



T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÖRT BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DİNİ TÜRÜNDEKİ
HELİSOİDAL HİPERYÜZEY

HAZIRLAYAN
AYÇIN GÜMÜŞOK KARAALP

DANIŞMAN
DOÇ. DR. ERHAN GÜLER

BARTIN-2020



T.C.

**BARTIN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DÖRT BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DİNİ TÜRÜNDEKİ
HELİSOİDAL HİPERYÜZEY**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN

Ayçın GÜMÜŞOK KARAALP

JÜRİ ÜYELERİ

Danışman	:	Doç. Dr. Erhan GÜLER	-	Bartın Üniversitesi
Üye	:	Doç. Dr. Ömer KİŞİ	-	Bartın Üniversitesi
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Bülent ALTUNKAYA	-	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi

BARTIN-2020

KABUL VE ONAY



BEYANNAME

Bartın Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre Doç. Dr. Erhan GÜLER danışmanlığında ve Prof. Dr. Yusuf KAYA eş danışmanlığında hazırlamış olduğum “DÖRT BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ULISSE DİNİ TÜRÜNDEKİ HELİSOİDAL HİPERYÜZEY” başlıklı yüksek lisans tezimin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

21.09.2020

Ayçın GÜMÜŞOK KARAALP

ÖNSÖZ

Beni yüksek lisans öğrencisi olarak kabul eden, tez çalışmamın her aşamasında bilgilerini, yardımlarını ve desteğini esirgemeyen değerli bilim insanı Sayın Doç. Dr. Erhan GÜLER’e (Bartın Üniversitesi), çalışmalarına verdikleri katkı ve desteklerinden dolayı eş danışmanım değerli bilim insanı Sayın Prof. Dr. Yusuf KAYA’ya (Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi), pozitif enerjisiyle motivasyonumun hep yüksek olmasını sağlayan değerli tez izleme kurulu üyesi Sayın Doç. Dr. Ömer KİŞİ’ye (Bartın Üniversitesi), jüri üyesi Sayın Dr. Öğr. Üyesi Bülent ALTUNKAYA’ya (Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi), Sayın Dr. Öğr. Üyesi Melih GÖCEN’e (Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi), ICMME–2018’de tekrar görüşme fırsatı bulduğum ve ellerinden öptüğüm lisans eğitimim süresince kendisine her derste hayran kaldığım, matematik duayeni, değerli bilim insanı Sayın Prof. Dr. Hasan Hilmi HACISALİHOĞLU’na, bu bölümde okumam için beni yönlendiren, tüm fedakârlığıyla beni destekleyen rahmetli babacığma ve tüm aileme, çalışmalarım süresince her türlü fedakârlığı gösteren, beni motive eden mesai arkadaşlarıma, bu sürece girmem hususunda beni en başından beri destekleyen, yapabileceğime sonuna kadar inanan can yoldaşım, hayat arkadaşım, değerli eşime ve biricik oğluma en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Ayçın GÜMÜŞOK KARAALP

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DÖRT BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ULISSE DİNİ TÜRÜNDEKİ HELİSOİDAL HİPERYÜZEY

Ayçın GÜMÜŞOK KARAALP

Bartın Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Erhan GÜLER

Bartın-2020, sayfa: 41

Bu yüksek lisans tezi altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde minimal yüzeyler teorisinde yapılan çalışmaların tarihi süreci ve bu süreçteki gelişmelerden bahsedilmiştir. İkinci bölümde temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında Dini helisoidal yüzeyi verilmiştir. Bu uzayda, Dini helisoidal yüzeyinin ortalama ve Gauss eğrilikleri hesaplanmıştır. Dördüncü bölümde Dini türündeki bir minimal helisoidal yüzey verilmiştir. Bu bölümde yüzeyin minimal olma şartı gösterilmiş olup Dini türündeki helisoidal yüzeyin minimal olabilmesi için gerek ve yeter koşulu sağlayan teorem elde edilmiştir. Beşinci bölümde ise dört boyutlu Öklid uzayında Dini türündeki helisoidal hiperyüzey verilmiştir. Hiperyüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği hesaplanmış ve hiperyüzeye ait eğriliklerin bazı özel bağıntıları ve simetrileri elde edilmiştir. Altıncı ve son bölümde ise sonuç ve öneriler yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: 4-boyut, Dini türündeki helisoidal hiperyüzey, Gauss dönüşümü, ortalama eğrilik, Gauss eğriliği.

Bilim Alanı Kodu: 20402

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ULISSE DINI TYPE HELICOIDAL HYPERSURFACE IN EUCLIDEAN FOUR SPACE

Ayçın GÜMÜŞOK KARAALP

Bartın University

Graduate School

Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Erhan GÜLER

Bartın-2020, pp: 41

This master thesis consists of six chapters. In the first chapter, the historical process of the studies and developments in the theory of minimal surfaces are mentioned. In the second chapter, some basic definitions and concepts are given. In the third chapter, Dini helicoidal surface in 3-dimensional Euclidean space is given. The mean and the Gaussian curvatures of Dini helicoidal surface are calculated. In the fourth chapter, a minimal helicoidal surface of Dini type is given. In this section, minimality condition of the Dini type helicoidal surface are shown in a theorem. In the fifth chapter, the helicoidal hypersurface of Dini type in the four dimensional Euclidean space is given. The Gaussian curvature and the mean curvature of the hypersurface are calculated, and special relations and symmetries of curvatures are obtained. In the sixth and last section, there are results and suggestions.

Keywords: 4-space, Dini type helicoidal hypersurface, Gauss map, mean curvature, Gaussian curvature.

Scientific Field Code: 20402

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL VE ONAY	ii
BEYANNAME.....	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
BÖLÜM 1 GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
BÖLÜM 2 TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	8
BÖLÜM 3 ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DİNİ HELİSOİDAL YÜZEYİ	18
BÖLÜM 4 DİNİ TÜRÜNDEKİ BİR MİNİMAL HELİSOİDAL YÜZEY	22
BÖLÜM 5 DÖRT BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DİNİ TÜRÜNDEKİ HELİSOİDAL HİPERYÜZEY	28
BÖLÜM 6 SONUÇ VE ÖNERİLER	34
KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ.....	40

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

I	: birinci temel form
II	: ikinci temel form
E, F, G, A, B, C	: birinci temel form katsayıları
L, M, N, P, T, V	: ikinci temel form katsayıları
e	: Gauss dönüşümü (birim normal)
K	: Gauss eğriliği
H	: ortalama eğrilik
$\gamma(u)$	: üreteç eğrisi
$\varphi(u)$	: üreteç eğrisindeki fonksiyon
$\mathbb{E}^3$	: 3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^4$	: 4-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbf{H}(u, v)$	: helisoidal yüzey
$\mathfrak{D}(u, v)$	: Dini helisoidal yüzeyi
$\mathbf{M} = \mathbf{M}(u, v, w)$	: hiperyüzey
$\mathbf{H}(u, v, w)$	: helisoidal hiperyüzey
a, b	: helisoidal hiperyüzeyin adımları
$\mathfrak{D}(u, v, w)$	: Dini türündeki helisoidal hiperyüzey

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Yüzey teori içinde yer alan ve fizik, biyoloji, mimarlık gibi bilimlerle ilgili olan minimal yüzeyler, Matematik bilimindeki diferansiyel geometrinin önemli konularından birisi olarak öne çıkmaktadır.

1744 yılında, Fransız matematikçi ve fizikçi olan Pierre Louis Moreau de Maupertius'un çalışmaları "*Doğada bir değişiklik meydana geldiğinde, bu değişiklik için gerekli eylem miktarı en ekonomik şekildedir.*" prensibine dayanmaktadır (Fomenko ve Tuzhilin, 1991).

Maupertius'un çalışmasına paralel ve bağımsız olarak, 1744 yılında İsveçli Matematikçi Leonhard Euler, gezegenlerin Güneş çevresindeki hareketinde olduğu gibi kuvvetlerin korunumu ilkesine bağlı olarak bir cismin hareketini tanımlamak için en küçük etki ilkesinin kullanılabileceğine dair kesin bir ispat elde etmiştir. Euler, evrendeki herhangi bir doğa olayına ait maksimum veya minimum bir kural bulabileceğimiz varsayımını da ortaya koymuştur. Bu varsayımı, 1743 yılında yazdığı, değişkenler hesabı üzerine ilk ders kitabı olan "*maksimum veya minimum özelliğe sahip eğrileri bulma yöntemleri*" adlı ünlü eserinin sonundaki Ek kısmında ispatlamıştır. Böylece, Euler'in 1740 yılında başladığı çalışmalarıyla 3-boyutlu Öklid uzayı olan $\mathbb{E}^3$ içindeki minimal yüzeyler teorisinin matematik bilimindeki temelleri atılmıştır.

Ayrıca, 1760 yılında Fransız Matematikçi Joseph Louis Lagrange'ın $\mathbb{E}^3$ uzayında, C^2 sınıfından diferensiyellenebilir ve $z = f(x, y)$ parametresiyle verilen yüzeylerin minimal olma özelliğini sağlayan

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0 \quad (1.1)$$

Lagrange diferansiyel denklemi ile teori önem kazanmıştır. $\mathbb{E}^3$ uzayında bir minimal yüzey, ortalama eğriliği özdeş olarak ihmal edilmiş olan regle yüzeydir. Bu Lagrange'ın 1760

yılında yapmış olduğu tanımıdır. Lagrange çalışmalarını klasik mekanik problemlerine uygulamış, Euler ve Maupertius'un sonuçlarını genelleştirmiştir.

Böylece, yüzeylerin minimal olması için gerekli koşulun (1.1) denklemini sağlaması gerektiğini ortaya koyularak minimal yüzeylere ait çalışmalar hız kazanmıştır.

Bilinen ilk minimal yüzey düzlemdir. 1740 yılında katenoid yüzeyinin (orijinal adı 'allyside' olan katenoidi, Belçikalı Fizikçi Joseph Antoine Ferdinand Plateau, katenari (catenary) eğrisinden esinlenerek katenoid (catenoid) olarak yeniden adlandırmıştır.) bir minimal yüzey olduğu Euler tarafından gösterilmiştir. Fransız Matematikçi Jean Babtiste Meusnier, 1776 yılına kadar elde edilen verilerin geometrik yorumunu yaparak bir yüzeyin minimal olmasının yüzeyin ortalama eğriliğinin sıfır olmasıyla mümkün olduğunu elde etmiş ve helisoidin bir minimal yüzey olduğunu göstermiştir.

Alman matematikçi Scherk, 1835 yılında (1.1) denkleminin $f(x, y) = g(x) + h(y)$ formundaki analitik fonksiyonlar için çözümünü gerçekleştirmiş ve Scherk minimal yüzeyini elde etmiştir. Scherk, tüm minimal regle yüzeyleri belirlemeye çalışmış fakat bu problemi 1842 yılında Belçikalı Matematikçi Eugene Charles Catalan çözmüş ve helisoid yüzeyinin minimal olan tek regle yüzey olduğunu göstermiştir. Catalan'ın 1855 yılında keşfettiği Catalan minimal yüzeyi $\mathbb{E}^3$ uzayında bir periyodik minimal yüzeydir (Nitsche, 1989).

3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ deki klasik yüzey geometride yer alan dönel yüzeyin katenoid ve minimal olan tek regle yüzeyin de sağ helisoid olduğu bilinmektedir. Fransız Matematikçi Jacques Edmond Emile Bour, 1862 yılında ilginç özelliklere sahip bu iki yüzey için kendi teoremini (Bour teoremi: *Genelleştirilmiş bir helisoid üzerindeki helislere karşılık olarak dönel yüzey üzerindeki çemberler geldiğinde, bu iki yüzey izometriktir.*) klasik yüzey teorisine kazandırmıştır (Bour, 1862). Bu genelleştirmede minimal ve aynı Gauss dönüşümüne sahip olma özellikleri genelde sağlanmaz.

Takahashi, $\mathbb{E}^3$ uzayındaki $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\Delta r = \lambda r$ koşulunu sağlayan yüzeylerin sadece minimal yüzeyler ve küreler olduğunu göstermiştir (Takahashi, 1966).

Lawson, ders notlarını birleştirdiği kitabında minimal altmanifodları vermiştir (Lawson, 1980). Do Carmo ve Dajczer, $\mathbb{E}^3$ uzayında Bour teoremini kullanarak helisoidal yüzeyler için çeşitli izometri sonuçları elde etmişlerdir (Do Carmo ve Dajczer, 1982). Chen ve Piccinni (1987) sonlu tipteki Gauss dönüşümüne sahip altmanifoldları incelemişlerdir (Chen ve Piccinni, 1987).

Ferrandez, Garay ve Lucas, $\mathbb{E}^3$ uzayında $A \in Mat(3,3)$ matrisleri için $\Delta H = AH$ koşulunu sağlayan yüzeylerin ya minimal, ya açık küre parçası, ya da dik dairesel silindir olduğunu ispatlamışlardır (Ferrandez, Garay, Lucas, 1990). Dillen, Pas ve Verstraelen, $\mathbb{E}^3$ uzayında $A \in Mat(3,3)$, $B \in Mat(3,1)$ matrisler olmak üzere, $\Delta r = Ar + B$ koşulunu sağlayan yüzeylerin; minimal yüzeyler, küreler ve dik dairesel silindirler olduğunu göstermişlerdir (Dillen, Pas, Verstraelen, 1990). Chen ve Ishikawa, sonlu tipten bazı dönel yüzeyleri sınıflandırmışlardır (Chen ve Ishikawa, 1993). Cheng ve Wan, 4-boyutlu uzayda sabit ortalama eğrilige sahip olan tam hiperyüzeyleri ele almışlardır. (Cheng ve Wan, 1994).

2000 yılında Japon Matematikçi Toshihiko Ikawa, makalesinde 3-boyutlu Öklid uzayında Bour teoreminin sağlandığını ve yüzey çiftinin aynı Gauss dönüşümüne sahip olduklarını göstermiştir (Ikawa, 2000). Ikawa daha sonra ise $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında Bour teoremini çalışmıştır (Ikawa, 2001).

Choi ve Kim, minimal helisoid regle yüzeyinin birinci tip noktasal 1-türünde Gauss dönüşümünü çalışmışlardır (Choi ve Kim, 2001). Chen, Choi, Kim, $\mathbb{E}^3$ uzayında 1-tipinde noktasal Gauss dönüşümüne sahip dönel yüzeyleri çalışmışlardır. (Chen, Choi, Kim, 2005).

Güler ve Vanlı, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike eksenli helisoidal yüzeylere karşılık gelen dönel yüzeyleri vermişlerdir (Güler ve Vanlı, 2006). Ayrıca, Güler $\mathbb{E}_1^3$ uzayında lightlike eksenli helisoidal yüzeyler için Bour teoremini çalışmıştır (Güler, 2007).

Güler, Yaylı, Hacısalihoğlu, $\mathbb{E}^3$ uzayında helisoidal yüzeyin eğrilikleri ile Laplace–Beltrami operatörü arasındaki bazı bağıntılar üzerine çalışmışlar ve Gauss dönüşümünü kullanarak Bour teoremini vermişlerdir (Güler, Yaylı, Hacısalihoğlu, 2010).

Chen, 1970 yılı sonlarında başladığı toplam ortalama eğrilik ve sonlu tipten altmanifoldlara ait çalışmalarını bir kitapta toplamıştır (Chen, 2014).

Senoussi ve Bekkar, $\mathbb{E}^3$ uzayında $A \in \text{Mat}(3,3)$ matrisleri için $j = I, II, III$ olmak üzere $\Delta^j r = Ar$ koşulunu sağlayan helisoidal yüzeyleri elde etmişlerdir (Senoussi ve Bekkar, 2015).

Moore, 4-boyutlu uzayda dönel yüzeyler üzerine çalışmıştır (Moore, 1919). Moore ayrıca, 4-boyutlu uzayda sabit ortalama eğriliğe sahip olan dönel yüzeyler üzerine incelemelerde bulunmuştur (Moore, 1920).

Verstraelen, Walrave, Yaprak, Öklid uzayında minimal öteleme yüzeylerini çalışmışlardır (Verstraelen, Walrave, Yaprak, 1994). Magid, Scharlach, Vrancken, $\mathbb{R}^4$ uzayında afin umbilik yüzeyleri incelemişlerdir (Magid, Scharlach, Vrancken, 1995). Hasanis ve Vlachos, $\mathbb{E}^4$ uzayında harmonik ortalama eğrilik vektör alanlı hiperyüzeyleri incelemişlerdir (Hasanis ve Vlachos, 1995). Arslan, Deszcz, Yaprak, Weyl pseudosimetrik hiperyüzeyler üzerinde çalışmışlardır (Arslan, Deszcz, Yaprak, 1997).

Yoon, $\mathbb{E}^4$ uzayında sonlu tipten Gauss dönüşümüne sahip olan dönel yüzeyleri vermiştir (Yoon, 2001). Scharlach, $\mathbb{R}^4$ uzayında afin dönel yüzeyler ve hiperyüzeyler için incelemeler yapmıştır (Scharlach, 2007). Arvanitoyeorgos, Kaimakamis, Magid, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında $\Delta H = \alpha H$ koşulunu sağlayan Lorentz hiperyüzeyleri elde etmişlerdir (Arvanitoyeorgos, Kaimakamis, Magid, 2009). Dursun, Lorentz- Minkowski uzayında noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümlü hiperyüzeyler üzerine çalışmalarda bulunmuştur (Dursun, 2009).

Dursun ve Turgay, $\mathbb{E}^4$ uzayında minimal and pseudo-umbilik dönel yüzeyleri çalışmışlardır. (Dursun ve Turgay, 2013). Kim ve Turgay, L_1 -noktasal -tipinde Gauss dönüşümlü yüzeyleri $\mathbb{E}^4$ uzayında vermişlerdir. (Kim ve Turgay, 2013). Arslan, Bulca, Milousheva, $\mathbb{E}^4$ uzayında noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümlü meridyen yüzeyleri incelemişlerdir. (Arslan, Bulca, Milousheva 2014). Ganchev ve Milousheva, $\mathbb{E}_1^4$ 4-boyutlu Minkowski uzayında genel dönel yüzeyleri çalışmışlardır (Ganchev ve Milousheva, 2014). Kahraman Aksoyak ve Yaylı, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında Boost invariant yüzeyler için noktasal 1-tipli Gauss dönüşümünü vermişlerdir (Kahraman Aksoyak ve Yaylı, 2014). Kahraman Aksoyak ve Yaylı, pseudo-Öklidyen $\mathbb{E}_2^4$

uzayında genel dönel yüzeyler için noktasal 1-tipli Gauss dönüşümünü incelemişlerdir (Kahraman Aksoyak ve Yaylı, 2015).

Güler, Magid, Yaylı, 4-boyutlu   klid uzayında helisoidal hiperyüzeyi tanımlamı lar ve hiperyüzeyin Laplace-Beltrami operatörü üzerine  alı mı lardır. (Güler, Magid, Yaylı, 2016). Moruz ve Munteanu, 4-boyutlu   klid uzayında minimal öteleme hiperyüzeyleri vermişlerdir (Moruz ve Munteanu, 2016).

Güler, Hacısalihoğlu, Kim, 4-boyutlu   klid uzayında dönel hiperyüzeyler üzerinde, Gauss dönüşümü ve    nc  Laplace-Beltrami operatörünü  alı mı lardır. (Güler, Hacısalihoğlu, Kim, 2018). Güler ve Turgay, 4-boyutlu   klid uzayında dönel hiperyüzeyler için Cheng–Yau operatörünü vermişlerdir (Güler ve Turgay, 2019). Güler ve Kişi, 4-boyutlu Minkowski uzayında timelike eksene sahip olan Dini türündeki helisoidal hiperyüzeyler üzerine çalışmalarda bulunmuşlardır. (Güler ve Kişi, 2019).

Güler, $\mathbb{E}_1^4$ 4-boyutlu Minkowski uzayında helisoidal hiperyüzeyleri tanımlamış ve birinci temel forma bağlı olarak, 4×4 mertebeli bir A matrisi için $\Delta^t H = AH$ koşulunu sağlayan timelike eksenli helisoidal hiperyüzeyin minimal olma durumunu incelemiştir. (Güler, 2020)

Bu tezde, İtalyan Matematikçi Ulisse Dini (1845-1918)’nin 3-boyutlu   klid uzayında verdiği Dini helisoidal yüzeyi (Dini, 1871 ve Dini, 1953) ele alınmıştır. Sonrasında ise özgün bir çalışma olan 4-boyutlu   klid uzayında Dini türündeki helisoidal hiperyüzey verilmiştir (Güler, G m   k Karaalp, 2019).

Dini’nin bilimsel çalışmalarında eşit derecede ve yoğun üretim olduğu iki dönemden ilkinde dikkat çekilebilir: Dini bu dönemde, infinitesimal (sonsuz küçük) geometri ile ilgiliydi ve Fransa’da Liouville ve Meusnier, İtalya’da Beltrami tarafından çalışılmakta olan bazı yüzeylerin özelliklerine ilişkin çalışmalara odaklanmı tı. Bunlar:

1. *İki asli eğrilik yarıçap oranının veya çarpımının sabit kaldığı yüzeyleri* (Dini’nin adının verildiği helisoidal yüzeyler);
2. *Asli e rili in yarıçaplarından birinin diğerinin fonksiyonu olduğu regle yüzeyleri*;

3. Beltrami tarafından önerilen ve bütünüyle Dini tarafından çözülen problem olan *birinin jeodezik eğrilerinin diğerinin jeodezik eğrilerine karşılık gelecek şekilde bir yüzeyi diğer yüzeyde nokta-nokta temsil etme* sorundur.

Dini'nin bir yüzeyin diğerinde uyumlu temsiline ilişkin çalışması, Beltrami tarafından sunulan diferansiyel parametrelere ve genel olarak, kısmi türevli diferensiyel denklemlere benzemektedir.

Dini'nin Matematik bilimine kazandırmış olduğu en önemli eserleri diyebileceğimiz bazı çalışmaları aşağıdadır:

1. *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali* (Pisa, 1878), Almanca'ya çevirenler J. Lüroth ve A. Schepp: *Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Grösse* (Leipzig, 1892),
2. *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale* (Pisa, 1880),
3. *Lezioni di analisi infinitesimale*, 2 vols. (Pisa, 1907–1915),
4. *Lezioni sulla teoria delle funzioni sferiche e delle funzioni di Bessel* (Pisa, 1912).

Ayrıca Dini'nin *Annali di matematica pura ed applicata*, *Atti della Reale Accademia dei Lincei*, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, *Giornale di matematiche*, ve *Rendiconti del circolo matematico di Palermo* dergilerinde çeşitli çalışmalarının olduğu makaleler bulunmaktadır.

“*Alcuni teoremi sulle funzioni di una variabile complessa*” adlı çalışması *Collectanea mathematica in memoriam Dominici Chelini* (Milan, 1881), 258–276 olarak yayımlanmıştır.

Gino Loria tarafından 62 başlıkta yazılmış Dini'nin hayatı ve çalışmalarının olduğu eser: “*Gli scienziati italiani dall'inizio del medio evo ai nostri giorni*” in *Repertorio...* editore Aldo Mieli, I, pt.1 (Rome, 1921) 137–150.

Dini'nin öğrencisi Luigi Bianchi'nin yazdığı “*Commemorazione del socio Ulisse Dini*,” Atti della Reale Accademia dei Lincei, 28(1919), 154–163 adlı çalışması ve Enciclopedia Treccani, XII, 909 ile belirlenen bir makale bulunmaktadır.

Ayrıca, W.B. Ford tarafından kaleme alınan Dini'nin kısa hayat hikayesi ve yaptığı eserler “*A Brief Account of the Life and Work of the Late Professor Ulisse Dini*,” Bulletin of the American Mathematical Society, 26 (1920), 173–177 adlı çalışmada bulunmaktadır.

Dini'nin ölümünden yıllar sonra bazı önemli çalışmaları İtalyanca olarak kitaplar haline getirilmiştir (Dini, 1953, 1954, 1955, 1959/1, 1959/2).

Bu tezin birinci bölümünde, yüzey ve hiperyüzey teorisindeki tarihsel sürece kısaca değinilmiş ve yapılan çalışmaların bazılarına özet olarak yer verilmiştir.

İkinci bölüm, temel tanım ve kavramlara ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde ise 3-boyutlu Öklid uzayında Dini'nin helisoidal yüzeyi verilmiştir. Dini helisoidal yüzeyinin ortalama ve Gauss eğrilikleri hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde Dini türündeki bir minimal helisoidal yüzey verilmiştir. Dini türündeki helisoidal yüzeyin minimal olabilmesi için gerek ve yeter koşulu sağlayan teorem ispat edilmiştir.

Beşinci ve son bölümde dört boyutlu Öklid uzayında Dini türündeki helisoidal hiperyüzey tanımlanmıştır. Hiperyüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği hesaplanmıştır. Ayrıca, hiperyüzeyin eğriliklerine ait bazı özel bağıntı ve simetriler elde edilmiştir.

Altıncı ve son bölümde, sonuç ve öneriler verilmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez için gerekli olan temel tanım, teorem, vb. kavramlara yer verilmiştir.

2.1 Tanım (Skalar çarpım uzayı)

V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g: V \times V \longrightarrow V$$

dönüşümü bilinear, simetrik ve nondejenere ise g ye V üzerinde bir *skalar çarpım*, bu durumda V vektör uzayına da bir *skalar çarpım uzayı* denir.

2.2 Tanım (Simetrik bilinear formun indeksi)

V bir skalar çarpım uzayı, W da üzerindeki skalar çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu altuzayı olsun. Bu durumda W nın boyutuna g skalar çarpımının *indeksi* denir. g skalar çarpımının indeksi v ise $0 \leq v \leq \text{boy}V$ olur. Ayrıca V skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır.

2.3 Tanım (Bir vektörün normu)

V skalar çarpımlı bir uzay ve $v \in V$ olsun.

$$\|v\| = |g(v, v)|^{1/2}$$

eşitliği ile tanımlı $\|v\|$ reel sayısına v vektörünün *normu* denir. Normu 1 olan vektöre de *birim vektör* denir.

2.4 Tanım (Skalar çarpım)

3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de iki vektör $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere bu iki vektörün skalar çarpımı

$$\begin{aligned}\langle ., . \rangle: \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\longrightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3\end{aligned}$$

biçimindedir. 4-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^4$ de iki vektör $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ olmak üzere bu iki vektörün skalar çarpımı

$$\begin{aligned}\langle ., . \rangle: \mathbb{E}^4 \times \mathbb{E}^4 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\longrightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + v_4 w_4\end{aligned}$$

ile tanımlanır. Eğer $\vec{v} = \vec{w}$ ise

$$\|v\| = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle^{1/2}$$

eşitliği ile tanımlı $\|v\|$ reel sayısına, v vektörünün Öklid anlamında normu denir. Normu 1 olan vektöre de birim vektör denir.

2.5 Tanım (Riemann hiperyüzeyi)

n -boyutlu bir Riemann manifoldunun $(n - 1)$ -boyutlu bir $\bar{M}$ Riemann altmanifolduna M nin bir *Riemann hiperyüzeyi* denir.

2.6 Tanım (Şekil operatörü)

M nin bir Riemann hiperyüzeyi $\bar{M}$ ve $\bar{M}$ nin birim normal vektör alanı N olsun. Her $V, W \in \chi(\bar{M})$ için

$$g(S(V), W) = g(II(V, W), N)$$

şeklindeki (1,1)-tipinden tensör alanı S ye $\bar{M}$ nin N den elde edilen *şekil operatörü* denir. Diğer bir deyişle, S şekil operatörü $\bar{M}$ nin her p noktasında

$$S: T_p(\bar{M}) \longrightarrow T_p(\bar{M})$$

bir lineer operatördür.

2.1 Teorem M nin bir Riemann hiperyüzeyi $\bar{M}$ ve S , $\bar{M}$ nin normalı olan N den elde edilen şekil operatörü olsun. Bu durumda $V \in \chi(\bar{M})$ için

$$S(V) = -D_V N$$

olur. Ayrıca, S şekil operatörü self-adjointtir.

M nin bir Riemann hiperyüzeyi $\bar{M}$ olsun. $\bar{M}$ nin N normalinden elde edilen şekil operatörü S olmak üzere, her $V, W \in \chi(\bar{M})$ için

$$II(V, W) = \varepsilon g(S(V), W)N$$

ile belirlidir. Burada $\varepsilon = g(N, N)$ dir. Riemann hiperyüzeyleri için Gauss Denklemi; her $V, W \in \chi(\bar{M})$ olmak üzere

$$D_V W = \bar{D}_V W + \varepsilon g(S(V), W)N$$

şeklinde verilir.

2.7 Tanım (Vektörel Çarpım)

3-boyutlu Öklid uzayında iki vektör $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_3 w_2 - v_2 w_3, v_1 w_3 - v_3 w_1, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

vektörüne $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ nin *vektörel çarpımı* (veya dış çarpımı) denir. 4-boyutlu Öklid uzayında ise üç vektör $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w} = & (u_2v_3w_4 - u_2v_4w_3 - u_3v_2w_4 + u_3v_4w_2 + u_4v_2w_3 - u_4v_3w_2, \\ & -u_1v_3w_4 + u_1v_4w_3 + u_3v_1w_4 - u_3v_4w_1 - u_4v_1w_3 + u_4v_3w_1, \\ & u_1v_1w_4 - u_1v_4w_2 - u_2v_1w_4 + u_2v_4w_1 + u_4v_1w_2 - u_4v_2w_1, \\ & -u_1v_2w_3 + u_1v_3w_2 + u_2v_1w_3 - u_2v_3w_1 - u_3v_1w_2 + u_3v_2w_1)\end{aligned}$$

vektörüne $\vec{u}$, $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ nin *üçlü vektörel çarpımı* (veya dış çarpımı) denir.

2.8 Tanım (I. Temel form)

M manifoldu olarak 4-boyutlu Öklid uzayını ve $\bar{M}$ hiperyüzeyi olarak da (U, φ) parametrizasyonu ile verilen

$$\begin{aligned}\varphi: U \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (u, v, w) & \longrightarrow \varphi(u, v, w) = (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w), \varphi_4(u, v, w))\end{aligned}$$

$\varphi(U)$ biçimindeki hiperyüzeyini gözönüne alalım. $\left\{\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right), \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)\right\}$ lineer bağımsız olmak üzere yüzeyin vektör alanlarının bir bazı $\left\{\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right), \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)\right\}$ olur. Kısalık için $\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$ ifadesini φ_u ile göstereceğiz. Şimdi hiperyüzeyin I. temel formunu hesaplayalım. φ nin tam diferansiyeli

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv + \frac{\partial \varphi}{\partial w} dw$$

olarak bulunur. Buradan, birinci temel form

$$I = \langle d\varphi, d\varphi \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \rangle (du)^2 + \langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \rangle (dv)^2 + \langle \frac{\partial \varphi}{\partial w}, \frac{\partial \varphi}{\partial w} \rangle (dw)^2 \\ &+ 2 \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \rangle dudv + 2 \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial w} \rangle dudw + 2 \langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial w} \rangle dvdw \\ &= E(du)^2 + G(dv)^2 + C(dw)^2 + 2Fdudv + 2Adudw + 2Bdvdw \end{aligned}$$

ile belirlidir.

2.9 Tanım (II. Temel form)

Katsayıları

$$\begin{aligned} L &= \langle \varphi_{uu}, e \rangle, \quad M = \langle \varphi_{uv}, e \rangle, \quad N = \langle \varphi_{vv}, e \rangle \\ P &= \langle \varphi_{uw}, e \rangle, \quad T = \langle \varphi_{vw}, e \rangle, \quad V = \langle \varphi_{ww}, e \rangle \end{aligned}$$

olan ve

$$II = L(du)^2 + N(dv)^2 + V(dw)^2 + 2Mdudv + 2Pdudw + 2Tdvdw$$

ile belirli olan bu eşitliğe hiperyüzeyin *ikinci temel formu* denir. Buradaki

$$e = \frac{\varphi_u \times \varphi_v \times \varphi_w}{\|\varphi_u \times \varphi_v \times \varphi_w\|}$$

eşitliğine

$$\varphi(u, v, w) = (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w), \varphi_4(u, v, w))$$

hiperyüzeyinin *Gauss dönüşümü* (veya *birim normali*) denir.

2.10 Tanım (Gauss Eğriliği)

3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de bir yüzey $\bar{M}$ ve $\bar{M}$ nin şekil operatörüne karşılık gelen matris $S = I^{-1}II$ olsun. $p \in \bar{M}$ için

$$K(p) = \det(S_p) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (2.1)$$

ifadesine, $\bar{M}$ yüzeyinin p noktasındaki *Gauss eğriliği* ve $K: \bar{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\bar{M}$ yüzeyinin *Gauss eğrilik fonksiyonu* denir.

4-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^4$ de bir hiperyüzey $\bar{M}$ ve $\bar{M}$ nin şekil operatörüne karşılık gelen matris $S = I^{-1}II$ olsun. $p \in \bar{M}$ için

$$K(p) = \det(S_p) = \frac{(LN - M^2)V + 2MPT - P^2N - T^2L}{(EG - F^2)C + 2ABF - A^2G - B^2E} \quad (2.2)$$

eşitliğine, $\bar{M}$ yüzeyinin p noktasındaki Gauss eğriliği ve $K: \bar{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\bar{M}$ hiperyüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu denir.

2.11 Tanım (Ortalama eğrilik)

3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de bir yüzey $\bar{M}$ ve $\bar{M}$ nin şekil operatörüne karşılık gelen matris $S = I^{-1}II$ olsun. $p \in \bar{M}$ için

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(S_p) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \quad (2.3)$$

ifadesine $\bar{M}$ yüzeyinin p noktasındaki *ortalama eğriliği* ve $H: \bar{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\bar{M}$ yüzeyinin *ortalama eğrilik fonksiyonu* denir. $H = 0$ olan yüzeye *minimal yüzey* denir.

4-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^4$ de bir hiperyüzey $\bar{M}$ ve $\bar{M}$ nin şekil operatörüne karşılık gelen matris S olsun. $p \in \bar{M}$ için

$$H(p) = \frac{1}{3} iz(S_p) = \frac{\left\{ \begin{aligned} &(EN + GL - 2FM)C + (EG - F^2)V - A^2N - B^2L \\ &- 2(APG + BTE - ABM - ATF - BPF) \end{aligned} \right\}}{3[(EG - F^2)C + 2ABF - A^2G - B^2E]} \quad (2.4)$$

eşitliğine, $\bar{M}$ hiperyüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriliği ve $H: \bar{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\bar{M}$ hiperyüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu denir. $H = 0$ olan hiperyüzeye minimal hiperyüzey denir.

2.12 Tanım (Dönel yüzey)

$I \subset \mathbb{R}$ açık aralığı için $\mathbb{E}^3$ deki bir Π düzleminin içindeki bir eğri $\gamma: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \Pi$ ve bu düzlemde γ eğrisini kesmeyen bir doğru ℓ olsun. γ eğrisinin ℓ doğrusu etrafında dönmesi ile oluşan yüzeye *dönel yüzey* denir. ℓ doğrusuna dönel yüzeyin *ekseni*, γ eğrisine de *üreteç eğrisi* denir. Yani, bir düzlem eğrisinin, kendini kesmeyen bir doğru (dönme eksenini) etrafında kaymadan dönmesi ile oluşan yüzeye dönel yüzey denir. Dönme eksenini z olarak alınırsa, u eksenden uzaklığı, v boylamı verilen nokta ve eksenden geçen düzlemle xoz düzlemi arasındaki açıyı göstermek üzere, yüzeyin bir noktasının koordinatları

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \varphi(u)$$

olur. $v = \text{sabit}$ parametrik eğrileri meridyen çizgileri veya eksenden geçen düzlemle yüzeyin arakesitidir. $u = \text{sabit}$ eğrileri paraleller veya eksene dik olan düzlemlerle yüzeyin arakesitleridir.

2.13 Tanım (Dönel hiperyüzey)

$I \subset \mathbb{R}$ açık aralığı için $\mathbb{E}^4$ deki bir Π düzleminin içindeki bir eğri $\gamma: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \Pi$ ve bu düzlemde γ eğrisini kesmeyen bir doğru ℓ olsun. γ eğrisinin ℓ doğrusu etrafında dönmesi ile oluşan hiperyüzeye *dönel hiperyüzey* denir. ℓ doğrusuna dönel hiperyüzeyin *ekseni*, γ eğrisine de *üreteç eğrisi* denir. Yani, bir düzlem eğrisinin, kendini kesmeyen bir doğru (dönme eksenini) etrafında kaymadan dönmesi ile oluşan hiperyüzeye *dönel hiperyüzey* denir.

2.14 Tanım (Helisoidal Yüzey)

$I \subset \mathbb{R}$ açık aralığı için $\mathbb{E}^3$ deki bir Π düzleminin içindeki bir eğri $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \Pi$ ve bu düzlemde γ eğrisini kesmeyen bir doğru ℓ olsun. γ eğrisi ℓ doğrusuna paralel olarak yer değiştirdiğinde ve aynı anda ℓ doğrusu etrafında yer değiştirme hızı ile dönme hızı orantılı olacak şekilde dönerken oluşan yüzeye *helisoidal yüzey* denir. Yani, sabit bir eksen etrafında dönen ve eksen doğrultusu boyunca, dönmenin açısal hızı ile orantılı bir hızla kayan bir eğrinin meydana getirdiği yüzeye genelleştirilmiş helisoid denir. Genelleştirilmiş helisoidin adımını a ile gösterilecektir. $a = 0$ ise helisoidal yüzey dönel yüzey halini alır. Eksenden geçen düzlem kesitlere meridyenler denir. Eğriyi düzlem kabul etmekle genellikle hiçbir şey kaybedilmez ve yüzey bir meridyenin helisoidal hareketi ile meydana getirilebilir. z dönme eksenini, u bir noktanın eksenden uzaklığı ve v de bu noktadan geçen meridyen düzlemi ile xoz düzlemi arasındaki açı olsun. O zaman $v = 0$ meridyeni $z = \varphi(u)$ formülüyle verilirse, yüzey üzerinde herhangi bir noktanın koordinatları

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \varphi(u) + av$$

olur. Burada, a sabittir ve $\forall b \in \mathbb{R}$ için $2\pi b = a$ ifadesine helisoidal hareketin *adımı* denir. Yalnızca, $a = 0$ olduğunda (dönel yüzey hali) ya da $\varphi(u) = \text{sabit}$ olduğunda (dik helisoid hali) parametrik eğriler birbirine diktirler. $u = \text{sabit}$ parametre eğrileri helislerdir. Eğer, $a > 0$ ise yüzeye sağ dairesel helisoid, $a < 0$ ise sol dairesel helisoid denir.

2.15 Tanım (Helisoidal hiperyüzey)

$I \subset \mathbb{R}$ açık aralığı için $\mathbb{E}^4$ deki bir Π düzleminin içindeki bir eğri $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \Pi$ ve bu düzlemde üreteç eğrisi γ , ℓ dönel hiperyüzeyin eksenini etrafında döndüğünde, eş zamanlı olarak ℓ eksenine dik olan paralel çizgileri yerleştirir. Böylece yer değiştirme hızı, dönme hızı ile orantılı olur. Sonuç olarak, adımını $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve eksenini ℓ olan hiperyüzeye *helisoidal hiperyüzey* denir. ℓ ekseninin $(0,0,0,1)^t$ vektörü tarafından üretildiğini (gerildiğini) varsayarak bu vektörün sabitlediği ortogonal matris $v, w \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$Z = (v, w) = \begin{pmatrix} \cos v \cos w & -\sin v & -\cos v \sin w & 0 \\ \sin v \cos w & \cos v & -\sin v \sin w & 0 \\ \sin w & 0 & \cos w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

olur. Ayrıca, Z matrisi

$$Z\ell = \ell, \quad Z^t Z = I_4, \quad \det Z = 1$$

eşitliklerini sağlar.

Dönme eksenini ℓ olduğunda, bu ℓ ekseninin $\mathbb{E}^4$ içinde x_4 eksenine dönüştüğü bir Öklid dönüşümü vardır. Böylece, üreteç eğrisi $\gamma(u) = (u, 0, 0, \varphi(u))$ şeklindedir. Buradaki her $u \in I$ için $\varphi(u) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilirdir. Bu nedenle, $(0, 0, 0, 1)$ vektörü tarafından elde edilen helisoidal hiperyüzey

$$\mathbf{H}(u, v, w) = Z(v, w)\gamma^t + (av + bw)\ell^t$$

olarak tanımlanır. Burada, $\forall u \in I, v, w \in [0, 2\pi], a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ile belirlidir. Daha açık bir şekilde yazılacak olursa, helisoidal hiperyüzey

$$\mathbf{H}(u, v, w) = \begin{pmatrix} u \cos v \cos w \\ u \sin v \cos w \\ u \sin w \\ \varphi(u) + av + bw \end{pmatrix}$$

formundadır.

2.1 Örnek $y = d \cosh(z/d)$ katenari eğrisinin z eksenini etrafında dönmesi ile oluşan dönel hiperyüzeye *katenoit hiperyüzeyi* denir. Buradaki d sabiti, katenari eğrisinin herhangi bir noktada z eksenine uzaklığıdır. O halde, katenoit hiperyüzeyinin parametrik denklemi

$$R(u, v, w) = \begin{pmatrix} \cos v \cos w & -\sin v & -\cos v \sin w & 0 \\ \sin v \cos w & \cos v & -\sin v \sin w & 0 \\ \sin w & 0 & \cos w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \cosh(u/d) \\ 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$$

hesaplandığında

$$R(u, v, w) = \begin{pmatrix} d \cosh(u/d) \cos v \cos w \\ d \cosh(u/d) \sin v \cos w \\ d \cosh(u/d) \sin w \\ u \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.



BÖLÜM 3

ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DİNİ HELİSOİDAL YÜZEYİ

Bu bölümde, Dini'nin 19. yüzyıl sonlarında elde ettiği helisoidal yüzeyin birinci ve ikinci temel form katsayıları hesaplanarak yüzeyin ortalama ve Gauss eğrilikleri yeniden elde edilecektir.

Dini helisoidal yüzeyi, $\forall u, v, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$\mathfrak{D}(u, v) = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u + \log\left(\tan \frac{u}{2}\right) + av \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

biçimindedir (Dini 1871). $a = 0$ olması halinde yüzey, dönel yüzey haline gelir. Yüzeyin birinci ve ikinci temel form katsayılarının hesaplanması için u ve v 'ye göre türevler alınır

$$\mathfrak{D}_u = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \frac{\cos^2 u}{\sin u} \end{pmatrix}$$

ve

$$\mathfrak{D}_v = \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ a \end{pmatrix}$$

elde edilir.

(3.1) Dini helisoidal yüzeyinin I . temel form katsayıları

$$E = \langle \mathfrak{D}_u, \mathfrak{D}_u \rangle,$$

$$F = \langle \mathfrak{D}_u, \mathfrak{D}_v \rangle,$$

$$G = \langle \mathfrak{D}_v, \mathfrak{D}_v \rangle$$

iç çarpımları kullanılarak

$$E = \cot^2 u,$$

$$F = a \cos u \cot u,$$

$$G = \sin^2 u + a^2$$

olarak elde edilir. Böylece, (3.1) Dini helisoidal yüzeyinin Gauss dönüşümü

$$e = \frac{\mathfrak{D}_u \times \mathfrak{D}_v}{\|\mathfrak{D}_u \times \mathfrak{D}_v\|}$$

formülü yardımıyla

$$e = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \begin{pmatrix} a \sin v - \cos v \cos u \\ -a \cos v - \sin v \cos u \\ \sin u \end{pmatrix}$$

olur. (3.1) Dini helisoidal yüzeyinin II . temel form katsayıları

$$L = \langle \mathfrak{D}_{uu}, e \rangle,$$

$$M = \langle \mathfrak{D}_{uv}, e \rangle,$$

$$N = \langle \mathfrak{D}_{vv}, e \rangle$$

iç çarpımları kullanılarak hesaplanır. Bu katsayıları elde edelim. u ya göre iki defa türev alarak

$$\mathfrak{D}_{uu} = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ -\cos u - \frac{\cos u}{\sin^2 u} \end{pmatrix}$$

bulunur. v ye göre iki defa türev alarak

$$\mathfrak{D}_{vv} = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Önce u , sonra da v ye göre türev alarak

$$\mathfrak{D}_{uv} = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece, ikinci türevler ve Gauss dönüşümü yardımıyla (3.1) Dini helisoidal yüzeyinin ikinci temel form katsayıları

$$L = \frac{\cot u}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

$$M = -\frac{a \cos u}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

$$N = \frac{\sin u \cos u}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

elde edilir. (3.1) Dini helisoidal yüzeyinin ortalama eğriliğini hesaplamak için birinci ve ikinci temel form katsayıları, (2.3) ortalama eğrilik formülünde yerine yazılarak, gerekli işlemler ve sadeleştirmeler yapılır. Sonuç olarak, (3.1) Dini helisoidal yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{\cot 2u}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

olarak bulunur. Ayrıca, birinci ve ikinci temel form katsayıları, (2.1) Gauss eğrilik formülünde yerine yazıldığında (3.1) Dini helisoidal yüzeyinin Gauss eğriligi

$$K = -\frac{1}{1+a^2}$$

ile belirlidir.



BÖLÜM 4

DİNİ TÜRÜNDEKİ BİR MİNİMAL HELİSOİDAL YÜZEY

Bu bölümde, Dini helisoidal yüzeyinin minimal olma koşulları ve bu koşullar yerine getirilirken elde edilen diferansiyel denklem ve çözümüne yer verilmiştir. $\forall u, v, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere, önceki bölümde (3.1) ile verilmiş olan

$$\mathfrak{D}(u, v) = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u + \log\left(\tan \frac{u}{2}\right) + av \end{pmatrix}$$

Dini helisoidal yüzeyinin ortalama eğriliği sıfır olmadığından bir minimal yüzey değildir. Bu yüzeyin üçüncü bileşeninde bulunan

$$\cos u + \log\left(\tan \frac{u}{2}\right)$$

fonksiyonu yerine $\varphi(u)$ alınarak, $\forall u, v, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$D(u, v) = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \varphi(u) + av \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

formunda yeni bir genel helisoidal yüzey elde ederiz. (4.1) helisoidal yüzeyinin minimal olma koşullarını görelim. Detaylar için bakınız (Toksöz, 2017).

Önceki bölümde yapılan hesaplamalar, (4.1) helisoidal yüzeyi için yapıldığında

$$D_u = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \varphi' \end{pmatrix}$$

olup

$$D_v = \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ a \end{pmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca, (4.1) helisoidal yüzeyinin I . temel form katsayıları

$$E = \cos^2 u + \varphi'^2,$$

$$F = a\varphi',$$

$$G = \sin^2 u + a^2$$

biçimindedir. Yüzeyin Gauss dönüşüm formülü

$$e = \frac{D_u \times D_v}{\|D_u \times D_v\|}$$

ile belirlidir. Gerekli işlemler ve sadeleştirmeler yapıldığında (4.1) helisoidal yüzeyinin Gauss dönüşümü

$$e = \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos u + (\varphi')^2 \sin^2 u + \cos^2 u \sin^2 u}} \begin{pmatrix} a \cos u \sin v - \sin u \cos v \varphi' \\ -a \cos u \cos v - \sin u \sin v \varphi' \\ \sin u \cos u \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Yüzeyin ikinci türevleri alınarak

$$D_{uu} = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \varphi'' \end{pmatrix},$$

$$D_{uv} = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{vv} = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece, (4.1) helisoidal yüzeyinin II . temel form katsayılarından

$$L = \langle D_{uu}, e \rangle$$

iç çarpımı kullanılırsa

$$L = \frac{\sin^2 u \varphi' + \cos u \sin u \varphi''}{\sqrt{a^2 \cos u + (\varphi')^2 \sin^2 u + \cos^2 u \sin^2 u}}$$

bulunur.

$$M = \langle D_{uv}, e \rangle$$

olup

$$M = -\frac{a \cos^2 u}{\sqrt{a^2 \cos u + (\varphi')^2 \sin^2 u + \cos^2 u \sin^2 u}}$$

elde edilir.

$$N = \langle D_{vv}, e \rangle$$

iç çarpımı alınarak

$$N = \frac{\sin^2 u \varphi'}{\sqrt{a^2 \cos u + (\varphi')^2 \sin^2 u + \cos^2 u \sin^2 u}}$$

bulunur. Dini türündeki (4.1) helisoidal yüzeyinin ortalama eğriliği hesaplamak için elde edilen tüm sonuçlar

$$EG - F^2 = \cos^2 u \sin^2 u + a^2 \cos^2 u + (\varphi')^2 \sin^2 u ,$$

$$EN = \frac{\cos^2 u \sin^2 u \varphi' + (\varphi')^3 \sin^2 u}{\sqrt{EG - F^2}} ,$$

$$GL = \frac{\sin^4 u \varphi' + (\varphi'') \cos u \sin^3 u + a^2 \sin^2 u \varphi' + a^2 (\varphi'') \cos u \sin u}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$FM = -\frac{\varphi' a^2 \cos^2 u}{\sqrt{EG - F^2}}$$

biçimindedir. Son değerler (2.3) formülünde yerine yazılırsa, minimal yüzey elde etmek için

$$H = 0 \quad (EN + GL - 2FM = 0)$$

olmalıdır. Bu diferansiyel denklemde gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned} & (a^2 \sin u \cos u + \cos u \sin^3 u) \varphi'' \\ & + (\cos^2 u \sin^2 u + a^2 \sin^2 u + 2a^2 \cos^2 u + \sin^4 u) \varphi' + \varphi'^3 \sin^2 u = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

elde edilir. (4.1) denkleminde, kısalık için kabul edelim ki

$$\alpha(u) = \cos^2 u \sin^2 u + a^2 \sin^2 u + 2a^2 \cos^2 u + \sin^4 u,$$

$$\beta(u) = \sin^2 u$$

ve

$$\gamma(u) = a^2 \sin u \cos u + \cos u \sin^3 u$$

olsun. Böylece, (4.1) denklemi

$$\alpha(u) \varphi' + \beta(u) \varphi'^3 + \gamma(u) \varphi'' = 0 \quad (4.2)$$

halini alır. Kabul edelim ki $\varphi' = z$ olsun. Buradan, $\varphi'' = \frac{\partial z}{\partial u} = z'$ olur. (4.2) diferansiyel denkleminde düzenlemeler yapılırsa

$$\alpha(u)z + \beta(u)z^3 + \gamma(u)z' = 0 \quad (4.3)$$

olur. (4.3) denklemini kısaca

$$\alpha z + \beta z^3 + \gamma z' = 0 \quad (4.4)$$

biçiminde yazalım. (4.4) denklemini γ ya bölersek

$$z' + \frac{\beta}{\gamma} z^3 + \frac{\alpha}{\gamma} z = 0$$

olup

$$z' + \frac{\alpha}{\gamma} z = -\frac{\beta}{\gamma} z^3 \quad (4.5)$$

halini alır. Buradan, (4.5) denkleminde $A(u) = \frac{\alpha}{\gamma}$ ve $B(u) = -\frac{\beta}{\gamma}$ olarak

$$z' + Az = Bz^3 \quad (4.6)$$

denkleminin Bernoulli diferansiyel denklemi olduğu görülür. (4.6) denklemi çözüldüğünde

$$\varphi = \pm \frac{a^2 + 1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\left| \frac{\sin^2 u}{a^2(\cos^2 u + 1) + \sin^2 u} \right|} du$$

integrali elde edilir.

Böylece, Dini türündeki minimal yüzeyin

$$D(u, v) = \left(\begin{array}{c} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \pm \frac{a^2 + 1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\left| \frac{\sin^2 u}{a^2(\cos^2 u + 1) + \sin^2 u} \right|} du + av \end{array} \right)$$

olduğu görülür.

Bu bölüm sonunda, elde edilen tüm sonuçlar ile birlikte aşağıdaki teorem ortaya çıkmaktadır:

Teorem 4.1. $\forall a, u, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için, Dini türündeki

$$D(u, v) = \begin{pmatrix} \sin u & \cos v \\ \sin u & \sin v \\ \varphi(u) + av \end{pmatrix}$$

helisoidal yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul

$$\varphi(u) = \pm \frac{a^2 + 1}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 - 1}} \ln \left[4 \left(a^2 \cos(u) + \sqrt{(a^2 - 1)^2 \cos^2(u) + (a^4 - 1)} - \cos(u) \right) \right]$$

olmasıdır.

BÖLÜM 5

DÖRT BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DİNİ TÜRÜNDEKİ HELİSOİDAL HİPERYÜZEY

Bu bölümde, (4.1) ile verilmiş olan yüzey 4-boyutlu Öklid uzayına genişletilerek oluşan Dini türündeki helisoidal hiperyüzeyin diferensiyel geometrisi incelenecektir. Tüm sonuçlar için bakınız (Güler ve Gümüşok Karaalp, 2019).

Dini türündeki helisoidal hiperyüzey, $\forall u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $0 \leq v, w \leq 2\pi$ için

$$\mathfrak{D}(u, v, w) = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \cos w \\ \sin u \sin v \cos w \\ \sin u \sin w \\ \varphi(u) + av + bw \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

olarak alınmıştır. (5.1) hiperyüzeyinin u, v ve w ya göre birinci türevleri alındığında I . temel form matrisi

$$I = \begin{pmatrix} \varphi'^2 + \cos^2 u & a\varphi' & b\varphi' \\ a\varphi' & (a^2 - \cos^2 u)\cos^2 w & ab \\ b\varphi' & ab & b^2 + \sin^2 u \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada, $\varphi = \varphi(u)$, $\varphi' = \frac{d\varphi}{du}$ olmak üzere

$$\det I = \sin^2 u [(\cos^2 u \sin^2 w + a^2)\cos^2 u - \varphi'^2 \cos^2 w],$$

ile belirlidir. (5.1) hiperyüzeyinin u, v ve w ya göre ikinci türevleri alınarak, ikinci temel form katsayıları

$$L = -\frac{\sin^2 u \cos w (\varphi'' \cos u + \varphi' \sin u)}{\sqrt{\det I}},$$

$$M = \frac{a \cos^2 u \sin u \cos w}{\sqrt{\det I}},$$

$$N = \frac{\sin^2 u \cos^2 w (b \cos u \sin w - \varphi' \sin u \cos w)}{\sqrt{\det I}},$$

$$P = \frac{b \sin u \cos^2 u \cos w}{\sqrt{\det I}},$$

$$T = -\frac{a \sin^2 u \cos u \sin w}{\sqrt{\det I}},$$

$$V = \frac{\varphi' \sin^3 u \cos w}{\sqrt{\det I}},$$

olarak bulunur. Böylece, (5.1) helisoidal hiperyüzeyinin ikinci temel form matrisi

$$II = \begin{pmatrix} -\frac{\sin^2 u \cos w (\varphi'' \cos u + \varphi' \sin u)}{\sqrt{\det I}} & \frac{a \cos^2 u \sin u \cos w}{\sqrt{\det I}} & \frac{b \sin u \cos^2 u \cos w}{\sqrt{\det I}} \\ \frac{a \cos^2 u \sin u \cos w}{\sqrt{\det I}} & \frac{\sin^2 u \cos^2 w (b \cos u \sin w - \varphi' \sin u \cos w)}{\sqrt{\det I}} & -\frac{a \sin^2 u \cos u \sin w}{\sqrt{\det I}} \\ \frac{b \sin u \cos^2 u \cos w}{\sqrt{\det I}} & -\frac{a \sin^2 u \cos u \sin w}{\sqrt{\det I}} & \frac{\varphi' \sin^3 u \cos w}{\sqrt{\det I}} \end{pmatrix}$$

ile belirlidir. Ayrıca,

$$\det II = \frac{\left\{ \begin{aligned} &\varphi'^2 \varphi'' \sin^8 u \cos u \cos^5 w - b \varphi' \varphi'' \sin^7 u \cos^2 u \sin w \cos^4 w \\ &\quad + a^2 \varphi'' \sin^6 u \cos^3 u \sin^2 w \cos w \\ &\quad + \varphi'^3 \sin^9 u \cos^5 w - b \varphi'^2 \sin^8 u \cos u \sin w \cos^4 w \\ &\quad + \left\{ a^2 \sin^7 u \cos^2 u \sin^2 w \cos w - a^2 \sin^5 u \cos^4 u \cos^3 w \right\} \varphi' \\ &\quad + b^2 \sin^5 u \cos^4 u \cos^5 w \end{aligned} \right\}}{(\det I)^{3/2}}$$

olur. (5.1) helisoidal hiperyüzeyinin Gauss dönüşümü hesaplanırsa

$$e_{\mathfrak{D}} = \frac{1}{\sqrt{\det I}} \begin{pmatrix} (\varphi' \sin u \cos v - a \cos u \sin v - b \cos u \cos v \sin w \cos w) \sin u \\ (\varphi' \sin u \sin v - a \cos u \cos v - b \cos u \sin v \sin w \cos w) \sin u \\ (\varphi' \sin u \sin w + b \cos u \cos w) \sin u \cos w \\ -\sin^2 u \cos u \cos w \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece, (5.1) helisoidal hiperyüzeyinin (2.2) formülü kullanılarak elde edilen Gauss eğriliği

$$K = \frac{\alpha_1 \varphi'^2 \varphi'' + \alpha_2 \varphi' \varphi'' + \alpha_3 \varphi'' + \alpha_4 \varphi'^3 + \alpha_5 \varphi'^2 + \alpha_6 \varphi' + \alpha_7}{(\det I)^{5/2}} \quad (5.2)$$

olarak bulunur. Buradaki α_i katsayıları, $i = 1, 2, \dots, 7$ için

$$\alpha_1 = \sin^8 u \cos u \cos^5 w,$$

$$\alpha_2 = -b \sin^7 u \cos^2 u \sin w \cos^4 w,$$

$$\alpha_3 = a^2 \sin^6 u \cos^3 u \sin^2 w \cos w,$$

$$\alpha_4 = \sin^9 u \cos^5 w,$$

$$\alpha_5 = -b \sin^8 u \cos u \sin w \cos^4 w,$$

$$\alpha_6 = a^2 \sin^7 u \cos^2 u \sin^2 w \cos w - a^2 \varphi' \sin^5 u \cos^4 u \cos^3 w + b^2 \varphi' \sin^5 u \cos^4 u \cos^5 w,$$

$$\alpha_7 = -2a^2 b \sin^4 u \cos^5 u \sin w \cos^2 w - b^3 \sin^4 u \cos^5 u \sin w \cos^4 w$$

biçimindedir. (5.1) helisoidal hiperyüzeyinin (2.4) formülü ile belirli ortalama eğriliği hesaplandığında

$$H = \frac{\beta_1 \varphi'' + \beta_2 \varphi'^3 + \beta_3 \varphi'^2 + \beta_4 \varphi' + \beta_5}{3(\det I)^{3/2}} \quad (5.3)$$

olarak elde edilir. Buradaki β_i katsayıları, $i = 1, 2, \dots, 5$ için

$$\beta_1 = [(b^2 + \sin^2 u) \cos^2 w + a^2] \sin^4 u \cos u \cos w,$$

$$\beta_2 = -2 \sin^3 u \cos^3 w,$$

$$\beta_3 = -b \sin^4 u \cos u \sin w \cos^2 w,$$

$$\beta_4 = 2 \left[\left(-\frac{\cos^4 u}{2} + \frac{b^2}{2} + b^2 \cos^2 u + \frac{1}{2} \right) \cos^2 w + a^2 \left(\cos^2 u + \frac{1}{2} \right) \right] \sin^2 u \cos w,$$

$$\beta_5 = [(b^2 + \sin^2 u) \cos^2 w + a^2] \sin^3 u \cos^3 u$$

biçimindedir. Böylece, aşağıdaki iki teoremi elde edilir.

Teorem 6.1. (5.1) ile verilen Dini türündeki helisoidal hiperyüzey $\mathfrak{D} : M^3 \rightarrow \mathbb{E}^4$ bir izometrik immersiyon olmak üzere bu hiperyüzeyin (5.2) Gauss eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter koşul

$$\alpha_1 \varphi'^2 \varphi'' + \alpha_2 \varphi' \varphi'' + \alpha_3 \varphi'' + \alpha_4 \varphi'^3 + \alpha_5 \varphi'^2 + \alpha_6 \varphi' + \alpha_7 = 0$$

olmasıdır.

Teorem 6.2. (5.1) ile verilen Dini türündeki helisoidal hiperyüzey $\mathfrak{D} : M^3 \rightarrow \mathbb{E}^4$ bir izometrik immersiyon olmak üzere bu hiperyüzeyin (5.3) ortalama eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter koşul

$$\beta_1 \varphi'' + \beta_2 \varphi'^3 + \beta_3 \varphi'^2 + \beta_4 \varphi' + \beta_5 = 0$$

olmasıdır.

Teorem 6.1 ve Teorem 6.2 içindeki fonksiyon $\varphi(u) = \cos u + \ln \left(\tan \frac{u}{2} \right)$ olarak alınırsa aşağıdaki iki sonucu elde ederiz:

Sonuç 6.1. Dört boyutlu Öklid uzayında Dini türündeki (5.1) helisoidal hiperyüzeyinin (5.2) Gauss eğriliği sıfır olduğunda

$$\sum_{j=0}^8 \psi_j \tan^j \left(\frac{u}{2} \right) = 0$$

elde edilir. Burada,

$$\Psi_8 = \alpha_1 ,$$

$$\Psi_7 = -4\alpha_1 \sin u + 2\alpha_2 + 2\alpha_4 ,$$

$$\Psi_6 = \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha_1 - 4\alpha_1 \cos u + 4\alpha_1 \sin^2 u - 4\alpha_2 \sin u \\ +4\alpha_3 - 12\alpha_4 \sin u + 4\alpha_5 \end{array} \right\} ,$$

$$\Psi_5 = \left\{ \begin{array}{l} -4\alpha_1 \sin u + 16\alpha_1 \cos u \sin u + 2\alpha_2 - 8\alpha_2 \cos u \\ +6\alpha_4 + 24\alpha_4 \sin^2 u - 16\alpha_5 \sin u + 8\alpha_6 \end{array} \right\} ,$$

$$\Psi_4 = \left\{ \begin{array}{l} -8\alpha_1 \cos u - 16\alpha_1 \cos u \sin^2 u + 16\alpha_2 \cos u \sin u \\ -16\alpha_3 \cos u - 24\alpha_4 \sin u - 16\alpha_4 \sin^3 u \\ +8\alpha_5 + 16\alpha_5 \sin^2 u - 16\alpha_6 \sin u + 16\alpha_7 \end{array} \right\} ,$$

$$\Psi_3 = \left\{ \begin{array}{l} -4\alpha_1 \sin u + 16\alpha_1 \cos u \sin u + 2\alpha_2 - 8\alpha_2 \cos u \\ +6\alpha_4 + 24\alpha_4 \sin^2 u - 16\alpha_5 \sin u + 8\alpha_6 \end{array} \right\} ,$$

$$\Psi_2 = \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha_1 - 4\alpha_1 \cos u + 4\alpha_1 \sin^2 u - 4\alpha_2 \sin u \\ +4\alpha_3 - 12\alpha_4 \sin u + 4\alpha_5 \end{array} \right\} ,$$

$$\Psi_1 = -4\alpha_1 \sin u + 2\alpha_2 + 2\alpha_4 ,$$

$$\Psi_0 = \alpha_1$$

ile belirlidir.

Sonuç 6.2. Dört boyutlu Öklid uzayında Dini türündeki (5.1) helisoidal hiperyüzeyinin (5.3) ortalama eğriliği sıfır olduğunda

$$\sum_{i=0}^6 \Phi_i \tan^i \left(\frac{u}{2} \right) = 0$$

elde edilir. Burada,

$$\Phi_6 = \beta_2 ,$$

$$\Phi_5 = 2\beta_1 - 6\beta_2 \sin u + 2\beta_3 ,$$

$$\Phi_4 = 9\beta_2 - 6\beta_2 \cos 2u - 8\beta_3 \sin u + 4\beta_4 ,$$

$$\Phi_3 = -8\beta_1 \cos u - 18\beta_2 \sin u + 2\beta_2 \sin 3u + 8\beta_3 - 4\beta_3 \cos 2u - 8\beta_4 \sin u + 8\beta_5 ,$$

$$\Phi_2 = 9\beta_2 - 6\beta_2 \cos 2u - 8\beta_3 \sin u + 4\beta_4 ,$$

$$\Phi_1 = 2\beta_1 - 6\beta_2 \sin u + 2\beta_3 ,$$

$$\Phi_0 = \beta_2$$

ile belirlidir.

Uyarı 6.1. Dini türündeki (5.1) helisoidal hiperyüzeyinin özel simetrileri, Sonuç 6.1 ve Sonuç 6.2 kullanılarak

$$\Phi_6 = \Phi_0, \quad \Phi_5 = \Phi_1, \quad \Phi_4 = \Phi_2$$

ve

$$\Psi_8 = \Psi_0, \quad \Psi_7 = \Psi_1, \quad \Psi_6 = \Psi_2, \quad \Psi_5 = \Psi_3$$

elde edilir

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez içinde, 3-boyutlu Öklid uzayında minimal bir yüzey olmayan Dini helisoidal yüzeyine ait olan hesaplamalar ve bu yüzeyin minimal olmasını sağlayan koşullar; türev alma, diferensiyel denklem çözmeye gibi matematiksel hesaplamalar ile verilmiştir.

3-boyutlu Öklid uzayında elde edilen sonuçlara bakıldığında, bu çalışmanın 4-boyutta da ele alınabileceği ortaya çıkmıştır. Bu sebeple, 4-boyutlu Öklid uzayında Dini türündeki helisoidal hiperyüzey tanımlanarak; hiperyüzeyin Gauss dönüşümü, ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği hesaplanmıştır. Dini türündeki helisoidal hiperyüzeyin minimal olma koşulları ile birlikte eğriliklerine ait orijinal simetriler elde edilmiştir.

Ayrıca, Dini helisoidal yüzeyi ve Dini türündeki helisoidal hiperyüzeyin, 3 ve 4-boyutlu Öklid uzaylar haricinde diğer uzay formlarında da çalışılabileceği aşîkârdır.

Böylece, tezde verilen hesaplamaların ve sonuçların, 150 yılı aşkın süre önce Ulisse Dini'nin yapmış olduğu çalışmaların ışığında Matematik ve diğer bilimlere önemli ölçüde katkı sağlamış olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Arslan K., Bulca B., Milousheva V. (2014) Meridian surfaces in $\mathbb{E}^4$ with pointwise 1-type Gauss map. *Bull. Korean Math. Soc.* 51: 911–922.
- Arslan K., Deszcz R., Yaprak Ş. (1997) On Weyl pseudosymmetric hypersurfaces. *Colloq. Math.* 72(2): 353–361.
- Arvanitoyeorgos A., Kaimakamis G., Magid M. (2009) Lorentz hypersurfaces in $\mathbb{E}_1^4$ satisfying $\Delta H = \alpha H$. *Illinois J. Math.* 53(2): 581–590.
- Bour E. (1862) Théorie de la déformation des surfaces. *J. de l'École Imperiale Polytechnique* 22(39): 1–148.
- Chen B.Y. (2014) *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type*. 2nd Edn, World Scientific, Hackensack.
- Chen B.Y., Choi M., Kim Y.H. (2005) Surfaces of revolution with pointwise 1-type Gauss map. *Korean Math. Soc.* 42: 447–455.
- Chen B.Y., Ishikawa S. (1993) On classification of some surfaces of revolution of finite type. *Tsukuba J. Math.* 17(1): 287–298.
- Chen B.Y., Piccinni P. (1987) Submanifolds with finite type Gauss map. *Bull. Aust. Math. Soc.* 35: 161–186.
- Cheng Q.M., Wan Q.R. (1994) Complete hypersurfaces of $\mathbb{R}^4$ with constant mean curvature. *Monatsh. Math.* 118: 171–204.
- Choi M., Kim Y.H. (2001) Characterization of the helicoid as ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss map. *Bull. Korean Math. Soc.* 38: 753–761.
- Dillen F., Pas J., Verstraelen L. (1990) On surfaces of finite type in Euclidean 3-space. *Kodai Math. J.* 13: 10–21.
- Dini U. (1871) Sopra le funzioni di una variabile complessa. *Annali di matematica pura ed applicata*, 4(2): 159–174.

- Dini U. (1953) *Opere. Vol. I. Algebra. Geometria Differenziale.* (Italian) A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Edizioni Cremonese della Casa Editrice Perrella, Roma. 698 pp.
- Dini U. (1954) *Opere. Vol. II. Funzioni di variabile reale e sviluppi in serie—problema di Dini-Neumann funzioni analitiche.* (Italian) Edizioni Cremonese, Roma. 509 pp.
- Dini U. (1955) *Opere. Vol. III. Equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali.* (Italian) Edizioni Cremonese, Roma. 661 pp.
- Dini U. (1959) *Opere. Vol. IV. Serie di Fourier.* (Italian) A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche Edizioni Cremonese, Roma. 273 pp.
- Dini U. (1959) *Opere. Vol. V. Sviluppi in serie.* (Italian) A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche Edizioni Cremonese, Roma. 296 pp.
- Do Carmo M., Dajczer M. (1982) Helicoidal surfaces with constant mean curvature. *Tohoku Math. J.* 34: 351–367.
- Dursun U. (2009) Hypersurfaces with pointwise 1-type Gauss map in Lorentz-Minkowski space. *Proc. Est. Acad. Sci.* 58: 146–161.
- Dursun U., Turgay N.C. (2013) Minimal and pseudo-umbilical rotational surfaces in Euclidean space $\mathbb{E}^4$. *Mediterr. J. Math.* 10: 497–506.
- Ferrandez A., Garay O.J., Lucas P. (1990) On a certain class of conformally at Euclidean hypersurfaces. In *Global Analysis and Global Differential Geometry*; Springer: 48-54, Berlin, Germany.
- Fomenko A.T., Tuzhilin A.A. (1991) *Elements of the Geometry and Topology of Minimal Surfaces in Three-Dimensional Space.* Translated from the Russian by E.J.F. Primrose. Translations of Mathematical Monographs, 93. American Mathematical Society, Providence, RI.

- Ganchev G., Milousheva V. (2014) General rotational surfaces in the 4-dimensional Minkowski space. *Turkish J. Math.* 38: 883–895.
- Güler E. (2020) Helical hypersurfaces in Minkowski geometry $\mathbb{E}_1^4$. *Symmetry*. 12(8): 1–16.
- Güler E., Gümüşok Karaalp A. (2019) Dini-type helicoidal hypersurface in 4-space. *Ikonion J. Math.* 1(1): 26–34.
- Güler E., Hacısalihoğlu H.H., Kim Y.H. (2018) The Gauss map and the third Laplace-Beltrami operator of the rotational hypersurface in 4-Space. *Symmetry* 10(9): 1–11.
- Güler E., Kişi Ö. (2019) Dini-type helicoidal hypersurfaces with timelike axis in Minkowski 4-space $\mathbb{E}_1^4$. *Mathematics* 7(2): 1–8.
- Güler E., Magid M., Yaylı Y. (2016) Laplace Beltrami operator of a helicoidal hypersurface in four space. *J. Geom. Sym. Phys.* 41: 77–95.
- Güler E., Turgay N.C. (2019) Cheng–Yau operator and Gauss map of rotational hypersurfaces in 4-space. *Mediterr. J. Math.* 16(3): 66, 1–16.
- Güler E., Vanlı A. (2006) Bour's theorem in Minkowski 3-space. *J. Math. Kyoto* 46(1): 47–63.
- Güler E., Yaylı Y., Hacısalihoğlu H.H. (2010) Bour's theorem on the Gauss map in 3-Euclidean space. *Hacettepe J. Math. Stat.* 39: 515–525.
- Hasanis Th., Vlachos Th. (1995) Hypersurfaces in $\mathbb{E}^4$ with harmonic mean curvature vector field. *Math. Nachr.* 172: 145–169.
- Kahraman Aksoyak F., Yaylı Y. (2014) Boost invariant surfaces with pointwise 1-type Gauss map in Minkowski 4-Space $\mathbb{E}_1^4$. *Bull. Korean Math. Soc.* 51: 1863–1874.
- Kahraman Aksoyak F., Yaylı Y. (2015) General rotational surfaces with pointwise 1-type Gauss map in pseudo-Euclidean space $\mathbb{E}_2^4$. *Indian J. Pure Appl. Math.* 46: 107–118.

- Kim Y.H., Turgay N.C. (2013) Surfaces in $\mathbb{E}^4$ with L_1 -pointwise 1-type Gauss map. *Bull. Korean Math. Soc.* 50(3): 935–949.
- Lawson H.B. (1980) *Lectures on Minimal Submanifolds*. 2nd ed.; Mathematics Lecture Series 9; Publish or Perish, Inc.: Wilmington, Delaware.
- Magid M., Scharlach C., Vrancken L. (1995) Affine umbilical surfaces in $\mathbb{R}^4$. *Manuscripta Math.* 88: 275–289.
- Moore C. (1919) Surfaces of rotation in a space of four dimensions. *Ann. Math.* 21: 81–93.
- Moore C. (1920) Rotation surfaces of constant curvature in space of four dimensions. *Bull. Amer. Math. Soc.* 26: 454–460.
- Moruz M., Munteanu M.I. (2016) Minimal translation hypersurfaces in $\mathbb{E}^4$. *J. Math. Anal. Appl.* 439: 798–812.
- Nitsche J.C.C. (1989) *Lectures on Minimal Surfaces. Vol. 1. Introduction, fundamentals, geometry and basic boundary value problems*. Translated from the German by Jerry M. Feinberg. With a German foreword. Cambridge University Press, Cambridge.
- Scharlach C. (2007) Affine geometry of surfaces and hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$. In *Symposium on the Differential Geometry of Submanifolds*; Dillen F., Simon U., Vrancken L., Eds.; Un. Valenciennes: Valenciennes, France, 124: 251–256.
- Senoussi B., Bekkar M. (2015) Helicoidal surfaces with $\Delta^j r = Ar$ in 3-dimensional Euclidean space. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* 60(3): 437–448.
- Takahashi T. (1966) Minimal immersions of Riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan* 18: 380–385.
- Toksöz S. (2017) Ulisse Dini'nin helisoidal yüzeyi. *Bitirme ödevi*. Bartın Üniversitesi. 51 s. Bartın.
- Verstraeten L., Walrave J., Yaprak S. (1994) The minimal translation surfaces in Euclidean space. *Soochow J. Math.* 20(1): 77–82.

Yoon D.W. (2001) Rotation Surfaces with finite type Gauss map in $\mathbb{E}^4$. *Indian J. Pure Appl. Math.* 32: 1803–1808.



ÖZGEÇMİŞ



