

EYLÜL 2021

Yüksek Lisans Tezi- Matematik

BETÜL TUNCEL

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN GEÇİŞ ŞARTLI
STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN TERS SPEKTRAL
PROBLEMİ

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BETÜL TUNCEL
EYLÜL 2021

**DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN GEÇİŞ ŞARTLI STURM-
LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN TERS SPEKTRAL
PROBLEMİ**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Prof. Dr. Abdullah KABLAN

Betül TUNCEL

Eylül 2021



©2021[Betül TUNCEL]

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Betül TUNCEL

ABSTRACT

THE INVERSE SPECTRAL PROBLEM OF FOURTH-ORDER TRANSMISSION CONDITIONS STURM-LIOUVILLE PROBLEMS

TUNCEL, Betül

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah KABLAN

September 2021

43 pages

The aim of this thesis is based on the creation of a class of self-adjoint and non-self-adjoint fourth-order Sturm-Liouville problems with a transmission condition finite spectrum. In this thesis, we will define a type of Sturm-Liouville problem that will later be called the Atkinson equation. The fourth-order Sturm-Liouville inverse spectral problem, which is formed by this kind of equation with separated coupled self-adjoint boundary conditions, has a finite dimensional matrix eigenvalue problem. Conversely, for any given type of matrix eigenvalue problem and an arbitrary separated coupled self-adjoint boundary condition, we will construct a class of Sturm-Liouville problems with a special boundary condition equivalent to this matrix eigenvalue problem. Equivalence here means having the same eigenvalue.

Key words: Sturm-Liouville Problem, Finite Spectrum, Matrix Eigenvalue Problems,
Inverse Spectral Problem

ÖZET

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN GEÇİŞ ŞARTLI STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN TERS SPEKTRAL PROBLEMİ

TUNCEL, Betül

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Danışman: Prof. Dr. Abdullah KABLAN

Eylül 2021

43 Sayfa

Bu tezin amacı dördüncü mertebeden geçiş şartlı sonlu spektruma sahip kendine eş ve kendine eş olmayan Sturm-Liouville problemlerinin bir sınıfının oluşturulmasını temel almaktır. Bu tezde daha sonra Atkinson denklemi olarak adlandırılacak olan bir tür Sturm-Liouville problemi tanımlayacağız. Bu türden denklemin, ayrık ve ayrık olmayan kendine eş sınır şartıyla birlikte oluşturduğu dördüncü mertebeden Sturm-Liouville ters spektral problemi sonlu boyutlu matris özdeğer problemine sahiptir. Tersine, verilen herhangi belirli bir tipteki matris özdeğer problemi ile ayrık ve ayrık olmayan kendine eş sınır şartı için bu matris özdeğer problemine denk olan özel sınır şartına sahip bir Sturm-Liouville problemler sınıfı inşa edeceğiz. Burada denklik aynı özdeğere sahip olma anlamındadır.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville Problemi, Sonlu Spektrum, Matris Özdeğer Problemleri, Ters Spektral Problem



“Biricik aileme”

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Prof. Dr. Abdullah KABLAN' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve en çok güvenen her zaman varlığını en derinden hissettiğim çok sevdiğim biricik annem Hanım TUNCEL' e, ablalarım, kardeşlerime, babama ve en yakın dostum Maral ORUNOVA' ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ABSTRACT.....	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
SEMBOLLER LİSTESİ.....	x
BÖLÜM I: GİRİŞ	1
BÖLÜM II: STURM-LIOUVILLE TEORİSİ.....	3
BÖLÜM III: SONLU SPEKTRUMLU DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN TERS SPEKTRAL PROBLEMİ..	11
3.1 Temel Problem ve Gösterimler	11
3.2 Atkinson Tipli Dördüncü Mertebeden Sınır Değer Probleminin Matris Gösterimleri	13
3.3 Matris Özdeğerlerinin Ters Problemleri	16
3.4 Ana Sonuç ve İspat	18
3.5 Sayısal Algoritma ve Örnek	21
BÖLÜM IV: GEÇİŞ ŞARTLI DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÖZDEĞERLERİNİN MATRİS TEORİSİ İLE BULUNMASI	23
4.1 Bazı Gösterimler ve Probleme Giriş.....	23
4.2 İspatlar	34
BÖLÜM V: SONUÇ	39
KAYNAKLAR.....	41
ÖZGEÇMİŞ.....	43

SEMBOLLER LİSTESİ

λ	Özdeğer
π	Pi
α	Alfa
β	Beta
δ	Delta
Φ	Fi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$[]^T$	Bir matrisin transpozu
$L(J, \mathbb{R})$	J üzerinde Lebesgue İntegrallenebilir fonksiyonlar kümesi
$L(I, \mathbb{R})$	I üzerinde Lebesgue İntegrallenebilir fonksiyonlar kümesi

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu tezin esas amacı $-\infty < a < b < \infty$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere [1]

$$(py'')'' + qy = \lambda wy, \quad J = (a, b) \quad (1.1)$$

denkleminin verilen ayrık ve ayrık olmayan sınır şartları ile birlikte oluşturduğu Sturm-Liouville operatörünün sonlu spektruma sahip formların matris gösterimlerini bulmaktır. Genel Sturm-Liouville teorisinden biliyoruz ki; düzenli veya tekil olsun kendine eş bir Sturm-Liouville probleminin spektrum kümesi sınırsız ve dolayısıyla sonsuz elamana sahiptir. Bu sonuç genel olarak p katsayısı ile w ağırlık fonksiyonunun pozitif olması ile elde edilir. Ancak Atkinson [2] deki kitabında bu pozitiflik şartını oldukça esnetmiştir. Şöyle ki; p ve w fonksiyonlarını negatif olmayan fonksiyonlar olarak ayırmış, ayrıca $\frac{1}{p}$ nin ve w nun her ikisini de bazı alt aralıklarda sıfıra özdeş olarak almıştır. Daha sonra Kong ve Zettl bu fikirden yola çıkarak herhangi bir negatif olmayan n tamsayısı için tam olarak n tane özdeğere sahip olan kendine eş ve kendine eş olmayan Sturm-Liouville problemleri inşa etmişlerdir, [3]. Yine 2014 yılında Bo ve arkadaşları [4] dördüncü mertebeden geçiş koşullarına sahip sınır değer problemi için sonlu sayıda özdeğer olduğunu kanıtlamışlardır. Dolayısıyla bir Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin sayısı sonsuz tane olmaktan çıkıp sonlu hale gelmiştir, hatta istenilen sayıda özdeğere sahip Sturm-Liouville problemleri inşa edilebilir duruma gelinmiştir. Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerlerinin sonlu olması bir diğer sonlu özdeğere sahip olan matris özdeğer problemleri ile ilişki kurmaya yol açmış ve Kong, Volkmer ve Zettl [5] deki çalışmasında sonlu özdeğere sahip Sturm-Liouville problemlerinin matris gösterimlerini elde etmiştir. Daha sonra ise Kablan ve Manafov [6] belirli tipte geçiş koşulları ile dördüncü mertebeden problemlerin matris gösterimlerini elde etmişlerdir. [7, 4, 8] den ve kısmen [6] dan elde edilen bilgilerden yola çıkarak bu tezde bir sınıf

dördüncü mertebeden sınır değer problemlerinin incelenmesi ve buna karşılık gelen geçiş koşulları ile bu tür problemlerin eşdeğer matris gösterimleri verilmiştir. [1, 9] ve [10] tarafından uyarlanan bu tezde yukarıda bahsedilen dördüncü mertebeden Sturm-Liouville denkleminin sonlu spektrumda bir ters spektral probleminin var olduğu gösterilmiştir. [11] da, geçiş koşullu Sturm-Liouville problemlerinin matris formlarının, ayırık sınır koşulları için 'hemen hemen' simetrik üç köşegen matris olduğunu ve reel ayırık olmayan sınır koşulları için 'hemen hemen' simetrik döngüsel (veya periyodik) üç köşegenli matris olduğunu göstermektedir. Ayrıca [7, 8] de dördüncü dereceden sınır değer problemlerinin matris formları blok üç köşegenli matrislerdir. Ayrıca bkz. [11]. Bu tezde ise dördüncü bölümünde simetrik blok döngüsel üç köşegenli matrisler ve 'hemen hemen' simetrik üç köşegenli matrisler olarak sunulacaktır.

BÖLÜM II

STURM-LIOUVILLE TEORİSİ

Bu bölümünde kendine eş olması zorunlu olmayan iki noktalı sınır koşulları ile düzenli genel Sturm-Liouville problemlerini inceleyeceğiz. Burada karmaşık değerli analitik fonksiyonlarının teorisi kullanılacaktır. Şimdi

$$r = \frac{1}{p}, \quad q, w \in L(I, \mathbb{R}), \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (2.1)$$

olmak üzere

$$AY(a) + BY(b) = 0, \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ py' \end{bmatrix}, \quad A, B \in M_2(\mathbb{C}) \quad (2.2)$$

sınır koşulları ile birlikte düzenli iki noktalı bir Sturm-Liouville problemi J aralığında

$$-(py')' + qy = \lambda wy, \quad -\infty \leq a < b \leq \infty \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlıdır. $M_2(\mathbb{C})$ ile karmaşık elemanları olan 2×2 boyutundaki matrisler ifade edilmiştir. [10] daki Bölüm 1.6 dan $Y(a)$ ile $Y(b)$ nin (a, b sonlu veya sonsuz olmak üzere) sonlu limitli olduğu bilinmektedir. Bu yüzden (2.2) iyi tanımlıdır. Şimdi

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/p \\ q & 0 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

olduğunu varsayalım. O zaman [10] daki Bölüm 2 de gösterildiği gibi, birinci mertebeden

$$Y' = (P - \lambda W)Y = \begin{bmatrix} 0 & 1/p \\ q - \lambda w & 0 \end{bmatrix} Y, \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ py' \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

sistemi (2.3) skaler denklemine eşdeğerdir.

(2.5) in birincil temel matrisi $\Phi'(\cdot, u, P, w, \lambda)$ olsun ve

$$\Phi' = (P - \lambda W)\Phi, \quad \Phi(u, u, \lambda) = I, \quad a \leq u \leq b, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (2.6)$$

ile tanımlansın. δ karakteristik fonksiyonu

$$\delta(\lambda) = \delta(a, b, A, B, P, w, \lambda) = \det[A + B\Phi(b, a, P, w, \lambda)], \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (2.7)$$

ile tanımlıdır. Bu yüzden δ fonksiyonu aşırı fonksiyon olarak adlandırılır, buna karakteristik fonksiyon da denir. Aşağıdaki tanımlar (2.7) nin özdeğerlerinin sıfırlarıdır.

Tanım 2.1. I aralığı üzerinde tanımlı (2.3) denkleminin aşık bir çözümü ile yarı türevli $z = py'$ ve kendisi de aynı şekilde sıfır olan bir y çözümünü kastediyoruz. Burada I , J nin bir alt aralığı olabilir ya da J aralığının tamamı olabilir. (2.1) kabulüne göre, I aralığı üzerinde bir y çözümünün sıfırı olabilir ancak yarı türevli py' nin sıfırı olması zorunda değildir.

Tanım 2.2. (2.1) sağlansın ve J üzerinde (2.3) denkleminin (2.2) sınır koşullarını sağlayan aşık olmayan bir çözümü varsa, o zaman λ karmaşık sayısına (2.3) sınır değer probleminin bir özdeğeri denir. Böyle bir çözüme de λ ya karşılık gelen özfonksiyon denir. Bir özfonksiyonun herhangi bir katı da bir özfonksiyondur. Aynı λ özdeğeri için lineer bağımsız iki özfonksiyon varsa, o zaman λ iki geometrik katlılığa sahiptir. λ nın sadece bir tane lineer bağımsız özfonksiyonu varsa, λ nın basit bir özdeğer olduğunu veya λ nın geometrik katlılığı 1 dir. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için (2.3) denklemini tam olarak iki lineer bağımsız çözüme sahip olduğundan, her bir özdeğerin bir veya iki geometrik katlılığı vardır.

Uyarı 2.1. (2.1) koşulu katsayıların reel değerli olmasına engel değildir. Eğer reel değerli ise r , q , w katsayılarından herhangi birinin işaretini etkilemez. Ayrıca r , q , w değerlerinin her biri J nin bir veya daha fazla alt aralığında tanımlı olabilir. Şimdi aşağıdaki değişken değişimini yapalım;

$$y' = rz, \quad z' = (q - \lambda w)y, \quad z = py', \quad r = \frac{1}{p}$$

Eğer bir I alt aralığında r sıfırsa, o zaman tüm y çözümleri I üzerinde sabittir ve bazı y çözümleri için bu sabitler sıfır ise, o zaman $z = py'$ yarı türevi I üzerinde sıfır olmayan bir sabit olabilir. Benzer şekilde, eğer bir I alt aralığında hem q hem de w aynı şekilde sıfırsa o zaman py' , I üzerinde tanımlı herhangi bir y çözümü için sabittir. Bu sabit, I üzerinde y sıfır olduğunda bile sıfır olmayabilir. Aşık olmayan bir y çözümünün sıfırlardan oluşan bir aralığı özellikle özfonksiyonlar üzerindeki sonuçlarda çözümlerin sıfırı gibi tek bir sıfır olarak sayılır.

Uyarı 2.2. [10] daki Bölüm 2.3 ten, (2.1) koşulunun y ve py' nin (sonlu veya sonsuz) a, b uç noktalarında sonlu limitli olduğu bilinir. Dolayısıyla (2.2) sınır koşulu iyi tanımlıdır.

Lemma 2.1. (2.1), (2.2), (2.3) ü ele alalım. O zaman δ karakteristik fonksiyonu iyi tanımlıdır ve $(a, b, A, B, P, w, \lambda)$ sabitleri için λ nın bir tam fonksiyonudur.

İspat. [10] daki Teorem 1.5.2 den biliyoruz ki λ , P , w sabitleri için birincil temel matris $\phi(b, a, P, \lambda, w)$ vardır ve a ile b uç noktalarında süreklidir. λ ile ilgili olan tüm tanımlamalar [10] daki Teorem 2.5.3 ten elde edilmiştir.

Lemma 2.2. (2.1) i ele alalım. O zaman:

- (1) $\delta(\lambda) = 0$ dır. Ancak ve ancak karmaşık bir λ sayısı (2.3), (2.1) sınır değer probleminin bir özdeğeridir.
- (2) Bir λ özdeğerinin geometrik katlılığı

$$[A + B\Phi(b, a, \lambda)]C = 0 \tag{2.8}$$

lineer cebir sisteminin $Y(a) = C$ lineer bağımsız vektör çözümlerinin sayısına eşittir.

İspat. $\delta(\lambda) = 0$ olduğunu varsayalım. O halde C için aşık olmayan bir vektör çözümüne sahiptir. Burada C

$$Y' = (P - \lambda W)Y, \quad Y(a) = C$$

başlangıç değer problemi ile tanımlıdır. O halde

$$Y(b) = \Phi(b, a, \lambda)Y(a) \text{ ve } [A + B\Phi(b, a, \lambda)]Y(a) = 0$$

dır. Buradan Y nin üst bileşeninin yani y nin, (2.3), (2.1) sınır değer probleminin özfonksiyonu olduğu sonucu çıkar, bu ise λ nın bu sınır değer probleminin bir özdeğeri olduğu anlamına gelir. Tersine, eğer λ nın bir özdeğeri λ ve özvektörü λ ise o zaman $Y = \begin{bmatrix} y \\ py' \end{bmatrix}$, $Y(b) = \Phi(b, a, \lambda)Y(a)$ yi ve dolayısıyla $[A + B\Phi(b, a, \lambda)]Y(a) = 0$ sağlar. y aşık bir çözüm olduğundan $Y(a) = 0$ özfonksiyondur ve bundan dolayı $\det[A + B\Phi(b, a, \lambda)] = 0$ olduğunu biliyoruz. Eğer (2.8), C için lineer olarak bağımsız iki çözüme sahipse, örneğin C_1, C_2 gibi, o zaman Y_1, Y_2 çözümleri, $Y(a) = C_1, Y(b) = C_2$ başlangıç koşullarıyla başlangıç değer problemi çözülerek elde edilebilir. O halde Y_1 ve Y_2 , (2.5) in lineer bağımsız vektör çözümleridir ve bunların üst bileşenleri y_1, y_2 ise (2.3) ün lineer bağımsız çözümleridir. Tersine, eğer y_1, y_2 (2.3) ün çözümleri lineer bağımlı ise (2.8) cebirsel sisteminin lineer bağımsız iki vektör çözümünü elde etmek için yukarıdaki adımları tersine çevirebiliriz.

Sonraki Lemma, verilen herhangi bir karmaşık sayının tam bir sınır koşulu için bir özdeğerin iki geometrik katlılığı olduğunu gösterir.

Lemma 2.3. (2.1), (2.2), (2.3) $B = -I$ koşulu ile sağlansın. Verilen bir $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı yalnızca $A = \Phi(b, a, \lambda)$ ise özdeğerin bir geometrik katlılığıdır.

İspat. Bu, Lemma 2.2 den ve ispatından yola çıkılarak elde edilebilir.

Lemma 2.4. (2.3), (2.2), (2.1) sınır değer problemi için aşağıdaki dört durumdan tam olarak biri geçerlidir:

- (1) C de özdeğer yoktur.
- (2) Her karmaşık sayı bir özdeğerdir.
- (3) Bazı $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ için C de tam olarak n tane özdeğer vardır.
- (4) C de sonsuz ama sayılabilir sayıda özdeğer vardır ve bunların sonlu yığılma noktası yoktur.

İspat. Bu, doğrudan Lemma 2.1 ile Lemma 2.2 den ve tüm fonksiyonun sıfırlarının ayrık olduğu ayrıca sonlu $\mathbb{C}$ karmaşık düzleminde yığılma noktası olmadığından kaynaklanmaktadır.

Uyarı 2.3. Pozitif ağırlık fonksiyonu w ile her kendine eş düzenli Sturm-Liouville problemi (kendine eş düzenli problemlerin tanımı için [10] daki Bölüm 4'e bakınız.) Lemma 2.4 ün dördüncü kabulünü sağlar. Aşağıdaki Bölüm 3.3, birinci ve ikinci kabulü sağlayan basit bir örnek içermektedir. Üçüncü kabul için örneklerin varlığı hakkında henüz yorum yoktur. Ancak Atkinson, kitabında bu tür örneklerin varlığından bahsetmiş, ancak hiçbirini ispatlamamıştır. Bu tür örnekler, her $n \in \mathbb{N}$ için [10] de Bölüm 3.7 de oluşturulmuştur (Ayrıca bkz. [10] daki Bölüm 4.8.). (4.12.) (2.2) sınır koşullarını birbirini kapsamayan ayrık ve ayrık olmayan iki tür olarak sınıflandırmak uygundur. Sınır koşulları homojen olduğundan, sıfır olmayan bir sabit ya da tekil olmayan bir matris ile çarpılsa da sınır koşullarına eşdeğerdir.

Lemma 2.5. (Ayrık Sınır Koşulları) (2.1), (2.2), (2.3) ü ele alalım. P , W , J nin sabit olduğunu kabul edelim.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

olsun. O halde $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\delta(\lambda) = -A_2 B_2 \phi_{11}(b, a, \lambda) - A_2 B_2 \phi_{21}(b, a, \lambda) + A_1 B_1 \phi_{12}(b, a, \lambda) - A_1 B_2 \phi_{22}(b, a, \lambda)$$

dir.

İspat. Bu, δ nin tanımından ve doğrudan bir hesaplamayla elde edilmiştir. Lemma 2.2 ile verilen tam bir fonksiyonun sıfırları olarak özdeğerlerin karakterizasyonu, sınır koşulları kendine eş olduğunda ve birleştiğinde daha basit ve daha bilgilendirici bir forma indirgenir. Bu indirgeme bir sonraki lemmada verilecektir.

Lemma 2.6. (Ayrık Olmayan Kendine Eş Sınır Koşulları) (2.1), (2.2), (2.3) sınır değer problemini ele alalım. Ve $\Phi = (\phi_{ij})$ nin (2.5) sisteminin temel matrisi olduğunu, P , W , J nin sabit olduğunu varsayalım.

$$B = -I, \quad A = e^{i\gamma} K, \quad -\pi < \gamma \leq \pi, \quad K \in SL_2(\mathbb{R}) \quad (2.10)$$

olsun. Yani K , 2×2 boyutunda reel değerli ve determinantı 1 olan bir matristir.

$K = (k_{ij})$ olsun ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$D(\lambda, K) = k_{11} \phi_{22}(b, a, \lambda) - k_{12} \phi_{21}(b, a, \lambda) - k_{21} \phi_{12}(b, a, \lambda) + k_{22} \phi_{11}(b, a, \lambda) \quad (2.11)$$

tanımlıdır. Burada $D(\lambda, K)$, γ ya bağlı değildir. O halde,

(1)

$$D(\lambda, K) = 2 \cos \gamma, \quad -\pi < \gamma \leq \pi. \quad (2.12)$$

(2.12) nin sağlanması durumunda karmaşık λ sayısı (2.3), (2.1), (2.2), (2.10) sınır değer probleminin bir özdeğeridir.

(2) Eğer p, q, w reel değerliyse o zaman u özfonksiyon olmak üzere λ

$$A = e^{i\gamma} K, \quad B = -I, \quad -\pi < \gamma \leq \pi,$$

için bir özdeğerdir.

İspat. [10] daki 1.2.15 eşitliğinden $\det \Phi(b, a, \lambda) = 1$ olduğunu biliyoruz. $(\phi_{ij}(b, a, \lambda))$ yi ϕ_{ij} olarak indirgeyelim. (2.7), (2.11) ve $\det K = 1$ olmak üzere

$$\delta(\lambda) = \det(e^{i\gamma} K, -\Phi) = \begin{vmatrix} e^{i\gamma} k_{11} - \phi_{11} & e^{i\gamma} k_{12} - \phi_{12} \\ e^{i\gamma} k_{21} - \phi_{21} & e^{i\gamma} k_{22} - \phi_{22} \end{vmatrix} = 1 + e^{2i\gamma} - e^{2i\gamma} D(\lambda)$$

elde ederiz.

Dolayısıyla ancak (2.12) sağlanırsa o zaman $\delta(\lambda) = 0$ olur. S(2.12) den ve (2.3) denkleminin eşleniği alınarak devam eder.

Uyarı 2.4. (2.10) matrisleri kendine eş sınır koşullarını tanımlanmalarına rağmen bunlar, tüm birleştirilmiş kendinde eş sınır koşullarının kanonik biçimidir, aşağıdaki bölüm 4 ve 10 a bkz.). Lemma 2.6 nin birinci kısmından p, q, w için (2.1) dışında başka hiçbir koşul için varsayım yapılamaz. Özellikle, (2.3) denkleminde simetri (biçimsel kendinden eşlik) veya kesinlik varsayımı yapılamaz. Bu nedenle (2.12) de verilen özdeğerlerin karakterizasyonu yalnızca soldan tanımlı, sağdan tanımlı ve belirsiz Sturm-Liouville problemi tanımlamaları için geçerli değildir, aynı zamanda

p, q katsayıları ve w ağırlık fonksiyonu karmaşık değerli olabilir. Ayrıca $\frac{1}{p}, q, w$ katsayılarının bir veya birden fazlası J nin daha fazla alt aralığında aynı şekilde sıfır olabilir.

Bir sonraki bölüme geçmeden önce bazı tanımları verelim.

Tanım 2.3.(Semplektik Matris) A , $2n \times 2n$ boyutunda bir blok matris olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanan bir A matrisi semplektik matris olarak adlandırılır. Burada I_n $n \times n$ boyutunda birim matristir.

Tanım 2.4.(Aritmetik Katlılık) L bir diferansiyel operatör, λ bu diferansiyel operatörünün özdeğeri olsun. λ nın elde edildiği denklemdeki kök katına λ özdeğerinin aritmetik katı denir.

Tanım 2.5.(Geometrik Katlılık) L bir diferansiyel operatör, λ bu diferansiyel operatörünün özdeğeri olsun. λ özdeğerine karşılık gelen öz uzayının boyutuna λ nın geometrik katı denir.

Tanım 2.6.(Quasi-Yarı Türev)

$$-(py')' + qy = \lambda wy, \quad -\infty \leq a < b \leq \infty$$

şeklinde tanımlanan Sturm-Liouville probleminin bir y çözümü için py' ifadesine y nin quasi(yarı) türevi denir.

Şimdi bir sonraki bölüme geçmeden önce Sturm-Liouville problemleri ve onun özdeğerleri ve özfonksiyonları ile ilgili ana özelliklerini verelim.

- Bir Sturm-Liouville probleminin $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ özdeğerleri reel değerlidir ve

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots \rightarrow \infty$$

şeklinde sıralıdırlar.

- Her bir özdeğere karşılık λ_n , (a, b) aralığı üzerinde tam olarak $n-1$ tane sıfıra sahiptir ve $y_n(x)$ özfonksiyonu için tektir ve bu n -inci temel çözüm olarak adlandırılır.
- Normalleştirilmiş özfonksiyonlar Hilbert uzayında w ağırlıklı iç çarpım altında aşağıdaki şekilde ortonormal bir taban oluşturur;

$$\langle y_n, y_m \rangle = \int_a^b y_n(x) y_m(x) w(x) dx = \delta_{mn}.$$

Burada δ_{mn} bir kroniker deltadır.



BÖLÜM III

SONLU SPEKTRUMLU DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN TERS SPEKTRAL PROBLEMİ

3.1 Temel Problem ve Gösterimler

Bu bölümün amacı Atkinson tipi dördüncü mertebeden sınır değer probleminin ters spektral problemini

$$VX = \lambda WX \quad (3.1)$$

şeklindeki belirli bir tipte özdeğer problemini kullanarak göstermektir [9]. Burada V ile W , $2n \times 2n$ boyutunda reel değerli matrislerdir ve yine V bir blok Jacobi matris, W ise diagonal matristir. Katsayıları

$$r := \frac{1}{p}, \quad q, w \in L(I, \mathbb{R})$$

ve $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$ üzerinde tanımlı olan

$$(py'')'' + qy = \lambda wy \quad (3.2)$$

biçimindeki diferansiyel denklem ile

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cdot y(a) - \sin \alpha \cdot (py'')(a) &= 0, \\ \cos \alpha \cdot y'(a) - \sin \alpha \cdot (py''')(a) &= 0, \quad 0 \leq \alpha < \pi, \\ \cos \beta \cdot y(b) - \sin \beta \cdot (py'')(b) &= 0, \\ \cos \beta \cdot y'(b) - \sin \beta \cdot (py''')(b) &= 0, \quad 0 < \beta \leq \pi, \end{aligned} \quad (3.3)$$

sınır şartlarının oluşturduğu problemi ele alalım. Burada $L(I, \mathbb{R})$ ile I üzerinde tanımlı Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar gösterilmiştir. (3.1), (3.2) sınır değer problemi Atkinson tipindedir. Yani herhangi bir $n > 1$ tam sayısı için $[a, b]$ aralığının

$$a = a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \dots < a_n < b_n = b \quad (3.4)$$

şeklinde öyle bir parçalanışı vardır ki, bu parçalanış üzerinde, $i = 0, 1, \dots, n$ $[a_i, b_i]$

üzerinde $r(t) = \frac{1}{p(t)} = 0$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$\int_{b_{i-1}}^{a_i} r(t)dt \neq 0, \quad \int_{b_{i-1}}^{a_i} r(t)t dt \neq 0, \quad \int_{b_{i-1}}^{a_i} r(t)t^2 dt \neq 0 \quad (3.5)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $[b_{i-1}, a_i]$ üzerinde

$$q(t) = 0 \quad (3.6)$$

ve $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $[b_{i-1}, a_i]$ üzerinde $w(t) = 0$ ve $i = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere

$$\int_{a_i}^{b_i} w(t)dt > 0, \quad \int_{a_i}^{b_i} w(t)t dt > 0, \quad \int_{a_i}^{b_i} w(t)t^2 dt > 0 \quad (3.7)$$

dir ve ayrıca sınır şartları kendine eşittir. Bu problem üzerinde çalışmak için öncelikle aşağıdaki gösterimleri verelim;

$$\begin{aligned} r_i &= \int_{b_{i-1}}^{a_i} r(t)dt, \quad \widehat{r}_i = \int_{b_{i-1}}^{a_i} r(t)t dt, \quad \widetilde{r}_i = \int_{b_{i-1}}^{a_i} r(t)t^2 dt, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ q_i &= \int_{b_i}^{a_i} q(t)dt, \quad \widehat{q}_i = \int_{b_i}^{a_i} q(t)t dt, \quad \widetilde{q}_i = \int_{b_i}^{a_i} q(t)t^2 dt, \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ w_i &= \int_{b_i}^{a_i} w(t)dt, \quad \widehat{w}_i = \int_{b_i}^{a_i} w(t)t dt, \quad \widetilde{w}_i = \int_{b_i}^{a_i} w(t)t^2 dt, \quad i = 0, 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.8)$$

ve $\theta_i = \widetilde{r}_i^2 - r_i \widetilde{r}_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ olduğunu kabul edelim. Katsayıları (3.5) ve (3.7) koşullarını sağlayan bir (3.2) diferansiyel denklemi için $\sigma(\alpha, \beta)$ ile (3.3) sınır şartı ve (3.2) denkleminin oluşturduğu Atkinson tipindeki dördüncü mertebeden sınır değer probleminin spektrumunu gösterelim.

$k \in \mathbb{N}$ ve $k > 2$ olduğunu kabul edelim. M_{2k} , $2k \times 2k$ boyutunda reel değerli matrislerin kümesi olsun. Herhangi bir $Y \in M_{2k}$ matrisi için $\sigma(Y)$ ile Y matrisinin özdeğerlerinin kümesi gösterilmiştir. Ayrıca Y_1 in Y matrisinden ilk satırın ve sütunun kaldırılmasıyla oluşan ana alt matris, Y^1 in Y matrisinden $2k$ -ıncı satırın ve sütunun kaldırılmasıyla oluşan bir alt matris, Y_{12} nin Y matrisinden ilk iki satırın ve

ilk iki sütunun kaldırılmasıyla oluşan ana alt matris, Y^{12} nin ise Y matrisinden son iki satırın ve son iki sütunun kaldırılmasıyla oluşan bir alt matris olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $Y, Z \in M_{2k}$ matrisleri için $(Y - \lambda^* Z)u = 0$ eşitliğinin aşıkâr olmayan bir u vektörü varsa $\lambda^*, (Y, Z)$ matris çiftinin özdeğeri olarak adlandırılır. $\sigma(Y, Z)$ ile (Y, Z) matris çiftinin bir özdeğerlerinin kümesi gösterilmiştir. Yani $\lambda^* \in \sigma(Y)$ olması için gerek ve yeter koşul $\lambda^* \in \sigma(Y, I_{2k})$ olmasıdır. Burada I_{2k} ile M_{2k} daki birim matrisler gösterilmiştir.

3.2 Atkinson Tipli Dördüncü Mertebeden Sınır Değer Probleminin Matris Gösterimleri

Aşağıdaki lemmalar, Atkinson tipi sınır değer probleminin parçalı polinom fonksiyonlar ile dördüncü mertebeden bir sınır değer problemine denk olduğunu ve matris gösterimlerinin nasıl olduğunu göstermektedir.

Lemma 3.1. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 \neq x_2$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\int_{x_1}^{x_2} P(t) dt = \eta_0, \quad \int_{x_1}^{x_2} P(t) t dt = \eta_1, \quad \int_{x_1}^{x_2} P(t) t^2 dt = \eta_2 \quad (3.9)$$

olacak şekilde herhangi bir η_0, η_1, η_2 üçlüsü için $P(t) = \tau_2 t^2 + \tau_1 t + \tau_0$ polinom fonksiyonu vardır. Lemma 3.1 deki polinomların parametrelere bağılılıklarını belirtmek için $X(x_1, x_2, \eta_0, \eta_1, \eta_2)$ gösterimini kullanacağız.

Şimdi $\bar{r}(t) = \frac{1}{\bar{p}(t)}$, $\bar{q}(t)$ ve $\bar{w}(t)$ parçalı polinomlarını

$$\begin{aligned} \bar{r}(t) &= \frac{1}{\bar{p}(t)} = \begin{cases} X(b_{i-1}, a_i, r_i, \hat{r}_i, \check{r}_i), & t \in (b_{i-1}, a_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ 0, & t \in [a_i, b_i], \quad i = 1, 2, \dots, n; \end{cases} \\ \bar{q}(t) &= \begin{cases} X(a_i, b_i, q_i, \hat{q}_i, \check{q}_i), & t \in [a_i, b_i], \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ 0, & t \in (b_{i-1}, a_i), \quad i = 1, 2, \dots, n; \end{cases} \\ \bar{w}(t) &= \begin{cases} X(a_i, b_i, w_i, \hat{w}_i, \check{w}_i), & t \in [a_i, b_i], \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ 0, & t \in (b_{i-1}, a_i), \quad i = 1, 2, \dots, n; \end{cases} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım [7].

Lemma 3.2. $r, q, w \in L(I, \mathbb{R})$ nin (3.5) ve (3.7) koşullarını sağladığını kabul edelim. O zaman dördüncü mertebeden (3.2), (3.3) sınır değer problemi, $I = [a, b]$ aralığı üzerinde parçalı polinom fonksiyonlarına sahip

$$(\bar{p}y'')'' + \bar{q}y = \lambda \bar{w}y \quad (3.10)$$

biçimindeki denklem ve (3.3) sınır koşullarından oluşan dördüncü mertebe sınır problemiyle tamamen aynı özdeğerlere sahiptir.

Lemma 3.2 den $[a, b]$ aralığının verilen bir parçalanışı ve (3.3) sınır koşulu için dördüncü mertebe sınır değer problemi (3.10) ve (3.3) ile tam olarak aynı özdeğerlere sahip olan Atkinson tipinde dördüncü mertebeden sınır değer problemlerinin bir ailesi vardır. Bu tür aile dördüncü mertebeden (3.10), (3.3) sınır değer probleminin eşdeğer ailesi olarak adlandırılır. Dördüncü mertebeden herhangi bir denklem (3.10), (3.3) sınır değer probleminin eşdeğer bir ailesi için (3.8) ile tanımlanan $r_i, \hat{r}_i, \check{r}_i, q_i, \hat{q}_i, \check{q}_i$ ve $w_i, \hat{w}_i, \check{w}_i$ lerin hepsinin aynı olduğu açıktır [7].

Lemma 3.3. $(\alpha, \beta) \in (0, \pi)$ ile (3.3) sınır şartlarını ele alalım. Ayrıca $(n+1) \times (n+1)$ boyutlu simetrik üç köşegenli bir blok matris

$$\mathbf{P}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & & & \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & P_{n-1,n} & P_{nn} & P_{n,n+1} \\ & & & P_{n,n+1} & P_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

ve

$$\mathbf{Q}_{\alpha\beta} = \text{diag}(Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \quad (3.12)$$

$$\mathbf{W}_{\alpha\beta} = \text{diag}(W_0, W_1, W_2, \dots, W_n) \quad (3.13)$$

biçiminde blok diagonal matrisleri tanımlayalım. Burada P_{ij} ler, $Q_j, W_j, j = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere 2×2 boyutundadır ve

$$P_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{r_1}{\theta_1} - \cot \alpha & -\frac{\widehat{r}_1}{\theta_1} - a \cot \alpha \\ -\frac{\widehat{r}_1}{\theta_1} - a \cot \alpha & -\frac{\widetilde{r}_1}{\theta_1} - (a^2 - 1) \cot \alpha \end{bmatrix},$$

$$P_{ii} = \begin{bmatrix} -\frac{r_{i-1}}{\theta_{i-1}} - \frac{r_i}{\theta_i} & -\frac{\widehat{r}_{i-1}}{\theta_{i-1}} - \frac{\widehat{r}_i}{\theta_i} \\ -\frac{\widehat{r}_{i-1}}{\theta_{i-1}} - \frac{\widehat{r}_i}{\theta_i} & -\frac{\widetilde{r}_{i-1}}{\theta_{i-1}} - \frac{\widetilde{r}_i}{\theta_i} \end{bmatrix}, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

$$P_{n+1,n+1} = \begin{bmatrix} -\frac{r_n}{\theta_n} - \cot \beta & -\frac{\widehat{r}_n}{\theta_n} - b \cot \beta \\ -\frac{\widehat{r}_n}{\theta_n} - b \cot \beta & -\frac{\widetilde{r}_n}{\theta_n} - (b^2 - 1) \cot \beta \end{bmatrix},$$

$$P_{i,i+1} = \begin{bmatrix} \frac{r_i}{\theta_i} & \frac{\widehat{r}_i}{\theta_i} \\ \frac{\widehat{r}_i}{\theta_i} & \frac{\widetilde{r}_i}{\theta_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$Q_j = \begin{bmatrix} q_j & \widehat{q}_j \\ \widehat{q}_j & \widetilde{q}_j \end{bmatrix}, \quad W_j = \begin{bmatrix} w_j & \widehat{w}_j \\ \widehat{w}_j & \widetilde{w}_j \end{bmatrix}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

şeklinde tanımlıdır. O zaman dördüncü mertebeden (3.2), (3.3) sınır değer probleminin $\sigma(\alpha, \beta)$ spektrumu ile $(\mathbf{P}_{\alpha\beta} + \mathbf{Q}_{\alpha\beta}, \mathbf{W}_{\alpha\beta})$ matris çiftinin $\sigma(\mathbf{P}_{\alpha\beta} + \mathbf{Q}_{\alpha\beta}, \mathbf{W}_{\alpha\beta})$ spektrumu aynıdır.

Uyarı 3.1. $\alpha = 0$ veya $\beta = \pi$ için benzer durumlar vardır. Yani eğer $\mathbf{P}_{0\beta} = (\mathbf{P}_{\alpha\beta})_{12}$, $\mathbf{P}_{\alpha\pi} = (\mathbf{P}_{\alpha\beta})^{12}$, $\mathbf{Q}_{0\beta} = (\mathbf{Q}_{\alpha\beta})_{12}$, $\mathbf{Q}_{\alpha\pi} = (\mathbf{Q}_{\alpha\beta})^{12}$, $\mathbf{W}_{0\beta} = (\mathbf{W}_{\alpha\beta})_{12}$, $\mathbf{W}_{\alpha\pi} = (\mathbf{W}_{\alpha\beta})^{12}$ olursa Lemma 3.3 teki ile aynı sonuçlar var olur. Ayrıntılar [11] de bulunabilir. Ayrıca

Lemma 3.3 ten

$$(\mathbf{P}_{\alpha\beta} + \mathbf{Q}_{\alpha\beta})_{12} = (\mathbf{P}_{\alpha\beta})_{12} + (\mathbf{Q}_{\alpha\beta})_{12}, \quad (\mathbf{P}_{\alpha\beta} + \mathbf{Q}_{\alpha\beta})^{12} = (\mathbf{P}_{\alpha\beta})^{12} + (\mathbf{Q}_{\alpha\beta})^{12}$$

yazılabilir [7].

3.3 Matris Özdeğerlerinin Ters Problemleri

Bu bölümde blok Jacobi matris için matris özdeğerlerin ters problemlerini ele alacağız. Lemma 3.3 teki matrislerle karşılaştırmadan önce M_{2k} daki aşağıdaki formda bir blok simetrik matrisleri ele alalım.

$$P_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_1 & D_1 & & & \\ D_1^T & C_2 & D_2 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & D_{k-2}^T & C_{k-1} & D_{k-1} \\ & & & D_{k-1}^T & C_k \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Burada $C_i, i=1,2,\dots,k$ ve $D_j, j=1,2,\dots,k-1$ olmak üzere 2×2 boyutunda matrislerdir.

Tanım 3.1. (3.14) biçimindeki bir $J_b \in M_{2k}$ matrisi eğer

$$C_i = \begin{bmatrix} \zeta_i & c'_i \\ c'_i & \bar{c}_i \end{bmatrix}, \zeta_i, c'_i, \bar{c}_i \neq 0, i=1,\dots,k, \quad D_i = \begin{bmatrix} \check{d}_i & 0 \\ \check{d}_i & \bar{d}_i \end{bmatrix}, \check{d}_i, \bar{d}_i, \bar{d}_i \neq 0, i=1,\dots,k-1 \text{ ise çift}$$

bantlı bir matris olarak adlandırılır [12].

Tanım 3.2. (3.14) biçimindeki bir $M \in M_{2k}$ matrisi eğer

$$C_i = \begin{bmatrix} c_i & \hat{c}_i \\ \hat{c}_i & \check{c}_i \end{bmatrix}, c_i, \hat{c}_i, \check{c}_i \neq 0, i=1,\dots,k, \quad D_i = \begin{bmatrix} d_i & \hat{d}_i \\ \hat{d}_i & \check{d}_i \end{bmatrix}, d_i, \hat{d}_i, \check{d}_i \neq 0, i=1,\dots,k-1 \text{ ise}$$

blok Jacobi matris olarak adlandırılır.

Lemma 3.4. $\{\lambda_i : i=1,\dots,2k\}$, $\{\mu_i : i=1,\dots,2k-1\}$ ve $\{\xi_i : i=1,\dots,2k-2\}$ yi

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \lambda_{2k-1} \leq \mu_{2k-1} \leq \lambda_{2k}, \\ \mu_1 &\leq \xi_1 \leq \mu_2 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \mu_{2k-2} \leq \xi_{2k-2} \leq \mu_{2k-1}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

birbiri arkasına sıralama özelliğini sağlayan üç reel sayı kümesi olarak düşünelim. O zaman öyle bir çift bantlı $J_b \in M_{2k}$ matrisi vardır ki

$$\sigma(J_b) = \{\lambda_i : i=1,\dots,2k\},$$

$$\begin{aligned}\sigma((\mathbf{J}_b)_1) &= \{\mu_i : i = 1, \dots, 2k-1\}, \\ \sigma((\mathbf{J}_b)_{12}) &= \{\xi_i : i = 1, \dots, 2k-2\}\end{aligned}$$

şeklindedir.

Bir sonraki teorem dördüncü mertebeden ters sınır değer problemi üzerinde ana sonucumuzu vermek için kritik bir öneme sahip Lemma 3.4 ün bir genişlemesidir [12].

Teorem 3.1 $\{\lambda_i : i = 1, \dots, 2k\}$, $\{\mu_i : i = 1, \dots, 2k-1\}$ ve $\{\xi_i : i = 1, \dots, 2k-2\}$ yi (3.15) birbirini arkasına sıralama özelliğini sağlayan üç reel sayı kümesi olarak kabul edelim.

Ayrıca $\mathbf{W} = \text{diag}(W_0, W_1, W_2, \dots, W_k)$, $w_i, \hat{w}_i, \check{w}_i > 0$, $\det(W_i) > 0, i = 0, 1, \dots, k$ olmak

üzere $\frac{w_i \hat{w}_{i+1} - \hat{w}_i w_{i+1}}{w_{i+1} \det(W_i)} = \frac{\check{d}_{i+1}}{d_{i+1}}, i = 0, 1, \dots, k-1$ şartlarını sağlayan bir blok diagonal matris

olarak düşünelim. Burada $d_{i+1}, \check{d}_{i+1}, i = 0, 1, \dots, k-1$ Lemma 3.4 de belirtildiği gibi $\mathbf{J}_b$ çift bantlı matrisin elemanlarıdır. Bu durumda

$$\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{W}) = \{\lambda_i : i = 1, \dots, 2k\}, \quad \sigma(\mathbf{M}_{12}, \mathbf{W}_{12}) = \{\xi_i : i = 1, \dots, 2k-2\} \quad (3.16)$$

şeklinde bir $\mathbf{M} \in M_{2k}$ Jacobi matrisi vardır.

İspat. Lemma 3.4 e göre

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{J}_b) &= \{\lambda_i : i = 1, \dots, 2k\}, \\ \sigma((\mathbf{J}_b)_1) &= \{\mu_i : i = 1, \dots, 2k-1\}, \\ \sigma((\mathbf{J}_b)_{12}) &= \{\xi_i : i = 1, \dots, 2k-2\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan çift bantlı bir $\mathbf{J}_b \in M_{2k}$ matrisi vardır. Her bir $\lambda = \lambda_i : i = 1, \dots, 2k$ için aşikar olmayan bir $u \in \mathbb{R}^{2k}$ vardır ki $(\mathbf{J}_b - \lambda I_{2k})u = 0$ şeklindedir. $\mathbf{W} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$,

$$\mathbf{R} = \text{diag}(R_0, R_1, \dots, R_k), \quad R_i = \begin{bmatrix} \sqrt{w_i} & \frac{\hat{w}_i}{\sqrt{w_i}} \\ 0 & \frac{\sqrt{\hat{w}_i w_i - \hat{w}_i^2}}{\sqrt{w_i}} \end{bmatrix}, i = 0, 1, \dots, k \text{ ve } u = \mathbf{R} \tilde{u} \text{ olsun.}$$

Yukarıda tanımlanan $(\mathbf{J}_b - \lambda I_{2k})u = 0$ denklemi soldan $\mathbf{R}^T$ ile çarpılırsa $(\mathbf{R}^T \mathbf{J}_b \mathbf{R} - \lambda \mathbf{R}^T \mathbf{R})\tilde{u} = 0$ yani $(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{W})\tilde{u} = 0$ elde edilir. Burada $\mathbf{M}$ ile $\mathbf{M} = \mathbf{R}^T \mathbf{J}_b \mathbf{R}$

gösterilmiştir. $\lambda \in \sigma(\mathbf{M}, \mathbf{W})$ olduğu ve $\mathbf{M} \in M_{2k}$ nın ise bir blok Jacobi matrisi olduğu açıktır. Benzer şekilde her bir $\xi = \xi_i, i=1, \dots, 2k-2$ için de aynı argümanlar uygulanabilir ve sonuç olarak $\mathbf{M}_{12} = (\mathbf{R}_{12})^T (\mathbf{J}_b)_{12} \mathbf{R}_{12}$, $\mathbf{W}_{12} = \mathbf{R}_{12}^T \mathbf{R}_{12}$ ve $\xi \in \sigma(\mathbf{M}_{12}, \mathbf{W}_{12})$ elde edilir. Böylece

$$\sigma(\mathbf{J}_b) \subset \sigma(\mathbf{M}, \mathbf{W}) \text{ ve } \sigma((\mathbf{J}_b)_{12}) \subset \sigma(\mathbf{M}_{12}, \mathbf{W}_{12})$$

dir. Yukarıdaki işlemler ters çevrilerek

$$\sigma(\mathbf{J}_b) \supset \sigma(\mathbf{M}, \mathbf{W}) \text{ ve } \sigma((\mathbf{J}_b)_{12}) \supset \sigma(\mathbf{M}_{12}, \mathbf{W}_{12})$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\sigma(\mathbf{J}_b) = \sigma(\mathbf{M}, \mathbf{W}) \text{ ve } \sigma((\mathbf{J}_b)_{12}) = \sigma(\mathbf{M}_{12}, \mathbf{W}_{12})$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1. $\mathbf{M}_{12}$ ve $\mathbf{W}_{12}$, $\mathbf{M}^{12}$ ve $\mathbf{W}^{12}$ ile değiştirildiğinde Teorem 3.1 in sonucu geçerlidir.

Sonuç 3.2. $i=1, \dots, k$ için $w_i, \widehat{w}_i, \check{w}_i > 0$, $w_i, \widehat{w}_i, \check{w}_i < 0$ ile değiştirildiğinde Teorem 3.1 in sonucu geçerlidir.

3.4 Ana Sonuç ve İspat

Şimdi ana sonucumuzu Atkinson tipi (3.2), (3.3) dördüncü mertebeden ters sınır değer problemi üzerinde ifade edeceğiz.

Teorem 3.2. $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ ve $\{\lambda_i : i=1, \dots, 2k\}$, $\{\mu_i : i=1, \dots, 2k-1\}$, $\{\xi_i : i=1, \dots, 2k-2\}$ kümelerinin (3.15) arka arkaya sıralama özelliği taşıyan üç reel sayı kümesi ve $n=k-1$ olduğunu kabul edelim. O zaman herhangi bir $-\infty < a < b < \infty$ aralığının herhangi bir (3.4) parçalanışı ve (3.7) koşulunu sağlayan herhangi bir $w \in L(I, \mathbb{R})$ için şunlar yazılabilir:

(a) Dördüncü mertebeden (3.2), (3.3) sınır değer probleminin ilişkili eşdeğer ailesinin

$$\sigma(\alpha, \beta) = \{\lambda_i : i = 1, \dots, 2k\} \text{ ve } \sigma(0, \beta) = \{\xi_i : i = 1, \dots, 2k-2\}$$

spektrumlarına sahip olacak şekilde (3.5), (3.6) koşullarını sağlayan $r, q \in L(I, \mathbb{R})$ vardır.

(b) Dördüncü mertebeden (3.2), (3.3) sınır değer probleminin ilişkili eşdeğer ailesinin

$$\sigma(\alpha, \beta) = \{\lambda_i : i = 1, \dots, 2k\} \text{ ve } \sigma(\alpha, \pi) = \{\xi_i : i = 1, \dots, 2k-2\}$$

spektrumlarına sahip olacak şekilde (3.5), (3.6) koşullarını sağlayan $r, q \in L(I, \mathbb{R})$ vardır.

İspat.

(a) $[a, b]$ aralığının (3.4) şeklinde verilen bir parçalanışı için

$$w_i = \int_{b_i}^{a_i} r(t) dt, \hat{w}_i = \int_{b_i}^{a_i} w(t) t dt, \check{w}_i = \int_{b_i}^{a_i} w(t) t^2 dt, i = 0, 1, \dots, n \text{ şeklinde tanımlamalar}$$

yapalım ve (3.7) den dolayı $w_i > 0, \hat{w}_i > 0, \check{w}_i > 0$ dir. Ayrıca

$$\mathbf{W}_{\alpha\beta} = \text{diag}(W_0, W_1, W_2, \dots, W_n), \quad W_i = \begin{bmatrix} w_i & \hat{w}_i \\ \hat{w}_i & \check{w}_i \end{bmatrix}, i = 0, 1, \dots, n \text{ olmak üzere}$$

$$\frac{w_i \hat{w}_{i+1} - \hat{w}_i w_{i+1}}{w_{i+1} \det(W_i)} = \frac{\check{d}_{i+1}}{\check{d}_{i+1}}, i = 0, 1, \dots, n \text{ şartını sağlar. } k = n+1 \text{ olduğundan Teorem 3.1 den}$$

(3.14) biçiminde öyle bir blok Jacobi $\mathbf{M} \in M_{2n+2}$ matrisi vardır ki

$$\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{W}_{\alpha\beta}) = \{\lambda_i : i = 1, \dots, 2n+2\} \text{ ve } \sigma(\mathbf{M}_{12}, (\mathbf{W}_{\alpha\beta})_{12}) = \{\xi_i : i = 1, \dots, 2n\}$$

dir. Şimdi

$$\theta_i = \frac{1}{\hat{d}_i^2 - \check{d}_i d_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$r_i = \theta_i d_i, \quad \hat{r}_i = \theta_i \hat{d}_i, \quad \check{r}_i = \theta_i \check{d}_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$\begin{aligned}
q_i &= c_{i+1} + \frac{r_i}{\theta_i} + \frac{r_{i+1}}{\theta_{i+1}}, \quad \hat{q}_i = \hat{c}_{i+1} + \frac{\hat{r}_i}{\theta_i} + \frac{\hat{r}_{i+1}}{\theta_{i+1}}, \quad \check{q}_i = \check{c}_{i+1} + \frac{\check{r}_i}{\theta_i} + \frac{\check{r}_{i+1}}{\theta_{i+1}}, \quad i=1, \dots, n; \\
q_0 &= c_1 + \frac{r_1}{\theta_1} + \cot \alpha, \quad \hat{q}_0 = \hat{c}_1 + \frac{\hat{r}_1}{\theta_1} + \cot \alpha, \quad \check{q}_0 = \check{c}_1 + \frac{\check{r}_1}{\theta_1} + (a^2 - 1) \cot \alpha, \\
q_n &= c_{n+1} + \frac{r_n}{\theta_n} + \cot \beta, \quad \hat{q}_n = \hat{c}_{n+1} + \frac{\hat{r}_n}{\theta_n} + \cot \beta, \quad \check{q}_n = \check{c}_{n+1} + \frac{\check{r}_n}{\theta_n} + (b^2 - 1) \cot \beta,
\end{aligned}$$

olduğunu varsayalım ve $\mathbf{P}_{\alpha\beta}$, $\mathbf{Q}_{\alpha\beta}$, $\mathbf{P}_{0\beta}$, $\mathbf{Q}_{0\beta}$ yı sırasıyla (3.11), (3.12) ve Uyarı 3.1 den tanımlayalım. Açıktır ki $i=1, \dots, n$ için $r_i, \hat{r}_i, \check{r}_i \neq 0$ dir. Yine

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_{\alpha\beta} + \mathbf{Q}_{\alpha\beta} \text{ ve } \mathbf{M}_{12} = \mathbf{P}_{0\beta} + \mathbf{Q}_{0\beta}$$

olduğunu görmek kolaydır. (3.13) deki

gösterimden ve Uyarı 2.1 den $(\mathbf{W}_{\alpha\beta})_{12} = \mathbf{W}_{0\beta}$ yazılabilir. Böylece

$$\sigma(\mathbf{P}_{\alpha\beta} + \mathbf{Q}_{\alpha\beta}, \mathbf{W}_{\alpha\beta}) = \{\lambda_i : i=1, \dots, 2n+2\}$$

ve

$$\sigma(\mathbf{P}_{0\beta} + \mathbf{Q}_{0\beta}, \mathbf{W}_{0\beta}) = \{\xi_i : i=1, \dots, 2n\}$$

olur. Lemma 3.3 ve Uyarı 3.1 den dördüncü mertebeden (3.2), (3.3) sınır değer problemi için

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha, \beta) &= \{\lambda_i : i=1, \dots, 2n+2\} \\
\sigma(0, \beta) &= \{\xi_i : i=1, \dots, 2n\}
\end{aligned}$$

kümelerine sahip oluruz. Bu şekildeki $r_i, \hat{r}_i, \check{r}_i, i=1, \dots, n$, $q_i, \hat{q}_i, \check{q}_i, i=0, \dots, n$ ve tüm $r, q \in L(I, \mathbb{R})$ seçimlerinin dördüncü mertebeden sınır değer probleminin eşdeğer bir ailesini oluşturduğu gözlemlenir.

(b) Sonuç 3.1, Uyarı 3.1 ve Lemma 3.3 kullanılarak benzer şekilde ispatı yapılabilir.

3.5 Sayısal Algoritma ve Örnek

Atkinson tipi (3.2), (3.3) dördüncü mertebe sınır değer probleminin ters spektral problemini çözmek için aşağıdaki algoritmayı ele alacağız ve algoritmayı test etmek için bir örnek vereceğiz.

Algoritma 3.1

1. **Adım :** Reel sayıların üç kümesi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}$ ve $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-2}$ şeklinde girilir.
2. **Adım:** [12] deki Problem 3.6 nın ispatı ile $\mathbf{J}_b$ matrisi oluşturulur.
3. **Adım:** $\bar{w}(t)$ ile $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{R}$ kümeleri girilir. $\mathbf{M} = \mathbf{R}^T \mathbf{J}_b \mathbf{R}$ hesaplanır.
4. **Adım:** Teorem 3.2 den $i = 0, 1, \dots, n$ için $r_i, \hat{r}_i, \check{r}_i, i = 1, \dots, n$ ve $q_i, \hat{q}_i, \check{q}_i, i = 0, \dots, n$ elde edilir.

Örnek 3.1. (3.15) özelliğine sahip reel sayıların üç kümesini

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2.7411, \lambda_2 = -1.3502, \lambda_3 = 3.1316, \lambda_4 = 5.7604, \lambda_5 = 8.0532, \lambda_6 = 13.1461; \\ \mu_1 &= -2.5558, \mu_2 = -0.4935, \mu_3 = 5.6087, \mu_4 = 6.0000, \mu_5 = 12.4405; \\ \xi_1 &= -2.0598, \xi_2 = 1.8858, \xi_3 = 5.6098, \xi_4 = 11.5642 \end{aligned}$$

şeklinde düşünelim. $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{3}$ olsun. Bir $I = [-3, 5]$ aralığının parçalanışı

Teorem 3.2 den $n = 2$ olmak üzere $-3 < -1 < 0 < 2 < 3 < 5$ şeklinde olsun. I üzerinde tanımlı bir $\bar{w}$ parçalı polinom fonksiyonunu

$$\bar{w}(t) = \begin{cases} 136.8750t^2 + 558.0000t + 523.8750, & t \in [-3, -1] \\ 0, & t \in [-1, 0] \\ 7.9689t^2 - 12.1879t + 3.0626, & t \in (0, 2) \\ 0, & t \in [2, 3] \\ 138.7515t^2 - 1125.2621t + 2237.2737, & t \in (3, 5] \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım.

Algoritma 3.1 uygulanırsa ve dördüncü mertebeden (3.2), (3.3) sınır değer problemi $I = [-3, 5]$ aralığı üzerinde yeniden aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\begin{cases} (\bar{p}y'')'' + \bar{q}y = \lambda \bar{w}y, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y(-3) - \frac{1}{2}(\bar{p}y'')'(-3) = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y(-3) - \frac{1}{2}(\bar{p}y'')(-3) = 0, \\ \frac{1}{2}y(5) - \frac{\sqrt{3}}{2}(\bar{p}y'')'(5) = 0, \\ \frac{1}{2}y(5) - \frac{\sqrt{3}}{2}(\bar{p}y'')(5) = 0. \end{cases}$$

Burada $\bar{r} = \frac{1}{\bar{p}}$ ve $\bar{q}$, parçalı polinom fonksiyonları $I = [-3, 5]$ aralığı üzerinde

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-3, -1], \\ -7385.1300t^2 - 7590.8712t - 13.41.0714, & t \in (-1, 0), \\ 0, & t \in [0, 2], \\ 1442.8230t^2 - 7338.0504t + 9226.6119, & t \in (2, 3), \\ 0, & t \in [3, 5], \end{cases}$$

ve

$$\bar{q}(t) = \begin{cases} 1399.2446t^2 + 5693.6343t + 5333.4155, & t \in [-3, -1], \\ 0, & t \in [-1, 0], \\ 147.9276t^2 - 245.8405t + 66.4604, & t \in (0, 2) \\ 0, & t \in [2, 3], \\ 19590.3450t^2 + 15824.6583t + 31321.0409, & t \in (3, 5] \end{cases}$$

şeklindedir.

Katsayı fonksiyonları $\bar{p}$ ve $\bar{q}$ dördüncü mertebeden (3.10), (3.3) sınır değer probleminin eşdeğer ailesi anlamında tektir. O zaman yeniden yapılandırılmış dördüncü mertebeden (3.2), (3.3) sınır değer probleminin spektrumu şu şekildedir:

$$\begin{cases} \sigma(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}) = \{-2.7411, -1.3502, 3.1316, 5.7604, -8.0532, 13.1461\}, \\ \sigma(0, \frac{\pi}{3}) = \{-2.0598, 1.8858, 5.6098, 11.5642\}. \end{cases}$$

BÖLÜM IV

GEÇİŞ ŞARTLI DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÖZDEĞERLERİNİN MATRİS TEORİSİ İLE BULUNMASI

4.1 Bazı Gösterimler ve Probleme Giriş

Bu bölümde $J = (a, c) \cup (c, b)$ aralığı üzerinde ve $-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere

$$(pu''')'' + qu = \lambda wu \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlı dördüncü mertebeden sınır değer problemini iki noktalı sınır şartları

$$AU(a) + BU(b) = 0, \quad \begin{pmatrix} u \\ u' \\ pu'' \\ (pu'')' \end{pmatrix}, \quad A, B \in M_4(\mathbb{R}) \quad (4.2)$$

ve ayrıca

$$CU(c-) + DU(c+) = 0 \quad (4.3)$$

süreksiz geçiş şartlarıyla birlikte ele alacağız. Burada $c \in (a, b)$ iç süreksizlik noktasıdır ve $M_4(\mathbb{R})$ ile reel sayılar üzerinde dördüncü mertebeden kare matrislerin kümesi gösterilecektir. Ayrıca C ve D ise $\det C = \rho > 0$, $\det D = \theta > 0$ şartlarını sağlayan 4×4 boyutunda reel değerli matrislerdir. Burada λ spektral parametre olarak adlandırılır. Bununla birlikte (4.1) denkleminin katsayıları

$$r = \frac{1}{p}, \quad q, w \in L(J, \mathbb{R}) \quad (4.4)$$

ile tanımlıdır. Yukarıda belirtilen koşullar oluştuğunda (4.3) geçiş şartları

$$U(c+) = GU(c-), \quad G = -D^{-1}C \quad (4.5)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Buna göre

$$y_1 = u, \quad y_2 = u', \quad y_3 = pu'', \quad y_4 = (pu'')'$$

biçiminde yarı-türevlerini tanımlarsak (4.1) J aralığı üzerinde

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = ry_3, \quad y_3' = y_4, \quad y_4' = (\lambda w - q)y_1 \quad (4.6)$$

sistemi biçiminde yazılabilir. [13, 14]

(4.4) ün yarı-türevlerinin hem a, b iki uç noktasında hem de c iç süreksizlik noktasında iyi tanımlandığı için düzenli iki noktalı sınır koşulları ve bu uç noktalardaki geçiş koşulları sonlu limit anlamında iyi tanımlıdır, [15]. Şimdi

$$\text{rank}(A:B) = 4 \text{ ve } AE_4 A^* = BE_4 B^* \quad (4.7)$$

ki burda E_4 semplektik matrisi

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

olmak üzere (4.7) ve (4.8) koşulları sağlandığında sınır koşulunun kendine eş olduğu [16, 17] den bilinir. Bununla birlikte hem (4.2) sınır koşulları hem de (4.3) geçiş koşulları için kendine eş koşullar

$$\text{rank}(A:B) = 4 \text{ ve } AE_4 A^* = BE_4 B^*, \quad \frac{1}{\rho} C E_4 C^* = \frac{1}{\theta} D E_4 D^*$$

şeklinde. Burada E_4 , (4.8) de tanımlandığı gibidir. Genelliği bozmadan daha genel olan (4.5) geçiş koşulunu ele alalım ki bu kabul daha geneldir ve herhangi bir ‘ayrık olmayan’ geçiş koşulu (4.3) formuna getirilebilir. (4.7) ve (4.8) koşulları altında sınır koşullarının kanonik şekilleri Hao ve arkadaşları tarafından [18] de araştırılmıştır.

[18] deki genel duruma uygun olarak bu bölüm boyunca A ve B

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_{21} & 0 & -1 \\ a_{21} & \alpha_2 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -a_{31} & -a_{41} & 0 & 0 \\ -a_{32} & -a_{42} & 0 & 0 \\ \beta_1 & b_{41} & 0 & -1 \\ b_{41} & \beta_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

biçiminde olmak üzere (4.2) sınır koşulları yukarıda bahsedilen şartları sağlayan (3.5) genel geçiş şartları ile birlikte bahsedilecektir.

(4.2), (4.9) koşulu kendine eştir ve dördüncü mertebeden reel ayırık olmayan kendine eş sınır koşulları için “temel kanonik form” olarak adlandırılır, [18, 19]. [18] de her ayırık olmayan kendine eş sınır koşulu için temel matris dönüşümleri (4.2), (4.9) formuna dönüştürülebileceği gösterilmiştir ve bundan dolayı “temel kanonik form” olarak adlandırılmıştır. Bu durum karışık ve ayırık kendine eş sınır koşulları için de geçerlidir.

Dördüncü mertebe durumu için reel karışık kendine eş sınır koşulları “temel kanonik formu”

$$A_m = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_{21} & 0 & -1 \\ a_{21} & \alpha_2 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ za_{31} & za_{32} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_m = \begin{pmatrix} -a_{31} - za_{31} & 0 & 0 \\ -a_{32} - za_{32} & 0 & 0 \\ \beta_1 & b_{41} & 0 & -1 \\ b_{41} & \beta_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlı A_m ve B_m matrisleri ile açıkça yazılabilir. Burada z bir reel sayıdır.

Reel ayırık kendine eş sınır koşullarının “temel kanonik formu” ise

$$A_s = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_{21} & 0 & -1 \\ a_{21} & \alpha_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & b_{41} & 0 & -1 \\ b_{41} & \beta_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

şeklinde olan A_s ve B_s matrisleriyle açıkça yazılabilir.

(4.10) ve (4.11) her ikisi de (4.9) a dahil edilebilir. Bu nedenle bu tezde “temel kanonik form” altındaki problemi ele alacağız.

Şimdi ise Atkinson tipinin tanımını iç süreksiz nokta ile dördüncü mertebeden denklemlere genelleştireceğiz.

Tanım 4.1. $m, n \geq 1$ tam sayıları için J aralığının

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{2m+1} \leq c, \quad c = b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_{2n+1} = b \quad (4.12)$$

şeklinde bir parçalanışı varsa öyle ki $k = 0, 1, \dots, m-1$ olmak üzere $[a_{2k}, a_{2k+1})$

$$r = \frac{1}{p} = 0$$

dır. $[a_{2k}, a_{2k+1}]$ aralığında

$$\int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} w(t) dt \neq 0, \quad \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} w(t) t dt \neq 0, \quad \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} w(t) t^2 dt \neq 0$$

dır. Yine $i = 0, 1, \dots, n$ için $(b_0, b_1]$ ve $i = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere $[b_{2i}, b_{2i+1}]$ aralıkları üzerinde

$$r = \frac{1}{p} = 0, \quad \int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}} w(t) dt \neq 0, \quad \int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}} w(t) t dt \neq 0, \quad \int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}} w(t) t^2 dt \neq 0 \quad (4.13)$$

$k = 0, 1, \dots, m-1$ olmak üzere $[a_{2k+1}, a_{2k+2}]$ aralıklarında

$$q = w = 0, \quad \int_{a_{2k+1}}^{a_{2k+2}} r(t) dt \neq 0, \quad \int_{a_{2k+1}}^{a_{2k+2}} r(t) t dt \neq 0, \quad \int_{a_{2k+1}}^{a_{2k+2}} r(t) t^2 dt \neq 0$$

ve son olarak $i = 0, 1, \dots, n-1$ için $[b_{2i+1}, b_{2i+2}]$ aralıkları üzerinde

$$q = w = 0, \quad \int_{b_{2i+1}}^{b_{2i+2}} r(t) dt \neq 0, \quad \int_{b_{2i+1}}^{b_{2i+2}} r(t) t dt \neq 0, \quad \int_{b_{2i+1}}^{b_{2i+2}} r(t) t^2 dt \neq 0 \quad (4.14)$$

şartları sağlanırsa (4.1) diferansiyel denklemi Atkinson tipli olarak adlandırılır.

Tanım 4.2. (4.1) Atkinson tipindeyse (4.3) veya (4.5) geçiş şartlarına sahip bir (4.1), (3.2) sınır değer problemi de Atkinson tipindedir. Atkinson tipi geçiş şartlarına sahip bir sınır değer problemi bir matris özdeğer problemiyle tamamen aynı özdeğere sahip ise bu iki problemin eşdeğer olduğu söylenebilir.

Teoremi vermeden önce aşağıdaki gösterimleri verelim. (4.12)-(4.14) e göre $i = 1, 2, \dots, n$ ve $k = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
r_k &= \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} r(t)dt, \quad \widehat{r}_k = \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} r(t)tdt, \quad \widetilde{r}_k = \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} r(t)t^2dt \\
\widetilde{r}_i &= \int_{b_{2i-1}}^{b_{2i}} r(t)dt, \quad \widetilde{\widehat{r}}_i = \int_{b_{2i-1}}^{b_{2i}} r(t)tdt, \quad \widetilde{\widetilde{r}}_i = \int_{b_{2i-1}}^{b_{2i}} r(t)t^2dt \\
q_k &= \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} q(t)dt, \quad \widehat{q}_k = \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} q(t)tdt, \quad \widetilde{q}_k = \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} q(t)t^2dt \\
\widetilde{q}_i &= \int_{b_{2i-1}}^{b_{2i}} q(t)dt, \quad \widetilde{\widehat{q}}_i = \int_{b_{2i-1}}^{b_{2i}} q(t)tdt, \quad \widetilde{\widetilde{q}}_i = \int_{b_{2i-1}}^{b_{2i}} q(t)t^2dt \\
w_k &= \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} w(t)dt, \quad \widehat{w}_k = \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} w(t)tdt, \quad \widetilde{w}_k = \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} w(t)t^2dt \\
\widetilde{w}_i &= \int_{b_{2i-1}}^{b_{2i}} w(t)dt, \quad \widetilde{\widehat{w}}_i = \int_{b_{2i-1}}^{b_{2i}} w(t)tdt, \quad \widetilde{\widetilde{w}}_i = \int_{b_{2i-1}}^{b_{2i}} w(t)t^2dt
\end{aligned} \tag{4.15}$$

ayrıca

$$\theta_k = \widehat{r}_k^2 - r_k \widetilde{r}_k \neq 0, \quad \widetilde{\theta}_i = \widetilde{\widehat{r}}_i^2 - \widetilde{r}_i \widetilde{\widetilde{r}}_i \neq 0 \tag{4.16}$$

olduğunu kabul edelim. (4.13), (4.14) den (4.6) nın gösterimini kullanarak y_2 nin bir sabit ve y_1 in ise r nin özdeş olarak sıfır olduğu alt aralıklarda y_2 ile ilişkili lineer bir polinom fonksiyonu olduğu sonucuna varmak kolaydır. Benzer şekilde y_4 sabittir ve y_3 ise q ve w nin her ikisinde aynı şekilde sıfır olduğu alt aralıklarda y_4 ile ilişkili lineer bir polinom fonksiyonudur. Böylece

$$\begin{aligned}
c_k &= y_2(t), \quad d_k = y_1(t) - y_2(t)t, \quad t \in [a_{2k}, a_{2k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \\
c_m &= y_2(t), \quad d_m = y_1(t) - y_2(t)t, \quad t \in [a_{2m}, a_{2m+1}), \\
\widetilde{c}_0 &= y_2(t), \quad \widetilde{d}_0 = y_1(t) - y_2(t)t, \quad t \in (b_0, b_1], \\
\widetilde{c}_i &= y_2(t), \quad \widetilde{d}_i = y_1(t) - y_2(t)t, \quad t \in (b_{2i-1}, b_{2i}], \quad i = 1, 2, \dots, n, \\
e_k &= y_4(t), \quad f_k = y_3(t) - y_4(t)t, \quad t \in [a_{2k-1}, a_{2k}], \quad k = 0, 1, \dots, m, \\
\widetilde{e}_i &= y_4(t), \quad \widetilde{f}_i = y_3(t) - y_4(t)t, \quad t \in (b_{2i-1}, b_{2i}], \quad i = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

olsun ve

$$\begin{aligned}
e_0 &= y_4(a_0) = y_4(a), \\
f_0 &= y_3(a_0) - y_4(a_0).a_0 = y_3(a) - y_4(a).a \\
\tilde{e}_{n+1} &= y_4(b_{2n+1}) = y_4(b), \\
\tilde{f}_{n+1} &= y_3(b_{2n+1}) - y_4(b_{2n+1}).b_{2n+1} = y_3(b) - y_4(b).b, \\
e_{m+1} &= y_4(a_{2m+1}-) = y_4(c-), \\
f_{m+1} &= y_3(a_{2m+1}-) - y_4(a_{2m+1}-).a_{2m+1} = y_3(c-) - y_4(c-).c \\
\tilde{e}_0 &= y_4(b_0+) = y_4(c+), \\
\tilde{f}_0 &= y_3(b_0+) - y_4(b_0+).b_0 = y_3(c+) - y_4(c+).c
\end{aligned} \tag{4.18}$$

diyelim.

Uyarı 4.1. (4.17) den bilinir ki $y_1(t) - y_2(t)t$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ için $t \in [a_{2k}, a_{2k+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n$ için $[a_{2m}, a_{2m+1})$, $(b_0, b_1]$ ve $[b_{2i}, b_{2i+1}]$ alt aralıklarının her biri üzerinde sabittir. Yine $y_3(t) - y_4(t)t$, $k = 0, 1, \dots, m$ için $[a_{2k-1}, a_{2k}]$, $i = 1, 2, \dots, n$ için $[b_{2i-1}, b_{2i}]$ alt aralıkların her birinde bir sabittir. Şimdi

$$G = (g_{ij}) = -D^{-1}C \text{ ve } \zeta = g_{13}g_{24} - g_{23}g_{14} \neq 0$$

olduğunu kabul edelim. $(m+n+2) \times (m+n+2)$ boyutundaki döngüsel (devirli) üç köşegenli blok bir matrisi

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 - P_1 & P_1 & & & & & & & P_* \\ P_1 & -P_1 - P_2 & P_2 & & & & & & \\ & P_2 & -P_2 - P_3 & P_3 & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & & & \\ & P_{m-1} & -P_{m-1} - P_m & P_m & & & & & \\ & & P_m & T_1 - P_m & T_2 & & & & \\ & & & \tilde{T}_1 & \tilde{T}_2 - \tilde{P}_1 & \tilde{P}_1 & & & \\ & & & & \tilde{P}_1 & -\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2 & \tilde{P}_2 & & \\ & & & & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & & \tilde{P}_{n-1} & -\tilde{P}_{n-1} - \tilde{P}_n & \tilde{P}_n \\ P_*^T & & & & & & & \tilde{P}_n & \tilde{B}_2 - \tilde{P}_n \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

biçimindedir. Q ve W iki köşegenli blok matrislerini ise

$$\begin{aligned}\mathbb{Q} &= \text{diag}(Q_0, Q_1, \dots, Q_m, \tilde{Q}_0, \tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n) \\ \mathbb{W} &= \text{diag}(W_0, W_1, \dots, W_m, \tilde{W}_0, \tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_n)\end{aligned}\quad (4.20)$$

biçiminde tanımlayalım. Burada ayrıca 2×2 boyutundaki simetrik $k = 1, 2, \dots, m$ için P_k , Q_k ve W_k , $i = 1, 2, \dots, n$ ve $\tilde{P}_i$, $j = 1, 2, \dots, n$ için $\tilde{W}_j$, $\tilde{Q}_j$ 2×2 boyutundaki simetrik matrisleri aşağıdaki formdadır;

$$P_k = \begin{bmatrix} \frac{r_k}{\theta_k} & \frac{\hat{r}_k}{\theta_k} \\ \frac{\hat{r}_k}{\theta_k} & \frac{\tilde{r}_k}{\theta_k} \end{bmatrix}, \quad P_i = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{r}_i}{\theta_i} & \frac{\tilde{\tilde{r}}_i}{\theta_i} \\ \frac{\tilde{\tilde{r}}_i}{\theta_i} & \frac{\tilde{r}_i}{\theta_i} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$W_k = \begin{pmatrix} w_k & \hat{w}_k \\ \hat{w}_k & \tilde{w}_k \end{pmatrix}, \quad Q_k = \begin{pmatrix} q_k & \hat{q}_k \\ \hat{q}_k & \tilde{q}_k \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

$$\tilde{Q}_j = \begin{pmatrix} \tilde{q}_j & \tilde{\tilde{q}}_j \\ \tilde{\tilde{q}}_j & \tilde{q}_j \end{pmatrix}, \quad W_j = \begin{pmatrix} \tilde{w}_j & \tilde{\tilde{w}}_j \\ \tilde{\tilde{w}}_j & \tilde{w}_j \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Yine sınır şartı ve geçiş şartına karşılık gelen $i = 1, 2$ için $\tilde{B}_1$, $\tilde{B}_2$, P_* , T_i ve $\tilde{T}_i$ 2×2 boyutlu matrisleri

$$\begin{aligned}\tilde{B}_1 &= \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -(a\alpha_1 + a_{21}) \\ -(a\alpha_1 + a_{21}) & -(a^2\alpha_1 + 2aa_{21} + \alpha_2) \end{pmatrix}, \\ \tilde{B}_2 &= \begin{pmatrix} -\beta_1 & -(b\beta_1 + b_{41}) \\ -(b\beta_1 + b_{41}) & -(b^2\beta_1 + 2bb_{41} + \beta_2) \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (4.24)$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ -l_1 & -l_2 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} h_3 & h_4 \\ -l_3 & -l_4 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$\tilde{T}_1 = \begin{pmatrix} -\tilde{h}_1 & -\tilde{h}_2 \\ \tilde{l}_1 & \tilde{l}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{T}_2 = \begin{pmatrix} -\tilde{h}_3 & -\tilde{h}_4 \\ \tilde{l}_3 & \tilde{l}_4 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

$$P_* = \begin{pmatrix} a_{31} & ba_{31} + a_{41} \\ aa_{31} + a_{32} & aba_{31} + aa_{41} + ba_{32} + a_{42} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

formunda olup P_*^T ile P_* nın transpozunu gösterilmiştir. Burada

$$\begin{aligned}
h_1 &= g_{11}g_{23} - g_{21}g_{13} / \zeta, \\
h_2 &= g_{11}g_{23}^c - g_{21}g_{13}^c + g_{12}g_{23} - g_{22}g_{13} / \zeta, \\
h_3 &= -g_{23} / \zeta, \\
h_4 &= g_{13} - g_{23}^c / \zeta, \\
l_1 &= g_{21}g_{14} - g_{11}g_{24} - ch_1 / \zeta, \\
l_2 &= g_{21}g_{14}^c - g_{11}g_{24}^c + g_{22}g_{14} - g_{12}g_{24} - ch_2 / \zeta, \\
l_3 &= g_{24} - ch_3 / \zeta, \\
l_4 &= g_{24}^c - g_{14} - ch_4 / \zeta, \\
\tilde{h}_1 &= g_{41} + g_{43}ch_1 + g_{44}h_1 + g_{43}l_1, \\
\tilde{h}_2 &= g_{41}^c + g_{42} + g_{43}ch_2 + g_{44}h_2 + g_{43}l_2, \\
\tilde{h}_3 &= g_{43}ch_3 + g_{44}h_3 + g_{43}l_3, \\
\tilde{h}_4 &= g_{43}ch_4 + g_{44}h_4 + g_{43}l_4, \\
\tilde{l}_1 &= g_{31} + g_{33}ch_1 + g_{34}h_1 + g_{33}l_1 - c\tilde{h}_1, \\
\tilde{l}_2 &= g_{31}^c + g_{32} + g_{33}ch_2 + g_{34}h_2 + g_{33}l_2 - c\tilde{h}_2, \\
\tilde{l}_3 &= g_{33}ch_3 + g_{34}h_3 + g_{33}l_3 - c\tilde{h}_3, \\
\tilde{l}_4 &= g_{33}ch_4 + g_{34}h_4 + g_{33}l_4 - c\tilde{h}_4,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

ve a ile b , J aralığının uç noktalarıdır. c ise iç süreksizlik noktasıdır. $i=1,2$ için α_i, β_i , $j=2,3,4$ için a_{j1}, b_{j2} ve $b_{41}, b_{42} \in \mathbb{R}$ dir.

Şimdi ana sonuçlarımızdan birini verelim.

Teorem 4.1. (4.1) in Atkinson tipli olduğunu kabul edip (4.2), (4.3) ve (4.16) nın sağlandığını kabul edelim. $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{W}$ matrisleri (4.18), (4.19) ile tanımlansın. O zaman (4.1), (4.9) ve (4.5) sınır değer problemi

$$(\mathbb{P} + \mathbb{Q})\mathbb{Y} = \lambda \mathbb{W}\mathbb{Y} \tag{4.29}$$

matris özdeğer problemine denktir. Burada $\mathbb{Y} = [Y_0^T, Y_1^T, \dots, Y_m^T, \tilde{Y}_0^T, \tilde{Y}_1^T, \dots, \tilde{Y}_n^T]$

şeklinde tanımlı (sabit) bir vektördür. $k=1,2,\dots,m$ olmak üzere $Y_k = [d_k, c_k]^T$ ve $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere $\tilde{Y}_i = [d_i, c_i]^T$ dir. (4.1), (4.9) ve (4.5) sınır değer probleminin

bir $u(t)$ özdeğer fonksiyonu ve aynı λ özdeğeri ile ilişkili (4.29) matris özdeğer probleminin $\mathbb{Y}$ öz vektörü $k = 0, 1, \dots, m$ için $t \in [a_{2k}, a_{2k+1}]$ olmak üzere

$$u(t) = y_1(t) = c_k t + d_k,$$

$t \in [a_{2m}, a_{2m+1})$ olmak üzere

$$u(t) = c_m t + d_m,$$

$t \in (b_0, b_1]$ olmak üzere

$$u(t) = \tilde{c}_0 t + \tilde{d}_0$$

ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $t \in [b_{2i}, b_{2i+1}]$ olmak üzere

$$u(t) = \tilde{c}_i t + \tilde{d}_i$$

bağıntılarına sahiptir.

İspat. İspat bir sonraki bölümde verilecektir.

Aslında (4.29), $(2m + 2n + 4) \times (2m + 2n + 4)$ boyutundaki bir matris özdeğer problemidir. Q , W matrisleri simetriktir ve P matrisi ise

$$\begin{aligned} &(m+1, m+2), \\ &(m+2, m+1), \\ &(m+1, m+1), \\ &(m+2, m+2), \\ &(m+1, m+2), \\ &(1, m+n+2), \\ &(m+n+2, 1) \end{aligned}$$

elemanları dışında hemen hemen blok simetriktir.

Uyarı 4.2. Teorem 4.1 de dördüncü mertebeden kendine eş reel ayırık ve reel ayırık olmayan sınır koşullarının temel kanonik (düzgün) formu için de geçerlidir.

Bir sonraki teorem Atkinson tipindeki her denklemin parçalı polinom katsayıları olan bir denkleme eş değer olduğunu gösterecektir. Teoremi vermeden önce daha sonra gerekli olacak bir Lemma vereceğiz.

Lemma 3.1 de inşa edilen polinomları $X(x_1, x_2, \eta_0, \eta_1, \eta_2)$ ile gösterelim. J üzerinde tanımlı $\tilde{p}(t)$, $\tilde{q}(t)$, $\tilde{w}(t)$ parçalı polinom fonksiyonları

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{p}(t)} &= \left\{ \begin{array}{l} X(a_{2k-1}, a_{2k}, r_k, \hat{r}_k, \check{r}_k), \quad t \in [a_{2k-1}, a_{2k}], \quad k=1, 2, \dots, m, \\ 0, \quad t \in [a_{2k}, a_{2k+1}), \quad k=0, 1, \dots, m; \\ X(b_{2i-1}, b_{2i}, \tilde{r}_i, \hat{\tilde{r}}_i, \check{\tilde{r}}_i), \quad t \in [b_{2i-1}, b_{2i}], \quad i=1, 2, \dots, n, \\ 0, \quad t \in (b_{2i}, b_{2i+1}], \quad i=0, 1, \dots, n; \end{array} \right\} \\ \bar{q}(t) &= \left\{ \begin{array}{l} X(a_{2k}, a_{2k+1}, q_k, \hat{q}_k, \check{q}_k), \quad t \in [a_{2k}, a_{2k+1}), \quad k=0, 1, \dots, m, \\ 0, \quad t \in [a_{2k-1}, a_{2k}], \quad k=0, 1, \dots, m; \\ X(b_{2i}, b_{2i+1}, \tilde{q}_i, \hat{\tilde{q}}_i, \check{\tilde{q}}_i), \quad t \in (b_{2i}, b_{2i+1}], \quad i=0, 1, \dots, n, \\ 0, \quad t \in [b_{2i-1}, b_{2i}], \quad i=1, 2, \dots, n; \end{array} \right\} \\ \bar{w}(t) &= \left\{ \begin{array}{l} X(a_{2k}, a_{2k+1}, w_k, \hat{w}_k, \check{w}_k), \quad t \in [a_{2k}, a_{2k+1}), \quad k=0, 1, \dots, m, \\ 0, \quad t \in [a_{2k-1}, a_{2k}], \quad k=1, 2, \dots, m \\ X(b_{2i-1}, b_{2i}, \tilde{w}_i, \hat{\tilde{w}}_i, \check{\tilde{w}}_i), \quad t \in (b_{2i-1}, b_{2i}], \quad i=0, 1, \dots, n, \\ 0, \quad t \in [b_{2i-1}, b_{2i}], \quad i=1, 2, \dots, n; \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (4.30)$$

biçiminde tanımlayalım. O zaman aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.2. (4.2), (4.3) sağlansın. (4.1) Atkinson tipli olsun ve J üzerinde $\tilde{p}(t)$, $\tilde{q}(t)$, $\tilde{w}(t)$ ifadeleri (4.31) ile tanımlansın. $k=1, 2, \dots, m$ olmak üzere $r_k, \hat{r}_k, \check{r}_k$, $i=1, 2, \dots, n$ için $\tilde{r}_i, \hat{\tilde{r}}_i, \check{\tilde{r}}_i$, $k=0, 1, \dots, m$ olmak üzere $q_k, \hat{q}_k, \check{q}_k, w_k, \hat{w}_k, \check{w}_k$ ve $i=0, 1, \dots, n$ olmak üzere $\tilde{q}_i, \hat{\tilde{q}}_i, \check{\tilde{q}}_i, \tilde{w}_i, \hat{\tilde{w}}_i, \check{\tilde{w}}_i$ değerleri (4.12)-(4.14) ile verilsin. O zaman (4.1), (4.3) sınır değer problemi aynı (4.2) sınır koşulu ve (4.3) geçiş şartına sahip $J = (a, c) \cup (c, b)$ üzerinde tanımlı dördüncü mertebeden

$$(\tilde{p}u'')'' + \tilde{q}u = \lambda \tilde{w}u \quad (4.31)$$

sınır değer problemi ile tam olarak aynı özdeğere sahiptir.

İspat. Bir sonraki bölümde verilecektir.

Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 de belirli bir J aralığında sabit bir sınır koşulu (4.2) ve (4.3) geçiş şartı için parçalı polinom katsayıları ile verilen (4.31), (4.2), (4.3)

problemiyle tam olarak aynı özdeğere sahip olan Atkinson tipli problemlerinin bir ailesi olduğu sonucuna varılabilir. Böyle bir aile (4.31), (4.2), (4.3) ün eş değer ailesi olarak adlandırılır.

Şimdi aşağıdaki matris özdeğer problemini tanımlayalım.

$$\mathbb{H}X = \lambda \mathbb{V}X \quad (4.32)$$

$\mathbb{H} = (H_{ij})$ ile her bir elemanı $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere $\det(H_{i,i+1}) \neq 0$, $H_{m1} = H_{1m}^T$ şartını sağlayan $l \times l$ boyutunda reel değerli blok döngüsel üç köşegenli matris gösterilmiştir. Bunun yanı sıra $\mathbb{V} = \text{diag}(V_{11}, \dots, V_{mm})$ matrisi ise 2×2 boyutunda V_{ii} ile $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere $\det(V_{ii}) \neq 0$ şartlarını sağlayan bir matristir. Burada (4.33) formundaki matris özdeğer probleminin geçiş şartlı Atkinson tipinde bir sınır değer problemi şeklinde gösterime sahip olduğu ispatlanacaktır.

Teorem 4.2 ye göre böyle bir gösterim tek değildir. Bu Teorem 4.1 in tersi olarak gösterebilecek başka bir ana teoremdir.

Teorem 4.3. Herhangi a, b, c için $-\infty < a < c < b < +\infty$ olsun. $l > 3$ doğal sayı ve

$$\mathbb{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & & & & & & & H_{1l} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} & & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & & & \\ & & H_{k-1,k} & H_{k,k} & H_{k,k+1} & & & & \\ & & & H_{k+1,k} & H_{k+1,k+1} & H_{k+1,k+2} & & & \\ & & & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & & & H_{l-2,l-1} & H_{l-1,l-1} & H_{l-1,l} \\ H_{l1} & & & & & & & H_{l-1,l} & H_{l,l} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

şeklinde tanımlı $l \times l$ boyutunda reel değerli blok döngüsel üç köşegenli matris olsun.

Burada $2 \leq k \leq l-2$ ve $\mathbb{H}$, $H_{k,k}$, $H_{k+1,k+1}$, $H_{k,k+1}$, $H_{k+1,k}$, H_{l1} , H_{1l} blok elemanları dışında hemen hemen simetriktir. Her bir H_{ij} ise $c_{i,i+1}$, $h_{i,i+1}$, $d_{i,i+1} \neq 0$ olmak üzere

$i=1,2,\dots,l-1$ ve $i \neq k$ için $H_{i,i+1} = \begin{pmatrix} c_{i,i+1} & h_{i,i+1} \\ h_{i,i+1} & d_{i,i+1} \end{pmatrix}$ dir. $i=1,2,\dots,l$, $i \neq k$, $k+1$ için

$$H_{1,l} = \begin{pmatrix} c_{ii} & h_{ii} \\ h_{ii} & d_{ii} \end{pmatrix}, \quad H_{1,l} = \begin{pmatrix} c_{1,l} & h_{1,l} \\ \tilde{h}_{1,l} & d_{1,l} \end{pmatrix}, \quad H_{l,1} = H_{1,l}^T,$$

$$H_{k,k} = \begin{pmatrix} c_{k,k} & h_{k,k} \\ \tilde{h}_{k,k} & d_{k,k} \end{pmatrix}, \quad H_{k+1,k+1} = \begin{pmatrix} c_{k+1,k+1} & h_{k+1,k+1} \\ \tilde{h}_{k+1,k+1} & d_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

$$H_{k,k+1} = \begin{pmatrix} c_{k,k+1} & h_{k,k+1} \\ \tilde{h}_{k,k+1} & d_{k,k+1} \end{pmatrix}, \quad H_{k+1,k} = \begin{pmatrix} c_{k+1,k} & h_{k+1,k} \\ \tilde{h}_{k+1,k} & d_{k+1,k} \end{pmatrix}$$

ve $i = 1, 2, \dots, l-1$, $i \neq k$ olmak üzere $\det(H_{i,i+1}) \neq 0$, $\det(H_{1,l}) \neq 0$, $\det(H_{k+1,k}) \neq 0$

şartlarını sağlayan 2×2 boyutunda matrislerdir. $\mathbb{V} = \text{diag}(V_{11}, V_{22}, \dots, V_{ll})$ blok

elemanları $i = 1, 2, \dots, l$ için $f_{ii}, v_{ii}, g_{ii} \neq 0$ ve $\det(V_{ii}) \neq 0$ olmak üzere

$V_{ii} = \begin{pmatrix} f_{ii} & v_{ii} \\ v_{ii} & g_{ii} \end{pmatrix}$ matrisi 2×2 boyutunda reel değerli bir matristir. O zaman herhangi

sabit $q_0, \hat{q}_0, \check{q}_0, q_m, \hat{q}_m, \check{q}_m, \tilde{q}_0, \tilde{q}_0, \tilde{q}_0, \tilde{q}_n, \tilde{q}_n, \tilde{q}_n$ değerleri için matris özdeğer problemi (4.32), (4.1), (4.9), (4.5) biçimindeki geçiş şartlı Atkinson tipi sınır değer problemini temsil eder. Ayrıca J aralığının sabit bir parçalanışı (4.12) ile verildiğinde (4.15) gösterimleri ile (4.31), (4.9), (4.5) dördüncü mertebeden geçiş şartlı sınır değer probleminin tek bir gösterimi vardır ve (4.32) matris özdeğer problemi şeklindedir. Yine (4.33) matris probleminin tüm sınır değer problemleri, (4.31), (4.9), (4.5) dördüncü mertebeden geçiş şartlı sınır değer probleminin eşdeğer ailelerine karşılık gelecek şekilde verilmiştir.

İspat. Bir sonraki bölümde verilecektir.

4.2 İspatlar

Bu bölümde Teorem 4.1, Teorem 4.2 ve Teorem 4.3 ün ispatlarını vereceğiz. Bunun için öncelikle aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 4.1 (4.1) in Atkinson tipli olduğunu varsayalım. O halde (4.1) in herhangi bir u çözümü için ve (4.6) ile verilen y_1, y_2, y_3, y_4 ün herbiri $k = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere

$$c_k - c_{k-1} = f_k r_k + e_k \hat{r}_k \quad (4.34)$$

$$d_k - d_{k-1} = -f_k \hat{r}_k - e_k \check{r}_k \quad (4.35)$$

$k = 0, 1, \dots, m$ olmak üzere

$$e_{k+1} - e_k = c_k (\lambda \hat{w}_k - \hat{q}_k) + d_k (\lambda w_k - q_k) \quad (4.36)$$

$$f_{k+1} - f_k = -c_k (\lambda \check{w}_k - \check{q}_k) - d_k (\lambda \hat{w}_k - \hat{q}_k) \quad (4.37)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$\tilde{c}_i - \tilde{c}_{i-1} = \tilde{f}_i \tilde{r}_i + \tilde{e}_i \tilde{r}_i \quad (4.38)$$

$$\tilde{d}_i - \tilde{d}_{i-1} = -\tilde{f}_i \tilde{r}_i - \tilde{e}_i \tilde{r}_i \quad (4.39)$$

$i = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere

$$\tilde{e}_{i+1} - \tilde{e}_i = \tilde{c}_i (\lambda \tilde{w}_i - \tilde{q}_i) + \tilde{d}_i (\lambda \tilde{w}_i - \tilde{q}_i) \quad (4.40)$$

$$\tilde{f}_{i+1} - \tilde{f}_i = -\tilde{c}_i (\lambda \tilde{w}_i - \tilde{q}_i) - \tilde{d}_i (\lambda \tilde{w}_i - \tilde{q}_i) \quad (4.41)$$

eşitliklerine sahiptirler.

Tersine olarak (4.34)-(4.41) sisteminin herhangi bir $k = 0, 1, \dots, m$ için c_k, d_k , $k = 0, 1, \dots, m+1$ için e_k, f_k , $i = 0, 1, \dots, n$ için $\tilde{c}_i, \tilde{d}_i$ ve $i = 0, 1, \dots, n+1$ için $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ çözümleri için (4.17) ile (4.18) i sağlayan ve (4.6) ile verilen y_1, y_2, y_3, y_4 için (4.1) denkleminin tek bir v çözümü vardır.

İspat. Bu lemmanın ispatı [20] deki ispata benzerdir. Bu yüzden geçilecektir.

Teorem 4.1 in İspatı. (4.17), (4.18) ve (4.9) sınır koşulları

$$\begin{aligned} \alpha_1(ac_0 + d_0) + a_{21}c_0 - e_0 - a_{31}(b\tilde{c}_n + \tilde{d}_n) - a_{41}\tilde{c}_n &= 0, \\ a_{21}(ac_0 + d_0) + \alpha_2c_0 - (ae_0 + f_0) - a_{32}(b\tilde{c}_n + \tilde{d}_n) - a_{42}\tilde{c}_n &= 0, \\ a_{31}(ac_0 + d_0) + a_{32}c_0 - \beta_1(b\tilde{c}_n + \tilde{d}_n) - b_{41}\tilde{c}_n - \tilde{e}_{n+1} &= 0, \\ a_{41}(ac_0 + d_0) + a_{42}c_0 - b_{41}(b\tilde{c}_n + \tilde{d}_n) - \beta_2\tilde{c}_n + (b\tilde{e}_{n+1} + \tilde{f}_{n+1}) &= 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

(4.42) e sahip olması dışında teoremin ispatı [6, 20] deki ile aynıdır. (4.17), (4.18) ve (4.5) geçiş şartından

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_0 c + \tilde{d}_0 &= g_{11}(c_m c + d_m) + g_{12}c_m + g_{13}(e_{m+1}c + f_{m+1}) + g_{14}e_{m+1}, \\
\tilde{c}_0 &= g_{21}(c_m c + d_m) + g_{22}c_m + g_{23}(e_{m+1}c + f_{m+1}) + g_{24}e_{m+1}, \\
\tilde{e}_0 c + \tilde{f}_0 &= g_{31}(c_m c + d_m) + g_{32}c_m + g_{33}(e_{m+1}c + f_{m+1}) + g_{34}e_{m+1}, \\
\tilde{e}_0 &= g_{41}(c_m c + d_m) + g_{42}c_m + g_{43}(e_{m+1}c + f_{m+1}) + g_{44}e_{m+1},
\end{aligned} \tag{4.43}$$

elde ederiz. Yukarıdaki denklemleri çözerek

$$\begin{aligned}
e_{m+1} &= h_1 d_m + h_2 c_m + h_3 \tilde{d}_0 + h_4 \tilde{c}_0, \\
f_{m+1} &= l_1 d_m + l_2 c_m + l_3 \tilde{d}_0 + l_4 \tilde{c}_0, \\
\tilde{e}_0 &= \tilde{h}_1 d_m + \tilde{h}_2 c_m + \tilde{h}_3 \tilde{d}_0 + \tilde{h}_4 \tilde{c}_0, \\
\tilde{f}_{m+1} &= \tilde{l}_1 d_m + \tilde{l}_2 c_m + \tilde{l}_3 \tilde{d}_0 + \tilde{l}_4 \tilde{c}_0
\end{aligned} \tag{4.44}$$

sonucuna varılabilir. Burada $i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere $h_i, l_i, \tilde{h}_i, \tilde{l}_i$ (4.28) de olduğu gibi verilmektedir. O halde denklik Lemma 4.1 kullanılarak elde edilir.

Teorem 4.2 nin İspatı. Açıktır ki hem (4.1) - (4.3) geçiş şartlarındaki dördüncü mertebeden sınır değer probleminin hem de (4.31), (4.2), (4.3) aynı $k = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere $r_k, \hat{r}_k, \check{r}_k$ $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\tilde{r}_i, \tilde{\tilde{r}}_i, \tilde{\tilde{\tilde{r}}}_i$ $k = 0, 1, \dots, m$ olmak üzere $q_k, \hat{q}_k, \check{q}_k, w_k, \hat{w}_k, \check{w}_k$ ve $i = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere $\tilde{q}_i, \tilde{\tilde{q}}_i, \tilde{\tilde{\tilde{q}}}_i, \tilde{w}_i, \tilde{\tilde{w}}_i, \tilde{\tilde{\tilde{w}}}_i$ değerlerini verir. Böylece aynı matris özdeğer problemine eşdeğerdirler. Dolayısıyla Teorem 4.1 ile aynı özdeğer sahiptirler.

Teorem 4.3 ün İspatı. $J = (a, c) \cup (c, b)$, $m = k - 1, n = l - k - 1$ olsun. J aralığının (4.12) parçalanışı alınsın. $[a, c) \cup (c, b]$ aralığı üzerinde $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{w}$ fonksiyonlarını (4.13), (4.14), (4.4) ü sağlayan parçalı polinomlar şeklinde inşa edelim. Buna ek olarak (4.13), (4.14) te sıfır olmadıkları $[a, c) \cup (c, b]$ alt aralıklarındaki fonksiyonların değerlerini ve ayrıca sınır koşullarının parametreleri ve geçiş şartını tanımlayalım. Bu amaçla, matris denklemleri (4.29) matris denklemleri ile (4.32) karşılaştırılarak aşağıdaki matris eşitlikleri elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
P_i &= H_{i,i+1}, i=1,2,\dots,m, \quad \tilde{P}_j = H_{m+j+1,m+j+2}, j=1,2,\dots,n, \\
-P_1 + \tilde{B}_1 + Q_0 &= H_{11}, \quad -P_n + \tilde{B}_2 + \tilde{q}_n = H_{ll}, \\
-P_m + T_1 + Q_m &= H_{kk}, \quad -\tilde{P}_1 + \tilde{T}_2 + \tilde{q}_0 = H_{k+1,k+1}, \\
\tilde{T}_1 &= H_{k+1,k}, \quad T_2 = H_{k,k+1}, \quad P_* = H_{ll}, \\
-P_i + P_{i+1} + Q_i &= H_{i+1,i+1}, i=1,2,\dots,m-1, \\
-P_j + P_{j+1} + Q_j &= H_{k+j+1,k+j+1}, j=1,2,\dots,n-1, \\
W_i &= V_{i+1,i+1} \quad i=0,1,\dots,m, \quad \tilde{W}_i = V_{k+j+1,k+j+1}, j=0,1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

(4.45) çözülürse şu sonuca varılabilir.

$$\begin{aligned}
\theta_i &= \det(H_{i,i+1})^{-1} = (c_{i,i+1}d_{i,i+1} - h_{i,i+1}^2)^{-1}, \\
\hat{r}_i &= \theta_i h_{i,i+1}, \quad r_i = \theta_i c_{i,i+1}, \quad \tilde{r}_i = \theta_i d_{i,i+1}, \quad i=1,2,\dots,m; \\
\tilde{\theta}_j &= \det(H_{k+j,k+j+1})^{-1} = (c_{k+j,k+j+1}d_{k+j,k+j+1} - h_{k+j,k+j+1}^2)^{-1}, \\
\tilde{r}_j &= \theta_j h_{k+j,k+j+1}, \quad \tilde{r}_j = \theta_j c_{k+j,k+j+1}, \quad \tilde{r}_j = \theta_j d_{k+j,k+j+1}, \quad j=1,2,\dots,n; \\
\hat{w}_{i-1} &= v_{ii}, \quad w_{i-1} = f_{ii}, \quad \tilde{w}_{i-1} = g_{ii}, \quad i=1,2,\dots,m+1, \\
\tilde{w}_{j-1} &= v_{k+j,k+j}, \quad \tilde{w}_{j-1} = f_{k+j,k+j}, \quad \tilde{w}_{j-1} = g_{k+j,k+j}, \quad j=1,2,\dots,n+1; \\
\hat{q}_{i-1} &= h_{ii} + \frac{\hat{r}_{i-1}}{\theta_{i-1}} + \frac{\hat{r}_i}{\theta_i}, \quad q_{i-1} = c_{ii} + \frac{r_{i-1}}{\theta_{i-1}} + \frac{r_i}{\theta_i}, \quad \check{q}_{i-1} = d_{ii} + \frac{\tilde{r}_{i-1}}{\theta_{i-1}} + \frac{\tilde{r}_i}{\theta_i}, \quad i=2,\dots,m; \\
\tilde{q}_{j-1} &= h_{k+j,k+j} + \frac{\tilde{r}_{j-1}}{\tilde{\theta}_{j-1}} + \frac{\tilde{r}_j}{\tilde{\theta}_j}, \quad \tilde{q}_{j-1} = c_{k+j,k+j} + \frac{\tilde{r}_{j-1}}{\tilde{\theta}_{j-1}} + \frac{\tilde{r}_j}{\tilde{\theta}_j}, \\
\tilde{q}_{j-1} &= d_{k+j,k+j} + \frac{\tilde{r}_{j-1}}{\tilde{\theta}_{j-1}} + \frac{\tilde{r}_j}{\tilde{\theta}_j}, \quad j=2,\dots,n.
\end{aligned}$$

Şimdi sınır koşulundaki parametrelere geçiş şartı belirlenebilir (4.45) den ve

$q_0, \hat{q}_0, \check{q}_0, q_m, \hat{q}_m, \check{q}_m, \tilde{q}_0, \hat{q}_0, \check{q}_0, \tilde{q}_n, \hat{q}_n, \check{q}_n$ in sabit olması şartında

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= q_0 - c_{11} - \frac{r_1}{\theta_1}, \quad a_{21} = \hat{q}_0 - (h_{11} + \frac{\hat{r}_1}{\theta_1} + a\alpha_1), \\
\alpha_2 &= \check{q}_0 - (d_{11} + h_{11} + \frac{\tilde{r}_1}{\theta_1} + \alpha_1 a^2 + 2a\alpha_{21}), \\
\beta_1 &= c_{ll} + \frac{\tilde{r}_n}{\tilde{\theta}_n} - \tilde{q}_n, \quad b_{41} = h_{ll} + \frac{\tilde{r}_n}{\tilde{\theta}_n} - b\beta_1 - \tilde{q}_n, \\
\beta_2 &= d_{ll} + \frac{\tilde{r}_n}{\tilde{\theta}_n} - (b^2\beta_1 + 2bb_{41} + \tilde{q}_n), \\
a_{31} &= c_{ll}, \quad a_{32} = \tilde{h}_{ll} - ac_{ll}, \quad a_{41} = h_{ll} - bc_{ll}, \quad a_{42} = d_{ll} + abc_{ll} - ah_{ll} - b\tilde{h}_{ll}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\zeta &= \det(H_{k,k+1})^{-1}, g_{23} = -\zeta c_{k,k+1}, g_{13} = \zeta(h_{k,k+1} - cc_{k,k+1}), \\
g_{24} &= \zeta(\tilde{h}_{k,k+1} + cc_{k,k+1}), g_{14} = \zeta(c\tilde{h}_{k,k+1} + c^2c_{k,k+1} - ch_{k,k+1} - d_{k,k+1}), \\
g_{11} &= -[g_{14}h_1 + g_{13}(ch_1 + l_1)], g_{21} = -[g_{14}h_1 + g_{23}(ch_1 + l_1)], \\
g_{12} &= -[g_{14}(h_2 - ch_1) + g_{13}(ch_2 + l_2 - c^2h_1 - cl_1)], \\
g_{22} &= -[g_{24}(h_2 - ch_1) + g_{23}(ch_2 + l_2 - c^2h_1 - cl_1)], \\
g_{43} &= \zeta(\tilde{h}_3h_4 - \tilde{h}_4h_3), g_{44} = \zeta[(\tilde{h}_4(ch_3 + l_3) - \tilde{h}_3(ch_4 + l_4))], \\
g_{33} &= \zeta[(h_4(c\tilde{h}_3 + \tilde{l}_3) - h_3(c\tilde{h}_4 + \tilde{l}_4))], \\
g_{34} &= \zeta[(c\tilde{h}_4 + \tilde{l}_4)(ch_3 + l_3) - (\tilde{h}_3 + \tilde{l}_3)(ch_4 + l_4)], \\
g_{41} &= \tilde{h}_1 - g_{43}(ch_1 + l_1) - g_{44}h_1, g_{42} = \tilde{h}_2 - g_{41}c - g_{43}(ch_2 + l_2) - g_{44}h_2, \\
g_{31} &= c\tilde{h}_1 + l_1 - g_{33}(ch_1 + l_1) - g_{34}h_1, g_{32} = c\tilde{h}_2 - \tilde{l}_2 - g_{33}(ch_2 + l_2) - g_{34}h_2,
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
h_1 &= c_{kk} + \frac{r_m}{\theta_m} - q_m, h_2 = h_{kk} + \frac{\tilde{r}_m}{\theta_m} - \tilde{q}_m, \\
l_1 &= -(\tilde{h}_{kk} + \frac{\tilde{r}_m}{\theta_m} - \tilde{q}_m), l_2 = -(d_{kk} + \frac{\tilde{r}_m}{\theta_m} - \tilde{q}_m), \\
h_3 &= c_{k,k+1}, h_4 = h_{k,k+1}, l_3 = -\tilde{h}_{k,k+1}, l_4 = -d_{k,k+1}, \\
h_1 &= c_{k+1,k}, \tilde{h}_2 = -h_{k+1,k}, \tilde{l}_1 = \tilde{h}_{k+1,k}, \tilde{l}_2 = -d_{k+1,k}, \\
\tilde{h}_3 &= -(c_{k+1,k+1} + \frac{\tilde{r}_1}{\tilde{\theta}_1} - \tilde{q}_0), \tilde{h}_4 = -(h_{k+1,k+1} + \frac{\tilde{r}_1}{\tilde{\theta}_1} - \tilde{q}_0), \\
\tilde{l}_3 &= \tilde{h}_{k+1,k+1} + \frac{\tilde{r}_1}{\tilde{\theta}_1} - \tilde{q}_0, \tilde{l}_{34} = d_{k+1,k+1} + \frac{\tilde{r}_1}{\tilde{\theta}_1} - \tilde{q}_0
\end{aligned}$$

dır. O zaman $\tilde{p}(t)$, $\tilde{q}(t)$, $\tilde{w}(t)$ ifadeleri (4.30) ile tanımlanabilir. Bu tür $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, $\tilde{w}$ fonksiyonları J üzerinde (4.14), (4.13), (4.4) ü sağlayan parçalı polinom fonksiyonlardır. (4.31) nin Atkinson tipinde olduğu ve (4.12), (4.15) in p, q, w fonksiyonlarının sırasıyla $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{w}$ fonksiyonlarıyla değiştirilmesiyle olduğu açıktır. (4.32) probleminin (4.29) ile aynı formda olduğunu görmek kolaydır.

Böylece Teorem 4.1 den (4.32) problemi (4.1), (4.5), (4.9) sınır değer problemine eş değerdir. Son kısım Teorem 4.1 den elde edilebilir.

Uyarı 4.3. Teorem 4.1 ve Teorem 4.3 reel değerli kendine eş sınır koşulları yani ayrık olmayan, karışık ve ayrık sınır koşullarının her üçü için de geçerlidir.

BÖLÜM V

SONUÇ

Bu tezde sonlu spektruma sahip Atkinson tipindeki Sturm-Liouville problemi ele alınmıştır. Amacımız Sturm-Liouville problemiyle aynı özdeğere sahip bir matris özdeğer problemi inşa etmektir. Tersine ise bir matris özdeğer problemi verildiğinde bu matris problemine denk olacak şekilde bir Sturm-Liouville problemi kurmaktır. Tezde incelenen Sturm-Liouville problemi şunlardır. Birincisi $-\infty \leq a \leq b < \infty$ aralığında $\lambda \in \mathbb{C}$, p ve q katsayılarının bazı kabulleri sağladığı (Bkz. Bölüm 2, (2.1))

$$-(py')' + qy = \lambda wy, \quad J = (a, b) \quad (5.1)$$

Sturm-Liouville denkleminin ve A ile B bazı şartları sağlayan (Bkz. Bölüm 2, (2.1) eşitliği) 2×2 boyutunda, kompleks matrisler olmak üzere

$$AY(a) + BY(b) = 0, \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ py' \end{bmatrix}, \quad A, B \in M_2(\mathbb{C}) \quad (5.2)$$

formunda iki noktalı ayırık veya ayırık olmayan sınır koşulları ile oluşturduğu sonlu spektruma sahip Atkinson tipindeki Sturm-Liouville problemidir. İkinci ele alınan problem ise yine aynı kabuller altındaki (5.1) Sturm-Liouville denklemi, (5.2) ayırık ve ayırık olmayan sınır koşulları ve buna ek olarak bir $c \in (a, b)$ iç süreksizliğe sahip ve bu noktada

$$CY(-c) + DY(+c) = 0 \quad (5.3)$$

biçimindeki geçiş şartlarıyla birlikte oluşturduğu geçiş şartlı Atkinson tipindeki sonlu spektruma sahip Sturm-Liouville problemidir. $\lambda \in \mathbb{C}$, p ve q katsayılarının bazı kabuller ile sağladığı (Bkz. Bölüm 3) bir diğer Sturm-Liouville denklemi ise

$$(pu'')'' + qu = \lambda wu \quad (5.4)$$

şeklinde tanımlıdır ki bu Atkinson tipi dördüncü mertebeden sınır değer problemidir. Buradaki amacımız bu sınır değer probleminin, katsayıları $2n \times 2n$ boyutunda reel değerli V bir blok Jacobi matris, W ise diagonal matris olmak üzere

$$VX = \lambda WX \quad (5.5)$$

biçiminde tanımlı olan bir matris özdeğer problemini kullanarak ters spektral problemini göstermektir. Tüm problemler incelenirken gerek düz gerekse ters uygulamada bütün özel durumlar dikkate alınmış ve her bir durum için Sturm-Liouville problemi ve matris özdeğer problemi aynı anda inşa edilmiştir.



KAYNAKLAR

- [1] Ao, JJ., Sun, J., (2017). Eigenvalues of a class of fourth-order boundary value problems with transmission conditions using matrix theory, *Linear and Multilinear Algebra*, 1-14.
- [2] F.V, Atkinson, (1964). *Discrete and continuous boundary value problems*. Academic Press: New York, London.
- [3] Kong, Q., Wu, H., Zettl, A., (2001), Sturm-Liouville Problems with Finite Spectrum, *Journal Mathematical Analysis and Applications*, **263**,748-762.
- [4] Bo, FZ., Ao, JJ., (2014). *The Finite Spectrum Of Fourth-Order Boundary Value Problems with Transmission Conditions*, Abstract and Applied Analysis, p.7.
- [5] Kong, Q., Volkmer, H., Zettl, A., (2009). Matrix Representations of Sturm-Liouville Problems with Finite Spectrum, *Results in Mathematics*, **54**,103-116.
- [6] Kablan, A., Manafov, MD., (2016). Matrix Representations of Fourth-Order Boundary Value Problems with Transmission Conditions, *Mediterranean Journal of Mathematics*, **13**,205-215.
- [7] Ao, JJ., Sun, J., Zettl A., (2013). Equivalence of fourth order boundary value problems and matrix eigenvalue problems, *Results in Mathematics* , **63**,581-595.
- [8] Ao, JJ., Sun, J., (2015). Matrix representations of fourth-order boundary value problems with coupled or mixed boundary condition, *Linear and Multilinear Algebra*, **63**,1590-1598.
- [9] Ao, JJ., Liang Zhang, (2019). Inverse spectral problem of fourth-order boundary value problems with finite spectrum, *Mathematical Method Applied Sciences*, **42**,4472-4479

- [10] Zettl, A., (2005). *Sturm-Liouville Theory*, Mathematics Subject Classification: USA.
- [11] Ao, JJ., Sun, J., Zhang MZ., (2012). The matrix representations of Sturm-Liouville problems with transmission conditions, *Computer Mathematic with Applications*, **63(8)**,1335-1348
- [12] Xu, SF., (1998). *An Introduction to Inverse Algebraic Eigenvalue Problems*, Peking University Press.
- [13] Chanane, B., (2010). Accurate solutions of fourth order Sturm–Liouville problems, *Journal of Computational Applied Mathematics*, **234(10)**, 3064–3071.
- [14] Greenberg, L., Marletta, M., (2010). Numerical methods for higher order Sturm–Liouville problems, *Journal of Computational Applied Mathematics*, **125(1–2)**, 367-383.
- [15] Naimark, MA., (1968). *Linear Differential Operators*. English transl. Ungar: New York.
- [16] Wang, A., Sun, J., Zettl, A., (2009). Characterization of domains of self-adjoint ordinary differential operators, *Journal of Differential Equations*, **246(4)**,1600–1622.
- [17] Hao, X., Sun, J., Wang, A, Zettl, A., (2012). Characterization of domains of self-adjoint ordinary differential operators II, *Results in Mathematics* , **61(3–4)**, 255–281.
- [18] Hao, X., Sun, J., Zettl, A., (2012). Canonical forms of self-adjoint boundary conditions for differential operators of order four, *Journal Mathematical Analysis and Applications*, **387(2)**,1176–1187.
- [19] Wang, A., Sun, J., Zettl, A., (2008). The classification of self-adjoint boundary conditions: separated, coupled and mixed, *Journal of Functional Analysis*, **255(6)**,1554–1573.
- [20] Ao, JJ., Sun, J., Zettl, A., (2012). Matrix representations of fourth order boundary value problems with finite spectrum, *Linear Algebra Applications*, **436(7)**, 2359–2365.

ÖZGEÇMİŞ

EĞİTİM BİLGİLERİ

- **Lisans:** Gaziantep Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
- **Yüksek Lisans:** Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik

YABANCI DİL BİLGİLERİ

- Teknik İngilizce ileri düzey
- İngilizce iyi düzey

BİLGİSAYAR BECERİLERİ

- C++ orta düzey
- Php İleri Düzey
- Html, Css İleri Düzey
- Laravel İleri Düzey
- SQL İleri Düzey