



T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN SÜPERLİNEER NEUTRAL TERİMLİ
DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ TEZİ

Hasan KARAÇALLI

Danışman: Doç. Dr. Orhan ÖZDEMİR

TOKAT- 2025

JÜRİ KABUL VE ONAY

Hasan KARAÇALLI tarafından hazırlanan “**Dördüncü Mertebeden Süperlineer Neutral Terimli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı Üzerine**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı **27.12.2024** tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmzası

Üye : Prof. Dr. Ercan TUNÇ
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
(Başkan)

.....

Üye : Doç. Dr. Orhan ÖZDEMİR
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
(Danışman)

.....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN
Amasya Üniversitesi

.....

ONAY

...../...../.....

Doç. Dr. Ercan ÇAÇAN
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Hasan KARAÇALLI

27/12/2024

ÖZET

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN SÜPERLİNEER NEUTRAL TERİMLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI ÜZERİNE

Karaçalı, Hasan

Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Orhan ÖZDEMİR

Aralık 2024, 64 sayfa

Bu tez çalışmasında, ilk olarak fonksiyonel diferensiyel denklemlerin tanımı ve bu denklemlerin türlerinin sınıflandırması üzerinde durularak, çözümler için salınım ve salınımsızlık kavramları tanımlanmış ve örneklerle açıklanmıştır. Daha sonra dördüncü mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemlerin salınımı üzerine literatürde mevcut olan bazı çalışmalar, sonuçlarının önemi vurgulanarak özet halinde sunulmuştur. Tez çalışmasının ana sonuçlarının verildiği üçüncü bölümde ise, dördüncü mertebeden süperlineer neutral terimli bir fonksiyonel diferensiyel denklemler sınıfı göz önüne alınmış, bu denklemler sınıfını salınımı ile ilgili yeni kriterler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların uygulanabilirliği ve önemi örneklerle gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Salınım, Dördüncü Mertebe, Neutral Diferensiyel Denklemler, Süperlineerlik.

ABSTRACT

ON THE OSCILLATION OF FOURTH ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SUPERLINEAR NEUTRAL TERMS

Karaçallı, Hasan

Master's Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Orhan ÖZDEMİR

December, 2024, 64 pages

In this thesis study, firstly, the definition of functional differential equations and the classification of these types of equations are discussed. The definitions of oscillation and nonoscillation of solutions are given and explained with examples. Subsequently, some important studies available in the literature on the oscillation of fourth-order functional differential equations are summarized, emphasizing the importance of their results. In the third chapter, which presents the main results of the thesis study, a class of fourth-order functional differential equations with a superlinear neutral term is considered, and some new criteria related to the oscillation of this class of equations are obtained. The applicability and significance of the results are demonstrated with examples.

Keywords: Oscillation, Fourth Order, Neutral Differential Equations, Superlinearity.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iv
SİMGE ve KISALTMALAR	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	2
2.1. Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler: Tanım ve Sınıflandırılması	2
2.2. Yüksek Mertebeden Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı	4
2.3. Dördüncü Mertebeden Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler için Salınım Sonuçları	7
3. Dördüncü Mertebeden Süperlineer Neutral Terimli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı	29
3.1. Giriş	29
3.2. Yardımcı Lemmalar	33
3.3. Temel Sonuçlar	34
4. TARTIŞMA VE SONUÇ	49
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	56

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamda bana engin bilgileri ve tecrübesi ile her zaman yol gösteren ve her türlü desteğini benden esirgemeyen kıymetli hocam Doç. Dr. Orhan ÖZDEMİR'e, espirili kişiliği ile hem tezimle ilgili hemde tezim dışında bilgisini ve tecrübelerini benden esirgemeyen Prof. Dr. Ercan Tunç'a ve ders aldığım diğer hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması döneminde bana desteklerini ve hoşgörülerini esirgemeyen Tokat Çalışma ve İş Kurumu İl Müdürü Bekir Fındık'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bu dönemde yanımda olan bana hep cesaret veren manevi desteğini benden esirgemeyen ve yüksek lisansımı yapmam konusunda beni hep teşvik eden canım eşim Dr. Öğr. Üyesi Ayşegül Karaçalı'ya ve her zaman gülücükleri ile bana destek olan minik kızım Zeynep'e sonsuz teşekkür ederim.

Hasan KARAÇALLI

Aralık 2024

SİMGE ve KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar kümmesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_0$	$[0, \infty)$ aralığı
γ	Gamma
ϱ	Varrho
λ	Lambda
ω	Omega
τ	Tau
ζ	Zeta
η	Eta
v	Upsilon
ϵ	Epsilon
κ	Kappa
ρ	Rho
μ	Mu
ψ	Psi
ξ	Xi
χ	Chi
φ	Varphi
π	Pi
ϕ	Phi
δ	Delta
σ	Sigma
α	Alpha
θ	Theta
β	Beta

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmamız dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm yani giriş bölümünde tezin yapısı ve işleyişinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde fonksiyonel diferensiyel denklemlerin tanımları yapılmış ve fonksiyonel diferensiyel denklem sınıfları tanıtılmıştır. Daha sonra dördüncü mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemler ile ilgili literatür özeti sunulmuştur. Ayrıca dördüncü mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınım davranışları örneklerle incelenmiş olup bu denklemlerin kullanıldığı bilim dallarına ait örneklerle yer verilmiştir.

Üçüncü bölüm, tez çalışmamızın ana sonuçlarına ayrılmıştır. İkinci bölümde verilen literatür özetindeki çalışmalar ile bizim çalışmamızın farkının neler olduğu açıklanmış ve çalışmamızdaki teoremlerin ispatında kullanılacak lemmalar verilmiştir. Daha sonra temel sonuçlarımız verilerek daha iyi anlaşılması açısından bir örnek ile açıklanmıştır.

Dördüncü bölümde ise bu tez çalışmasında kullanılan yöntemler kullanılarak, çalışma yapılabilecek problemler ile ilgili açıklamalara yer verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler: Tanım ve Sınıflandırılması

Fonksiyonel diferensiyel denklemler (FDD), diferensiyel denklemlerin genel bir tipi olmakla birlikte bu denklemler bağımsız değişkenin (argüment) farklı değerlerine bağlı olarak bilinmeyen fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevlerini bulunduran denklemlerdir. Rus literatüründe ilk kez 18. yüzyılın ikinci yarısında Kondorse tarafından "değişen argümentli diferensiyel denklemler" olarak tanımlanmıştır (El'sgol'ts ve Norkin, 1973). FDD'lerin, otomatik kontrol teorisi, salınım sistemleri, roket hareketi ve uzun vadeli ekonomik planlama gibi birçok bilim alanında uygulaması bulunmaktadır. Bu yüzden FDD'lerin çözümlerinin incelenmesi önemlidir; ancak genellikle açık çözümleri elde edilememektedir. Bu durum, araştırmacıları FDD'lerin çözümlerini elde etmeden var olduğu kabul edilen çözümlerin davranışını incelemeye yöneltmiştir. Bu yaklaşım diferensiyel denklemlerde kalitatif (nitel) teori olarak adlandırılmıştır. Kalitatif teorinin önemli bir konusu ise salınım teorisidir; bu teori ilk kez 19. yüzyılda Sturm tarafından ortaya atılmıştır. Şimdi FDD'lerin sınıflandırılmasından bahsedeceğiz.

Tanım 2.1.1. Bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin, bağımsız değişkenin farklı değerlerine bağlı olarak ortaya çıktığı diferensiyel denklemlere, **fonksiyonel diferensiyel denklemler** veya (rus literatüründe) **sapma argümentli diferensiyel denklemler** denir (Zafer, 1992).

Tanım 2.1.2. Bir FDD'de bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevi, yalnızca bağımsız değişkenin bir değerine bağlıysa ve bu değer, bağımlı değişken ve türevlerinin diğer argümentlerinden küçük kalmıyorsa, bu denklemlere gecikmeli (retarded/delay) diferensiyel denklem denir (Zafer, 1992).

Örneğin,

$$z^{(4)}(y) + \frac{e^y}{y^4} z\left(\frac{1}{2}y\right) = 0$$

denklemini $y > 1$ için gecikmeli diferensiyel denklemdir.

Bu tür denklemler, mekanik sistemlerdeki titreşim analizi, kontrol teorisi veya diğer dinamik sistemlerde gecikme etkilerini modellemek için kullanılır (Hale ve Verduyn Lunel, 1993).

Tanım 2.1.3. Bir FDD’de bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevi, yalnızca bağımsız değişkenin bir değerine bağlıysa ve bu değer, bağımlı değişken ve türevlerinin diğer argümentlerinden büyük kalmıyorsa, bu denklemlere ileri tipten (advanced) diferensiyel denklem denir (Zafer, 1992).

Örneğin,

$$z^{(4)}(y) + \frac{\sin y}{y^3} y z'(y) + \frac{\cos y}{y^4} z(\lambda y) = 0$$

denklemini, $\lambda > 1$ için ileri tipten diferensiyel denklemdir.

Bu tür denklemler, özellikle kontrol sistemlerinde, mekanik sistemlerin dinamik davranışlarının analizi veya biyolojik sistemler gibi önceden kestirimlerde bulunulması gereken durumlarda ve önceden belirlenmiş bir parametre ile bir sistemin yanıtını tahmin etmek amacıyla kullanılır (Hale ve Verduyn Lunel, 1993).

Tanım 2.1.4. Bir FDD’de, bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevi yalnızca bağımsız değişkenin bir değerine bağlıysa ve bu denklem, en yüksek mertebeden türevin argümentinden daha küçük ve daha büyük argümentler içeriyorsa, bu denklemlere karma tipten (mixed) diferensiyel denklem denir (Zafer, 1992).

Örneğin,

$$z^{(4)}(y) = (\sin y) z(y + 2e) + 3z(y - \pi)$$

denklemini $y > 0$ için birer karma diferensiyel denklemdir.

Bu tür denklemler, dinamik sistemlerin karmaşık etkileşimlerini ve gecikme etkilerini modellemek için kullanılabilir (Hale ve Verduyn Lunel, 1993).

Tanım 2.1.5. Bir FDD’de, bağımlı değişkenin en yüksek mertebeden türevi hem sapma argümentine bağlı, hem de sapma argümentinden bağımsız olarak ortaya çıkıyorsa, bu denklemlere neutral (nötral) diferensiyel denklem denir.

Örneğin,

$$z''(y) + e^y z''\left(\frac{y}{2}\right) + e^y z''(2y) + z\left(\frac{y}{3}\right) = \sin y$$

ve

$$z^{(4)}(y) + \frac{1}{2}z^{(4)}(y + \pi) - \frac{1}{4}z(y - \pi) = 0$$

denklemleri $y > 0$ için birer neutral diferensiyel denklemdir.

2.2. Yüksek Mertebeden Diferensiyel Denklemlerin Sahnımlılığı

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ reel sayılar kümesini, $\mathbb{R}_0 = [0, \infty)$ aralığını temsil etsin. $F : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını göz önüne alalım. $g, \tau : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar, $\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = \infty$ ve $\lim_{y \rightarrow \infty} \tau(y) = \infty$ olduğunu kabul edelim. $\delta = \pm 1$ olmak üzere, n’inci mertebeden

$$z^{(n)}(y) + \delta F\left(y, z(y), z[g(y)], z'(y), \dots, z^{(n-1)}(y), z^{(n)}[\tau(y)]\right) = 0 \quad (2.2.1)$$

FDD’yi göz önüne alalım.

Tanım 2.2.1. $y \in [y_z, \infty) \subset \mathbb{R}_0$ olmak üzere $[y_z, \infty)$ aralığı üzerinde n kez türevlenebilen ve (2.2.1) denklemini sağlayan bir $z(y)$ fonksiyonuna (2.2.1) FDD’nin bir çözümü denir. Burada $y_z \geq 0$ sayısı $z(y)$ özel çözümüne bağlı bir değerdir (Agarwal ve ark., 2000).

Tanım 2.2.2. $z(y)$ fonksiyonu, (2.2.1) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer, en az bir $y \in [y_z, \infty)$ için $z(y) \neq 0$ oluyorsa bu çözüme aşık ar olmayan (sıfır olmayan) çözüm denir.

(2.2.1) diferensiyel denkleminin tüm aşık ar olmayan çözümlerinin kümesini $\mathcal{S}$ ile gösterelim.

Tanım 2.2.3. Bir $z \in \mathcal{S}$ çözümünün $[y_z, \infty)$ aralığı üzerinde sıfırlarının kümesi üstten sınırlı değilse, yani bu $z(y)$ çözümü keyfi sayıda yeterince büyük sıfır yerlerine sahipse (2.2.1) diferensiyel denkleminin bu çözümüne salınımlı çözüm denir (Agarwal ve ark., 2000).

Yani $z(y)$ salınımlı bir çözüm ise nihai pozitif (eventually positive) ya da nihai negatif (eventually negative) bir çözüm değildir.

Tanım 2.2.4. Aşık olmayan bir $z(y)$ çözümü $[y_z, \infty)$ aralığında salınım yapan bir çözüm değilse, yani her $y \geq y_1$ için $z(y) \neq 0$ olacak şekilde bir $y_1 \in [y_z, \infty)$ değeri mevcutsa, o halde bu çözüme salınımsız (salınım yapmayan) çözüm denir (Agarwal ve ark., 2004).

Yani salınım yapmayan bir çözüm, nihai pozitif (eventually positive) ya da nihai negatif (eventually negative) bir çözümdür.

Tanım 2.2.5. Eğer $z \in \mathcal{S}$ fonksiyonlarının (çözümlerin) tümü salınımlı ise o zaman (2.2.1) diferensiyel denkleminin salınımlıdır denir (Agarwal ve ark., 2000).

Örnek 2.2.6. $y \geq 1$ ve $a \in (0, 1)$ için dördüncü mertebeden

$$(y(z'''(y)))' + yz(ay) = 0 \quad (2.2.2)$$

delay FDD (Althubiti ve ark., 2021, Teorem 1)'in bütün şartlarını sağladığı için (2.2.2) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır. Dolayısıyla (2.2.2) denklemin salınımlıdır (Althubiti ve ark., 2021).

Örnek 2.2.7. $\xi_0 > 36$ için dördüncü mertebeden

$$z^{(4)}(y) + \frac{\xi_0}{y^4} z\left(\frac{1}{2}y\right) = 0 \quad (2.2.3)$$

delay FDD'yi göz önüne alalım. (Althubiti ve ark., 2021, Teorem 2)'den dolayı (2.2.3) denklemin salınımlıdır (Althubiti ve ark., 2021).

Örnek 2.2.8. $y \geq 1$ ve $v_0 > 0$ için, dördüncü mertebeden

$$\left(y^2 \left(z(y) + 4z\left(\frac{y}{2}\right)\right)\right)''' + v_0 z\left(\frac{y}{2}\right) = 0 \quad (2.2.4)$$

neutral diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Eğer $v_0 > 4$ ise (2.2.4) neutral diferensiyel denklemi (Almutairi ve ark., 2021, Teorem 2)'den dolayı salınımlıdır (Almutairi ve ark., 2021).

Örnek 2.2.9. $y \geq 1$ ve $v_0 > 0$ için, dördüncü mertebeden

$$\left(y^2 \left(z(y) + 16y \left(\frac{y}{2} \right) \right)''' \right)' + v_0 z\left(\frac{y}{2}\right) = 0 \quad (2.2.5)$$

neutral FDD'yi göz önüne alalım. Eğer $v_0 > 16$ ise (2.2.5) neutral diferensiyel denklemi (Almutairi ve ark., 2021, Teorem 2)'den dolayı salınımlıdır (Almutairi ve ark., 2021).

Örnek 2.2.10. $y \geq 1$, ve a bir sabit olmak üzere, dördüncü mertebeden

$$z^{(4)}(y) + \frac{q_0}{y^4} z(2y) = 0 \quad (2.2.6)$$

FDD'yi göz önüne alalım. Eğer $q_0 > 2.25$ ise (2.2.6) FDD'nin bütün çözümleri (Bazighifan ve ark., 2020a, Teorem 2)'den dolayı salınımlıdır. (2.2.6) FDD'nin bütün çözümleri salınımlı olduğu için (2.2.6) FDD salınımlıdır (Bazighifan ve ark., 2020a).

Örnek 2.2.11. $y > 1$, $q_0 > 0$ ve $c > 1$ olmak üzere, dördüncü mertebeden

$$z^{(4)}(y) + \frac{q_0}{y^2} z(cy) = 0 \quad (2.2.7)$$

FDD'yi göz önüne alalım. Eğer $q_0(1 + q_0 \ln c) > 1/4$ ise (2.2.7) FDD'nin bütün çözümleri (Bazighifan ve ark., 2020a, Teorem 2)'den dolayı salınımlıdır. (2.2.7) FDD'nin bütün çözümleri salınımlı olduğu için (2.2.7) diferensiyel denklemi salınımlıdır (Bazighifan ve ark., 2020a).

Örnek 2.2.12. $y \geq 0$ için, dördüncü mertebeden

$$(z(y) + z(y - \pi) + 4z(y + 4\pi))^{(4)} - 2z(y - 6\pi) - 2z(y + 2\pi) = 0 \quad (2.2.8)$$

FDD'yi göz önüne alalım. Kolaylıkla gösterilebilir ki (2.2.8) denklemi $z(y) = \sin y$ salınımlı çözümüne sahiptir.

Örnek 2.2.13. $y \geq 0$ için, dördüncü mertebeden

$$(2(z(y) + z(y - \pi) + z(y + 2\pi)))''' - z(y - 4\pi) + z(y + \pi) = 0 \quad (2.2.9)$$

FDD'yi göz önüne alalım. Kolaylıkla gösterilebilir ki (2.2.9) denklemi $z(y) = \sin y$ salınımlı çözümüne sahiptir.

2.3. Dördüncü Mertebeden Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler için Salınım Sonuçları

Tez çalışmamızın bu bölümünde, dördüncü mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı üzerine ortaya konulan bazı önemli temel sonuçlar tanıtılacaktır.

Dördüncü mertebeden

$$\frac{d^3}{dy^3} \left(a(y) \left(\frac{dx(y)}{dy} \right)^\alpha \right) + q(y)f(x[g(y)]) = 0 \quad (2.3.1)$$

ve

$$\frac{d^3}{dy^3} \left(a(y) \left(\frac{dx(y)}{dy} \right)^\alpha \right) = q(y)f(x[g(y)]) + p(y)h(x[\sigma(y)]), \quad (2.3.2)$$

FDD'lerin bütün çözümlerinin salınım davranışları için, Said R. Grace, Ravi P. Agarwal ve John R. Graef

(g_1) α iki pozitif tek tam sayının oranı;

(g_2) $a(y)$, $p(y)$ ve $q(y) \in C([y_0, \infty), (0, \infty))$ ve

$$\int_{y_0}^{\infty} a^{-1/\alpha}(s)ds < \infty; \quad (2.3.3)$$

(g_3) $R = (-\infty, \infty)$, olmak üzere $y \geq y_0$ için $g(y), \sigma(y) \in C^1([y_0, \infty), R)$, $g(y) < y$, $\sigma(y) > y$, $g'(y) \geq 0$, $\sigma'(y) \geq 0$ ve $\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = \infty$;

(g_4) $f, h \in C(R, R)$, $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$, $xh(x) \geq 0$, $f'(x) \geq 0$ ve $h'(x) \geq 0$ $x\nu > 0$ için,

$$-f(-x\nu) \geq f(x\nu) \geq f(x)f(\nu) \quad (2.3.4)$$

ve

$$-h(-x\nu) \geq h(x\nu) \geq h(x)h(\nu) \quad (2.3.5)$$

şartları altında aşağıdaki salınım kriterlerini ortaya koymuştur (Grace ve ark., 2009). Belirtilmelidir ki (2.3.3) sağlanıyorsa (2.3.1) ve (2.3.2) denklemlerine kanonik olmayan formdadır denir. Yazımda kolaylık olması için, $y \geq y_0 \geq 0$ için

$$A[y, y_0] = \int_{y_0}^y \left(\frac{s^2}{a(s)} \right)^{1/\alpha} ds \quad \text{ve} \quad m(y) = \int_y^\infty \left(\frac{1}{a(s)} \right)^{1/\alpha} ds$$

notasyonları kullanılacaktır.

Teorem 2.3.1. Kabul edelim ki $(g_1) - (g_4)$, (2.3.3) ve (2.3.4) koşulları sağlansın. Ayrıca $y \geq y_0$ için $g(y) \leq \xi(y) < y$ olacak şekilde azalmayan bir $\xi(y) \in C([y_0, \infty), R)$ fonksiyonunun var olduğunu varsayalım. Eğer, $0 < c < 1$ olacak biçimdeki herhangi bir c sabiti için

$$\nu'(y) + cq(y)f(A[g(y), y_1])f(\nu^{1/\alpha}[g(y)]) = 0; \quad (2.3.6)$$

$0 < b < 1$ olacak biçimdeki herhangi bir b sabiti için

$$z'(y) + bq(y)f(a^{-1/\alpha}[g(y)]g(y))f\left(\left(\frac{[\xi(y) - g(y)]^2}{2!}\right)^{1/\alpha}\right)f(z^{1/\alpha}[\xi(y)]) = 0; \quad (2.3.7)$$

ve

$$\int^\infty \left(\frac{1}{a(s)} \int_{y_0}^s \int_{y_0}^u \int_{y_0}^v q(\tau)f(m[g(\tau)])d\tau dv du \right)^{1/\alpha} ds = \infty \quad (2.3.8)$$

olmak üzere, $0 < d < 1$ olacak biçimdeki herhangi bir d sabiti için

$$w'(y) + dq(y)f(m[g(y)])f(g^{1/\alpha}(y))f([\xi(y) - g(y)]^{1/\alpha})f(w^{1/\alpha}[\xi(y)]) = 0 \quad (2.3.9)$$

birinci mertebeden FDD'ler salınımlıysa, bu taktirde (2.3.1) denklemini de salınımlıdır (Grace ve ark., 2009).

Teorem 2.3.2. Kabul edelim ki $(g_1) - (g_4)$, (2.3.4) ve $a \neq 1$ için

$$\int^{\infty} a^{-1/\alpha}(s)ds = \infty, \quad (2.3.10)$$

koşulları sağlansın. Ayrıca $y \geq y_0$ için $g(y) \leq \xi(y) < y$ olacak şekilde azalmayan bir $\xi(y) \in C([y_0, \infty), R)$ fonksiyonunun var olduğunu varsayalım. Eğer birinci mertebeden (2.3.6) ve (2.3.7) fonksiyonel diferensiyel denklemleri salınımlıysa, bu takdirde (2.3.1) denklemi de salınımlıdır (Grace ve ark., 2009).

Burada $y \geq y_1 \geq y_0$ için, $b > 0$, $c < 1$ keyfi sabitler olmak üzere

$$\bar{Q}(y) = \min \left\{ cq(y)f(A[g(y), y_1]), bq(y)f\left(g(y)a^{-1/\alpha}[g(y)]\right)xf\left(\left(\frac{[\xi(y) - g(y)]^2}{2!}\right)^{1/\alpha}\right) \right\}$$

şeklinde tanımlanırsa (2.3.6) ve (2.3.7) denklemleri

$$\nu'(y) + \bar{Q}(y)f\left(\nu^{1/\alpha}[\xi(y)]\right) = 0, \quad (2.3.11)$$

biçiminde tek bir denklemde birleştirilebilir. Böylece Teorem 2.3.2'den aşağıdaki salınım kriteri elde edilir.

Teorem 2.3.3. Kabul edelim ki Teorem 2.3.2'nin bütün şartları sağlansın. Ayrıca (2.3.6) ve (2.3.7) fonksiyonel diferensiyel denklemlerinin yerine (2.3.11) fonksiyonel diferensiyel denkleminin salınımlı olduğunu kabul edelim. Bu takdirde Teorem 2.3.2'nin sonucu yine geçerlidir (Grace ve ark., 2009).

Yukarıdaki düşünceye benzer şekilde, $0 < d < 1$ keyfi bir sabit olmak üzere $y \geq y_1 \geq y_0$ için

$$Q(y) = \min \left\{ \bar{Q}(y), dq(y)f(m[g(y)])f\left(g^{1/\alpha}(y)\right)f\left((\xi(y) - g(y))^{1/\alpha}\right) \right\} \quad (2.3.12)$$

şeklinde tanımlanırsa, (2.3.6)-(2.3.9) fonksiyonel diferensiyel denklemleri,

$$\nu'(y) + Q(y)f\left(\nu^{1/\alpha}[\xi(y)]\right) = 0, \quad (2.3.13)$$

biçimindeki tek bir denklemle ifade edilebilir. Bu durumda aşağıdaki salınım sonucu elde edilir.

Teorem 2.3.4. Teorem 2.3.1'nin hipotezleri geçerli olsun. Ayrıca (2.3.6) - (2.3.9) fonksiyonel diferensiyel denklemlerinin yerine (2.3.13) denkleminin salınımlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 2.3.1'nin sonucu yine geçerlidir (Grace ve ark., 2009).

Şimdi, (2.3.13) FDD'nin salınımlı olması için literatürde yer alan bazı yeter koşulları belirtelim, örneğin bkz. (Agarwal ve ark., 2003a; Györi ve Ladas, 1991).

Not 2.3.5. Eğer aşağıdaki üç durumdan bir tanesi sağlanırsa (2.3.13) denklemini salınımlıdır:

$$(I_1) \quad u \neq 0 \text{ için } \frac{f(u^{1/\alpha})}{u} \geq 1 \text{ ve}$$

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \int_{\xi(y)}^y Q(s) ds > 1, \quad (2.3.14)$$

veya

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} \int_{\xi(y)}^y Q(s) ds > 1/e. \quad (2.3.15)$$

$$(I_2) \quad u \rightarrow 0 \text{ iken } \frac{u}{f(u^{1/\alpha})} \rightarrow 0 \text{ ve}$$

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \int_{\xi(y)}^y Q(s) ds > 0. \quad (2.3.16)$$

$$(I_3) \quad \int_{\pm 0} \frac{du}{f(u^{1/\alpha})} < \infty \text{ ve}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(s) ds = \infty. \quad (2.3.17)$$

Örnek 2.3.6. $y \geq 5$ için dördüncü mertebeden

$$\frac{d^3}{dy^3} \left(y^6 \left(\frac{dx(y)}{dy} \right)^3 \right) + \frac{1}{\sqrt{y}} x^3[\sqrt{y}] = 0 \quad (2.3.18)$$

FDD'yi göz önüne alalım. Burada $\alpha = 3$, $f(x) = x^3$, $a(y) = y^6$, $q(y) = 1/\sqrt{y}$, ve $g(y) = \sqrt{y}$ olduğu açıkça görülmektedir. $y \geq 5$ için $\xi(y) = 2\sqrt{y}$ kabul edelim. Bu

durumda

$$\int_5^\infty a^{-1/\alpha}(s)ds = \int_5^\infty s^{-2}ds = \frac{1}{5} < \infty \quad (2.3.19)$$

ve $y \geq 5$ için

$$m(y) = \int_y^\infty a^{-1/\alpha}(s)ds = \frac{1}{y} < \infty \quad (2.3.20)$$

olduğu açıkça görülmektedir. Herhangi bir pozitif c sabiti ve $y \geq 5$ için

$$Q(y) = \frac{c}{y}$$

olduğu kolayca hesaplanabilir. Dolayısıyla, (I_1) şartı sağlandığından, Teorem 2.3.4'ten (2.3.18) denkleminin salınımlı olduğu sonucuna varılır.

Örnek 2.3.7. Aşağıdaki dördüncü mertebeden

$$\left(y^{10}(x'(y))^5\right)''' + \frac{1}{\sqrt{y}}x^3[\sqrt{y}] = 0 \quad (2.3.21)$$

FDD'yi göz önüne alalım. Burada $\alpha = 5$, $f(x) = x^3$, $a(y) = y^{10}$, $q(y) = 1/\sqrt{y}$, ve $g(y) = \sqrt{y}$ olduğu görülmektedir. $y \geq 5$ için $\xi(y) = 2\sqrt{y}$ kabul edelim. Dolayısıyla (I_2) ve (I_3) koşullarının her ikisi de sağlandığından Teorem 2.3.4'den dolayı (2.3.21)'nin salınımlı olduğu sonucuna varılır (Grace ve ark., 2009).

Teorem 2.3.8. Kabul edelim ki $(g_1) - (g_4)$, (2.3.3),(2.3.4) ve (2.3.5) koşulları sağlansın. Ayrıca $y \geq y_0$ için $g(y) < \xi(y) < \eta(y) < y$ ve $\sigma(y) > \rho(y) > y$ olacak şekilde azalmayan $\xi(y), \eta(y)$ ve $\rho(y) \in C([y_0, \infty), R)$ fonksiyonlarının var olduğunu varsayalım. Aşağıdaki birinci mertebeden ileri tipten

$$\nu'(y) - p(y)h\left(\int_{\rho(y)}^{\sigma(y)} \left(\frac{[u - \rho(y)]^2}{2!a(u)}\right)^{1/\alpha} du\right)h\left(y^{1/\alpha}[\rho(y)]\right) = 0, \quad (2.3.22)$$

diferensiyel denklemini, birinci mertebeden gecikmeli

$$z'(y) + q(y)f\left(\frac{\xi(y) - g(y)}{a^{1/\alpha}[\xi(y)]}\right)f\left(\left(\frac{[\eta(y) - \xi(y)]^2}{2!}\right)^{1/\alpha}\right)f\left(z^{1/\alpha}[\eta(y)]\right) = 0, \quad (2.3.23)$$

diferensiyel denklemini, $0 < c < 1$ keyfi bir sabit olmak üzere, birinci mertebeden gecikmeli

$$w'(y) + cq(y)f\left(\int_{y_1}^{g(y)} \left(\frac{s}{a(s)}\right)^{1/\alpha} ds\right)f\left((\xi(y) - g(y))^{1/\alpha}\right)f\left(w^{1/\alpha}[\xi(y)]\right) = 0, \quad (2.3.24)$$

diferensiyel denklemini ve $0 < \bar{c} < 1$ keyfi bir sabit olmak üzere, birinci mertebeden gecikmeli

$$v'(y) + \bar{c}q(y)f(m[g(y)])f(g^{2/\alpha}(y))f(v^{1/\alpha}[g(y)]) = 0, \quad (2.3.25)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Eğer (2.3.22)-(2.3.25) diferensiyel denklemleri salınımlı ise, o zaman (2.3.2) diferensiyel denklemi salınımlıdır (Grace ve ark., 2009).

Teorem 2.3.9. Kabul edelim ki $(g_1) - (g_4)$, (2.3.4)-(2.3.5) koşulları ve

$$\int_{y_1}^{\infty} a^{-1/\alpha}(s)ds = \infty \quad (2.3.26)$$

koşulu sağlansın ve $y \geq y_0$ için $g(y) < \xi(y) < \eta(y) < y$ ve $\sigma(y) > \rho(y) > y$ olacak şekilde azalmayan $\xi(y), \eta(y)$ ve $\rho(y) \in C([y_0, \infty), R)$ fonksiyonlarının var olduğunu varsayalım. Eğer (2.3.22)-(2.3.24) diferensiyel denklemleri salınımlı ise, (2.3.2) diferensiyel denklemi de salınımlıdır (Grace ve ark., 2009).

Şimdi $y \geq y_1 \geq y_0$ ve $0 < \bar{c}, c < 1$ keyfi sabitleri için,

$$P(y) = p(y)\left(\int_{\rho(y)}^{\sigma(y)} \left(\frac{[u - \rho(y)]^2}{2!a(u)}\right)^{1/\alpha} du\right) \quad (2.3.27)$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{Q}(y) = & \min \left\{ q(y)f\left(\frac{\xi(y) - g(y)}{a^{1/\alpha}[\xi(y)]}\right)f\left(\left(\frac{[\eta(y) - \xi(y)]^2}{2!}\right)^{1/\alpha}\right), \right. \\ & cq(y)f\left(\int_{y_1}^{g(y)} \left(\frac{s}{a(s)}\right)^{1/\alpha} ds\right)f\left((\xi(y) - g(y))^{1/\alpha}\right), \\ & \left. \bar{c}q(y)f(m[g(y)])f\left(g^{2/\alpha}(y)\right) \right\} \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

olduğunu kabul edelim. Buna göre Teorem 2.3.8’de ki (2.3.22) ileri tipten diferensiyel denklemi

$$\nu'(y) - P(y)h\left(\nu^{1/\alpha}[\rho(y)]\right) = 0 \quad (2.3.29)$$

formunda yazılabilir. Ayrıca (2.3.23)-(2.3.25) denklemleri, $\bar{Q}(y)$ fonksiyonu yardımıyla birleştirilerek

$$z'(y) + \bar{Q}(y)f\left(z^{1/\alpha}[\eta(y)]\right) = 0 \quad (2.3.30)$$

formunda tek bir diferensiyel denklem halinde ifade edilebilir. (2.3.30)’un salınımı için bilinen bazı yeter koşulları belirtmiştik. Benzer şekilde, eğer aşağıdaki koşullardan biri sağlanıyorsa, (2.3.29) diferensiyel denkleminin salınımlı olduğu literatürdeki mevcut sonuçlardan bilinmektedir, örneğin bkz. (Agarwal ve ark., 2003a; Györi ve Ladas, 1991).

(II₁) $u \neq 0$ için

$$\frac{f(u^{1/\alpha})}{u} \geq 1$$

ve

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \inf \int_y^{\rho(y)} P(s)ds > \frac{1}{e}, \quad (2.3.31)$$

(II₂)

$$\int^{\pm\infty} \frac{du}{h(u^{1/\alpha})} < \infty$$

ve

$$\int^{\infty} \bar{Q}(s)ds = \infty. \quad (2.3.32)$$

Şimdi, dördüncü mertebeden neutral diferensiyel denklemler için Riccati dönüşüm tekniği kullanılarak elde edilen bazı yeni salınım sonuçları üzerinde durulacaktır. O. Moaaz, C. Cesarano ve A. Muhib, $y \geq y_0$ için dördüncü mertebeden

$$\left(r(y)\left(x(y) + p(y)x(\tau(y))'''\right)^\alpha\right)' + q(y)x^\beta(\sigma(y)) = 0 \quad (2.3.33)$$

neutral diferensiyel denklemi göz önüne almış ve neutral terimi

$$z(y) := x(y) + p(y)x(\tau(y)) \quad (2.3.34)$$

şeklinde tanımlamıştır. Bu çalışmada α ve β pozitif tek tam sayıların oranları olup, (2.3.33) denklemi, $r, p, q \in C[y_0, \infty)$, $r(y) > 0$, $r'(y) \geq 0$, $q(y) > 0$, $0 \leq p(y) < p_0 < \infty$, $\tau, \sigma \in C[y_0, \infty)$, $\tau(y) \leq y$, $\lim_{y \rightarrow \infty} \tau(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \sigma(y) = \infty$ ve

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{r^{1/\alpha}(s)} ds = \infty, \quad (2.3.35)$$

şartları altında incelenmiş ve aşağıdaki salınım sonuçları elde edilmiştir (Moaaz ve ark, 2020a).

Teorem 2.3.10. Kabul edelim ki

$$\psi_1(y) = q(y)(1 - p_0)^\beta M^{\beta-\alpha}(\sigma(y)), \quad \psi_2(y) = \alpha \varepsilon \frac{\sigma^2(y) \zeta \sigma'(y)}{r^{1/\alpha}(y)} \quad (2.3.36)$$

ve

$$\tilde{\psi}_1(y) = \int_y^{\infty} \psi_1(s) ds \quad (2.3.37)$$

olsun. Eğer

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{\tilde{\psi}_1(y)} \int_y^{\infty} \psi_2(s) \tilde{\psi}_1^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s) ds > \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} \quad (2.3.38)$$

ise, (2.3.33) denklemi salınımlıdır (Moaaz ve ark, 2020a).

Aşağıdaki salınım sonuçları verilirken, yazımda kolaylık olması adına, $\mu \in (0, 1)$ ve M_1, M_2 pozitif sabitler olmak üzere

$$R_1(y) = \alpha \mu \frac{y^2}{2r^{1/\alpha}(y)},$$

$$Q_1(y) = q(y)(1 - p_0)^\beta M_1^{\beta-\alpha} \left(\frac{\sigma(y)}{y} \right)^{3\beta}$$

$$Q_2(y) = (1 - p_0)^{\beta/\alpha} M_2^{\beta/(\alpha-1)} \int_y^{\infty} \left(\frac{1}{r(u)} \int_u^{\infty} q(s) \frac{\sigma^\beta(s)}{s^\beta} ds \right)^{1/\alpha}$$

notasyonları kullanılacaktır.

Teorem 2.3.11.

$$\tilde{Q}_1(y) = \int_y^\infty Q_1(s)ds \quad \text{ve} \quad \tilde{Q}_2(y) = \int_y^\infty Q_2(s)ds \quad (2.3.39)$$

olmak üzere

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{\tilde{Q}_1(y)} \int_y^\infty R_1(s) \tilde{Q}_1^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s) ds > \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} \quad (2.3.40)$$

ve

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{\tilde{Q}_2(y)} \int_{y_0}^\infty \tilde{Q}_2^2(s) > \frac{1}{4}, \quad (2.3.41)$$

şartları sağlanıyorsa, bu takdirde (2.3.33) diferensiyel denklemi salınımlıdır (Moaaz ve ark, 2020a).

Teorem 2.3.12. $u_n(y)$ ve $v_n(y)$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$u_0(y) = \tilde{Q}_1(y), \quad v_0(y) = \tilde{Q}_2(y),$$

$$u_n(y) = u_0(y) + \int_y^\infty R_1(y) u_{n-1}^{(\alpha+1)/\alpha}(s) ds, \quad n > 1, \quad (2.3.42)$$

$$v_n(y) = v_0(y) + \int_y^\infty v_{n-1}^{(\alpha+1)/\alpha}(s) ds, \quad n > 1.$$

Eğer bazı n değerleri için

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu_1 y^3}{6r^{1/\alpha}(y)} \right)^\alpha u_n(y) > 1 \quad (2.3.43)$$

ve

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \lambda y v_n(y) > 1 \quad (2.3.44)$$

şartları sağlanıyorsa, bu takdirde (2.3.33) diferensiyel denklemi salınımlıdır (Moaaz ve ark, 2020a).

Sonuç 2.3.13. $u_n(y)$ ve $v_n(y)$ (2.3.42) ki gibi tanımlansın, eğer

$$\int_{y_0}^{\infty} Q_1(y) \exp \left(\int_{y_0}^y R_1(s) u_n^{1/\alpha}(s) ds \right) dy = \infty \quad (2.3.45)$$

ve

$$\int_{y_0}^{\infty} Q_2(y) \exp \left(\int_{y_0}^y u_n^{1/\alpha}(s) ds \right) dy = \infty \quad (2.3.46)$$

kalıyorsa, (2.3.33) diferensiyel denklemi salınımlıdır (Moaaz ve ark, 2020a).

Aşağıdaki salınım sonuçları verilirken yazımda kolaylık olması adına

$$Q_3(y) = q(y) \tilde{p}^\beta(\sigma(y)) M_3^{\beta-\alpha} \left(\frac{\tau^{-1}(\sigma(y))}{y} \right)^{3\alpha}$$

$$Q_4(y) = \tilde{p}^\beta(\sigma(s)) M_4^{(\beta/\alpha)-1} \int_y^\infty \left(\frac{1}{r(u)} \int_u^\infty q(s) \left(\frac{\tau^{-1}(\sigma^\beta(s))}{s} \right)^\beta ds \right)^{1/\alpha}$$

notasyonları kullanılacaktır.

Teorem 2.3.14. Varsayalım ki

$$\tilde{Q}_3(y) = \int_y^\infty Q_3(s) ds, \quad \tilde{Q}_4(y) = \int_y^\infty Q_4(s) ds \quad (2.3.47)$$

olmak üzere

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{\tilde{Q}_3(y)} \int_y^\infty R_1(s) \tilde{Q}_3^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s) ds > \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} \quad (2.3.48)$$

ve

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{\tilde{Q}_4(y)} \int_{t_0}^\infty \tilde{Q}_4^2(s) > \frac{1}{4} \quad (2.3.49)$$

ise, (2.3.33) diferensiyel denklemi salınımlıdır (Moaaz ve ark, 2020a).

Örnek 2.3.15. Aşağıdaki dördüncü mertebeden

$$\left(x(y) + 16x \left(\frac{y}{2} \right) \right)^{(4)} + \frac{q_0}{y^4} x \left(\frac{y}{6} \right) = 0 \quad (2.3.50)$$

neutral diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $\alpha = \beta = 1$, $r(y) = 1$, $p(y) = 16$, $\tau(y) = y/2$, $\sigma(y) = y/6$ ve $q(y) = q_0/y^4$ olduğu açıkça görülmektedir.

Dolayısıyla

$$\tilde{Q}_3(y) = \frac{q_0}{3^4(32)y^3}$$

ve

$$\tilde{Q}_4(y) = \frac{7q_0}{3^2(256)y}$$

olduğu kolayca görülebilir. (2.3.48) ve (2.3.49) koşulları sağlandığından eğer $q_0 > 3888$ ise, (2.3.50) denklemi salınımlıdır.

Şimdi karşılaştırma yöntemleri ve integral kriterleri kullanılarak çift mertebeden süperlineer neutral terimli fonksiyonel diferensiyel denklemler için verilen bazı salınım kriterleri incelenecektir. $n \geq 4$ bir çift doğal sayı, $\alpha > 1$ olmak üzere α ve β pozitif tek tamsayıların oranı ve $z(y) = x(y) + p(y)x^\alpha(\tau(y))$ olmak üzere, $y \geq y_0 > 0$ için, çift mertebeden

$$(b(y)z^{(n-1)}(y))' + q(y)x^\beta(\sigma(y)) = 0, \quad (2.3.51)$$

diferensiyel denklemini göznüne alalım. C. Dharuman, N. Prabaharan, E. Thandapani ve E. Tunç, (2.3.51) denkleminin salınımlılığı için

(H_1) $b : [y_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon, $b'(y) \geq 0$ ve

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{b(y)} dy = \infty;$$

(H_2) $p, q : [y_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $p(y) > 0, q(y) \geq 0$ ve $q(y)$ yeterince büyük y değerleri için özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyon;

(H_3) $\tau, \sigma : [y_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar öyleki $\tau'(y) > 0, \tau(y) < y, \sigma(y) \leq y$ ve $\lim_{y \rightarrow \infty} \tau(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \sigma(y) = \infty$;

(H_4) öyle bir $\kappa \in (0, 1)$ sabiti vardır ki

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y}{\tau(y)} \right)^{(n-1)/\kappa} \frac{1}{p^{1/\alpha}(y)} = 0$$

şartları altında aşağıdaki salınım sonuçlarını ortaya koymuştur (Dharuman ve ark., 2023).

Salınım sonuçları verilirken yazımda kolaylık olması adına

$$R_0(y) = \left(\frac{1}{b(y)} \int_y^\infty q(s) p^{-\frac{\beta}{\alpha}}(\tau^{-1}(\sigma(s))) ds \right),$$

$$F_0(y) = \left(\frac{1}{b(y)} \int_y^\infty q(s) \left(h^{1/\kappa}(s) \right)^{\frac{\beta}{\alpha}-1} p^{-\frac{\beta}{\alpha}}(\tau^{-1}(s)) ds \right),$$

$m = 1, 2, \dots, n-3$ için

$$R_m(y) = \int_y^\infty R_{m-1}(s) ds,$$

$$F_m(y) = \int_y^\infty F_{m-1}(s) ds,$$

τ^{-1} fonksiyonu τ fonksiyonun tersi olmak üzere $\eta \in C^1([y_0, \infty), \mathbb{R})$ için

$$h(y) = \tau^{-1}(\eta(y))$$

notasyonları kullanılacaktır.

Teorem 2.3.16. Kabul edelim ki $(H_1) - (H_4)$ şartları sağlansın ve $\beta > \alpha$ olsun. Ayrıca

$$\eta(y) \leq \sigma(y), \quad \eta(y) < \tau(y) \quad \text{ve} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \eta(y) = \infty. \quad (2.3.52)$$

olacak şekilde pozitif azalmayan bir $\eta \in C^1([y_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Eğer, her bir $d_1 > 0$ ve $d_2 > 0$ sabitleri için,

$$(b(y)z^{(n-1)}(y))' + d_1 q(y) p^{-\beta/\alpha}(\tau^{-1}(\sigma(y))) z(h(y)) \leq 0 \quad (2.3.53)$$

ve

$$(b(y)z^{(n-1)}(y))' + d_2 q(y) p^{-\beta/\alpha}(\tau^{-1}(\sigma(y))) z(h(y)) \leq 0 \quad (2.3.54)$$

çift mertebeden lineer gecikmeli diferensiyel eşitsizlikleri pozitif bir çözüme sahip değilse, bu takdirde (2.3.51) diferensiyel denklemi salınımlıdır (Dharuman ve ark., 2023).

Teorem 2.3.17. Kabul edelim ki $(H_1) - (H_4)$ şartları sağlansın ve $\beta = \alpha$ olsun. Ayrıca (2.3.52) sağlanacak şekilde pozitif azalmayan bir $\eta \in C^1([y_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Eğer her bir $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1)$ sabitleri için

$$(b(y)z^{(n-1)}(y))' + \varepsilon_1 q(y)p^{-1}(\tau^{-1}(\sigma(y)))z(h(y)) \leq 0 \quad (2.3.55)$$

ve

$$(b(y)z^{(n-1)}(y))' + \varepsilon_2 q(y)p^{-1}(\tau^{-1}(\sigma(y)))z(h(y)) \leq 0 \quad (2.3.56)$$

çift mertebeden lineer gecikmeli diferensiyel eşitsizlikleri pozitif bir çözüme sahip değilse, bu takdirde (2.3.51) diferensiyel denklemi salınımlıdır (Dharuman ve ark., 2023).

Teorem 2.3.18. Kabul edelim ki $(H_1) - (H_4)$ şartları sağlansın ve $\beta < \alpha$ olsun. Ayrıca (2.3.52) sağlanacak şekilde pozitif azalmayan bir $\eta \in C^1([y_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Eğer her bir $d_3 > 0$ ve $d_4 > 0$ sabitleri için

$$(b(y)z^{(n-1)}(y))' + d_3 q(y) \left(h^{(n-1)/\kappa} \right)^{\frac{\beta}{\alpha}-1} p^{-\beta/\alpha}(\tau^{-1}(\sigma(y)))z(h(y)) \leq 0 \quad (2.3.57)$$

ve

$$(b(y)z^{(n-1)}(y))' + d_3 q(y) \left(h^{1/\kappa} \right)^{\frac{\beta}{\alpha}-1} p^{-\beta/\alpha}(\tau^{-1}(\sigma(y)))z(h(y)) \leq 0 \quad (2.3.58)$$

çift mertebeden lineer gecikmeli diferensiyel eşitsizlikleri pozitif bir çözüme sahip değilse, bu takdirde (2.3.51) diferensiyel denklemi salınımlıdır (Dharuman ve ark., 2023).

Teorem 2.3.19. Kabul edelim ki $(H_1) - (H_4)$ şartları sağlansın ve $\beta > \alpha$ olsun. Ayrıca (2.3.52) sağlanacak şekilde pozitif azalmayan bir $\eta \in C^1([y_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Eğer bazı $\lambda_1, \kappa_1 \in (0, 1)$ sabitleri ve her bir $d_1 > 0$ ve $d_2 > 0$ sabitleri için

$$\nu'(y) + \frac{d_1 \lambda_1}{(n-1)!} \frac{h^{n-1}(y)}{b(h(y))} q(y) p^{-\beta/\alpha}(\tau^{-1}(\sigma(y))) \nu(h(y)) = 0, \quad (2.3.59)$$

ve

$$\omega'(y) + \kappa_1 d_2 h(y) R_{n-3}(y) \omega(h(y)) = 0, \quad (2.3.60)$$

birinci mertebeden lineer gecikmeli diferensiyel denklemleri salınımlı ise, bu takdirde (2.3.51) diferensiyel denklemi salınımlıdır (Dharuman ve ark., 2023).

Teorem 2.3.20. Kabul edelim ki $(H_1) - (H_4)$ şartları sağlansın ve $\beta = \alpha$ olsun. Ayrıca (2.3.52) sağlanacak şekilde pozitif azalmayan bir $\eta \in C^1([y_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Eğer bazı $\lambda_1, \kappa_1 \in (0, 1)$ ve her bir $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1)$ sabitleri için

$$\nu'(y) + \frac{\lambda_1 \varepsilon_1}{(n-1)!} \frac{h^{n-1}(y)}{b(h(y))} q(y) p^{-1}(\tau^{-1}(\sigma(y))) \nu(h(y)) = 0 \quad (2.3.61)$$

ve

$$\omega'(y) + \kappa_1 \varepsilon_2 h(y) R_{n-3}(y) \omega(h(y)) = 0 \quad (2.3.62)$$

birinci mertebeden lineer gecikmeli diferensiyel denklemleri salınımlı ise, bu takdirde (2.3.51) diferensiyel denklemi salınımlıdır (Dharuman ve ark., 2023).

Sonuç 2.3.21. Kabul edelim ki $(H_1) - (H_4)$ şartları sağlansın ve $\beta \geq \alpha$ olsun. Ayrıca (2.3.52) sağlanacak şekilde pozitif azalmayan bir $\eta \in C^1([y_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Eğer

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{h(y)}^y \frac{h^{n-1}(s)}{b(h(s))} q(s) p^{-\beta/\alpha}(\tau^{-1}(\sigma(s))) ds = \infty \quad (2.3.63)$$

ve

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{h(y)}^y h(s) R_{n-3}(s) ds = \infty \quad (2.3.64)$$

kalıyorsa, (2.3.51) diferensiyel denklemi salınımlıdır (Dharuman ve ark., 2023).

Teorem 2.3.22. Kabul edelim ki $(H_1) - (H_4)$ şartları sağlansın ve $\beta < \alpha$ olsun. Ayrıca (2.3.52) sağlanacak şekilde pozitif azalmayan bir $\eta \in C^1([y_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Eğer bazı $\lambda_1, \kappa_1 \in (0, 1)$ sabitleri ve her bir $d_3, d_4 > 0$ sabitleri için

$$\nu'(y) + \frac{d_3 \lambda_1}{(n-1)!} \frac{q(y) \left(h^{(n-1)/\kappa}(y) \right)^{\frac{\beta}{\alpha}-1}}{b(h(y)) p^{\beta/\alpha}(\tau^{-1}(\sigma(y)))} h^{n-1} \nu(h(y)) = 0 \quad (2.3.65)$$

ve

$$\omega'(y) + \kappa_1 d_4 h(y) F_{n-3}(y) \omega(h(y)) = 0 \quad (2.3.66)$$

birinci mertebeden lineer gecikmeli diferensiyel denklemleri salınımlı ise, bu takdirde (2.3.51) diferensiyel denklemi salınımlıdır (Dharuman ve ark., 2023).

Sonuç 2.3.23. Kabul edelim ki $(H_1) - (H_4)$ şartları sağlansın ve $\beta < \alpha$ olsun. Ayrıca (2.3.52) sağlanacak şekilde pozitif azalmayan bir $\eta \in C^1([y_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu var olsun. Eğer

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{h(y)}^y \frac{(h^{(n-1)/\kappa})^{\frac{\beta}{\alpha}-1}}{b(h(s))p^{\beta/\alpha}(\tau^{-1}(\sigma(s)))} q(s) h^{n-1}(s) ds = \infty \quad (2.3.67)$$

ve

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{h(y)}^y h(s) F_{n-3}(s) ds = \infty \quad (2.3.68)$$

kalıyorsa, (2.3.51) diferensiyel denklemi salınımlıdır (Dharuman ve ark., 2023).

Örnek 2.3.24. $\alpha > 1, a > 0, n \geq 4$ olmak üzere çift mertebeden süperlineer neutral terimli

$$\left(x(y) + yx^\alpha \left(\frac{y}{3} \right) \right)^{(n)} + \frac{a}{y^{n-2}} x^\alpha \left(\frac{y}{2} \right) = 0 \quad (2.3.69)$$

diferensiyel denklemini $y \geq 1$ için göz önüne alalım. Burada $b(y) = 1, p(y) = y, \tau(y) = y/3, \sigma(y) = y/2, q(y) = a/y^{n-2}$ ve $\eta(y) = y/4$ olup (2.3.52) sağlanır. Ayrıca

$$h(y) = \tau^{-1}(\eta(y)) = 3y/4, \tau^{-1}(\sigma(y)) = 3y/2, \tau^{-1}(y) = 3y \text{ ve } \tau^{-1}(\tau^{-1}(y)) = 9y$$

olduğu açıkça görülmektedir. $\kappa = 1/3$ seçilirse

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y}{\tau(y)} \right)^{(n-1)/\kappa} \frac{1}{p^{1/\alpha}(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} 3^{3(n-1)} \frac{1}{y^{1/\alpha}} = 0$$

olduğu görülür, dolayısıyla (H_4) şartı sağlanır. Ayrıca, direkt bir hesaplama ile

$$R_0(y) = \frac{2ay^{2-n}}{3(n-2)} \text{ ve } R_{n-3}(y) = \frac{2a}{3(n-2)!} \frac{1}{y}.$$

olduğu görülebilir. Diğer taraftan

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{\frac{3y}{4}}^y \left(\frac{3s}{4}\right)^{n-1} \frac{a}{s^{n-2}} \left(\frac{2}{3s}\right) ds = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{2a}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \frac{y}{4} = \infty$$

ve

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{\frac{3y}{4}}^y \frac{3s}{4} \frac{2a}{3(n-2)} \frac{1}{s} ds = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{a}{2(n-2)} \frac{y}{4} = \infty$$

olduğundan (2.3.63) ve (2.3.64) koşulları sağlanır. Dolayısıyla Sonuç 2.3.21'e göre (2.3.69) denklemi salınımlıdır (Dharuman ve ark., 2023).

Şimdi dördüncü mertebeden neutral diferensiyel denklemlerin salınımı için Riccati tipi dönüşümler kullanılarak integral yöntemleri yardımıyla elde edilen sonuçlar üzerinde durulacaktır. Ali Muhib, Osama Moaaz, Clemente Cesarano ve Sameh S. Askar, $y \geq y_0$ için olmak üzere,

$$\left(a(y)(x(y) + p(y)x(\zeta(y)))'''\right)' + \sum_{j=1}^m q_j(y)x^\beta(\zeta_j(y)) = 0 \quad (2.3.70)$$

neutral diferansiyel denklemini göz önüne almış ve $\beta \geq \alpha$, $a, \zeta \in C^1[y_0, \infty)$, $p, q_j, \zeta_j \in C[y_0, \infty)$, $a(y) > 0$, $a'(y) \geq 0$, $q_j(y) > 0$, $0 \leq p(y) < p_0 < \infty$, $\zeta'(y) > \zeta_0 > 0$, $\zeta_j \circ \zeta = \zeta \circ \zeta_j$, $\zeta_j(y) \leq \zeta(y) \leq y$, $\lim_{y \rightarrow \infty} \zeta(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \zeta_j(y) = \infty$ ve α ve β pozitif tek tam sayıların oranı ve

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{a^{1/\alpha}(s)} ds = \infty \quad (2.3.71)$$

şartları altında (2.3.70) diferensiyel denklemi için aşağıdaki sonuçları elde etmiştir (Muhib ve ark, 2022a).

Teorem 2.3.25. $\beta \geq 1$, $\zeta_j(y) \in C^1[y_0, \infty)$, $\zeta'_j(y) > 0$ ve $\zeta_j(y) \leq \zeta(y)$ olsun. Ayrıca kabul edelim ki, yeterince büyük her $y_2 > y_1 \geq y_0$ değeri için

$$\phi(x) = \int_{\zeta^{-1}(x)}^{\infty} \frac{Q(s)}{2^{\beta-1}} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\zeta_j(s)}{s}\right)^{\beta/\lambda} ds, \quad (2.3.72)$$

$$\rho'_+(y) = \max\{0, \rho'(y)\} \quad \text{ve} \quad \theta'_+(y) = \max\{0, \theta'(y)\}$$

olmak üzere

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \int_{y_2}^y \left(m\rho(s) \frac{Qs}{2^{\beta-1}} M^{\beta-\alpha} - \left(1 + \frac{p_0^\beta}{\zeta_0} \right) \frac{(\alpha+1)^{-(\alpha+1)} (\rho'_+(s))^{\alpha+1}}{(\rho(s)\eta_2(\zeta(s), t_1)\zeta'(s))^\alpha} \right) ds = \infty \quad (2.3.73)$$

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \int_{y_1}^y \left(\theta(\varrho) \left(\frac{\zeta_0}{\zeta_0 + p_0^\beta} \right)^{1/\alpha} M^{\beta/\alpha-1} \int_{\varrho}^\infty \left(\frac{1}{a(x)\phi(x)} \right)^{1/\alpha} dx - \frac{(\theta'_+(\varrho))^2}{4\theta(\varrho)} \right) d\varrho = \infty \quad (2.3.74)$$

şartları sağlanacak şekilde $\rho(y), \theta(y) \in C^1([y_0, \infty), (0, \infty))$ fonksiyonları var olsun. Bu takdirde (2.3.70) diferensiyel denklemi salınımlıdır (Muhib ve ark, 2022a).

Teorem 2.3.26. Varsayalım ki $0 \leq p(y) \leq 1$ ve $\alpha = \beta$ olsun. Eğer (2.3.74) şartı sağlanıyor ve

$$G(y) = \eta_3(y, y_1) + \frac{1}{\alpha} \int_{y_1}^y \int_{y_1}^v \int_{y_1}^u \eta_1(s, r_1) \eta_3^\alpha(\zeta(s), r_1) \sum_{j=1}^m q_j(s) (1 - p(\zeta_j(s)))^\alpha ds du dv$$

olmak üzere

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} \int_{\zeta(y)}^y G^\alpha(\zeta(s)) \sum_{j=1}^m q_j(s) (1 - p(\zeta_j(s)))^\alpha ds > \frac{1}{e}, \quad (2.3.75)$$

veya azalmayan bir ζ fonksiyonu için

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \int_{\zeta(y)}^y G^\alpha(\zeta(s)) \sum_{j=1}^m q_j(s) (1 - p(\zeta_j(s)))^\alpha ds > 1, \quad (2.3.76)$$

sağlanıyorsa, (2.3.70) diferensiyel denklemi salınımlıdır (Muhib ve ark, 2022a).

Örnek 2.3.27. $q_0 > 0$ için dördüncü mertebeden neutral diferensiyel

$$\left(x(y) + 6x\left(\frac{1}{2}y\right) \right)^{(4)} + \frac{q_0}{y^4} x\left(\frac{1}{3}y\right) + \frac{2q_0}{y^4} x\left(\frac{1}{4}y\right) = 0 \quad (2.3.77)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $p(y) = 6$, $\xi(y) = y/2$, $\zeta_1(y) = y/3$, $\zeta_2(y) = y/4$, $q_1(y) = q_0/y^4$ ve $q_2(y) = 2q_0/y^4$ olduğu görülmektedir. Ayrıca

$$Q(y) = \frac{q_0}{y^4}$$

$$\begin{aligned}\phi(y) &= \int_{\xi^{-1}(y)}^{\infty} \frac{Q(s)}{2^{\beta-1}} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\zeta_j(s)}{s} \right)^{\beta/\lambda} ds \\ &= q_0 \left(\left(\frac{1}{3^{1/\lambda}} \right) + \left(\frac{1}{4^{1/\lambda}} \right) \right) \frac{1}{3(2t)^3}\end{aligned}$$

$$\eta_1(y, y_1) = \int_{y_1}^y \frac{1}{a^{1/\alpha}(s)} ds = (y - y_1)$$

$$\eta_2(\zeta(y), y_1) = \frac{((y/4) - y_1)}{2}$$

olduğu kolaylıkla hesaplanabilir. $\rho(y) = y^3$ ve $\theta(y) = y$ seçilirse, $q_0 > 1872$ için

$$\begin{aligned}\limsup_{y \rightarrow \infty} \int_{y_2}^y \left(m\rho(s) \frac{Q(s)}{2^{\beta-1}} M^{\beta-\alpha} - \left(1 + \frac{P_0^\beta}{\xi_0} \right) \frac{(\alpha+1)^{-(\alpha+1)} (\rho'_+(s))^{\alpha+1}}{(\rho(s)\eta_2(\zeta(s), y_1)\zeta'(s))^\alpha} \right) ds \\ = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{y_2}^y \left(2s^3 \frac{q_0}{s^4} - \left(1 + \frac{6}{1/2} \right) \frac{(2)^{-(2)} (3s^2)^2}{\left(s^3 \frac{((y/4)-y_1)^2}{2} \right)^{\frac{1}{4}}} \right) ds \\ = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{y_2}^y \left(2 \frac{q_0}{s} - \left(1 + \frac{6}{1/2} \right) \frac{4^3 3^2}{2s} \right) ds = \infty\end{aligned}\tag{2.3.78}$$

ve $q_0 > 267.43$ için

$$\begin{aligned}\limsup_{y \rightarrow \infty} \int_{y_1}^y \left(\theta(\varrho) \left(\frac{\xi_0}{\xi_0 + p_0^\beta} \right)^{1/\alpha} M^{(\beta/\alpha)-1} \int_{\varrho}^{\infty} \left(\frac{1}{a(x)} \phi(x) \right)^{1/\alpha} dx - \frac{(\theta'_+(\varrho))^2}{4\theta(\varrho)} \right) d\varrho \\ = \limsup_{y \rightarrow \infty} \int_{y_1}^y \left(\frac{1}{\varrho} \right) \left(\frac{(1/2)}{(1/2) + 6} \frac{q_0}{2^3 6} \left(\left(\frac{1}{3^{1/\lambda}} \right) + \left(\frac{1}{4^{1/\lambda}} \right) \right) - \frac{1}{4\varrho} \right) d\varrho = \infty\end{aligned}\tag{2.3.79}$$

elde edilir. Dolayısıyla $q_0 > 1872$ için (2.3.73) koşulu ve $q_0 > 267.43$ için (2.3.74) koşulu sağlanır. Bu yüzden $q_0 > 1872$ için (2.3.77) diferensiyel denkleminin salınımlı olduğu görülür (Muhib ve ark, 2022a).

Şimdi Riccati tipi dönüşümler ve karşılaştırma tekniği kullanılarak dördüncü merteden neutral diferensiyel denklemlerin tüm çözümlerinin salınımlı olmasını sağlayan yeni salınım koşulları üzerinde durulacaktır. R. P. Agarwal, O. Bazighifan ve M. A. Ragusa

(W₁) $p_1, p_2 > 1$ sabitler;

(W₂) $r, q, \delta : [y_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar, $r(y) > 0, q(y) > 0, r'(y) \geq 0, p_1 \leq p_2, 0 \leq \delta(y) < \delta_0 < \infty, q(y)$ yeterince büyük y değerleri için özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyon ve

$$\int_{y_0}^{\infty} r^{-1/(p_1-1)}(s)ds = \infty;$$

(W₃) $g_1, g_2 : [y_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, sürekli türevlenebilir fonksiyonlar $g_2'(y) > 0, g_1'(y) > 0, g_2(y) \leq y$ ve

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g_2(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} g_1(y) = \infty;$$

koşulları altında

$$\left(r(y)|w'''(y)|^{p_1-2}w'''(y) \right)' + q(y)|\nu(g_1(y))|^{p_2-2}\nu(g_1(y)) = 0 \quad (2.3.80)$$

diferensiyel denklemini

$$w(y) = \nu(y) + \delta(y)\nu(g_2(y)) \quad (2.3.81)$$

neutral terimi ile göz önüne alınmış ve aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir (Agarwal ve ark., 2021).

Teorem 2.3.28. Varsayalım ki $g_1(y) \leq g_2(y)$ olsun. Eğer her $M_1, M_2 > 0$ sabitleri için,

$$\eta_1(y) = M_1^{p_2-p_1} \theta(y) q(y) \delta_1^{p_2-1}(g_1(y)) \quad (2.3.82)$$

ve

$$\eta_2(y) = \delta_2^{(p_2-1)/(p_1-1)} \theta(y) M_2^{(p_2-p_1)/(p_1-1)}$$

$$\int_y^\infty \left(\frac{1}{r(\varrho)} \int_\varrho^\infty q(s) \left(\frac{g_2^{-1}(g_1(s))}{s} \right)^{p_2-1} ds \right)^{1/(p_1-1)} d\varrho \quad (2.3.83)$$

olmak üzere

$$\int_{y_0}^\infty \left(\eta_1(s) - \frac{2^{p_1-1}}{p_1^{p_1}} \frac{r(g_2^{-1}(g_1(s))) (\theta'(s))_1^p}{\left(\mu_1 \theta(s) (g_2^{-1}(g_1(s)))' (g_1(s))' (g_2^{-1}(g_1(s)))^2 \right)^{p_1-1}} \right) ds = \infty \quad (2.3.84)$$

ve

$$\int_{y_0}^\infty \left(\eta_2(s) - \frac{(\theta'(s))^2}{4\theta_1(s)} \right) ds = \infty \quad (2.3.85)$$

kalacak şekilde $\theta, \theta_1 : [y_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir fonksiyonları ve $\mu \in (0, 1)$ sabiti varsa, bu takdirde (2.3.80) diferensiyel denklemini salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2021).

Teorem 2.3.29. Kabul edelim ki

$$\frac{\left(g_2^{-1}(g_2^{-1}(y)) \right)^3}{\left(g_2^{-1}(y) \right)^3 \delta(g_2^{-1}(g_2^{-1}(y)))} \leq 1 \quad (2.3.86)$$

olsun. Ayrıca $\varphi(y) \leq g_1(y)$, $\varphi(y) < g_2(y)$, $\sigma(y) \leq g_1(y)$, $\sigma(y) < g_2(y)$, $\sigma'(y) \geq 0$ ve $\lim_{y \rightarrow \infty} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \sigma(y) = \infty$ olacak şekilde pozitif $\varphi, \sigma : [y_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenilir fonksiyonları var olsun. Eğer

$$u_1'(y) + \tilde{R}(y) u_1^{(p_2-1)/(p_1-1)}(g_2^{-1}(\varphi(y, a))) = 0 \quad (2.3.87)$$

ve

$$u_2'(y) + \delta_2^{(p_2-1)/(p_1-1)}(y) \varepsilon_1(g_2^{-1}(\sigma(y)))^{(p_2-1)/(p_1-1)} R(y) u_2^{(p_2-1)/(p_1-1)}(g_2^{-1}(\sigma(y))) = 0 \quad (2.3.88)$$

diferensiyel denklemleri salınımlı olacak şekilde $\varepsilon_1, \mu \in (0, 1)$ sabitleri varsa, bu takdirde (2.3.80) diferensiyel denklemi de salınımlıdır (Agarwal ve ark., 2021).

Örnek 2.3.30. Aşağıdaki dördüncü mertebeden

$$\begin{cases} \left(\nu(y) + 16\nu\left(\frac{1}{2}y\right) \right)^{(4)} + \frac{q_0}{y^4} \nu\left(\frac{1}{3}y\right) = 0, \\ y \geq 1, \quad q_0 > 0. \end{cases} \quad (2.3.89)$$

neutral diferensiyel denklemi düşünelim. Burada $r(y) = 1$, $p_1 = p_2 = 2$, $\delta(y) = 16$, $g_2(y) = \frac{1}{2}y$, $g_2^{-1}(y) = 2y$, $g_1(y) = \frac{1}{3}y$ ve $g(y) = q_0/y^4$ olduğu açıkça görülmektedir. Buradan

$$\delta_1(y) = \frac{1}{\delta(g_2^{-1}(y))} \left(1 - \frac{\left(g_2^{-1}(g_2^{-1}(y)) \right)^3}{\left(g_2^{-1}(y) \right)^3 \delta(g_2^{-1}(g_2^{-1}(y)))} \right) = \frac{1}{16} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{32},$$

$$\delta_2(y) = \frac{1}{\delta(g_2^{-1}(y))} \left(1 - \frac{\left(g_2^{-1}(g_2^{-1}(y)) \right)}{\left(g_2^{-1}(y) \right) \delta(g_2^{-1}(g_2^{-1}(y)))} \right) = \frac{1}{16} \left(1 - \frac{1}{8} \right) = \frac{7}{128},$$

ve

$$\eta_1(y) = \frac{q_0}{32y}, \quad \eta_2(y) = \frac{7q_0}{1152y}.$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $q_0 > 729$ için

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{\infty} \left(\eta_1(s) - \frac{2^{p_1-1}}{p_1^{p_1}} \frac{r(g_2^{-1}(g_1(s))) (\theta'(s))_1^p}{\left(\mu_1 \theta(s) (g_2^{-1}(g_1(s)))' (g_1(s))' (g_2^{-1}(g_1(s)))^2 \right)^{p_1-1}} \right) ds \\ = \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{q_0}{32s} - \frac{729}{32s} \right) ds = \left(\frac{q_0}{32s} - \frac{729}{32s} \right) \int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{s} = +\infty \end{aligned}$$

olduğundan (2.3.84) şartının sağlandığı, ayrıca $\theta_1(y) = y$ ve $q_0 > 41.14$ için

$$\int_{y_0}^{\infty} \left(\eta_2(s) - \frac{(\theta'(s))^2}{4\theta_1(s)} \right) ds = \int_{y_0}^{\infty} \left(\frac{7q_0}{1152s} - \frac{1}{4s} \right) ds = +\infty$$

olduğundan (2.3.85) şartının sağlandığı görülmektedir. Teorem 2.3.28'den, $q_0 > 729$ için (2.3.89) denkleminin salınımlı olduğu sonucuna varılır (Agarwal ve ark., 2021).

3. Dördüncü Mertebeden Süperlineer Neutral Terimli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı

Bu bölümde, dördüncü mertebeden süperlineer neutral terimli diferensiyel denklemlerin salınımlılığı için yeni karşılaştırma teoremleri ve bu teoremlere bağlı olarak bazı integral kriterleri sunulacaktır.

3.1. Giriş

Şimdi, $y \geq y_0 > 0$ için dördüncü mertebeden

$$\left(v(y)h'''(y)\right)' + p(y)\psi^\beta(\zeta(y)) = 0, \quad (E)$$

fonksiyonel diferensiyel denklemini, $k_1 > 1$, $k_2 > 1$ ve β sabitleri pozitif tek tam sayıların oranı olmak üzere

$$h(y) = \psi(y) + \rho_1(y)\psi^{k_1}(z_1(y)) + \rho_2(y)\psi^{k_2}(z_2(y))$$

süperlineer neutral terimi ile birlikte ele alalım. Bu çalışmanın geri kalan kısmında aşağıdaki şartların, tekrar vurgulanmasa bile, her zaman sağlandığı kabul edilecektir:

- (i) $v, \rho_1, \rho_2, p \in C([y_0, \infty), (0, \infty))$ ve $p(y)$ fonksiyonu $Y \geq y_0$ olmak üzere $[Y, \infty)$ biçimindeki herhangi bir aralık üzerinde özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyon, $y \in [y_0, \infty)$ için $v'(y) > 0$ ve

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{v(s)} ds = \infty; \quad (3.1.1)$$

- (ii) $z_1, z_2, \zeta \in C([y_0, \infty), \mathbb{R})$ öyleki $z_1(y) \leq y \leq z_2(y)$, z_1 ve z_2 kesin artan fonksiyonlar ve

$$\lim_{y \rightarrow \infty} z_1(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \zeta(y) = \infty.$$

$h(y)$ ile tanımlanan neutral terim, $i = 1, 2$ için $k_i > 1$ ise süperlineer, $0 < k_i < 1$ ise sublineer olarak adlandırılır.

(E) denkleminin bir çözümü denildiğinde, $y_\psi \geq y_0$ olmak üzere, $[y_\psi, \infty)$ aralığında $h \in C^3([y_\psi, \infty), \mathbb{R})$ ve $vh''' \in C^1([y_\psi, \infty), \mathbb{R})$ özelliklerine sahip ve (E) denklemini sağlayan sürekli bir $\psi : [y_\psi, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu anlaşılır. Bundan sonra, bu çalışmada ele alınan (E) denkleminin her $\psi(y)$ çözümünün aşıkâr olmayan ve sağa doğru sürdürülebilir olduğu varsayılacaktır. Bunun yanında, (E) neutral diferensiyel denkleminin bu tür çözümlerinin var olduğu da kabul edilecektir.

Yukarıda verilen tanımlardan anlaşılacağı üzere, (E) denkleminin aşıkâr olmayan bir çözümü olan $\psi(y)$ fonksiyonu nihai negatif ya da nihai pozitif olmadığında bu $\psi(y)$ çözümü **salınımlı**; aksi takdirde **salınımsız** çözüm olarak tanımlanır. Eğer (E) denkleminin bütün çözümleri salınımlı ise denklemin kendisine **salınımlıdır** denir.

Dördüncü mertebeden diferensiyel denklemlerin incelenmesi, XVIII. yüzyılın ilk yarısında bir çubuğun veya ince bir rodun titreşim hareketi problemiyle başlamıştır ve genel olarak uygulamalarda büyük öneme sahiptir. Bu tür denklemler, örneğin elastiklik problemleri, yapıların deformasyonu veya nöromüsküler sistemlerin salınımları gibi fiziksel ve biyolojik olayların incelenmesinde matematiksel model olarak ortaya çıkar (Jadlovská ve ark., 2022).

Sapma argümentli diferensiyel denklemler için ilk salınım sonuçları Fite (Fite, 1921) tarafından elde edilmiştir. O zamandan bu yana, bu konu üzerine birçok araştırmacı tarafından çok sayıda çalışma yapılmıştır. Konuyla ilgili en önemli katkıların özeti için, Agarwal ve ark., (Agarwal ve ark., 2000, 2002, 2003a), Došlý ve Řehák (Došlý ve Řehák, 2005) ile Györi ve Ladas (Györi ve Ladas, 1991) tarafından yazılan monograflar okuyucuya referans olarak verilebilir.

Grace ve ark., 2009 yılında kanonik olmayan formaki

$$\frac{d^3}{dy^3} \left(a(y) \left(\frac{dx(y)}{dy} \right)^\alpha \right) + q(y)f(x[g(y)]) = 0 \quad (3.1.2)$$

ve

$$\frac{d^3}{dy^3} \left(a(y) \left(\frac{dx(y)}{dy} \right)^\alpha \right) = q(y)f(x[g(y)]) + p(y)h(x[\sigma(y)]), \quad (3.1.3)$$

diferensiyel denklemlerini göz önüne almış, $g(y) < y$ ve $\sigma(y) < y$ şartları altında (3.1.2) ve (3.1.3) diferensiyel denklemlerinin salınım davranışları için bazı yeter şartlar elde etmiştir (Grace ve ark., 2009). Açıkça görülmektedir ki söz konusu makalede elde edilen salınım sonuçları $g(y) > y$ olduğunda (sapma argümenti ileri tipten olduğunda) dördüncü mertebeden diferensiyel denklemlere uygulanamamaktadır.

Moaaz ve ark. tarafından 2020 yılında yayınlanan çalışmada (Moaaz ve ark, 2020a), yazarlar dördüncü mertebeden kanonik formdaki

$$\left(r(y) \left(x(y) + p(y)x(\tau(y))''' \right)^\alpha \right)' + q(y)x^\beta(\sigma(y)) = 0 \quad (3.1.4)$$

neutral diferensiyel denkleminin salınım davranışını araştırmıştır. Bu çalışmada $\tau(y) \leq y$ şartı altında (3.1.4) neutral diferensiyel denklemi için yeni salınım kriterleri sunulmuştur. Ancak $\tau(y) > y$ olduğunda, yani neutral terimin sapma argümenti ileri tipten olduğunda, ilgili salınım kriterleri (3.1.4) neutral diferensiyel denklemine uygulanamamaktadır.

2021 yılında, Agarwal ve ark. tarafından Riccati tipi dönüşümler ve karşılaştırma teknikleri kullanılarak, dördüncü mertebeden

$$\left(r(y)|w'''(y)|^{p_1-2}w'''(y) \right)' + q(y)|\nu(g_1(y))|^{p_2-2}\nu(g_1(y)) = 0 \quad (3.1.5)$$

neutral diferensiyel denklemi $w(y) = \nu(y) + \delta(y)\nu(g_2(y))$ neutral terimi ile göz önüne alınmış, çözümlerinin salınımı için yeni kriterler elde edilmiştir (Agarwal ve ark., 2021). Ancak, ilgili çalışmada sunulan salınım kriterleri $g_2(y) > y$ olduğu durumda, yani neutral terim ileri tipten bir sapma argümenti ihtiva ettiğinde, (3.1.5) neutral diferensiyel denklemine uygulanamamaktadır.

Diğer taraftan, Muhib ve ark. tarafından 2022 yılında yapılan bir çalışmada, neutral terim $V(y) = x(y)p(y)x(\zeta(y))$ olmak üzere

$$\left(a(y)\left(V'''(y)\right)^\alpha\right)' + \sum_{j=1}^m q_j(y)x^\beta(\zeta_j(y)) = 0 \quad (3.1.6)$$

neutral diferensiyel denklemini, $\zeta_j \circ \zeta = \zeta \circ \zeta_j$ ve $\zeta_j(y) \leq \zeta(y) \leq y$ şartları altında göz önüne alınmış ve bazı salınım teoremleri inşa edilmiştir (Muhib ve ark, 2022a). Ancak açıkça görülmektedir ki, bu çalışma, sapma argümentleri $\zeta_j(y) > y$ şeklinde ileri tipten olduğunda ve $\zeta_j \circ \zeta = \zeta \circ \zeta_j$ bileşke şartı sağlanmadığında, dördüncü mertebeden neutral diferensiyel denklemlere uygulanabilecek bir salınım sonucu ortaya koymamaktadır.

2023 yılında C. Dharuman, N. Prabakaran, E. Thandapani ve E. Tunç tarafından yapılan bir çalışmada, süperlineer neutral terimli çift mertebeden

$$\left(b(y)\left(x(y) + p(y)x^\alpha(\tau(y))\right)^{(n-1)}\right)' + q(y)x^\beta(\sigma(y)) = 0, \quad (3.1.7)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alınmıştır (Dharuman ve ark., 2023). Not edilmelidir ki, bu çalışmada elde edilen salınım kriterleri neutral terim hem gecikmeli hem de ileri tipten sapma argümentleri ihtiva ettiğinde, çift mertebeden FDD'lere uygulanamamaktadır.

Yukarıdaki çalışmalar ve literatürdeki diğer çalışmalar göz önüne alındığında, hem ileri tipten hem de gecikmeli sapma argümentleri içeren süperlineer bir neutral terim ile tanımlı, dördüncü mertebeden (E) diferensiyel denkleminin uygulanabilecek bir salınım sonucunun mevcut olmadığı görülmektedir. Literatürdeki bu boşluktan hareketle, bu bölümde (E) denkleminin salınımlı olmasını garanti eden yeni yeter şartlar sunulacak olup, yeni yeter şartlar verilmeden önce teoremlerin ispatında kullanılacak olan yardımcı lemmalar verilecektir.

3.2. Yardımcı Lemmalar

Lemma 3.2.1. (Philos, 1984, Lemma 1) $g : [y_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu m -inci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ve $g^{(m)}(y)$ fonksiyonu da $[y_0, \infty)$ aralığında nonpozitif, ayrıca $y^* \geq y_0$ için $[y^*, \infty)$ aralığında özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $y^{**} \geq y^*$ olacak şekilde öyle bir $[y^{**}, \infty)$ aralığı ve $m + \ell$ tek sayı olacak şekilde $[0, m - 1]$ aralığında öyle bir ℓ tam sayısı vardır ki, $y \in [y^{**}, \infty)$ için

$$\begin{aligned} \alpha = \ell, \dots, m - 1 \text{ olduğunda } (-1)^{\ell+\alpha} g^{(\alpha)}(y) &> 0 \\ \delta = 1, \dots, \ell - 1 \text{ ve } \ell > 1 \text{ olduğunda } g^{(\delta)}(y) &> 0 \end{aligned}$$

kalır.

Lemma 3.2.2. (Philos, 1985, Lemma 2) Kabul edelim ki $g(y)$ fonksiyonu Lemma 3.2.1'de olduğu gibi tanımlansın ve $y^{**} \geq y^* \geq y_0$ değerleri de Lemma 3.2.1'de $g(y)$ fonksiyonu için belirlenen değerler olsun. Eğer $\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) \neq 0$ ise, öyle bir $y^{***} \geq y^{**}/\kappa$ vardır ki, $0 < \kappa < 1$ olacak biçimdeki her κ sabiti ve $y \geq y^{***}$ için

$$g(y) \geq \frac{\kappa}{(m-1)!} y^{m-1} g^{(m-1)}(y)$$

sağlanır.

Lemma 3.2.3. (Baculíková ve Džurina, 2013, Lemma 1) Kabul edelim ki $g(y)$ fonksiyonu Lemma 3.2.1'de olduğu gibi tanımlansın ve $y^{**} \geq y^* \geq y_0$ değerleri de Lemma 3.2.1'de $g(y)$ fonksiyonu için belirlenen değerler olsun. Bu durumda $y^{***} \geq y^{**}$ olacak şekilde öyle bir $[y^{***}, \infty)$ aralığı vardır ki, her $\mu \in (0, 1)$ sabiti ve $y \geq y^{***}$ için

$$\frac{g(y)}{g'(y)} \geq \mu \frac{y}{\ell}$$

kalır.

Lemma 3.2.4. (Hardy ve ark., 1988, Theorem 41) Eğer $\gamma > 0$ ve $0 < \phi \leq 1$ olsun. Bu durumda,

$$\gamma^\phi \leq \phi\gamma + (1 - \phi)$$

kalır. Burada eşitlik $\phi = 1$ için sağlanır (Hardy ve ark., 1988).

3.3. Temel Sonuçlar

Şimdi tez çalışmamızın ana sonuçlarını verebiliriz. $0 < \varepsilon, \mu < 1$ reel sabitler, d ve e fonksiyonları daha sonra spesifik olarak tanımlanacak fonksiyonlar ve z_1^{-1} fonksiyonu da z_1 fonksiyonunun ters fonksiyonu olmak üzere, yazımda kolaylık olması açısından,

$$u(y) := z_1^{-1} \circ \zeta(y),$$

$$\begin{aligned} f_1(y) := & \frac{1}{\rho_1(y)} \left[1 - \frac{1}{\rho_1^{1/k_1}(z_1^{-1}(y))} \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{z_1^{-1}(y)}{y} \right)^{3/\varepsilon} + \frac{k_1 - 1}{k_1 d(y)} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\rho_2(y)}{\rho_1^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(y)))} \left(\frac{k_2}{k_1} \left(\frac{z_1^{-1}(z_2(y))}{y} \right)^{3/\varepsilon} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 d(y)} \right) \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_2(y) := & \frac{1}{\rho_1(y)} \left[1 - \frac{1}{\rho_1^{1/k_1}(z_1^{-1}(y))} \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{z_1^{-1}(y)}{y} \right)^{1/\mu} + \frac{k_1 - 1}{k_1 e(y)} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\rho_2(y)}{\rho_1^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(y)))} \left(\frac{k_2}{k_1} \left(\frac{z_1^{-1}(z_2(y))}{y} \right)^{1/\mu} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 e(y)} \right) \right] \end{aligned}$$

notasyonları kullanılacaktır.

Şimdi, $\zeta(y) \leq z_1(y)$ olması durumunda geçerli olan, (E) denklemini için tezimizin ilk salınım teoremini verebiliriz.

Teorem 3.3.1. $\zeta(y) \leq z_1(y)$, $1 < k_2 < k_1$, $\rho_1(y) \geq 1$ ve yeterince büyük y değerleri için $\rho_1(y) \neq 1$ olsun. Ayrıca $f_1(y) > 0$ ve $f_2(y) > 0$ olacak şekilde azalan, pozitif reel değerli ve $y \mapsto \infty$ iken sıfıra yakınsayan $d(y)$ ve $e(y)$ fonksiyonları var olsun. Eğer, bazı $0 < \kappa_1, \mu_1 < 1$ sabitleri için birinci mertebeden

$$\varphi'(y) + \kappa_1(u(y))^{3\beta/k_1} p(y) f_1^{\beta/k_1}(u(y)) v^{-\beta/k_1}(u(y)) \varphi^{\beta/k_1}(u(y)) = 0 \quad (3.3.1)$$

ve

$$\chi'(y) + \mu_1 u^{\beta/k_1}(y) \left(\int_y^\infty \frac{1}{v(\eta)} \int_\eta^\infty p(s) f_2^{\beta/k_1}(u(s)) ds d\eta \right) \chi^{\beta/k_1}(u(y)) = 0 \quad (3.3.2)$$

gecikmeli diferensiyel denklemleri salınımlı ise (E) neutral diferensiyel denklemi de salınımlıdır.

İspat. $\psi(y)$ fonksiyonu (E) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu takdirde, genelliği bozmaksızın $y_1 \in [y_0, \infty)$ olmak üzere her $y \geq y_1$ için $\psi(y) > 0$, $\psi(z_1(y)) > 0$, $\psi(z_2(y)) > 0$ ve $\psi(\zeta(y)) > 0$ yazılabilir. Neutral terimin tanımından

$$\begin{aligned} \psi^{k_1}(z_1(y)) &= \frac{h(y)}{\rho_1(y)} - \frac{\psi(y)}{\rho_1(y)} - \frac{\rho_2(y)\psi^{k_2}(z_2(y))}{\rho_1(y)} \\ &= \frac{h(y)}{\rho_1(y)} - \frac{1}{\rho_1(y)} \frac{h^{1/k_1}(z_1^{-1}(y))}{\rho_1^{1/k_1}(z_1^{-1}(y))} \left[1 - \frac{\psi(z_1^{-1}(y))}{h(z_1^{-1}(y))} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho_2(z_1^{-1}(y))\psi^{k_2}(z_2(z_1^{-1}(y)))}{h(z_1^{-1}(y))} \right]^{1/k_1} \\ &\quad - \frac{\rho_2(y) h^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(y)))}{\rho_1(y) \rho_1^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(y)))} \left[1 - \frac{\psi(z_1^{-1}(z_2(y)))}{h(z_1^{-1}(z_2(y)))} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho_2(z_1^{-1}(z_2(y)))\psi^{k_2}(z_2(z_1^{-1}(z_2(y))))}{h(z_1^{-1}(z_2(y)))} \right]^{k_2/k_1} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

yazılabilir. (3.3.3) ifadesine Lemma 3.2.4 uygulanırsa

$$\begin{aligned} \psi^{k_1}(z_1(y)) \geq & \frac{h(y)}{\rho_1(y)} - \frac{1}{\rho_1(y)} \frac{h^{1/k_1}(z_1^{-1}(y))}{\rho_1^{1/k_1}(z_1^{-1}(y))} \left[1 - \frac{1}{k_1} \left(\frac{\psi(z_1^{-1}(y))}{h(z_1^{-1}(y))} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\rho_2(z_1^{-1}(y))\psi^{k_2}(z_2(z_1^{-1}(y))))}{h(z_1^{-1}(y))} \right) \right] \\ & - \frac{\rho_2(y)}{\rho_1(y)} \frac{h^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(y)))}{\rho_1^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(y)))} \left[1 - \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{\psi(z_1^{-1}(z_2(y)))}{h(z_1^{-1}(z_2(y)))} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\rho_2(z_1^{-1}(z_2(y)))\psi^{k_2}(z_2(z_1^{-1}(z_2(y))))}{h(z_1^{-1}(z_2(y)))} \right) \right], \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \psi^{k_1}(y) \geq & \frac{1}{\rho_1(z_1^{-1}(y))} \left[h(z_1^{-1}(y)) - \frac{1}{\rho_1^{1/k_1}(z_1^{-1}(z_1^{-1}(y)))} h^{1/k_1}(z_1^{-1}(z_1^{-1}(y))) \right. \\ & \left. - \frac{\rho_2(z_1^{-1}(y))}{\rho_1^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(z_1^{-1}(y))))} h^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(z_1^{-1}(y)))) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğe tekrar Lemma 3.2.4 uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \psi^{k_1}(y) \geq & \frac{1}{\rho_1(z_1^{-1}(y))} \left[h(z_1^{-1}(y)) \right. \\ & - \frac{1}{\rho_1^{1/k_1}(z_1^{-1}(z_1^{-1}(y)))} \left(\frac{1}{k_1} h(z_1^{-1}(z_1^{-1}(y))) + \frac{k_1 - 1}{k_1} \right) \\ & \left. - \frac{\rho_2(z_1^{-1}(y))}{\rho_1^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(z_1^{-1}(y))))} \left(\frac{k_2}{k_1} h(z_1^{-1}(z_2(z_1^{-1}(y)))) + \frac{k_1 - k_2}{k_1} \right) \right] \quad (3.3.4) \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Diğer taraftan, Lemma 3.2.1 ve (3.1.1) şartından, (E) neutral diferensiyel denkleminin salınımsız çözümleri için, nihai olarak

$$(\mathcal{H}1) \quad h(y) > 0, \quad h'(y) > 0, \quad h''(y) > 0, \quad h'''(y) > 0, \quad h^{(4)}(y) \leq 0;$$

$$(\mathcal{H}2) \quad h(y) > 0, \quad h'(y) > 0, \quad h''(y) < 0, \quad h'''(y) > 0, \quad h^{(4)}(y) \leq 0$$

olası durumlarının geçerli olduğu görülür.

Önce $(\mathcal{H}1)$ durumunu inceleyelim. Bu durumda, Lemma 3.2.3'den, her $\varepsilon \in (0, 1)$ için öyle bir $y_\varepsilon \geq y_1$ vardır ki, her $y \geq y_\varepsilon$ için

$$\frac{h(y)}{h'(y)} \geq \varepsilon \frac{y}{3}$$

kahr. Buradan da, her $y \geq y_\varepsilon$ için

$$\left(\frac{h(y)}{y^{3/\varepsilon}} \right)' = \frac{h'(y) [\varepsilon y - 3h(y)/h'(y)]}{\varepsilon y y^{3/\varepsilon}} \leq 0$$

olduğu görülür, yani $h(y)/y^{3/\varepsilon}$ artmayan bir fonksiyondur. $z_1(y)$ ve $z_2(y)$ fonksiyonları kesin artan olduğundan,

$$z_1^{-1}(y) \leq z_1^{-1}(z_1^{-1}(y)) \quad (3.3.5)$$

ve

$$z_1^{-1}(y) \leq z_1^{-1}(z_2(z_1^{-1}(y))) \quad (3.3.6)$$

elde edilir. Bundan dolayı, $h(y)/y^{3/\varepsilon}$ artmayan fonksiyon olduğu kullanılarak

$$\left(\frac{z_1^{-1}(z_1^{-1}(y))}{z_1^{-1}(y)} \right)^{3/\varepsilon} h(z_1^{-1}(y)) \geq h(z_1^{-1}(z_1^{-1}(y))) \quad (3.3.7)$$

ve

$$\left(\frac{z_1^{-1}(z_2(z_1^{-1}(y)))}{z_1^{-1}(y)} \right)^{3/\varepsilon} h(z_1^{-1}(y)) \geq h(z_1^{-1}(z_2(z_1^{-1}(y)))). \quad (3.3.8)$$

elde edilir. (3.3.7) ve (3.3.8) ifadeleri (3.3.4) eşitsizliğinde kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \psi^{k_1}(y) \geq & \frac{h(z_1^{-1}(y))}{\rho_1(z_1^{-1}(y))} \left[1 - \frac{1}{\rho_1^{1/k_1}(z_1^{-1}(z_1^{-1}(y)))} \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{z_1^{-1}(z_1^{-1}(y))}{z_1^{-1}(y)} \right)^{3/\varepsilon} + \frac{k_1 - 1}{k_1 h(z_1^{-1}(y))} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\rho_2(z_1^{-1}(y))}{\rho_1^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(z_1^{-1}(y))))} \left(\frac{k_2}{k_1} \left(\frac{z_1^{-1}(z_2(z_1^{-1}(y)))}{z_1^{-1}(y)} \right)^{3/\varepsilon} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 h(z_1^{-1}(y))} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

elde edilir. $h(y)$ artan, $d(y)$ pozitif, azalan ve $y \mapsto \infty$ iken sıfıra yakınsayan bir fonksiyon olduğundan, her $y \geq y_2$ için

$$h(y) \geq d(y)$$

olacak şekilde bir $y_2 \geq y_\varepsilon$ vardır. Bu son eşitsizlik (3.3.9) ifadesinde yerine yazılırsa, her $y \geq y_2$ için

$$\psi^{k_1}(y) \geq f_1(z_1^{-1}(y))h(z_1^{-1}(y)) \quad (3.3.10)$$

elde edilir. (3.3.10) ifadesi de (E) denkleminde kullanıldığında, her $y \geq y_2$ için

$$\left(v(y)h'''(y)\right)' + p(y)f_1^{\beta/k_1}(u(y))h^{\beta/k_1}(u(y)) \leq 0 \quad (3.3.11)$$

sonucuna varılır. Diğer taraftan Lemma 3.2.2 kullanılarak, her $0 < \kappa < 1$ sabiti için öyle bir $y_\kappa \geq y_2$ vardır ki, her $y \geq y_\kappa$ için

$$h(y) \geq \frac{\kappa}{6}y^3h'''(y) \quad (3.3.12)$$

yazılabilir. (3.3.11) ve (3.3.12) eşitsizlikleri birleştirildiğinde, $\kappa_1 = (\kappa/6)^{\beta/k_1}$ olmak üzere

$$\left(v(y)h'''(y)\right)' + \kappa_1 p(y)f_1^{\beta/k_1}(u(y))(u(y))^{3\beta/k_1}(h'''(u(y)))^{\beta/k_1} \leq 0 \quad (3.3.13)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\varphi(y) = v(y)h'''(y)$ olarak tanımlanırsa, $\varphi(y)$ fonksiyonunun,

$$\varphi'(y) + \varepsilon_* p(y)f_1^{\beta/k_1}(u(y))(u(y))^{3\beta/k_1}v^{-\beta/k_1}(u(y))\varphi^{\beta/k_1}(u(y)) \leq 0 \quad (3.3.14)$$

gecikmeli diferensiyel eşitsizliğinin pozitif bir çözümü olduğu görülür. Bu nedenle (Philos, 1981, Theorem 1) gereğince, bu eşitsizliğe karşılık gelen (3.3.1) gecikmeli diferensiyel denklemi de pozitif bir çözüme sahip olur ki, bu bir çelişkidir.

Şimdi $(\mathcal{H}2)$ durumunu ele alalım. Lemma 3.2.3 ten, her $\mu \in (0, 1)$ sabiti için öyle bir $y_\mu \geq y_1$ noktası vardır ki, her $y \in [y_\mu, \infty)$ için

$$\frac{h(y)}{h'(y)} \geq \mu \frac{y}{1} \quad (3.3.15)$$

sağlanır. Buradan da,

$$\left(\frac{h(y)}{y^{1/\mu}}\right)' = \frac{h'(y)[y\mu - h(y)/h'(y)]}{y\mu y^{1/\mu}} \leq 0$$

bulunur, yani her $y \geq y_\mu$ için $h(y)/y^{1/\mu}$ fonksiyonu artımayandır. Böylece, (3.3.5) ve (3.3.6) eşitsizliklerinden, sırasıyla

$$\left(\frac{z_1^{-1}(z_1^{-1}(y))}{z_1^{-1}(y)}\right)^{1/\mu} h(z_1^{-1}(y)) \geq h(z_1^{-1}(z_1^{-1}(y))) \quad (3.3.16)$$

ve

$$\left(\frac{z_1^{-1}(z_2(z_1^{-1}(y)))}{z_1^{-1}(y)}\right)^{1/\mu} h(z_1^{-1}(y)) \geq h(z_1^{-1}(z_2(z_1^{-1}(y)))) \quad (3.3.17)$$

olduğu görülür. (3.3.16) ve (3.3.17) eşitsizlikleri (3.3.4) içinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \psi^{k_1}(y) \geq & \frac{h(z_1^{-1}(y))}{\rho_1(z_1^{-1}(y))} \left[1 - \frac{1}{\rho_1^{1/k_1}(z_1^{-1}(z_1^{-1}(y)))} \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{z_1^{-1}(z_1^{-1}(y))}{z_1^{-1}(y)} \right)^{1/\mu} + \frac{k_1 - 1}{k_1 h(z_1^{-1}(y))} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\rho_2(z_1^{-1}(y))}{\rho_1^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(z_1^{-1}(y))))} \left(\frac{k_2}{k_1} \left(\frac{z_1^{-1}(z_2(z_1^{-1}(y)))}{z_1^{-1}(y)} \right)^{1/\mu} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 h(z_1^{-1}(y))} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

elde edilir. $h(y)$ artan bir fonksiyon ve $e(y)$ pozitif, azalan ve $y \mapsto \infty$ iken sıfıra yakınsayan bir fonksiyon olduğundan, her $y \geq y_3$ için

$$h(y) \geq e(y)$$

olacak şekilde bir $y_3 \geq y_\mu$ noktası vardır. Bu eşitsizlik (3.3.18) içinde kullanılırsa

$$\psi^{k_1}(y) \geq f_2(z_1^{-1}(y))h(z_1^{-1}(y)) \quad (3.3.19)$$

elde edilir. (3.3.19) eşitsizliğinin (E) denkleminde yerine yazılmasıyla, her $y \geq y_3$ için

$$\left(v(y)h'''(y)\right)' + p(y)f_2^{\beta/k_1}(u(y))h^{\beta/k_1}(u(y)) \leq 0 \quad (3.3.20)$$

diferensiyel eşitsizliği elde edilir. Bu ifadenin $y \geq y_3$ 'ten ∞ 'a integrali alınrsa

$$h'''(y) \geq \left(\frac{1}{v(y)} \int_y^\infty p(s) f_2^{\beta/k_1}(u(s)) ds \right) h^{\beta/k_1}(u(y)) \quad (3.3.21)$$

elde edilir. Bu son eşitsizliği $y \geq y_3$ 'ten ∞ 'a tekrar integre edersek

$$h''(y) + \left(\int_y^\infty \frac{1}{v(\eta)} \int_\eta^\infty p(s) f_2^{\beta/k_1}(u(s)) ds d\eta \right) h^{\beta/k_1}(u(y)) \leq 0. \quad (3.3.22)$$

elde edilir. (3.3.15) ifadesi (3.3.22) eşitsizliğinde yerine yazılırsa, her $0 < \mu < 1$ sabiti için $\mu_1 = \mu^{\beta/k_1}$ olmak üzere

$$h''(y) + \mu_1 u^{\beta/k_1}(y) \left(\int_y^\infty \frac{1}{v(\eta)} \int_\eta^\infty p(s) f_2^{\beta/k_1}(u(s)) ds d\eta \right) (h'(u(y)))^{\beta/k_1} \leq 0 \quad (3.3.23)$$

sonucuna varılır. Eğer $\chi(y) = h'(y)$ olarak tanımlanırsa, $\chi(y)$ fonksiyonunun

$$\chi'(y) + \mu_1 u^{\beta/k_1}(y) \left(\int_y^\infty \frac{1}{v(\eta)} \int_\eta^\infty p(s) f_2^{\beta/k_1}(u(s)) ds d\eta \right) \chi^{\beta/k_1}(u(y)) \leq 0 \quad (3.3.24)$$

gecikmeli diferensiyel eşitsizliğinin pozitif bir çözümü olduğu, dolayısıyla da (Philos, 1981, Theorem 1) gereğince, bu eşitsizliğe karşılık gelen (3.3.2) gecikmeli diferensiyel denkleminin de pozitif bir çözüme sahip olduğu görülür. Bu çelişki ispatı tamamlar.

(Kitamura ve Kusano, 1980, Theorem 2)'nin doğrudan bir uygulaması ile, aşağıdaki salınım sonucu elde edilir.

Sonuç 3.3.2. $\zeta(y) \leq z_1(y)$, $1 < k_2 < k_1$, $\beta < k_1$, $\rho_1(y) \geq 1$ ve yeterince büyük y değerleri için $\rho_1(y) \not\equiv 1$ olsun. Ayrıca $f_1(y) > 0$ ve $f_2(y) > 0$ olacak şekilde azalan, pozitif reel değerli ve $y \mapsto \infty$ iken sifıra yakınsayan $d(y)$ ve $e(y)$ fonksiyonları var olsun. Eğer,

$$\int_{y_0}^\infty (u(\eta))^{3\beta/k_1} p(\eta) f_1^{\beta/k_1}(u(\eta)) v^{-\beta/k_1}(u(\eta)) d\eta = \infty \quad (3.3.25)$$

ve

$$\int_{y_0}^\infty (u(\xi))^{\beta/k_1} \left(\int_\xi^\infty \frac{1}{v(\eta)} \int_\eta^\infty p(s) f_2^{\beta/k_1}(u(s)) ds d\eta \right) d\xi = \infty \quad (3.3.26)$$

kalıyorsa, bu takdirde (E) denklemi salınımlıdır.

$k_1 = \beta$ için, (Koplatadze ve Chanturiya, 1982, Theorem 1)'den aşağıdaki salınım kriteri elde edilir.

Sonuç 3.3.3. $\zeta(y) < z_1(y)$, $1 < k_2 < k_1 = \beta$, $\rho_1(y) \geq 1$ ve yeterince büyük y değerleri için $\rho_1(y) \neq 1$ olsun. Ayrıca $f_1(y) > 0$ ve $f_2(y) > 0$ olacak şekilde azalan, pozitif reel değerli ve $y \mapsto \infty$ iken sifıra yakınsayan $d(y)$ ve $e(y)$ fonksiyonları var olsun. Eğer

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} \int_{u(y)}^y (u(\eta))^3 p(\eta) f_1(u(\eta)) v^{-1}(u(\eta)) d\eta > 1/e\kappa_1 \quad (3.3.27)$$

ve

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} \int_{u(y)}^y u(\xi) \left(\int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{v(\eta)} \int_{\eta}^{\infty} p(s) f_2(u(s)) ds d\eta \right) d\xi > 1/e\mu_1 \quad (3.3.28)$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa, (E) denklemi salınımlıdır.

Sıradaki salınım kriterlerini verirken, $0 < \varepsilon, \mu < 1$ reel sabitler, d ve e fonksiyonları pozitif reel değerli, azalan ve $y \mapsto \infty$ iken sifıra yakınsayan fonksiyonlar, z_1^{-1} ve z_2^{-1} fonksiyonları da sırasıyla z_1 ve z_2 fonksiyonlarının tersleri olmak üzere, okuyucuya kolaylık sağlamak adına,

$$\begin{aligned} f_3(y) := & \frac{1}{\rho_1(y)} \left[1 - \frac{1}{\rho_2^{1/k_2}(z_2^{-1}(y))} \left(\frac{1}{k_2} + \frac{k_2 - 1}{k_2 d(y)} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\rho_2(y)}{\rho_1^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(y)))} \left(\frac{k_2}{k_1} \left(\frac{z_1^{-1}(z_2(y))}{y} \right)^{3/\varepsilon} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 d(y)} \right) \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_4(y) := & \frac{1}{\rho_1(y)} \left[1 - \frac{1}{\rho_2^{1/k_2}(z_2^{-1}(y))} \left(\frac{1}{k_2} + \frac{k_2 - 1}{k_2 e(y)} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\rho_2(y)}{\rho_1^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(y)))} \left(\frac{k_2}{k_1} \left(\frac{z_1^{-1}(z_2(y))}{y} \right)^{1/\mu} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 e(y)} \right) \right] \end{aligned}$$

notasyonları kullanılacaktır.

Teorem 3.3.4. $\zeta(y) \leq z_1(y)$, $1 < k_2 < k_1$, $\rho_1(y) \geq 1$, $\rho_2(y) \geq 1$, yeterince büyük y değerleri için $\rho_1(y) \neq 1$ ve $\rho_2(y) \neq 1$ olsun. Ayrıca $f_3(y) > 0$ ve $f_4(y) > 0$ olacak şekilde pozitif reel değerli, azalan ve $y \mapsto \infty$ iken sifıra yakınsayan $d(y)$ ve $e(y)$ fonksiyonları var olsun. Eğer bazı $0 < \kappa_2, \mu_2 < 1$ sabitleri için birinci mertebeden

$$\varphi'(y) + \kappa_2(u(y))^{3\beta/k_1} p(y) f_3^{\beta/k_1}(u(y)) v^{-\beta/k_1}(u(y)) \varphi^{\beta/k_1}(u(y)) = 0 \quad (3.3.29)$$

ve

$$\chi'(y) + \mu_2 u^{\beta/k_1}(y) \left(\int_y^\infty \frac{1}{v(\eta)} \int_\eta^\infty p(s) f_4^{\beta/k_1}(u(s)) ds d\eta \right) \chi^{\beta/k_1}(u(y)) = 0 \quad (3.3.30)$$

denklemleri salınımlı ise, o halde (E) denklemini de salınımlıdır.

İspat. $\psi(y)$ fonksiyonu (E) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu takdirde, genelliği bozmaksızın $y_1 \in [y_0, \infty)$ olmak üzere her $y \geq y_1$ için $\psi(y) > 0$, $\psi(z_1(y)) > 0$, $\psi(z_2(y)) > 0$ ve $\psi(\zeta(y)) > 0$ yazılabilir. Neutral terimin tanımından

$$\begin{aligned} \psi^{k_1}(z_1(y)) &= \frac{h(y)}{\rho_1(y)} - \frac{\psi(y)}{\rho_1(y)} - \frac{\rho_2(y)\psi^{k_2}(z_2(y))}{\rho_1(y)} \\ &= \frac{h(y)}{\rho_1(y)} - \frac{1}{\rho_1(y)} \frac{h^{1/k_2}(z_2^{-1}(y))}{\rho_2^{1/k_2}(z_2^{-1}(y))} \left[1 - \frac{\psi(z_2^{-1}(y))}{h(z_2^{-1}(y))} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho_1(z_2^{-1}(y))\psi^{k_1}(z_1(z_2^{-1}(y)))}{h(z_2^{-1}(y))} \right]^{1/k_2} \\ &\quad - \frac{\rho_2(y)}{\rho_1(y)} \frac{h^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(y)))}{\rho_1^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(y)))} \left[1 - \frac{\psi(z_1^{-1}(z_2(y)))}{h(z_1^{-1}(z_2(y)))} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho_2(z_1^{-1}(z_2(y)))\psi^{k_2}(z_2(z_1^{-1}(z_2(y))))}{h(z_1^{-1}(z_2(y)))} \right]^{k_2/k_1} \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

yazabiliriz. (3.3.31) ifadesine Lemma 3.2.4 uygulanırsa

$$\begin{aligned} \psi^{k_1}(z_1(y)) \geq & \frac{1}{\rho_1(y)} \left[h(y) - \frac{1}{\rho_2^{1/k_2}(z_2^{-1}(y))} h^{1/k_2}(z_2^{-1}(y)) \right. \\ & \left. - \frac{\rho_2(y)}{\rho_1^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(y)))} h^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(y))) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte Lemma 3.2.4 tekrar uygulanırsa

$$\begin{aligned} \psi^{k_1}(z_1(y)) \geq & \frac{1}{\rho_1(y)} \left[h(y) - \frac{1}{\rho_2^{1/k_2}(z_2^{-1}(y))} \left(\frac{1}{k_2} h(z_2^{-1}(y)) + \frac{k_2 - 1}{k_2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\rho_2(y)}{\rho_1^{k_2/k_1}(z_1^{-1}(z_2(y)))} \left(\frac{k_2}{k_1} h(z_1^{-1}(z_2(y))) + \frac{k_1 - k_2}{k_1} \right) \right] \quad (3.3.32) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, Teorem 3.3.1'in ispatında olduğu gibi, iki durum ortaya çıkar: Öncelikle ($\mathcal{H}1$) durumunu inceleyelim. (3.3.8)'in tekrar sağlandığını görülür. (ii) şartından, $z_2^{-1}(y) \leq y$ olduğu ve $h(y)$ 'nin artan olduğu kullanılarak

$$h(z_2^{-1}(y)) \leq h(y) \quad (3.3.33)$$

olduğu görülür. (3.3.8) ve (3.3.33) ifadeleri (3.3.32) yerine yazılır ve Teorem 3.3.1'in ispatındaki süreç olduğu gibi tekrar edilirse

$$\psi^{k_1}(y) \geq f_3(z_1^{-1}(y))h(z_1^{-1}(y)) \quad (3.3.34)$$

sonucuna varılır. Bu durumun ispatının geri kalan kısmı, Teorem 3.3.1'in aynı durumunun ispatına benzer olduğundan, ayrıntılara yer verilmemiştir.

Şimdi de ($\mathcal{H}2$) durumunu inceleyelim. Bu durumda (3.3.17)'nin tekrar sağlandığı kolaylıkla görülebilir. (3.3.17) ve (3.3.33) ifadeleri (3.3.32) eşitsizliğinde yerine yazılırsa, her $y \geq y_3$ için,

$$\psi^{k_1}(y) \geq f_4(z_1^{-1}(y))h(z_1^{-1}(y)) \quad (3.3.35)$$

elde edilir. Bu durumun ispatının geri kalan kısmı, Teorem 3.3.1'in aynı durumunun ispatına benzer olduğundan, ayrıntılara yer verilmemiştir.

Yukarıda olduğu gibi, (Kitamura ve Kusano, 1980, Theorem 2) ve (Koplatadze ve Chanturiya, 1982, Theorem 1) kullanılarak, aşağıdaki salınım sonuçları direkt olarak yazılabilir.

Sonuç 3.3.5. $\zeta(y) \leq z_1(y)$, $1 < k_2 < k_1$, $\beta < k_1$, $\rho_1(y) \geq 1$, $\rho_2(y) \geq 1$, yeterince büyük y değerleri için $\rho_1(y) \not\equiv 1$ ve $\rho_2(y) \not\equiv 1$ olsun. Ayrıca $f_3(y) > 0$ ve $f_4(y) > 0$ olacak şekilde pozitif reel değerli, azalan ve $y \mapsto \infty$ iken sifıra yakınsayan $d(y)$ ve $e(y)$ fonksiyonları var olsun. Eğer,

$$\int_{y_0}^{\infty} (u(\eta))^{3\beta/k_1} p(\eta) f_3^{\beta/k_1}(u(\eta)) v^{-\beta/k_1}(u(\eta)) d\eta = \infty \quad (3.3.36)$$

ve

$$\int_{y_0}^{\infty} (u(\xi))^{\beta/k_1} \left(\int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{v(\eta)} \int_{\eta}^{\infty} p(s) f_4^{\beta/k_1}(u(s)) ds d\eta \right) d\xi = \infty \quad (3.3.37)$$

kalıyorsa o zaman (E) denklemi salınımlıdır.

Sonuç 3.3.6. $\zeta(y) < z_1(y)$, $1 < k_2 < k_1 = \beta$, $\rho_1(y) \geq 1$, $\rho_2(y) \geq 1$, yeterince büyük y değerleri için $\rho_1(y) \not\equiv 1$ ve $\rho_2(y) \not\equiv 1$ olsun. Ayrıca $f_3(y) > 0$ ve $f_4(y) > 0$ olacak şekilde pozitif reel değerli, azalan ve $y \mapsto \infty$ iken sifıra yakınsayan $d(y)$ ve $e(y)$ fonksiyonları var olsun. Eğer

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} \int_{u(y)}^y (u(\eta))^3 p(\eta) f_3(u(\eta)) v^{-1}(u(\eta)) d\eta > 1/e\kappa_2 \quad (3.3.38)$$

ve

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} \int_{u(y)}^y u(\xi) \left(\int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{v(\eta)} \int_{\eta}^{\infty} p(s) f_4(u(s)) ds d\eta \right) d\xi > 1/e\mu_2 \quad (3.3.39)$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, o zaman (E) denklemi salınımlıdır.

Şimdi $1 < k_1 < k_2$ ve $\zeta(y) \leq z_2(y)$ olması durumunda bazı salınım kriterleri verilecektir. d fonksiyonu pozitif reel değerli, azalan ve $y \mapsto \infty$ iken sifıra yakınsayan

bir fonksiyon ve z_2^{-1} fonksiyonu da z_2 fonksiyonunun tersi olmak üzere, yazımda kolaylık olması açısından,

$$\omega(y) := z_2^{-1} \circ \zeta(y),$$

$$\begin{aligned} f_5(y) := & \frac{1}{\rho_2(y)} \left[1 - \frac{1}{\rho_2^{1/k_2}(z_2^{-1}(y))} \left(\frac{1}{k_2} + \frac{k_2 - 1}{k_2 d(y)} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\rho_1(y)}{\rho_2^{k_1/k_2}(z_2^{-1}(z_1(y)))} \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2 - k_1}{k_2 d(y)} \right) \right] \end{aligned}$$

notasyonları kullanılacaktır.

Teorem 3.3.7. $\zeta(y) \leq z_2(y)$ için $1 < k_1 < k_2$, $\rho_2(y) \geq 1$ ve yeterince büyük y değerleri için $\rho_2(y) \neq 1$ olsun. Ayrıca $f_5(y) > 0$ kalacak şekilde pozitif reel değerli, azalan ve $y \mapsto \infty$ iken sifıra yakınsayan bir $d(y)$ fonksiyonu var olsun. Eğer $0 < \kappa_3, \mu_3 < 1$ sabitleri için birinci mertebeden

$$\varphi'(y) + \kappa_3(\omega(y))^{3\beta/k_2} p(y) f_5^{\beta/k_2}(\omega(y)) v^{-\beta/k_2}(\omega(y)) \varphi^{\beta/k_2}(\omega(y)) = 0 \quad (3.3.40)$$

ve

$$\chi'(y) + \mu_3(\omega(y))^{\beta/k_2} \left(\int_y^\infty \frac{1}{v(\eta)} \int_\eta^\infty p(s) f_5^{\beta/k_2}(\omega(s)) ds d\eta \right) \chi^{\beta/k_2}(\omega(y)) = 0 \quad (3.3.41)$$

denklemleri salınımlı ise, bu takdirde (E) denklemi de salınımlıdır.

İspat. $\psi(y)$ fonksiyonu (E) diferensiyel denkleminin salınımsız (nihai pozitif diyelim) bir çözümü olsun. Neutral terimin tanımından

$$\begin{aligned} \psi^{k_2}(z_2(y)) = & \frac{h(y)}{\rho_2(y)} - \frac{1}{\rho_2(y)} \frac{h^{1/k_2}(z_2^{-1}(y))}{\rho_2^{1/k_2}(z_2^{-1}(y))} \left[1 - \frac{\psi(z_2^{-1}(y))}{h(z_2^{-1}(y))} \right. \\ & \left. - \frac{\rho_1(z_2^{-1}(y)) \psi^{k_1}(z_1(z_2^{-1}(y))))}{h(z_2^{-1}(y))} \right]^{1/k_2} \\ & - \frac{\rho_1(y)}{\rho_2(y)} \frac{h^{k_1/k_2}(z_2^{-1}(z_1(y)))}{\rho_2^{k_1/k_2}(z_2^{-1}(z_1(y)))} \left[1 - \frac{\psi(z_2^{-1}(z_1(y)))}{h(z_2^{-1}(z_1(y)))} \right. \\ & \left. - \frac{\rho_1(z_2^{-1}(z_1(y))) \psi^{k_1}(z_1(z_2^{-1}(z_1(y))))}{h(z_2^{-1}(z_1(y)))} \right]^{k_1/k_2} \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

yazılabilir. (3.3.42)'de Lemma 3.2.4 uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \psi^{k_2}(z_2(y)) \geq & \frac{1}{\rho_2(y)} \left[h(y) - \frac{1}{\rho_2^{1/k_2}(z_2^{-1}(y))} h^{1/k_2}(z_2^{-1}(y)) \right. \\ & \left. - \frac{\rho_1(y)}{\rho_2^{k_1/k_2}(z_2^{-1}(z_1(y)))} h^{k_1/k_2}(z_2^{-1}(z_1(y))) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte tekrar Lemma 3.2.4 uygulandığında,

$$\begin{aligned} \psi^{k_2}(z_2(y)) \geq & \frac{1}{\rho_2(y)} \left[h(y) - \frac{1}{\rho_2^{1/k_2}(z_2^{-1}(y))} \left(\frac{1}{k_2} h(z_2^{-1}(y)) + \frac{k_2 - 1}{k_2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\rho_1(y)}{\rho_2^{k_1/k_2}(z_2^{-1}(z_1(y)))} \left(\frac{k_1}{k_2} h(z_2^{-1}(z_1(y))) + \frac{k_2 - k_1}{k_2} \right) \right] \quad (3.3.43) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 3.3.1'in ispatında olduğu gibi, dikkate alınması gereken iki olası durum vardır:

Öncelikle, $(\mathcal{H}1)$ durumunu ele alalım. (ii) şartından,

$$z_2^{-1}(z_1(y)) \leq z_2^{-1}(y) \leq y,$$

elde edilir ve $h(y)$ artan bir fonksiyon olduğundan

$$h(z_2^{-1}(z_1(y))) \leq h(z_2^{-1}(y)) \leq h(y) \quad (3.3.44)$$

eşitsizliği sağlanır. (3.3.44) ifadesini (3.3.43) içinde yerine yazılırsa ve Teorem 3.3.1'in ispatındaki süreç benzer bir şekilde izlenirse,

$$\psi^{k_2}(y) \geq f_5(z_2^{-1}(y)) h(z_2^{-1}(y)) \quad (3.3.45)$$

elde edilir. Bu durumun ispatının geri kalan kısmı, Teorem 3.3.1'in aynı durumunun ispatına benzer olduğundan, ayrıntılara yer verilmemiştir.

İkinci olarak, (H2) durumunu ele alalım. Bu durumda $h(y)$ artan olduğundan, her $y \geq y_3$ için (3.3.45) ifadesinin yine geçerli olduğu görülür. Bu durumun ispatının geri kalan kısmı, Teorem 3.3.1'in aynı durumunun ispatına benzer olduğundan, ayrıntılara yer verilmemiştir.

(Kitamura ve Kusano, 1980, Theorem 2) ve (Koplatadze ve Chanturiya, 1982, Theorem 1) sonuçlarını kullanarak, aşağıdaki salınım kriterleri direkt olarak yazılabilir.

Sonuç 3.3.8. $\zeta(y) \leq z_2(y)$ için $1 < k_1 < k_2$, $\beta < k_2$, $\rho_2(y) \geq 1$ ve yeterince büyük y değerleri için $\rho_2(y) \not\equiv 1$ olsun. Ayrıca $f_5(y) > 0$ kalacak şekilde pozitif reel değerli, azalan ve $y \mapsto \infty$ iken sifıra yakınsayan bir $d(y)$ fonksiyonu var olsun. Eğer,

$$\int_{y_0}^{\infty} (\omega(\eta))^{3\beta/k_2} p(\eta) f_5^{\beta/k_2}(\omega(\eta)) v^{-\beta/k_2}(\omega(\eta)) d\eta = \infty \quad (3.3.46)$$

ve

$$\int_{y_0}^{\infty} (\omega(\xi))^{\beta/k_2} \left(\int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{v(\eta)} \int_{\eta}^{\infty} p(s) f_5^{\beta/k_2}(\omega(s)) ds d\eta \right) d\xi = \infty \quad (3.3.47)$$

kalıyorsa, bu takdirde (E) denklemi de salınımlıdır.

Sonuç 3.3.9. $\zeta(y) < z_2(y)$ için $1 < k_1 < k_2 = \beta$, $\rho_2(y) \geq 1$ ve yeterince büyük y değerleri için $\rho_2(y) \not\equiv 1$ olsun. Ayrıca $f_5(y) > 0$ kalacak şekilde pozitif reel değerli, azalan ve $y \mapsto \infty$ iken sifıra yakınsayan bir $d(y)$ fonksiyonu var olsun. Eğer

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} \int_{\omega(y)}^y (\omega(\eta))^3 p(\eta) f_5(\omega(\eta)) v^{-1}(\omega(\eta)) d\eta > 1/e\kappa_3 \quad (3.3.48)$$

ve

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} \int_{\omega(y)}^y \omega(\xi) \left(\int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{v(\eta)} \int_{\eta}^{\infty} p(s) f_5(\omega(s)) ds d\eta \right) d\xi > 1/e\mu_3 \quad (3.3.49)$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa, (E) denklemi salınımlıdır.

Not 3.3.10. Teorem 3.3.7 ve Sonuç 3.3.8-3.3.9'da, $\zeta(y)$ 'nin hem ileri tipten, hem de gecikmeli bir argüment olarak seçilebileceğini belirtelim.

Örnek 3.3.11. $y \geq 2$ için, süperlineer neutral terimli dördüncü mertebeden

$$\left[e^{-y} \left(\left(\psi(y) + \psi^3(y/2) + e^{4y} \psi^5(2y) \right)''' \right) \right]' + e^{3y} x^3 (2y - 1) = 0. \quad (3.3.50)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemde

- $k_1 = \beta = 3$, $k_2 = 5$, $v(y) = e^{-y}$, $\rho_1(y) = 1$ ve $\rho_2(y) = e^{4y}$;
- $z_1(y) = y/2$, $z_2(y) = 2y$, $p(y) = e^{3y}$, $\zeta(y) = 2y - 1$

olduğu görülmektedir. (3.3.50) denkleminin (i)-(ii) ve (3.1.1) şartlarını sağladığı açıktır. Ayrıca $\zeta(y) \leq z_2(y)$, $\omega(y) = y - 1/2 < y$ olduğu görülmektedir ve $d(y)$ fonksiyonu $d(y) = 4e^{-y/5}$ olarak seçilirse, $y \geq 2$ için

$$\begin{aligned} f_5(y) &= \frac{1}{e^{4y}} \left[1 - \frac{1}{e^{2y/5}} \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{20e^{-y/5}} \right) - \frac{1}{e^{3y/5}} \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{20e^{-y/5}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{10e^{4y}} \left[10 - \frac{3}{e^{2y/5}} - \frac{2}{e^{y/5}} - \frac{6}{e^{3y/5}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (3.3.46) ve (3.3.47) integralleri sırasıyla

$$\int_2^\infty \left(\eta - \frac{1}{2} \right)^{9/5} e^{3\eta} \left(\frac{1}{10e^{4\eta}} \left(10 - \frac{3}{e^{2\eta/5}} - \frac{2}{e^{\eta/5}} - \frac{6}{e^{3\eta/5}} \right) \right)^{3/5} e^{3\eta/5} d\eta = \infty$$

ve

$$\int_2^\infty \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^{3/5} \left(\int_\xi^\infty e^\eta \int_\eta^\infty \frac{e^{3s/5}}{10^{3/5}} \left(10 - \frac{3}{e^{2s/5}} - \frac{2}{e^{s/5}} - \frac{6}{e^{3s/5}} \right)^{3/5} ds d\eta \right) d\xi = \infty$$

olur. Dolayısıyla, Sonuç 3.3.8'ten, (3.3.50) diferensiyel denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında,

$$h(y) = \psi(y) + \rho_1(y)\psi^{k_1}(z_1(y)) + \rho_2(y)\psi^{k_2}(z_2(y))$$

süperlineer bir neutral terimi ile tanımlı, dördüncü mertebeden lineer olmayan

$$\left(v(y)h'''(y)\right)' + p(y)\psi^\beta(\zeta(y)) = 0, \quad y \geq y_0 > 0 \quad (4.0.1)$$

diferensiyel denklemi göz önüne alınmış ve bu denklemin çözümlerinin salınım davranışları için yeter şartlar elde edilmiştir. Bu tez çalışmasında kullanılan yöntemler kullanılarak, aşağıda belirtilen problemler üzerine çalışmalar yapılabilir:

- $h(y)$ neutral terimi (4.0.1) denkleminde olduğu gibi tanımlı ve $n \geq 4$ bir çift tam sayı olmak üzere

$$\left(v(y)h^{(n-1)}(y)\right)' + p(y)\psi^\beta(\zeta(y)) = 0, \quad y \geq y_0 > 0$$

çift mertebeden diferensiyel denkleminin salınımlılığı için yeni sonuçlar elde edilebilir.

- (i) şartında, (4.0.1) denkleminde görülen $v(y)$ fonksiyonunun

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{v(s)} ds = \infty$$

şartını sağladığı kabul edilmiştir. Buradan hareketle,

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{v(s)} ds < \infty$$

olması, yani (4.0.1) denkleminin kanonik olmayan formda olması durumunda yeni salınım sonuçları üzerinde çalışılabilir.

- Bu tez çalışmasında $h(y)$ neutral teriminin süperlineer olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca $h(y)$ içindeki üsteller için

$$0 \leq k_1 < 1 \leq k_2$$

ve/veya

$$0 \leq k_2 < 1 \leq k_1$$

olması durumunda, yani neutral terimin hem süperlineer hem de sublineer terimler ihtiva etmesi durumunda (4.0.1) denklemi için yeni salınım sonuçları araştırılabilir.

- (4.0.1) denkleminde, yeterince büyük y değerleri için

$$-\infty < \rho_1(y), \rho_2(y) < 0$$

ya da

$$-\infty < \rho_1(y), \rho_2(y) < -1$$

olması durumunda salınım sonuçları elde etme problemi şu anda açıktır.

- (4.0.1) denkleminin dağılımlı sapma argümentleri ihtiva etmesi durumunda ortaya çıkan

$$\left(v(y)h'''(y) \right)' + \int_a^b p(y, \xi) f(\psi(\zeta(y, \xi))) d\xi = 0, \quad y \geq y_0 > 0, \quad \xi \in [a, b]$$

diferensiyel denklemi için yeni salınım sonuçları elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Agarwal, R.P., Grace, S. R. ve O'Regan, D., 2000. Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Agarwal, R.P., Grace, S. R. ve O'Regan, D., 2002. Oscillation Theory for Second Order Linear, Half-Linear, Superlinear and Sublinear Dynamic Equations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Agarwal, R.P., Grace, S. R. ve O'Regan, D., 2003. Oscillation Theory for Second Order Dynamic Equations. Taylor & Francis, London.
- Agarwal, R.P., Bohner, M. ve Li, W.-T., 2004. Nonoscillation and Oscillation Theory for Functional Differential Equations. Marcel Dekker Inc., New York.
- Agarwal, R.P., Grace, S. R. ve Manojlovic, J. V., 2005. Oscillation criteria for certain fourth order nonlinear functional differential equations. Mathematical and Computer Modelling. **40(1-2)** 163–187
- Agarwal, R.P., Grace, S. R. ve Wong, P. J. Y., 2005. On the bounded oscillation of certain fourth order functional differential equations. Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **5** 215–227
- Agarwal, R.P., Grace, S.R. ve Hassan, T.S., 2015a. Oscillation criteria for higher order nonlinear functional dynamic equations with mixed nonlinearities. Commun. Appl. Anal., **19**, 369–402.
- Agarwal, R.P., Bohner, M. ve Li, T., 2015b. Oscillatory behavior of second-order half-linear damped dynamic equations, Appl. Math. Comput., **254**, 408–418.
- Agarwal, R.P., Bazighifan, O. ve Ragusa, M. A., 2021. Nonlinear neutral delay differential equations of fourth-order: oscillation of solutions, Entropy, **23**, 129.
- Al-Hamouri, R. ve Zein, A., 2014. Oscillation criteria for certain even order neutral delay differential equations. Int. J. Differ. Equ., **2014**, Article ID 437278, 5 pages.
- Al-Hamouri, R. ve Zein, A., 2014. Oscillation criteria for certain even order neutral delay differential equations. Int. J. Differ. Equ., **2014**, Article ID 437278, 5 pages.
- Alatwi, M., Moaaz, O., Albalawi, W., Masood, F. ve El-Metwally, H. 2021. Asymptotic and oscillatory analysis of fourth-order nonlinear differential equations with p-Laplacian-like operators and neutral delay arguments. Mathematics, **12(3)**, 470.
- Almutairi, A., Bazighifan, O., Almarri, B., Aiyashi, M. A. ve Nonlaopon, K. 2021. Oscillation criteria of solutions of fourth-order neutral differential equations. Fractal and Fractional, **5(4)**, 155.
- Alnafisah, Y., Masood, F., Muhib, A. ve Moaaz, O. 2023. Improved oscillation theorems for even-order quasi-linear neutral differential equations. Symmetry, **15(5)**, 1128.

- Althubiti, S., Bazighifan, O., Alotaibi, H., ve Awrejcewicz, J., 2021. New oscillation criteria for neutral delay differential equations of fourth-order. *Symmetry*, **2021**, 13, 1277.
- Baculiková, B. ve Džurina, J., 2013. On certain inequalities and their applications in the oscillation theory. *Adv. Differ. Equ.*, **2013**, Article ID: 165.
- Bazighifan, O., 2017. Oscillatory behavior of higher-order delay differential equations. *General Letters in Mathematics*, **2(3)**, 105-110.
- Bazighifan, O., Elabbasy, E. M. ve Moaaz, O., 2019. Oscillation of higher-order differential equations with distributed delay. *J. Inequal. Appl.*, **2019**, 2019:55.
- Bazighifan, O., Ahmad, H. ve Yao, S., 2020. New oscillation criteria for advanced differential equations of fourth order. *Mathematics*, **2020**, 8, 228.
- Bazighifan, O., Cesarano, C., 2020. A Philos-type oscillation criteria for fourth-order neutral differential equations. *Symmetry*, **2020**, 12(3), 379.
- Bazighifan, O., Minhos, F., Moaaz, O., 2020. Sufficient conditions for oscillation of fourth-order neutral differential equations with distributed deviating arguments. *Axioms*, **2020**, 9(2), 39.
- Bazighifan, O., Al-Ghafri, K. S., Al-Kandari, M., Ghanim, F. ve Mofarreh, F., 2022. Half-linear differential equations of fourth order: oscillation criteria of solutions. *Advances in Continuous and Discrete Models*, **2022**, Article ID 24, 12 pages.
- Cushing, J. M., 1977. On the oscillatory nature of general predator-prey models with time delays. *Nonlinear Analysis*, **1**, 583-592.
- Dharuman, C., Prabakaran, N., Thandapani, E. ve Tunç, E., 2023. Oscillatory behavior of even-order functional differential equations with a superlinear neutral term. *Palestine Journal of Mathematics*, **12(1)**, 722-731.
- Došlý, O. ve Řehák, P., 2005. *Half-linear Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam.
- El'sgol'ts, L. E. ve Norkin, S. B., 1973. *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*. Mathematics in Science and Engineering, **105**, New York.
- Erbe, L., Kong, Q. ve Zhang, B.G., 1995. *Oscillation Theory for Functional Differential Equations*. Marcel Dekker Inc., New York.
- Fite, W. B., 1921. Properties of the solutions of certain functional-differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **22**, 311-319.
- Gao, S., Chen, Z. ve Shi, W., 2017. On the oscillation of even order neutral delay differential equations. *Math. Aeterna*, **7**, No. 2, 177-184.
- Grace, S. R., Agarwal, R. P. ve Graef, J. R., 2009. Oscillation theorems for fourth order functional differential equations. *J. Appl. Math. Comput.*, **30**, 75-88.
- Grace, S.R., Alzabut, J. ve Abodayeh, K., 2021. Oscillation theorems for higher order dynamic equations with superlinear neutral term. *Mathematics*, **6(6)**, 5493-5501.
- Grace, S.R., Agarwal, R. P. ve Wang, C., 2021. New oscillation results for non-canonical higher order nonlinear neutral dynamic equations. *Bol. Soc. Mat. Mex.*, **27**, Article ID: 65, 33 pages

- Grace, S.R., Abbas, Y. ve Sajid, M., 2021. Oscillation of nonlinear even order differential equations with mixed neutral terms. *Math Meth Appl Sci.*, **45**, 1063–1071.
- Grace, S.R. ve Chhatria, 2022. Oscillation of nonlinear even order differential equations with mixed neutral terms. *Math Meth Appl Sci.*, **46**, 2373–2388.
- Graef, J. R., Özdemir, O., Kaymaz, A. ve Tunç, E., 2021. Oscillation of damped second-order linear mixed neutral differential equations. *Monatshefte Für Mathematik*, **194(1)**, 85–104.
- Györi, I. ve Ladas, G., 1991. *Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications*. Clarendon Press, Oxford.
- Hale, J. K. ve Verduyn Lunel, S. M., 1993. *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Science Business Media, New York.
- Hardy, G.H., Littlewood, J.E. ve Polya, G., 1988. *Inequalities*. Reprint of the 1952 edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- Jadlovská, I., Džrina, J., Graef, J. R. ve Grace S. R., 2022. Sharp oscillation theorem for fourth-order linear delay differential equations, *J. Inequal. Appl.*, **2022**, 122.
- Karpuz, B., 2013. Sufficient conditions for the oscillation and asymptotic behaviour of higher-order dynamic equations of neutral type. *Appl. Math. Comput.*, **221**, 453–462.
- Kelley, V.G. ve Peterson, A.C., 2004. *The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative*. Pearson Education, Inc. Upper Saddle River, New Jersey.
- Kiguradze, I. T. 1964. On the oscillatory character of solutions of the equation $d^m u/dy^m + a(y)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$. *Mat. Sb.*, **65**, 172–187. (Russian)
- Kiguradze, I.T. ve Chanturia, T.A., 1993. *Asymptotic Properties of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations*. Kluwer Academic, Dordrecht.
- Kitamura, Y. ve Kusano, T., 1980. Oscillation of first-order nonlinear differential equations with deviating arguments. *Proc. Am. Math. Soc.*, **78**, 64–68.
- Kolmanovskii, V. ve Nosov, V. R., 1986. *Stability of Functional Differential Equations*. Academic Press, London.
- Kolmanovskii, V. ve Myshkis, A., 1999. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Koplatadze, R.G. ve Chanturiya, T.A., 1982. Oscillating and monotone solutions of first-order differential equations with deviating argument. *Differ. Uravn.*, **18(8)**, 1463–1465.
- Ladas, G., Sficas, Y.G. ve Stavroulakis, I.P., 1984. Necessary and sufficient conditions for oscillations of higher order delay differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **285**, 81–90.
- Ladde, G.S., Lakshmikantham, V. ve Zhang, B.G., 1987. *Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments*. Marcel Dekker Inc., New York.
- Li, T., Han, Z., Zhao, P. ve Sun, S., 2010. Oscillation of even-order neutral delay differential equations. *Adv. Difference Equ.*, **2010**, Article ID 184180, 9 pages.

- Li, T., Rogovchenko, Y. V. ve Zhang, C., 2015. Oscillation of fourth-order quasilinear differential equations. *Mathematica Bohemica* **140(4)**, 405-418.
- Li, T. ve Rogovchenko, Y. M., 2016. Oscillation criteria for even-order neutral differential equations. *Appl. Math.Lett.*, **61**, 35-41.
- Luo, D., 2021. On oscillation of higher-order advanced trinomial differential equations. *Advances in Continuous and Discrete Models*, **2021**, 144 pages.
- Moaaz, O., Elabbasy, E. M. ve Muhib, A., 2019. Oscillation criteria for even-order neutral differential equations with distributed deviating arguments. *Adv. Differ. Equ.*, **2019:297**, 10 pages.
- Moaaz, O., Cesarano, C. ve Muhib, A., 2020. Some new oscillation results for fourth-order neutral differential equation. *European journal of pure and applied mathematics*, **13(2)**, 185-199.
- Moaaz, O., Kumam, P. ve Bazighifan, O., 2020. On the oscillatory behavior of a class of fourth-order nonlinear differential equation. *Symmetry*, **12(4)**, 524.
- Moaaz, O., Cesarano, C. ve Almarri, B., 2023. An improved relationship between the solution and its corresponding function in fourth-order neutral differential equations and its applications. *Mathematics*, **11(7)**, 1708.
- Muhib, A., Moaaz, O., Cesarano, C. ve Askar, A. A., 2022. New conditions for testing the oscillation of fourth-order differential equations with several delays. *Symmetry*, **14**, 1068.
- Muhib, A., Moaaz, O., Cesarano, C., Askar, S. ve Alshamrani, A. M.ve Elabbasy, E. M., 2022. Neutral differential equations of fourth-order: new asymptotic properties of solutions. *Axioms*, **11(2)**, 52.
- Muhsin, W., Moaaz, O., Cesarano, C., Askar, S. S. ve Elabbasy, E. M., 2023. Delay differential equations with several sublinear neutral terms: investigation of oscillatory behavior. *Symmetry*, **15(2)**, 2105.
- Myshkis, A. D., 1972. *Linear Differential Equations with Delayed Argument*. Nauka, Moscow.
- Özdemir, O. ve Tunç, E., 2018. Asymptotic behavior and oscillation of solutions of third order neutral dynamic equations with distributed deviating arguments. *Bull. Math. Anal. Appl.*, **10(2)**, 31-52.
- Özdemir, O. ve Kılıç, A., 2022. Oscillation of second-order functional differential equations with superlinear neutral terms. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **45**, 83-99.
- Özdemir, O., 2023. Oscillation criteria for noncanonical neutral Emden-Fowler differential equations. *Quaestiones Mathematicae*, **46:8**, 1653-1668.
- Panigrahi, S. ve Basu, R., 2012. Oscillation of nonlinear neutral differential equations of fourth order with several delays. *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.*, **4**, 59-89.
- Park, C., Moaaz, O., Bazighifan, O. 2020. Oscillation results for higher order differential equations. *Axioms*, **9(1)**, 14.
- Philos, Ch.G., 1981. On the existence of nonoscillatory solutions tending to zero at ∞ for differential equations with positive delays. *Arch. Math.*, **36**, 168-178.
- Philos, Ch.G., 1984. Some comparison criteria in oscillation theory. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **36(2)**, 176-186.

- Philos, Ch.G., 1985. Oscillation and asymptotic behaviour of linear retarded differential equations of arbitrary order. *Bull. math. Soc. Sci. Math. Roum.*, **29(77)**, no:2, 355–363.
- Philos, Ch.G., 1989. Oscillation theorems for linear differential equations of second order. *Arch. Math.*, **53**, 482–492.
- Răsvan, V., 2006. Functional differential equations of lossless propagation and almost linear behavior. *IFAC Proceedings Volumes*, **39(10)**, 138–150.
- Prabaharan, N., Thandapani, E. ve Tunç, E., 2024. Oscillation results for nonlinear weakly canonical fourth-order delay differential equations via canonical transform. *Quaestiones Mathematicae*, **47(5)**, 1119–1132.
- Purushothaman, G., Suresh, K., Tunc, E. ve Thandapani, E., 2023. Oscillation criteria of fourth-order nonlinear semi-noncanonical neutral differential equations via a canonical transform. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2023**, Article ID 70, 12 pages.
- Răsvan, V., 2006. Functional differential equations of lossless propagation and almost linear behavior. *IFAC Proceedings Volumes*, **39(10)**, 138–150.
- Sturm, C., 1836. Sur les équations différentielles linéaires du second ordre. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **1**, 106–186.
- Tanaka, S., 2002. A oscillation theorem for a class of even order neutral differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **273**, 172–189.
- Thandapani, E., Padmavathi, S. ve Pinelas, S., 2014a. Oscillation criteria for even-order nonlinear neutral diferential equations of mixed taype. *Bull. Math. Anal. Appl.*, **6(1)**, 9–22.
- Thandapani, E., Padmavathi, S. ve Pinelas, S., 2014b. Oscillation criteria for odd-order nonlinear diferential equations with advanced and delayed arguments. *Electron. J. Differ. Eq.*, **2014**, No. 174, 1–13.
- Tunç, E. ve Graef, J.R., 2014. Oscillation results for second order neutral dynamic equations with distributed deviating arguments. *Dynam. Systems Appl.*, **23**, 289–303.
- Tunç, E., 2017. Oscillatory and asymptotic behavior of third-order neutral differential equations with distributed deviating arguments. *Electron. J. Differ. Eq.*, **2017**, No. 16, 1–12.
- Tunç, E. ve Özdemir, O., 2019. On the oscillation of second-order half-linear functional differential equations with mixed neutral term. *J. Taibah Univ. Sci.*, **13(1)**, 481–489.
- Tunç, E. ve Özdemir, O., 2023. Comparison theorems on the oscillation of even order nonlinear mixed neutral differential equations. *Math Meth Appl Sci.*, **46**, 631–640.
- Zafer, A., 1992. Oscillatory and nonoscillatory properties of solutions of functional differential equations and difference equations. Ph.D. Thesis, Iowa State University, Ames, Iowa.
- Zafer, A., 1998. Oscillation criteria for even order neutral differential equations. *Appl. Math. Lett.*, **11**, No. 3, 21–25.
- Zhang, C., Li, T., Agarwal, R. P. ve Bohner, M., 2012. Oscillation results for fourth-order nonlinear dynamic equations. *Applied Mathematics Letters*, **25**, 2058–2065.