumu bir özdeşlik verdiği için ihmal edilmiştir), A ve B alt öğelerinin $2 \times 5 = 10$ katsayısı arasında 8 denklem elde ederiz:

$$a_4(k)b_4(k+4) = b_4(k)a_4(k+4), \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
a_4(k)b_3(k+4) + a_3(k)b_4(k+3) &= b_4(k)a_3(k+4) \\
&+ b_3(k)a_4(k+3), \tag{4.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_4(k)b_2(k+4) + a_3(k)b_3(k+3) + a_2(k)b_4(k+2) \\
&= b_4(k)a_2(k+4) + b_3(k)a_3(k+3) + b_2(k)a_4(k+2), \\
& \quad + b_2(k)a_4(k+2), \tag{4.7}
\end{aligned}$$

$$a_4(k)b_1(k+4) + a_3(k)b_2(k+3) + a_2(k)b_3(k+2) + a_1(k)b_4(k+1)$$

$$= b_4(k)a_1(k+4) + b_3(k)a_2(k+3) + b_2(k)a_3(k+2) + b_1(k)a_4(k+1), \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} a_4(k)b_0(k+4) + a_3(k)b_1(k+3) + a_2(k)b_2(k+2) + a_1(k)b_3(k+1) \\ + a_0(k)b_4(k) = b_4(k)a_0(k+4) + b_3(k)a_1(k+3) \\ + b_2(k)a_2(k+2) + b_1(k)a_3(k+1) + b_0(k)a_4(k) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} a_3(k)b_0(k+3) + a_2(k)b_1(k+2) + a_1(k)b_2(k+1) + a_0(k)b_3(k) \\ + b_2(k)a_1(k+2) + b_1(k)a_2(k+1) + b_0(k)a_3(k), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} a_2(k)b_0(k+2) + a_1(k)b_1(k+1) + a_0(k)b_2(k) = b_2(k)a_0(k+2) \\ + b_1(k)a_1(k+1) + b_0(k)a_2(k), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$a_1(k)b_0(k+1) + a_0(k)b_1(k) = b_1(k)a_0(k+1) + b_0(k)a_1(k), \quad (4.10)$$

Denklem (4.5)'ten

$$b_4(k+4) = \frac{a_4(k+4)}{a_4(k)} b_4(k)$$

$k = 0$

$$b_4(4) = \frac{a_4(4)}{a_4(0)} b_4(0)$$

$k = 1$

$$b_4(5) = \frac{a_4(5)}{a_4(1)} b_4(1)$$

$k = 2$

$$b_4(6) = \frac{a_4(6)}{a_4(2)} b_4(2)$$

$k = 3$

$$b_4(7) = \frac{a_4(7)}{a_4(3)} b_4(3)$$

$k = 4$

$$b_4(8) = \frac{a_4(8)}{a_4(4)} b_4(4) = \frac{a_4(8)}{a_4(4)} \frac{a_4(4)}{a_4(0)} b_4(0) = \frac{a_4(8)}{a_4(0)} b_4(0)$$

$k = 5$

$$b_4(9) = \frac{a_4(9)}{a_4(5)} b_4(5) = \frac{a_4(9)}{a_4(5)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} b_4(1) = \frac{a_4(9)}{a_4(1)} b_4(1)$$

$k = 6$

$$b_4(10) = \frac{a_4(10)}{a_4(6)} b_4(6) = \frac{a_4(10)}{a_4(6)} \frac{a_4(6)}{a_4(2)} b_4(2) = \frac{a_4(10)}{a_4(2)} b_4(2)$$

$k = 7$

$$b_4(11) = \frac{a_4(11)}{a_4(7)} b_4(7) = \frac{a_4(11)}{a_4(7)} \frac{a_4(7)}{a_4(3)} b_4(3) = \frac{a_4(11)}{a_4(3)} b_4(3)$$

$$b_4(k) = \begin{cases} \frac{a_4(k)}{a_4(0)} b_4(0), & k = 4, 8, 12, \dots \\ \frac{a_4(k)}{a_4(1)} b_4(1), & k = 5, 9, 13, \dots \\ \frac{a_4(k)}{a_4(2)} b_4(2), & k = 6, 10, 14, \dots \\ \frac{a_4(k)}{a_4(3)} b_4(3), & k = 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

bulunur.

Denklem (4.6)'dan,

$$b_3(k+4) = \frac{a_3(k+4)}{a_4(k)} b_4(k) - \frac{a_3(k)}{a_4(k)} b_4(k+3) + \frac{a_4(k+3)}{a_4(k)} b_3(k);$$

$k = 0$

$$b_3(4) = \frac{a_3(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_4(3) + \frac{a_4(3)}{a_4(0)} b_3(0),$$

$k = 1$

$$\begin{aligned} b_3(5) &= \frac{a_3(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} b_4(4) + \frac{a_4(4)}{a_4(1)} b_3(1) \\ &= \frac{a_3(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_4(4)}{a_4(0)} b_4(0) + \frac{a_4(4)}{a_4(1)} b_3(1), \end{aligned}$$

$k = 2$

$$\begin{aligned} b_3(6) &= \frac{a_3(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2)}{a_4(2)} b_4(5) + \frac{a_4(5)}{a_4(2)} b_3(2) \\ &= \frac{a_3(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} b_4(1) + \frac{a_4(5)}{a_4(2)} b_3(2), \end{aligned}$$

$k = 3$

$$\begin{aligned} b_3(7) &= \frac{a_3(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} b_4(6) + \frac{a_4(6)}{a_4(3)} b_3(3) \\ &= \frac{a_3(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_4(6)}{a_4(2)} b_4(2) + \frac{a_4(6)}{a_4(3)} b_3(3), \end{aligned}$$

$k = 4$

$$b_3(8) = \frac{a_3(8)}{a_4(4)} b_4(4) - \frac{a_3(4)}{a_4(4)} b_4(7) + \frac{a_4(7)}{a_4(4)} b_3(4)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_3(8) a_4(4)}{a_4(4) a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_3(4) a_4(7)}{a_4(4) a_4(3)} b_4(3) + \frac{a_4(7)}{a_4(4)} b_3(4) \\
&= \frac{a_3(8) a_4(4)}{a_4(4) a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_3(4) a_4(7)}{a_4(4) a_4(3)} b_4(3) \\
&\quad + \frac{a_4(7)}{a_4(4)} \left[\frac{a_3(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_4(3) + \frac{a_4(3)}{a_4(0)} b_3(0) \right] \\
&= - \left[\frac{a_3(4) a_4(7)}{a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_4(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(3) + \left[\frac{a_3(8)}{a_4(0)} + \frac{a_4(7) a_3(4)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(0) \\
&\quad + \frac{a_4(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} b_3(0),
\end{aligned}$$

$k = 5$

$$\begin{aligned}
b_3(9) &= \frac{a_3(9)}{a_4(5)} b_4(5) - \frac{a_3(5)}{a_4(5)} b_4(8) + \frac{a_4(8)}{a_4(5)} b_3(5) \\
&= \frac{a_3(9) a_4(5)}{a_4(5) a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(5) a_4(8)}{a_4(5) a_4(0)} b_4(0) + \frac{a_4(8)}{a_4(5)} \left[\frac{a_3(5)}{a_4(1)} b_4(1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_3(1) a_4(4)}{a_4(1) a_4(0)} b_4(0) + \frac{a_4(4)}{a_4(1)} b_3(1) \right] \\
&= \left[\frac{a_3(9)}{a_4(1)} + \frac{a_4(8) a_3(5)}{a_4(5) a_4(1)} \right] b_4(1) - \left[\frac{a_3(5) a_4(8)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_4(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) \\
&\quad + \frac{a_4(8) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1)} b_3(1),
\end{aligned}$$

$k = 6$

$$\begin{aligned}
b_3(10) &= \frac{a_3(10)}{a_4(6)} b_4(6) - \frac{a_3(6)}{a_4(6)} b_4(9) + \frac{a_4(9)}{a_4(6)} b_3(6) \\
&= \frac{a_3(10) a_4(6)}{a_4(6) a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(6) a_4(9)}{a_4(6) a_4(1)} b_4(1) \\
&\quad + \frac{a_4(9)}{a_4(6)} \left[\frac{a_3(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2) a_4(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) + \frac{a_4(5)}{a_4(2)} b_3(2) \right] \\
&= \left[\frac{a_3(10)}{a_4(2)} + \frac{a_4(9) a_3(6)}{a_4(6) a_4(2)} \right] b_4(2) - \left[\frac{a_3(6) a_4(9)}{a_4(6) a_4(1)} + \frac{a_4(9) a_3(2) a_4(5)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(1) \\
&\quad + \frac{a_4(9) a_4(5)}{a_4(6) a_4(2)} b_3(2),
\end{aligned}$$

$k = 7$

$$b_3(11) = \frac{a_3(11)}{a_4(7)} b_4(7) - \frac{a_3(7)}{a_4(7)} b_4(10) + \frac{a_4(10)}{a_4(7)} b_3(7)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_3(11) a_4(7)}{a_4(7) a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(7) a_4(10)}{a_4(7) a_4(2)} b_4(2) + \frac{a_4(10)}{a_4(7)} \left[\frac{a_3(7)}{a_4(3)} b_4(3) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_3(3) a_4(6)}{a_4(3) a_4(2)} b_4(2) + \frac{a_4(6)}{a_4(3)} b_3(3) \right] \\
&= \left[\frac{a_3(11)}{a_4(3)} + \frac{a_4(10) a_3(7)}{a_4(7) a_4(3)} \right] b_4(3) - \left[\frac{a_3(7) a_4(10)}{a_4(7) a_4(6)} + \frac{a_4(10) a_3(3) a_4(6)}{a_4(7) a_4(3) a_4(2)} \right] b_4(2) \\
&\quad + \frac{a_4(10) a_4(6)}{a_4(7) a_4(3)} b_3(3)
\end{aligned}$$

bulunur.

Denklem (4.7)'den,

$$\begin{aligned}
b_2(k+4) &= \frac{a_2(k+4)}{a_4(k)} b_4(k) - \frac{a_2(k)}{a_4(k)} b_4(k+2) + \frac{a_3(k+3)}{a_4(k)} b_3(k) \\
&\quad - \frac{a_3(k)}{a_4(k)} b_3(k+3) + \frac{a_4(k+2)}{a_4(k)} b_2(k);
\end{aligned}$$

$k = 0$

$$b_2(4) = \frac{a_2(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_4(2) + \frac{a_3(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_3(3) + \frac{a_4(2)}{a_4(0)} b_2(0),$$

$k = 1$

$$\begin{aligned}
b_2(5) &= \frac{a_2(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} b_4(3) + \frac{a_3(4)}{a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} b_3(4) + \frac{a_4(3)}{a_4(1)} b_2(1) \\
&= \frac{a_2(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} b_4(3) + \frac{a_3(4)}{a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \left[\frac{a_3(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_4(3) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(3)}{a_4(0)} b_2(0) \right] + \frac{a_4(3)}{a_4(1)} b_2(1) \\
&= - \left[\frac{a_2(1)}{a_4(1)} - \frac{a_3(1) a_3(0)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(3) + \frac{a_2(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1) a_3(4)}{a_4(1) a_4(0)} b_4(0) \\
&\quad + \frac{a_3(4)}{a_4(1)} b_3(1) + \frac{a_4(3)}{a_4(1)} b_2(1) - \frac{a_3(1) a_4(3)}{a_4(1) a_4(0)} b_2(0),
\end{aligned}$$

$k = 2$

$$\begin{aligned}
b_2(6) &= \frac{a_2(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_2(2)}{a_4(2)} b_4(4) + \frac{a_3(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_3(2)}{a_4(2)} b_3(5) + \frac{a_4(4)}{a_4(2)} b_2(2) \\
&= \frac{a_2(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_2(2) a_4(4)}{a_4(2) a_4(0)} b_4(0) + \frac{a_3(5)}{a_4(2)} b_3(2) \\
&\quad - \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \left[\frac{a_3(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1) a_4(4)}{a_4(1) a_4(0)} b_4(0) + \frac{a_4(4)}{a_4(1)} b_3(1) \right] + \frac{a_4(4)}{a_4(2)} b_2(2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_2(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2) a_3(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) - \left[\frac{a_2(2) a_4(4)}{a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(1) a_4(4)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) \\
&\quad + \frac{a_3(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_3(2) a_4(4)}{a_4(2) a_4(1)} b_3(1) + \frac{a_4(4)}{a_4(2)} b_2(2),
\end{aligned}$$

$k = 3$

$$\begin{aligned}
b_2(7) &= \frac{a_2(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_2(3)}{a_4(3)} b_4(5) + \frac{a_3(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} b_3(6) + \frac{a_4(5)}{a_4(3)} b_2(3) \\
&= \frac{a_2(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_2(3) a_4(5)}{a_4(3) a_4(1)} b_4(1) + \frac{a_3(6)}{a_4(3)} b_3(3) \\
&\quad - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \left[\frac{a_3(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2) a_4(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) + \frac{a_4(5)}{a_4(2)} b_3(2) \right] + \frac{a_4(5)}{a_4(3)} b_2(3) \\
&= \frac{a_2(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(3) a_3(6)}{a_4(3) a_4(2)} b_4(2) - \left[\frac{a_2(3) a_4(5)}{a_4(3) a_4(1)} - \frac{a_3(2) a_4(5)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(1) \\
&\quad + \frac{a_3(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3) a_4(5)}{a_4(3) a_4(2)} b_3(2) + \frac{a_4(5)}{a_4(3)} b_2(3),
\end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned}
b_2(8) &= \frac{a_2(8)}{a_4(4)} b_4(4) - \frac{a_2(4)}{a_4(4)} b_4(6) + \frac{a_3(7)}{a_4(4)} b_3(4) - \frac{a_3(4)}{a_4(4)} b_3(7) + \frac{a_4(6)}{a_4(4)} b_2(4) \\
&= \frac{a_2(8) a_4(4)}{a_4(4) a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_2(4) a_4(6)}{a_4(4) a_4(2)} b_4(2) + \frac{a_3(7)}{a_4(4)} \left[\frac{a_3(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_4(3) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(3)}{a_4(0)} b_3(0) \right] - \frac{a_3(4)}{a_4(4)} \left[\frac{a_3(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(3) a_4(6)}{a_4(3) a_4(2)} b_4(2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(6)}{a_4(3)} b_3(3) \right] + \frac{a_4(6)}{a_4(4)} \left[\frac{a_2(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_4(2) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_3(3) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(2)}{a_4(0)} b_2(0) \right] \\
&= - \left[\frac{a_3(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_3(7)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_4(3) - \left[\frac{a_2(4) a_4(6)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(4) a_3(3) a_4(6)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(2) + \left[\frac{a_2(8)}{a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_3(4)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(6) a_2(4)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(0) \\
&\quad - \left[\frac{a_3(4) a_4(6)}{a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_4(6) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_3(3) + \frac{a_3(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_4(6) a_4(2)}{a_4(4) a_4(0)} b_2(0),
\end{aligned}$$

$k = 5$

$$b_2(9) = \frac{a_2(9)}{a_4(5)} b_4(5) - \frac{a_2(5)}{a_4(5)} b_4(7) + \frac{a_3(8)}{a_4(5)} b_3(5) - \frac{a_3(5)}{a_4(5)} b_3(8) + \frac{a_4(7)}{a_4(5)} b_2(5)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_2(9)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_2(5) a_4(7)}{a_4(5) a_4(3)} b_4(3) \\
&\quad + \frac{a_3(8)}{a_4(5)} \left[\frac{a_3(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1) a_4(4)}{a_4(1) a_4(0)} b_4(0) + \frac{a_4(4)}{a_4(1)} b_3(1) \right] \\
&\quad - \frac{a_3(5)}{a_4(5)} \left\{ \left[\frac{a_3(8)}{a_4(0)} + \frac{a_4(7) a_3(4)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_3(4) a_4(7)}{a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_4(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(3) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} b_3(0) \right\} \\
&\quad + \frac{a_4(7)}{a_4(5)} \left\{ - \left[\frac{a_2(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_4(3) + \frac{a_2(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1) a_3(4)}{a_4(1) a_4(0)} b_4(0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_3(4)}{a_4(1)} b_3(1) + \frac{a_4(3)}{a_4(1)} b_2(1) - \frac{a_3(1) a_4(3)}{a_4(1) a_4(0)} b_2(0) \right\} \\
&= - \left[\frac{a_2(5) a_4(7)}{a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(7) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(0)} \right] b_4(3) + \left[\frac{a_2(9)}{a_4(1)} + \frac{a_3(8) a_3(5)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(7) a_2(5)}{a_4(5) a_4(1)} \right] b_4(1) \\
&\quad - \left[\frac{a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_3(8)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) + \left[\frac{a_3(8) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1)} \right] b_3(1) \\
&\quad - \frac{a_3(5) a_4(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_4(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1)} b_2(1) + \frac{a_4(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} b_2(0),
\end{aligned}$$

$k = 6$

$$\begin{aligned}
b_2(10) &= \frac{a_2(10)}{a_4(6)} b_4(6) - \frac{a_2(6)}{a_4(6)} b_4(8) + \frac{a_3(8)}{a_4(5)} b_3(6) - \frac{a_3(6)}{a_4(6)} b_3(9) + \frac{a_4(8)}{a_4(6)} b_2(6) \\
&= \frac{a_2(10)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_2(6) a_4(8)}{a_4(6) a_4(0)} b_4(0) + \frac{a_3(8)}{a_4(5)} \left[\frac{a_3(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2) a_4(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(5)}{a_4(2)} b_3(2) \right] - \frac{a_3(6)}{a_4(6)} \left\{ \left[\frac{a_3(9)}{a_4(1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_4(8) a_3(5)}{a_4(5) a_4(1)} \right] b_4(1) - \left[\frac{a_3(5) a_4(8)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_4(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(8) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1)} b_3(1) \right\} + \frac{a_4(8)}{a_4(6)} \left\{ \frac{a_2(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2) a_3(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) - \left[\frac{a_2(2) a_4(4)}{a_4(2) a_4(0)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_3(1) a_4(4)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_3(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_3(2) a_4(4)}{a_4(2) a_4(1)} b_3(1) + \frac{a_4(4)}{a_4(2)} b_2(2) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{a_2(10)}{a_4(2)} + \frac{a_3(8) a_3(6)}{a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_4(8) a_2(6)}{a_4(6) a_4(2)} \right] b_4(2) - \left[\frac{a_3(8) a_3(2) a_4(5)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \right. \\
&+ \frac{a_3(6) a_3(9)}{a_4(6) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_4(8) a_3(5)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(8) a_3(2) a_3(5)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \left. \right] b_4(1) - \left[\frac{a_2(6) a_4(8)}{a_4(6) a_4(0)} \right. \\
&- \frac{a_3(6) a_3(5) a_4(8)}{a_4(6) a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_4(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_4(8) a_2(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(0)} \\
&+ \left. \frac{a_4(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(6) a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) + \left[\frac{a_3(8) a_4(5)}{a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_4(8) a_3(5)}{a_4(6) a_4(2)} \right] b_3(2) \\
&- \left[\frac{a_3(6) a_4(8) a_4(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(8) a_3(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \right] b_3(1) + \frac{a_4(8) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2)} b_2(2),
\end{aligned}$$

$k = 7$

$$\begin{aligned}
b_2(11) &= \frac{a_2(11)}{a_4(7)} b_4(7) - \frac{a_2(7)}{a_4(7)} b_4(9) + \frac{a_3(9)}{a_4(6)} b_3(7) - \frac{a_3(7)}{a_4(7)} b_3(10) \\
+ \frac{a_4(9)}{a_4(7)} b_2(7) &= \frac{a_2(11) a_4(7)}{a_4(7) a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_2(7) a_4(9)}{a_4(7) a_4(1)} b_4(1) + \frac{a_3(9)}{a_4(6)} \left[\frac{a_3(7)}{a_4(3)} b_4(3) \right. \\
&- \frac{a_3(3) a_4(6)}{a_4(3) a_4(2)} b_4(2) + \left. \frac{a_4(6)}{a_4(3)} b_3(3) \right] - \frac{a_3(7)}{a_4(7)} \left\{ \frac{a_3(10)}{a_4(2)} + \frac{a_4(9) a_3(6)}{a_4(6) a_4(2)} \right\} b_4(2) \\
&- \left\{ \frac{a_3(6) a_4(9)}{a_4(6) a_4(1)} + \frac{a_4(9) a_3(2) a_4(5)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \right\} b_4(1) + \frac{a_4(9) a_4(5)}{a_4(6) a_4(2)} b_3(2) \left. \right\} \\
+ \frac{a_4(9)}{a_4(7)} &\left\{ \frac{a_2(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(3) a_3(6)}{a_4(3) a_4(2)} b_4(2) - \left[\frac{a_2(3) a_4(5)}{a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_4(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) \right. \right. \\
&+ \frac{a_3(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3) a_4(5)}{a_4(3) a_4(2)} b_3(2) + \left. \left. \frac{a_4(5)}{a_4(3)} b_2(3) \right\} = \left[\frac{a_2(11)}{a_4(3)} + \frac{a_3(9) a_3(7)}{a_4(6) a_4(3)} \right. \\
+ \frac{a_4(9) a_2(7)}{a_4(7) a_4(3)} &\left. \right] b_4(3) - \left[\frac{a_3(9) a_3(3) a_4(6)}{a_4(6) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_3(7) a_3(10)}{a_4(7) a_4(2)} + \frac{a_3(7) a_4(9) a_3(6)}{a_4(7) a_4(6) a_4(2)} \right. \\
&+ \frac{a_4(9) a_3(3) a_3(6)}{a_4(7) a_4(3) a_4(2)} \left. \right] b_4(2) - \left[\frac{a_2(7) a_4(9)}{a_4(7) a_4(1)} + \frac{a_3(7) a_3(6) a_4(9)}{a_4(7) a_4(6) a_4(1)} \right. \\
+ \frac{a_3(7) a_4(9) a_3(2) a_4(5)}{a_4(7) a_4(6) a_4(2) a_4(1)} &+ \frac{a_4(9) a_2(3) a_4(5)}{a_4(7) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_4(9) a_3(2) a_4(5)}{a_4(7) a_4(2) a_4(1)} \left. \right] b_4(1) \\
&+ \left[\frac{a_3(9) a_4(6)}{a_4(6) a_4(3)} + \frac{a_4(9) a_3(6)}{a_4(7) a_4(3)} \right] b_3(3) - \left[\frac{a_3(7) a_4(9) a_4(5)}{a_4(7) a_4(6) a_4(2)} \right. \\
&+ \left. \frac{a_4(9) a_3(3) a_4(5)}{a_4(7) a_4(3) a_4(2)} \right] b_3(2) + \frac{a_4(9) a_4(5)}{a_4(7) a_4(3)} b_2(3)
\end{aligned}$$

bulunur.

Denklem (4.8)'den,

$$b_1(k+4) = \frac{a_1(k+4)}{a_4(k)} b_4(k) - \frac{a_1(k)}{a_4(k)} b_4(k+1) + \frac{a_2(k+3)}{a_4(k)} b_3(k) \\ - \frac{a_2(k)}{a_4(k)} b_3(k+2) + \frac{a_3(k+2)}{a_4(k)} b_2(k) - \frac{a_3(k)}{a_4(k)} b_2(k+3) + \frac{a_4(k+1)}{a_4(k)} b_1(k);$$

$k = 0$

$$b_1(4) = \frac{a_1(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_1(0)}{a_4(0)} b_4(1) + \frac{a_2(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_3(2) + \frac{a_3(2)}{a_4(0)} b_2(0) \\ - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_2(3) + \frac{a_4(1)}{a_4(0)} b_1(0),$$

$k = 1$

$$b_1(5) = \frac{a_1(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} b_2(4) + \frac{a_2(4)}{a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} b_3(3) + \frac{a_3(3)}{a_4(1)} b_2(1) \\ - \frac{a_1(1)}{a_4(1)} b_4(2) + \frac{a_4(2)}{a_4(1)} b_1(1) \\ = \frac{a_1(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \left\{ \left[\frac{a_2(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_4(2) + \frac{a_3(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_3(3) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a_4(2)}{a_4(0)} b_2(0) \right\} + \frac{a_2(4)}{a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} b_3(3) + \frac{a_3(3)}{a_4(1)} b_2(1) - \frac{a_1(1)}{a_4(1)} b_4(2) \\ + \frac{a_4(2)}{a_4(1)} b_1(1) \\ = \left[\frac{a_3(1) a_2(0)}{a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_1(1)}{a_4(1)} \right] b_4(2) + \frac{a_1(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1) a_2(4)}{a_4(1) a_4(0)} b_4(0) \\ + \left[\frac{a_3(1) a_3(0)}{a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} \right] b_3(3) + \frac{a_2(4)}{a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_3(1) a_3(3)}{a_4(1) a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_3(3)}{a_4(1)} b_2(1) \\ + \frac{a_4(2)}{a_4(1)} b_1(1),$$

$k = 2$

$$b_1(6) = \frac{a_1(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2)}{a_4(2)} b_2(5) + \frac{a_2(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_2(2)}{a_4(2)} b_3(4) + \frac{a_3(4)}{a_4(2)} b_2(2) \\ - \frac{a_1(2)}{a_4(2)} b_4(3) + \frac{a_4(3)}{a_4(2)} b_1(2) \\ = \frac{a_1(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \left\{ \left[\frac{a_2(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_4(3) + \frac{a_2(5)}{a_4(1)} b_4(1) \right. \\ \left. - \frac{a_3(1) a_3(4)}{a_4(1) a_4(0)} b_4(0) + \frac{a_3(4)}{a_4(1)} b_3(1) + \frac{a_4(3)}{a_4(1)} b_2(1) - \frac{a_3(1) a_4(3)}{a_4(1) a_4(0)} b_2(0) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_2(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_2(2)}{a_4(2)} \left[\frac{a_3(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_4(3) + \frac{a_4(3)}{a_4(0)} b_3(0) \right] + \frac{a_3(4)}{a_4(2)} b_2(2) \\
& \quad - \frac{a_1(2)}{a_4(2)} b_4(3) + \frac{a_4(3)}{a_4(2)} b_1(2) \\
& = \left[\frac{a_3(2) a_2(1)}{a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_3(0)}{a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_2(2) a_3(0)}{a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_1(2)}{a_4(2)} \right] b_4(3) + \frac{a_1(6)}{a_4(2)} b_4(2) \\
& - \frac{a_3(2) a_2(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) + \left[\frac{a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(2) a_3(4)}{a_4(2) a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_2(5)}{a_4(2)} b_3(2) \\
& - \frac{a_3(2) a_3(4)}{a_4(2) a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_2(2) a_4(3)}{a_4(2) a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_3(4)}{a_4(2)} b_2(2) - \frac{a_3(2) a_4(3)}{a_4(2) a_4(1)} b_2(1) \\
& \quad + \frac{a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} b_2(0) + \frac{a_4(3)}{a_4(2)} b_1(2),
\end{aligned}$$

$k = 3$

$$\begin{aligned}
b_1(7) & = \frac{a_1(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} b_2(6) + \frac{a_2(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_2(3)}{a_4(3)} b_3(5) + \frac{a_3(5)}{a_4(3)} b_2(3) \\
& \quad - \frac{a_1(3)}{a_4(3)} b_4(4) + \frac{a_4(3)}{a_4(2)} b_1(3) \\
& = \frac{a_1(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \left\{ \frac{a_2(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2) a_3(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) - \left[\frac{a_2(2) a_4(4)}{a_4(2) a_4(0)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{a_3(1) a_4(4)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_3(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_3(2) a_4(4)}{a_4(2) a_4(1)} b_3(1) + \frac{a_4(4)}{a_4(2)} b_2(2) \right\} \\
& \quad + \frac{a_2(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_2(3)}{a_4(3)} \left\{ \frac{a_3(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1) a_4(4)}{a_4(1) a_4(0)} b_4(0) + \frac{a_4(4)}{a_4(1)} b_3(1) \right\} \\
& \quad + \frac{a_3(5)}{a_4(3)} b_2(3) - \frac{a_1(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(0)} b_4(0) + \frac{a_4(3)}{a_4(2)} b_1(3) \\
& = \frac{a_1(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(3) a_2(6)}{a_4(3) a_4(2)} b_4(2) + \left[\frac{a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_2(3) a_3(5)}{a_4(3) a_4(1)} \right] b_4(1) \\
& \quad + \left[\frac{a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_1(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_2(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3) a_3(5)}{a_4(3) a_4(2)} b_3(2) \\
& \quad + \left[\frac{a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_2(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1)} \right] b_3(1) + \frac{a_3(5)}{a_4(3)} b_2(3) - \frac{a_3(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2)} b_2(2) \\
& \quad + \frac{a_4(3)}{a_4(2)} b_1(3),
\end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned}
b_1(8) &= \frac{a_1(8)}{a_4(4)} b_4(4) - \frac{a_3(4)}{a_4(4)} b_2(7) + \frac{a_2(7)}{a_4(4)} b_3(4) - \frac{a_2(4)}{a_4(4)} b_3(6) + \frac{a_3(6)}{a_4(4)} b_2(4) \\
&\quad - \frac{a_1(4)}{a_4(4)} b_4(5) + \frac{a_4(4)}{a_4(3)} b_1(4) \\
&= \frac{a_1(8)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_3(4)}{a_4(4)} \left\{ \frac{a_2(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_3(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \left[\frac{a_2(3)}{a_4(3)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} \right] b_4(1) + \frac{a_3(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_4(5)}{a_4(2)} b_3(2) + \frac{a_4(5)}{a_4(3)} b_2(3) \right\} \\
&\quad + \frac{a_2(7)}{a_4(4)} \left[\frac{a_3(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_4(3) + \frac{a_4(3)}{a_4(0)} b_3(0) \right] - \frac{a_2(4)}{a_4(4)} \left[\frac{a_3(6)}{a_4(2)} b_4(2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} b_4(1) + \frac{a_4(5)}{a_4(2)} b_3(2) \right] + \frac{a_3(6)}{a_4(4)} \left\{ \frac{a_2(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_4(2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_3(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_3(3) + \frac{a_4(2)}{a_4(0)} b_2(0) \right\} - \frac{a_1(4)}{a_4(4)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} b_4(1) \\
&\quad + \frac{a_4(4)}{a_4(3)} \left\{ \frac{a_1(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_1(0)}{a_4(0)} b_4(1) + \frac{a_2(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_3(2) + \frac{a_3(2)}{a_4(0)} b_2(0) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_2(3) + \frac{a_4(1)}{a_4(0)} b_1(0) \right\} \\
&= - \left[\frac{a_3(4)}{a_4(4)} \frac{a_2(7)}{a_4(3)} + \frac{a_2(7)}{a_4(4)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_4(3) + \left[\frac{a_3(4)}{a_4(4)} \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_3(6)}{a_4(2)} - \frac{a_2(4)}{a_4(4)} \frac{a_3(6)}{a_4(2)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_3(6)}{a_4(4)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} - \frac{a_3(6)}{a_4(4)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \right] b_4(2) + \left[\frac{a_3(4)}{a_4(4)} \frac{a_2(3)}{a_4(3)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} + \frac{a_3(4)}{a_4(4)} \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_2(4)}{a_4(4)} \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} - \frac{a_1(4)}{a_4(4)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} - \frac{a_4(4)}{a_4(3)} \frac{a_1(0)}{a_4(0)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_1(8)}{a_4(0)} + \frac{a_3(6)}{a_4(4)} \frac{a_2(4)}{a_4(0)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(4)}{a_4(3)} \frac{a_1(4)}{a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_3(4)}{a_4(4)} \frac{a_3(6)}{a_4(3)} + \frac{a_3(6)}{a_4(4)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_3(3) + \left[\frac{a_3(4)}{a_4(4)} \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_4(5)}{a_4(2)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_2(4)}{a_4(4)} \frac{a_4(5)}{a_4(2)} - \frac{a_4(4)}{a_4(3)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \right] b_3(2) + \left[\frac{a_2(7)}{a_4(4)} \frac{a_4(3)}{a_4(0)} + \frac{a_3(6)}{a_4(4)} \frac{a_3(3)}{a_4(0)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(4)}{a_4(3)} \frac{a_2(3)}{a_4(0)} \right] b_3(0) - \left[\frac{a_3(4)}{a_4(4)} \frac{a_4(5)}{a_4(3)} + \frac{a_4(4)}{a_4(3)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_2(3) + \left[\frac{a_3(6)}{a_4(4)} \frac{a_4(2)}{a_4(0)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(4)}{a_4(3)} \frac{a_3(2)}{a_4(0)} \right] b_2(0) + \frac{a_4(1)}{a_4(0)} b_1(0),
\end{aligned}$$

$k = 5$

$$b_1(9) = \frac{a_1(9)}{a_4(5)} b_4(5) - \frac{a_3(5)}{a_4(5)} b_2(8) + \frac{a_2(8)}{a_4(5)} b_3(5) - \frac{a_2(5)}{a_4(5)} b_3(7) + \frac{a_3(7)}{a_4(5)} b_2(5)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_1(5)}{a_4(5)}b_4(6) + \frac{a_4(5)}{a_4(4)}b_1(5) \\
& = \frac{a_1(9)}{a_4(1)}b_4(1) - \frac{a_3(5)}{a_4(5)}\left\{\left[\frac{a_2(8)}{a_4(0)} + \frac{a_3(7)}{a_4(4)}\frac{a_3(4)}{a_4(0)} + \frac{a_4(6)}{a_4(4)}\frac{a_2(4)}{a_4(0)}\right]b_4(0)\right. \\
& - \left[\frac{a_2(4)}{a_4(4)}\frac{a_4(6)}{a_4(2)} - \frac{a_3(4)}{a_4(4)}\frac{a_3(3)}{a_4(3)}\frac{a_4(6)}{a_4(2)} + \frac{a_4(6)}{a_4(4)}\frac{a_2(0)}{a_4(0)}\right]b_4(2) - \left[\frac{a_3(7)}{a_4(4)}\frac{a_3(0)}{a_4(0)}\right. \\
& + \left.\frac{a_3(4)}{a_4(4)}\frac{a_3(7)}{a_4(3)}\right]b_4(3) + \left[\frac{a_3(7)}{a_4(4)}\frac{a_4(3)}{a_4(0)} + \frac{a_4(6)}{a_4(4)}\frac{a_3(3)}{a_4(0)}\right]b_3(0) - \left[\frac{a_3(4)}{a_4(4)}\frac{a_4(6)}{a_4(3)}\right. \\
& + \left.\frac{a_4(6)}{a_4(4)}\frac{a_3(0)}{a_4(0)}\right]b_3(3) + \frac{a_4(2)}{a_4(0)}b_2(0)\left.\right\} + \frac{a_2(8)}{a_4(5)}\left[\frac{a_3(5)}{a_4(1)}b_4(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)}\frac{a_4(4)}{a_4(0)}b_4(0)\right. \\
& + \left.\frac{a_4(4)}{a_4(1)}b_3(1)\right] - \frac{a_2(5)}{a_4(5)}\left[\frac{a_3(7)}{a_4(3)}b_4(3) - \frac{a_3(3)}{a_4(3)}\frac{a_4(6)}{a_4(2)}b_4(2) + \frac{a_4(6)}{a_4(3)}b_3(3)\right] \\
& + \frac{a_3(7)}{a_4(5)}\left\{-\left[\frac{a_2(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(0)}{a_4(0)}\right]b_4(3) + \frac{a_2(5)}{a_4(1)}b_4(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)}\frac{a_3(4)}{a_4(0)}b_4(0)\right. \\
& + \left.\frac{a_3(4)}{a_4(1)}b_3(1) + \frac{a_4(3)}{a_4(1)}b_2(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)}\frac{a_4(3)}{a_4(0)}b_2(0)\right\} - \frac{a_1(5)}{a_4(5)}\frac{a_4(6)}{a_4(2)}b_4(2) \\
& + \frac{a_4(5)}{a_4(4)}\left\{\left[\frac{a_3(1)}{a_4(1)}\frac{a_2(0)}{a_4(0)} - \frac{a_1(1)}{a_4(1)}\right]b_4(2) + \frac{a_1(5)}{a_4(1)}b_4(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)}\frac{a_2(4)}{a_4(0)}b_4(0)\right. \\
& + \left.\left[\frac{a_3(1)}{a_4(1)}\frac{a_3(0)}{a_4(0)} - \frac{a_2(1)}{a_4(1)}\right]b_3(3) + \frac{a_2(4)}{a_4(1)}b_3(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)}\frac{a_3(3)}{a_4(0)}b_3(0) + \frac{a_3(3)}{a_4(1)}b_2(1)\right. \\
& + \left.\frac{a_4(2)}{a_4(1)}b_1(1)\right\} \\
& = \left[\frac{a_3(5)}{a_4(5)}\frac{a_3(7)}{a_4(4)}\frac{a_3(0)}{a_4(0)} + \frac{a_3(5)}{a_4(5)}\frac{a_3(4)}{a_4(4)}\frac{a_3(7)}{a_4(3)} - \frac{a_2(5)}{a_4(5)}\frac{a_3(7)}{a_4(3)} - \frac{a_3(7)}{a_4(5)}\frac{a_2(1)}{a_4(1)}\right. \\
& - \left.\frac{a_3(7)}{a_4(5)}\frac{a_3(0)}{a_4(0)}\right]b_4(3) + \left[\frac{a_3(5)}{a_4(5)}\frac{a_2(4)}{a_4(4)}\frac{a_4(6)}{a_4(2)} + \frac{a_3(5)}{a_4(5)}\frac{a_3(4)}{a_4(4)}\frac{a_3(3)}{a_4(3)}\frac{a_4(6)}{a_4(2)}\right. \\
& - \frac{a_3(5)}{a_4(5)}\frac{a_4(6)}{a_4(4)}\frac{a_2(0)}{a_4(0)} + \frac{a_2(5)}{a_4(5)}\frac{a_3(3)}{a_4(3)}\frac{a_4(6)}{a_4(2)} - \frac{a_1(5)}{a_4(5)}\frac{a_4(6)}{a_4(2)} + \frac{a_4(5)}{a_4(4)}\frac{a_3(1)}{a_4(1)}\frac{a_2(0)}{a_4(0)} \\
& - \left.\frac{a_4(5)}{a_4(4)}\frac{a_1(1)}{a_4(1)}\right]b_4(2) + \left[\frac{a_1(9)}{a_4(1)} + \frac{a_2(8)}{a_4(5)}\frac{a_3(5)}{a_4(1)} + \frac{a_3(7)}{a_4(5)}\frac{a_2(5)}{a_4(1)} + \frac{a_4(5)}{a_4(4)}\frac{a_1(5)}{a_4(1)}\right]b_4(1) \\
& - \left[\frac{a_3(5)}{a_4(5)}\frac{a_2(8)}{a_4(0)} - \frac{a_3(5)}{a_4(5)}\frac{a_3(7)}{a_4(4)}\frac{a_3(4)}{a_4(0)} - \frac{a_3(5)}{a_4(5)}\frac{a_4(6)}{a_4(4)}\frac{a_2(4)}{a_4(0)} - \frac{a_2(8)}{a_4(5)}\frac{a_3(1)}{a_4(1)}\frac{a_4(4)}{a_4(0)}\right. \\
& - \left.\frac{a_3(7)}{a_4(5)}\frac{a_3(1)}{a_4(1)}\frac{a_3(4)}{a_4(0)} + \frac{a_4(5)}{a_4(4)}\frac{a_3(1)}{a_4(1)}\frac{a_2(4)}{a_4(0)}\right]b_4(0) + \left[\frac{a_3(5)}{a_4(5)}\frac{a_3(4)}{a_4(4)}\frac{a_4(6)}{a_4(3)}\right. \\
& + \left.\frac{a_3(5)}{a_4(5)}\frac{a_4(6)}{a_4(4)}\frac{a_3(0)}{a_4(0)} - \frac{a_2(5)}{a_4(5)}\frac{a_4(6)}{a_4(3)} + \frac{a_4(5)}{a_4(4)}\frac{a_3(1)}{a_4(1)}\frac{a_3(0)}{a_4(0)} - \frac{a_4(5)}{a_4(4)}\frac{a_2(1)}{a_4(1)}\right]b_3(3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{a_2(8) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(5) a_2(4)}{a_4(4) a_4(1)} \right] b_3(1) - \frac{a_4(5) a_3(1) a_3(3)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} b_3(0) \\
& + \frac{a_3(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1)} b_2(1) - \left[\frac{a_3(5) a_4(2)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(0) \\
& + \frac{a_4(5) a_4(2)}{a_4(4) a_4(1)} b_1(1),
\end{aligned}$$

$$k = 6$$

$$\begin{aligned}
b_1(10) &= \frac{a_1(10)}{a_4(6)} b_4(6) - \frac{a_3(6)}{a_4(6)} b_2(9) + \frac{a_2(9)}{a_4(6)} b_3(6) - \frac{a_2(6)}{a_4(6)} b_3(8) + \frac{a_3(8)}{a_4(6)} b_2(6) \\
&\quad - \frac{a_1(6)}{a_4(6)} b_4(7) + \frac{a_4(6)}{a_4(5)} b_1(6) \\
&= \frac{a_1(10)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(6)}{a_4(6)} \left\{ \left[\frac{a_2(9)}{a_4(1)} + \frac{a_3(8) a_3(5)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(7) a_2(5)}{a_4(5) a_4(1)} \right] b_4(1) \right. \\
&\quad - \left[\frac{a_2(5) a_4(7)}{a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(7) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} \right. \\
&\quad + \left. \left. \frac{a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(0)} \right] b_4(3) - \left[\frac{a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_3(8)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right. \right. \\
&\quad + \left. \left. \frac{a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) + \left[\frac{a_3(8) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1)} \right] b_3(1) \right. \\
&\quad - \left. \left. \frac{a_3(5) a_4(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_4(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} b_2(0) + \frac{a_4(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1)} b_2(1) \right\} \right. \\
&\quad + \frac{a_2(9)}{a_4(6)} \left\{ \frac{a_3(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2) a_4(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) + \frac{a_4(5)}{a_4(2)} b_3(2) \right\} - \frac{a_2(6)}{a_4(6)} \left\{ \left[\frac{a_3(8)}{a_4(0)} \right. \right. \\
&\quad + \left. \left. \frac{a_4(7) a_3(4)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_3(4) a_4(7)}{a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_4(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(3) + \frac{a_4(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} b_3(0) \right\} \\
&\quad + \frac{a_3(8)}{a_4(6)} \left\{ \frac{a_2(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2) a_3(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) - \left[\frac{a_2(2) a_4(4)}{a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(1) a_4(4)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) \right. \\
&\quad + \left. \frac{a_3(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_3(2) a_4(4)}{a_4(2) a_4(1)} b_3(1) + \frac{a_4(4)}{a_4(2)} b_2(2) \right\} - \frac{a_1(6) a_4(7)}{a_4(6) a_4(3)} b_4(3) \\
&+ \frac{a_4(6)}{a_4(5)} \left\{ \left[\frac{a_3(2) a_2(1)}{a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_3(0)}{a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_2(2) a_3(0)}{a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_1(2)}{a_4(2)} \right] b_4(3) + \frac{a_1(6)}{a_4(2)} b_4(2) \right. \\
&\quad - \frac{a_3(2) a_2(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) + \left[\frac{a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(2) a_3(4)}{a_4(2) a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_2(5)}{a_4(2)} b_3(2) \\
&\quad - \frac{a_3(2) a_3(4)}{a_4(2) a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_2(2) a_4(3)}{a_4(2) a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_3(4)}{a_4(2)} b_2(2) - \frac{a_3(2) a_4(3)}{a_4(2) a_4(1)} b_2(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} b_2(0) + \frac{a_4(3)}{a_4(2)} b_1(2) \Big\} \\
= & - \left[\frac{a_2(5) a_4(7)}{a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(7) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_3(4) a_4(7)}{a_4(6) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_2(6) a_4(7) a_3(0)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(6) a_4(7)}{a_4(6) a_4(3)} \\
& + \frac{a_4(6) a_3(2) a_2(1)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_4(6) a_3(2) a_3(0)}{a_4(5) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_4(6) a_1(2)}{a_4(5) a_4(2)} \Big] b_4(3) + \left[\frac{a_1(10)}{a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_2(9) a_3(6)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_3(8) a_2(6)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_4(6) a_1(6)}{a_4(5) a_4(2)} \Big] b_4(2) - \left[\frac{a_3(6) a_2(9)}{a_4(6) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_3(5)}{a_4(6) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_3(6) a_2(5)}{a_4(6) a_4(1)} + \frac{a_2(9) a_3(2) a_4(5)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(8) a_3(2) a_3(5)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \\
& + \frac{a_4(6) a_3(2) a_2(5)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \Big] b_4(1) + \left[\frac{a_3(6) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(5) a_3(8)}{a_4(6) a_4(5) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_3(8)}{a_4(6) a_4(0)} \\
& - \frac{a_2(6) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(8) a_2(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(6) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_4(6) a_2(2) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2) a_4(0)} \Big] b_4(0) + \left[\frac{a_2(9) a_4(5)}{a_4(6) a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_3(8) a_3(5)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_4(6) a_2(5)}{a_4(5) a_4(2)} \Big] b_3(2) - \left[\frac{a_3(6) a_3(8) a_4(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_3(6) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(8) a_3(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_4(6) a_3(2) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \Big] b_3(1) \\
& + \left[\frac{a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_4(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_4(6) a_2(2) a_4(3)}{a_4(5) a_4(2) a_4(0)} \right] b_3(0) \\
& + \left[\frac{a_3(8) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_4(6) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2)} \right] b_2(2) - \left[\frac{a_3(6) a_4(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& - \frac{a_4(6) a_3(2) a_4(3)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \Big] b_2(1) - \left[\frac{a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \Big] b_2(0) + \frac{a_4(6) a_4(3)}{a_4(5) a_4(2)} b_1(2),
\end{aligned}$$

$k = 7$

$$b_1(11) = \frac{a_1(11)}{a_4(7)} b_4(7) - \frac{a_3(7)}{a_4(7)} b_2(10) + \frac{a_2(10)}{a_4(7)} b_3(7) - \frac{a_2(7)}{a_4(7)} b_3(9)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_3(9)}{a_4(7)} b_2(7) - \frac{a_1(7)}{a_4(7)} b_4(8) + \frac{a_4(7)}{a_4(6)} b_1(7) \\
& = \frac{a_1(11)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(7)}{a_4(7)} \left\{ \left[\frac{a_2(10)}{a_4(2)} + \frac{a_3(8)}{a_4(5)} \frac{a_3(6)}{a_4(2)} + \frac{a_4(8)}{a_4(6)} \frac{a_2(6)}{a_4(2)} \right] b_4(2) \right. \\
& \quad - \left[\frac{a_2(6)}{a_4(6)} \frac{a_4(8)}{a_4(0)} - \frac{a_3(6)}{a_4(6)} \frac{a_3(5)}{a_4(5)} \frac{a_4(8)}{a_4(0)} - \frac{a_3(6)}{a_4(6)} \frac{a_4(8)}{a_4(5)} \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_4(4)}{a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{a_4(8)}{a_4(6)} \frac{a_2(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(4)}{a_4(0)} + \frac{a_4(8)}{a_4(6)} \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_4(4)}{a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_3(8)}{a_4(5)} \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{a_3(6)}{a_4(6)} \frac{a_3(9)}{a_4(1)} + \frac{a_3(6)}{a_4(6)} \frac{a_4(8)}{a_4(5)} \frac{a_3(5)}{a_4(1)} + \frac{a_4(8)}{a_4(6)} \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_3(5)}{a_4(1)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_3(8)}{a_4(5)} \frac{a_4(5)}{a_4(2)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{a_4(8)}{a_4(6)} \frac{a_3(5)}{a_4(2)} \right] b_3(2) - \left[\frac{a_3(6)}{a_4(6)} \frac{a_4(8)}{a_4(5)} \frac{a_4(4)}{a_4(1)} + \frac{a_4(8)}{a_4(6)} \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(4)}{a_4(1)} \right] b_3(1) \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_4(8)}{a_4(6)} \frac{a_4(4)}{a_4(2)} b_2(2) \right\} + \frac{a_2(10)}{a_4(7)} \left[\frac{a_3(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_4(6)}{a_4(2)} b_4(2) + \frac{a_4(6)}{a_4(3)} b_3(3) \right] \\
& \quad - \frac{a_2(7)}{a_4(7)} \left\{ \left[\frac{a_3(9)}{a_4(1)} + \frac{a_4(8)}{a_4(5)} \frac{a_3(5)}{a_4(1)} \right] b_4(1) - \left[\frac{a_3(5)}{a_4(5)} \frac{a_4(8)}{a_4(0)} + \frac{a_4(8)}{a_4(5)} \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_4(4)}{a_4(0)} \right] b_4(0) \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_4(8)}{a_4(5)} \frac{a_4(4)}{a_4(1)} b_3(1) \right\} + \frac{a_3(9)}{a_4(7)} \left\{ \frac{a_2(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_3(6)}{a_4(2)} b_4(2) \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{a_2(3)}{a_4(3)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} + \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} \right] b_4(1) + \frac{a_3(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_4(5)}{a_4(2)} b_3(2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_4(5)}{a_4(3)} b_2(3) \right\} - \frac{a_1(7)}{a_4(7)} \frac{a_4(8)}{a_4(0)} b_4(0) + \frac{a_4(7)}{a_4(6)} \left\{ \frac{a_1(7)}{a_4(3)} b_4(3) \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_2(6)}{a_4(2)} b_4(2) \right. \\
& \quad \left. + \left[\frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_3(5)}{a_4(1)} - \frac{a_2(3)}{a_4(3)} \frac{a_3(5)}{a_4(1)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_2(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(4)}{a_4(0)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_4(4)}{a_4(0)} + \frac{a_2(3)}{a_4(3)} \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_4(4)}{a_4(0)} - \frac{a_1(3)}{a_4(3)} \frac{a_4(4)}{a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_2(6)}{a_4(3)} b_3(3) \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_3(5)}{a_4(2)} b_3(2) + \left[\frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(4)}{a_4(1)} - \frac{a_2(3)}{a_4(3)} \frac{a_4(4)}{a_4(1)} \right] b_3(1) + \frac{a_3(5)}{a_4(3)} b_2(3) \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_4(4)}{a_4(2)} b_2(2) + \frac{a_4(4)}{a_4(3)} b_1(3) \right\} \right. \\
& = \left[\frac{a_1(11)}{a_4(3)} + \frac{a_2(10)}{a_4(7)} \frac{a_3(7)}{a_4(3)} + \frac{a_3(9)}{a_4(7)} \frac{a_2(7)}{a_4(3)} + \frac{a_4(7)}{a_4(6)} \frac{a_1(7)}{a_4(3)} \right] b_4(3) - \left[\frac{a_3(7)}{a_4(7)} \frac{a_2(10)}{a_4(2)} \right. \\
& \quad + \frac{a_3(8)}{a_4(5)} \frac{a_3(6)}{a_4(2)} + \frac{a_3(7)}{a_4(7)} \frac{a_4(8)}{a_4(6)} \frac{a_2(6)}{a_4(2)} + \frac{a_2(10)}{a_4(7)} \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_4(6)}{a_4(2)} + \frac{a_3(9)}{a_4(7)} \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_3(6)}{a_4(2)} \\
& \quad \left. + \frac{a_4(7)}{a_4(6)} \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_2(6)}{a_4(2)} \right] b_4(2) + \left[\frac{a_3(7)}{a_4(7)} \frac{a_3(8)}{a_4(5)} \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} + \frac{a_3(7)}{a_4(7)} \frac{a_3(6)}{a_4(6)} \frac{a_3(9)}{a_4(1)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_3(7) a_3(6) a_4(8) a_3(5)}{a_4(7) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(7) a_4(8) a_3(2) a_3(5)}{a_4(7) a_4(6) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_2(7) a_3(9)}{a_4(7) a_4(1)} \\
& - \frac{a_2(7) a_4(8) a_3(5)}{a_4(7) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_3(9) a_2(3) a_4(5)}{a_4(7) a_4(3) a_4(1)} - \frac{a_3(9) a_3(2) a_4(5)}{a_4(7) a_4(2) a_4(1)} \\
& + \frac{a_4(7) a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_4(6) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_4(7) a_2(3) a_3(5)}{a_4(6) a_4(3) a_4(1)} \Big] b_4(1) + \left[\frac{a_3(7) a_2(6) a_4(8)}{a_4(7) a_4(6) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_3(7) a_3(6) a_3(5) a_4(8)}{a_4(7) a_4(6) a_4(5) a_4(0)} - \frac{a_3(7) a_3(6) a_4(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(7) a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(7) a_4(8) a_2(2) a_4(4)}{a_4(7) a_4(6) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_4(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(7) a_4(6) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(7) a_3(5) a_4(8)}{a_4(7) a_4(5) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(7) a_4(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(7) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_1(7) a_4(8)}{a_4(7) a_4(0)} + \frac{a_4(7) a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(3) a_4(2) a_4(0)} \\
& - \frac{a_4(7) a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(6) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_4(7) a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(6) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_4(7) a_1(3) a_4(4)}{a_4(6) a_4(3) a_4(0)} \Big] b_4(0) \\
& + \left[\frac{a_2(10) a_4(6)}{a_4(7) a_4(3)} + \frac{a_3(9) a_3(6)}{a_4(7) a_4(3)} + \frac{a_4(7) a_2(6)}{a_4(6) a_4(3)} \right] b_3(3) - \left[\frac{a_3(7) a_3(8) a_4(5)}{a_4(7) a_4(5) a_4(2)} \right. \\
& - \frac{a_3(7) a_4(8) a_3(5)}{a_4(7) a_4(6) a_4(2)} - \frac{a_3(9) a_3(3) a_4(5)}{a_4(7) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_4(7) a_3(3) a_3(5)}{a_4(6) a_4(3) a_4(2)} \Big] b_3(2) \\
& + \left[\frac{a_3(7) a_3(6) a_4(8) a_4(4)}{a_4(7) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(7) a_4(8) a_3(2) a_4(4)}{a_4(7) a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(10) a_4(8) a_4(4)}{a_4(7) a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_4(7) a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_4(7) a_2(3) a_4(4)}{a_4(6) a_4(3) a_4(1)} \Big] b_3(1) + \left[\frac{a_3(9) a_4(5)}{a_4(7) a_4(3)} \right. \\
& - \frac{a_4(7) a_3(3) a_3(5)}{a_4(6) a_4(3) a_4(2)} \Big] b_2(3) - \left[\frac{a_3(7) a_4(8) a_4(4)}{a_4(7) a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_3(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2)} \right] b_2(2) \\
& + \frac{a_4(7) a_4(4)}{a_4(6) a_4(3)} b_1(3)
\end{aligned}$$

bulunur.

Denklem (4.9)'dan,

$$\begin{aligned}
b_0(k+4) &= \left[\frac{a_0(k+4)}{a_4(k)} - \frac{a_0(k)}{a_4(k)} \right] b_4(k) + \frac{a_1(k+3)}{a_4(k)} b_3(k) - \frac{a_1(k)}{a_4(k)} b_3(k+1) \\
&+ \frac{a_2(k+2)}{a_4(k)} b_2(k) - \frac{a_2(k)}{a_4(k)} b_2(k+2) + \frac{a_3(k+1)}{a_4(k)} b_1(k) - \frac{a_3(k)}{a_4(k)} b_1(k+3) \\
&+ b_0(k);
\end{aligned}$$

$k = 0$

$$b_0(4) = \left[\frac{a_0(4)}{a_4(0)} - \frac{a_0(0)}{a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_1(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_1(0)}{a_4(0)} b_3(1) + \frac{a_2(2)}{a_4(0)} b_2(0)$$

$$-\frac{a_2(0)}{a_4(0)}b_2(2) + \frac{a_3(1)}{a_4(0)}b_1(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)}b_1(3) + b_0(0),$$

$k = 1$

$$\begin{aligned} b_0(5) &= \left[\frac{a_0(5)}{a_4(1)} - \frac{a_0(1)}{a_4(1)} \right] b_4(1) + \frac{a_1(4)}{a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_1(1)}{a_4(1)} b_3(2) + \frac{a_2(3)}{a_4(1)} b_2(1) \\ &\quad - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} b_2(3) + \frac{a_3(2)}{a_4(1)} b_1(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} b_1(4) + b_0(1) \\ &= \left[\frac{a_0(5)}{a_4(1)} - \frac{a_0(1)}{a_4(1)} \right] b_4(1) + \frac{a_1(4)}{a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_1(1)}{a_4(1)} b_3(2) + \frac{a_2(3)}{a_4(1)} b_2(1) - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} b_2(3) \\ &\quad + \frac{a_3(2)}{a_4(1)} b_1(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \left[\frac{a_1(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_1(0)}{a_4(0)} b_4(1) + \frac{a_2(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_3(2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_3(2)}{a_4(0)} b_2(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_2(3) + \frac{a_4(1)}{a_4(0)} b_1(0) \right] + b_0(1) \\ &= \left[\frac{a_0(5)}{a_4(1)} - \frac{a_0(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_1(0)}{a_4(0)} \right] b_4(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_1(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \left[\frac{a_1(1)}{a_4(1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \right] b_3(2) + \frac{a_1(4)}{a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \left[\frac{a_1(1)}{a_4(1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \right] b_2(3) + \frac{a_2(3)}{a_4(1)} b_2(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(2)}{a_4(0)} b_2(0) + \frac{a_3(2)}{a_4(1)} b_1(1) \\ &\quad - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_4(1)}{a_4(0)} b_1(0) + b_0(1), \end{aligned}$$

$k = 2$

$$\begin{aligned} b_0(6) &= \left[\frac{a_0(6)}{a_4(2)} - \frac{a_0(2)}{a_4(2)} \right] b_4(2) + \frac{a_1(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_1(2)}{a_4(2)} b_3(3) + \frac{a_2(4)}{a_4(2)} b_2(2) \\ &\quad - \frac{a_2(2)}{a_4(2)} b_2(4) + \frac{a_3(3)}{a_4(2)} b_1(2) - \frac{a_3(2)}{a_4(2)} b_1(5) + b_0(2) \\ &= \left[\frac{a_0(6)}{a_4(2)} - \frac{a_0(2)}{a_4(2)} \right] b_4(2) + \frac{a_1(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_1(2)}{a_4(2)} b_3(3) + \frac{a_2(4)}{a_4(2)} b_2(2) \\ &\quad - \frac{a_2(2)}{a_4(2)} \left[\frac{a_2(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_4(2) + \frac{a_3(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_3(3) + \frac{a_4(2)}{a_4(0)} b_2(0) \right] \\ &\quad + \frac{a_3(3)}{a_4(2)} b_1(2) - \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \left\{ \left[\frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} - \frac{a_1(1)}{a_4(1)} \right] b_4(2) + \frac{a_1(5)}{a_4(1)} b_4(1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(4)}{a_4(0)} b_4(0) + \left[\frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} \right] b_3(3) + \frac{a_2(4)}{a_4(1)} b_3(1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(3)}{a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_3(3)}{a_4(1)} b_2(1) + \frac{a_4(2)}{a_4(1)} b_1(1) \right\} + b_0(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{a_0(6)}{a_4(2)} - \frac{a_0(2)}{a_4(2)} + \frac{a_2(2)a_2(0)}{a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_3(2)a_3(1)a_2(0)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_3(2)a_1(1)}{a_4(2)a_4(1)} \right] b_4(2) \\
&\quad - \frac{a_3(2)a_1(5)}{a_4(2)a_4(1)} b_4(1) - \left[\frac{a_2(2)a_2(4)}{a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_3(2)a_3(1)a_2(4)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_1(2)}{a_4(2)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_2(2)a_3(0)}{a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_3(2)a_3(1)a_3(0)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_3(2)a_2(1)}{a_4(2)a_4(1)} \right] b_3(3) + \frac{a_1(5)}{a_4(2)} b_3(2) \\
&\quad - \frac{a_3(2)a_2(4)}{a_4(2)a_4(1)} b_3(1) - \left[\frac{a_2(2)a_3(3)}{a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_3(2)a_3(1)a_3(3)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} \right] b_3(0) + \frac{a_2(4)}{a_4(2)} b_2(2) \\
&\quad - \frac{a_3(2)a_3(3)}{a_4(2)a_4(1)} b_2(1) - \frac{a_2(2)a_4(2)}{a_4(2)a_4(0)} b_2(0) + \frac{a_3(3)}{a_4(2)} b_1(2) - \frac{a_3(2)a_4(2)}{a_4(2)a_4(1)} b_1(1) \\
&\quad + b_0(2),
\end{aligned}$$

$k = 3$

$$\begin{aligned}
b_0(7) &= \left[\frac{a_0(7)}{a_4(3)} - \frac{a_0(3)}{a_4(3)} \right] b_4(3) + \frac{a_1(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_1(3)}{a_4(3)} b_3(4) + \frac{a_2(5)}{a_4(3)} b_2(3) \\
&\quad - \frac{a_2(3)}{a_4(3)} b_2(5) + \frac{a_3(4)}{a_4(3)} b_1(3) - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} b_1(6) + b_0(3) \\
&= \left[\frac{a_0(7)}{a_4(3)} - \frac{a_0(3)}{a_4(3)} \right] b_4(3) + \frac{a_1(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_1(3)}{a_4(3)} \left[\frac{a_3(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_4(3) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(3)}{a_4(0)} b_3(0) \right] + \frac{a_2(5)}{a_4(3)} b_2(3) - \frac{a_2(3)}{a_4(3)} \left\{ - \left[\frac{a_2(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_4(3) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_2(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1)a_3(4)}{a_4(1)a_4(0)} b_4(0) + \frac{a_3(4)}{a_4(1)} b_3(1) + \frac{a_4(3)}{a_4(1)} b_2(1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_3(1)a_4(3)}{a_4(1)a_4(0)} b_2(0) \right\} + \frac{a_3(4)}{a_4(3)} b_1(3) - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \left\{ \left[\frac{a_3(2)a_2(1)}{a_4(2)a_4(1)} + \frac{a_3(2)a_3(0)}{a_4(2)a_4(0)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_2(2)a_3(0)}{a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_1(2)}{a_4(2)} \right] b_4(3) + \frac{a_1(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2)a_2(5)}{a_4(2)a_4(1)} b_4(1) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{a_3(2)a_3(1)a_3(4)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_2(2)a_3(4)}{a_4(2)a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_2(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_3(2)a_3(4)}{a_4(2)a_4(1)} b_3(1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_2(2)a_4(3)}{a_4(2)a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_3(4)}{a_4(2)} b_2(2) - \frac{a_3(2)a_4(3)}{a_4(2)a_4(1)} b_2(1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_3(2)a_3(1)a_4(3)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} b_2(0) + \frac{a_4(3)}{a_4(2)} b_1(2) \right\} + b_0(3) \\
&= \left[\frac{a_0(7)}{a_4(3)} - \frac{a_0(3)}{a_4(3)} + \frac{a_1(3)a_3(0)}{a_4(3)a_4(0)} + \frac{a_2(3)a_2(1)}{a_4(3)a_4(1)} + \frac{a_3(1)a_3(0)}{a_4(1)a_4(0)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_3(3)a_3(2)a_2(1)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)} - \frac{a_3(3)a_3(2)a_3(0)}{a_4(3)a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_3(3)a_2(2)a_3(0)}{a_4(3)a_4(2)a_4(0)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_3(3)a_1(2)}{a_4(3)a_4(2)}b_4(3) + \frac{a_1(6)}{a_4(2)}b_4(2) - \left[\frac{a_2(3)a_2(5)}{a_4(3)a_4(1)} - \frac{a_3(3)a_3(2)a_2(5)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)} \right] b_4(1) \\
& - \left[\frac{a_1(3)a_3(4)}{a_4(3)a_4(0)} - \frac{a_2(3)a_3(1)a_3(4)}{a_4(3)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_3(3)a_3(2)a_3(1)a_3(4)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)a_4(0)} \right. \\
& \left. - \frac{a_2(2)a_3(4)}{a_4(2)a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_1(6)}{a_4(3)}b_3(3) - \frac{a_3(3)a_2(5)}{a_4(3)a_4(2)}b_3(2) - \left[\frac{a_2(3)a_3(4)}{a_4(3)a_4(1)} \right. \\
& \left. + \frac{a_3(3)a_3(2)a_3(4)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)} \right] b_3(1) - \left[\frac{a_1(3)a_4(3)}{a_4(3)a_4(0)} - \frac{a_3(3)a_2(2)a_4(3)}{a_4(3)a_4(2)a_4(0)} \right] b_3(0) \\
& - \frac{a_1(3)a_2(5)}{a_4(3)a_4(3)}b_2(3) - \frac{a_3(3)a_3(4)}{a_4(3)a_4(2)}b_2(2) - \left[\frac{a_2(3)a_4(3)}{a_4(3)a_4(1)} \right. \\
& \left. - \frac{a_3(3)a_3(2)a_4(3)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)} \right] b_2(1) - \left[\frac{a_2(3)a_3(1)a_4(3)}{a_4(3)a_4(1)a_4(0)} \right. \\
& \left. + \frac{a_3(3)a_3(2)a_3(1)a_4(3)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)a_4(0)} \right] b_2(0) + \frac{a_3(4)}{a_4(3)}b_1(3) - \frac{a_3(3)a_4(3)}{a_4(3)a_4(2)}b_1(2) + b_0(3),
\end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned}
b_0(8) &= \left[\frac{a_0(8)}{a_4(4)} - \frac{a_0(4)}{a_4(4)} \right] b_4(4) + \frac{a_1(7)}{a_4(4)}b_3(4) - \frac{a_1(4)}{a_4(4)}b_3(5) + \frac{a_2(6)}{a_4(4)}b_2(4) \\
&\quad - \frac{a_2(4)}{a_4(4)}b_2(6) + \frac{a_3(5)}{a_4(4)}b_1(4) - \frac{a_3(4)}{a_4(4)}b_1(7) + b_0(4) \\
&= \left[\frac{a_0(8)}{a_4(0)} - \frac{a_0(4)}{a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_1(7)}{a_4(4)} \left[\frac{a_3(4)}{a_4(0)}b_4(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)}b_4(3) + \frac{a_4(3)}{a_4(0)}b_3(0) \right] \\
&\quad - \frac{a_1(4)}{a_4(4)} \left[\frac{a_3(5)}{a_4(1)}b_4(1) - \frac{a_3(1)a_4(4)}{a_4(1)a_4(0)}b_4(0) + \frac{a_4(4)}{a_4(1)}b_3(1) \right] + \frac{a_2(6)}{a_4(4)} \left[\frac{a_2(4)}{a_4(0)}b_4(0) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_2(0)}{a_4(0)}b_4(2) + \frac{a_3(3)}{a_4(0)}b_3(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)}b_3(3) + \frac{a_4(2)}{a_4(0)}b_2(0) \right] - \frac{a_2(4)}{a_4(4)} \left\{ \frac{a_2(6)}{a_4(2)}b_4(2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_3(2)a_3(5)}{a_4(2)a_4(1)}b_4(1) - \left[\frac{a_2(2)a_4(4)}{a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_3(1)a_4(4)}{a_4(1)a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_3(5)}{a_4(2)}b_3(2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_3(2)a_4(4)}{a_4(2)a_4(1)}b_3(1) + \frac{a_4(4)}{a_4(2)}b_2(2) \right\} + \frac{a_3(5)}{a_4(4)} \left[\frac{a_1(4)}{a_4(0)}b_4(0) - \frac{a_1(0)}{a_4(0)}b_4(1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_2(3)}{a_4(0)}b_3(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)}b_3(2) + \frac{a_3(2)}{a_4(0)}b_2(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)}b_2(3) + \frac{a_4(1)}{a_4(0)}b_1(0) \right] \\
&\quad - \frac{a_3(4)}{a_4(4)} \left\{ \frac{a_1(7)}{a_4(3)}b_4(3) - \frac{a_3(3)a_2(6)}{a_4(3)a_4(2)}b_4(2) + \left[\frac{a_3(3)a_3(2)a_3(5)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{a_2(3)a_3(5)}{a_4(3)a_4(1)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_3(3)a_2(2)a_4(4)}{a_4(3)a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_3(3)a_3(1)a_4(4)}{a_4(3)a_4(1)a_4(0)} \right] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_1(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(0)} \Big] b_4(0) + \frac{a_2(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3) a_3(5)}{a_4(3) a_4(2)} b_3(2) \\
& + \left[\frac{a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_2(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1)} \right] b_3(1) + \frac{a_3(5)}{a_4(3)} b_2(3) - \frac{a_3(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2)} b_2(2) \\
& + \frac{a_4(4)}{a_4(3)} b_1(3) \Big\} + \left[\frac{a_0(4)}{a_4(0)} - \frac{a_0(0)}{a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_1(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_1(0)}{a_4(0)} b_3(1) \\
& + \frac{a_2(2)}{a_4(0)} b_2(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_2(2) + \frac{a_3(1)}{a_4(0)} b_1(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_1(3) + b_0(0) \\
& = - \left[\frac{a_1(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_1(7)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_4(3) - \left[\frac{a_2(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(4) a_2(6)}{a_4(4) a_4(2)} \right. \\
& - \frac{a_3(4) a_3(3) a_2(6)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \Big] b_4(2) - \left[\frac{a_1(4) a_3(5)}{a_4(4) a_4(1)} - \frac{a_2(4) a_3(2) a_3(5)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(5) a_1(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_3(4) a_2(3) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1)} \Big] b_4(1) + \left[\frac{a_0(8)}{a_4(0)} - \frac{a_0(4)}{a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_1(7) a_3(4)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(4) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_2(4)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(4) a_2(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(2) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(4) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_1(4)}{a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(4) a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(4) a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_1(3) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(0)} \\
& + \frac{a_0(4)}{a_4(0)} - \frac{a_0(0)}{a_4(0)} \Big] b_4(0) - \left[\frac{a_2(6) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_2(6)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_3(3) - \left[\frac{a_2(4) a_3(5)}{a_4(4) a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_3(5) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \Big] b_3(2) - \left[\frac{a_1(4) a_4(4)}{a_4(4) a_4(1)} - \frac{a_2(4) a_3(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_3(4) a_2(3) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_1(0)}{a_4(0)} \Big] b_3(1) \\
& + \left[\frac{a_1(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_3(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_2(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(3)}{a_4(0)} \right] b_3(0) - \left[\frac{a_3(5) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_3(4) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3)} \Big] b_2(3) - \left[\frac{a_2(4) a_4(4)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \right] b_2(2) \\
& + \left[\frac{a_2(6) a_4(2)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_3(2)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(2)}{a_4(0)} \right] b_2(0) - \left[\frac{a_3(4) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_1(3) \\
& + \left[\frac{a_3(5) a_4(1)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(1)}{a_4(0)} \right] b_1(0) + b_0(0),
\end{aligned}$$

$k = 5$

$$\begin{aligned}
b_0(9) &= \left[\frac{a_0(9)}{a_4(5)} - \frac{a_0(5)}{a_4(5)} \right] b_4(5) + \frac{a_1(8)}{a_4(5)} b_3(5) - \frac{a_1(5)}{a_4(5)} b_3(6) + \frac{a_2(7)}{a_4(5)} b_2(5) \\
&\quad - \frac{a_2(5)}{a_4(5)} b_2(7) + \frac{a_3(6)}{a_4(5)} b_1(5) - \frac{a_3(5)}{a_4(5)} b_1(8) + b_0(5) \\
&= \left[\frac{a_0(9)}{a_4(5)} - \frac{a_0(5)}{a_4(5)} \right] \frac{a_4(5)}{a_4(1)} b_4(1) + \frac{a_1(8)}{a_4(5)} \left[\frac{a_3(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_4(4)}{a_4(0)} b_4(0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(4)}{a_4(1)} b_3(1) \right] - \frac{a_1(5)}{a_4(5)} \left[\frac{a_3(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} b_4(1) + \frac{a_4(5)}{a_4(2)} b_3(2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_2(7)}{a_4(5)} \left\{ - \left[\frac{a_2(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_4(3) + \frac{a_2(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(4)}{a_4(0)} b_4(0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_3(4)}{a_4(1)} b_3(1) + \frac{a_4(3)}{a_4(1)} b_2(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_4(3)}{a_4(0)} b_2(0) \right\} - \frac{a_2(5)}{a_4(5)} \left\{ \frac{a_2(7)}{a_4(3)} b_4(3) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_3(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \left[\frac{a_2(3)}{a_4(3)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} + \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} \right] b_4(1) + \frac{a_3(6)}{a_4(3)} b_3(3) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_4(5)}{a_4(2)} b_3(2) + \frac{a_4(5)}{a_4(3)} b_2(3) \right\} + \frac{a_3(6)}{a_4(5)} \left\{ \left[\frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} - \frac{a_1(1)}{a_4(1)} \right] b_4(2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_1(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(4)}{a_4(0)} b_4(0) + \left[\frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} \right] b_3(3) + \frac{a_2(4)}{a_4(1)} b_3(1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(3)}{a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_3(3)}{a_4(1)} b_2(1) + \frac{a_4(2)}{a_4(1)} b_1(1) \right\} - \frac{a_3(5)}{a_4(5)} \left\{ - \frac{a_3(4)}{a_4(4)} \frac{a_2(7)}{a_4(3)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_2(7)}{a_4(4)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_4(3) + \left[\frac{a_3(4)}{a_4(4)} \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_3(6)}{a_4(2)} - \frac{a_2(4)}{a_4(4)} \frac{a_3(6)}{a_4(2)} - \frac{a_3(6)}{a_4(4)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{a_3(6)}{a_4(4)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \right] b_4(2) + \left[\frac{a_3(4)}{a_4(4)} \frac{a_2(3)}{a_4(3)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} + \frac{a_3(4)}{a_4(4)} \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_2(4)}{a_4(4)} \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} - \frac{a_1(4)}{a_4(4)} \frac{a_4(5)}{a_4(1)} - \frac{a_4(4)}{a_4(3)} \frac{a_1(0)}{a_4(0)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_1(8)}{a_4(0)} + \frac{a_3(6)}{a_4(4)} \frac{a_2(4)}{a_4(0)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_4(4)}{a_4(3)} \frac{a_1(4)}{a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_3(4)}{a_4(4)} \frac{a_3(6)}{a_4(3)} + \frac{a_3(6)}{a_4(4)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_3(3) + \left[\frac{a_3(4)}{a_4(4)} \frac{a_3(3)}{a_4(3)} \frac{a_4(5)}{a_4(2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{a_2(4)}{a_4(4)} \frac{a_4(5)}{a_4(2)} - \frac{a_4(4)}{a_4(3)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \right] b_3(2) + \left[\frac{a_2(7)}{a_4(4)} \frac{a_4(3)}{a_4(0)} + \frac{a_3(6)}{a_4(4)} \frac{a_3(3)}{a_4(0)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_4(4)}{a_4(3)} \frac{a_2(3)}{a_4(0)} \right] b_3(0) - \left[\frac{a_3(4)}{a_4(4)} \frac{a_4(5)}{a_4(3)} + \frac{a_4(4)}{a_4(3)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_2(3) \\
&\quad \left. + \left[\frac{a_3(6)}{a_4(4)} \frac{a_4(2)}{a_4(0)} + \frac{a_4(4)}{a_4(3)} \frac{a_3(2)}{a_4(0)} \right] b_2(0) + \frac{a_4(1)}{a_4(0)} b_1(0) \right\} + \left[\frac{a_0(5)}{a_4(1)} - \frac{a_0(1)}{a_4(1)} \right] b_4(1) \\
&\quad + \frac{a_1(4)}{a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_1(1)}{a_4(1)} b_3(2) + \frac{a_2(3)}{a_4(1)} b_2(1) - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} b_2(3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_3(2)}{a_4(1)} b_1(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \left[\frac{a_1(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_1(0)}{a_4(0)} b_4(1) + \frac{a_2(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_3(2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_3(2)}{a_4(0)} b_2(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_2(3) + \frac{a_4(1)}{a_4(0)} b_1(0) \right] + b_0(1) \\
& = - \left[\frac{a_2(7) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_2(5) a_2(7)}{a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_3(4) a_2(7)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_3(5) a_2(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(3) - \left[\frac{a_1(5) a_3(6)}{a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_2(5) a_3(3) a_3(6)}{a_4(5) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_3(6) a_3(1) a_2(0)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_3(6) a_1(1)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(3) a_3(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_3(5) a_2(4) a_3(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_3(5) a_3(6) a_2(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(5) a_3(6) a_2(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(2) + \left[\frac{a_0(9) a_4(5)}{a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_0(5) a_4(5)}{a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_1(8) a_3(5)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_1(5) a_3(2) a_4(5)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(7) a_2(5)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(5) a_2(3) a_4(5)}{a_4(5) a_4(3) a_4(1)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_2(5) a_3(2) a_4(5)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(6)}{a_4(5)} + \frac{a_1(5)}{a_4(1)} - \frac{a_3(5) a_3(4) a_2(3) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(1)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(2) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_3(5) a_2(4) a_3(2) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(5) a_1(4) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(1)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_3(5) a_4(4) a_1(0)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_0(5)}{a_4(1)} - \frac{a_0(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(1) a_1(0)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(1) \\
& \quad - \left[\frac{a_1(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(1) a_2(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_1(8)}{a_4(5) a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_3(5) a_3(6) a_2(4)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_1(4)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_3(1) a_1(4)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) + \left[\frac{a_2(7) a_3(6)}{a_4(5) a_4(3)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_3(6) a_3(1) a_3(0)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_3(5) a_3(6) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right] b_3(3) - \left[\frac{a_1(5) a_4(5)}{a_4(5) a_4(2)} - \frac{a_2(5) a_3(3) a_4(5)}{a_4(5) a_4(3) a_4(2)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(3) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_3(5) a_2(4) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(5) a_4(4) a_2(0)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_1(1)}{a_4(1)} - \frac{a_3(1) a_2(0)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_3(2) + \left[\frac{a_1(8) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& \quad \left. \frac{a_3(6) a_2(4) a_1(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(1)} \right] b_3(1) - \left[\frac{a_3(6) a_3(1) a_3(3)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_2(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_3(5) a_3(6) a_3(3)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_2(3)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_3(1) a_2(3)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_3(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{a_2(7) a_4(5)}{a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_3(5) a_3(4) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_3(0)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} \right. \\
& + \left. \frac{a_3(1) a_3(0)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(3) + \left[\frac{a_2(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_3(3)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(3)}{a_4(1)} \right] b_2(1) \\
& - \left[\frac{a_2(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_3(6) a_4(2)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_3(2)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} \right. \\
& + \left. \frac{a_3(1) a_3(2)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(0) + \left[\frac{a_3(6) a_4(2)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(2)}{a_4(1)} \right] b_1(1) - \left[\frac{a_3(5) a_4(1)}{a_4(5) a_4(0)} \right. \\
& + \left. \frac{a_3(1) a_4(1)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_1(0) + b_0(1),
\end{aligned}$$

$k = 6$

$$\begin{aligned}
b_0(10) &= \left[\frac{a_0(10)}{a_4(6)} - \frac{a_0(6)}{a_4(6)} \right] b_4(6) + \frac{a_1(9)}{a_4(6)} b_3(6) - \frac{a_1(6)}{a_4(6)} b_3(7) + \frac{a_2(8)}{a_4(6)} b_2(6) \\
&\quad - \frac{a_2(6)}{a_4(6)} b_2(8) + \frac{a_3(7)}{a_4(6)} b_1(6) - \frac{a_3(6)}{a_4(6)} b_1(9) + b_0(6) \\
&= \left[\frac{a_0(10)}{a_4(6)} - \frac{a_0(6)}{a_4(6)} \right] \frac{a_4(6)}{a_4(2)} b_4(2) + \frac{a_1(9)}{a_4(6)} \left[\frac{a_3(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2) a_4(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) \right. \\
&\quad + \left. \frac{a_4(5)}{a_4(2)} b_3(2) \right] - \frac{a_1(6)}{a_4(6)} \left[\frac{a_3(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(3) a_4(6)}{a_4(3) a_4(2)} b_4(2) + \frac{a_4(6)}{a_4(3)} b_3(3) \right] \\
&+ \frac{a_2(8)}{a_4(6)} \left\{ \frac{a_2(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2) a_3(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) - \left[\frac{a_2(2) a_4(4)}{a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(1) a_4(4)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) \right. \\
&+ \left. \frac{a_3(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_3(2) a_4(4)}{a_4(2) a_4(1)} b_3(1) + \frac{a_4(4)}{a_4(2)} b_2(2) \right\} - \frac{a_2(6)}{a_4(6)} \left\{ \left[\frac{a_2(8)}{a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_3(4)}{a_4(4) a_4(0)} \right] \right. \\
&+ \left. \frac{a_4(6) a_2(4)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_2(4) a_4(6)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(4) a_3(3) a_4(6)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_4(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(2) \\
&\quad - \left[\frac{a_3(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_3(7)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_4(3) + \left[\frac{a_3(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(6) a_3(3)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_3(0) \\
&\quad - \left[\frac{a_3(4) a_4(6)}{a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_4(6) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_3(3) + \frac{a_4(2)}{a_4(0)} b_2(0) \Big\} + \frac{a_3(7)}{a_4(6)} \left\{ \left[\frac{a_3(2) a_2(1)}{a_4(2) a_4(1)} \right. \right. \\
&+ \left. \frac{a_3(2) a_3(0)}{a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_2(2) a_3(0)}{a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_1(2)}{a_4(2)} \right] b_4(3) + \frac{a_1(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2) a_2(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) \\
&+ \left[\frac{a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(2) a_3(4)}{a_4(2) a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_2(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_3(2) a_3(4)}{a_4(2) a_4(1)} b_3(1) \\
&\quad - \frac{a_2(2) a_4(3)}{a_4(2) a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_3(4)}{a_4(2)} b_2(2) - \frac{a_3(2) a_4(3)}{a_4(2) a_4(1)} b_2(1) \\
&\quad + \left. \frac{a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} b_2(0) + \frac{a_4(3)}{a_4(2)} b_1(2) \right\} \frac{a_3(6)}{a_4(6)} \left\{ \left[\frac{a_3(5) a_3(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(7)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_2(5) a_3(7)}{a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_3(7) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_3(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(0)} \Big] b_4(3) \\
& + \left[\frac{a_3(5) a_2(4) a_4(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2)} + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(3) a_4(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_3(5) a_4(6) a_2(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& \quad + \frac{a_2(5) a_3(3) a_4(6)}{a_4(5) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_1(5) a_4(6)}{a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_4(5) a_3(1) a_2(0)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} \\
& \quad - \frac{a_4(5) a_1(1)}{a_4(4) a_4(1)} \Big] b_4(2) + \left[\frac{a_1(9)}{a_4(1)} + \frac{a_2(8) a_3(5)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(7) a_2(5)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(5) a_1(5)}{a_4(4) a_4(1)} \right] b_4(1) \\
& - \left[\frac{a_3(5) a_2(8)}{a_4(5) a_4(0)} - \frac{a_3(5) a_3(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(5) a_4(6) a_2(4)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& \quad - \frac{a_3(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_4(5) a_3(1) a_2(4)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} \Big] b_4(0) + \left[\frac{a_3(5) a_3(4) a_4(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} \right. \\
& \quad + \frac{a_3(5) a_4(6) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(5) a_4(6)}{a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_4(5) a_3(1) a_3(0)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_4(5) a_2(1)}{a_4(4) a_4(1)} \Big] b_3(3) \\
& + \left[\frac{a_2(8) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(5) a_2(4)}{a_4(4) a_4(1)} \right] b_3(1) - \frac{a_4(5) a_3(1) a_3(3)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} b_3(0) \\
& \quad + \frac{a_3(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1)} b_2(1) - \left[\frac{a_3(5) a_4(2)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(0) \\
& + \frac{a_4(5) a_4(2)}{a_4(4) a_4(1)} b_1(1) \Big\} + \left[\frac{a_0(6)}{a_4(2)} - \frac{a_0(2)}{a_4(2)} + \frac{a_2(2) a_2(0)}{a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(2) a_3(1) a_2(0)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& \quad + \frac{a_3(2) a_1(1)}{a_4(2) a_4(1)} \Big] b_4(2) - \frac{a_3(2) a_1(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) - \left[\frac{a_2(2) a_2(4)}{a_4(2) a_4(0)} \right. \\
& \quad - \frac{a_3(2) a_3(1) a_2(4)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \Big] b_4(0) - \left[\frac{a_1(2)}{a_4(2)} - \frac{a_2(2) a_3(0)}{a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(2) a_3(1) a_3(0)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& \quad - \frac{a_3(2) a_2(1)}{a_4(2) a_4(1)} \Big] b_3(3) + \frac{a_1(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_3(2) a_2(4)}{a_4(2) a_4(1)} b_3(1) - \left[\frac{a_2(2) a_3(3)}{a_4(2) a_4(0)} \right. \\
& \quad - \frac{a_3(2) a_3(1) a_3(3)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \Big] b_3(0) + \frac{a_2(4)}{a_4(2)} b_2(2) - \frac{a_3(2) a_3(3)}{a_4(2) a_4(1)} b_2(1) \\
& \quad - \frac{a_2(2) a_4(2)}{a_4(2) a_4(0)} b_2(0) + \frac{a_3(3)}{a_4(2)} b_1(2) - \frac{a_3(2) a_4(2)}{a_4(2) a_4(1)} b_1(1) + b_0(2) \\
& = \left[- \frac{a_1(6) a_3(7)}{a_4(6) a_4(3)} + \frac{a_2(6) a_3(7) a_3(0)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_3(4) a_3(7)}{a_4(6) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(7) a_3(2) a_2(1)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \right. \\
& \quad + \frac{a_3(7) a_3(2) a_3(0)}{a_4(6) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_2(2) a_3(0)}{a_4(6) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(7) a_1(2)}{a_4(6) a_4(2)} \\
& \quad - \frac{a_3(6) a_3(5) a_3(7) a_3(0)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_3(5) a_3(4) a_3(7)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(6) a_2(5) a_3(7)}{a_4(6) a_4(5) a_4(3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_3(6) a_3(7) a_2(1)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_3(7) a_3(0)}{a_4(6) a_4(5) a_4(0)} \Big] b_4(3) + \left[\frac{a_0(10) a_4(6)}{a_4(6) a_4(2)} - \frac{a_0(6) a_4(6)}{a_4(6) a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_1(9) a_3(6)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_1(6) a_3(3) a_4(6)}{a_4(6) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_2(8) a_2(6)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_2(6) a_2(4) a_4(6)}{a_4(6) a_4(4) a_4(2)} \\
& + \frac{a_2(6) a_3(4) a_3(3) a_4(6)}{a_4(6) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_2(6) a_4(6) a_2(0)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_1(6)}{a_4(6) a_4(2)} \\
& - \frac{a_3(6) a_3(5) a_2(4) a_4(6)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(2)} + \frac{a_3(6) a_1(5) a_4(6)}{a_4(6) a_4(5) a_4(2)} - \frac{a_3(6) a_4(5) a_3(1) a_2(0)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(6) a_4(5) a_1(1)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_0(6)}{a_4(2)} - \frac{a_0(2)}{a_4(2)} + \frac{a_2(2) a_2(0)}{a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(2) a_3(1) a_2(0)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(2) a_1(1)}{a_4(2) a_4(1)} \Big] b_4(2) - \left[\frac{a_1(9) a_3(2) a_4(5)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(8) a_3(2) a_3(5)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_3(7) a_3(2) a_2(5)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_1(9)}{a_4(6) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_2(8) a_3(5)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_3(7) a_2(5)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \\
& + \frac{a_3(6) a_4(5) a_1(5)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_1(5)}{a_4(2) a_4(1)} \Big] b_4(1) - \left[\frac{a_2(8) a_2(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_2(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(6) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_2(8)}{a_4(6) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_3(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(6) a_4(6) a_2(4)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(7) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_2(2) a_3(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(6) a_3(5) a_2(8)}{a_4(6) a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(5) a_3(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(5) a_4(6) a_2(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(6) a_2(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_4(5) a_3(1) a_2(4)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(2) a_2(4)}{a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(2) a_3(1) a_2(4)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \Big] b_4(0) - \left[\frac{a_1(6) a_4(6)}{a_4(6) a_4(3)} - \frac{a_2(6) a_3(4) a_4(6)}{a_4(6) a_4(4) a_4(3)} \right. \\
& - \frac{a_2(6) a_4(6) a_3(0)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(5) a_3(4) a_4(6)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} \\
& + \frac{a_3(6) a_3(5) a_4(6) a_3(0)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_2(5) a_4(6)}{a_4(6) a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_3(6) a_4(5) a_3(1) a_3(0)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(6) a_4(5) a_2(1)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_1(2)}{a_4(2)} - \frac{a_2(2) a_3(0)}{a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(2) a_3(1) a_3(0)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(2) a_2(1)}{a_4(2) a_4(1)} \Big] b_3(3) + \left[\frac{a_1(9) a_4(5)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_2(8) a_3(5)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_3(7) a_2(5)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_1(5)}{a_4(2)} \right] b_3(2) \\
& - \left[\frac{a_2(8) a_3(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_2(6) a_3(2) a_3(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_2(8) a_4(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_3(6) a_3(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_4(5) a_2(4)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_2(4)}{a_4(2) a_4(1)} \Big] b_3(1) \\
& - \left[\frac{a_2(6) a_3(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_4(6) a_3(3)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_2(2) a_4(3)}{a_4(6) a_4(2) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_3(6) a_4(5) a_3(1) a_3(3)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(2) a_3(3)}{a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(2) a_3(1) a_3(3)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \Big] b_3(0) \\
& \left[+ \frac{a_2(8) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_3(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_2(4)}{a_4(2)} \right] b_2(2) - \left[\frac{a_3(7) a_3(2) a_4(3)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_3(6) a_3(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_3(3)}{a_4(2) a_4(1)} \Big] b_2(1) + \left[\frac{a_2(6) a_2(4) a_4(6)}{a_4(6) a_4(4) a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_2(6) a_4(2)}{a_4(6) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(5) a_4(2)}{a_4(6) a_4(5) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(6) a_3(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(2) a_4(2)}{a_4(2) a_4(0)} \Big] b_2(0) + \left[\frac{a_3(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_3(3)}{a_4(2)} \Big] b_1(2) - \left[\frac{a_3(6) a_4(5) a_4(2)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_4(2)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_1(1) + b_0(2),
\end{aligned}$$

$k = 7$

$$\begin{aligned}
b_0(11) &= \left[\frac{a_0(11)}{a_4(7)} - \frac{a_0(7)}{a_4(7)} \right] b_4(7) + \frac{a_1(10)}{a_4(7)} b_3(7) - \frac{a_1(7)}{a_4(7)} b_3(8) + \frac{a_2(9)}{a_4(7)} b_2(7) \\
&\quad - \frac{a_2(7)}{a_4(7)} b_2(9) + \frac{a_3(8)}{a_4(7)} b_1(7) - \frac{a_3(7)}{a_4(7)} b_1(10) + b_0(7) \\
&= \left[\frac{a_0(11)}{a_4(7)} - \frac{a_0(7)}{a_4(7)} \right] \frac{a_4(7)}{a_4(3)} b_4(3) + \frac{a_1(10)}{a_4(7)} \left[\frac{a_3(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(3) a_4(6)}{a_4(3) a_4(2)} b_4(2) \right. \\
&\quad + \frac{a_4(6)}{a_4(3)} b_3(3) \Big] - \frac{a_1(7)}{a_4(7)} \left[\frac{a_3(8) a_4(4)}{a_4(4) a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_3(4) a_4(7)}{a_4(4) a_4(3)} b_4(3) \right. \\
&\quad + \frac{a_4(7)}{a_4(4)} b_3(4) \Big] + \frac{a_2(9)}{a_4(7)} \left\{ \left[\frac{a_2(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(3) a_3(6)}{a_4(3) a_4(2)} b_4(2) - \left[\frac{a_2(3) a_4(5)}{a_4(3) a_4(1)} \right. \right. \right. \\
&\quad + \frac{a_3(2) a_4(5)}{a_4(2) a_4(1)} \Big] b_4(1) + \frac{a_3(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3) a_4(5)}{a_4(3) a_4(2)} b_3(2) \\
&\quad + \frac{a_4(5)}{a_4(3)} b_2(3) \Big\} - \frac{a_2(7)}{a_4(7)} \left\{ \left[\frac{a_2(9)}{a_4(1)} + \frac{a_3(8) a_3(5)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(7) a_2(5)}{a_4(5) a_4(1)} \right] b_4(1) \right. \\
&\quad - \left[\frac{a_2(5) a_4(7)}{a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(7) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} \right. \\
&\quad + \frac{a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(0)} \Big] b_4(3) - \left[\frac{a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_3(8)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \Big] b_4(0) + \left[\frac{a_3(8) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1)} \right] b_3(1) \\
& - \frac{a_3(5) a_4(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_4(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} b_2(0) + \frac{a_4(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1)} b_2(1) \Big\} \\
& + \frac{a_3(8)}{a_4(7)} \left\{ \frac{a_1(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \left[\frac{a_3(3) a_2(6)}{a_4(3) a_4(2)} \right] b_4(2) + \left[\frac{a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{a_2(3) a_3(5)}{a_4(3) a_4(1)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_1(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_2(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3) a_3(5)}{a_4(3) a_4(2)} b_3(2) \right. \\
& \quad \left. + \left[\frac{a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_2(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1)} \right] b_3(1) + \frac{a_3(5)}{a_4(3)} b_2(3) - \frac{a_3(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2)} b_2(2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_4(3)}{a_4(2)} b_1(3) \right\} + \frac{a_3(7)}{a_4(7)} \left\{ \left[\frac{a_2(5) a_4(7)}{a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{a_4(7) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_3(4) a_4(7)}{a_4(6) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_2(6) a_4(7) a_3(0)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{a_1(6) a_4(7)}{a_4(6) a_4(3)} + \frac{a_4(6) a_3(2) a_2(1)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_4(6) a_3(2) a_3(0)}{a_4(5) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_4(6) a_1(2)}{a_4(5) a_4(2)} \right] b_4(3) \right. \\
& \quad \left. + \left[\frac{a_1(10)}{a_4(2)} + \frac{a_2(9) a_3(6)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_3(8) a_2(6)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_4(6) a_1(6)}{a_4(5) a_4(2)} \right] b_4(2) - \left[\frac{a_3(6) a_2(9)}{a_4(6) a_4(1)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{a_3(6) a_3(5)}{a_4(6) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_2(5)}{a_4(6) a_4(1)} + \frac{a_2(9) a_3(2) a_4(5)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(8) a_3(2) a_3(5)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{a_4(6) a_3(2) a_2(5)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_3(6) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(5) a_3(8)}{a_4(6) a_4(5) a_4(0)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_3(8)}{a_4(6) a_4(0)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{a_2(6) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(6) a_3(2) a_2(5)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_3(6) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{a_3(6) a_3(5) a_3(8)}{a_4(6) a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{a_2(6) a_3(8)}{a_4(6) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(8) a_2(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(6) a_4(1) a_4(0)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_4(6) a_2(2) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2) a_4(0)} \right] b_4(0) + \left[\frac{a_2(9) a_4(5)}{a_4(6) a_4(2)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{a_3(8) a_3(5)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_4(6) a_2(5)}{a_4(5) a_4(2)} \right] b_3(2) - \left[\frac{a_3(6) a_3(8) a_4(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_3(6) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(8) a_3(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_4(6) a_3(2) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \Big] b_3(1) \\
& + \left[\frac{a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_4(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_4(6) a_2(2) a_4(3)}{a_4(5) a_4(2) a_4(0)} \right] b_3(0) \\
& + \left[\frac{a_3(8) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_4(6) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2)} \right] b_2(2) - \left[\frac{a_3(6) a_4(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_4(6) a_3(2) a_4(3)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \right] b_2(1) - \left[\frac{a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(0) + \frac{a_4(6) a_4(3)}{a_4(5) a_4(2)} b_1(2) \Big\} + \left[\frac{a_0(7)}{a_4(3)} - \frac{a_0(3)}{a_4(3)} \right. \\
& \quad + \frac{a_1(3) a_3(0)}{a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_2(3) a_2(1)}{a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_3(1) a_3(0)}{a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_3(2) a_2(1)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \\
& \quad \left. - \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(0)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(3) a_2(2) a_3(0)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_1(2)}{a_4(3) a_4(2)} \right] b_4(3) + \frac{a_1(6)}{a_4(2)} b_4(2) \\
& - \left[\frac{a_2(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(1)} - \frac{a_3(3) a_3(2) a_2(5)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(1) - \left[\frac{a_1(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_2(3) a_3(1) a_3(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& \quad + \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(2) a_3(4)}{a_4(2) a_4(0)} \Big] b_4(0) + \frac{a_1(6)}{a_4(3)} b_3(3) \\
& - \frac{a_3(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(2)} b_3(2) - \left[\frac{a_2(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right] b_3(1) \\
& - \left[\frac{a_1(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_2(2) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} \right] b_3(0) - \frac{a_1(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(3)} b_2(3) \\
& - \frac{a_3(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2)} b_2(2) - \left[\frac{a_2(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(1)} - \frac{a_3(3) a_3(2) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right] b_2(1) \\
& - \left[\frac{a_2(3) a_3(1) a_4(3)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(0) + \frac{a_3(4)}{a_4(3)} b_1(3) \\
& \quad - \frac{a_3(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2)} b_1(2) + b_0(3) \\
& = \left[\frac{a_0(11)}{a_4(3)} - \frac{a_0(7)}{a_4(3)} + \frac{a_1(10) a_3(7)}{a_4(7) a_4(3)} + \frac{a_1(7) a_3(4) a_4(7)}{a_4(7) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_1(7) a_4(7) a_3(0)}{a_4(7) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& \quad + \frac{a_2(9) a_2(7)}{a_4(7) a_4(3)} + \frac{a_2(7) a_2(5) a_4(7)}{a_4(7) a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_2(7) a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_4(7) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} \\
& \quad + \frac{a_2(7) a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_4(7) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(7) a_4(7) a_2(1)}{a_4(7) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_2(7) a_4(7) a_3(0)}{a_4(7) a_4(5) a_4(0)} \\
& \quad + \frac{a_3(8) a_1(7)}{a_4(7) a_4(3)} + \frac{a_3(7) a_2(5) a_4(7)}{a_4(7) a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_3(7) a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_4(7) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} \\
& \quad \left. + \frac{a_3(7) a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_4(7) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_3(7) a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_4(7) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_4(7) a_2(1)}{a_4(7) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(7) a_4(7) a_3(0)}{a_4(7) a_4(5) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(7) a_2(6) a_3(4) a_4(7)}{a_4(7) a_4(6) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(7) a_2(6) a_4(7) a_3(0)}{a_4(7) a_4(6) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_1(6) a_4(7)}{a_4(7) a_4(6) a_4(3)} \\
& + \frac{a_3(7) a_4(6) a_3(2) a_2(1)}{a_4(7) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(7) a_4(6) a_3(2) a_3(0)}{a_4(7) a_4(5) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_4(6) a_1(2)}{a_4(7) a_4(5) a_4(2)} \\
& + \frac{a_0(7)}{a_4(3)} - \frac{a_0(3)}{a_4(3)} + \frac{a_1(3) a_3(0)}{a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_2(3) a_2(1)}{a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_3(1) a_3(0)}{a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_3(2) a_2(1)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \\
& - \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(0)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(3) a_2(2) a_3(0)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_1(2)}{a_4(3) a_4(2)} \Big] b_4(3) \\
& - \left[\frac{a_1(10) a_3(3) a_4(6)}{a_4(7) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_2(9) a_3(3) a_3(6)}{a_4(7) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_3(8) a_3(3) a_2(6)}{a_4(7) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_3(7) a_1(10)}{a_4(7) a_4(2)} \right. \\
& - \frac{a_3(7) a_2(9) a_3(6)}{a_4(7) a_4(6) a_4(2)} - \frac{a_3(7) a_3(8) a_2(6)}{a_4(7) a_4(6) a_4(2)} - \frac{a_3(7) a_4(6) a_1(6)}{a_4(7) a_4(5) a_4(2)} - \left. \frac{a_1(6)}{a_4(2)} \right] b_4(2) \\
& - \left[\frac{a_2(9) a_2(3) a_4(5)}{a_4(7) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_2(9) a_3(2) a_4(5)}{a_4(7) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(7) a_2(9)}{a_4(7) a_4(1)} + \frac{a_2(7) a_3(8) a_3(5)}{a_4(7) a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_2(7) a_4(7) a_2(5)}{a_4(7) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_3(8) a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_4(7) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(8) a_2(3) a_3(5)}{a_4(7) a_4(3) a_4(1)} \\
& + \frac{a_3(7) a_3(6) a_2(9)}{a_4(7) a_4(6) a_4(1)} + \frac{a_3(7) a_3(6) a_3(5)}{a_4(7) a_4(6) a_4(1)} + \left. \frac{a_3(7) a_3(6) a_2(5)}{a_4(7) a_4(6) a_4(1)} \right] \\
& + \frac{a_3(7) a_2(9) a_3(2) a_4(5)}{a_4(7) a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(7) a_3(8) a_3(2) a_3(5)}{a_4(7) a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(7) a_4(6) a_3(2) a_2(5)}{a_4(7) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \\
& + \frac{a_2(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(1)} - \frac{a_3(3) a_3(2) a_2(5)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \Big] b_4(1) - \left[\frac{a_1(7) a_3(8)}{a_4(7) a_4(0)} + \frac{a_1(7) a_4(7) a_3(4)}{a_4(7) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_2(7) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(7) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(7) a_3(5) a_3(8)}{a_4(7) a_4(5) a_4(0)} - \frac{a_2(7) a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_4(7) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& - \frac{a_2(7) a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(7) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(8) a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_4(7) a_4(3) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(8) a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(7) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(8) a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(7) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(8) a_1(3) a_4(4)}{a_4(7) a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_3(7) a_3(6) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(7) a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(7) a_3(6) a_3(5) a_3(8)}{a_4(7) a_4(6) a_4(5) a_4(0)} - \frac{a_3(7) a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_4(7) a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(7) a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(7) a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_2(6) a_3(8)}{a_4(7) a_4(6) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_2(6) a_4(7) a_3(4)}{a_4(7) a_4(6) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(7) a_3(8) a_2(2) a_4(4)}{a_4(7) a_4(6) a_4(2) a_4(0)} + \left. \frac{a_3(7) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(7) a_4(6) a_4(1) a_4(0)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_3(7) a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_4(7) a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_4(6) a_2(2) a_3(4)}{a_4(7) a_4(5) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_1(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(3) a_3(1) a_3(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(2) a_3(4)}{a_4(2) a_4(0)} \Big] b_4(0) \\
& + \left[\frac{a_1(10) a_4(6)}{a_4(7) a_4(3)} + \frac{a_2(9) a_3(6)}{a_4(7) a_4(3)} + \frac{a_3(8) a_2(6)}{a_4(7) a_4(3)} + \frac{a_1(6)}{a_4(3)} \right] b_3(3) \\
& - \left[\frac{a_2(9) a_3(3) a_4(5)}{a_4(7) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_3(8) a_3(3) a_3(5)}{a_4(7) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_3(7) a_2(9) a_4(5)}{a_4(7) a_4(6) a_4(2)} \right. \\
& \left. - \frac{a_3(7) a_3(8) a_3(5)}{a_4(7) a_4(6) a_4(2)} - \frac{a_3(7) a_4(6) a_2(5)}{a_4(7) a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_3(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(2)} \right] b_3(2) \\
& - \left[\frac{a_2(7) a_3(8) a_4(4)}{a_4(7) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(7) a_4(7) a_3(4)}{a_4(7) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_3(8) a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_4(7) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_3(8) a_2(3) a_4(4)}{a_4(7) a_4(3) a_4(1)} - \frac{a_3(7) a_3(6) a_3(8) a_4(4)}{a_4(7) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(7) a_3(6) a_4(7) a_3(4)}{a_4(7) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \\
& + \frac{a_3(6) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(8) a_3(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_4(6) a_3(2) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(1)} \\
& \left. + \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right] b_3(1) - \left[\frac{a_1(7) a_4(7) a_4(3)}{a_4(7) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(7) a_3(5) a_4(7) a_4(3)}{a_4(7) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& \left. - \frac{a_3(7) a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_4(3)}{a_4(7) a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_2(6) a_4(7) a_4(3)}{a_4(7) a_4(6) a_4(4) a_4(0)} \right] b_3(0) \\
& + \frac{a_3(7) a_4(6) a_2(2) a_4(3)}{a_4(7) a_4(5) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_1(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_2(2) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} \\
& + \left[\frac{a_2(9) a_4(5)}{a_4(7) a_4(3)} + \frac{a_3(8) a_3(5)}{a_4(7) a_4(3)} - \frac{a_1(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(3)} \right] b_2(3) \\
& - \left[\frac{a_3(8) a_3(3) a_4(4)}{a_4(7) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_3(7) a_3(8) a_4(4)}{a_4(7) a_4(6) a_4(2)} - \frac{a_3(7) a_4(6) a_3(4)}{a_4(7) a_4(5) a_4(2)} \right. \\
& \left. + \frac{a_3(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2)} \right] b_2(2) - \left[\frac{a_2(7) a_4(7) a_4(3)}{a_4(7) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(7) a_3(6) a_4(7) a_4(3)}{a_4(7) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& - \frac{a_1(0)}{a_4(0)} b_4(1) + \frac{a_2(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_3(7) a_4(6) a_3(2) a_4(3)}{a_4(7) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(1)} \\
& \left. - \frac{a_3(3) a_3(2) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right] b_2(1) - \left[\frac{a_2(7) a_4(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(7) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_3(7) a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(7) a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(7) a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(7) a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \\
& \left. + \frac{a_2(3) a_3(1) a_4(3)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(0)
\end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{a_3(8) a_4(3)}{a_4(7) a_4(2)} + \frac{a_3(4)}{a_4(3)} \right] b_1(3) + \left[\frac{a_3(7) a_4(6) a_4(3)}{a_4(7) a_4(5) a_4(2)} - \frac{a_3(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2)} \right] b_1(2) + b_0(3)$$

bulunur.

Denklem (4.10)'dan,

$$b_0(k+3) = \left[\frac{a_0(k+3)}{a_3(k)} - \frac{a_0(k)}{a_3(k)} \right] b_3(k) + \frac{a_1(k+2)}{a_3(k)} b_2(k) - \frac{a_1(k)}{a_3(k)} b_2(k+1) \\ + \frac{a_2(k+1)}{a_3(k)} b_1(k) - \frac{a_2(k)}{a_3(k)} b_1(k+2) + b_0(k);$$

$k = 0$

$$b_0(3) = \left[\frac{a_0(3)}{a_3(0)} - \frac{a_0(0)}{a_3(0)} \right] b_3(0) + \frac{a_1(2)}{a_3(0)} b_2(0) - \frac{a_1(0)}{a_3(0)} b_2(1) + \frac{a_2(1)}{a_3(0)} b_1(0) \\ - \frac{a_2(0)}{a_3(0)} b_1(2) + b_0(0),$$

$k = 1$

$$b_0(4) = \left[\frac{a_0(4)}{a_3(1)} - \frac{a_0(1)}{a_3(1)} \right] b_3(1) + \frac{a_1(3)}{a_3(1)} b_2(1) - \frac{a_1(1)}{a_3(1)} b_2(2) + \frac{a_2(2)}{a_3(1)} b_1(1) \\ - \frac{a_2(1)}{a_3(1)} b_1(3) + b_0(1),$$

$k = 2$

$$b_0(5) = \left[\frac{a_0(5)}{a_3(2)} - \frac{a_0(2)}{a_3(2)} \right] b_3(2) + \frac{a_1(4)}{a_3(2)} b_2(2) - \frac{a_1(2)}{a_3(2)} b_2(3) + \frac{a_2(3)}{a_3(2)} b_1(2) \\ - \frac{a_2(2)}{a_3(2)} b_1(4) + b_0(2) \\ = \left[\frac{a_0(5)}{a_3(2)} - \frac{a_0(2)}{a_3(2)} \right] b_3(2) + \frac{a_1(4)}{a_3(2)} b_2(2) - \frac{a_1(2)}{a_3(2)} b_2(3) + \frac{a_2(3)}{a_3(2)} b_1(2) \\ - \frac{a_2(2)}{a_3(2)} \left[\frac{a_1(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_3(2) + \frac{a_3(2)}{a_4(0)} b_2(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_2(3) + \frac{a_4(1)}{a_4(0)} b_1(0) \right] \\ + b_0(2) \\ = \frac{a_2(2) a_1(0)}{a_3(2) a_4(0)} b_4(1) - \frac{a_2(2) a_1(4)}{a_3(2) a_4(0)} b_4(0) + \left[\frac{a_0(5)}{a_3(2)} - \frac{a_0(2)}{a_3(2)} - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \right] b_3(2) \\ - \frac{a_2(2) a_2(3)}{a_3(2) a_4(0)} b_3(0) - \left[\frac{a_1(2)}{a_3(2)} + \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_2(3) + \frac{a_1(4)}{a_3(2)} b_2(2) - \frac{a_2(2) a_3(2)}{a_3(2) a_4(0)} b_2(0) \\ + \frac{a_2(3)}{a_3(2)} b_1(2) - \frac{a_2(2) a_4(1)}{a_3(2) a_4(0)} b_1(0) + b_0(2),$$

$k = 3$

$$\begin{aligned}
b_0(6) &= \left[\frac{a_0(6)}{a_3(3)} - \frac{a_0(3)}{a_3(3)} \right] b_3(3) + \frac{a_1(5)}{a_3(3)} b_2(3) - \frac{a_1(3)}{a_3(3)} b_2(4) - \frac{a_2(3)}{a_3(3)} b_1(5) \\
&\quad - \frac{a_2(3)}{a_3(3)} b_1(5) + b_0(3) \\
&= \left[\frac{a_0(6)}{a_3(3)} - \frac{a_0(3)}{a_3(3)} \right] b_3(3) + \frac{a_1(5)}{a_3(3)} b_2(3) - \frac{a_1(3)}{a_3(3)} \left[\frac{a_2(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_4(2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_3(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_3(3) + \frac{a_4(2)}{a_4(0)} b_2(0) \right] + \frac{a_2(4)}{a_3(3)} b_1(3) - \frac{a_2(3)}{a_3(3)} \left\{ \left[\frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{a_1(1)}{a_4(1)} \right] b_4(2) + \frac{a_1(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(4)}{a_4(0)} b_4(0) + \left[\frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} \right] b_3(3) + \frac{a_2(4)}{a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(3)}{a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_3(3)}{a_4(1)} b_2(1) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_4(2)}{a_4(1)} b_1(1) \right\} + b_0(3) \\
&= \left[\frac{a_1(3)}{a_3(3)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} - \frac{a_2(3)}{a_3(3)} \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} + \frac{a_2(3)}{a_3(3)} \frac{a_1(1)}{a_4(1)} \right] b_4(2) - \left[\frac{a_2(3)}{a_3(3)} \frac{a_1(5)}{a_4(1)} \right] b_4(1) \\
&\quad - \left[\frac{a_1(3)}{a_3(3)} \frac{a_2(4)}{a_4(0)} + \frac{a_2(3)}{a_3(3)} \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(4)}{a_4(0)} \right] b_4(0) + \left[\frac{a_0(6)}{a_3(3)} - \frac{a_0(3)}{a_3(3)} + \frac{a_1(3)}{a_3(3)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_2(3)}{a_3(3)} \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} + \frac{a_2(3)}{a_3(3)} \frac{a_2(1)}{a_4(1)} \right] b_3(3) - \frac{a_2(3)}{a_3(3)} \frac{a_2(4)}{a_4(1)} b_3(1) \\
&\quad - \left[\frac{a_1(3)}{a_3(3)} \frac{a_3(3)}{a_4(0)} - \frac{a_2(3)}{a_3(3)} \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(3)}{a_4(0)} \right] b_3(0) + \frac{a_1(5)}{a_3(3)} b_2(3) - \frac{a_2(3)}{a_3(3)} \frac{a_3(3)}{a_4(1)} b_2(1) \\
&\quad - \left[\frac{a_1(3)}{a_3(3)} - \frac{a_4(2)}{a_4(0)} \right] b_2(0) + \frac{a_2(4)}{a_3(3)} b_1(3) - \frac{a_2(3)}{a_3(3)} \frac{a_4(2)}{a_4(1)} b_1(1) + b_0(3),
\end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned}
b_0(7) &= \left[\frac{a_0(7)}{a_3(4)} - \frac{a_0(4)}{a_3(4)} \right] b_3(4) + \frac{a_1(6)}{a_3(4)} b_2(4) - \frac{a_1(4)}{a_3(4)} b_2(5) + \frac{a_2(4)}{a_3(3)} b_1(4) \\
&\quad - \frac{a_2(3)}{a_3(3)} b_1(6) + b_0(4) \\
&= \left[\frac{a_0(7)}{a_3(4)} - \frac{a_0(4)}{a_3(4)} \right] \left[\frac{a_3(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_4(3) + \frac{a_4(3)}{a_4(0)} b_3(0) \right] \\
&\quad + \frac{a_1(6)}{a_3(4)} \left[\frac{a_2(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_4(2) + \frac{a_3(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_3(3) + \frac{a_4(2)}{a_4(0)} b_2(0) \right] \\
&\quad - \frac{a_1(4)}{a_3(4)} \left\{ - \left[\frac{a_2(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_4(3) + \frac{a_2(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(4)}{a_4(0)} b_4(0) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_3(4)}{a_4(1)} b_3(1) + \frac{a_4(3)}{a_4(1)} b_2(1) - \frac{a_3(1) a_4(3)}{a_4(1) a_4(0)} b_2(0) \Big\} + \frac{a_2(4)}{a_3(3)} \Big\{ \frac{a_1(4)}{a_4(0)} b_4(0) \\
& - \frac{a_1(0)}{a_4(0)} b_4(1) + \frac{a_2(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_3(2) + \frac{a_3(2)}{a_4(0)} b_2(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_2(3) \\
& + \frac{a_4(1)}{a_4(0)} b_1(0) \Big\} - \frac{a_2(3)}{a_3(3)} \Big\{ \Big[\frac{a_3(2) a_2(1)}{a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_3(0)}{a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_2(2) a_3(0)}{a_4(2) a_4(0)} \\
& - \frac{a_1(2)}{a_4(2)} \Big] b_4(3) + \frac{a_1(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2) a_2(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) + \Big[\frac{a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \\
& - \frac{a_2(2) a_3(4)}{a_4(2) a_4(0)} \Big] b_4(0) + \frac{a_2(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_3(2) a_3(4)}{a_4(2) a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_2(2) a_4(3)}{a_4(2) a_4(0)} b_3(0) \\
& + \frac{a_3(4)}{a_4(2)} b_2(2) - \frac{a_3(2) a_4(3)}{a_4(2) a_4(1)} b_2(1) + \frac{a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} b_2(0) \\
& + \frac{a_4(3)}{a_4(2)} b_1(2) \Big\} + \Big[\frac{a_0(4)}{a_4(0)} - \frac{a_0(0)}{a_4(0)} \Big] b_4(0) + \frac{a_1(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_1(0)}{a_4(0)} b_3(1) \\
& + \frac{a_2(2)}{a_4(0)} b_2(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_2(2) + \frac{a_3(1)}{a_4(0)} b_1(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_1(3) + b_0(0) \\
& = \Big[- \frac{a_0(7) a_3(0)}{a_3(4) a_4(0)} + \frac{a_3(0) a_0(4)}{a_4(0) a_3(4)} + \frac{a_1(4) a_2(1)}{a_3(4) a_4(1)} + \frac{a_1(4) a_3(0)}{a_3(4) a_4(0)} \\
& - \frac{a_2(3) a_3(2) a_2(1)}{a_3(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_2(3) a_3(2) a_3(0)}{a_3(3) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_2(3) a_2(2) a_3(0)}{a_3(3) a_4(2) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(3) a_1(2)}{a_3(3) a_4(2)} \Big] b_4(3) - \Big[\frac{a_1(6) a_2(0)}{a_3(4) a_4(0)} + \frac{a_2(3) a_1(6)}{a_3(3) a_4(2)} \Big] b_4(2) - \Big[\frac{a_1(4) a_2(5)}{a_3(4) a_4(1)} \\
& + \frac{a_2(4) a_1(0)}{a_3(3) a_4(0)} - \frac{a_2(3) a_3(2) a_2(5)}{a_3(3) a_4(2) a_4(1)} \Big] b_4(1) + \Big[\frac{a_0(7) a_3(4)}{a_3(4) a_4(0)} - \frac{a_0(4)}{a_4(0)} + \frac{a_1(6) a_2(4)}{a_3(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_1(4) a_3(1) a_3(4)}{a_3(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(4) a_1(4)}{a_3(3) a_4(0)} - \frac{a_2(3) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_3(3) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(3) a_2(2) a_3(4)}{a_3(3) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_0(4)}{a_4(0)} - \frac{a_0(0)}{a_4(0)} \Big] b_4(0) - \Big[\frac{a_1(6) a_3(0)}{a_3(4) a_4(0)} \Big] b_3(3) \\
& - \Big[\frac{a_2(4) a_2(0)}{a_3(3) a_4(0)} + \frac{a_2(3) a_2(5)}{a_3(3) a_4(2)} \Big] b_3(2) - \Big[\frac{a_1(4) a_3(4)}{a_3(4) a_4(1)} - \frac{a_2(3) a_3(2) a_3(4)}{a_3(3) a_4(2) a_4(1)} \\
& - \frac{a_1(0)}{a_4(0)} \Big] b_3(1) + \Big[\frac{a_4(3) a_0(7)}{a_4(0) a_3(4)} - \frac{a_4(3) a_0(4)}{a_4(0) a_3(4)} + \frac{a_1(6) a_3(3)}{a_3(4) a_4(0)} + \frac{a_2(4) a_2(3)}{a_3(3) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(3) a_2(2) a_4(3)}{a_3(3) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_1(3)}{a_4(0)} \Big] b_3(0) - \frac{a_2(4) a_3(0)}{a_3(3) a_4(0)} b_2(3) - \frac{a_2(3) a_3(4)}{a_3(3) a_4(2)} b_2(2) \\
& + \frac{a_2(2)}{a_4(0)} b_2(0) - \Big[\frac{a_1(4) a_4(3)}{a_3(4) a_4(1)} - \frac{a_2(3) a_3(2) a_4(3)}{a_3(3) a_4(2) a_4(1)} \Big] b_2(1) + \Big[\frac{a_1(6) a_4(2)}{a_3(4) a_4(0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_1(4) a_3(1) a_4(3)}{a_3(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(4) a_3(2)}{a_3(3) a_4(0)} - \frac{a_2(3) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_3(3) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \Big] b_2(0) \\
& - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_1(3) - \left[\frac{a_2(3) a_4(3)}{a_3(3) a_4(2)} + \frac{a_1(1)}{a_3(1)} \right] b_1(2) + \left[\frac{a_2(4) a_4(1)}{a_3(3) a_4(0)} + \frac{a_3(1)}{a_4(0)} \right] b_1(0) \\
& + b_0(0),
\end{aligned}$$

$k = 5$

$$\begin{aligned}
b_0(8) &= \left[\frac{a_0(8)}{a_3(5)} - \frac{a_0(5)}{a_3(5)} \right] b_3(5) + \frac{a_1(7)}{a_3(5)} b_2(5) - \frac{a_1(5)}{a_3(5)} b_2(6) + \frac{a_2(5)}{a_3(4)} b_1(5) \\
&\quad - \frac{a_2(3)}{a_3(3)} b_1(7) + b_0(5) \\
&= \left[\frac{a_0(8)}{a_3(5)} - \frac{a_0(5)}{a_3(5)} \right] \left[\frac{a_3(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1) a_4(4)}{a_4(1) a_4(0)} b_4(0) + \frac{a_4(4)}{a_4(1)} b_3(1) \right] \\
&\quad + \frac{a_1(7)}{a_3(5)} \left\{ - \left[\frac{a_2(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_4(3) + \frac{a_2(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1) a_3(4)}{a_4(1) a_4(0)} b_4(0) \right. \\
&\quad + \frac{a_3(4)}{a_4(1)} b_3(1) + \frac{a_4(3)}{a_4(1)} b_2(1) - \frac{a_3(1) a_4(3)}{a_4(1) a_4(0)} b_2(0) \Big\} - \frac{a_1(5)}{a_3(5)} \left\{ \left[\frac{a_2(6)}{a_4(2)} b_4(2) \right. \right. \\
&\quad - \frac{a_3(2) a_3(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) - \left. \left[\frac{a_2(2) a_4(4)}{a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(1) a_4(4)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_3(5)}{a_4(2)} b_3(2) \right. \\
&\quad - \left. \frac{a_3(2) a_4(4)}{a_4(2) a_4(1)} b_3(1) + \frac{a_4(4)}{a_4(2)} b_2(2) \right\} + \frac{a_2(5)}{a_3(4)} \left\{ \left[\frac{a_3(1) a_2(0)}{a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_1(1)}{a_4(1)} \right] b_4(2) \right. \\
&\quad + \frac{a_1(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1) a_2(4)}{a_4(1) a_4(0)} b_4(0) + \left[\frac{a_3(1) a_3(0)}{a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} \right] b_3(3) \\
&\quad + \frac{a_2(4)}{a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_3(1) a_3(3)}{a_4(1) a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_3(3)}{a_4(1)} b_2(1) + \frac{a_4(2)}{a_4(1)} b_1(1) \Big\} \\
&\quad - \frac{a_2(3)}{a_3(3)} \left\{ \frac{a_1(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \left[\frac{a_3(3) a_2(6)}{a_4(3) a_4(2)} \right] b_4(2) + \left[\frac{a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right. \right. \\
&\quad - \left. \frac{a_2(3) a_3(5)}{a_4(3) a_4(1)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
&\quad + \left. \frac{a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_1(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_2(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3) a_3(5)}{a_4(3) a_4(2)} b_3(2) \\
&\quad + \left[\frac{a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_2(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1)} \right] b_3(1) + \frac{a_3(5)}{a_4(3)} b_2(3) - \frac{a_3(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2)} b_2(2) \\
&\quad + \frac{a_4(3)}{a_4(2)} b_1(3) \Big\} + \left[\frac{a_0(5)}{a_4(1)} - \frac{a_0(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(1) a_1(0)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(1) - \frac{a_3(1) a_1(4)}{a_4(1) a_4(0)} b_4(0) \\
&\quad - \left[\frac{a_1(1)}{a_4(1)} - \frac{a_3(1) a_2(0)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_3(2) + \frac{a_1(4)}{a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_3(1) a_2(3)}{a_4(1) a_4(0)} b_3(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{a_1(1)}{a_4(1)} - \frac{a_3(1) a_2(0)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(3) + \frac{a_2(3)}{a_4(1)} b_2(1) - \frac{a_3(1) a_3(2)}{a_4(1) a_4(0)} b_2(0) + \frac{a_3(2)}{a_4(1)} b_1(1) \\
& \quad - \frac{a_3(1) a_4(1)}{a_4(1) a_4(0)} b_1(0) + b_0(1) \\
& = - \left[\frac{a_1(7) a_2(1)}{a_3(5) a_4(1)} + \frac{a_1(7) a_3(0)}{a_3(5) a_4(0)} + \frac{a_2(3) a_1(7)}{a_3(3) a_4(3)} \right] b_4(3) \\
& \quad - \left[\frac{a_1(5) a_2(6) a_3(1) a_2(0) a_2(5)}{a_3(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0) a_3(4)} + \frac{a_2(5) a_1(1)}{a_3(4) a_4(1)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_2(3) a_3(3) a_2(6)}{a_3(3) a_4(3) a_4(2)} \right] b_4(2) + \left[\frac{a_0(8) a_3(5)}{a_3(5) a_4(1)} - \frac{a_0(5)}{a_4(1)} + \frac{a_1(7) a_2(5)}{a_3(5) a_4(1)} \right. \\
& \quad + \frac{a_1(5) a_3(2) a_3(5)}{a_3(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(5) a_1(5)}{a_3(4) a_4(1)} - \frac{a_2(3) a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_3(3) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \\
& \quad \left. + \frac{a_2(3) a_2(3) a_3(5)}{a_3(3) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_0(5)}{a_4(1)} - \frac{a_0(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(1) a_1(0)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(1) \\
& \quad - \left[\frac{a_0(8) a_3(1) a_4(4)}{a_3(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_0(5) a_3(1) a_4(4)}{a_3(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_1(7) a_3(1) a_3(4)}{a_3(5) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_1(5) a_2(2) a_4(4)}{a_3(5) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_1(5) a_3(1) a_4(4)}{a_3(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(5) a_3(1) a_2(4)}{a_3(4) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& \quad + \frac{a_2(3) a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_3(3) a_4(3) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_2(3) a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_3(3) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(3) a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_3(3) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} \\
& \quad \left. - \frac{a_2(3) a_1(3) a_4(4)}{a_3(3) a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_3(1) a_1(4)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) + \left[\frac{a_2(5) a_3(1) a_3(0)}{a_3(4) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(5) a_2(1)}{a_3(4) a_4(1)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_2(3) a_2(6)}{a_3(3) a_4(3)} \right] b_3(3) - \left[\frac{a_1(5) a_3(5)}{a_3(5) a_4(2)} + \frac{a_2(3) a_3(3) a_3(5)}{a_3(3) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_1(1)}{a_4(1)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_3(1) a_2(0)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_3(2) + \left[\frac{a_0(8) a_4(4)}{a_3(5) a_4(1)} - \frac{a_0(5) a_4(4)}{a_3(5) a_4(1)} + \frac{a_1(7) a_3(4)}{a_3(5) a_4(1)} \right. \\
& \quad + \frac{a_1(5) a_3(2) a_4(4)}{a_3(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(5) a_2(4)}{a_3(4) a_4(1)} - \frac{a_2(3) a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_3(3) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \\
& \quad \left. + \frac{a_2(3) a_2(3) a_4(4)}{a_3(3) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_1(4)}{a_4(1)} \right] b_3(1) + \left[\frac{a_2(5) a_3(1) a_3(3)}{a_3(4) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(1) a_2(3)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_3(0) \\
& \quad - \left[\frac{a_2(3) a_3(5)}{a_3(3) a_4(3)} + \frac{a_1(1)}{a_4(1)} - \frac{a_3(1) a_2(0)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(3) - \left[\frac{a_1(5) a_4(4)}{a_3(5) a_4(2)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_2(3) a_3(3) a_4(4)}{a_3(3) a_4(3) a_4(2)} \right] b_2(2) + \left[\frac{a_2(5) a_3(3)}{a_3(4) a_4(1)} + \frac{a_1(7) a_4(3)}{a_3(5) a_4(1)} + \frac{a_2(3)}{a_4(1)} \right] b_2(1) \\
& \quad - \left[\frac{a_1(7) a_3(1) a_4(3)}{a_3(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(1) a_3(2)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(0) - \frac{a_2(3) a_4(3)}{a_3(3) a_4(2)} b_1(3) + \left[\frac{a_2(5) a_4(2)}{a_3(4) a_4(1)} \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{a_3(2)}{a_4(1)} \Big] b_1(1) - \frac{a_3(1) a_4(1)}{a_4(1) a_4(0)} b_1(0) + b_0(1),$$

$k = 6$

$$\begin{aligned} b_0(9) &= \left[\frac{a_0(9)}{a_3(6)} - \frac{a_0(6)}{a_3(6)} \right] b_3(6) + \frac{a_1(8)}{a_3(6)} b_2(6) - \frac{a_1(6)}{a_3(6)} b_2(7) + \frac{a_2(6)}{a_3(5)} b_1(6) \\ &\quad - \frac{a_2(4)}{a_3(4)} b_1(8) + b_0(6) \\ &= \left[\frac{a_0(9)}{a_3(6)} - \frac{a_0(6)}{a_3(6)} \right] \left[\frac{a_3(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2) a_4(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) + \frac{a_4(5)}{a_4(2)} b_3(2) \right] \\ &\quad + \frac{a_1(8)}{a_3(6)} \left\{ \frac{a_2(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \frac{a_3(2) a_3(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) - \left[\frac{a_2(2) a_4(4)}{a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(1) a_4(4)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_3(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_3(2) a_4(4)}{a_4(2) a_4(1)} b_3(1) + \frac{a_4(4)}{a_4(2)} b_2(2) \right\} - \frac{a_1(6)}{a_3(6)} \left\{ \frac{a_2(7)}{a_4(3)} b_4(3) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_3(3) a_3(6)}{a_4(3) a_4(2)} b_4(2) - \left[\frac{a_2(3) a_4(5)}{a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_4(5)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(1) + \frac{a_3(6)}{a_4(3)} b_3(3) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_3(3) a_4(5)}{a_4(3) a_4(2)} b_3(2) + \frac{a_4(5)}{a_4(3)} b_2(3) \right\} - \frac{a_2(4)}{a_3(4)} \left\{ \left[\frac{a_3(4) a_2(7)}{a_4(4) a_4(3)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a_2(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(3) + \left[\frac{a_3(4) a_3(3) a_3(6)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_2(4) a_3(6)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{a_3(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(2) + \left[\frac{a_3(4) a_2(3) a_4(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_3(4) a_3(2) a_4(5)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a_2(4) a_3(2) a_4(5)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_1(4) a_4(5)}{a_4(4) a_4(1)} - \frac{a_4(4) a_1(0)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_1(8)}{a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_2(4)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a_4(4) a_1(4)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_3(4) a_3(6)}{a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(6) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_3(3) + \left[\frac{a_3(4) a_3(3) a_4(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{a_2(4) a_4(5)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_4(4) a_2(0)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_3(2) + \left[\frac{a_2(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(3)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + + \frac{a_4(4) a_2(3)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_3(0) - \left[\frac{a_3(4) a_4(5)}{a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_4(4) a_3(0)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_2(3) + \left[\frac{a_3(6) a_4(2)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a_4(4) a_3(2)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_2(0) + \frac{a_4(1)}{a_4(0)} b_1(0) \right\} + \left[\frac{a_0(6)}{a_4(2)} - \frac{a_0(2)}{a_4(2)} + \frac{a_2(2) a_2(0)}{a_4(2) a_4(0)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_3(2) a_3(1) a_2(0)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(2) a_1(1)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(2) - \frac{a_3(2) a_1(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) - \left[\frac{a_2(2) a_2(4)}{a_4(2) a_4(0)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_3(2) a_3(1) a_2(4)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_1(2)}{a_4(2)} - \frac{a_2(2) a_3(0)}{a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(2) a_3(1) a_3(0)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_3(2) a_2(1)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_3(3) + \frac{a_1(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_3(2) a_2(4)}{a_4(2) a_4(1)} b_3(1) - \left[\frac{a_2(2) a_3(3)}{a_4(2) a_4(0)} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_3(2)a_3(1)a_3(3)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)}\Big]b_3(0) + \frac{a_2(4)}{a_4(2)}b_2(2) - \frac{a_3(2)a_3(3)}{a_4(2)a_4(1)}b_2(1) \\
& -\frac{a_2(2)a_4(2)}{a_4(2)a_4(0)}b_2(0) + \frac{a_3(3)}{a_4(2)}b_1(2) - \frac{a_3(2)a_4(2)}{a_4(2)a_4(1)}b_1(1) + b_0(2) \\
= & -\left[\frac{a_1(6)a_2(7)}{a_3(6)a_4(3)} - \frac{a_2(4)a_3(4)a_2(7)}{a_3(4)a_4(4)a_4(3)} - \frac{a_2(4)a_2(7)a_3(0)}{a_3(4)a_4(4)a_4(0)}\right]b_4(3) + \left[\frac{a_0(9)a_3(6)}{a_3(6)a_4(2)}\right. \\
& -\frac{a_0(6)}{a_4(2)} + \frac{a_1(8)a_2(6)}{a_3(6)a_4(2)} + \frac{a_1(6)a_3(3)a_3(6)}{a_3(6)a_4(3)a_4(2)} - \frac{a_2(4)a_3(4)a_3(3)a_3(6)}{a_3(4)a_4(4)a_4(3)a_4(2)} \\
& + \frac{a_2(4)a_2(4)a_3(6)}{a_3(4)a_4(4)a_4(2)} + \frac{a_2(4)a_3(6)a_2(0)}{a_3(4)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_0(6)}{a_4(2)} - \frac{a_0(2)}{a_4(2)} + \frac{a_2(2)a_2(0)}{a_4(2)a_4(0)} \\
& \left. - \frac{a_3(2)a_3(1)a_2(0)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)}\right]b_4(2) - \left[\frac{a_0(9)a_3(2)a_4(5)}{a_3(6)a_4(2)a_4(1)} - \frac{a_0(6)a_3(2)a_4(5)}{a_3(6)a_4(2)a_4(1)}\right. \\
& + \frac{a_1(8)a_3(2)a_3(5)}{a_3(6)a_4(2)a_4(1)} - \frac{a_1(6)a_2(3)a_4(5)}{a_3(6)a_4(3)a_4(1)} - \frac{a_1(6)a_3(2)a_4(5)}{a_3(6)a_4(2)a_4(1)} \\
& + \frac{a_2(4)a_3(4)a_2(3)a_4(5)}{a_3(4)a_4(4)a_4(3)a_4(1)} + \frac{a_2(4)a_3(4)a_3(2)a_4(5)}{a_3(4)a_4(4)a_4(2)a_4(1)} \\
& + \frac{a_2(4)a_2(4)a_3(2)a_4(5)}{a_3(4)a_4(4)a_4(2)a_4(1)} - \frac{a_2(4)a_1(4)a_4(5)}{a_3(4)a_4(4)a_4(1)} - \frac{a_2(4)a_4(4)a_1(0)}{a_3(4)a_4(3)a_4(0)} \\
& \left. - \frac{a_3(2)a_1(5)}{a_4(2)a_4(1)}\right]b_4(1) - \left[\frac{a_1(8)a_2(2)a_4(4)}{a_3(6)a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_1(8)a_3(1)a_4(4)}{a_3(6)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_2(4)a_1(8)}{a_3(4)a_4(0)}\right. \\
& + \frac{a_2(4)a_3(6)a_2(4)}{a_3(4)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_2(4)a_4(4)a_1(4)}{a_3(4)a_4(3)a_4(0)} - \frac{a_2(2)a_2(4)}{a_4(2)a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(2)a_3(1)a_2(4)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)}\Big]b_4(0) - \left[\frac{a_1(6)a_3(6)}{a_3(6)a_4(3)} - \frac{a_2(4)a_3(4)a_3(6)}{a_3(4)a_4(4)a_4(3)}\right. \\
& - \frac{a_2(4)a_3(6)a_3(0)}{a_3(4)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_1(2)}{a_4(2)} - \frac{a_2(2)a_3(0)}{a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_3(2)a_3(1)a_3(0)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} \\
& \left. - \frac{a_3(2)a_2(1)}{a_4(2)a_4(1)}\right]b_3(3) + \left[\frac{a_0(9)a_4(5)}{a_3(6)a_4(2)} - \frac{a_0(6)a_4(5)}{a_3(6)a_4(2)} + \frac{a_1(8)a_3(5)}{a_3(6)a_4(2)}\right. \\
& + \frac{a_1(6)a_3(3)a_4(5)}{a_3(6)a_4(3)a_4(2)} - \frac{a_2(4)a_3(4)a_3(3)a_4(5)}{a_3(4)a_4(4)a_4(3)a_4(2)} + \frac{a_2(4)a_2(4)a_4(5)}{a_3(4)a_4(4)a_4(2)} \\
& + \frac{a_2(4)a_4(4)a_2(0)}{a_3(4)a_4(3)a_4(0)} + \frac{a_1(5)}{a_4(2)}\Big]b_3(2) - \frac{a_1(8)a_3(2)a_4(4)}{a_3(6)a_4(2)a_4(1)} - \frac{a_3(2)a_2(4)}{a_4(2)a_4(1)}b_3(1) \\
& - \left[\frac{a_2(4)a_2(7)a_4(3)}{a_3(4)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_2(4)a_3(6)a_3(3)}{a_3(4)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_2(4)a_4(4)a_2(3)}{a_3(4)a_4(3)a_4(0)} - \frac{a_2(2)a_3(3)}{a_4(2)a_4(0)}\right. \\
& \left. + \frac{a_3(2)a_3(1)a_3(3)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)}\right]b_3(0) - \left[\frac{a_1(6)a_4(5)}{a_3(6)a_4(3)} - \frac{a_2(4)a_3(4)a_4(5)}{a_3(4)a_4(4)a_4(3)}\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{a_2(4) a_4(4) a_3(0)}{a_3(4) a_4(3) a_4(0)} \Big] b_2(3) + \left[\frac{a_1(8) a_4(4)}{a_3(6) a_4(2)} + \frac{a_2(4)}{a_4(2)} \right] b_2(2) - \frac{a_3(2) a_3(3)}{a_4(2) a_4(1)} b_2(1) \\
& - \left[\frac{a_2(4) a_3(6) a_4(2)}{a_3(4) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(4) a_4(4) a_3(2)}{a_3(4) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_2(2) a_4(2)}{a_4(2) a_4(0)} \right] b_2(0) + \frac{a_3(3)}{a_4(2)} b_1(2) \\
& - \frac{a_3(2) a_4(2)}{a_4(2) a_4(1)} b_1(1) - \frac{a_2(4) a_4(1)}{a_3(4) a_4(0)} b_1(0) + b_0(2),
\end{aligned}$$

$k = 7$

$$\begin{aligned}
b_0(10) &= \left[\frac{a_0(10)}{a_3(7)} - \frac{a_0(7)}{a_3(7)} \right] b_3(7) + \frac{a_1(9)}{a_3(7)} b_2(7) - \frac{a_1(7)}{a_3(7)} b_2(8) + \frac{a_2(7)}{a_3(6)} b_1(7) \\
&\quad - \frac{a_2(5)}{a_3(5)} b_1(9) + b_0(7) \\
&= \left[\frac{a_0(10)}{a_3(7)} - \frac{a_0(7)}{a_3(7)} \right] \left[\frac{a_3(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(3) a_4(6)}{a_4(3) a_4(2)} b_4(2) + \frac{a_4(6)}{a_4(3)} b_3(3) \right] \\
&+ \frac{a_1(9)}{a_3(7)} \left[\frac{a_2(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(3) a_3(6)}{a_4(3) a_4(2)} b_4(2) - \left[\frac{a_2(3) a_4(5)}{a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_4(5)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_3(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3) a_4(5)}{a_4(3) a_4(2)} b_3(2) + \frac{a_4(5)}{a_4(3)} b_2(3) \right] - \frac{a_1(7)}{a_3(7)} \left\{ - \left[\frac{a_3(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_3(4) a_3(7)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_4(3) - \left[\frac{a_2(4) a_4(6)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(4) a_3(3) a_4(6)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_4(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(2) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{a_2(8)}{a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_3(4)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(6) a_2(4)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_3(4) a_4(6)}{a_4(4) a_4(3)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_4(6) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_3(3) + \left[\frac{a_3(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(6) a_3(3)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_3(0) + \frac{a_4(2)}{a_4(0)} b_2(0) \right\} \\
&\quad + \frac{a_2(7)}{a_3(6)} \left\{ \frac{a_1(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \left[\frac{a_3(3) a_2(6)}{a_4(3) a_4(2)} \right] b_4(2) + \left[\frac{a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{a_2(3) a_3(5)}{a_4(3) a_4(1)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_1(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_2(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3) a_3(5)}{a_4(3) a_4(2)} b_3(2) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_2(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1)} \right] b_3(1) + \frac{a_3(5)}{a_4(3)} b_2(3) - \frac{a_3(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2)} b_2(2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(3)}{a_4(2)} b_1(3) \right\} - \frac{a_2(5)}{a_3(5)} \left\{ \left[\frac{a_3(5) a_3(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(7)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_2(5) a_3(7)}{a_4(5) a_4(3)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{a_3(7) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_3(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(0)} \right] b_4(3) + \left[\frac{a_3(5) a_2(4) a_4(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2)} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(3) a_4(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_3(5) a_4(6) a_2(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(5) a_3(3) a_4(6)}{a_4(5) a_4(3) a_4(2)} \\
& - \frac{a_1(5) a_4(6)}{a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_4(5) a_3(1) a_2(0)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_4(5) a_1(1)}{a_4(4) a_4(1)} \Big] b_4(2) + \left[\frac{a_1(9)}{a_4(1)} + \frac{a_2(8) a_3(5)}{a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_3(7) a_2(5)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(5) a_1(5)}{a_4(4) a_4(1)} \Big] b_4(1) - \left[\frac{a_3(5) a_2(8)}{a_4(5) a_4(0)} - \frac{a_3(5) a_3(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_3(5) a_4(6) a_2(4)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_4(5) a_3(1) a_2(4)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} \Big] b_4(0) + \left[\frac{a_3(5) a_3(4) a_4(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(5) a_4(6) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_2(5) a_4(6)}{a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_4(5) a_3(1) a_3(0)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_4(5) a_2(1)}{a_4(4) a_4(1)} \Big] b_3(3) + \left[\frac{a_2(8) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_3(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(5) a_2(4)}{a_4(4) a_4(1)} \Big] b_3(1) - \frac{a_4(5) a_3(1) a_3(3)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} b_3(0) \\
& + \frac{a_3(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1)} b_2(1) - \left[\frac{a_3(5) a_4(2)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(0) \\
& + \frac{a_4(5) a_4(2)}{a_4(4) a_4(1)} b_1(1) \Big\} + \left[\frac{a_0(7)}{a_4(3)} - \frac{a_0(3)}{a_4(3)} + \frac{a_1(3) a_3(0)}{a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_2(3) a_2(1)}{a_4(3) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_3(1) a_3(0)}{a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_3(2) a_2(1)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(0)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(3) a_2(2) a_3(0)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(3) a_1(2)}{a_4(3) a_4(2)} \Big] b_4(3) + \frac{a_1(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \left[\frac{a_2(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(1)} - \frac{a_3(3) a_3(2) a_2(5)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(1) \\
& - \left[\frac{a_1(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_2(3) a_3(1) a_3(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_2(2) a_3(4)}{a_4(2) a_4(0)} \Big] b_4(0) + \frac{a_1(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(2)} b_3(2) - \left[\frac{a_2(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \Big] b_3(1) - \left[\frac{a_1(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_2(2) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} \right] b_3(0) \\
& - \frac{a_1(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(3)} b_2(3) - \frac{a_3(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2)} b_2(2) - \left[\frac{a_2(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(1)} \right. \\
& - \frac{a_3(3) a_3(2) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \Big] b_2(1) - \left[\frac{a_2(3) a_3(1) a_4(3)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \Big] b_2(0) + \frac{a_3(4)}{a_4(3)} b_1(3) - \frac{a_3(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2)} b_1(2) \\
& + b_0(3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{a_0(10)}{a_4(3)} - \frac{a_0(7) a_3(7)}{a_3(7) a_4(3)} + \frac{a_1(9) a_2(7)}{a_3(7) a_4(3)} + \frac{a_1(7) a_3(7) a_3(0)}{a_3(7) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_1(7) a_3(4) a_3(7)}{a_3(7) a_4(4) a_4(3)} \right. \\
&\quad + \frac{a_2(7) a_1(7)}{a_3(6) a_4(3)} - \frac{a_2(5) a_3(5) a_3(7) a_3(0)}{a_3(5) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(5) a_3(5) a_3(4) a_3(7)}{a_3(5) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} \\
&\quad + \frac{a_2(5) a_2(5) a_3(7)}{a_3(5) a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_2(5) a_3(7) a_2(1)}{a_3(5) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(5) a_3(7) a_3(0)}{a_3(5) a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_0(7)}{a_4(3)} \\
&\quad - \frac{a_0(3)}{a_4(3)} + \frac{a_1(3) a_3(0)}{a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_2(3) a_2(1)}{a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_3(1) a_3(0)}{a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_3(2) a_2(1)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \\
&\quad \left. - \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(0)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(3) a_2(2) a_3(0)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_1(2)}{a_4(3) a_4(2)} \right] b_4(3) \\
&\quad - \left[\frac{a_0(10) a_3(3) a_4(6)}{a_3(7) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_0(7) a_3(3) a_4(6)}{a_3(7) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_1(9) a_3(3) a_3(6)}{a_3(7) a_4(3) a_4(2)} \right. \\
&\quad - \frac{a_1(7) a_2(4) a_4(6)}{a_3(7) a_4(4) a_4(2)} + \frac{a_1(7) a_3(4) a_3(3) a_4(6)}{a_3(7) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_1(7) a_4(6) a_2(0)}{a_3(7) a_4(4) a_4(0)} \\
&\quad + \frac{a_2(7) a_3(3) a_2(6)}{a_3(6) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_2(5) a_3(5) a_2(4) a_4(6)}{a_3(5) a_4(5) a_4(4) a_4(2)} \\
&\quad + \frac{a_2(5) a_3(5) a_3(4) a_3(3) a_4(6)}{a_3(5) a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_2(5) a_3(5) a_4(6) a_2(0)}{a_3(5) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
&\quad + \frac{a_2(5) a_2(5) a_3(3) a_4(6)}{a_3(5) a_4(5) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_2(5) a_1(5) a_4(6)}{a_3(5) a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_2(5) a_4(5) a_3(1) a_2(0)}{a_3(5) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} \\
&\quad \left. - \frac{a_2(5) a_4(5) a_1(1)}{a_3(5) a_4(4) a_4(1)} - \frac{a_1(6)}{a_4(2)} \right] b_4(2) - \left[\frac{a_1(9) a_2(3) a_4(5)}{a_3(7) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_1(9) a_3(2) a_4(5)}{a_3(7) a_4(2) a_4(1)} \right. \\
&\quad - \frac{a_2(7) a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_3(6) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(7) a_2(3) a_3(5)}{a_3(6) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_2(5) a_1(9)}{a_3(5) a_4(1)} \\
&\quad + \frac{a_2(5) a_2(8) a_3(5)}{a_3(5) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(5) a_3(7) a_2(5)}{a_3(5) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(5) a_4(5) a_1(5)}{a_3(5) a_4(4) a_4(1)} \\
&\quad \left. + \frac{a_2(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(1)} - \frac{a_3(3) a_3(2) a_2(5)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(1) - \left[\frac{a_1(7) a_2(8)}{a_3(7) a_4(0)} + \frac{a_1(7) a_3(7) a_3(4)}{a_3(7) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
&\quad + \frac{a_1(7) a_4(6) a_2(4)}{a_3(7) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(7) a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_3(6) a_4(3) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_2(7) a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_3(6) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} \\
&\quad - \frac{a_2(7) a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_3(6) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(7) a_1(3) a_4(4)}{a_3(6) a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_2(5) a_3(5) a_2(8)}{a_3(5) a_4(5) a_4(0)} \\
&\quad + \frac{a_2(5) a_3(5) a_3(7) a_3(4)}{a_3(5) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(5) a_3(5) a_4(6) a_2(4)}{a_3(5) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(5) a_2(8) a_3(1) a_4(4)}{a_3(5) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \\
&\quad \left. + \frac{a_2(5) a_3(7) a_3(1) a_3(4)}{a_3(5) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(5) a_4(5) a_3(1) a_2(4)}{a_3(5) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_1(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(0)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_2(3) a_3(1) a_3(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(2) a_3(4)}{a_4(2) a_4(0)} \Big] b_4(0) \\
& + \left[\frac{a_4(6) a_0(10)}{a_4(3) a_3(7)} - \frac{a_4(6) a_0(7)}{a_4(3) a_3(7)} + \frac{a_1(9) a_3(6)}{a_3(7) a_4(3)} + \frac{a_1(7) a_3(4) a_4(6)}{a_3(7) a_4(4) a_4(3)} \right. \\
& \quad - \frac{a_1(7) a_4(6) a_3(0)}{a_3(7) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(7) a_2(6)}{a_3(6) a_4(3)} - \frac{a_2(5) a_3(5) a_3(4) a_4(6)}{a_3(5) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} \\
& \quad - \frac{a_2(5) a_3(5) a_4(6) a_3(0)}{a_3(5) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(5) a_2(5) a_4(6)}{a_3(5) a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_2(5) a_4(5) a_3(1) a_3(0)}{a_3(5) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} \\
& \quad + \frac{a_2(5) a_4(5) a_2(1)}{a_3(5) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_1(6)}{a_4(3)} \Big] b_3(3) - \left[\frac{a_1(9) a_3(3) a_4(5)}{a_3(7) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_2(7) a_3(3) a_3(5)}{a_3(6) a_4(3) a_4(2)} \right. \\
& \quad + \frac{a_3(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_2(7) a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_3(6) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(7) a_2(3) a_4(4)}{a_3(6) a_4(3) a_4(1)} \\
& \quad + \frac{a_2(5) a_2(8) a_4(4)}{a_3(5) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(5) a_3(7) a_3(4)}{a_3(5) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(5) a_4(5) a_2(4)}{a_3(5) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_2(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(1)} \\
& \quad - \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \Big] b_3(1) - \left[\frac{a_1(7) a_3(7) a_4(3)}{a_3(7) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(7) a_4(6) a_3(3)}{a_3(7) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& \quad - \frac{a_2(5) a_4(5) a_3(1) a_3(3)}{a_3(5) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_1(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_2(2) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} \Big] b_3(0) \\
& + \left[\frac{a_1(9) a_4(5)}{a_3(7) a_4(3)} + \frac{a_2(7) a_3(5)}{a_3(6) a_4(3)} - \frac{a_1(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(3)} \right] b_2(3) - \left[\frac{a_2(7) a_3(3) a_4(4)}{a_3(6) a_4(3) a_4(2)} \right. \\
& \quad + \frac{a_3(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2)} \Big] b_2(2) - \left[\frac{a_2(5) a_3(7) a_4(3)}{a_3(5) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(1)} \right. \\
& \quad - \frac{a_3(3) a_3(2) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \Big] b_2(1) - \left[\frac{a_1(7) a_4(2)}{a_3(7) a_4(0)} - \frac{a_2(5) a_3(5) a_4(2)}{a_3(5) a_4(5) a_4(0)} \right. \\
& \quad - \frac{a_2(5) a_3(7) a_3(1) a_4(3)}{a_3(5) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(3) a_3(1) a_4(3)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} \\
& \quad - \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \Big] b_2(0) + \left[\frac{a_2(7) a_4(3)}{a_3(6) a_4(2)} + \frac{a_3(4)}{a_4(3)} \right] b_1(3) \\
& \quad - \frac{a_3(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2)} b_1(2) - \frac{a_2(5) a_4(5) a_4(2)}{a_3(5) a_4(4) a_4(1)} + b_0(3),
\end{aligned}$$

$k = 8$

$$\begin{aligned}
b_0(11) &= \left[\frac{a_0(11)}{a_3(8)} - \frac{a_0(8)}{a_3(8)} \right] b_3(8) + \frac{a_1(10)}{a_3(8)} b_2(8) - \frac{a_1(8)}{a_3(8)} b_2(9) + \frac{a_2(8)}{a_3(7)} b_1(8) \\
&\quad - \frac{a_2(6)}{a_3(6)} b_1(10) + b_0(8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{a_0(11)}{a_3(8)} - \frac{a_0(8)}{a_3(8)} \right] \left\{ \left[\frac{a_3(8)}{a_4(0)} + \frac{a_4(7) a_3(4)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(0) + \left[\frac{a_3(4) a_4(7)}{a_4(4) a_4(3)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_4(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(3) + \frac{a_4(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} b_3(0) \right\} + \frac{a_1(10)}{a_3(8)} \left\{ \left[\frac{a_3(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_3(4) a_3(7)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_4(3) - \left[\frac{a_2(4) a_4(6)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(4) a_3(3) a_4(6)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_4(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(2) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{a_2(8)}{a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_3(4)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(6) a_2(4)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_3(4) a_4(6)}{a_4(4) a_4(3)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_4(6) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_3(3) + \left[\frac{a_3(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(6) a_3(3)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_3(0) + \frac{a_4(2)}{a_4(0)} b_2(0) \right\} \\
&- \frac{a_1(8)}{a_3(8)} \left\{ - \left[\frac{a_2(5) a_4(7)}{a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(7) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(0)} \right] b_4(3) + \left[\frac{a_2(9)}{a_4(1)} + \frac{a_3(8) a_3(5)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(7) a_2(5)}{a_4(5) a_4(1)} \right] b_4(1) \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_3(8)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) + \left[\frac{a_3(8) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1)} \right] b_3(1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_3(5) a_4(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_4(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1)} b_2(1) + \frac{a_4(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} b_2(0) \right\} \\
&\quad + \frac{a_2(8)}{a_3(7)} \left\{ - \left[\frac{a_3(4) a_2(7)}{a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_2(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(3) + \left[\frac{a_3(4) a_3(3) a_3(6)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{a_2(4) a_3(6)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(2) + \left[\frac{a_3(4) a_2(3) a_4(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_3(4) a_3(2) a_4(5)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(4) a_3(2) a_4(5)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_1(4) a_4(5)}{a_4(4) a_4(1)} - \frac{a_4(4) a_1(0)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_4(1) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{a_1(8)}{a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_2(4)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(4) a_1(4)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_3(4) a_3(6)}{a_4(4) a_4(3)} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_3(6) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_3(3) + \left[\frac{a_3(4) a_3(3) a_4(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_2(4) a_4(5)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_4(4) a_2(0)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_3(2) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{a_2(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(4) a_2(3)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_3(0) - \left[\frac{a_3(4) a_4(5)}{a_4(4) a_4(3)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a_4(4) a_3(0)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_2(3) + \left[\frac{a_3(6) a_4(2)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(4) a_3(2)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_2(0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(1)}{a_4(0)} b_1(0) \right\} - \frac{a_2(6)}{a_3(6)} \left\{ \frac{a_2(5) a_4(7)}{a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_4(7) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_3(4) a_4(7)}{a_4(6) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_2(6) a_4(7) a_3(0)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_1(6) a_4(7)}{a_4(6) a_4(3)} + \frac{a_4(6) a_3(2) a_2(1)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_4(6) a_3(2) a_3(0)}{a_4(5) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_4(6) a_1(2)}{a_4(5) a_4(2)} \Big] b_4(3) \\
& + \left[\frac{a_1(10)}{a_4(2)} + \frac{a_2(9) a_3(6)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_3(8) a_2(6)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_4(6) a_1(6)}{a_4(5) a_4(2)} \right] b_4(2) - \left[\frac{a_3(6) a_2(9)}{a_4(6) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_3(6) a_3(5)}{a_4(6) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_2(5)}{a_4(6) a_4(1)} + \frac{a_2(9) a_3(2) a_4(5)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(8) a_3(2) a_3(5)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \\
& + \left. \frac{a_4(6) a_3(2) a_2(5)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_3(6) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(5) a_3(8)}{a_4(6) a_4(5) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_3(8)}{a_4(6) a_4(0)} \\
& - \frac{a_2(6) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(8) a_2(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(6) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \left. \frac{a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_4(6) a_2(2) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2) a_4(0)} \right] b_4(0) + \left[\frac{a_2(9) a_4(5)}{a_4(6) a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_3(8) a_3(5)}{a_4(6) a_4(2)} + \left. \frac{a_4(6) a_2(5)}{a_4(5) a_4(2)} \right] b_3(2) - \left[\frac{a_3(6) a_3(8) a_4(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_3(6) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(8) a_3(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \left. \frac{a_4(6) a_3(2) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \right] b_3(1) \\
& + \left[\frac{a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_4(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_4(6) a_2(2) a_4(3)}{a_4(5) a_4(2) a_4(0)} \right] b_3(0) \\
& + \left[\frac{a_3(8) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_4(6) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2)} \right] b_2(2) - \left[\frac{a_3(6) a_4(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& - \frac{a_4(6) a_3(2) a_4(3)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \Big] b_2(1) - \left[\frac{a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& - \left. \frac{a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(0) + \frac{a_4(6) a_4(3)}{a_4(5) a_4(2)} b_1(2) \Big\} \\
& - \left[\frac{a_1(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_1(7)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_4(3) - \left[\frac{a_2(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(4) a_2(6)}{a_4(4) a_4(2)} \right. \\
& - \left. \frac{a_3(4) a_3(3) a_2(6)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \right] b_4(2) - \left[\frac{a_1(4) a_3(5)}{a_4(4) a_4(1)} - \frac{a_2(4) a_3(2) a_3(5)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(5) a_1(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_3(4) a_2(3) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1)} \Big] b_4(1) + \left[\frac{a_0(8)}{a_4(0)} - \frac{a_0(4)}{a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_1(7) a_3(4)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(4) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_2(4)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(4) a_2(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(2) a_4(0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_2(4) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_1(4)}{a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(4) a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(4) a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_1(3) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(0)} \\
& + \frac{a_0(4)}{a_4(0)} - \frac{a_0(0)}{a_4(0)} \Big] b_4(0) - \left[\frac{a_2(6) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_2(6)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_3(3) - \left[\frac{a_2(4) a_3(5)}{a_4(4) a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_3(5) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \Big] b_3(2) - \left[\frac{a_1(4) a_4(4)}{a_4(4) a_4(1)} - \frac{a_2(4) a_3(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_3(4) a_2(3) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_1(0)}{a_4(0)} \Big] b_3(1) + \left[\frac{a_1(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_2(6) a_3(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_2(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(3)}{a_4(0)} \Big] b_3(0) - \left[\frac{a_3(5) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_2(3) \\
& - \left[\frac{a_2(4) a_4(4)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \right] b_2(2) + \left[\frac{a_2(6) a_4(2)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_3(2)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_2(2)}{a_4(0)} \Big] b_2(0) - \left[\frac{a_3(4) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_1(3) + \left[\frac{a_3(5) a_4(1)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(1)}{a_4(0)} \right] b_1(0) \\
& + b_0(0) \\
& = - \left[\frac{a_0(11) a_3(4) a_4(7)}{a_3(8) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_0(8) a_3(4) a_4(7)}{a_3(8) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_0(11) a_4(7) a_3(0)}{a_3(8) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_0(8) a_4(7) a_3(0)}{a_3(8) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(10) a_3(7) a_3(0)}{a_3(8) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(10) a_3(4) a_3(7)}{a_3(8) a_4(4) a_4(3)} \\
& - \frac{a_1(8) a_2(5) a_4(7)}{a_3(8) a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_1(8) a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_3(8) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_1(8) a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_3(8) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& - \frac{a_1(8) a_4(7) a_2(1)}{a_3(8) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_1(8) a_4(7) a_3(0)}{a_3(8) a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_2(8) a_3(4) a_2(7)}{a_3(7) a_4(4) a_4(3)} \\
& + \frac{a_2(8) a_2(7) a_3(0)}{a_3(7) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_2(5) a_4(7)}{a_3(6) a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_2(6) a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_3(6) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} \\
& - \frac{a_2(6) a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_3(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_4(7) a_2(1)}{a_3(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(6) a_4(7) a_3(0)}{a_3(6) a_4(5) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(6) a_2(6) a_3(4) a_4(7)}{a_3(6) a_4(6) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_2(6) a_4(7) a_3(0)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_1(6) a_4(7)}{a_3(6) a_4(6) a_4(3)} \\
& + \frac{a_2(6) a_4(6) a_3(2) a_2(1)}{a_3(6) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(6) a_4(6) a_3(2) a_3(0)}{a_3(6) a_4(5) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_4(6) a_1(2)}{a_3(6) a_4(5) a_4(2)} \\
& \left. + \frac{a_1(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_1(7)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_4(3) - \left[\frac{a_1(10) a_2(4) a_4(6)}{a_3(8) a_4(4) a_4(2)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_1(10) a_3(4) a_3(3) a_4(6)}{a_3(8) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_1(10) a_4(6) a_2(0)}{a_3(8) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(8) a_3(4) a_3(3) a_3(6)}{a_3(7) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \\
& + \frac{a_2(8) a_2(4) a_3(6)}{a_3(7) a_4(4) a_4(2)} + \frac{a_2(8) a_3(6) a_2(0)}{a_3(7) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(8) a_3(6) a_2(0)}{a_3(7) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_1(10)}{a_3(6) a_4(2)} \\
& + \frac{a_2(6) a_2(9) a_3(6)}{a_3(6) a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_2(6) a_3(8) a_2(6)}{a_3(6) a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_2(6) a_4(6) a_1(6)}{a_3(6) a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_2(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(4) a_2(6)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(4) a_3(3) a_2(6)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \Big] b_4(2) - \left[\frac{a_1(8) a_2(9)}{a_3(8) a_4(1)} + \frac{a_1(8) a_3(8) a_3(5)}{a_3(8) a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_1(8) a_4(7) a_2(5)}{a_3(8) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_2(8) a_3(4) a_2(3) a_4(5)}{a_3(7) a_4(4) a_4(3) a_4(1)} - \frac{a_2(8) a_3(4) a_3(2) a_4(5)}{a_3(7) a_4(4) a_4(2) a_4(1)} \\
& - \frac{a_2(8) a_2(4) a_3(2) a_4(5)}{a_3(7) a_4(4) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(8) a_1(4) a_4(5)}{a_3(7) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_2(8) a_4(4) a_1(0)}{a_3(7) a_4(3) a_4(0)} \\
& - \frac{a_2(6) a_3(6) a_2(9)}{a_3(6) a_4(6) a_4(1)} - \frac{a_2(6) a_3(6) a_3(5)}{a_3(6) a_4(6) a_4(1)} - \frac{a_2(6) a_3(6) a_2(5)}{a_3(6) a_4(6) a_4(1)} \\
& - \frac{a_2(6) a_2(9) a_3(2) a_4(5)}{a_3(6) a_4(6) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_2(6) a_3(8) a_3(2) a_3(5)}{a_3(6) a_4(6) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_2(6) a_4(6) a_3(2) a_2(5)}{a_3(6) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \\
& + \frac{a_1(4) a_3(5)}{a_4(4) a_4(1)} - \frac{a_2(4) a_3(2) a_3(5)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(5) a_1(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \\
& - \frac{a_3(4) a_2(3) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1)} \Big] b_4(1) + \left[\frac{a_0(11)}{a_4(0)} - \frac{a_0(8)}{a_4(0)} + \frac{a_0(11) a_4(7) a_3(4)}{a_3(8) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_0(8) a_4(7) a_3(4)}{a_3(8) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(10) a_2(8)}{a_3(8) a_4(0)} + \frac{a_1(10) a_3(7) a_3(4)}{a_3(8) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(10) a_4(6) a_2(4)}{a_3(8) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_1(8) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_3(8) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_1(8) a_3(5) a_3(8)}{a_3(8) a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_1(8) a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_3(8) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_1(8) a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_3(8) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(8) a_1(8)}{a_3(7) a_4(0)} + \frac{a_2(8) a_3(6) a_2(4)}{a_3(7) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(8) a_4(4) a_1(4)}{a_3(7) a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_3(6) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_3(6) a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \\
& - \frac{a_2(6) a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_3(6) a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_3(6) a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(6) a_2(6) a_3(8)}{a_3(6) a_4(6) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_2(6) a_4(7) a_3(4)}{a_3(6) a_4(6) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_3(8) a_2(2) a_4(4)}{a_3(6) a_4(6) a_4(2) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(6) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_3(6) a_4(6) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_3(6) a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(6) a_4(6) a_2(2) a_3(4)}{a_3(6) a_4(5) a_4(2) a_4(0)} + \left[\frac{a_0(8)}{a_4(0)} - \frac{a_0(4)}{a_4(0)} + \frac{a_1(7) a_3(4)}{a_4(4) a_4(0)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_1(4) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_2(4)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(4) a_2(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_2(4) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(5) a_1(4)}{a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(4) a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(4) a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_1(3) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_0(4)}{a_4(0)} - \frac{a_0(0)}{a_4(0)} \Big] b_4(0) \\
& - \left[\frac{a_1(10) a_3(4) a_4(6)}{a_3(8) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_1(10) a_4(6) a_3(0)}{a_3(8) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(8) a_3(4) a_3(6)}{a_3(7) a_4(4) a_4(3)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_2(8) a_3(6) a_3(0)}{a_3(7) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(4) a_2(6)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_3(3) \\
& + \left[\frac{a_2(8) a_3(4) a_3(3) a_4(5)}{a_3(7) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_2(8) a_2(4) a_4(5)}{a_3(7) a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_2(8) a_4(4) a_2(0)}{a_3(7) a_4(3) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_2(6) a_2(9) a_4(5)}{a_3(6) a_4(6) a_4(2)} - \frac{a_2(6) a_3(8) a_3(5)}{a_3(6) a_4(6) a_4(2)} - \frac{a_2(6) a_4(6) a_2(5)}{a_3(6) a_4(5) a_4(2)} - \frac{a_2(4) a_3(5)}{a_4(4) a_4(2)} \\
& \quad \left. - \frac{a_3(5) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \right] b_3(2) - \left[\frac{a_1(8) a_3(8) a_4(4)}{a_3(8) a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_1(8) a_4(7) a_3(4)}{a_3(8) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_2(6) a_3(6) a_3(8) a_4(4)}{a_3(6) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_2(6) a_3(6) a_4(7) a_3(4)}{a_3(6) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \\
& - \frac{a_2(6) a_3(6) a_4(7) a_3(4)}{a_3(6) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_2(6) a_3(8) a_3(2) a_4(4)}{a_3(6) a_4(6) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_2(6) a_4(6) a_3(2) a_3(4)}{a_3(6) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \\
& \quad + \frac{a_1(4) a_4(4)}{a_4(4) a_4(1)} - \frac{a_2(4) a_3(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \\
& - \frac{a_3(4) a_2(3) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_1(0)}{a_4(0)} \Big] b_3(1) + \left[\frac{a_0(11) a_4(7) a_4(3)}{a_3(8) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_0(8) a_4(7) a_4(3)}{a_3(8) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_1(10) a_3(7) a_4(3)}{a_3(8) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(10) a_4(6) a_3(3)}{a_3(8) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(8) a_3(5) a_4(7) a_4(3)}{a_3(8) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(8) a_2(7) a_4(3)}{a_3(7) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(8) a_3(6) a_3(3)}{a_3(7) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(8) a_4(4) a_2(3)}{a_3(7) a_4(3) a_4(0)} \\
& - \frac{a_2(6) a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_4(3)}{a_3(6) a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_2(6) a_4(7) a_4(3)}{a_3(6) a_4(6) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(6) a_4(6) a_2(2) a_4(3)}{a_3(6) a_4(5) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_1(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_3(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_2(3)}{a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_1(3)}{a_4(0)} \Big] b_3(0) - \left[\frac{a_2(8) a_3(4) a_4(5)}{a_3(7) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_2(8) a_4(4) a_3(0)}{a_3(7) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_3(4) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_2(3) - \left[\frac{a_2(6) a_3(8) a_4(4)}{a_3(6) a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_2(6) a_4(6) a_3(4)}{a_3(6) a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_2(4) a_4(4)}{a_4(4) a_4(2)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left[\frac{a_3(3)a_4(4)}{a_4(3)a_4(2)} + \frac{a_2(0)}{a_4(0)}\right]b_2(2) - \left[\frac{a_1(8)a_4(7)a_4(3)}{a_3(8)a_4(5)a_4(1)} - \frac{a_2(6)a_3(6)a_4(7)a_4(3)}{a_3(6)a_4(6)a_4(5)a_4(1)}\right. \\
& \quad \left. + \frac{a_2(6)a_4(6)a_3(2)a_4(3)}{a_3(6)a_4(5)a_4(2)a_4(1)}\right]b_2(1) + \left[\frac{a_1(10)a_4(2)}{a_3(8)a_4(0)} + \frac{a_2(8)a_3(6)a_4(2)}{a_3(7)a_4(4)a_4(0)}\right. \\
& \quad + \frac{a_2(8)a_4(4)a_3(2)}{a_3(7)a_4(3)a_4(0)} - \frac{a_1(8)a_4(7)a_3(1)a_4(3)}{a_3(8)a_4(5)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_2(6)a_3(6)a_4(7)a_3(1)a_4(3)}{a_3(6)a_4(6)a_4(5)a_4(1)a_4(0)} \\
& \quad \left. + \frac{a_2(6)a_4(6)a_3(2)a_3(1)a_4(3)}{a_3(6)a_4(5)a_4(2)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_2(6)a_4(2)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(5)a_3(2)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_2(2)}{a_4(0)}\right]b_2(0) \\
& - \left[\frac{a_3(4)a_4(4)}{a_4(4)a_4(3)} + \frac{a_3(0)}{a_4(0)} + \frac{a_2(6)a_4(6)a_4(3)}{a_3(6)a_4(5)a_4(2)}\right]b_1(2) + \left[\frac{a_2(8)a_4(1)}{a_3(7)a_4(0)} + \frac{a_3(5)a_4(1)}{a_4(4)a_4(0)}\right. \\
& \quad \left. + \frac{a_3(1)}{a_4(0)}\right]b_1(0) + b_0(0)
\end{aligned}$$

bulunur.

Denklem (4.11)'den,

$$\begin{aligned}
b_0(k+2) = & \left[\frac{a_0(k+2)}{a_2(k)} - \frac{a_0(k)}{a_2(k)}\right]b_2(k) + \frac{a_1(k+1)}{a_2(k)}b_1(k) - \frac{a_1(k)}{a_2(k)}b_1(k+1) \\
& + b_0(k);
\end{aligned}$$

$k = 0$

$$b_0(2) = \left[\frac{a_0(2)}{a_2(0)} - \frac{a_0(0)}{a_2(0)}\right]b_2(0) + \frac{a_1(1)}{a_2(0)}b_1(0) - \frac{a_1(0)}{a_2(0)}b_1(1) + b_0(0),$$

$k = 1$

$$b_0(3) = \left[\frac{a_0(3)}{a_2(1)} - \frac{a_0(1)}{a_2(1)}\right]b_2(1) + \frac{a_1(2)}{a_2(1)}b_1(1) - \frac{a_1(1)}{a_2(1)}b_1(2) + b_0(1),$$

$k = 2$

$$b_0(4) = \left[\frac{a_0(4)}{a_2(2)} - \frac{a_0(2)}{a_2(2)}\right]b_2(2) + \frac{a_1(3)}{a_2(2)}b_1(2) - \frac{a_1(2)}{a_2(2)}b_1(3) + b_0(2),$$

$k = 3$

$$\begin{aligned}
b_0(5) = & \left[\frac{a_0(5)}{a_2(3)} - \frac{a_0(3)}{a_2(3)}\right]b_2(3) + \frac{a_1(4)}{a_2(3)}b_1(3) - \frac{a_1(3)}{a_2(3)}b_1(4) + b_0(3) \\
= & \left[\frac{a_0(5)}{a_2(3)} - \frac{a_0(3)}{a_2(3)}\right]b_2(3) + \frac{a_1(4)}{a_2(3)}b_1(3) - \frac{a_1(3)}{a_2(3)}\left[\frac{a_1(4)}{a_4(0)}b_4(0) - \frac{a_1(0)}{a_4(0)}b_4(1)\right. \\
& \left. + \frac{a_2(3)}{a_4(0)}b_3(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)}b_3(2) + \frac{a_3(2)}{a_4(0)}b_2(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)}b_2(3) + \frac{a_4(1)}{a_4(0)}b_1(0)\right] \\
& + b_0(3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{a_1(3) a_1(0)}{a_2(3) a_4(0)} b_4(1) + \frac{a_1(3) a_1(0)}{a_2(3) a_4(0)} b_4(0) + \frac{a_1(3) a_2(0)}{a_2(3) a_4(0)} b_3(2) \\
&- \frac{a_1(3) a_2(3)}{a_2(3) a_4(0)} b_3(0) + \left[\frac{a_0(5)}{a_2(3)} - \frac{a_0(3)}{a_2(3)} - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_2(3) - \frac{a_1(3) a_3(2)}{a_2(3) a_4(0)} b_2(0) \\
&+ \frac{a_1(4)}{a_2(3)} b_1(3) - \frac{a_1(3) a_4(1)}{a_2(3) a_4(0)} b_1(0) + b_0(3),
\end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned}
b_0(6) &= \left[\frac{a_0(6)}{a_2(4)} - \frac{a_0(4)}{a_2(4)} \right] b_2(4) + \frac{a_1(5)}{a_2(4)} b_1(4) - \frac{a_1(4)}{a_2(4)} b_1(5) + b_0(4) \\
&= \left[\frac{a_0(6)}{a_2(4)} - \frac{a_0(4)}{a_2(4)} \right] \left[\frac{a_2(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_4(2) + \frac{a_3(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_3(3) \right. \\
&+ \left. \frac{a_4(2)}{a_4(0)} b_2(0) \right] + \frac{a_1(5)}{a_2(4)} \left[\frac{a_1(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_1(0)}{a_4(0)} b_4(1) + \frac{a_2(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_3(2) \right. \\
&+ \left. \frac{a_3(2)}{a_4(0)} b_2(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_2(3) + \frac{a_4(1)}{a_4(0)} b_1(0) \right] - \frac{a_1(4)}{a_2(4)} \left\{ \frac{a_3(1) a_2(0)}{a_4(1) a_4(0)} \right. \\
&- \left. \frac{a_1(1)}{a_4(1)} \right] b_4(2) + \frac{a_1(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1) a_2(4)}{a_4(1) a_4(0)} b_4(0) + \left[\frac{a_3(1) a_3(0)}{a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} \right] b_3(3) \\
&+ \left. \frac{a_2(4)}{a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_3(1) a_3(3)}{a_4(1) a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_3(3)}{a_4(1)} b_2(1) + \frac{a_4(2)}{a_4(1)} b_1(1) \right\} \\
&= - \left[\frac{a_0(6) a_2(0)}{a_2(4) a_4(0)} - \frac{a_0(4) a_2(0)}{a_2(4) a_4(0)} - \frac{a_1(4) a_3(1) a_2(0)}{a_2(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_1(4) a_1(1)}{a_2(4) a_4(1)} \right] b_4(2) \\
&- \left[\frac{a_1(5) a_1(0)}{a_2(4) a_4(0)} + \frac{a_1(4) a_1(5)}{a_2(4) a_4(1)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_0(6) a_2(4)}{a_2(4) a_4(0)} - \frac{a_0(4) a_2(4)}{a_2(4) a_4(0)} + \frac{a_1(5) a_1(4)}{a_2(4) a_4(0)} \right. \\
&+ \left. \frac{a_1(4) a_3(1) a_2(4)}{a_2(4) a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_0(6) a_3(0)}{a_2(4) a_4(0)} - \frac{a_0(4) a_3(0)}{a_2(4) a_4(0)} - \frac{a_1(4) a_3(1) a_3(0)}{a_2(4) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
&+ \left. \frac{a_1(4) a_2(1)}{a_2(4) a_4(1)} \right] b_3(3) - \frac{a_1(5) a_2(0)}{a_2(4) a_4(0)} b_3(2) - \frac{a_1(4) a_2(4)}{a_2(4) a_4(1)} b_3(1) + \left[\frac{a_0(6) a_3(3)}{a_2(4) a_4(0)} \right. \\
&- \frac{a_0(4) a_3(3)}{a_2(4) a_4(0)} + \frac{a_1(5) a_2(3)}{a_2(4) a_4(0)} + \frac{a_1(4) a_3(1) a_3(3)}{a_2(4) a_4(1) a_4(0)} \left. \right] b_3(0) - \frac{a_1(5) a_3(0)}{a_2(4) a_4(0)} b_2(3) \\
&- \frac{a_1(4) a_3(3)}{a_2(4) a_4(1)} b_2(1) + \left[\frac{a_0(6) a_4(2)}{a_2(4) a_4(0)} - \frac{a_0(4) a_4(2)}{a_2(4) a_4(0)} + \frac{a_1(5) a_3(2)}{a_2(4) a_4(0)} \right] b_2(0) \\
&- \frac{a_1(4) a_4(2)}{a_2(4) a_4(1)} b_1(1) + \frac{a_1(5) a_4(1)}{a_2(4) a_4(0)} b_1(0),
\end{aligned}$$

$k = 5$

$$b_0(7) = \left[\frac{a_0(7)}{a_2(5)} - \frac{a_0(5)}{a_2(5)} \right] b_2(5) + \frac{a_1(6)}{a_2(5)} b_1(5) - \frac{a_1(5)}{a_2(5)} b_1(6) + b_0(5)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{a_0(7)}{a_2(5)} - \frac{a_0(5)}{a_2(5)} \right] \left\{ - \left[\frac{a_2(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_4(3) + \frac{a_2(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(4)}{a_4(0)} b_4(0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_3(4)}{a_4(1)} b_3(1) + \frac{a_4(3)}{a_4(1)} b_2(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_4(3)}{a_4(0)} b_2(0) \right\} + \frac{a_1(6)}{a_2(5)} \left\{ \left[\frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{a_1(1)}{a_4(1)} \right] b_4(2) + \frac{a_1(5)}{a_4(1)} b_4(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(4)}{a_4(0)} b_4(0) + \left[\frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} \right] b_3(3) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_2(4)}{a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(3)}{a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_3(3)}{a_4(1)} b_2(1) + \frac{a_4(2)}{a_4(1)} b_1(1) \right\} \\
&\quad - \frac{a_1(5)}{a_2(5)} \left\{ \left[\frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_2(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} + \frac{a_2(2)}{a_4(2)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} - \frac{a_1(2)}{a_4(2)} \right] b_4(3) + \frac{a_1(6)}{a_4(2)} b_4(2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_2(5)}{a_4(1)} b_4(1) + \left[\frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(4)}{a_4(0)} - \frac{a_2(2)}{a_4(2)} \frac{a_3(4)}{a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_2(5)}{a_4(2)} b_3(2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_3(4)}{a_4(1)} b_3(1) - \frac{a_2(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(3)}{a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_3(4)}{a_4(2)} b_2(2) - \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_4(3)}{a_4(1)} b_2(1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_4(3)}{a_4(0)} b_2(0) + \frac{a_4(3)}{a_4(2)} b_1(2) \right\} + \left[\frac{a_0(5)}{a_4(1)} - \frac{a_0(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_1(0)}{a_4(0)} \right] b_4(1) \\
&\quad - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_1(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \left[\frac{a_1(1)}{a_4(1)} - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \right] b_3(2) + \frac{a_1(4)}{a_4(1)} b_3(1) \\
&\quad - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \left[\frac{a_1(1)}{a_4(1)} - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \right] b_2(3) + \frac{a_2(3)}{a_4(1)} b_2(1) \\
&\quad - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(2)}{a_4(0)} b_2(0) + \frac{a_3(2)}{a_4(1)} b_1(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_4(1)}{a_4(0)} b_1(0) + b_0(1) \\
&= - \left[\frac{a_0(7)}{a_2(5)} \frac{a_2(1)}{a_4(1)} - \frac{a_0(5)}{a_2(5)} \frac{a_2(1)}{a_4(1)} - \frac{a_0(7)}{a_2(5)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} + \frac{a_0(5)}{a_2(5)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_2(1)}{a_4(1)} \frac{a_1(5)}{a_2(5)} - \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \frac{a_1(5)}{a_2(5)} - \frac{a_2(2)}{a_4(2)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \frac{a_1(5)}{a_2(5)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_1(2)}{a_4(2)} \frac{a_1(5)}{a_2(5)} \right] b_4(3) + \left[\frac{a_1(6)}{a_2(5)} \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} - \frac{a_1(6)}{a_2(5)} \frac{a_1(1)}{a_4(1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_1(5)}{a_2(5)} \frac{a_1(6)}{a_4(2)} \right] b_4(2) + \left[\frac{a_0(7)}{a_2(5)} \frac{a_2(5)}{a_4(1)} - \frac{a_0(5)}{a_2(5)} \frac{a_2(5)}{a_4(1)} + \frac{a_1(6)}{a_2(5)} \frac{a_1(5)}{a_4(1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_1(5)}{a_2(5)} \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_2(5)}{a_4(1)} + \frac{a_0(5)}{a_4(1)} - \frac{a_0(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_1(0)}{a_4(0)} \right] b_4(1) - \left[\frac{a_0(7)}{a_2(5)} \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(4)}{a_4(0)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_0(5)}{a_2(5)} \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(4)}{a_4(0)} + \frac{a_1(6)}{a_2(5)} \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(4)}{a_4(0)} + \frac{a_1(5)}{a_2(5)} \frac{a_3(2)}{a_4(2)} \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(4)}{a_4(0)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_1(5)}{a_2(5)} \frac{a_2(2)}{a_4(2)} \frac{a_3(4)}{a_4(0)} + \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_1(4)}{a_4(0)} \right] b_4(0) + \left[\frac{a_1(6)}{a_2(5)} \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_1(6)a_2(1)}{a_2(5)a_4(1)}\Big]b_3(3)-\Big[\frac{a_1(5)a_2(5)}{a_2(5)a_4(2)}+\frac{a_1(1)}{a_4(1)}-\frac{a_3(1)a_2(0)}{a_4(1)a_4(0)}\Big]b_3(2) \\
& +\Big[\frac{a_0(7)a_3(4)}{a_2(5)a_4(1)}-\frac{a_0(5)a_3(4)}{a_2(5)a_4(1)}+\frac{a_1(6)a_2(4)}{a_2(5)a_4(1)}+\frac{a_1(5)a_3(2)a_3(4)}{a_2(5)a_4(2)a_4(1)} \\
& +\frac{a_1(4)}{a_4(1)}\Big]b_3(1)-\Big[\frac{a_1(6)a_3(1)a_3(3)}{a_2(5)a_4(1)a_4(0)}-\frac{a_1(5)a_2(2)a_4(3)}{a_2(5)a_4(2)a_4(0)}+\frac{a_3(1)a_2(3)}{a_4(1)a_4(0)}\Big]b_3(0) \\
& +\Big[\frac{a_1(1)}{a_4(1)}+\frac{a_3(1)a_2(0)}{a_4(1)a_4(0)}\Big]b_2(3)-\frac{a_1(5)a_3(4)}{a_2(5)a_4(2)}b_2(2)+\Big[\frac{a_0(7)a_4(3)}{a_2(5)a_4(1)}-\frac{a_0(5)a_4(3)}{a_2(5)a_4(1)} \\
& +\frac{a_1(6)a_3(3)}{a_2(5)a_4(1)}+\frac{a_1(5)a_3(2)a_4(3)}{a_2(5)a_4(2)a_4(1)}+\frac{a_2(3)}{a_4(1)}\Big]b_2(1)-\Big[\frac{a_0(7)a_3(1)a_4(3)}{a_2(5)a_4(1)a_4(0)} \\
& -\frac{a_0(5)a_3(1)a_4(3)}{a_2(5)a_4(1)a_4(0)}+\frac{a_3(1)a_3(2)}{a_4(1)a_4(0)}\Big]b_2(0)-\frac{a_1(5)a_4(3)}{a_2(5)a_4(2)}b_1(2)+\Big[\frac{a_1(6)a_4(2)}{a_2(5)a_4(1)} \\
& +\frac{a_3(2)}{a_4(1)}\Big]b_1(1)-\frac{a_3(1)a_4(1)}{a_4(1)a_4(0)}b_1(0)+b_0(1),
\end{aligned}$$

$k = 6$

$$\begin{aligned}
b_0(8) &= \Big[\frac{a_0(9)}{a_2(6)}-\frac{a_0(6)}{a_2(6)}\Big]b_2(6)+\frac{a_1(7)}{a_2(6)}b_1(6)-\frac{a_1(6)}{a_2(6)}b_1(7)+b_0(6) \\
&= \Big[\frac{a_0(9)}{a_2(6)}-\frac{a_0(6)}{a_2(6)}\Big]\Big\{\frac{a_2(6)}{a_4(2)}b_4(2)-\frac{a_3(2)a_3(5)}{a_4(2)a_4(1)}b_4(1)-\Big[\frac{a_2(2)a_4(4)}{a_4(2)a_4(0)} \\
& +\frac{a_3(1)a_4(4)}{a_4(1)a_4(0)}\Big]b_4(0)+\frac{a_3(5)}{a_4(2)}b_3(2)-\frac{a_3(2)a_4(4)}{a_4(2)a_4(1)}b_3(1)+\frac{a_4(4)}{a_4(2)}b_2(2)\Big\} \\
& +\frac{a_1(7)}{a_2(6)}\Big\{\Big[\frac{a_3(2)a_2(1)}{a_4(2)a_4(1)}+\frac{a_3(2)a_3(0)}{a_4(2)a_4(0)}+\frac{a_2(2)a_3(0)}{a_4(2)a_4(0)}-\frac{a_1(2)}{a_4(2)}\Big]b_4(3) \\
& +\frac{a_1(6)}{a_4(2)}b_4(2)-\frac{a_3(2)a_2(5)}{a_4(2)a_4(1)}b_4(1)+\Big[\frac{a_3(2)a_3(1)a_3(4)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)}-\frac{a_2(2)a_3(4)}{a_4(2)a_4(0)}\Big]b_4(0) \\
& +\frac{a_2(5)}{a_4(2)}b_3(2)-\frac{a_3(2)a_3(4)}{a_4(2)a_4(1)}b_3(1)-\frac{a_2(2)a_4(3)}{a_4(2)a_4(0)}b_3(0)+\frac{a_3(4)}{a_4(2)}b_2(2) \\
& -\frac{a_3(2)a_4(3)}{a_4(2)a_4(1)}b_2(1)+\frac{a_3(2)a_3(1)a_4(3)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)}b_2(0)+\frac{a_4(3)}{a_4(2)}b_1(2)\Big\} \\
& -\frac{a_1(6)}{a_2(6)}\Big\{\frac{a_1(7)}{a_4(3)}b_4(3)-\frac{a_3(3)a_2(6)}{a_4(3)a_4(2)}b_4(2)+\Big[\frac{a_3(3)a_3(2)a_3(5)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)} \\
& -\frac{a_2(3)a_3(5)}{a_4(3)a_4(1)}\Big]b_4(1)+\Big[\frac{a_3(3)a_2(2)a_4(4)}{a_4(3)a_4(2)a_4(0)}-\frac{a_3(3)a_3(1)a_4(4)}{a_4(3)a_4(1)a_4(0)} \\
& +\frac{a_2(3)a_3(1)a_4(4)}{a_4(3)a_4(1)a_4(0)}-\frac{a_1(3)a_4(4)}{a_4(3)a_4(0)}\Big]b_4(0)+\frac{a_2(6)}{a_4(3)}b_3(3)-\frac{a_3(3)a_3(5)}{a_4(3)a_4(2)}b_3(2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_2(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1)} \right] b_3(1) + \frac{a_3(5)}{a_4(3)} b_2(3) - \frac{a_3(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2)} b_2(2) \\
& + \frac{a_4(3)}{a_4(2)} b_1(3) \Big\} + \left[\frac{a_0(6)}{a_4(2)} - \frac{a_0(2)}{a_4(2)} + \frac{a_2(2) a_2(0)}{a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(2) a_3(1) a_2(0)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_3(2) a_1(1)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(2) - \frac{a_3(2) a_1(5)}{a_4(2) a_4(1)} b_4(1) - \left[\frac{a_2(2) a_2(4)}{a_4(2) a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_3(2) a_3(1) a_2(4)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_1(2)}{a_4(2)} - \frac{a_2(2) a_3(0)}{a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(2) a_3(1) a_3(0)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_3(2) a_2(1)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_3(3) + \frac{a_1(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_3(2) a_2(4)}{a_4(2) a_4(1)} b_3(1) - \left[\frac{a_2(2) a_3(3)}{a_4(2) a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_3(2) a_3(1) a_3(3)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right] b_3(0) + \frac{a_2(4)}{a_4(2)} b_2(2) - \frac{a_3(2) a_3(3)}{a_4(2) a_4(1)} b_2(1) \\
& \quad - \frac{a_2(2) a_4(2)}{a_4(2) a_4(0)} b_2(0) + \frac{a_3(3)}{a_4(2)} b_1(2) - \frac{a_3(2) a_4(2)}{a_4(2) a_4(1)} b_1(1) + b_0(2) \\
& = \left[\frac{a_1(7) a_3(2) a_2(1)}{a_2(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_1(7) a_3(2) a_3(0)}{a_2(6) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_1(7) a_2(2) a_3(0)}{a_2(6) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_1(7) a_1(2)}{a_2(6) a_4(2)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_1(6) a_1(7)}{a_2(6) a_4(3)} \right] b_4(3) + \left[\frac{a_0(9)}{a_4(2)} - \frac{a_0(6)}{a_4(2)} + \frac{a_1(7) a_1(6)}{a_2(6) a_4(2)} + \frac{a_1(6) a_3(3) a_2(6)}{a_2(6) a_4(3) a_4(2)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_0(6)}{a_4(2)} - \frac{a_0(2)}{a_4(2)} + \frac{a_2(2) a_2(0)}{a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(2) a_3(1) a_2(0)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(2) a_1(1)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(2) \\
& \quad - \left[\frac{a_0(9) a_3(2) a_3(5)}{a_2(6) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_0(6) a_3(2) a_3(5)}{a_2(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_1(7) a_3(2) a_2(5)}{a_2(6) a_4(2) a_4(1)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_1(6) a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_2(6) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_1(6) a_2(3) a_3(5)}{a_2(6) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_1(5)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(1) \\
& \quad - \left[\frac{a_0(9) a_2(2) a_4(4)}{a_2(6) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_0(6) a_2(2) a_4(4)}{a_2(6) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_0(9) a_3(1) a_4(4)}{a_2(6) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_0(6) a_3(1) a_4(4)}{a_2(6) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_1(7) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_2(6) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_1(7) a_2(2) a_3(4)}{a_2(6) a_4(2) a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_1(6) a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_2(6) a_4(3) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_1(6) a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_2(6) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_1(6) a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_2(6) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_1(6) a_1(3) a_4(4)}{a_2(6) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_2(2) a_2(4)}{a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(2) a_3(1) a_2(4)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_1(6) a_2(6)}{a_2(6) a_4(3)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_1(2)}{a_4(2)} - \frac{a_2(2) a_3(0)}{a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(2) a_3(1) a_3(0)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(2) a_2(1)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_3(3) \\
& \quad + \left[\frac{a_0(9) a_3(5)}{a_2(6) a_4(2)} - \frac{a_0(6) a_3(5)}{a_2(6) a_4(2)} + \frac{a_1(7) a_2(5)}{a_2(6) a_4(2)} - \frac{a_1(6) a_3(3) a_3(5)}{a_2(6) a_4(3) a_4(2)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_1(5)}{a_4(2)} \Big] b_3(2) - \left[\frac{a_0(9) a_3(2) a_4(4)}{a_2(6) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_0(6) a_3(2) a_4(4)}{a_2(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_1(7) a_3(2) a_3(4)}{a_2(6) a_4(2) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_1(6) a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_2(6) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_1(6) a_2(3) a_4(4)}{a_2(6) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_2(4)}{a_4(2) a_4(1)} \Big] b_3(1) \\
& - \left[\frac{a_1(7) a_2(2) a_4(3)}{a_2(6) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_2(2) a_3(3)}{a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(2) a_3(1) a_3(3)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right] b_3(0) \\
& - \frac{a_1(6) a_3(5)}{a_2(6) a_4(3)} b_2(3) + \left[\frac{a_0(9) a_4(4)}{a_2(6) a_4(2)} - \frac{a_0(6) a_4(4)}{a_2(6) a_4(2)} + \frac{a_1(7) a_3(4)}{a_2(6) a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_1(6) a_3(3) a_4(4)}{a_2(6) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_2(4)}{a_4(2)} \Big] b_2(2) - \left[\frac{a_1(7) a_3(2) a_4(3)}{a_2(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_3(3)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_2(1) \\
& + \left[\frac{a_1(7) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_2(6) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(2) a_4(2)}{a_4(2) a_4(0)} \right] b_2(0) - \frac{a_1(6) a_4(3)}{a_2(6) a_4(2)} b_1(3) \\
& + \left[\frac{a_1(7) a_4(3)}{a_2(6) a_4(2)} + \frac{a_3(3)}{a_4(2)} \right] b_1(2) - \frac{a_3(2) a_4(2)}{a_4(2) a_4(1)} b_1(1) + b_0(2),
\end{aligned}$$

$k = 7$

$$\begin{aligned}
b_0(9) &= \left[\frac{a_0(10)}{a_2(7)} - \frac{a_0(7)}{a_2(7)} \right] b_2(7) + \frac{a_1(8)}{a_2(7)} b_1(7) - \frac{a_1(7)}{a_2(7)} b_1(8) + b_0(7) \\
&= \left[\frac{a_0(10)}{a_2(7)} - \frac{a_0(7)}{a_2(7)} \right] \left\{ \frac{a_2(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \frac{a_3(3) a_3(6)}{a_4(3) a_4(2)} b_4(2) - \left[\frac{a_2(3) a_4(5)}{a_4(3) a_4(1)} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{a_3(2) a_4(5)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(1) + \frac{a_3(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3) a_4(5)}{a_4(3) a_4(2)} b_3(2) + \frac{a_4(5)}{a_4(3)} b_2(3) \right\} \\
&+ \frac{a_1(8)}{a_2(7)} \left\{ \frac{a_1(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \left[\frac{a_3(3) a_2(6)}{a_4(3) a_4(2)} \right] b_4(2) + \left[\frac{a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right. \right. \\
&- \left. \left. \frac{a_2(3) a_3(5)}{a_4(3) a_4(1)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_1(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_2(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3) a_3(5)}{a_4(3) a_4(2)} b_3(2) \right. \\
&+ \left[\frac{a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_2(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1)} \right] b_3(1) + \frac{a_3(5)}{a_4(3)} b_2(3) - \frac{a_3(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2)} b_2(2) \\
&+ \left. \frac{a_4(3)}{a_4(2)} b_1(3) \right\} - \frac{a_1(7)}{a_2(7)} \left\{ - \left[\frac{a_3(4) a_2(7)}{a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_2(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(3) \right. \\
&+ \left. \left[\frac{a_3(4) a_3(3) a_3(6)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_2(4) a_3(6)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(2) \right. \\
&+ \left. \left[\frac{a_3(4) a_2(3) a_4(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_3(4) a_3(2) a_4(5)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(4) a_3(2) a_4(5)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_1(4)a_4(5)}{a_4(4)a_4(1)} - \frac{a_4(4)a_1(0)}{a_4(3)a_4(0)} \Big] b_4(1) + \left[\frac{a_1(8)}{a_4(0)} + \frac{a_3(6)a_2(4)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_4(4)a_1(4)}{a_4(3)a_4(0)} \right] b_4(0) \\
& - \left[\frac{a_3(4)a_3(6)}{a_4(4)a_4(3)} + \frac{a_3(6)a_3(0)}{a_4(4)a_4(0)} \right] b_3(3) + \left[\frac{a_3(4)a_3(3)a_4(5)}{a_4(4)a_4(3)a_4(2)} - \frac{a_2(4)a_4(5)}{a_4(4)a_4(2)} \right. \\
& \left. - \frac{a_4(4)a_2(0)}{a_4(3)a_4(0)} \right] b_3(2) + \left[\frac{a_2(7)a_4(3)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(6)a_3(3)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_4(4)a_2(3)}{a_4(3)a_4(0)} \right] b_3(0) \\
& - \left[\frac{a_3(4)a_4(5)}{a_4(4)a_4(3)} + \frac{a_4(4)a_3(0)}{a_4(3)a_4(0)} \right] b_2(3) + \left[\frac{a_3(6)a_4(2)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_4(4)a_3(2)}{a_4(3)a_4(0)} \right] b_2(0) \\
& + \frac{a_4(1)}{a_4(0)} b_1(0) \Big\} + \left[\frac{a_0(7)}{a_4(3)} - \frac{a_0(3)}{a_4(3)} + \frac{a_1(3)a_3(0)}{a_4(3)a_4(0)} + \frac{a_2(3)a_2(1)}{a_4(3)a_4(1)} + \frac{a_3(1)a_3(0)}{a_4(1)a_4(0)} \right. \\
& \left. - \frac{a_3(3)a_3(2)a_2(1)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)} - \frac{a_3(3)a_3(2)a_3(0)}{a_4(3)a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_3(3)a_2(2)a_3(0)}{a_4(3)a_4(2)a_4(0)} \right. \\
& \left. - \frac{a_3(3)a_1(2)}{a_4(3)a_4(2)} \right] b_4(3) + \frac{a_1(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \left[\frac{a_2(3)a_2(5)}{a_4(3)a_4(1)} - \frac{a_3(3)a_3(2)a_2(5)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)} \right] b_4(1) \\
& - \left[\frac{a_1(3)a_3(4)}{a_4(3)a_4(0)} - \frac{a_2(3)a_3(1)a_3(4)}{a_4(3)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_3(3)a_3(2)a_3(1)a_3(4)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)a_4(0)} \right. \\
& \left. - \frac{a_2(2)a_3(4)}{a_4(2)a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_1(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3)a_2(5)}{a_4(3)a_4(2)} b_3(2) - \left[\frac{a_2(3)a_3(4)}{a_4(3)a_4(1)} \right. \\
& \left. + \frac{a_3(3)a_3(2)a_3(4)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)} \right] b_3(1) - \left[\frac{a_1(3)a_4(3)}{a_4(3)a_4(0)} - \frac{a_3(3)a_2(2)a_4(3)}{a_4(3)a_4(2)a_4(0)} \right] b_3(0) \\
& - \frac{a_1(3)a_2(5)}{a_4(3)a_4(3)} b_2(3) - \frac{a_3(3)a_3(4)}{a_4(3)a_4(2)} b_2(2) - \left[\frac{a_2(3)a_4(3)}{a_4(3)a_4(1)} \right. \\
& \left. - \frac{a_3(3)a_3(2)a_4(3)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)} \right] b_2(1) - \left[\frac{a_2(3)a_3(1)a_4(3)}{a_4(3)a_4(1)a_4(0)} \right. \\
& \left. + \frac{a_3(3)a_3(2)a_3(1)a_4(3)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)a_4(0)} \right] b_2(0) + \frac{a_3(4)}{a_4(3)} b_1(3) - \frac{a_3(3)a_4(3)}{a_4(3)a_4(2)} b_1(2) \\
& + b_0(3) \\
& = \left[\frac{a_0(10)}{a_4(3)} - \frac{a_0(7)}{a_4(3)} + \frac{a_1(8)a_1(7)}{a_2(7)a_4(3)} + \frac{a_1(7)a_3(4)a_2(7)}{a_2(7)a_4(4)a_4(3)} + \frac{a_1(7)a_2(7)a_3(0)}{a_2(7)a_4(4)a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_0(7)}{a_4(3)} - \frac{a_0(3)}{a_4(3)} + \frac{a_1(3)a_3(0)}{a_4(3)a_4(0)} + \frac{a_2(3)a_2(1)}{a_4(3)a_4(1)} + \frac{a_3(1)a_3(0)}{a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_3(3)a_3(2)a_2(1)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)} \\
& \left. - \frac{a_3(3)a_3(2)a_3(0)}{a_4(3)a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_3(3)a_2(2)a_3(0)}{a_4(3)a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_3(3)a_1(2)}{a_4(3)a_4(2)} \right] b_4(3) \\
& - \left[\frac{a_0(10)a_3(3)a_3(6)}{a_2(7)a_4(3)a_4(2)} - \frac{a_0(7)a_3(3)a_3(6)}{a_2(7)a_4(3)a_4(2)} + \frac{a_1(8)a_3(3)a_2(6)}{a_2(7)a_4(3)a_4(2)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_1(7) a_3(4) a_3(3) a_3(6)}{a_2(7) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_1(7) a_2(4) a_3(6)}{a_2(7) a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_1(7) a_3(6) a_2(0)}{a_2(7) a_4(4) a_4(0)} \\
& - \left[\frac{a_1(7) a_3(6) a_2(0)}{a_2(7) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_1(6)}{a_4(2)} \right] b_4(2) - \left[\frac{a_0(10) a_2(3) a_4(5)}{a_2(7) a_4(3) a_4(1)} - \frac{a_0(7) a_2(3) a_4(5)}{a_2(7) a_4(3) a_4(1)} \right. \\
& - \frac{a_0(10) a_3(2) a_4(5)}{a_2(7) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_0(7) a_3(2) a_4(5)}{a_2(7) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_1(8) a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_2(7) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \\
& + \frac{a_1(8) a_2(3) a_3(5)}{a_2(7) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_1(7) a_3(4) a_2(3) a_4(5)}{a_2(7) a_4(4) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_1(7) a_3(4) a_3(2) a_4(5)}{a_2(7) a_4(4) a_4(2) a_4(1)} \\
& + \frac{a_1(7) a_2(4) a_3(2) a_4(5)}{a_2(7) a_4(4) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_1(7) a_1(4) a_4(5)}{a_2(7) a_4(4) a_4(1)} - \frac{a_1(7) a_4(4) a_1(0)}{a_2(7) a_4(3) a_4(0)} \\
& + \left. \frac{a_2(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(1)} - \frac{a_3(3) a_3(2) a_2(5)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_1(8) a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_2(7) a_4(3) a_4(2) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_1(8) a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_2(7) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_1(8) a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_2(7) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_1(8) a_1(3) a_4(4)}{a_2(7) a_4(3) a_4(0)} \\
& - \frac{a_1(7) a_1(8)}{a_2(7) a_4(0)} - \frac{a_1(7) a_3(6) a_2(4)}{a_2(7) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_1(7) a_4(4) a_1(4)}{a_2(7) a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_1(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(3) a_3(1) a_3(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} + \left. \frac{a_2(2) a_3(4)}{a_4(2) a_4(0)} \right] b_4(0) \\
& + \left[\frac{a_0(10) a_3(6)}{a_2(7) a_4(3)} - \frac{a_0(7) a_3(6)}{a_2(7) a_4(3)} + \frac{a_1(8) a_2(6)}{a_2(7) a_4(3)} + \frac{a_1(7) a_3(4) a_3(6)}{a_2(7) a_4(4) a_4(3)} \right. \\
& + \frac{a_1(7) a_3(6) a_3(0)}{a_2(7) a_4(4) a_4(0)} + \left. \frac{a_1(6)}{a_4(3)} \right] b_3(3) - \left[\frac{a_0(10) a_3(3) a_4(5)}{a_2(7) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_0(7) a_3(3) a_4(5)}{a_2(7) a_4(3) a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_1(8) a_3(3) a_3(5)}{a_2(7) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_1(7) a_3(4) a_3(3) a_4(5)}{a_2(7) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_1(7) a_2(4) a_4(5)}{a_2(7) a_4(4) a_4(2)} \\
& - \frac{a_1(7) a_4(4) a_2(0)}{a_2(7) a_4(3) a_4(0)} + \left. \frac{a_3(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(2)} \right] b_3(2) + \left[\frac{a_1(8) a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_2(7) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right. \\
& - \frac{a_1(8) a_2(3) a_4(4)}{a_2(7) a_4(3) a_4(1)} - \frac{a_2(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(1)} - \left. \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right] b_3(1) \\
& - \left[\frac{a_1(7) a_2(7) a_4(3)}{a_2(7) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(7) a_3(6) a_3(3)}{a_2(7) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(7) a_4(4) a_2(3)}{a_2(7) a_4(3) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_1(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(0)} - \left. \frac{a_3(3) a_2(2) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} \right] b_3(0) + \left[\frac{a_0(10) a_4(5)}{a_2(7) a_4(3)} - \frac{a_0(7) a_4(5)}{a_2(7) a_4(3)} \right. \\
& + \frac{a_1(8) a_3(5)}{a_2(7) a_4(3)} + \frac{a_1(7) a_3(4) a_4(5)}{a_2(7) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_1(7) a_4(4) a_3(0)}{a_2(7) a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_1(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(3)} \left. \right] b_2(3) \\
& - \left[\frac{a_1(8) a_3(3) a_4(4)}{a_2(7) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_3(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2)} \right] b_2(2) - \left[\frac{a_2(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(1)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{a_3(3) a_3(2) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \Big] b_2(1) + \left[\frac{a_1(7) a_3(6) a_4(2)}{a_2(7) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(7) a_4(4) a_3(2)}{a_2(7) a_4(3) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_2(3) a_3(1) a_4(3)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \Big] b_2(0) + \left[\frac{a_1(8) a_4(3)}{a_2(7) a_4(2)} \right. \\
& \left. + \frac{a_3(4)}{a_4(3)} \right] b_1(3) - \frac{a_3(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2)} b_1(2) - \frac{a_1(7) a_4(1)}{a_2(7) a_4(0)} b_1(0) + b_0(3),
\end{aligned}$$

$k = 8$

$$\begin{aligned}
b_0(10) &= \left[\frac{a_0(11)}{a_2(8)} - \frac{a_0(8)}{a_2(8)} \right] b_2(8) + \frac{a_1(9)}{a_2(8)} b_1(8) - \frac{a_1(8)}{a_2(8)} b_1(9) + b_0(8) \\
&= \left[\frac{a_0(11)}{a_2(8)} - \frac{a_0(8)}{a_2(8)} \right] \left\{ - \left[\frac{a_3(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_3(7)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_4(3) - \left[\frac{a_2(4) a_4(6)}{a_4(4) a_4(2)} \right. \right. \\
&\quad - \frac{a_3(4) a_3(3) a_4(6)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_4(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} \Big] b_4(2) + \left[\frac{a_2(8)}{a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_3(4)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(6) a_2(4)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_3(4) a_4(6)}{a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_4(6) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_3(3) + \left[\frac{a_3(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(6) a_3(3)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_3(0) + \frac{a_4(2)}{a_4(0)} b_2(0) \Big\} + \frac{a_1(9)}{a_2(8)} \left\{ - \left[\frac{a_3(4) a_2(7)}{a_4(4) a_4(3)} \right. \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_2(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(3) + \left[\frac{a_3(4) a_3(3) a_3(6)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_2(4) a_3(6)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_3(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(2) + \left[\frac{a_3(4) a_2(3) a_4(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_3(4) a_3(2) a_4(5)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_2(4) a_3(2) a_4(5)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_1(4) a_4(5)}{a_4(4) a_4(1)} - \frac{a_4(4) a_1(0)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_1(8)}{a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_2(4)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(4) a_1(4)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_3(4) a_3(6)}{a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(6) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_3(3) + \left[\frac{a_3(4) a_3(3) a_4(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_2(4) a_4(5)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_4(4) a_2(0)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_3(2) + \left[\frac{a_2(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(3)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(4) a_2(3)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_3(0) - \left[\frac{a_3(4) a_4(5)}{a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_4(4) a_3(0)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_2(3) + \left[\frac{a_3(6) a_4(2)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_4(4) a_3(2)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_2(0) + \frac{a_4(1)}{a_4(0)} b_1(0) \Big\} - \left[\frac{a_1(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_1(7)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_4(3) \\
&\quad - \left[\frac{a_2(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(4) a_2(6)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(4) a_3(3) a_2(6)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \right] b_4(2) \\
&\quad - \left[\frac{a_1(4) a_3(5)}{a_4(4) a_4(1)} - \frac{a_2(4) a_3(2) a_3(5)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(5) a_1(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_3(4)a_2(3)a_3(5)}{a_4(4)a_4(3)a_4(1)}\Big]b_4(1) + \left[\frac{a_0(8)}{a_4(0)} - \frac{a_0(4)}{a_4(0)} + \frac{a_1(7)a_3(4)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_1(4)a_3(1)a_4(4)}{a_4(4)a_4(1)a_4(0)}\right. \\
& \quad + \frac{a_2(6)a_2(4)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_2(4)a_2(2)a_4(4)}{a_4(4)a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_2(4)a_3(1)a_4(4)}{a_4(4)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_3(5)a_1(4)}{a_4(4)a_4(0)} \\
& \quad - \frac{a_3(4)a_3(3)a_2(2)a_4(4)}{a_4(4)a_4(3)a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_3(4)a_3(3)a_3(1)a_4(4)}{a_4(4)a_4(3)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_3(4)a_2(3)a_3(1)a_4(4)}{a_4(4)a_4(3)a_4(1)a_4(0)} \\
& \quad + \frac{a_3(4)a_1(3)a_4(4)}{a_4(4)a_4(3)a_4(0)} + \frac{a_0(4)}{a_4(0)} - \frac{a_0(0)}{a_4(0)}\Big]b_4(0) - \left[\frac{a_2(6)a_3(0)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(4)a_2(6)}{a_4(4)a_4(3)}\right]b_3(3) \\
& \quad - \left[\frac{a_2(4)a_3(5)}{a_4(4)a_4(2)} + \frac{a_3(5)a_2(0)}{a_4(4)a_4(0)} - \frac{a_3(4)a_3(3)a_3(5)}{a_4(4)a_4(3)a_4(2)}\right]b_3(2) - \left[\frac{a_1(4)a_4(4)}{a_4(4)a_4(1)}\right. \\
& \quad - \frac{a_2(4)a_3(2)a_4(4)}{a_4(4)a_4(2)a_4(1)} + \frac{a_3(4)a_3(3)a_3(2)a_4(4)}{a_4(4)a_4(3)a_4(2)a_4(1)} - \frac{a_3(4)a_2(3)a_4(4)}{a_4(4)a_4(3)a_4(1)} \\
& \quad + \frac{a_1(0)}{a_4(0)}\Big]b_3(1) + \left[\frac{a_1(7)a_4(3)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_2(6)a_3(3)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(5)a_2(3)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_1(3)}{a_4(0)}\right]b_3(0) \\
& \quad - \left[\frac{a_3(5)a_3(0)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(4)a_3(5)}{a_4(4)a_4(3)}\right]b_2(3) - \left[\frac{a_2(4)a_4(4)}{a_4(4)a_4(2)} - \frac{a_3(3)a_4(4)}{a_4(3)a_4(2)}\right. \\
& \quad + \frac{a_2(0)}{a_4(0)}\Big]b_2(2) + \left[\frac{a_2(6)a_4(2)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(5)a_3(2)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_2(2)}{a_4(0)}\right]b_2(0) \\
& \quad - \left[\frac{a_3(4)a_4(4)}{a_4(4)a_4(3)} + \frac{a_3(0)}{a_4(0)}\right]b_1(3) + \left[\frac{a_3(5)a_4(1)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(1)}{a_4(0)}\right]b_1(0) \\
& \quad + b_0(0) \\
& = -\left[\frac{a_0(11)a_3(7)a_3(0)}{a_2(8)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_0(8)a_3(7)a_3(0)}{a_2(8)a_4(4)a_4(0)} - \frac{a_0(11)a_3(4)a_3(7)}{a_2(8)a_4(4)a_4(3)}\right. \\
& \quad + \frac{a_0(8)a_3(4)a_3(7)}{a_2(8)a_4(4)a_4(3)} - \frac{a_1(9)a_3(4)a_2(7)}{a_2(8)a_4(4)a_4(3)} - \frac{a_1(9)a_2(7)a_3(0)}{a_2(8)a_4(4)a_4(0)} - \frac{a_1(7)a_3(0)}{a_4(4)a_4(0)} \\
& \quad - \frac{a_3(4)a_1(7)}{a_4(4)a_4(3)}\Big]b_4(3) - \left[\frac{a_0(11)a_2(4)a_4(6)}{a_2(8)a_4(4)a_4(2)} - \frac{a_0(8)a_2(4)a_4(6)}{a_2(8)a_4(4)a_4(2)}\right. \\
& \quad - \frac{a_0(11)a_3(4)a_3(3)a_4(6)}{a_2(8)a_4(4)a_4(3)a_4(2)} + \frac{a_0(8)a_3(4)a_3(3)a_4(6)}{a_2(8)a_4(4)a_4(3)a_4(2)} + \frac{a_0(11)a_4(6)a_2(0)}{a_2(8)a_4(4)a_4(0)} \\
& \quad - \frac{a_0(8)a_4(6)a_2(0)}{a_2(8)a_4(4)a_4(0)} - \frac{a_1(9)a_3(4)a_3(3)a_3(6)}{a_2(8)a_4(4)a_4(3)a_4(2)} + \frac{a_1(9)a_2(4)a_3(6)}{a_2(8)a_4(4)a_4(2)} \\
& \quad + \frac{a_1(9)a_3(6)a_2(0)}{a_2(8)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_1(9)a_3(6)a_2(0)}{a_2(8)a_4(4)a_4(0)} - \frac{a_2(6)a_2(0)}{a_4(4)a_4(0)} \\
& \quad - \frac{a_2(4)a_2(6)}{a_4(4)a_4(2)} + \frac{a_3(4)a_3(3)a_2(6)}{a_4(4)a_4(3)a_4(2)}\Big]b_4(2) + \left[\frac{a_1(9)a_3(4)a_2(3)a_4(5)}{a_2(8)a_4(4)a_4(3)a_4(1)}\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_1(9) a_3(4) a_3(2) a_4(5)}{a_2(8) a_4(4) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_1(9) a_2(4) a_3(2) a_4(5)}{a_2(8) a_4(4) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_1(9) a_1(4) a_4(5)}{a_2(8) a_4(4) a_4(1)} \\
& - \frac{a_1(9) a_4(4) a_1(0)}{a_2(8) a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_1(4) a_3(5)}{a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_2(4) a_3(2) a_3(5)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_3(5) a_1(0)}{a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_3(4) a_2(3) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1)} \Big] b_4(1) + \left[\frac{a_0(11) a_2(8)}{a_2(8) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_0(8) a_2(8)}{a_2(8) a_4(0)} + \frac{a_0(11) a_3(7) a_3(4)}{a_2(8) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_0(8) a_3(7) a_3(4)}{a_2(8) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_0(11) a_4(6) a_2(4)}{a_2(8) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_0(8) a_4(6) a_2(4)}{a_2(8) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(9) a_1(8)}{a_2(8) a_4(0)} \\
& + \frac{a_1(9) a_3(6) a_2(4)}{a_2(8) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(9) a_4(4) a_1(4)}{a_2(8) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_0(8)}{a_4(0)} - \frac{a_0(4)}{a_4(0)} + \frac{a_1(7) a_3(4)}{a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_1(4) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_2(4)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(4) a_2(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_2(4) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(5) a_1(4)}{a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(4) a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(4) a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_1(3) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_0(4)}{a_4(0)} - \frac{a_0(0)}{a_4(0)} \Big] b_4(0) \\
& - \left[\frac{a_0(11) a_3(4) a_4(6)}{a_2(8) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_0(8) a_3(4) a_4(6)}{a_2(8) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_0(11) a_4(6) a_3(0)}{a_2(8) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_0(8) a_4(6) a_3(0)}{a_2(8) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(9) a_3(4) a_3(6)}{a_2(8) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_1(9) a_3(6) a_3(0)}{a_2(8) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(6) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(4) a_2(6)}{a_4(4) a_4(3)} \Big] b_3(3) + \left[\frac{a_1(9) a_3(4) a_3(3) a_4(5)}{a_2(8) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \right. \\
& - \frac{a_1(9) a_2(4) a_4(5)}{a_2(8) a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_1(9) a_4(4) a_2(0)}{a_2(8) a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_2(4) a_3(5)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(5) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \Big] b_3(2) - \left[\frac{a_1(4) a_4(4)}{a_4(4) a_4(1)} - \frac{a_2(4) a_3(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_3(4) a_2(3) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_1(0)}{a_4(0)} \Big] b_3(1) \\
& + \left[\frac{a_0(11) a_3(7) a_4(3)}{a_2(8) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_0(8) a_3(7) a_4(3)}{a_2(8) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_0(11) a_4(6) a_3(3)}{a_2(8) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_0(8) a_4(6) a_3(3)}{a_2(8) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(9) a_2(7) a_4(3)}{a_2(8) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(9) a_3(6) a_3(3)}{a_2(8) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_1(9) a_4(4) a_2(3)}{a_2(8) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_1(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_3(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_2(3)}{a_4(4) a_4(0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_1(3)}{a_4(0)} \Big] b_3(0) - \left[\frac{a_1(9) a_3(4) a_4(5)}{a_2(8) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_1(9) a_4(4) a_3(0)}{a_2(8) a_4(3) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_3(5) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(4) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3)} \Big] b_2(3) - \left[\frac{a_2(4) a_4(4)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \Big] b_2(2) + \left[\frac{a_1(9) a_3(6) a_4(2)}{a_2(8) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(9) a_4(4) a_3(2)}{a_2(8) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_4(2)}{a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_3(5) a_3(2)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(2)}{a_4(0)} \Big] b_2(0) - \left[\frac{a_3(4) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_1(3) + \left[\frac{a_1(9) a_4(1)}{a_2(8) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_3(5) a_4(1)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(1)}{a_4(0)} \Big] b_1(0) + b_0(0),
\end{aligned}$$

$k = 9$

$$\begin{aligned}
b_0(11) &= \left[\frac{a_0(12)}{a_2(9)} - \frac{a_0(9)}{a_2(9)} \right] b_2(9) + \frac{a_1(10)}{a_2(9)} b_1(9) - \frac{a_1(9)}{a_2(9)} b_1(10) + b_0(9) \\
&= \left[\frac{a_0(12)}{a_2(9)} - \frac{a_0(9)}{a_2(9)} \right] \left\{ - \left[\frac{a_2(5) a_4(7)}{a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right. \right. \\
&+ \frac{a_4(7) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(0)} \Big] b_4(3) + \left[\frac{a_2(9)}{a_4(1)} + \frac{a_3(8) a_3(5)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(7) a_2(5)}{a_4(5) a_4(1)} \right] b_4(1) \\
&- \frac{a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_3(8)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
&+ \frac{a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \Big] b_4(0) + \left[\frac{a_3(8) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1)} \right] b_3(1) \\
&- \frac{a_3(5) a_4(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_4(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1)} b_2(1) + \frac{a_4(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} b_2(0) \\
&+ \frac{a_1(10)}{a_2(9)} \left\{ \left[\frac{a_3(5) a_3(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(7)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} \right. \right. \\
&- \frac{a_2(5) a_3(7)}{a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_3(7) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_3(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(0)} \Big] b_4(3) + \left[\frac{a_3(5) a_2(4) a_4(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2)} \right. \\
&+ \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(3) a_4(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_3(5) a_4(6) a_2(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(5) a_3(3) a_4(6)}{a_4(5) a_4(3) a_4(2)} \\
&- \frac{a_1(5) a_4(6)}{a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_4(5) a_3(1) a_2(0)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_4(5) a_1(1)}{a_4(4) a_4(1)} \Big] b_4(2) + \left[\frac{a_1(9)}{a_4(1)} + \frac{a_2(8) a_3(5)}{a_4(5) a_4(1)} \right. \\
&+ \frac{a_3(7) a_2(5)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(5) a_1(5)}{a_4(4) a_4(1)} \Big] b_4(1) - \left[\frac{a_3(5) a_2(8)}{a_4(5) a_4(0)} - \frac{a_3(5) a_3(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
&- \frac{a_3(5) a_4(6) a_2(4)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(5) a_4(6) a_2(4)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_3(7)a_3(1)a_3(4)}{a_4(5)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_4(5)a_3(1)a_2(4)}{a_4(4)a_4(1)a_4(0)} \Big] b_4(0) + \left[\frac{a_3(5)a_3(4)a_4(6)}{a_4(5)a_4(4)a_4(3)} \right. \\
& + \frac{a_3(5)a_4(6)a_3(0)}{a_4(5)a_4(4)a_4(0)} - \frac{a_2(5)a_4(6)}{a_4(5)a_4(3)} + \frac{a_4(5)a_3(1)a_3(0)}{a_4(4)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_4(5)a_2(1)}{a_4(4)a_4(1)} \Big] b_3(3) \\
& + \left[\frac{a_2(8)a_4(4)}{a_4(5)a_4(1)} + \frac{a_3(7)a_3(4)}{a_4(5)a_4(1)} + \frac{a_4(5)a_2(4)}{a_4(4)a_4(1)} \right] b_3(1) - \frac{a_4(5)a_3(1)a_3(3)}{a_4(4)a_4(1)a_4(0)} b_3(0) \\
& + \frac{a_3(7)a_4(3)}{a_4(5)a_4(1)} b_2(1) - \left[\frac{a_3(5)a_4(2)}{a_4(5)a_4(0)} + \frac{a_3(7)a_3(1)a_4(3)}{a_4(5)a_4(1)a_4(0)} \right] b_2(0) \\
& + \frac{a_4(5)a_4(2)}{a_4(4)a_4(1)} b_1(1) \Big\} - \frac{a_1(9)}{a_2(9)} \Big\{ - \left[\frac{a_2(5)a_4(7)}{a_4(5)a_4(3)} - \frac{a_3(5)a_3(4)a_4(7)}{a_4(5)a_4(4)a_4(3)} \right. \\
& \left. \left\{ - \frac{a_3(5)a_4(7)a_3(0)}{a_4(5)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_4(7)a_2(1)}{a_4(5)a_4(1)} + \frac{a_4(7)a_3(0)}{a_4(5)a_4(0)} + \frac{a_2(6)a_3(4)a_4(7)}{a_4(6)a_4(4)a_4(3)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{a_2(6)a_4(7)a_3(0)}{a_4(6)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_1(6)a_4(7)}{a_4(6)a_4(3)} + \frac{a_4(6)a_3(2)a_2(1)}{a_4(5)a_4(2)a_4(1)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{a_4(6)a_3(2)a_3(0)}{a_4(5)a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_4(6)a_1(2)}{a_4(5)a_4(2)} \right] b_4(3) + \left[\frac{a_1(10)}{a_4(2)} + \frac{a_2(9)a_3(6)}{a_4(6)a_4(2)} \right. \\
& \left. + \frac{a_3(8)a_2(6)}{a_4(6)a_4(2)} + \frac{a_4(6)a_1(6)}{a_4(5)a_4(2)} \right] b_4(2) - \left[\frac{a_3(6)a_2(9)}{a_4(6)a_4(1)} + \frac{a_3(6)a_3(5)}{a_4(6)a_4(1)} + \frac{a_3(6)a_2(5)}{a_4(6)a_4(1)} \right. \\
& \left. + \frac{a_2(9)a_3(2)a_4(5)}{a_4(6)a_4(2)a_4(1)} + \frac{a_3(8)a_3(2)a_3(5)}{a_4(6)a_4(2)a_4(1)} + \frac{a_4(6)a_3(2)a_2(5)}{a_4(5)a_4(2)a_4(1)} \right] b_4(1) \\
& + \left[\frac{a_3(6)a_3(8)a_3(1)a_4(4)}{a_4(6)a_4(5)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_3(6)a_3(5)a_3(8)}{a_4(6)a_4(5)a_4(0)} + \frac{a_3(6)a_3(5)a_4(7)a_3(4)}{a_4(6)a_4(5)a_4(4)a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_3(6)a_4(7)a_3(1)a_3(4)}{a_4(6)a_4(5)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_2(6)a_3(8)}{a_4(6)a_4(0)} - \frac{a_2(6)a_4(7)a_3(4)}{a_4(6)a_4(4)a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(8)a_2(2)a_4(4)}{a_4(6)a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_3(8)a_3(1)a_4(4)}{a_4(6)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_4(6)a_3(2)a_3(1)a_3(4)}{a_4(5)a_4(2)a_4(1)a_4(0)} \\
& \left. - \frac{a_4(6)a_2(2)a_3(4)}{a_4(5)a_4(2)a_4(0)} \right] b_4(0) + \left[\frac{a_2(9)a_4(5)}{a_4(6)a_4(2)} + \frac{a_3(8)a_3(5)}{a_4(6)a_4(2)} + \frac{a_4(6)a_2(5)}{a_4(5)a_4(2)} \right] b_3(2) \\
& - \left[\frac{a_3(6)a_3(8)a_4(4)}{a_4(6)a_4(5)a_4(1)} + \frac{a_3(6)a_4(7)a_3(4)}{a_4(6)a_4(5)a_4(1)} + \frac{a_3(6)a_4(7)a_3(4)}{a_4(6)a_4(5)a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_3(8)a_3(2)a_4(4)}{a_4(6)a_4(2)a_4(1)} + \frac{a_4(6)a_3(2)a_3(4)}{a_4(5)a_4(2)a_4(1)} \Big] b_3(1) + \left[\frac{a_3(6)a_3(5)a_4(7)a_4(3)}{a_4(6)a_4(5)a_4(4)a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_2(6)a_4(7)a_4(3)}{a_4(6)a_4(4)a_4(0)} - \frac{a_4(6)a_2(2)a_4(3)}{a_4(5)a_4(2)a_4(0)} \Big] b_3(0) + \left[\frac{a_3(8)a_4(4)}{a_4(6)a_4(2)} \right. \\
& \left. + \frac{a_4(6)a_3(4)}{a_4(5)a_4(2)} \right] b_2(2) + \left[- \frac{a_3(6)a_4(7)a_4(3)}{a_4(6)a_4(5)a_4(1)} + \frac{a_4(6)a_3(2)a_4(3)}{a_4(5)a_4(2)a_4(1)} \right] b_2(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(0) \\
& + \frac{a_4(6) a_4(3)}{a_4(5) a_4(2)} b_1(2) \Big\} - \left[\frac{a_2(7) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_2(5) a_2(7)}{a_4(5) a_4(3)} \right. \\
& - \frac{a_3(5) a_3(4) a_2(7)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_2(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \Big] b_4(3) - \left[\frac{a_1(5) a_3(6)}{a_4(5) a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_2(5) a_3(3) a_3(6)}{a_4(5) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_3(6) a_3(1) a_2(0)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_1(1)}{a_4(5) a_4(1)} \\
& + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(3) a_3(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_3(5) a_2(4) a_3(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(5) a_3(6) a_2(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(5) a_3(6) a_2(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \Big] b_4(2) + \left[\frac{a_0(9) a_4(5)}{a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_0(5) a_4(5)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_1(8) a_3(5)}{a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_1(5) a_3(2) a_4(5)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(7) a_2(5)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(5) a_2(3) a_4(5)}{a_4(5) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_2(5) a_3(2) a_4(5)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \\
& + \frac{a_3(6)}{a_4(5)} + \frac{a_1(5)}{a_4(1)} - \frac{a_3(5) a_3(4) a_2(3) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(1)} - \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(2) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2) a_4(1)} \\
& - \frac{a_3(5) a_2(4) a_3(2) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(5) a_1(4) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_1(0)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_0(5)}{a_4(1)} \\
& - \frac{a_0(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(1) a_1(0)}{a_4(1) a_4(0)} \Big] b_4(1) - \left[\frac{a_1(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_3(6) a_3(1) a_2(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_1(8)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_3(6) a_2(4)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_1(4)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(1) a_1(4)}{a_4(1) a_4(0)} \Big] b_4(0) + \left[\frac{a_2(7) a_3(6)}{a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_3(6) a_3(1) a_3(0)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(5) a_3(6) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \Big] b_3(3) - \left[\frac{a_1(5) a_4(5)}{a_4(5) a_4(2)} \right. \\
& - \frac{a_2(5) a_3(3) a_4(5)}{a_4(5) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(3) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_3(5) a_2(4) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2)} \\
& - \frac{a_3(5) a_4(4) a_2(0)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_1(1)}{a_4(1)} - \frac{a_3(1) a_2(0)}{a_4(1) a_4(0)} \Big] b_3(2) + \left[\frac{a_1(8) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& \left[+ \frac{a_3(6) a_2(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_1(4)}{a_4(1)} \right] b_3(1) - \frac{a_3(6) a_3(1) a_3(3)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(5) a_2(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(5) a_3(6) a_3(3)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(5) a_4(4) a_2(3)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_3(1) a_2(3)}{a_4(1) a_4(0)} \Big] b_3(0) + \left[\frac{a_2(7) a_4(5)}{a_4(5) a_4(3)} \right. \\
& + \frac{a_3(5) a_3(4) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_3(0)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(1) a_3(0)}{a_4(1) a_4(0)} \Big] b_2(3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{a_2(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_3(3)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(3)}{a_4(1)} \right] b_2(1) - \left[\frac{a_2(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. \frac{a_3(5) a_3(6) a_4(2)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_3(2)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_3(1) a_3(2)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(0) \\
& + \left[\frac{a_3(6) a_4(2)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(2)}{a_4(1)} \right] b_1(1) - \left[\frac{a_3(5) a_4(1)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(1) a_4(1)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_1(0) + b_0(1) \\
& = - \left[\frac{a_0(12) a_2(5) a_4(7)}{a_2(9) a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_0(9) a_2(5) a_4(7)}{a_2(9) a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_0(12) a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} \right. \\
& + \frac{a_0(9) a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_0(12) a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_0(9) a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_0(12) a_4(7) a_2(1)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_0(9) a_4(7) a_2(1)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_0(12) a_4(7) a_3(0)}{a_2(9) a_4(5) a_4(0)} \\
& - \frac{a_0(9) a_4(7) a_3(0)}{a_2(9) a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_1(10) a_3(5) a_3(7) a_3(0)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(10) a_3(5) a_3(4) a_3(7)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} \\
& - \frac{a_1(10) a_2(5) a_3(7)}{a_2(9) a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_1(10) a_3(7) a_2(1)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_1(10) a_3(7) a_3(0)}{a_2(9) a_4(5) a_4(0)} \\
& - \frac{a_1(9) a_2(5) a_4(7)}{a_2(9) a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_1(9) a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_1(9) a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& - \frac{a_1(9) a_4(7) a_2(1)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_1(9) a_4(7) a_3(0)}{a_2(9) a_4(5) a_4(0)} - \frac{a_1(9) a_2(6) a_3(4) a_4(7)}{a_2(9) a_4(6) a_4(4) a_4(3)} \\
& - \frac{a_1(9) a_2(6) a_4(7) a_3(0)}{a_2(9) a_4(6) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_1(9) a_1(6) a_4(7)}{a_2(9) a_4(6) a_4(3)} - \frac{a_1(9) a_4(6) a_3(2) a_2(1)}{a_2(9) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \\
& - \frac{a_1(9) a_4(6) a_3(2) a_3(0)}{a_2(9) a_4(5) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_1(9) a_4(6) a_1(2)}{a_2(9) a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_2(7) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} \\
& + \frac{a_2(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_2(5) a_2(7)}{a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_3(4) a_2(7)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_2(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \Big] b_4(3) \\
& + \left[\frac{a_1(10) a_3(5) a_2(4) a_4(6)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(2)} + \frac{a_1(10) a_3(5) a_3(4) a_3(3) a_4(6)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \right. \\
& - \frac{a_1(10) a_3(5) a_4(6) a_2(0)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(10) a_2(5) a_3(3) a_4(6)}{a_2(9) a_4(5) a_4(3) a_4(2)} \\
& - \frac{a_1(10) a_1(5) a_4(6)}{a_2(9) a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_1(10) a_4(5) a_3(1) a_2(0)}{a_2(9) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_1(10) a_4(5) a_1(1)}{a_2(9) a_4(4) a_4(1)} \\
& - \frac{a_1(9) a_1(10)}{a_2(9) a_4(2)} - \frac{a_1(9) a_2(9) a_3(6)}{a_2(9) a_4(6) a_4(2)} - \frac{a_1(9) a_3(8) a_2(6)}{a_2(9) a_4(6) a_4(2)} - \frac{a_1(9) a_4(6) a_1(6)}{a_2(9) a_4(5) a_4(2)} \\
& - \frac{a_1(5) a_3(6)}{a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_2(5) a_3(3) a_3(6)}{a_4(5) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_3(6) a_3(1) a_2(0)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_1(1)}{a_4(5) a_4(1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(3) a_3(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_3(5) a_2(4) a_3(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(5) a_3(6) a_2(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(5) a_3(6) a_2(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \Big] b_4(2) + \left[\frac{a_0(12) a_2(9)}{a_2(9) a_4(1)} - \frac{a_0(9) a_2(9)}{a_2(9) a_4(1)} + \frac{a_0(12) a_3(8) a_3(5)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& - \frac{a_0(9) a_3(8) a_3(5)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_0(12) a_4(7) a_2(5)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_0(9) a_4(7) a_2(5)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_1(10) a_1(9)}{a_2(9) a_4(1)} \\
& + \frac{a_1(10) a_2(8) a_3(5)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_1(10) a_3(7) a_2(5)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_1(10) a_4(5) a_1(5)}{a_2(9) a_4(4) a_4(1)} \\
& + \frac{a_1(9) a_3(6) a_2(9)}{a_2(9) a_4(6) a_4(1)} + \frac{a_1(9) a_3(6) a_3(5)}{a_2(9) a_4(6) a_4(1)} + \frac{a_1(9) a_3(6) a_2(5)}{a_2(9) a_4(6) a_4(1)} \\
& + \frac{a_1(9) a_2(9) a_3(2) a_4(5)}{a_2(9) a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_1(9) a_3(8) a_3(2) a_3(5)}{a_2(9) a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_1(9) a_4(6) a_3(2) a_2(5)}{a_2(9) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \\
& + \frac{a_0(9) a_4(5)}{a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_0(5) a_4(5)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_1(8) a_3(5)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_1(5) a_3(2) a_4(5)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(7) a_2(5)}{a_4(5) a_4(1)} \\
& + \frac{a_2(5) a_2(3) a_4(5)}{a_4(5) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_2(5) a_3(2) a_4(5)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(6)}{a_4(5)} + \frac{a_1(5)}{a_4(1)} \\
& - \frac{a_3(5) a_3(4) a_2(3) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(1)} - \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(2) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2) a_4(1)} \\
& - \frac{a_3(5) a_2(4) a_3(2) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(5) a_1(4) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_1(0)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_0(5)}{a_4(1)} \\
& - \frac{a_0(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(1) a_1(0)}{a_4(1) a_4(0)} \Big] b_4(1) - \left[\frac{a_0(12) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_0(9) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_0(12) a_3(5) a_3(8)}{a_2(9) a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_0(9) a_3(5) a_3(8)}{a_2(9) a_4(5) a_4(0)} \\
& - \frac{a_0(12) a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_0(9) a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& - \frac{a_0(12) a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_0(9) a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_1(10) a_3(5) a_2(8)}{a_2(9) a_4(5) a_4(0)} \\
& - \frac{a_1(10) a_3(5) a_3(7) a_3(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_1(10) a_3(5) a_4(6) a_2(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& - \frac{a_1(10) a_2(8) a_3(1) a_4(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_1(10) a_3(7) a_3(1) a_3(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_1(10) a_4(5) a_3(1) a_2(4)}{a_2(9) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_1(9) a_3(6) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_2(9) a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_1(9) a_3(6) a_3(5) a_3(8)}{a_2(9) a_4(6) a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_1(9) a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_2(9) a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_1(9) a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_2(9) a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_1(9) a_2(6) a_3(8)}{a_2(9) a_4(6) a_4(0)} - \frac{a_1(9) a_2(6) a_4(7) a_3(4)}{a_2(9) a_4(6) a_4(4) a_4(0)} \\
& - \frac{a_1(9) a_3(8) a_2(2) a_4(4)}{a_2(9) a_4(6) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_1(9) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_2(9) a_4(6) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_1(9) a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_1(9) a_4(6) a_2(2) a_3(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(2) a_4(0)} \\
& - \frac{a_1(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_3(1) a_2(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(5) a_1(8)}{a_4(5) a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(5) a_3(6) a_2(4)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(5) a_4(4) a_1(4)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_3(1) a_1(4)}{a_4(1) a_4(0)} \\
& - \frac{a_1(10) a_3(5) a_3(4) a_4(6)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_1(10) a_3(5) a_4(6) a_3(0)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(10) a_2(5) a_4(6)}{a_2(9) a_4(5) a_4(3)} \\
& - \frac{a_1(10) a_4(5) a_3(1) a_3(0)}{a_2(9) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_1(10) a_4(5) a_2(1)}{a_2(9) a_4(4) a_4(1)} \Big] b_4(0) \\
& + \left[\frac{a_2(7) a_3(6)}{a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_3(6) a_3(1) a_3(0)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} \right. \\
& + \left. \frac{a_3(5) a_3(6) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right] b_3(3) - \left[\frac{a_1(9) a_2(9) a_4(5)}{a_2(9) a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_1(9) a_3(8) a_3(5)}{a_2(9) a_4(6) a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_1(9) a_4(6) a_2(5)}{a_2(9) a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_1(5) a_4(5)}{a_4(5) a_4(2)} - \frac{a_2(5) a_3(3) a_4(5)}{a_4(5) a_4(3) a_4(2)} \\
& + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(3) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_3(5) a_2(4) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(5) a_4(4) a_2(0)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} \\
& + \left. \frac{a_1(1)}{a_4(1)} - \frac{a_3(1) a_2(0)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_3(2) + \left[\frac{a_0(12) a_3(8) a_4(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_0(9) a_3(8) a_4(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_0(12) a_4(7) a_3(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_0(9) a_4(7) a_3(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_1(10) a_2(8) a_4(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} \\
& + \frac{a_1(10) a_3(7) a_3(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_1(10) a_4(5) a_2(4)}{a_2(9) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_1(9) a_3(6) a_3(8) a_4(4)}{a_2(9) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \\
& + \frac{a_1(9) a_3(6) a_4(7) a_3(4)}{a_2(9) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_1(9) a_3(8) a_3(2) a_4(4)}{a_2(9) a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \\
& + \frac{a_1(9) a_4(6) a_3(2) a_3(4)}{a_2(9) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_1(8) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_2(4)}{a_4(5) a_4(1)} \\
& + \left. \frac{a_1(4)}{a_4(1)} \right] b_3(1) - \left[\frac{a_0(12) a_3(5) a_4(7) a_4(3)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_0(9) a_3(5) a_4(7) a_4(3)}{a_2(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_1(10) a_4(5) a_3(1) a_3(3)}{a_2(9) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(1) a_3(3)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_2(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_3(5) a_3(6) a_3(3)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_2(3)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_3(1) a_2(3)}{a_4(1) a_4(0)} \Big] b_3(0) \\
& + \left[\frac{a_2(7) a_4(5)}{a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_3(5) a_3(4) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_3(0)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} \right. \\
& + \left. \frac{a_3(1) a_3(0)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(3) - \left[\frac{a_1(9) a_3(8) a_4(4)}{a_2(9) a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_4(6) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2)} \right] b_2(2) \\
& + \left[\frac{a_0(12) a_4(7) a_4(3)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_0(9) a_4(7) a_4(3)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_1(10) a_3(7) a_4(3)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_1(9) a_3(6) a_4(7) a_4(3)}{a_2(9) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_1(9) a_4(6) a_3(2) a_4(3)}{a_2(9) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1)} \\
& + \left. \frac{a_3(6) a_3(3)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(3)}{a_4(1)} \right] b_2(1) + \left[\frac{a_0(12) a_4(7) a_3(1) a_4(3)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_0(9) a_4(7) a_3(1) a_4(3)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_1(10) a_3(5) a_4(2)}{a_2(9) a_4(5) a_4(0)} \\
& - \frac{a_1(10) a_3(7) a_3(1) a_4(3)}{a_2(9) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_1(9) a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_4(3)}{a_2(9) a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_1(9) a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_2(9) a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(5) a_3(6) a_4(2)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(5) a_4(4) a_3(2)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} \\
& - \left. \frac{a_3(1) a_3(2)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(0) - \frac{a_1(9) a_4(6) a_4(3)}{a_2(9) a_4(5) a_4(2)} b_1(2) + \left[\frac{a_1(10) a_4(5) a_4(2)}{a_2(9) a_4(4) a_4(1)} \right. \\
& + \left. \frac{a_3(6) a_4(2)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(2)}{a_4(1)} \right] b_1(1) - \left[\frac{a_3(5) a_4(1)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(1) a_4(1)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_1(0) + b_0(1)
\end{aligned}$$

bulunur.

Denklem (4.12)'den

$$b_0(k+1) = \left[\frac{a_0(k+1)}{a_1(k)} - \frac{a_0(k)}{a_1(k)} \right] b_1(k) + b_0(k);$$

$k = 0$

$$b_0(1) = \left[\frac{a_0(1)}{a_1(0)} - \frac{a_0(0)}{a_1(0)} \right] b_1(0) + b_0(0),$$

$k = 1$

$$b_0(2) = \left[\frac{a_0(2)}{a_1(1)} - \frac{a_0(1)}{a_1(1)} \right] b_1(1) + b_0(1),$$

$k = 2$

$$b_0(3) = \left[\frac{a_0(3)}{a_1(2)} - \frac{a_0(2)}{a_1(2)} \right] b_1(2) + b_0(2),$$

$k = 3$

$$b_0(4) = \left[\frac{a_0(4)}{a_1(3)} - \frac{a_0(3)}{a_1(3)} \right] b_1(3) + b_0(3),$$

$k = 4$

$$\begin{aligned}
b_0(5) &= \left[\frac{a_0(5)}{a_1(4)} - \frac{a_0(4)}{a_1(4)} \right] b_1(4) + b_0(4) \\
&= \left[\frac{a_0(5)}{a_1(4)} - \frac{a_0(4)}{a_1(4)} \right] \left[\frac{a_1(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \frac{a_1(0)}{a_4(0)} b_4(1) + \frac{a_2(3)}{a_4(0)} b_3(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_3(2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_3(2)}{a_4(0)} b_2(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_2(3) + \frac{a_4(1)}{a_4(0)} b_1(0) \right] + \left[\frac{a_0(4)}{a_4(0)} - \frac{a_0(0)}{a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_1(3)}{a_4(0)} b_3(0) \\
&\quad - \frac{a_1(0)}{a_4(0)} b_3(1) \\
&\quad + \frac{a_2(2)}{a_4(0)} b_2(0) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_2(2) + \frac{a_3(1)}{a_4(0)} b_1(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_1(3) + b_0(0) \\
&= - \left[\frac{a_0(5)}{a_1(4)} \frac{a_1(0)}{a_4(0)} - \frac{a_0(4)}{a_1(4)} \frac{a_1(0)}{a_4(0)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_0(5)}{a_4(0)} - \frac{a_0(0)}{a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_0(5)}{a_1(4)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_0(4)}{a_1(4)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \right] b_3(2) - \frac{a_1(0)}{a_4(0)} b_3(1) + \left[\frac{a_0(5)}{a_1(4)} \frac{a_2(3)}{a_4(0)} - \frac{a_0(4)}{a_1(4)} \frac{a_2(3)}{a_4(0)} + \frac{a_1(3)}{a_4(0)} \right] b_3(0) \\
&\quad - \left[\frac{a_0(5)}{a_1(4)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} - \frac{a_0(4)}{a_1(4)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_2(3) - \frac{a_2(0)}{a_4(0)} b_2(2) + \left[\frac{a_0(5)}{a_1(4)} \frac{a_3(2)}{a_4(0)} - \frac{a_0(4)}{a_1(4)} \frac{a_3(2)}{a_4(0)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_2(2)}{a_4(0)} \right] b_2(0) - \frac{a_3(0)}{a_4(0)} b_1(3) + \left[\frac{a_0(5)}{a_1(4)} \frac{a_4(1)}{a_4(0)} - \frac{a_0(4)}{a_1(4)} \frac{a_4(1)}{a_4(0)} + \frac{a_3(1)}{a_4(0)} \right] b_1(0) \\
&\quad + b_0(0),
\end{aligned}$$

$k = 5$

$$\begin{aligned}
b_0(6) &= \left[\frac{a_0(6)}{a_1(5)} - \frac{a_0(5)}{a_1(5)} \right] b_1(5) + b_0(5) \\
&= \left[\frac{a_0(6)}{a_1(5)} - \frac{a_0(5)}{a_1(5)} \right] \left\{ \left[\frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(0)}{a_4(0)} - \frac{a_1(1)}{a_4(1)} \right] b_4(2) + \frac{a_1(5)}{a_4(1)} b_4(1) \right. \\
&\quad - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_2(4)}{a_4(0)} b_4(0) + \left[\frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(0)}{a_4(0)} - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} \right] b_3(3) + \frac{a_2(4)}{a_4(1)} b_3(1) \\
&\quad \left. - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_3(3)}{a_4(0)} b_3(0) + \frac{a_3(3)}{a_4(1)} b_2(1) + \frac{a_4(2)}{a_4(1)} b_1(1) \right\} \\
&\quad + \left[\frac{a_0(5)}{a_4(1)} - \frac{a_0(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_1(0)}{a_4(0)} \right] b_4(1) - \frac{a_3(1)}{a_4(1)} \frac{a_1(4)}{a_4(0)} b_4(0) - \left[\frac{a_1(1)}{a_4(1)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_3(1)a_2(0)}{a_4(1)a_4(0)}\Big]b_3(2) + \frac{a_1(4)}{a_4(1)}b_3(1) - \frac{a_3(1)a_2(3)}{a_4(1)a_4(0)}b_3(0) - \left[\frac{a_1(1)}{a_4(1)}\right. \\
& -\frac{a_3(1)a_2(0)}{a_4(1)a_4(0)}\Big]b_2(3) + \frac{a_2(3)}{a_4(1)}b_2(1) - \frac{a_3(1)a_3(2)}{a_4(1)a_4(0)}b_2(0) + \frac{a_3(2)}{a_4(1)}b_1(1) \\
& \quad - \frac{a_3(1)a_4(1)}{a_4(1)a_4(0)}b_1(0) + b_0(1) \\
& = \left[\frac{a_0(6)a_3(1)a_2(0)}{a_1(5)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_0(5)a_3(1)a_2(0)}{a_1(5)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_0(6)a_1(1)}{a_1(5)a_4(1)} + \frac{a_0(5)a_1(1)}{a_1(5)a_4(1)}\right]b_4(2) \\
& \quad + \left[\frac{a_0(6)a_1(5)}{a_1(5)a_4(1)} - \frac{a_0(5)a_1(5)}{a_1(5)a_4(1)} + \frac{a_0(5)}{a_4(1)} - \frac{a_0(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(1)a_1(0)}{a_4(1)a_4(0)}\right]b_4(1) \\
& \quad - \left[\frac{a_0(6)a_3(1)a_2(4)}{a_1(5)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_0(5)a_3(1)a_2(4)}{a_1(5)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_3(1)a_1(4)}{a_4(1)a_4(0)}\right]b_4(0) \\
& \quad + \left[\frac{a_0(6)a_3(1)a_3(0)}{a_1(5)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_0(5)a_3(1)a_3(0)}{a_1(5)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_0(6)a_2(1)}{a_1(5)a_4(1)} + \frac{a_0(5)a_2(1)}{a_1(5)a_4(1)}\right]b_3(3) \\
& \quad - \left[\frac{a_1(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(1)a_2(0)}{a_4(1)a_4(0)}\right]b_3(2) + \left[\frac{a_0(6)a_2(4)}{a_1(5)a_4(1)} - \frac{a_0(5)a_2(4)}{a_1(5)a_4(1)} + \frac{a_1(4)}{a_4(1)}\right]b_3(1) \\
& \quad - \left[\frac{a_0(6)a_3(1)a_3(3)}{a_1(5)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_0(5)a_3(1)a_3(3)}{a_1(5)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_3(1)a_2(3)}{a_4(1)a_4(0)}\right]b_3(0) \\
& \quad - \left[\frac{a_1(1)}{a_4(1)} - \frac{a_3(1)a_2(0)}{a_4(1)a_4(0)}\right]b_2(3) + \left[\frac{a_0(6)a_3(3)}{a_1(5)a_4(1)} - \frac{a_0(5)a_3(3)}{a_1(5)a_4(1)}\right. \\
& \quad \left. + \frac{a_2(3)}{a_4(1)}\right]b_2(1) - \frac{a_3(1)a_3(2)}{a_4(1)a_4(0)}b_2(0) + \left[\frac{a_0(6)a_4(2)}{a_1(5)a_4(1)} - \frac{a_0(5)a_4(2)}{a_1(5)a_4(1)} + \frac{a_3(2)}{a_4(1)}\right]b_1(1) \\
& \quad - \frac{a_3(1)a_4(1)}{a_4(1)a_4(0)}b_1(0) + b_0(1),
\end{aligned}$$

$k = 6$

$$\begin{aligned}
b_0(7) &= \left[\frac{a_0(7)}{a_1(6)} - \frac{a_0(6)}{a_1(6)}\right]b_1(6) + b_0(6) \\
&= \left[\frac{a_0(7)}{a_1(6)} - \frac{a_0(6)}{a_1(6)}\right]\left\{\left[\frac{a_3(2)a_2(1)}{a_4(2)a_4(1)} + \frac{a_3(2)a_3(0)}{a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_2(2)a_3(0)}{a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_1(2)}{a_4(2)}\right]b_4(3)\right. \\
& \quad + \frac{a_1(6)}{a_4(2)}b_4(2) - \frac{a_3(2)a_2(5)}{a_4(2)a_4(1)}b_4(1) + \left[\frac{a_3(2)a_3(1)a_3(4)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_2(2)a_3(4)}{a_4(2)a_4(0)}\right]b_4(0) \\
& \quad + \frac{a_2(5)}{a_4(2)}b_3(2) - \frac{a_3(2)a_3(4)}{a_4(2)a_4(1)}b_3(1) - \frac{a_2(2)a_4(3)}{a_4(2)a_4(0)}b_3(0) + \frac{a_3(4)}{a_4(2)}b_2(2) \\
& \quad \left. - \frac{a_3(2)a_4(3)}{a_4(2)a_4(1)}b_2(1) + \frac{a_3(2)a_3(1)a_4(3)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)}b_2(0) + \frac{a_4(3)}{a_4(2)}b_1(2)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{a_0(6)}{a_4(2)} - \frac{a_0(2)}{a_4(2)} + \frac{a_2(2)a_2(0)}{a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_3(2)a_3(1)a_2(0)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_3(2)a_1(1)}{a_4(2)a_4(1)} \right] b_4(2) \\
& - \frac{a_3(2)a_1(5)}{a_4(2)a_4(1)} b_4(1) - \left[\frac{a_2(2)a_2(4)}{a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_3(2)a_3(1)a_2(4)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} \right] b_4(0) \\
& - \left[\frac{a_1(2)}{a_4(2)} - \frac{a_2(2)a_3(0)}{a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_3(2)a_3(1)a_3(0)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_3(2)a_2(1)}{a_4(2)a_4(1)} \right] b_3(3) \\
& + \frac{a_1(5)}{a_4(2)} b_3(2) - \frac{a_3(2)a_2(4)}{a_4(2)a_4(1)} b_3(1) - \left[\frac{a_2(2)a_3(3)}{a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_3(2)a_3(1)a_3(3)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} \right] b_3(0) \\
& + \frac{a_2(4)}{a_4(2)} b_2(2) - \frac{a_3(2)a_3(3)}{a_4(2)a_4(1)} b_2(1) - \frac{a_2(2)a_4(2)}{a_4(2)a_4(0)} b_2(0) + \frac{a_3(3)}{a_4(2)} b_1(2) \\
& = \left[\frac{a_0(7)a_3(2)a_2(1)}{a_1(6)a_4(2)a_4(1)} - \frac{a_0(6)a_3(2)a_2(1)}{a_1(6)a_4(2)a_4(1)} + \frac{a_0(7)a_3(2)a_3(0)}{a_1(6)a_4(2)a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_0(6)a_3(2)a_3(0)}{a_1(6)a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_0(7)a_2(2)a_3(0)}{a_1(6)a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_0(6)a_2(2)a_3(0)}{a_1(6)a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_0(7)a_1(2)}{a_1(6)a_4(2)} \\
& \left. + \frac{a_0(6)a_1(2)}{a_1(6)a_4(2)} \right] b_4(3) + \left[\frac{a_0(7)a_1(6)}{a_1(6)a_4(2)} - \frac{a_0(6)a_1(6)}{a_1(6)a_4(2)} + \frac{a_0(6)}{a_4(2)} - \frac{a_0(2)}{a_4(2)} \right. \\
& \left. + \frac{a_2(2)a_2(0)}{a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_3(2)a_3(1)a_2(0)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_3(2)a_1(1)}{a_4(2)a_4(1)} \right] b_4(2) \\
& - \left[\frac{a_0(7)a_3(2)a_2(5)}{a_1(6)a_4(2)a_4(1)} - \frac{a_0(6)a_3(2)a_2(5)}{a_1(6)a_4(2)a_4(1)} + \frac{a_3(2)a_1(5)}{a_4(2)a_4(1)} \right] b_4(1) \\
& + \left[\frac{a_0(7)a_3(2)a_3(1)a_3(4)}{a_1(6)a_4(2)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_0(6)a_3(2)a_3(1)a_3(4)}{a_1(6)a_4(2)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_0(7)a_2(2)a_3(4)}{a_1(6)a_4(2)a_4(0)} \right. \\
& \left. + \frac{a_0(6)a_2(2)a_3(4)}{a_1(6)a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_2(2)a_2(4)}{a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_3(2)a_3(1)a_2(4)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_1(2)}{a_4(2)} \right. \\
& - \frac{a_2(2)a_3(0)}{a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_3(2)a_3(1)a_3(0)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_3(2)a_2(1)}{a_4(2)a_4(1)} \left. \right] b_3(3) + \left[\frac{a_0(7)a_2(5)}{a_1(6)a_4(2)} \right. \\
& - \frac{a_0(6)a_2(5)}{a_1(6)a_4(2)} + \frac{a_1(5)}{a_4(2)} \left. \right] b_3(2) - \left[\frac{a_0(7)a_3(2)a_3(4)}{a_1(6)a_4(2)a_4(1)} - \frac{a_0(6)a_3(2)a_3(4)}{a_1(6)a_4(2)a_4(1)} \right. \\
& \left. + \frac{a_3(2)a_2(4)}{a_4(2)a_4(1)} \right] b_3(1) - \left[\frac{a_0(7)a_2(2)a_4(3)}{a_1(6)a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_0(6)a_2(2)a_4(3)}{a_1(6)a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_2(2)a_3(3)}{a_4(2)a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_3(2)a_3(1)a_3(3)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} \left. \right] b_3(0) + \left[\frac{a_0(7)a_3(4)}{a_1(6)a_4(2)} - \frac{a_0(6)a_3(4)}{a_1(6)a_4(2)} + \frac{a_2(4)}{a_4(2)} \right] b_2(2) \\
& - \left[\frac{a_0(7)a_3(2)a_4(3)}{a_1(6)a_4(2)a_4(1)} - \frac{a_0(6)a_3(2)a_4(3)}{a_1(6)a_4(2)a_4(1)} + \frac{a_3(2)a_3(3)}{a_4(2)a_4(1)} \right] b_2(1) \\
& + \left[\frac{a_0(7)a_3(2)a_3(1)a_4(3)}{a_1(6)a_4(2)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_0(6)a_3(2)a_3(1)a_4(3)}{a_1(6)a_4(2)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_2(2)a_4(2)}{a_4(2)a_4(0)} \right] b_2(0)
\end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{a_0(7) a_4(3)}{a_1(6) a_4(2)} - \frac{a_0(6) a_4(3)}{a_1(6) a_4(2)} + \frac{a_3(3)}{a_4(2)} \right] b_1(2) - \frac{a_3(2) a_4(2)}{a_4(2) a_4(1)} b_1(1) \\ + b_0(2),$$

$k = 7$

$$b_0(8) = \left[\frac{a_0(8)}{a_1(7)} - \frac{a_0(7)}{a_1(7)} \right] b_1(7) + b_0(7) \\ = \left[\frac{a_0(8)}{a_1(7)} - \frac{a_0(7)}{a_1(7)} \right] \left\{ \frac{a_1(7)}{a_4(3)} b_4(3) - \left[\frac{a_3(3) a_2(6)}{a_4(3) a_4(2)} \right] b_4(2) + \left[\frac{a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{a_2(3) a_3(5)}{a_4(3) a_4(1)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_1(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_2(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3) a_3(5)}{a_4(3) a_4(2)} b_3(2) \right. \\ \left. + \left[\frac{a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_2(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(1)} \right] b_3(1) + \frac{a_3(5)}{a_4(3)} b_2(3) - \frac{a_3(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2)} b_2(2) \right. \\ \left. + \frac{a_4(3)}{a_4(2)} b_1(3) \right\} + \left[\frac{a_0(7)}{a_4(3)} - \frac{a_0(3)}{a_4(3)} + \frac{a_1(3) a_3(0)}{a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_2(3) a_2(1)}{a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_3(1) a_3(0)}{a_4(1) a_4(0)} \right. \\ \left. - \frac{a_3(3) a_3(2) a_2(1)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(0)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(3) a_2(2) a_3(0)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} \right. \\ \left. - \frac{a_3(3) a_1(2)}{a_4(3) a_4(2)} \right] b_4(3) + \frac{a_1(6)}{a_4(2)} b_4(2) - \left[\frac{a_2(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(1)} - \frac{a_3(3) a_3(2) a_2(5)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(1) \\ - \left[\frac{a_1(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_2(3) a_3(1) a_3(4)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right. \\ \left. - \frac{a_2(2) a_3(4)}{a_4(2) a_4(0)} \right] b_4(0) + \frac{a_1(6)}{a_4(3)} b_3(3) - \frac{a_3(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(2)} b_3(2) - \left[\frac{a_2(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(1)} \right. \\ \left. + \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right] b_3(1) - \left[\frac{a_1(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_3(3) a_2(2) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(0)} \right] b_3(0) \\ - \frac{a_1(3) a_2(5)}{a_4(3) a_4(3)} b_2(3) - \frac{a_3(3) a_3(4)}{a_4(3) a_4(2)} b_2(2) - \left[\frac{a_2(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(1)} \right. \\ \left. - \frac{a_3(3) a_3(2) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1)} \right] b_2(1) - \left[\frac{a_2(3) a_3(1) a_4(3)}{a_4(3) a_4(1) a_4(0)} \right. \\ \left. + \frac{a_3(3) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(0) + \frac{a_3(4)}{a_4(3)} b_1(3) - \frac{a_3(3) a_4(3)}{a_4(3) a_4(2)} b_1(2) \\ + b_0(3) \\ = \left[\frac{a_0(8) a_1(7)}{a_1(7) a_4(3)} - \frac{a_0(7) a_1(7)}{a_1(7) a_4(3)} + \frac{a_0(7)}{a_4(3)} - \frac{a_0(3)}{a_4(3)} + \frac{a_1(3) a_3(0)}{a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_2(3) a_2(1)}{a_4(3) a_4(1)} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_3(1)a_3(0)}{a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_3(3)a_3(2)a_2(1)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)} - \frac{a_3(3)a_3(2)a_3(0)}{a_4(3)a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_3(3)a_2(2)a_3(0)}{a_4(3)a_4(2)a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(3)a_1(2)}{a_4(3)a_4(2)} \Big] b_4(3) - \left[\frac{a_0(8)a_3(3)a_2(6)}{a_1(7)a_4(3)a_4(2)} + \frac{a_0(7)a_3(3)a_2(6)}{a_1(7)a_4(3)a_4(2)} - \frac{a_1(6)}{a_4(2)} \right] b_4(2) \\
& + \left[\frac{a_0(8)a_3(3)a_3(2)a_3(5)}{a_1(7)a_4(3)a_4(2)a_4(1)} - \frac{a_2(3)a_3(5)}{a_4(3)a_4(1)} - \frac{a_0(7)a_3(3)a_3(2)a_3(5)}{a_1(7)a_4(3)a_4(2)a_4(1)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_2(3)a_3(5)}{a_4(3)a_4(1)} - \frac{a_2(3)a_2(5)}{a_4(3)a_4(1)} + \frac{a_3(3)a_3(2)a_2(5)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)} \right] b_4(1) \\
& + \left[\frac{a_0(8)a_3(3)a_2(2)a_4(4)}{a_1(7)a_4(3)a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_0(7)a_3(3)a_2(2)a_4(4)}{a_1(7)a_4(3)a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_0(8)a_3(3)a_3(1)a_4(4)}{a_1(7)a_4(3)a_4(1)a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_0(7)a_3(3)a_3(1)a_4(4)}{a_1(7)a_4(3)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_0(8)a_2(3)a_3(1)a_4(4)}{a_1(7)a_4(3)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_0(7)a_2(3)a_3(1)a_4(4)}{a_1(7)a_4(3)a_4(1)a_4(0)} \\
& \quad - \frac{a_0(8)a_1(3)a_4(4)}{a_1(7)a_4(3)a_4(0)} + \frac{a_0(7)a_1(3)a_4(4)}{a_1(7)a_4(3)a_4(0)} - \frac{a_1(3)a_3(4)}{a_4(3)a_4(0)} \\
& \quad \left. + \frac{a_2(3)a_3(1)a_3(4)}{a_4(3)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_3(3)a_3(2)a_3(1)a_3(4)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_2(2)a_3(4)}{a_4(2)a_4(0)} \right] b_4(0) \\
& + \left[\frac{a_0(8)a_2(6)}{a_1(7)a_4(3)} - \frac{a_0(7)a_2(6)}{a_1(7)a_4(3)} \right] b_3(3) - \left[\frac{a_0(8)a_3(3)a_3(5)}{a_1(7)a_4(3)a_4(2)} + \frac{a_0(7)a_3(3)a_3(5)}{a_1(7)a_4(3)a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_3(3)a_2(5)}{a_4(3)a_4(2)} \Big] b_3(2) + \left[\frac{a_0(8)a_3(3)a_3(2)a_4(4)}{a_1(7)a_4(3)a_4(2)a_4(1)} - \frac{a_0(7)a_3(3)a_3(2)a_4(4)}{a_1(7)a_4(3)a_4(2)a_4(1)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_0(8)a_2(3)a_4(4)}{a_1(7)a_4(3)a_4(1)} + \frac{a_0(7)a_2(3)a_4(4)}{a_1(7)a_4(3)a_4(1)} - \frac{a_2(3)a_3(4)}{a_4(3)a_4(1)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_3(3)a_3(2)a_3(4)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)} \right] b_3(1) - \left[\frac{a_1(3)a_4(3)}{a_4(3)a_4(0)} - \frac{a_3(3)a_2(2)a_4(3)}{a_4(3)a_4(2)a_4(0)} \right] b_3(0) \\
& + \left[\frac{a_0(8)a_3(5)}{a_1(7)a_4(3)} - \frac{a_0(7)a_3(5)}{a_1(7)a_4(3)} - \frac{a_1(3)a_2(5)}{a_4(3)a_4(3)} \right] b_2(3) - \left[\frac{a_0(8)a_3(3)a_4(4)}{a_1(7)a_4(3)a_4(2)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_0(7)a_3(3)a_4(4)}{a_1(7)a_4(3)a_4(2)} + \frac{a_3(3)a_3(4)}{a_4(3)a_4(2)} \right] b_2(2) - \left[\frac{a_2(3)a_4(3)}{a_4(3)a_4(1)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_3(3)a_3(2)a_4(3)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)} \right] b_2(1) + \left[\frac{a_0(8)a_4(3)}{a_1(7)a_4(2)} - \frac{a_0(7)a_4(3)}{a_1(7)a_4(2)} + \frac{a_3(4)}{a_4(3)} \right] b_1(3) \\
& - \left[\frac{a_2(3)a_3(1)a_4(3)}{a_4(3)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_3(3)a_3(2)a_3(1)a_4(3)}{a_4(3)a_4(2)a_4(1)a_4(0)} \right] b_2(0) - \frac{a_3(3)a_4(3)}{a_4(3)a_4(2)} b_1(2) \\
& + b_0(3),
\end{aligned}$$

$k = 8$

$$b_0(9) = \left[\frac{a_0(9)}{a_1(8)} - \frac{a_0(8)}{a_1(8)} \right] b_1(8) + b_0(8)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{a_0(9)}{a_1(8)} - \frac{a_0(8)}{a_1(8)} \right] \left\{ - \left[\frac{a_3(4) a_2(7)}{a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_2(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \right] b_4(3) + \left[\frac{a_3(4) a_3(3) a_3(6)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \right. \right. \\
&\quad - \frac{a_2(4) a_3(6)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} \left. \right] b_4(2) + \left[\frac{a_3(4) a_2(3) a_4(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1)} \right. \\
&\quad + \frac{a_3(4) a_3(2) a_4(5)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(4) a_3(2) a_4(5)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_1(4) a_4(5)}{a_4(4) a_4(1)} - \frac{a_4(4) a_1(0)}{a_4(3) a_4(0)} \left. \right] b_4(1) \\
&\quad + \left[\frac{a_1(8)}{a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_2(4)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(4) a_1(4)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_3(4) a_3(6)}{a_4(4) a_4(3)} \right. \\
&\quad + \frac{a_3(6) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} \left. \right] b_3(3) + \left[\frac{a_3(4) a_3(3) a_4(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_2(4) a_4(5)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_4(4) a_2(0)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_3(2) \\
&\quad + \left[\frac{a_2(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(4) a_2(3)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_3(0) - \left[\frac{a_3(4) a_4(5)}{a_4(4) a_4(3)} \right. \\
&\quad + \frac{a_4(4) a_3(0)}{a_4(3) a_4(0)} \left. \right] b_2(3) + \left[\frac{a_3(6) a_4(2)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_4(4) a_3(2)}{a_4(3) a_4(0)} \right] b_2(0) + \frac{a_4(1)}{a_4(0)} b_1(0) \left. \right\} \\
&\quad - \left[\frac{a_1(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_1(7)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_4(3) - \left[\frac{a_2(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(4) a_2(6)}{a_4(4) a_4(2)} \right. \\
&\quad - \frac{a_3(4) a_3(3) a_2(6)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \left. \right] b_4(2) - \left[\frac{a_1(4) a_3(5)}{a_4(4) a_4(1)} - \frac{a_2(4) a_3(2) a_3(5)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} \right. \\
&\quad + \frac{a_3(5) a_1(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_3(4) a_2(3) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1)} \left. \right] b_4(1) + \left[\frac{a_0(8)}{a_4(0)} \right. \\
&\quad - \frac{a_0(4)}{a_4(0)} + \frac{a_1(7) a_3(4)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(4) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_2(4)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(4) a_2(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(2) a_4(0)} \\
&\quad + \frac{a_2(4) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_1(4)}{a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(4) a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(0)} \\
&\quad + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(4) a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_1(3) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(0)} \\
&\quad + \frac{a_0(4)}{a_4(0)} - \frac{a_0(0)}{a_4(0)} \left. \right] b_4(0) - \left[\frac{a_2(6) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_2(6)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_3(3) - \left[\frac{a_2(4) a_3(5)}{a_4(4) a_4(2)} \right. \\
&\quad + \frac{a_3(5) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \left. \right] b_3(2) - \left[\frac{a_1(4) a_4(4)}{a_4(4) a_4(1)} \right. \\
&\quad - \frac{a_2(4) a_3(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_3(4) a_2(3) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1)} \left. \right] \\
&\quad + \frac{a_1(0)}{a_4(0)} \left. \right] b_3(1) + \left[\frac{a_1(7) a_4(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_3(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_2(3)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(3)}{a_4(0)} \right] b_3(0) \\
&\quad - \left[\frac{a_3(5) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_2(3) - \left[\frac{a_2(4) a_4(4)}{a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(3) a_4(4)}{a_4(3) a_4(2)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \Big] b_2(2) + \left[\frac{a_2(6) a_4(2)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_3(2)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(2)}{a_4(0)} \right] b_2(0) \\
& - \left[\frac{a_3(4) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \right] b_1(3) + \left[\frac{a_3(5) a_4(1)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(1)}{a_4(0)} \right] b_1(0) \\
& + b_0(0) \\
& = - \left[\frac{a_0(9) a_3(4) a_2(7)}{a_1(8) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_0(8) a_3(4) a_2(7)}{a_1(8) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_0(9) a_2(7) a_3(0)}{a_1(8) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_0(8) a_2(7) a_3(0)}{a_1(8) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(7) a_3(0)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_1(7)}{a_4(4) a_4(3)} \right] b_4(3) \\
& + \left[\frac{a_0(9) a_3(4) a_3(3) a_3(6)}{a_1(8) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_0(8) a_3(4) a_3(3) a_3(6)}{a_1(8) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_0(9) a_2(4) a_3(6)}{a_1(8) a_4(4) a_4(2)} \right. \\
& \quad + \frac{a_0(8) a_2(4) a_3(6)}{a_1(8) a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_0(9) a_3(6) a_2(0)}{a_1(8) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_0(8) a_3(6) a_2(0)}{a_1(8) a_4(4) a_4(0)} \\
& \quad + \frac{a_0(9) a_3(6) a_2(0)}{a_1(8) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_0(8) a_3(6) a_2(0)}{a_1(8) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_2(0)}{a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(4) a_2(6)}{a_4(4) a_4(2)} \\
& \quad \left. + \frac{a_3(4) a_3(3) a_2(6)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \right] b_4(2) + \left[\frac{a_0(9) a_3(4) a_2(3) a_4(5)}{a_1(8) a_4(4) a_4(3) a_4(1)} - \frac{a_0(8) a_3(4) a_2(3) a_4(5)}{a_1(8) a_4(4) a_4(3) a_4(1)} \right. \\
& \quad + \frac{a_0(9) a_3(4) a_3(2) a_4(5)}{a_1(8) a_4(4) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_0(8) a_3(4) a_3(2) a_4(5)}{a_1(8) a_4(4) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_0(9) a_2(4) a_3(2) a_4(5)}{a_1(8) a_4(4) a_4(2) a_4(1)} \\
& \quad - \frac{a_0(8) a_2(4) a_3(2) a_4(5)}{a_1(8) a_4(4) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_0(9) a_1(4) a_4(5)}{a_1(8) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_0(8) a_1(4) a_4(5)}{a_1(8) a_4(4) a_4(1)} \\
& \quad - \frac{a_0(9) a_4(4) a_1(0)}{a_1(8) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_0(8) a_4(4) a_1(0)}{a_1(8) a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_1(4) a_3(5)}{a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_2(4) a_3(2) a_3(5)}{a_4(4) a_4(2) a_4(1)} \\
& \quad \left. - \frac{a_3(5) a_1(0)}{a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(2) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(4) a_2(3) a_3(5)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1)} \right] b_4(1) \\
& + \left[\frac{a_0(9)}{a_4(0)} - \frac{a_0(8)}{a_4(0)} + \frac{a_0(9) a_3(6) a_2(4)}{a_1(8) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_0(8) a_3(6) a_2(4)}{a_1(8) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_0(9) a_4(4) a_1(4)}{a_1(8) a_4(3) a_4(0)} \right. \\
& \quad - \frac{a_0(8) a_4(4) a_1(4)}{a_1(8) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_0(8)}{a_4(0)} - \frac{a_0(4)}{a_4(0)} + \frac{a_1(7) a_3(4)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_1(4) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} \\
& \quad + \frac{a_2(6) a_2(4)}{a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_2(4) a_2(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_2(4) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_1(4)}{a_4(4) a_4(0)} \\
& \quad - \frac{a_3(4) a_3(3) a_2(2) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(4) a_3(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(4) a_2(3) a_3(1) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(1) a_4(0)} \\
& \quad \left. + \frac{a_3(4) a_1(3) a_4(4)}{a_4(4) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_0(4)}{a_4(0)} - \frac{a_0(0)}{a_4(0)} \right] b_4(0) - \left[\frac{a_0(9) a_3(4) a_3(6)}{a_1(8) a_4(4) a_4(3)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_0(8)a_3(4)a_3(6)}{a_1(8)a_4(4)a_4(3)} + \frac{a_0(9)a_3(6)a_3(0)}{a_1(8)a_4(4)a_4(0)} - \frac{a_0(8)a_3(6)a_3(0)}{a_1(8)a_4(4)a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(6)a_3(0)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(4)a_2(6)}{a_4(4)a_4(3)} \Big] b_3(3) \Big[+ \frac{a_0(9)a_3(4)a_3(3)a_4(5)}{a_1(8)a_4(4)a_4(3)a_4(2)} \\
& - \frac{a_0(8)a_3(4)a_3(3)a_4(5)}{a_1(8)a_4(4)a_4(3)a_4(2)} - \frac{a_0(9)a_2(4)a_4(5)}{a_1(8)a_4(4)a_4(2)} + \frac{a_0(8)a_2(4)a_4(5)}{a_1(8)a_4(4)a_4(2)} \\
& - \frac{a_0(9)a_4(4)a_2(0)}{a_1(8)a_4(3)a_4(0)} + \frac{a_0(8)a_4(4)a_2(0)}{a_1(8)a_4(3)a_4(0)} - \frac{a_2(4)a_3(5)}{a_4(4)a_4(2)} - \frac{a_3(5)a_2(0)}{a_4(4)a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(4)a_3(3)a_3(5)}{a_4(4)a_4(3)a_4(2)} \Big] b_3(2) - \Big[\frac{a_1(4)a_4(4)}{a_4(4)a_4(1)} - \frac{a_2(4)a_3(2)a_4(4)}{a_4(4)a_4(2)a_4(1)} \\
& + \frac{a_3(4)a_3(3)a_3(2)a_4(4)}{a_4(4)a_4(3)a_4(2)a_4(1)} - \frac{a_3(4)a_2(3)a_4(4)}{a_4(4)a_4(3)a_4(1)} + \frac{a_1(0)}{a_4(0)} \Big] b_3(1) \\
& + \Big[\frac{a_0(9)a_2(7)a_4(3)}{a_1(8)a_4(4)a_4(0)} - \frac{a_0(8)a_2(7)a_4(3)}{a_1(8)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_0(9)a_3(6)a_3(3)}{a_1(8)a_4(4)a_4(0)} \\
& - \frac{a_0(8)a_3(6)a_3(3)}{a_1(8)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_0(9)a_4(4)a_2(3)}{a_1(8)a_4(3)a_4(0)} - \frac{a_0(8)a_4(4)a_2(3)}{a_1(8)a_4(3)a_4(0)} \\
& + \frac{a_1(7)a_4(3)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_2(6)a_3(3)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(5)a_2(3)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_1(3)}{a_4(0)} \Big] b_3(0) \\
& - \Big[\frac{a_0(9)a_3(4)a_4(5)}{a_1(8)a_4(4)a_4(3)} + \frac{a_0(8)a_3(4)a_4(5)}{a_1(8)a_4(4)a_4(3)} + \frac{a_0(9)a_4(4)a_3(0)}{a_1(8)a_4(3)a_4(0)} \\
& + \frac{a_0(8)a_4(4)a_3(0)}{a_1(8)a_4(3)a_4(0)} + \frac{a_3(5)a_3(0)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(4)a_3(5)}{a_4(4)a_4(3)} \Big] b_2(3) - \Big[\frac{a_2(4)a_4(4)}{a_4(4)a_4(2)} \\
& - \frac{a_3(3)a_4(4)}{a_4(3)a_4(2)} + \frac{a_2(0)}{a_4(0)} \Big] b_2(2) + \Big[\frac{a_0(9)a_3(6)a_4(2)}{a_1(8)a_4(4)a_4(0)} - \frac{a_0(8)a_3(6)a_4(2)}{a_1(8)a_4(4)a_4(0)} \\
& + \frac{a_0(9)a_4(4)a_3(2)}{a_1(8)a_4(3)a_4(0)} - \frac{a_0(8)a_4(4)a_3(2)}{a_1(8)a_4(3)a_4(0)} + \frac{a_2(6)a_4(2)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(5)a_3(2)}{a_4(4)a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(2)}{a_4(0)} \Big] b_2(0) - \Big[\frac{a_3(4)a_4(4)}{a_4(4)a_4(3)} + \frac{a_3(0)}{a_4(0)} \Big] b_1(3) + \Big[\frac{a_0(9)a_4(1)}{a_1(8)a_4(0)} - \frac{a_0(8)a_4(1)}{a_1(8)a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(5)a_4(1)}{a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(1)}{a_4(0)} \Big] b_1(0) + b_0(0),
\end{aligned}$$

$k = 9$

$$\begin{aligned}
b_0(10) &= \left[\frac{a_0(10)}{a_1(9)} - \frac{a_0(9)}{a_1(9)} \right] b_1(9) + b_0(9) \\
&= \left[\frac{a_0(10)}{a_1(9)} - \frac{a_0(9)}{a_1(9)} \right] \left\{ \left[\frac{a_3(5)a_3(7)a_3(0)}{a_4(5)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(5)a_3(4)a_3(7)}{a_4(5)a_4(4)a_4(3)} - \frac{a_2(5)a_3(7)}{a_4(5)a_4(3)} \right] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_3(7)a_2(1)}{a_4(5)a_4(1)} - \frac{a_3(7)a_3(0)}{a_4(5)a_4(0)} \Big] b_4(3) + \left[\frac{a_3(5)a_2(4)a_4(6)}{a_4(5)a_4(4)a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_3(5)a_3(4)a_3(3)a_4(6)}{a_4(5)a_4(4)a_4(3)a_4(2)} - \frac{a_3(5)a_4(6)a_2(0)}{a_4(5)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_2(5)a_3(3)a_4(6)}{a_4(5)a_4(3)a_4(2)} \\
& - \frac{a_1(5)a_4(6)}{a_4(5)a_4(2)} + \frac{a_4(5)a_3(1)a_2(0)}{a_4(4)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_4(5)a_1(1)}{a_4(4)a_4(1)} \Big] b_4(2) + \left[\frac{a_1(9)}{a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_2(8)a_3(5)}{a_4(5)a_4(1)} + \frac{a_3(7)a_2(5)}{a_4(5)a_4(1)} + \frac{a_4(5)a_1(5)}{a_4(4)a_4(1)} \Big] b_4(1) - \left[\frac{a_3(5)a_2(8)}{a_4(5)a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_3(5)a_3(7)a_3(4)}{a_4(5)a_4(4)a_4(0)} - \frac{a_3(5)a_4(6)a_2(4)}{a_4(5)a_4(4)a_4(0)} - \frac{a_2(8)a_3(1)a_4(4)}{a_4(5)a_4(1)a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(7)a_3(1)a_3(4)}{a_4(5)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_4(5)a_3(1)a_2(4)}{a_4(4)a_4(1)a_4(0)} \Big] b_4(0) + \left[\frac{a_3(5)a_3(4)a_4(6)}{a_4(5)a_4(4)a_4(3)} \right. \\
& + \frac{a_3(5)a_4(6)a_3(0)}{a_4(5)a_4(4)a_4(0)} - \frac{a_2(5)a_4(6)}{a_4(5)a_4(3)} + \frac{a_4(5)a_3(1)a_3(0)}{a_4(4)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_4(5)a_2(1)}{a_4(4)a_4(1)} \Big] b_3(3) \\
& + \left[\frac{a_2(8)a_4(4)}{a_4(5)a_4(1)} + \frac{a_3(7)a_3(4)}{a_4(5)a_4(1)} + \frac{a_4(5)a_2(4)}{a_4(4)a_4(1)} \right] b_3(1) - \frac{a_4(5)a_3(1)a_3(3)}{a_4(4)a_4(1)a_4(0)} b_3(0) \\
& + \frac{a_3(7)a_4(3)}{a_4(5)a_4(1)} b_2(1) - \left[\frac{a_3(5)a_4(2)}{a_4(5)a_4(0)} + \frac{a_3(7)a_3(1)a_4(3)}{a_4(5)a_4(1)a_4(0)} \right] b_2(0) \\
& + \frac{a_4(5)a_4(2)}{a_4(4)a_4(1)} b_1(1) \Big\} - \left[\frac{a_2(7)a_2(1)}{a_4(5)a_4(1)} + \frac{a_2(7)a_3(0)}{a_4(5)a_4(0)} + \frac{a_2(5)a_2(7)}{a_4(5)a_4(3)} \right. \\
& - \frac{a_3(5)a_3(4)a_2(7)}{a_4(5)a_4(4)a_4(3)} - \frac{a_3(5)a_2(7)a_3(0)}{a_4(5)a_4(4)a_4(0)} \Big] b_4(3) - \left[\frac{a_1(5)a_3(6)}{a_4(5)a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_2(5)a_3(3)a_3(6)}{a_4(5)a_4(3)a_4(2)} - \frac{a_3(6)a_3(1)a_2(0)}{a_4(5)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_3(6)a_1(1)}{a_4(5)a_4(1)} \\
& + \frac{a_3(5)a_3(4)a_3(3)a_3(6)}{a_4(5)a_4(4)a_4(3)a_4(2)} - \frac{a_3(5)a_2(4)a_3(6)}{a_4(5)a_4(4)a_4(2)} - \frac{a_3(5)a_3(6)a_2(0)}{a_4(5)a_4(4)a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(5)a_3(6)a_2(0)}{a_4(5)a_4(4)a_4(0)} \Big] b_4(2) + \left[\frac{a_0(9)a_4(5)}{a_4(5)a_4(1)} - \frac{a_0(5)a_4(5)}{a_4(5)a_4(1)} + \frac{a_1(8)a_3(5)}{a_4(5)a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_1(5)a_3(2)a_4(5)}{a_4(5)a_4(2)a_4(1)} + \frac{a_2(7)a_2(5)}{a_4(5)a_4(1)} + \frac{a_2(5)a_2(3)a_4(5)}{a_4(5)a_4(3)a_4(1)} + \frac{a_2(5)a_3(2)a_4(5)}{a_4(5)a_4(2)a_4(1)} \\
& + \frac{a_3(6)}{a_4(5)} + \frac{a_1(5)}{a_4(1)} - \frac{a_3(5)a_3(4)a_2(3)a_4(5)}{a_4(5)a_4(4)a_4(3)a_4(1)} - \frac{a_3(5)a_3(4)a_3(2)a_4(5)}{a_4(5)a_4(4)a_4(2)a_4(1)} \\
& - \frac{a_3(5)a_2(4)a_3(2)a_4(5)}{a_4(5)a_4(4)a_4(2)a_4(1)} + \frac{a_3(5)a_1(4)a_4(5)}{a_4(5)a_4(4)a_4(1)} + \frac{a_3(5)a_4(4)a_1(0)}{a_4(5)a_4(3)a_4(0)} + \frac{a_0(5)}{a_4(1)} \\
& - \frac{a_0(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(1)a_1(0)}{a_4(1)a_4(0)} \Big] b_4(1) - \left[\frac{a_1(8)a_3(1)a_4(4)}{a_4(5)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_2(7)a_3(1)a_3(4)}{a_4(5)a_4(1)a_4(0)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_3(6) a_3(1) a_2(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_1(8)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_3(6) a_2(4)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_1(4)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(1) a_1(4)}{a_4(1) a_4(0)} \Big] b_4(0) + \left[\frac{a_2(7) a_3(6)}{a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_3(6) a_3(1) a_3(0)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(5) a_3(6) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right] b_3(3) - \left[\frac{a_1(5) a_4(5)}{a_4(5) a_4(2)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_2(5) a_3(3) a_4(5)}{a_4(5) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(3) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_3(5) a_2(4) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_3(5) a_4(4) a_2(0)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_1(1)}{a_4(1)} - \frac{a_3(1) a_2(0)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_3(2) + \left[\frac{a_1(8) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_3(6) a_2(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_1(4)}{a_4(1)} \right] b_3(1) - \frac{a_3(6) a_3(1) a_3(3)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(5) a_2(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& \quad - \frac{a_3(5) a_3(6) a_3(3)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(5) a_4(4) a_2(3)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_3(1) a_2(3)}{a_4(1) a_4(0)} \Big] b_3(0) + \frac{a_2(7) a_4(5)}{a_4(5) a_4(3)} \\
& \quad + \frac{a_3(5) a_3(4) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_3(0)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(1) a_3(0)}{a_4(1) a_4(0)} \Big] b_2(3) \\
& \quad + \left[\frac{a_2(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_3(3)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(3)}{a_4(1)} \right] b_2(1) - \frac{a_2(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \\
& \quad - \left[\frac{a_3(5) a_3(6) a_4(2)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_3(2)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_3(1) a_3(2)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_2(0) \\
& \quad + \left[\frac{a_3(6) a_4(2)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(2)}{a_4(1)} \right] b_1(1) - \left[\frac{a_3(5) a_4(1)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(1) a_4(1)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_1(0) \\
& \quad + b_0(1) \\
& = \frac{a_0(10) a_3(5) a_3(7) a_3(0)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_0(9) a_3(5) a_3(7) a_3(0)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_0(10) a_3(5) a_3(4) a_3(7)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_0(9) a_3(5) a_3(4) a_3(7)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_0(10) a_2(5) a_3(7)}{a_1(9) a_4(5) a_4(3)} \\
& \quad + \frac{a_0(9) a_2(5) a_3(7)}{a_1(9) a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_0(10) a_3(7) a_2(1)}{a_1(9) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_0(9) a_3(7) a_2(1)}{a_1(9) a_4(5) a_4(1)} \\
& \quad - \frac{a_0(10) a_3(7) a_3(0)}{a_1(9) a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_0(9) a_3(7) a_3(0)}{a_1(9) a_4(5) a_4(0)} - \frac{a_2(7) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_2(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(5) a_3(4) a_2(7)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(5) a_2(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \Big] b_4(3) + \left[\frac{a_0(10) a_3(5) a_2(4) a_4(6)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(2)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_0(9) a_3(5) a_2(4) a_4(6)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(2)} + \frac{a_0(10) a_3(5) a_3(4) a_3(3) a_4(6)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_0(9) a_3(5) a_3(4) a_3(3) a_4(6)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_0(10) a_3(5) a_4(6) a_2(0)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_0(9) a_3(5) a_4(6) a_2(0)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_0(10) a_2(5) a_3(3) a_4(6)}{a_1(9) a_4(5) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_0(9) a_2(5) a_3(3) a_4(6)}{a_1(9) a_4(5) a_4(3) a_4(2)} \\
& - \frac{a_0(10) a_1(5) a_4(6)}{a_1(9) a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_0(9) a_1(5) a_4(6)}{a_1(9) a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_0(10) a_4(5) a_3(1) a_2(0)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} \\
& - \frac{a_0(9) a_4(5) a_3(1) a_2(0)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_0(10) a_4(5) a_1(1)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_0(9) a_4(5) a_1(1)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1)} \\
& - \frac{a_1(5) a_3(6)}{a_4(5) a_4(2)} - \frac{a_2(5) a_3(3) a_3(6)}{a_4(5) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_3(6) a_3(1) a_2(0)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_1(1)}{a_4(5) a_4(1)} \\
& - \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(3) a_3(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_3(5) a_2(4) a_3(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2)} + \frac{a_3(5) a_3(6) a_2(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(5) a_3(6) a_2(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \Big] b_4(2) + \left[\frac{a_0(10)}{a_4(1)} - \frac{a_0(9)}{a_4(1)} + \frac{a_0(10) a_2(8) a_3(5)}{a_1(9) a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& - \frac{a_0(9) a_2(8) a_3(5)}{a_1(9) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_0(10) a_3(7) a_2(5)}{a_1(9) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_0(9) a_3(7) a_2(5)}{a_1(9) a_4(5) a_4(1)} \\
& + \frac{a_0(10) a_4(5) a_1(5)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1)} - \frac{a_0(9) a_4(5) a_1(5)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_0(9) a_4(5)}{a_4(5) a_4(1)} \\
& - \frac{a_0(5) a_4(5)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_1(8) a_3(5)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_1(5) a_3(2) a_4(5)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(7) a_2(5)}{a_4(5) a_4(1)} \\
& + \frac{a_2(5) a_2(3) a_4(5)}{a_4(5) a_4(3) a_4(1)} + \frac{a_2(5) a_3(2) a_4(5)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(6)}{a_4(5)} + \frac{a_1(5)}{a_4(1)} \\
& \left. + \frac{a_3(5) a_1(4) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_1(0)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_0(5)}{a_4(1)} - \frac{a_0(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(1) a_1(0)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(1) \\
& - \left[\frac{a_0(10) a_3(5) a_2(8)}{a_1(9) a_4(5) a_4(0)} - \frac{a_0(9) a_3(5) a_2(8)}{a_1(9) a_4(5) a_4(0)} - \frac{a_0(10) a_3(5) a_3(7) a_3(4)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_0(9) a_3(5) a_3(7) a_3(4)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_0(10) a_3(5) a_4(6) a_2(4)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_0(9) a_3(5) a_4(6) a_2(4)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& - \frac{a_0(10)}{a_1(9)} + \frac{a_0(9) a_2(8) a_3(1) a_4(4)}{a_1(9) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_0(10) a_3(7) a_3(1) a_3(4)}{a_1(9) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_0(9) a_3(7) a_3(1) a_3(4)}{a_1(9) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_0(10) a_4(5) a_3(1) a_2(4)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_0(9) a_4(5) a_3(1) a_2(4)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_1(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_2(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(1) a_2(4)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_1(8)}{a_4(5) a_4(0)} \\
& \left. + \frac{a_3(5) a_3(6) a_2(4)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_1(4)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} + \frac{a_3(1) a_1(4)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_4(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{a_0(10) a_3(5) a_3(4) a_4(6)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_0(9) a_3(5) a_3(4) a_4(6)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} \right. \\
& + \frac{a_0(10) a_3(5) a_4(6) a_3(0)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_0(9) a_3(5) a_4(6) a_3(0)}{a_1(9) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& - \frac{a_0(10) a_2(5) a_4(6)}{a_1(9) a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_0(9) a_2(5) a_4(6)}{a_1(9) a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_0(10) a_4(5) a_3(1) a_3(0)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} \\
& - \frac{a_0(9) a_4(5) a_3(1) a_3(0)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_0(10) a_4(5) a_2(1)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_0(9) a_4(5) a_2(1)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1)} \\
& + \frac{a_2(7) a_3(6)}{a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_3(6) a_3(1) a_3(0)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(6)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} \\
& + \frac{a_3(5) a_3(6) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \Big] b_3(3) - \left[\frac{a_1(5) a_4(5)}{a_4(5) a_4(2)} - \frac{a_2(5) a_3(3) a_4(5)}{a_4(5) a_4(3) a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_3(5) a_3(4) a_3(3) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_3(5) a_2(4) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_3(5) a_4(4) a_2(0)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} \\
& + \frac{a_1(1)}{a_4(1)} - \frac{a_3(1) a_2(0)}{a_4(1) a_4(0)} \Big] b_3(2) + \left[\frac{a_0(10) a_2(8) a_4(4)}{a_1(9) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_0(9) a_2(8) a_4(4)}{a_1(9) a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_0(10) a_3(7) a_3(4)}{a_1(9) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_0(9) a_3(7) a_3(4)}{a_1(9) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_0(10) a_4(5) a_2(4)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1)} \\
& - \frac{a_0(9) a_4(5) a_2(4)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_1(8) a_4(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_2(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_1(4)}{a_4(1)} \Big] b_3(1) \\
& - \left[\frac{a_0(10) a_4(5) a_3(1) a_3(3)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_0(9) a_4(5) a_3(1) a_3(3)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(1) a_3(3)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_3(5) a_2(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_3(6) a_3(3)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_2(3)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(1) a_2(3)}{a_4(1) a_4(0)} \Big] b_3(0) + \left[\frac{a_2(7) a_4(5)}{a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_3(5) a_3(4) a_4(5)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_3(0)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_2(1)}{a_4(1)} + \frac{a_3(1) a_3(0)}{a_4(1) a_4(0)} \Big] b_2(3) + \frac{a_0(10) a_3(7) a_4(3)}{a_1(9) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_0(9) a_3(7) a_4(3)}{a_1(9) a_4(5) a_4(1)} \\
& + \frac{a_2(7) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_3(3)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_2(3)}{a_4(1)} \Big] b_2(1) - \left[\frac{a_0(10) a_3(5) a_4(2)}{a_1(9) a_4(5) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_0(9) a_3(5) a_4(2)}{a_1(9) a_4(5) a_4(0)} - \frac{a_0(10) a_3(7) a_3(1) a_4(3)}{a_1(9) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_0(9) a_3(7) a_3(1) a_4(3)}{a_1(9) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_3(6) a_4(2)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(5) a_4(4) a_3(2)}{a_4(5) a_4(3) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(1) a_3(2)}{a_4(1) a_4(0)} \Big] b_2(0) + \left[\frac{a_0(10) a_4(5) a_4(2)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1)} - \frac{a_0(9) a_4(5) a_4(2)}{a_1(9) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_4(2)}{a_4(5) a_4(1)} \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{a_3(2)}{a_4(1)} \Big] b_1(1) - \left[\frac{a_3(5) a_4(1)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(1) a_4(1)}{a_4(1) a_4(0)} \right] b_1(0) + b_0(1),$$

$$k = 10$$

$$\begin{aligned} b_0(11) &= \left[\frac{a_0(11)}{a_1(10)} - \frac{a_0(10)}{a_1(10)} \right] b_1(10) + b_0(10) \\ &= \left[\frac{a_0(11)}{a_1(10)} - \frac{a_0(10)}{a_1(10)} \right] \left\{ - \left[\frac{a_2(5) a_4(7)}{a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right. \right. \\ &\quad + \frac{a_4(7) a_2(1)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_4(7) a_3(0)}{a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_2(6) a_3(4) a_4(7)}{a_4(6) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_2(6) a_4(7) a_3(0)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} \\ &\quad + \frac{a_1(6) a_4(7)}{a_4(6) a_4(3)} + \frac{a_4(6) a_3(2) a_2(1)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_4(6) a_3(2) a_3(0)}{a_4(5) a_4(2) a_4(0)} + \left. \frac{a_4(6) a_1(2)}{a_4(5) a_4(2)} \right] b_4(3) \\ &\quad + \left[\frac{a_1(10)}{a_4(2)} + \frac{a_2(9) a_3(6)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_3(8) a_2(6)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_4(6) a_1(6)}{a_4(5) a_4(2)} \right] b_4(2) - \left[\frac{a_3(6) a_2(9)}{a_4(6) a_4(1)} \right. \\ &\quad + \frac{a_3(6) a_3(5)}{a_4(6) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_2(5)}{a_4(6) a_4(1)} + \frac{a_2(9) a_3(2) a_4(5)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(8) a_3(2) a_3(5)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \\ &\quad + \left. \frac{a_4(6) a_3(2) a_2(5)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \right] b_4(1) + \left[\frac{a_3(6) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(5) a_3(8)}{a_4(6) a_4(5) a_4(0)} \right. \\ &\quad + \frac{a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_3(8)}{a_4(6) a_4(0)} \\ &\quad - \frac{a_2(6) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(8) a_2(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(6) a_4(1) a_4(0)} \\ &\quad + \left. \frac{a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_4(6) a_2(2) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2) a_4(0)} \right] b_4(0) \\ &\quad + \left[\frac{a_2(9) a_4(5)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_3(8) a_3(5)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_4(6) a_2(5)}{a_4(5) a_4(2)} \right] b_3(2) - \left[\frac{a_3(6) a_3(8) a_4(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6)}{a_4(6)} \right. \\ &\quad + \frac{a_4(7) a_3(4)}{a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_4(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(8) a_3(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_4(6) a_3(2) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \Big] b_3(1) \\ &\quad + \left[\frac{a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_4(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_4(6) a_2(2) a_4(3)}{a_4(5) a_4(2) a_4(0)} \right] b_3(0) \\ &\quad + \left[\frac{a_3(8) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_4(6) a_3(4)}{a_4(5) a_4(2)} \right] b_2(2) - \left[\frac{a_3(6) a_4(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \right. \\ &\quad - \left. \frac{a_4(6) a_3(2) a_4(3)}{a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \right] b_2(1) - \left[\frac{a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right. \\ &\quad + \left. \frac{a_4(6) a_4(3)}{a_4(5) a_4(2)} b_1(2) \right\} - \left[\frac{a_1(6) a_3(7)}{a_4(6) a_4(3)} - \frac{a_2(6) a_3(7) a_3(0)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_3(4) a_3(7)}{a_4(6) a_4(4) a_4(3)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_3(7)a_3(2)a_2(1)}{a_4(6)a_4(2)a_4(1)} - \frac{a_3(7)a_3(2)a_3(0)}{a_4(6)a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_3(7)a_2(2)a_3(0)}{a_4(6)a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_3(7)a_1(2)}{a_4(6)a_4(2)} \\
& + \frac{a_3(6)a_3(5)a_3(7)a_3(0)}{a_4(6)a_4(5)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(6)a_3(5)a_3(4)a_3(7)}{a_4(6)a_4(5)a_4(4)a_4(3)} - \frac{a_3(6)a_2(5)a_3(7)}{a_4(6)a_4(5)a_4(3)} \\
& - \frac{a_3(6)a_3(7)a_2(1)}{a_4(6)a_4(5)a_4(1)} - \frac{a_3(6)a_3(7)a_3(0)}{a_4(6)a_4(5)a_4(0)} \Big] b_4(3) + \left[\frac{a_0(10)a_4(6)}{a_4(6)a_4(2)} - \frac{a_0(6)a_4(6)}{a_4(6)a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_1(9)a_3(6)}{a_4(6)a_4(2)} + \frac{a_1(6)a_3(3)a_4(6)}{a_4(6)a_4(3)a_4(2)} + \frac{a_2(8)a_2(6)}{a_4(6)a_4(2)} + \frac{a_2(6)a_2(4)a_4(6)}{a_4(6)a_4(4)a_4(2)} \\
& + \frac{a_2(6)a_3(4)a_3(3)a_4(6)}{a_4(6)a_4(4)a_4(3)a_4(2)} - \frac{a_2(6)a_4(6)a_2(0)}{a_4(6)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(7)a_1(6)}{a_4(6)a_4(2)} \\
& - \frac{a_3(6)a_3(5)a_2(4)a_4(6)}{a_4(6)a_4(5)a_4(4)a_4(2)} + \frac{a_3(6)a_1(5)a_4(6)}{a_4(6)a_4(5)a_4(2)} - \frac{a_3(6)a_4(5)a_3(1)a_2(0)}{a_4(6)a_4(4)a_4(1)a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(6)a_4(5)a_1(1)}{a_4(6)a_4(4)a_4(1)} + \frac{a_0(6)}{a_4(2)} - \frac{a_0(2)}{a_4(2)} + \frac{a_2(2)a_2(0)}{a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_3(2)a_3(1)a_2(0)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(2)a_1(1)}{a_4(2)a_4(1)} \Big] b_4(2) - \left[\frac{a_1(9)a_3(2)a_4(5)}{a_4(6)a_4(2)a_4(1)} + \frac{a_2(8)a_3(2)a_3(5)}{a_4(6)a_4(2)a_4(1)} \right. \\
& + \frac{a_3(7)a_3(2)a_2(5)}{a_4(6)a_4(2)a_4(1)} + \frac{a_3(6)a_1(9)}{a_4(6)a_4(1)} + \frac{a_3(6)a_2(8)a_3(5)}{a_4(6)a_4(5)a_4(1)} + \frac{a_3(6)a_3(7)a_2(5)}{a_4(6)a_4(5)a_4(1)} \\
& + \frac{a_3(6)a_4(5)a_1(5)}{a_4(6)a_4(4)a_4(1)} + \frac{a_3(2)a_1(5)}{a_4(2)a_4(1)} \Big] b_4(1) - \left[\frac{a_2(8)a_2(2)a_4(4)}{a_4(6)a_4(2)a_4(0)} \right. \\
& + \frac{a_2(8)a_3(1)a_4(4)}{a_4(6)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_2(6)a_2(8)}{a_4(6)a_4(0)} + \frac{a_2(6)a_3(7)a_3(4)}{a_4(6)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_2(6)a_4(6)a_2(4)}{a_4(6)a_4(4)a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(7)a_3(2)a_3(1)a_3(4)}{a_4(6)a_4(2)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_3(7)a_2(2)a_3(4)}{a_4(6)a_4(2)a_4(0)} - \frac{a_3(6)a_3(5)a_2(8)}{a_4(6)a_4(5)a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(6)a_3(5)a_3(7)a_3(4)}{a_4(6)a_4(5)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(6)a_3(5)a_4(6)a_2(4)}{a_4(6)a_4(5)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(6)a_2(8)a_3(1)a_4(4)}{a_4(6)a_4(5)a_4(1)a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(6)a_3(7)a_3(1)a_3(4)}{a_4(6)a_4(5)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_3(6)a_4(5)a_3(1)a_2(4)}{a_4(6)a_4(4)a_4(1)a_4(0)} + \frac{a_2(2)a_2(4)}{a_4(2)a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(2)a_3(1)a_2(4)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} \Big] b_4(0) - \left[\frac{a_1(6)a_4(6)}{a_4(6)a_4(3)} - \frac{a_2(6)a_3(4)a_4(6)}{a_4(6)a_4(4)a_4(3)} \right. \\
& - \frac{a_2(6)a_4(6)a_3(0)}{a_4(6)a_4(4)a_4(0)} + \frac{a_3(6)a_3(5)a_3(4)a_4(6)}{a_4(6)a_4(5)a_4(4)a_4(3)} + \frac{a_3(6)a_3(5)a_4(6)a_3(0)}{a_4(6)a_4(5)a_4(4)a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(6)a_2(5)a_4(6)}{a_4(6)a_4(5)a_4(3)} + \frac{a_3(6)a_4(5)a_3(1)a_3(0)}{a_4(6)a_4(4)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_3(6)a_4(5)a_2(1)}{a_4(6)a_4(4)a_4(1)} + \frac{a_1(2)}{a_4(2)} \\
& - \frac{a_2(2)a_3(0)}{a_4(2)a_4(0)} + \frac{a_3(2)a_3(1)a_3(0)}{a_4(2)a_4(1)a_4(0)} - \frac{a_3(2)a_2(1)}{a_4(2)a_4(1)} \Big] b_3(3) + \left[\frac{a_1(9)a_4(5)}{a_4(6)a_4(2)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_2(8) a_3(5)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_3(7) a_2(5)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_1(5)}{a_4(2)} \Big] b_3(2) - \left[\frac{a_2(8) a_3(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \right. \\
& \quad - \frac{a_2(6) a_3(2) a_3(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_2(8) a_4(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_3(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \\
& \quad + \frac{a_3(6) a_4(5) a_2(4)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1)} + \left. \frac{a_3(2) a_2(4)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_3(1) - \left[\frac{a_2(6) a_3(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& \quad + \frac{a_2(6) a_4(6) a_3(3)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_2(2) a_4(3)}{a_4(6) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_4(5) a_3(1) a_3(3)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} \\
& \quad + \frac{a_2(2) a_3(3)}{a_4(2) a_4(0)} - \left. \frac{a_3(2) a_3(1) a_3(3)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right] b_3(0) + \left[\frac{a_2(8) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_3(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(2)} \right. \\
& \quad + \left. \frac{a_2(4)}{a_4(2)} \right] b_2(2) - \left[\frac{a_3(7) a_3(2) a_4(3)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_3(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_3(3)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_2(1) \\
& \quad + \left[\frac{a_2(6) a_2(4) a_4(6)}{a_4(6) a_4(4) a_4(2)} + \frac{a_2(6) a_4(2)}{a_4(6) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& \quad + \frac{a_3(6) a_3(5) a_4(2)}{a_4(6) a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \left. \frac{a_2(2) a_4(2)}{a_4(2) a_4(0)} \right] b_2(0) \\
& \quad + \left[\frac{a_3(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_3(3)}{a_4(2)} \right] b_1(2) - \left[\frac{a_3(6) a_4(5) a_4(2)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_4(2)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_1(1) \\
& \quad + b_0(2) \\
& = - \left[\frac{a_0(11) a_2(5) a_4(7)}{a_1(10) a_4(5) a_4(3)} - \frac{a_0(10) a_2(5) a_4(7)}{a_1(10) a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_0(11) a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_1(10) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} \right. \\
& \quad - \frac{a_0(10) a_3(5) a_3(4) a_4(7)}{a_1(10) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_0(11) a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_1(10) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& \quad - \frac{a_0(10) a_3(5) a_4(7) a_3(0)}{a_1(10) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_0(11) a_4(7) a_2(1)}{a_1(10) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_0(10) a_4(7) a_2(1)}{a_1(10) a_4(5) a_4(1)} \\
& \quad - \frac{a_0(11) a_4(7) a_3(0)}{a_1(10) a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_0(10) a_4(7) a_3(0)}{a_1(10) a_4(5) a_4(0)} - \frac{a_0(11) a_2(6) a_3(4) a_4(7)}{a_1(10) a_4(6) a_4(4) a_4(3)} \\
& \quad - \frac{a_0(10) a_2(6) a_3(4) a_4(7)}{a_1(10) a_4(6) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_0(11) a_2(6) a_4(7) a_3(0)}{a_1(10) a_4(6) a_4(4) a_4(0)} \\
& \quad + \frac{a_0(10) a_2(6) a_4(7) a_3(0)}{a_1(10) a_4(6) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_0(11) a_1(6) a_4(7)}{a_1(10) a_4(6) a_4(3)} + \frac{a_0(10) a_1(6) a_4(7)}{a_1(10) a_4(6) a_4(3)} \\
& \quad - \frac{a_0(11) a_4(6) a_3(2) a_2(1)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_0(10) a_4(6) a_3(2) a_2(1)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \\
& \quad - \frac{a_0(11) a_4(6) a_3(2) a_3(0)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_0(10) a_4(6) a_3(2) a_3(0)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_0(11) a_4(6) a_1(2)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2)} \\
& \quad + \frac{a_0(10) a_4(6) a_1(2)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_1(6) a_3(7)}{a_4(6) a_4(3)} - \frac{a_2(6) a_3(7) a_3(0)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_3(4) a_3(7)}{a_4(6) a_4(4) a_4(3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_3(7) a_3(2) a_2(1)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_3(7) a_3(2) a_3(0)}{a_4(6) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(7) a_2(2) a_3(0)}{a_4(6) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(7) a_1(2)}{a_4(6) a_4(2)} \\
& + \frac{a_3(6) a_3(5) a_3(7) a_3(0)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(5) a_3(4) a_3(7)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} - \frac{a_3(6) a_2(5) a_3(7)}{a_4(6) a_4(5) a_4(3)} \\
& - \frac{a_3(6) a_3(7) a_2(1)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_3(6) a_3(7) a_3(0)}{a_4(6) a_4(5) a_4(0)} \Big] b_4(3) + \left[\frac{a_0(11)}{a_4(2)} - \frac{a_0(10)}{a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_0(11) a_2(9) a_3(6)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2)} - \frac{a_0(10) a_2(9) a_3(6)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_0(11) a_3(8) a_2(6)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2)} \\
& - \frac{a_0(10) a_3(8) a_2(6)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_0(11) a_4(6) a_1(6)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2)} - \frac{a_0(10) a_4(6) a_1(6)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_0(10) a_4(6)}{a_4(6) a_4(2)} \\
& - \frac{a_0(6) a_4(6)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_1(9) a_3(6)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_1(6) a_3(3) a_4(6)}{a_4(6) a_4(3) a_4(2)} + \frac{a_2(8) a_2(6)}{a_4(6) a_4(2)} \\
& + \frac{a_2(6) a_2(4) a_4(6)}{a_4(6) a_4(4) a_4(2)} + \frac{a_2(6) a_3(4) a_3(3) a_4(6)}{a_4(6) a_4(4) a_4(3) a_4(2)} - \frac{a_2(6) a_4(6) a_2(0)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(7) a_1(6)}{a_4(6) a_4(2)} - \frac{a_3(6) a_3(5) a_2(4) a_4(6)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(2)} + \frac{a_3(6) a_1(5) a_4(6)}{a_4(6) a_4(5) a_4(2)} \\
& - \frac{a_3(6) a_4(5) a_3(1) a_2(0)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_4(5) a_1(1)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_0(6)}{a_4(2)} - \frac{a_0(2)}{a_4(2)} \\
& + \frac{a_2(2) a_2(0)}{a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_3(2) a_3(1) a_2(0)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(2) a_1(1)}{a_4(2) a_4(1)} \Big] b_4(2) - \left[\frac{a_0(11) a_3(6) a_2(9)}{a_1(10) a_4(6) a_4(1)} \right. \\
& - \frac{a_0(10) a_3(6) a_2(9) a_0(11) a_3(6) a_3(5)}{a_1(10) a_4(6) a_4(1) a_1(10) a_4(6) a_4(1)} - \frac{a_0(10) a_3(6) a_3(5)}{a_1(10) a_4(6) a_4(1)} \\
& + \frac{a_0(11) a_3(6) a_2(5)}{a_1(10) a_4(6) a_4(1)} - \frac{a_0(10) a_3(6) a_2(5)}{a_1(10) a_4(6) a_4(1)} + \frac{a_0(11) a_2(9) a_3(2) a_4(5)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \\
& - \frac{a_0(10) a_2(9) a_3(2) a_4(5)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_0(11) a_3(8) a_3(2) a_3(5)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \\
& - \frac{a_0(10) a_3(8) a_3(2) a_3(5)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_0(11) a_4(6) a_3(2) a_2(5)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \\
& - \frac{a_0(10) a_4(6) a_3(2) a_2(5)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_1(9) a_3(2) a_4(5)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(8) a_3(2) a_3(5)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \\
& + \frac{a_3(7) a_3(2) a_2(5)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_1(9)}{a_4(6) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_2(8) a_3(5)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_3(7) a_2(5)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \\
& + \frac{a_3(6) a_4(5) a_1(5)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_1(5)}{a_4(2) a_4(1)} \Big] b_4(1) + \left[\frac{a_0(11) a_3(6) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_0(10) a_3(6) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_0(11) a_3(6) a_3(5) a_3(8)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(0)} \\
& \left. - \frac{a_0(10) a_3(6) a_3(5) a_3(8)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(0)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_0(10) a_3(6) a_3(5) a_3(8)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(0)} + \frac{a_0(11) a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& -\frac{a_0(10) a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_3(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_0(11) a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \\
& -\frac{a_0(10) a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_3(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_0(11) a_2(6) a_3(8)}{a_1(10) a_4(6) a_4(0)} + \frac{a_0(10) a_2(6) a_3(8)}{a_1(10) a_4(6) a_4(0)} \\
& -\frac{a_0(11) a_2(6) a_4(7) a_3(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_0(10) a_2(6) a_4(7) a_3(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(4) a_4(0)} \\
& -\frac{a_0(11) a_3(8) a_2(2) a_4(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_0(10) a_3(8) a_2(2) a_4(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2) a_4(0)} \\
& -\frac{a_0(11) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_0(10) a_3(8) a_3(1) a_4(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_0(11) a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_0(10) a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \\
& -\frac{a_0(11) a_4(6) a_2(2) a_3(4)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_0(10) a_4(6) a_2(2) a_3(4)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_2(8) a_2(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(0)} \\
& -\frac{a_2(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(6) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_2(8)}{a_4(6) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_3(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_4(6) a_2(4)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(7) a_3(2) a_3(1) a_3(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(7) a_2(2) a_3(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(5) a_2(8)}{a_4(6) a_4(5) a_4(0)} \\
& -\frac{a_3(6) a_3(5) a_3(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_3(5) a_4(6) a_2(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& -\frac{a_3(6) a_2(8) a_3(1) a_4(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_3(7) a_3(1) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_4(5) a_3(1) a_2(4)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} \\
& -\frac{a_2(2) a_2(4)}{a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(2) a_3(1) a_2(4)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \Big] b_4(0) - \left[\frac{a_1(6) a_4(6)}{a_4(6) a_4(3)} - \frac{a_2(6) a_3(4) a_4(6)}{a_4(6) a_4(4) a_4(3)} \right. \\
& -\frac{a_2(6) a_4(6) a_3(0)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_3(5) a_3(4) a_4(6)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(3)} + \frac{a_3(6) a_3(5) a_4(6) a_3(0)}{a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \\
& -\frac{a_3(6) a_2(5) a_4(6)}{a_4(6) a_4(5) a_4(3)} + \frac{a_3(6) a_4(5) a_3(1) a_3(0)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_4(5) a_2(1)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_1(2)}{a_4(2)} \\
& \left. -\frac{a_2(2) a_3(0)}{a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(2) a_3(1) a_3(0)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(2) a_2(1)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_3(3) + \left[\frac{a_0(11) a_2(9) a_4(5)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2)} \right. \\
& -\frac{a_0(10) a_2(9) a_4(5)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_0(11) a_3(8) a_3(5)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2)} - \frac{a_0(10) a_3(8) a_3(5)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2)} \\
& \left. + \frac{a_0(11) a_4(6) a_2(5)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2)} - \frac{a_0(10) a_4(6) a_2(5)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_1(9) a_4(5)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_2(8) a_3(5)}{a_4(6) a_4(2)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_3(7) a_2(5)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_1(5)}{a_4(2)} \Big] b_3(2) - \left[\frac{a_0(11) a_3(6) a_3(8) a_4(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& - \frac{a_0(10) a_3(6) a_3(8) a_4(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_0(11) a_3(6) a_4(7) a_3(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \\
& - \frac{a_0(10) a_3(6) a_4(7) a_3(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_0(11) a_3(6) a_4(7) a_3(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \\
& - \frac{a_0(10) a_3(6) a_4(7) a_3(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_0(11) a_3(8) a_3(2) a_4(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \\
& - \frac{a_0(10) a_3(8) a_3(2) a_4(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_0(11) a_4(6) a_3(2) a_3(4)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} \\
& - \frac{a_0(10) a_4(6) a_3(2) a_3(4)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_2(8) a_3(2) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} - \frac{a_2(6) a_3(2) a_3(4)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \\
& + \frac{a_3(6) a_2(8) a_4(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_3(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(6) a_4(5) a_2(4)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1)} \\
& + \frac{a_3(2) a_2(4)}{a_4(2) a_4(1)} \Big] b_3(1) + \left[\frac{a_0(11) a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_4(3)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_0(10) a_3(6) a_3(5) a_4(7) a_4(3)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_0(11) a_2(6) a_4(7) a_4(3)}{a_1(10) a_4(6) a_4(4) a_4(0)} \\
& + \frac{a_0(10) a_2(6) a_4(7) a_4(3)}{a_1(10) a_4(6) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_0(11) a_4(6) a_2(2) a_4(3)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(0)} \\
& + \frac{a_0(10) a_4(6) a_2(2) a_4(3)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_3(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_4(6) a_3(3)}{a_4(6) a_4(4) a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(7) a_2(2) a_4(3)}{a_4(6) a_4(2) a_4(0)} + \frac{a_3(6) a_4(5) a_3(1) a_3(3)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(2) a_3(3)}{a_4(2) a_4(0)} \\
& + \frac{a_3(2) a_3(1) a_3(3)}{a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \Big] b_3(0) + \left[\frac{a_0(11) a_3(8) a_4(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2)} - \frac{a_0(10) a_3(8) a_4(4)}{a_1(10) a_4(6) a_4(2)} \right. \\
& + \frac{a_0(11) a_4(6) a_3(4)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2)} - \frac{a_0(10) a_4(6) a_3(4)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_2(8) a_4(4)}{a_4(6) a_4(2)} + \frac{a_3(7) a_3(4)}{a_4(6) a_4(2)} \\
& + \frac{a_2(4)}{a_4(2)} \Big] b_2(2) - \left[\frac{a_0(11) a_3(6) a_4(7) a_4(3)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} - \frac{a_0(10) a_3(6) a_4(7) a_4(3)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(1)} \right. \\
& - \frac{a_0(11) a_4(6) a_3(2) a_4(3)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_0(10) a_4(6) a_3(2) a_4(3)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(1)} + \frac{a_3(7) a_3(2) a_4(3)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1)} \\
& + \frac{a_3(6) a_3(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_3(3)}{a_4(2) a_4(1)} \Big] b_2(1) - \left[\frac{a_0(11) a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_4(3)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \right. \\
& - \frac{a_0(10) a_3(6) a_4(7) a_3(1) a_4(3)}{a_1(10) a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_0(11) a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} \\
& - \frac{a_0(10) a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_0(10) a_4(6) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_2(6) a_2(4) a_4(6)}{a_4(6) a_4(4) a_4(2)} - \frac{a_2(6) a_4(2)}{a_4(6) a_4(0)} \\
& - \frac{a_3(7) a_3(2) a_3(1) a_4(3)}{a_4(6) a_4(2) a_4(1) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_3(5) a_4(2)}{a_4(6) a_4(5) a_4(0)} - \frac{a_3(6) a_3(7) a_3(1) a_4(3)}{a_4(6) a_4(5) a_4(1) a_4(0)} \\
& + \frac{a_2(2) a_4(2)}{a_4(2) a_4(0)} \Big] b_2(0) + \left[\frac{a_0(11) a_4(6) a_4(3)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2)} - \frac{a_0(10) a_4(6) a_4(3)}{a_1(10) a_4(5) a_4(2)} + \frac{a_3(7) a_4(3)}{a_4(6) a_4(2)} \right. \\
& \left. + \frac{a_3(3)}{a_4(2)} \right] b_1(2) - \left[\frac{a_3(6) a_4(5) a_4(2)}{a_4(6) a_4(4) a_4(1)} + \frac{a_3(2) a_4(2)}{a_4(2) a_4(1)} \right] b_1(1) + b_0(2)
\end{aligned}$$

bulunur.

Verilen bir dördüncü dereceden ayrık zamanlı A sisteminin tüm dördüncü dereceden değişmeli eşleniklerini bulma probleminde, eşitlikteki fark denklemlerinin yukardaki çözümlerini ele alıyoruz. A 'nın katsayılarının bilindiği varsayılmaktadır. B 'nin katsayıları aşağıdaki sırayla bulunur:

- i) $b_4(0), b_4(1), b_4(2), b_4(3)$ sıfır olmayan keyfi sabitler olduğunu varsayarak, dördüncü dereceden (4.5) fark denkleminin $k \geq 4$ için çözümünden $b_4(k)$ bulunur.
- ii) $b_4(k)$ biliniyorken $b_3(0), b_3(1), b_3(2), b_3(3)$ 'ün keyfi sabitler olduğunu varsayarak, $k \geq 4$ için dördüncü dereceden fark denklemi (4.6)'nın çözümünden $b_3(k)$ bulunur.
- iii) $b_4(k), b_3(k)$ biliniyorken, $b_2(0), b_2(1), b_2(2), b_2(3)$ 'ün keyfi sabitler olduğunu varsayarak, $k \geq 4$ için dördüncü dereceden fark denklemini (4.7)'nin çözümünden $b_2(k)$ bulunur.
- iv) $b_4(k), b_3(k), b_2(k)$ biliniyorken, $b_1(0), b_1(1), b_1(2), b_1(3)$ 'ün keyfi sabitler olduğunu varsayarak, $k \geq 4$ için dördüncü dereceden fark denklemini (4.8)'in çözümünden $b_1(k)$ bulunur.
- v) $b_4(k), b_3(k), b_2(k), b_1(k)$ biliniyorken, $b_0(0), b_0(1), b_0(2), b_0(3)$ 'ün keyfi sabitler olduğunu varsayarak, $k \geq 4$ için dördüncü dereceden fark denklemini (4.9)'un çözümünden $b_0(k)$ bulunur.

Çözümleri bulmak için z -dönüşümü yöntemi kullanılabilir. Fark denklemlerinin karmaşıklığı oldukça yüksek olduğundan ve her seferinde önceki çözümlerin yer değiştirmesiyle daha da arttığından, doğru sonuçlar elde etmek için MATLAB veya Mathematica gibi uygun bir bilgisayar araç kutusuna kesinlikle ihtiyaç vardır.

Esasında denklem (4.10), (4.11) ve (4.12) denklemlerinin çözümlerinden bulunan $b_0(k)$ değerleri, denklem (4.5)'in çözümünden bulunan $b_0(k)$ değerleri ile aynı olmalıdır. Bu değerlerin eşitlenmesi ile (4.5-12) denklemlerinin çözümünde kullanılan gelişigüzel seçilmiş sabit başlangıç değerleriyle A sistemlerinin katsayıları olan $a_i(k)$ 'ler arasında birçok bağlantının olması gerekli bir koşuldur. Yani her dördüncü dereceden ayrık zamanlı bir A sisteminin yine dördüncü veya daha alt dereceden komütativite eşleniği olacak bir B sistemi bulunmamaktadır.

Diğer bir deyişle (4.5-9) denklemlerinin çözümünden bulunan $b_4(k)$, $b_3(k)$, $b_2(k)$, $b_1(k)$ ve $b_0(k)$ değerleri (4.10), (4.11), (4.12) denklemlerine yerleştirildiğinde bu üç denklemin (4.10-12) sağlanması gereklidir; bu ise (4.5-9) denklemlerinin çözümünde kullanılan sabit değerler ile A sisteminin katsayıları arasında birçok bağlantının sağlanmasını gerektirir.

A 'yı tanımlayan fark denkleminin katsayılarının ($a_4(k)$, $a_3(k)$, $a_2(k)$, $a_1(k)$) büyük bir çoğunluğunun sıfır olması durumunda yukarıda bulunmuş olan denklemlerle tanımlana komütativite özelliklerini el gayreti ile takip etmek imkânı olabilir. Aksi takdirde bu özelliklerin sağlanıp sağlanmadığı hazırlanması gereken bir bilgisayar programları ile ancak mümkündür. Bu ise tezin kapsamını aşmakta olup ileride yapılacak çalışmalar önerisinde bölüm 5.'de bahs olunmuştur.

A alt sisteminin B değişmeli eşleniklerinin katsayılarını bulmak için $5 \times 4 = 20$ keyfi sabite ihtiyaç duyulduğu önceki bölümde belirtilmişti. Öte yandan, kullanılmayan üç denklem kalmıştır: Eşitlik (4.10), (4.11), (4.12). Değişmeli eşlenik B 'nin varlığı için, bu denklemler de tüm $k \geq 0$ için sağlanmalıdır. 20 keyfi seçilmiş başlangıç değerini sabitlemek için en az 20 denkleme ihtiyaç vardır. Bu denklemler $\{k \in [0,19]$ ile (4.10), (4.11), (4.12) denklemlerinin} alt kümesinden seçilebilir. Bir çözüm bulunursa, (4.10), (4.11), (4.12) denklemlerinin tüm $k \geq 0$ için sağlanması gerektiğini unutmayın. B katsayılarının bulunan 20 başlangıç değeri ile, hesaplanmasında kullanılmayan kalan denklemler sağlanmıyorsa veya çelişkilerle sonuçlanıyorsa, bu, verilen dördüncü dereceden ayrık zamanlı A sisteminin kendisinden başka dördüncü dereceden değişmeli bir eşleniği olmadığına karar vermek için yeterlidir.

4.2. Dördüncü Dereceden Sistemlerin İkinci Dereceden Alt Sistemlere Ayırıştırılması

Dördüncü dereceden (2.2.5) denklemi ile tanımlanan ayrık zamanlı doğrusal bir sistemin, sırasıyla (2.2.1) ve (2.2.3) denklemleri ile tanımlanan A ve B ikinci dereceden komütatif eşlenik alt sistemlerinin ardışık bağlantısı olarak ayrıştırılabilmesi için (2.2.6-10) denklemleriyle (2.2.25-28) denklemleri göz önüne alınacaktır.

Denklem (2.2.10)'da $a_0(k)$ bağımsız seçilirse $a_0(k) \neq 0$ olmak üzere

$$b_0(k) = \frac{c_0(k)}{a_0(k)} \quad (4.2.1)$$

olmalıdır. Denklem (2.2.9)'da $b_0(k+1)$ yerine (4.2.1) denkleminde k yerine $k+1$ konularak

$$c_1(k) = \frac{c_0(k+1)}{a_0(k+1)} a_1(k) + b_1(k) a_0(k)$$

denklemi elde edilir. Buradan

$$b_1(k) = \frac{c_1(k)}{a_0(k)} - \frac{c_0(k+1) a_1(k)}{a_0(k+1) a_0(k)}. \quad (4.2.2)$$

(2.2.8) denkleminde (4.2.1) ve (4.2.2) de $b_0(k)$ ve $b_1(k)$ için bulunan ifadeler kullanılarak

$$c_2(k) = \frac{c_0(k+2)}{a_0(k+2)} a_2(k) + \left[\frac{c_1(k+1)}{a_0(k+1)} - \frac{c_0(k+2)}{a_0(k+2)} a_1(k+1) \right] a_1(k) + b_2(k) a_0(k). \quad (4.2.3)$$

elde edilir. Bu denklem $b_2(k)$ için çözülürse

$$b_2(k) = \frac{c_2(k)}{a_0(k)} - \frac{c_0(k+2)}{a_0(k+2)} - \frac{a_2(k)}{a_0(k)} - \frac{c_1(k+1) a_1(k)}{a_0(k+1) a_0(k)} + \frac{c_0(k+2) a_1(k+1) a_1(k)}{a_0(k+2) a_0(k)} \quad (4.2.4)$$

denklemi bulunur.

(4.2.1), (4.2.2) ve (4.2.3)'de bulunan denklemlerin denklem (2.2.6)'yı ve denklem (2.2.7)'yi sağlaması gerekir. Ayrıca (2.2.25-28) denklemlerinin sağlanması gereklidir. Bu denklemler aynı zamanda tekildir. Görülmektedir ki her dördüncü dereceden ayrık zaman sistemi C , A ve B gibi iki komütatif sisteme ayrıştırılamaz; Ayırıştırma probleminin çözümü için sağlanması yeterli olan denklemleri göz önüne

olarak aşağıdaki adımları takip etmelidir. Başlangıçta ayrıştırılacak C sisteminin katsayıları olan $c_0(k), c_1(k), c_2(k), c_3(k)$ ve $c_4(k)$ biliniyor kabul edilerek;

1. $a_0(k), a_1(k)$ ve $a_2(k)$ temel alınarak (4.2.1), (4.2.2) ve (4.2.3) denklemlerinden $b_0(k), b_1(k)$ ve $b_2(k)$ hesaplanır.

2. Bulunan $b_0(k), b_1(k)$ ve $b_2(k)$ değerleri

i. (2.2.6) ve (2.2.7) denklemlerini sağlamalıdır; ayrıca,

ii. (2.2.25), (2.2.26), (2.2.27) ve (2.2.28) denklemlerini sağlamalıdır.

Bu adımların uygulanmasının fiziksel olarak el hesaplamaları ile yapılmasının imkânsız olduğu görülmektedir. Ancak ayrıştırılması A ve B alt sistemleri olarak yapılmış dördüncü derecede bir C sisteminin gerekli koşulları sağlayıp sağlamadığı önce (2.2.6-10) denklemlerinin sağlanıp sağlanmadığı, sonra (2.2.25-28) denklemlerinin sağlanıp sağlanmadığı el hesaplamaları ile kontrol edilebilir. Bu aşamada (2.2.25-28) denklemleri yerine (2.2.16-19) denklemleri $\bar{c}_4(k) = c_4(k)$, $\bar{c}_3(k) = c_3(k)$, $\bar{c}_2(k) = c_2(k)$, $\bar{c}_1(k) = c_1(k)$, $\bar{c}_0(k) = c_0(k)$ kabul edilerek test edilebilir.

Görülmektedir ki ayrıştırma probleminin çözümünün el hesaplamaları ile yapılması imkansızdır. Çözüm, bir dizi bilgisayar alt programlarının hazırlanması ile mümkündür. Bu iste mevcut tezin sınırlarını aşmakta olup ileride yapılacak çalışmalar olarak önerilmiştir.

4.3. İkinci Dereceden A Sistemini Dördüncü Dereceden Bir C Sisteminin Ayrıştırılmış Bir Parçasının Olabilirliği ve C Sisteminin Bulunması

Bölüm 4.2’de gösterilmiştir ki verilen her dördüncü derecede bir ayrık zaman sisteminin ikinci dereceden komütatif alt sistemlere ayrıştırılması mümkün değildir, mümkün olsa da bu ayrıştırmayı el hesaplamalarıyla yapmak neredeyse imkansızdır. (çok özel durumlar hariç; örneğin $c_0(k), c_1(k), c_3(k) = 0; c_4(k) \neq 0$).

Yukarıdaki nedenle, bu bölümde verilen ikinci dereceden bir A ayrık zaman sisteminin dördüncü dereceden bir C sisteminin ayrıştırılmış bir parçası olması için gerek koşullar ve bu koşullar sağlanırsa C sisteminin katsayılarının neler olabileceği tartışılmıştır.

Denklem (2.2.1) ile ikinci dereceden tanımlanan bir A sistemi verilsin. Bu sistem ile komütatif olabilecek ikinci dereceden B sistemlerinin katsayıları $b_2(k)$,

$b_1(k), b_0(k)$, (2.2.25), (2.2.26), (2.2.27) denklemleri kullanılarak $a_2(k), a_1(k), a_0(k)$ cinsinden bulunur. Bulunan denklemler (2.2.28) denkleminde yerine konularak A sisteminin katsayılarının sağlanması gerekli koşul ortaya çıkar. Bu koşul sağlanıyorsa A ve B alt sistemlerinin komütatif olması garanti altına alınmış olur. Böylece A sisteminin komütatif eşleniği olan tüm B sistemleri ortaya çıkar.

Bundan sonraki adım A ve B sistemleri komütatif alt sistem olarak kabul eden (A ve B sistemlerine ayrıştırılabilen) ve (2.2.5) denklemleriyle tanımlanan C sisteminin katsayıları bulunmaktadır. Bu işlem (2.2.6-10) denklemlerini kullanarak sağlanır.



5. SONUÇLAR

Bu tezde birinci, ikinci, üçüncü dereceden ayırık zamanla değişen sistemlerin komütativite koşulları sunulmuştur. Aynı zamanda ikinci dereceden doğrusal zamanla değişen herhangi bir ayırık zaman sisteminin birinci dereceden iki alt sisteme ayrıştırılması için gerekli ve yeterli koşullar sunulmuştur. Bununla beraber üçüncü dereceden ayırık zamanlı doğrusal zamanla değişen sistemin birinci ve ikinci dereceden komütatif eşleniklerine ayrıştırılması için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir. Ayrıca dördüncü dereceden ayırık zamanlı doğrusal zamanla değişen sistemin iki ayrı ikinci dereceden komütatif eşleniklerine ayrıştırılması için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir.



KAYNAKLAR

- Abdullahi, M. Hassan. (2022). Decomposition of third-order discrete-time linear-varying system into ist first and second order commutative pairs *Master Thesis*, Ondokuz Mayıs University, Samsun.
- Ar, Sümeyye. (2020). *İkinci dereceden ayrık zamanlı doğrusal zamanla değişen sistemlerin komütatif ayrıştırılması*, yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Samsun.
- Arnol, M., Begun, N., Gurevich, P., Kwame, E., Lamba, H. and Rachinskii, D. (2017). Dynamics of discrete time systems with a hysteresis stop operator. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 16, 91-119.
- Bilgin, R. Funda. (2022). *Üçüncü mertebeden ayrık zamanlı lineer zamanla değişen sistemlerin komütativitesi*, yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Samsun.
- İbrahim, S. (2019). Commutativity of High-her Order Linear Time-varying Differential Systems. *PhD Thesis*, Ondokuz Mayıs University, Samsun.
- Li, Y., Liu, S. and Wang, Z. (2016). Fault detection for linear discrete time-varying systems with intermittent observations and quantization errors. *Asian Journal of Control*, 18:1, 377-389.
- Lyons, R. G. (2011). “*Understanding Digital Signal Processing*”, Prentice Hall.
- Koksal, M. (1982). Commutativity of second order time-varying systems. *International Journal of Control*, 3, 541-44.
- Koksal, M. 1988. An exhaustive study on the commutativity of time varying systems. *International Journal of Control*, 5, 1521-1537.
- Koksal, M. ve Koksal, M. E. (2013). Ardışık bağlı zamanla değişen doğrusal ayrık-zaman sistemlerinin sıra-değişim özelliği. Turkish National Meeting on Automatics Control 2013, 26-28 Sep 2013, Malatya, Turkey, pp. 1128-1131.
- Koksal, M. ve Koksal, M. E. (2015). Commutativity of cascade connected discrete time linear time-varying systems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 1-8.
- Koksal, M. E. (2019). Commutativity of first-order discrete-time linear time-varying systems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42:16, 5274-5292.
- Koksal, M. E. (2019). Commutativity of first-order discrete-time linear time-varying systems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42:16, 5274-5292.
- Koksal, M. ve Koksal, M. E. (2015). Commutativity of cascade connected discrete time linear time-varying systems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 1-8.
- Koksal, M. E. ve Yakar, A. (2019). Decomposition of a third-order linear time-varying differential system into its second and first-order commutative pairs. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 38:10, 4446-4464.
- Koksal, M. E. (2016). Decomposition of a second-order linear time-varying differential system as the series connection of two first-order commutative pairs. *Open Mathematics*, 14, 693-704
- Koksal, M. ve Koksal, M. E. (2011). Commutativity of linear time-varying differential systems with non-zero initial conditions: A review and some new extensions. *Mathematical Problems in Engineering*, 2011, 1-25.
- Marshall, J. E. (1977). Commutativity of time varying systems. *Electro Letters*, 18, 539-40.

- Nguyen, H. N., Oлару, S., Gutman, P. O. ve Hovd, M. (2015). Constrained control of uncertain, time-varying linear discrete-time systems subject to bounded disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60:3, 831-836.
- Nguyen, H. N., Gutman, P. O., Oлару, S. ve Hovd, M. (2013). Implicit improved vertex control for uncertain, time-varying linear discrete-time systems with state and control constraints. *Automatica*, 49, 2754-2759.
- Phat, V. N. ve Ratichagit, K. (2011). Stability and stabilization of switched linear discrete-time systems with interval time-varying delay. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 5, 605-612.
- Parlakçı, M. N. A. (2014). Robust stability of linear uncertain discrete-time systems with interval time-varying delay. *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, 22, 650-662.
- Shen, B., Ding, S. T. ve Wang, Z. (2013). Finite-horizon H_∞ fault estimation for uncertain linear discrete time-varying systems with known inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60:2, 902-906.
- Tabataeipour, S. M. (2013). Active fault detection and isolation of discrete-time linear time-varying systems: a set-membership approach. *International Journal of Control*, 46:11, 1917-1933.
- Willigenburg, L. G. V. ve Koning Willem, L. D. (2015). Temporal stabilizability and compensability of time-varying linear discrete-time systems with white stochastic parameters. *European Journal of Control*, 23, 36-47.
- Yao, Y., Liu, K., Balakrishnan, V., She, W. and Zhang, J. (2014). Robust exponential stability analysis of uncertain discrete time-varying linear systems. *Asian Journal of Control*, 16:6, 1820-1828.
- Zhang, Z., Zhang, Z., Zhang, H., Zheng, B. ve Karimi, H. R. (2014). Finite-time stability analysis and stabilization for linear discrete-time system with time-varying delay. *Journal of the Franklin Institute-Engineering and Applied Mathematics*, 351, 3457-3476.
- Zhong, M., Zhou, D. ve Ding, S. X. (2013). On designing fault detection filter for linear discrete time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55:7, 1689-1694.

ÖZ GEÇMİŞ

Türkay Er, Amasya Fen Lisesi'nde lise eğitimini tamamladıktan sonra Ondokuz Mayıs Üniversitesi'ne katılarak lisans ve yüksek lisans derecelerini elde etti. Lisans eğitimi sırasında Yükseköğrenim Kurumu (YÖK) Başarı Bursu kazandı ve yüksek lisans eğitimi boyunca TÜBİTAK BİDEB 2210 Bursu ile desteklendi.

ORCID ID : <https://orcid.org/0009-0009-8313-148X>

Yayınlar:

1. T. Er, M. E. Koksall, Commutativity of Fourth-Order Discrete-Time Linear Time-Varying Systems, 6th International Conference on Mathematics: “An Istanbul Meeting for World Mathematicians”, 1-3 Dec 2021, Istanbul, Turkey, pp. 437-442, 2021