



RECEP TAYYİP
ERDOĞAN
ÜNİVERSİTESİ

**T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DÖRTLÜ BAND MATRİS VASITASIYLA TÜRETİLEN HEMEN
HEMEN YAKINSAK DİZİ UZAYLARI VE GEOMETRİK
ÖZELLİKLER**

(Yüksek Lisans Tezi)

Emre DAŞTAN

**Danışman
Doç. Dr. Mustafa Cemil BİŞGİN**

**RİZE
2023**

KABUL VE ONAY

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında, Doç. Dr. Mustafa Cemil BİŞGİN danışmanlığında, Emre DAŞTAN tarafından hazırlanan *Dörtlü Band Matrisi Vasıtasıyla Türetilen Hemen Hemen Yakınsak Dizi Uzayları Ve Geometrik Özellikler* adlı bu tez çalışması, 18/05/2023 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliği/oy çokluğuyla başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı, Adı SOYADI	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ	
Üye	: Doç. Dr. Yavuz KESİCİOĞLU	
Üye	: Doç. Dr. Mustafa Cemil BİŞGİN	

ETİK BEYAN

Matematik Tezli Yüksek Lisans Programından mezun olmak üzere teslim ettiğim “Dörtlü Band Matrisi Vasıtasıyla Türetilen Hemen Hemen Yakınsak Dizi Uzayları Ve Geometrik Özellikler” adlı tezim, bilim ve araştırma etiği prensiplerine riayet edilerek tarafımdan yazılmıştır.

Tez çalışmamda, başka kaynaklardan aktarılan bütün bilgi ve alıntılar, Enstitünüz Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak açıkça gösterilmiştir. Kaynağı gösterilenler dışında kalan bütün bilgiler uygun araştırma yöntemi kullanılarak tarafımdan edinilmiş ve esere bu şekilde yansıtılmıştır. Şahsıma ait olmayan hiçbir bilgi, kasıt veya kusurlar, şahsıma aitmiş gibi gösterilmemiştir. İnternet kaynakları dâhil, sahibine/kaynağına atıf yapılmaksızın hiçbir bilgi kullanılmamıştır. Aksinin ortaya çıkması halinde doğacak bütün hukuki, idari, akademik ve etik sorumluluk tarafıma ait olacaktır. Eserin tesliminden sonra herhangi bir zamanda, bilim etiğine aykırılık tespit edilmesi ve / veya eserimle ilgili intihal veya intihal şeklinde anlaşılabilecek bir durumun ortaya çıkması halinde; Üniversiteniz ve eğitim kadronuzun hiçbir şekilde sorumlu tutulmayacağını hür irademle kabul, beyan ve taahhüt ederim.

18/05/2023

Emre DAŞTAN

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında dörtlü band matrisinin etki alanı ile inşa edilen hemen hemen yakınsak, hemen hemen sıfıra yakınsak, hemen hemen yakınsak seri oluşturan ve p.dereceden mutlak yakınsak seri oluşturan dizi uzaylarının, dizi uzayları teorisinde kullanılan çeşitli özellikleri incelenmiştir.

“Dörtlü Band Matrisi Vasıtasıyla Türetilen Hemen Hemen Yakınsak Dizi Uzayları Ve Geometrik Özellikler” isimli tez çalışmamın seçiminde ve her aşamasında bana öncülük eden ve desteklerini esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Mustafa Cemil BİŞGİN’ e teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında bana destek olan sevgili eşim Meryem DAŞTAN’ a teşekkür ederim.

Emre DAŞTAN

2023/RİZE

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY.....	I
ETİK BEYAN.....	II
ÖN SÖZ.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
ÖZET.....	V
ABSTRACT.....	VI
KISALTMALAR.....	VII
GİRİŞ.....	1
1. GENEL BİLGİLER.....	4
1.1. Temel Tanım ve Teoremler.....	4
1.2. Hemen Hemen Sıfıra Yakınsak Dizi Uzayları ve Dualleri	14
1.3. Matris Dönüşümleri ve Dual Uzaylar	19
1.3.1. Matris Dönüşümleri.....	19
1.3.2. Matris Sınıfları.....	23
1.3.3. Dual Uzaylar.....	30
1.4. Bazı Geometrik Özellikler.....	31
2.YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	35
3. $f(Q)$ ve $fs(Q)$ DİZİ UZAYLARIN SCHAUDER BAZLARI İLE $\beta -$ ve $\gamma -$ DUALLERİ.....	42
4.MATRİS SINIFLARI.....	48
5. $l_p(Q)$ DİZİ UZAYININ BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ.....	53
6.BULGULAR.....	58
7.SONUÇ.....	59
KAYNAKÇA.....	60

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ana Bilim Dalı : Matematik Anabilim Dalı

Tez Türü : Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Doç. Dr. Mustafa Cemil BİŞGİN

Hazırlayan : Emre DAŞTAN

Yıl : 2023

Sayfa Sayısı : 62

ÖZET

DÖRTLÜ BAND MATRİSİ VASITASIYLA TÜRETİLEN HEMEN HEMEN YAKINSAK DİZİ UZAYLARI VE GEOMETRİK ÖZELLİKLER

Bu çalışmada dörtlü band matrisi vasıtasıyla türetilen hemen hemen yakınsak dizi uzayları ve $l_p(Q)$ dizi uzayının geometrik özellikleri ele alınmıştır. Bu bağlamda öncelikle literatürde hemen hemen yakınsak dizi uzayları konusunda yapılan çalışmalar incelenmiştir. Çalışma kapsamında dörtlü band matrisi ve hemen hemen yakınsak dizi uzayları kavramları, dual uzayları, matris dönüşümleri, matris sınıfları kavramları ele alınarak daha önce yapılmış çalışmalara teorem ve lemmalara yer verilerek konu kapsamı genişletilmiş ve zenginleştirilmiştir. Daha sonrasında çalışmada, dizi uzayları ve etki alanı kavramları ele alınarak hemen hemen yakınsak dizi uzayları, hemen hemen sıfıra yakınsak dizi uzayları ve hemen hemen yakınsak seri oluşturan dizi uzayları inşa edilmiş ve bu uzayların $BK -$ uzayı olmaları, eş yapılı olduğu uzaylar, dualleri, Schauder bazları ve matris sınıfları gibi özellikleri incelenmiştir. Son olarak çalışmada dörtlü band matrisinin etki alanı vasıtasıyla türetilen $l_p(Q)$ dizi uzayının bazı geometrik özelliklerine yönelik bilgiler aktarılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dizi Uzayları, Etki Alanı, Schauder Bazı, Hemen Hemen Yakınsaklık, Matris Sınıfları, $\beta -$ ve $\gamma -$ Dual

Recep Tayyip Erdogan University Institute of Graduate Studies

Department : Department of Mathematics

Thesis Type : Master Thesis

Supervisor : Assoc. Prof. Mustafa Cemil BİŞGİN

Year : 2023

Pages : 62

ABSTRACT

ALMOST CONVERGENT SEQUENCE SPACES DERIVED BY QUADRUPLE BAND MATRIX AND GEOMETRIC PROPERTIES

In this work, almost convergent sequence spaces derived by means of a quadruple band matrix and geometric properties of the sequence space $l_p(Q)$ are discussed. In this context, first of all, the studies on almost convergent sequence spaces in the literature were examined. Within the scope of the study, the concepts of quadruple band matrix and almost convergent sequence spaces, dual spaces, matrix transformations, matrix classes are discussed and the scope of the subject is expanded and enriched by including theorems and lemmas in previous studies. Later, in the study, the concepts of sequence spaces and matrix domain were discussed and almost convergent sequence spaces, almost null convergent sequence spaces and almost convergent series sequence spaces were constructed and their properties such as BK – spaces, isomorphic spaces, duals, Schauder bases and matrix classes were examined. Finally, in this study, information about some geometric properties of the sequence space $l_p(Q)$ derived by the domain of quadruple band matrix is conveyed.

Keywords: Sequence Spaces, Matrix Domain, Schauder Bases, Almost Convergence, Matrix Classes, β – and γ – Dual

KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\emptyset$	: Boş Küme
w	: Reel veya Kompleks Terimli Diziler Uzayı
l_p	: p . Dereceden Mutlak Yakınsak Seri Oluşturan Diziler Uzayı
c_0	: Sıfıra Yakınsak Diziler Uzayı
l_∞	: Sınırlı Diziler Uzayı
bv	: Sınırlı Salımlı Diziler Uzayı
bs	: Sınırlı Seri Oluşturan Diziler Uzayı
cs	: Yakınsak Seri Oluşturan Diziler Uzayı
c	: Yakınsak Diziler Uzayı
f	: Hemen Hemen Yakınsak Dizilerin Uzayı
f_0	: Hemen Hemen Sıfıra Yakınsak Dizilerin Uzayı
fs	: Hemen Hemen Yakınsak Serilerin Uzayı

GİRİŞ

Bilim dünyasında meydana gelen bazı problemlerin değerlendirilmesi için öncelikle başvurulacak olan disiplin matematiktir. Dolayısıyla bilime dayalı birçok problem matematiksel düşünme yöntemi kullanılarak açıklık kazanmaktadır. Söz konusu problemler ilgili alanların yapıları ve özellikleriyle doğrudan bir ilişki içerisindedir.

Bahsi geçen teorilerin sağlanması için gereken çözümlerden yararlanma sonucunda ise mantıksal sonuçların elde edilmesi sağlanmaktadır. Bu durum ise soyut yollarla geliştirilmiş olan matematiksel sonuçların ortaya çıkarılmasını sağlamaktadır. Fonksiyonel analiz kapsamında soyut yapılar kavramının ilk kullanımı M. Frechet tarafından yapılmıştır.

Öte yandan toplanabilme ise daha çok analiz ve uygulamalı matematik alanında kullanılan bir teoridir. Bu teori ve sonsuz seriler kavramının ilk kullanımı ise Newton ve Leibnitz tarafından yapılmıştır. Bu teori kapsamında genellikle seriler, ıraksak ve yakınsak seriler olmak üzere iki ana grup kapsamında incelenmektedir. Bahsi geçen ıraksak seriler kendi içerisinde belirsiz ıraksak seriler ve belirli ıraksak seriler olmak üzere iki gruba ayrılmaktadırlar. Bu noktada belirsiz ıraksak seriler, kısmi toplamlar dizisi en az iki adet limit noktası bulunan serilerdir. Bunun yanı sıra belirli ıraksak serilerse;

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$$

ya da

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty$$

şeklindeki serileri ifade etmektedir. Toplanabilme teorisi, Cesaro, Riesz, Nörlund, Abel, Borel gibi isimler tarafından kullanılan yöntemlerle geliştirilmiştir. Ardından bu klasik yöntemlerin yerine daha genel matris metodu kullanılmış ve bununla

birlikte matris dönüşümü teorisi ortaya çıkmıştır. İraksak bir seriyi ya da ıraksak bir diziyi toplananın ya da yakınsatmanın en yaygın yöntemi sonsuz matrislerin kullanılmasıdır.

Bu teori, toplanabilme teorisi içerisinde oldukça önemlidir. Dolayısıyla birçok araştırmacı tarafından sonsuz matrisler kullanılarak yeni dizi uzayları elde edilmiştir.

Bu çalışmalardan bazıları Malkowsky (1997), Wang (1978), Ng ve Lee (1978), Malkowsky, Mursaleen ve Suantai (2007), Altay ve Başar (2005; 2006a; 2006b; 2007a; 2007b; 2007c), Başarır (1995), Malkowsky ve Savaş (2004), Aydın ve Başar (2004a; 2004b; 2004c; 2005; 2006), Başar, Altay ve Mursaleen (2008), Şengönül ve Başar (2005), Altay (2006), Polat ve Başar (2007), Kirişçi ve Başar (2010), Başar ve Kirişçi (2011) şeklinde olup son dönemlerde yapılan çalışmalara ise Şengönül ve Kayaduman (2012a; 2012b), Kirişçi ve Başar (2010) da örnek gösterilebilir.

Dizilerin bilinen yakınsaklığı sonrasında G. G. Lorentz tarafından ele alınan bir çalışmada daha sonrasında geniş bir biçimde kullanılacak olan hemen hemen yakınsaklık tanımı Banach limitleri yardımı ile literatüre eklenmiş ve hemen hemen yakınsak dizi uzayının herhangi bir matrisin etki alanında verilemeyeceği bu şekilde kanıtlanmıştır (Lorentz, 1948).

Bununla birlikte hemen hemen yakınsaklık görüşünün bir genellemesi olan FB – yakınsaklık fikri Stieglitz tarafından ileri sürülen bir görüş olmuştur (Stieglitz, 1973). İfade edilen bu tanımlar, kuvvetli yakınsaklık adında Maddox (1978) tarafından gerçekleştirilen araştırma doğrultusunda yeniden incelenerek bu çalışmaların devamında 1982 yılında mutlak FB - yakınsaklık tanımı Mursaleen (1983) tarafından yapılmıştır. 1985 yılına bakıldığında ise hemen hemen yakınsak diziler uzayının Cesàro matrisinin satırlarının ötelenmesi ile elde edilen matrislerin yakınsaklık alanlarının kesişimi olduğu Butković, Kraljević ve Sarapa tarafından ifade edilmiştir.

Yukarıda bahsi geçen çalışmaların yanı sıra Başar ve Kirişçi (2011) tarafından geliştirilmiş fark matrisi kapsamında hemen hemen yakınsak diziler uzayından yeni dizi uzayları ortaya çıkarılmıştır. Bunun yanı sıra Sönmez (2013) ise üçlü band matrisi ve hemen hemen yakınsak diziler uzayının kullanımı ile yeni dizi

uzayları oluşturmuştur. Oluşturulan bu uzaylarının $\beta -$ ve $\gamma -$ dualleri belirlenerek çeşitli matris sınıfları da karakterize edilmiştir.

Araştırmanın Konusu

Tüm bu tanımlar ve teoriler kapsamında bu çalışmada da dörtlü band matrisi kullanımı gerçekleştirilerek türetilen hemen hemen yakınsak dizi uzayları ve $l_p(Q)$ 'nın geometrik özelliklerinin incelenmesi yapılmaktadır.

Araştırmanın Önemi

Literatüre göz atıldığında dörtlü band matrisinin kullanılması ile türetilen hemen hemen yakınsak dizi uzayları ve $l_p(Q)$ dizi uzayının geometrik özelliklerinin incelendiği çalışmanın olmadığı görölmüştür. Ele alınan bu çalışmanın da literatürdeki bu eksikliği kapatması açısından ve gelecekte yapılacak olan çalışmalara kaynak olması açısından önemli olduğu düşünölmektedir. Ayrıca $Q = Q(r, s, t, u)$ dörtlü band matrisi Δ^3 , $B(r, s, t)$, Δ^2 , $B(r, s)$ ve Δ şeklinde gösterilen ve sırasıyla üçüncü mertebeden fark, üçlü band, ikinci mertebeden fark, ikili band ve fark matrisi olarak adlandırılan matrisleri geneller. Bundan dolayı $Q = Q(r, s, t, u)$ dörtlü band matrisi ile türetilen dizi uzaylarının özellikleri yukarıda bahsedilen matrisler ile türetilen dizi uzaylarının özelliklerinden daha genel ve kapsamlıdır.

Araştırmanın Amacı

Bu tez çalışmasında $Q = Q(r, s, t, u)$ dörtlü band matrisinin etki alanı kullanılarak $f(Q(r, s, t, u))$, $f_0(Q(r, s, t, u))$, ve $fs(Q(r, s, t, u))$ dizi uzayları inşa edilecektir. Daha sonra bu uzayların BK – uzayı oldukları ispatlanıp, sırasıyla f , f_0 ve fs uzaylarına lineer olarak izomorfik oldukları gösterilecektir. İlâveten bu uzayların Schauder bazları ile $\beta -$ ve $\gamma -$ dualleri belirlenip, bazı matris sınıfları karakterize edilecektir. Son olarak $l_p(Q(r, s, t, u))$ dizi uzayının bazı geometrik özelliklerinden bahsedilecektir.

1. GENEL BİLGİLER

1.1.Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1. w kompleks (veya reel) terimli dizilerin kümesi olmak üzere; w skalerle çarpma ve koordinatsal toplama işlemlerine göre bir vektör uzayı temsil eder. Yani; $\mathbb{F}, \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) cismi olmak üzere;

$$w = \{x = (x_k): x_k \in \mathbb{F}, \forall k \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde ve noktasal toplama ile skaler çarpım işlemleri $\forall x, y, z \in w$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için;

$$\begin{aligned} \oplus: w \times w &\rightarrow w \\ (x, y) &\mapsto x \oplus y = (x_k + y_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \otimes: \mathbb{F} \times w &\rightarrow w \\ (\alpha, x) &\mapsto \alpha \otimes x = (\alpha x_k) \end{aligned}$$

şeklinde olup aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(w, \oplus, \otimes)$ üçlüsü $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör(lineer) uzayıdır denir .

- (i) $x \oplus y \in w$ (kapalılık)
- (ii) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (birleşme)
- (iii) $x \oplus e = e \oplus x = x$ olacak şekilde bir tek $e \in X$ vardır.
- (iv) $x \oplus x^{-1} = x^{-1} \oplus x = e$ olacak şekilde bir tek $x^{-1} \in X$ vardır.
- (v) $x \oplus y = y \oplus x$ (değişme)
- (vi) $\alpha \otimes x \in w$
- (vii) $\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y)$
- (viii) $(\alpha \oplus \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x)$
- (ix) $(\alpha \cdot \beta) \otimes x = \alpha \otimes (\beta \otimes x)$
- (x) $1_{\mathbb{F}} \otimes x = x$

Burada $1_{\mathbb{F}}$ ve e sırasıyla $\mathbb{F}$ cisminin ikinci işlemine göre etkisiz elemanı ve

$(0, 0, 0, \dots)$ şeklinde sıfır dizisidir.

w' nun alt vektör uzaylarının her birine dizi uzayı adı verilmektedir ve bu dizi uzaylarından sınırlı seri oluşturan diziler uzayı

$$bs = \left\{ x = (x_k) \in w : \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \in l_\infty \right\}$$

yakınsak seri oluşturan diziler uzayı

$$cs = \left\{ x = (x_k) \in w : \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \in c \right\}$$

sınırlı salınımlı diziler uzayı

$$bv = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k-1}| < \infty \right\},$$

sınırlı diziler uzayı

$$l_\infty = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty \right\}$$

sıfıra yakınsak diziler uzayı

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \right\}$$

yakınsak diziler uzayı

$$c = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \text{ mevcut} \right\}$$

p . mertebeden mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayı

$$l_p = \left\{ x = (x_k) \in w: \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty, \quad 1 \leq p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanıp bu dizi uzayları arasında ki kapsama bağıntıları;

- i. $l_p \subset c_0 \subset c \subset l_\infty$
- ii. $l_1 \subset bv \subset c$

şeklindedir.

Tanım 1.1.2. X boştan farklı bir küme olmak üzere

$$\begin{aligned} d: X \times X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

şeklinde bir d dönüşümü tanımlansın. Eğer $\forall x, y, z \in X$ için aşağıdakiler sağlanırsa d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

- i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii. $d(x, y) = d(y, x)$
- iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

olup burada i, ii ve iii koşullarına metrik aksiyomları denir.

Tanım 1.1.3. (X, d) metrik uzay içerisinde bir (x_n) , $n = 1, 2, \dots$ dizisi ve $x_0 \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_0, x_n) = 0$ oluyorsa, (x_n) $n \in \mathbb{N}$ dizisi x_0 'a yakınsıyor denir ve bu deyim $x_n \rightarrow x_0$, $n \rightarrow \infty$ ya da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir(Mustafa, 2016).

Tanım 1.1.4. (X, d) metrik uzayı ve $(x_n) \subset X$, $n = 1, 2, \dots$ dizisi verilsin. Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n, m \geq n_\varepsilon$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde ε 'a bağlı bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa (x_n) , $n = 1, 2, \dots$ dizisi X 'de bir Cauchy dizisi denir(Mustafa,

2016).

Örnek 1.1.5.

$$\begin{aligned} d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = |x - y| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde bir metrik ve $(\mathbb{R}, d)$ ikilide metrik uzaydır. Bu şekilde tanımlanan dönüşüme $\mathbb{R}$ nin alışılmış metriği denir.

Örnek 1.1.6. $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned} d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metrik ve $(\mathbb{R}^n, d)$ ikilide metrik uzaydır. Bu şekilde tanımlanan dönüşüme $\mathbb{R}^n$ nin alışılmış metriği denir.

Önerme 1.1.7. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) için;

$$\frac{|x + y|}{1 + |x + y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}$$

eşitsizliği vardır(Musayev ve Alp, 2000).

Önerme 1.1.8. $p > 1$ olmak üzere q' yu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olarak alalım. O halde $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) için;

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|x|^q}{q}$$

eşitsizliği vardır(Musayev ve Alp, 2000).

Önerme 1.1.9.

1. $1 < p < \infty$ olmak üzere q da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ seçilsin. O halde $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$ (ya da $\forall a, b \in \mathbb{C}^n$) vektörleri için

$$\sum_{k=0}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=0}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Hölder Eşitsizliği

2. $1 \leq p < \infty$ sayısı ve $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$ (ya da $\forall a, b \in \mathbb{C}^n$) vektörleri için

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}$$

Minkowski Eşitsizliği doğrudur (Mustafa, 2016).

Burada Hölder, Minkowski ve Önerme 1.1.7. eşitsizlikleri yardımıyla bir sonraki Örnek 1.1.10. ve Örnek 1.1.11. örnekleri verilebilir.

Örnek 1.1.10. $\forall x = (x_n), y = (y_n) \in w$ için;

$$d: w \times w \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü w üzerinde bir metrik ve (w, d) ikilisi de metrik uzaydır.

Örnek 1.1.11. $\forall x = (x_n), y = (y_n) \in l_p$ için;

$$d_p: l_p \times l_p \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$(x, y) \mapsto d_p(x, y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanan d_p dönüşümü l_p üzerinde bir metrik ve (l_p, d_p) ikilisi de metrik uzaydır.

Örnek 1.1.12. Reel sayılar kümesinde

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde bir metrik ve $(\mathbb{R}, d)$ ikilisi de metrik uzaydır.

Bu örneğin çözümünde metriğin birinci ve ikinci aksiyomlarını sağladığı açıktır. Metriğin üçüncü aksiyomunun da sağlandığını gösterelim.

Negatif olmayan $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ reel sayıları için

$$a + b \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

olduğundan, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \leq \left(\sqrt{|x - z|} + \sqrt{|z - y|} \right)^2$$

yazılabilir. Buradan,

$$\sqrt{|x - y|} \leq \sqrt{|x - z|} + \sqrt{|z - y|}$$

elde edilir. Dolayısıyla $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Mustafa, 2016).

Tanım 1.1.13. X , $\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\| \cdot \|$ dönüşümü;

$$\begin{aligned}\|\cdot\|: X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x &\mapsto \|x\|\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $\forall a \in \mathbb{R}$ ve $\forall x, y \in X$ için;

- i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- ii. $\|ax\| = |a|\|x\|$
- iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

aksiyomları sağlanırsa $\|\cdot\|$ dönüşümüne X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir. Burada i, ii ve iii şartları norm aksiyomlarıdır (Musayev ve Alp, 2000).

Önerme 1.1.14. $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay olsun. $\forall x, y \in X$ için ;

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

dir(Mucuk, 2010).

Örnek 1.1.15. $1 \leq p < \infty$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ olacak şekilde reel terimli (x_k) dizilerinin sınıfı $\forall x = (x_k) \in l_p$ için $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ ile tanımlanan $\|\cdot\|: l_p \rightarrow \mathbb{R}$ norm ile birlikte normlu uzaydır(Mucuk, 2010).

Örnek 1.1.16. $x = (x_k) \in l_{\infty}$ için l_{∞} üzerinde

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

ile tanımlanan $\|\cdot\|: l_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$ bir normdur(Mucuk, 2010).

Önerme 1.1.17. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisi bir normlu uzay olsun.

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|x - y\|$$

olacak şekilde bir d dönüşümü tanımlayalım. O halde (X, d) bir metrik uzay olup elde edilen d metriğine $\| \cdot \|$ normunun indirgendiği metrik olarak isimlendirilir (Musayev ve Alp, 2000).

Lemma 1.1.18. $(X, \| \cdot \|)$ ikilisi bir normlu uzay olsun. $a \in \mathbb{R}$ ve $\forall x, y \in X$ için;

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde ifade edilsin. O halde $\forall x, y \in X$ için;

- i. $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ (Öteleme Özelliği)
- ii. $d(ax, ay) = |a|d(x, y)$ (Mutlak Homojenlik Özelliği)

ifadeleri sağlanır (Musayev ve Alp, 2000).

Sonuç 1.1.19. Önerme 1.1.17. den normlu her uzay bir metrik uzay olduğu çıkarılabilir.

Tersine olarak her metrik uzayın bir norm uzayı olması gerekmez. Yani herhangi bir (X, d) metrik uzayı verildiğinde norm metriği d olacak şekilde X üzerinde bir norm bulmak her zaman mümkün değildir. Yalnız (X, d) metrik vektör uzayı olmak üzere; d metriği Lemma 1.1.18 in i. ve ii. şartlarını sağlıyorsa $d(x, \theta) = \|x\|$ tanımı ile $(X, \| \cdot \|)$ ikilisi bir normlu uzaydır (Mucuk, 2010).

Tanım 1.1.20. $(X, \| \cdot \|)$ normlu bir uzay, (x_n) , X de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $n_0^{(\varepsilon)}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0^{(\varepsilon)}$ için $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisine X normlu uzayında x_0 noktasına yakınsıyor denir (Maddox, 1988).

Tanım 1.1.21. $(X, \| \cdot \|)$ normlu bir uzay, (x_n) , X de bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m, n > n_0^{(\varepsilon)}$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0^{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ varsa

(x_n) dizisine X normlu uzayında bir Cauchy dizisi denir(Maddox, 1988).

Tanım 1.1.22. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay olsun. Eğer bu uzayda alınan her Cauchy dizisi yine bu uzayın bir elemanına yakınsıyor ise $(X, \|\cdot\|)$ uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir(Maddox, 1988).

Lemma 1.1.23. (X, d) metrik vektör uzayındaki d metriği Lemma 2.1.18. daki i. ve ii. şartlarını sağlasın. O halde $x \in X$ için;

$$\|x\| = d(x, \theta)$$

ise; (X, d) ve $(X, \|\cdot\|)$ ikililerin topolojik yapıları eştir. Öyleyse (X, d) metrik uzayındaki her yakınsak, sınırlı ve Cauchy dizisi $(X, \|\cdot\|)$ metrik vektör uzayında da sırasıyla yakınsak, sınırlı ve Cauchy dizisidir ve bunun terside doğrudur(Maddox, 1988).

Sonuç 1.1.24. (X, d) metrik uzayı tam ve d metriği Lemma 1.1.18. daki i. ve ii. şartlarını sağlasın. O halde $x \in X$ için;

$$\|x\| = d(x, \theta)$$

olur. $(X, \|\cdot\|)$ metrik vektör uzayı da Banach uzayıdır(Choudhary ve Nanda, 1989).

Tanım 1.1.25. $(X, \|\cdot\|_1)$ ve $(Y, \|\cdot\|_2)$ normlu iki uzay ve $f: X \rightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. Eğer f dönüşümü normu koruyorsa , yani $\forall x \in X$ için;

$$\|x\|_1 = \|f(x)\|_2$$

oluyorsa f dönüşümüne izometrik dönüşüm ya da izometri denir. Eğer f izometrisi aynı zamanda örten ise f dönüşümüne izometrik izomorfi denir. $(X, \|\cdot\|_1)$ ve $(Y, \|\cdot\|_2)$ uzaylarına da izometrik ya da eş yapılı uzaylar denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir(Choudhary ve Nanda, 1989).

Tanım 1.1.26. X bir lineer topolojik dizi uzayı olsun. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n(x) = x_n$ şeklinde tanımlanan $p_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümleri sürekli ise X dizi uzayına K – uzayı (Koordinat Uzayı) denir (Choudhary ve Nanda, 1989).

Tanım 1.1.27. X tam bir lineer metrik uzay ve bir K – uzayı ise X dizi uzayına FK – uzayı (Frechet Koordinat Uzayı) denir (Choudhary ve Nanda, 1989).

Tanım 1.1.28. X bir Banach dizi uzayı olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n(x) = x_n$ şeklinde tanımlanan $p_n: X \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümleri sürekli ise X Banach dizi uzayı BK – uzayı (Banach Koordinat Uzayı) olarak adlandırılır (Choudhary ve Nanda, 1989).

l_∞ , c_0 ve c dizi uzayları

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

normuna göre; l_p dizi uzayı ise

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre BK – uzayıdır.

Tanım 1.1.29. X ve Y herhangi iki normlu uzay olsun. $B(X, Y)$ kümesi X den Y ye sınırlı lineer dönüşümlerin kümesi olmak üzere $Y = \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) alınır

$$B(X, \mathbb{C}) = \{f | f: X \rightarrow \mathbb{C} \text{ sürekli ve lineer} \}$$

şeklinde tanımlı kümeye X in topolojik duali denir. X^* veya X' şeklinde gösterilir (Maddox, 1988).

Tanım 1.1.30. X lineer bir uzay olmak üzere $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümüne bir fonksiyonel

denir.

Eğer $\forall a, b \in X$ için $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$ eşitsizliği gerçekleşiyorsa f fonksiyoneline alt toplamsal, $f(a + b) = f(a) + f(b)$ eşitsizliği gerçekleşiyorsa toplamsaldır denir.

Eğer $\forall a \in X$ ve her λ skaleri için $f(\lambda a) = \lambda f(a)$ ise f fonksiyoneli homojendir. Homojen ve alt toplamsal olan bir fonksiyonele alt lineer, toplamsal ve homojen olan bir fonksiyonele ise lineer fonksiyonel denir.

$\forall a \in X$ için $|f(a)| \leq M\|a\|$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı varsa $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümüne sınırlı lineer fonksiyonel denir. Sınırlı bir lineer fonksiyonelin normu;

$$\|f\| = \sup_{a \neq 0} \frac{|f(a)|}{\|a\|}$$

olarak verilir(Maddox, 1988).

1.2. Hemen Hemen Sıfıra Yakınsak Dizi Uzayları ve Dualleri

Tanım 1.2.1. l_∞ uzayı için Hahn-Banach teoreminin bir uygulaması olarak, Banach limitlerinin temsili ilk olarak Stefan Banach tarafından tanımlanmıştır. Öteleme operatörleri altında değişmeden kaldığı ve l nin genişlediği l_∞ üzerinde kesin negatif olmayan lineer fonksiyonları ilk olarak Banach tanımladı. Burada $l: c \rightarrow \mathbb{R}, l(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ olarak tanımlıdır ve l, c üzerinde lineer fonksiyoneldir. Böyle fonksiyonlar daha sonra “Banach Limitleri” olarak adlandırıldı.

Eğer

- i. $L(ax_n + by_n) = aL(x_n) + bL(y_n); a, b \in \mathbb{R}$
- ii. Eğer $n = 0, 1, 2, \dots$ için $x_n \geq 0$ ise $L(x_n) \geq 0$ dır
- iii. $L(P_j(x_n)) = L(x_n), P_j(x_n) = x_{n+j}, j = 1, 2, 3, \dots$
- iv. $L(e) = 1$, burada $e = (1, 1, 1, \dots)$.

ifadeleri sağlanırsa sürekli $L: l_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli bir Banach Limiti olur (Lorenz (1948), Banach Limitleri çalışmasına devam etti ve Hemen Hemen Yakınsaklık adlı yeni bir konsept ortaya koydu. $x = (x_n)$ sınırlı dizisi hemen hemen yakınsak olarak adlandırılır ve eğer her L limiti için $L(x_n) = \lambda$ oluyorsa $\lim x_n = \lambda$ sayısına F – limit denir.

Teorem 1.2.2. $x = (x_n)$ dizisinin $\lim x_n = \lambda$ olacak şekilde F - limitinin var olması için gerekli ve yeterli olan koşul:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+k}}{k+1} = \lambda \text{ (n' ye göre düzgün)}$$

olmasıdır(Lorentz, 1948).

Bu sonuca göre Teorem 2.2.2 ve hemen hemen yakınsaklık kavramını dikkate alarak hemen hemen yakınsak dizi uzayları;

$$f = \left\{ x = (x_k) \in w: \exists \lambda \in \mathbb{C} \ni \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^i \frac{x_{n+k}}{i+1} = \lambda, n \text{ ye göre düzgün } \right\},$$

hemen hemen sıfır dizileri

$$f_0 = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^i \frac{x_{n+k}}{i+1} = 0, n \text{ ye göre düzgün } \right\},$$

ve hemen hemen yakınsak serileri

$$fs = \left\{ x = (x_k) \in w: \exists \lambda \in \mathbb{C} \ni \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^i \sum_{j=0}^{n+k} \frac{x_j}{i+1} = \lambda, n \text{ ye göre düzgün } \right\}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 1.2.3. $c \subseteq f \subseteq l_\infty$ ve $F - \lim|_c = \lim$ dir (Boos, 2000).

İspat 1.2.3. $x = (x_k) \in c$ ve $a := \lim x$ olsun. Bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde bir $N \in \mathbb{N}_0$ için

$$|x_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k \geq N) \quad (1.1)$$

ve $n_0 \in \mathbb{N}_0$ için $n_0 > N$ vardır öyle ki

$$\frac{2(N+1)\|x\|_\infty}{n_0+1} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.2)$$

dir. O vakit $p \in \mathbb{N}_0$ ve $n \geq n_0$ için (2.1) ve (2.2) den

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=p}^{p+n} x_k - a \right| &= \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=p}^{p+n} (x_k - a) \right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=p}^{p+n} |x_k - a| \\ &\leq \begin{cases} \frac{1}{n+1} (n+1) \frac{\varepsilon}{2}, & p \geq N \\ \frac{1}{n+1} \sum_{k=p}^N |x_k - a| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N+1}^{p+n} |x_k - a|, & p < N \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2}, & p \geq N \\ \frac{1}{n+1} (N - p + 1) 2\|x\|_\infty + \frac{n + p - N}{n+1} \frac{\varepsilon}{2}, & p < N \end{cases} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x \in f$ ve $F - \lim x = a$ olur ki bu $c \subset f$ ve $F - \lim|_c = \lim$ olduğunu gösterir.

Şimdi $x = (x_k) = (1, 0, 1, \dots) \in f$ ve $F - \lim x = \frac{1}{2}$ olduğunu sağlatalım. O vakit $c \subset f$ kapsaması kesin olduğu elde edilir. Açık olarak $p, n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\frac{n+1}{2} - 1 \leq \sum_{k=p}^{p+n} x_k \leq \frac{n+1}{2} + 1$$

yazılabilir. Bu nedenle $p, n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n+1}{2} - 1 \right)$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=p}^{p+n} x_k$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \left(\frac{n+1}{2} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}$$

elde edilir ki buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=p}^{p+n} x_k = \frac{1}{2} \quad (p \in \mathbb{N}_0 \text{ için düzgün})$$

bulunur. Yani $x \in f$ olur.

Şimdi $f \subset l_\infty$ olduğunu ispatlayalım. $x = (x_k) \in f$, $a \in \mathbb{R}$ ve $n_0 \in \mathbb{N}_0$ olsun ve $n \geq n_0$ ve $p \in \mathbb{N}_0$ için

$$\frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=p}^{p+n} (x_k - a) \right| \leq 1$$

verilsin. O vakit $\forall p \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned}
|x_p| &= \left| \sum_{k=p}^{p+n_0+1} x_k - \sum_{k=p+1}^{p+n_0+1} x_k \right| \\
&= \left| \sum_{k=p}^{p+n_0+1} (x_k - a) - \sum_{k=p+1}^{p+n_0+1} (x_k - a) + a \right| \\
&\leq n_0 + 2 + n_0 + 1 + |a| \\
&= 2n_0 + 3 + |a|
\end{aligned}$$

olup $x \in l_\infty$ olur ki bu $f \subset l_\infty$ olduğunu gösterir.

Şimdi $f \subset l_\infty$ kapsamasının kesin olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için

$$x = (x_k) := (1, 0, 1, 1, 0, 0, \dots, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{(n+1) \text{ tane}}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(n+1) \text{ tane}}, 1, \dots)$$

alalım ve

$$\mu_0 := 0, \quad \mu_1 := 2, \quad \mu_2 := 6, \dots, \mu_n := 2 \sum_{v=0}^{n-1} (v+1) = n(n+1), \dots$$

burada $\mu_n, (n+1)$. birler bloğunun başladığı dizidir. Bu yüzden $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için;

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=\mu_n}^{\mu_n+n} x_k = 1 \text{ ve } \frac{1}{n+1} \sum_{k=\mu_n+n+1}^{\mu_n+2n+1} x_k = 0$$

olup $x \notin f$ dir. Ama kesinlikle $x \in l_\infty$ dir. Yani $c \subset f \subset l_\infty$ Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 1.2.4. f ve f_0 dizi uzayları

$$\|x\|_f = \sup_{i,n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^i \frac{x_{n+k}}{i+1} \right|$$

normu ile fs dizi uzayı da $\|x\|_{fS} = \|Sx\|_f$ normu ile BK – uzayıdır. (Boos, 2000).

Burada $S = (s_{nk})$ matrisi $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için;

$$s_{nk} = \begin{cases} 1 & , 0 \leq k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve toplam matrisi olarak adlandırılır.

1.3. Matris Dönüşümleri ve Dual Uzaylar

Bu bölümde matris dönüşümleri ve dual uzaylar kavramı ele alınmış bu bağlamda çeşitli teoremlere ve bu teoremlerin ispatlarına yer verilmiştir.

1.3.1. Matris Dönüşümleri

Tanım 1.3.1.1. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi için $|x| < 1$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımı yapılan $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = L$$

olması durumunda $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi L değerine Abel toplanabilir denir ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = L(A)$$

olarak ifade edilmektedir.

Örnek 1.3.1.2. Yakınsak her dizinin aritmetik ortalaması da aynı değere yakınsar. Bu şekilde yakınsama Cesaro yakınsaklığı olarak bilinir.

Tanım 1.3.1.3. $A = (a_{nk})$ matrisinin her bir satırı sonlu diziler sınıfı ϕ' ye ait ise yani belli bir yerden sonra sıfır oluyor ise $A = (a_{nk})$ matrisine satır sonlu matris adı verilmektedir (Maddox, 1988).

Örnek 1.3.1.4. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ serisi $\frac{1}{2}$ değerine 1. mertebeden Cesáro ve Abel toplanabilmektedir.

Esasında $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ serisi ele alındığında $\forall n \in \mathbb{N}$ için bu serinin kısmi toplamlar dizisi;

$$s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

şeklinde tanımlı olup burada (s_n) dizisi bilinen tanımı ile yakınsak değildir.

Buna göre (s_n) dizisine 1. Mertebeden Cesaro ve Abel toplanabilirlik kavramlarını uygulayalım.

i. $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$t_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{1 + (-1)^n}{n+1}$$

olmak üzere;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{1 + (-1)^n}{n+1} \right] = \frac{1}{2}$$

elde edilmektedir. Dolayısıyla da

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \frac{1}{2} \quad (C, 1)$$

şeklinde yazılabilmektedir.

ii. $|x| < 1$ için ise

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$$

olduğunda

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu bağlamda

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \frac{1}{2} (A)$$

olarak yazılabilmektedir.

Tanım 1.3.1.5. $A = (a_{nk})$ Reel veya kompleks terimli sonsuz bir matris ve $x = (x_n) \in w$ dizisinde herhangi bir dizi olsun. Buna göre A matrisi ve x dizisinin çarpımı şu şekildedir;

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0k} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k} x_k \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \\ \vdots \end{bmatrix}$$

bunun ise anlamlı bir halde olması $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serilerinin yakınsak olması durumunda mümkündür. Bu noktada ise $y = (y_n) = ((Ax)_n)$ şeklinde tanımlı diziye $x = (x_n)$ dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi ya da A – dönüşümü adı verilmektedir. Bu tez boyunca negatif indisli herhangi bir terimin sıfıra eşit olduğunu varsayacağız.

Yukarıda aritmetik ortalama olarak verilen dizi göz önüne alınırsa matris dönüşümü ile birlikte aritmetik ortalamaya karşılık gelen $C = (c_{nk})$ Cesáro matrisi

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım 1.3.1.6. Eğer $\forall x \in X$ için $Ax \in Y$ oluyorsa A , X den Y ye bir matris dönüşümü tanımlanıyor denir ve $A: X \rightarrow Y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.3.1.7. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ ve $a_{nk} \in \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris ve X de keyfi bir dizi uzayı olması durumunda $A = (a_{nk})$ matrisinin X dizi uzayı üzerindeki etki alanı X_A şeklinde bir gösterime sahiptir. Bununla birlikte

$$X_A = \{x = (x_k) \in w: Ax \in X\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Maddox, 1988).

Tanım 1.3.1.8. Bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $k > n$ olduğunda $a_{nk} = 0$ ve $a_{nn} \neq 0$ şartlarını sağlayan matrise üçgen matris denir. Bir üçgen matrisin tersi mevcut olup bu ters matriste üçgendir. (Wilansky, 1984).

Tanım 1.3.1.9. $S = (s_{nk})$ toplam matrisi olmak üzere bu matrisin etki alanı yardımıyla tanımlanmış olan tüm sınırlı ve yakınsak seri oluşturan dizi uzayları sırasıyla $bs = (\ell_\infty)_s$ ve $cs = c_s$ olarak yazılabilir ve $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$bs = \left\{ x = (x_k) \in w: \sup \left| \sum_{k=0}^n x_k \right| < \infty \right\} = (\ell_\infty)_s$$

$$cs = \left\{ x = (x_k) \in w: \left(\sum_{k=0}^n x_k \right) \in c \right\} = c_s$$

şeklindedir.

1.3.2. Matris Sınıfları

Tanım 1.3.2.1. X ve Y herhangi iki dizi uzayı olması durumunda X ile Y arasındaki matrislerin sınıfı yani X den Y ye matris dönüşümlerinin sınıfı $(X:Y)$ ile gösterilip bu sınıf;

$$(X:Y) = \{A = (a_{nk}) | A: X \rightarrow Y\}$$

veya

$$(X:Y) = \{A = (a_{nk}) : \forall x \in X \text{ için } Ax \in Y\}$$

şeklinde gösterilmektedir (Maddox, 1988).

Tanım 1.3.2.2. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olduğunda $c_A = \{x = (x_k) \in w : Ax \in c\}$ olarak belirtilen küme $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisinin toplanabilirlik alanı adını alır. (Wilansky, 1984).

Bununla birlikte $c \subset c_A$ olması durumunda $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisine konservatif matris adı verilmektedir. Buna göre bahsi geçen konservatif matrislerinin sınıfı $(c:c)$ olarak ifade edilmektedir.

Bu noktada konservatif matrislerin sınıfları ayırt edilebilir. Bunların ayırt edilmesi açısından Kojima-Schur teoreminden yararlanılmaktadır. Bu ise;

Teorem 1.3.2.3. (Kojima-Schur Teoremi) $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisinin $(c:c)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter olan şart;

- i. $\|A\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$
- ii. $\forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = a_k$
- iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} = a$

sağlanmasıdır(Boos, 2001).

Teorem 1.3.2.4. $n = 1, 2, 3, \dots$ için $p_0 = \|\cdot\|_A$ ve $p_n = |x_n|$ olmak üzere A satır sonlu matris ise (c_A, p) bir $FK -$ uzayıdır. Eğer A üçgen bir matris ise (c_A, p_0) bir $BK -$ uzayıdır (Wilansky, 1984).

Tanım 1.3.2.5. X bir normlu dizi uzayı ve (y_k) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=0}^n \delta_k y_k \right\| = 0$$

olacak şekilde bir (δ_k) skaler sayı dizisi bulunabiliyorsa (y_k) dizisine X uzayının Schauder bazı denir ve burada

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k y_k$$

gösterimine $x = (x_k)$ dizisinin $y = (y_k)$ Schauder bazına göre açılımı denir(Choudhary ve Nanda, 1989).

Örnek 1.3.2.6. $\{e^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi k . terimi 1 ve diğer terimleri 0 olan bir dizi ve $e = (1, 1, 1, \dots)$ olmak üzere ;

- i.** c dizi uzayının Schauder bazı $\{e, e^{(0)}, e^{(1)}, e^{(2)}, \dots\}$ dizisidir.
- ii.** c_0 ve l_p dizi uzaylarının Schauder bazı $\{e^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisidir.

Tanım 1.3.2.7. X bir $FK -$ uzayı ve $\phi \subset X$ olsun. Eğer $\{e^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ sınıfı $e^{(k)} = (0, 0, \dots, 1, 0, 0)$ olacak şekilde X dizi uzayı için bir Schauder bazı ise X uzayına $AK -$ özelliğine sahiptir denir.

Tanım 1.3.2.8. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris ve $x = (x_k)$, w 'da bir dizi olmak üzere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (Ax)_k$$

olması durumunda $A = (a_{nk})$ matrisi “regüler matris” şeklinde ifade edilmektedir.

Buna göre söz konusu yakınsak her dizinin aritmetik ortalaması da benzer değere yakınsak olmasından dolayı $C = (c_{nk})$ Cesaro matrisinin regüler olduğu sonucu elde edilebilir.

Regüler matris sınıfları $(c: c; p)$ olarak temsil edilmektedir. Bu noktada regüler matrisler sınıfının ayırt edilebilmesi için Silverman-Teopltz teoreminden faydaniılmaktadır.

Teorem 1.3.2.9. (Silverman-Teopltz Teoremi) $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisinin $(c: c; p)$ sınıfı içerisinde yer alması için gereken ve yeterli olan koşul;

- i. $\|A\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$
- ii. $\forall k \in \mathbb{N}$ sabiti için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0$
- iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} = 1$

sağlanmasıdır (Boos, 2001).

Örnek 1.3.2.10. Bu bağlamda $C = (c_{nk})$ Cesaro matrisinin regüler olduğu şu şekilde gösterilebilir. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olarak tanımlandığında;

- i. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k \left| \frac{1}{n+1} \right| = 1 < \infty$
- ii. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$
- iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \frac{1}{n+1} = 1$

koşullarının sağlanması durumunda $C = (c_{nk}) \in (c; c; p)$ olmaktadır. Yani Cesaro matrisi regülerdir.

Konservatif ve regüler matris tanımları birlikte düşünüldüğünde;

- i. Konservatif her matrisin regüler olmadığı,
- ii. Konservatif olmayan bir matrisin regüler olamayacağı,
- iii. Regüler her matrisin konservatif olduğu

barıdır.

Bir sonraki Lemma için aşağıdaki ifadeleri verelim . Burada $\mathcal{F}$, $\mathbb{N}$ nin sonlu alt kümelerinin sınıfını gösterir ve $p \in [1, \infty)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}|^q < \infty \quad (1.3)$$

$$\sup_{k, n \in \mathbb{N}} |a_{nk}| < \infty \quad (1.4)$$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_n |a_{nk}|^p < \infty \quad (1.5)$$

$$\sup_{K \in \mathbb{N}} \sum_k \left| \sum_{n \in K} a_{nk} \right|^q < \infty \quad (1.6)$$

$$\sup_{K \in \mathbb{F}} \sum_n \left| \sum_{k \in K} a_{nk} \right|^p < \infty \quad (1.7)$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = \xi_k \quad (1.8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} = \xi \quad (1.9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |a_{nk}| = \sum_k \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} \right| \quad (1.10)$$

Lemma 1.3.2.11. $A = (a_{nk})$ sonsuz matris olmak üzere aşağıdakiler sağlanır (Stieglitz ve Tietz, 1977).

$A = (a_{nk}) \in (c_0: l_\infty) = (c: l_\infty) = (l_\infty: l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart $q = 1$ için (1.3) sağlanmasıdır.

i. $A = (a_{nk}) \in (l_p: l_\infty)$ olması için gerekli ve yeterli olan koşul $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $1 < p < \infty$ için (1.3) şartının sağlanmasıdır.

ii. $A = (a_{nk}) \in (l_1: l_\infty)$ olması için gerekli ve yeterli olan koşul (1.4) şartının sağlanmasıdır.

iii. $A = (a_{nk}) \in (l_\infty: c)$ olması için gerekli ve yeterli olan koşul (1.8) ve (1.10) şartlarının sağlanmasıdır.

iv. $A = (a_{nk}) \in (c_0: c)$ olması için gerekli ve yeterli olan koşul, $q = 1$ için (1.3) ve (1.8) sağlanmasıdır.

v. $A = (a_{nk}) \in (l_p: c)$ olması için gerekli ve yeterli olan koşul (1.3) ve (1.8) şartlarının, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $1 < p \leq \infty$ için sağlanmasıdır.

vi. $A = (a_{nk}) \in (l_1: c)$ olması için gerekli ve yeterli olan koşul (1.4) ve (1.8) şartlarının sağlanmasıdır.

vii. $A = (a_{nk}) \in (c_0: c_0)$ olması için gerekli ve yeterli olan koşul (1.3), $q = 1$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\xi_k = 0$ iken (1.8) şartlarının sağlanmasıdır.

viii. $A = (a_{nk}) \in (l_1: l_1)$ olması için gerekli ve yeterli olan koşul $p = 1$ için (1.5) şartının sağlanmasıdır.

ix. $A = (a_{nk}) \in (l_p: l_1)$ olması için gerekli ve yeterli olan koşul $1 < p \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için (1.6) şartının sağlanmasıdır.

x. $A = (a_{nk}) \in (c_0: l_1) = (c: l_1)$ olması için gerekli ve yeterli olan koşul $p = 1$ için (1.7) şartının sağlanmasıdır.

xi. $A = (a_{nk}) \in (l_p: l_p)$ olması için gerekli ve yeterli olan koşul $1 < p < \infty$ için $A = (a_{nk}) \in (l_\infty: l_\infty) \cap (l_1: l_1)$ olmasıdır.

xii. $A = (a_{nk}) \in (c: l_p)$ olması için gerekli ve yeterli olan koşul $p \in [1, \infty)$ için (1.7) şartının sağlanmasıdır.

xiii. $A = (a_{nk}) \in (l_1: l_p)$ olması için gerekli ve yeterli olan koşul $1 < p \leq \infty$ için (1.5) şartının sağlanmasıdır.

Lemma 1.3.2.12. $A = (a_{nk}) \in (l_\infty: c_0) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{nk}| = 0$ şartını sağlamasıdır (Stieglitz and Tietz, 1977).

Lemma 1.3.2.13. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olduğunda şu ifadeler sağlanmaktadır.

i. (Siddiqi, 1971) $A \in (f: l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty \quad (1.11)$$

ii. (Siddiqi, 1971) $A \in (f: c)$ olması için gereken ve yeterli olan koşul (1.11) sağlanır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = a_k \text{ her sabit } k \in \mathbb{N} \text{ için} \quad (1.12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_n a_{nk} = a \quad (1.13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |\Delta(a_{nk} - a_k)| = 0 \quad (1.14)$$

iii. (Duran, 1972). $A \in (f: f)$ olması için gereken ve yeterli olan koşul (1.11) sağlanır ve

$$F - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = a_k \text{ her sabit } k \in \mathbb{N} \text{ için} \quad (1.15)$$

$$F - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} = a \quad (1.16)$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sum_k \left| \Delta \left[\frac{1}{v+1} \sum_{j=0}^v a_{n+j,k} - \zeta_k \right] \right| = 0 \text{ (n'yegöre düzgün)} \quad (1.17)$$

iv. (Başar ve Kirişçi ,2011) $A \in (l_\infty: f)$ olması için gereken ve yeterli olan koşul (1.11) ve (1.15) ve

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sum_k \left| \frac{1}{v+1} \sum_{j=0}^v a_{n+j,k} - \zeta_k \right| = 0 \text{ (n'yegöre düzgün)}$$

sağlanmasıdır.

Teorem 1.3.2.14. Banach koordinat uzayları (BK –uzayı) arasındaki matris dönüşümleri süreklidir (Wilansky, 1984).

Tanım 1.3.2.15. $(X: \|\cdot\|_X)$ bir Banach uzayı ve X in zayıf kompakt konveks bir alt kümesi $E \subset X$ olsun. Eğer $\forall x, y \in E$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

şartını sağlayan her $T: E \rightarrow E$ üzerine dönüşümü sabit noktaya sahip ise o zaman X Banach uzayı zayıf sabit nokta özelliğine sahiptir denir (Garcia-Falset, 1994).

1.3.3. Dual Uzaylar

Bu başlıkta dizi uzayları için tanımlanan α –, β – ve γ – dualleri ele alınmıştır.

Tanım 1.3.3.1. X ve Y herhangi iki dizi uzayı olmak üzere ; X ve Y nin çarpım kümesi

$$M(X, Y) = \{y = (y_k) \in w: \forall x \in X, xy = (x_k y_k) \in Y\}$$

olarak ifade edilmektedir. Bu tanıma göre keyfî bir X dizi uzayının α –, β – ve γ – dualleri şu şekilde tanımlanmaktadır (Garling, 1967).

$$X^\alpha = M(X, l_1) = \left\{ a = (a_k): \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty, \forall x \in X \right\}$$

$$X^\beta = M(X, cs) = \left\{ a = (a_k): \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \text{ yakınsak}, \forall x \in X \right\}$$

$$X^\gamma = M(X, bs) = \left\{ a = (a_k): \sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| < \infty, \forall x \in X \right\}$$

yakınsak her dizinin sınırlı olması dolayısıyla ve $l_1 \subseteq cs$ olduğundan $X^\alpha \subset X^\beta \subset X^\gamma$ olduğu açıktır. Bununla birlikte $X \subset Y$ ise $\xi \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ olmak üzere $Y^\xi \subset X^\xi$ kapsama bağıntısı bulunmaktadır.

Teorem 1.3.3.2. $\xi \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ olmak üzere;

1. $c_0^\xi = c^\xi = l_\infty^\xi = l_1$
2. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $1 < p, q < \infty$ için $l_p^\xi = l_q$

eşitlikleri sağlanmaktadır (Boss, 2001).

Teorem 1.3.3.3. λ ve μ herhangi iki dizi uzayı, B üçgen matris ve A sonsuz bir matris olmak üzere $A \in (\lambda: \mu_B)$ olması için $BA \in (\lambda: \mu)$ olması gerekir (Wilansky, 1984).

1.4. Bazı Geometrik Özellikler

Tanım 1.4.1. (Banach-Saks Özelliği) $(X: \|\cdot\|_X)$ bir Banach uzayı olarak verilsin. O zaman her sınırlı $x = (x_n)$ dizisi bir $y = (y_n)$ alt dizisi içerir öyle ki Cesaro ortalaması

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n y_k$$

norm yakınsak ise X in Banach-Saks özelliğine sahip olduğu söylenir (Beauzamy, 1997).

Tanım 1.4.2. (Zayıf Banach-Saks Özeliği) $(X: \|\cdot\|_X)$ bir Banach uzayı olarak verilsin. O zaman eğer X deki her $x = (x_n)$ zayıf sıfır dizisi bir $y = (y_n)$ alt dizisi içerir öyle ki Cesaro ortalaması

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n y_k$$

norm yakınsak ise X Banach uzayı zayıf Banach-Saks özelliğine sahiptir denir (Beauzamy, 1997).

Tanım 1.4.3. (p Tipi Banach-Saks Özelliği) $(X: \|\cdot\|_X)$ bir Banach uzayı olarak verilsin. O zaman, eğer her $x = (x_n)$ zayıf sıfır dizisi $y = (y_n)$ alt dizisine sahiptir öyle ki bazı $M > 0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| \sum_{k=0}^n y_k \right\|_X \leq M(n+1)^{\frac{1}{p}}$$

ise p tipi X Banach-Saks özelliğine sahiptir. Burada $1 < p < \infty$ dir (Knaust, 1992).

Tanım 1.4.4. X ve Y normlu iki uzay olsun. X den Y ye tanımlı tüm sınırlı lineer dönüşümlerin kümesi $B(X:Y)$, X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin kümesi $B(X:F)$ ile gösterilir. $X^* = B(X:F)$ uzayı X uzayının topolojik duali ya da sürekli duali olarak isimlendirilir.

$$S_X = \{x \in X: \|x\| = 1\}$$

ve

$$B_X = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$$

kümeleri sırasıyla birim yuvar yüzeyi ve kapalı birim yuvar diye isimlendirilir.

X uzayından X uzayına tanımlı lineer dönüşümlerin kümesi $L(X)$ ve sınırlı lineer dönüşümlerin kümesi $B(X)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.4.5. Garcia-Falset tarafından $R(X)$ katsayısı şu şekildedir.

$$R(X) = \sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|x_n - x\| : (x_n) \subset B(X), \quad x_n \xrightarrow{w} 0, \quad x_n \in B_X \right\}$$

Örnek 1.4.6. $R(c_0) = R(l_1) = 1$, $1 \leq p < \infty$ için $R(l_p) = 2^{1/p}$, $R(c) = 2$ dir.

Teorem 1.4.7. $(X: \|\cdot\|_X)$ bir Banach uzayı olsun. Eğer X

$$R(X) = \sup \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n + x\| \right\} < 2$$

şartını sağlarsa bir X Banach uzayı zayıf sabit nokta özelliğine sahiptir denir(Garcia-Falset, 1997).

Tanım 1.4.8. A kümesi, X Banach uzayının alt kümesi olduğunda. $\forall x, y \in A$ için

$$|U_x - U_y| \leq |x - y|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa;

$$U: A \rightarrow X$$

dönüşümüne genişlemeyen(non-expansive) bir dönüşüm olarak ifade edilmektedir(Mursallen, 2006).

Tanım 1.4.9. (Zayıf Sabit Nokta Özelliği) X bir Banach uzayı olsun. X' in zayıf kompakt konveks bir alt kümesi üzerinde tanımlı her genişlemeyen kendine dönüşümün (non-expansive self-mapping) bir sabit noktası varsa X' e zayıf sabit nokta özelliğine sahiptir denir (Mursallen, 2006).

Tanım 1.4.10. (Kesin Konveks Uzay) $\forall x \in S(X)$ noktası $B(X)'$ in bir ekstremum noktası olan X Banach uzayına kesin konveks uzay adı verilmektedir (Sanhan ve Suantal, 2003).

Tanım 1.4.11. (Düzgün Konveks Uzay) Herhangi $\varepsilon \in (0, 1)$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olan herhangi $x, y \in S(X)$ için

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) \in (0, 1)$ varsa X Banach uzayına düzgün konveks uzay denir(Sanhan ve Suantal, 2003).



2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu başlık altında fark matrisleri ile ilgili daha önce ele alınan çalışmalara yer verilmiştir.

Ayrıca $Q = Q(r, s, t, u)$ dörtlü band matrisinin etki alanı kullanılarak $f(Q(r, s, t, u))$, $f_0(Q(r, s, t, u))$, ve $fs(Q(r, s, t, u))$ dizi uzayları inşası ile alakalı eski çalışmalara yer verilecek olup bu uzayların BK – uzayı oldukları ve sırasıyla f , f_0 ve fs dizi uzaylarına lineer izomorfik olduğunu da ispatlayacağız.

Dizi uzaylarını tanımlamak için fark matrisleri ilk kez Kızmaz tarafından kullanıldı. (Kızmaz, 1981). $c_0(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $l_\infty(\Delta)$ fark dizi uzaylarını ileri fark matrisini $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $\Delta = (e_{nk})$ olarak gösterip

$$e_{nk} = \begin{cases} 1 & , \quad k = n \\ -1 & , \quad k = n + 1 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayıp

$$c_0(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - x_{k+1}) = 0 \right\}$$

$$c(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - x_{k+1}) \text{ mevcut} \right\}$$

ve

$$l_\infty(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - x_{k+1}| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımladı.

Sonrasında Başar ve Kirişçi fark matrislerinin genelleştirerek fark dizi uzaylarını tanımlamada kullandı ve $\hat{f}$ ve $\hat{f}_0$ dizi uzaylarında

$$\hat{f}_0 = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \frac{rx_{n+j} + sx_{n+j-1}}{m+1} = 0, \text{ n'yegöre düzgün} \right\}$$

ve

$$\hat{f} = \left\{ x = (x_k) \in w: \exists \lambda \in \mathbb{C} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \frac{rx_{n+j} + sx_{n+j-1}}{m+1} = \lambda, \text{ n'yegöre düzgün} \right\}$$

şeklinde tanımlandı. Ayrıca Sönmez (2013) üçlü band matrisinin etki alanı tarafından türetilen hemen hemen yakınsak ve hemen hemen sıfıra yakınsak $f(B(r, s, t))$ ile $f_0(B(r, s, t))$ dizi uzaylarını;

$$f(B(r, s, t)) = \left\{ x = (x_k) \in w: \exists \lambda \in \mathbb{C} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \frac{rx_{n+j} + sx_{n+j-1} + tx_{n+j-2}}{m+1} = \lambda, \text{ n'yegöre düzgün} \right\}$$

ve

$$f_0(B(r, s, t)) = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \frac{rx_{n+j} + sx_{n+j-1} + tx_{n+j-2}}{m+1} = 0, \text{ n'yegöre düzgün} \right\}$$

şeklinde tanımlamıştır.

Son olarak ise Bişgin $1 \leq p < \infty$ için dörtlü band matrisinin etki alanı tarafından türetilen $c_0(Q)$, $c(Q)$, $\ell_\infty(Q)$ ve $\ell_p(Q)$ dizi uzaylarını inşa etti. Ayrıca dörtlü band matrisi, Δ^3 , $B(r, s, t)$, Δ^2 , $B(r, s)$ ve Δ şeklinde tanımlı ve sırasıyla üçüncü mertebeden fark, üçlü band, ikinci mertebeden fark, ikili band ve fark ile adlandırılan matrisleri genelleştirmiş oldu. Dahası $c_0(Q)$, $c(Q)$, $\ell_\infty(Q)$ ve $\ell_p(Q)$ uzaylarının sırasıyla c_0 , c , ℓ_∞ ve ℓ_p uzaylarına izomorfik olduğunu gösterdi. Üstelik bazı kapsama bağıntılarından da bahsetti.

Keyfi bir $x = (x_k) \in w$ olsun. O zaman $\forall k \in \mathbb{N}$ için x 'in $Q(r, s, t, u)$ dönüşümü $r, s, t, u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için;

$$(Qx)_k = y_k = rx_k + sx_{k-1} + tx_{k-2} + ux_{k-3}$$

şeklinde olsun. O zaman dörtlü band matris $Q = Q(r, s, t, u) = (q_{nk}(r, s, t, u)) \forall n, k \in \mathbb{N}$ için;

$$q_{nk}(r, s, t, u) = \begin{cases} r & , & k = n \\ s & , & k = n - 1 \\ t & , & k = n - 2 \\ u & , & k = n - 3 \\ 0 & , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada dikkat etmemiz gerekir ki $Q(1, -3, 3, -1) = \Delta^3$, $Q(r, s, t, 0) = B(r, s, t)$, $Q(1, -2, 1, 0) = \Delta^2$, $Q(r, s, 0, 0) = B(r, s)$ ve $Q(1, -1) = \Delta$ olur. Bu yüzden, dörtlü band matrisi kullanarak türettiğimiz sonuçlar yukarıda bahsedilen diğer matris kullanarak elde edilen sonuçlardan daha genel ve kapsamlıdır.

Şimdi biz dörtlü band matrisleri vasıtasıyla türetilen hemen hemen yakınsak dizi uzaylarını $f_0(Q(r, s, t, u))$, $f(Q(r, s, t, u))$ ve $fs(Q(r, s, t, u))$ şeklinde gösterip sırasıyla aşağıdaki gibi inşa edeceğiz.

$$f_0(Q(r, s, t, u)) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^i \frac{rx_{n+j} + sx_{n+j-1} + tx_{n+j-2} + ux_{n+j-3}}{i+1} = 0, n' \text{yegöre düzgün} \right\}$$

$$f(Q(r, s, t, u)) = \left\{ x = (x_k) \in w : \exists \lambda \in \mathbb{C} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^i \frac{rx_{n+j} + sx_{n+j-1} + tx_{n+j-2} + ux_{n+j-3}}{i+1} = \lambda, n' \text{yegöre düzgün} \right\}$$

ve

$$\begin{aligned}
& fs(Q(r, s, t, u)) \\
& = \left\{ x = (x_k) \in w : \exists \lambda \in \mathbb{C} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^i \sum_{v=0}^{n+j} \frac{rx_v + sx_{v-1} + tx_{v-2} + ux_{v-3}}{i+1} \right. \\
& \quad \left. = \lambda, n' \text{yegöre düzgün} \right\}
\end{aligned}$$

olur. $X_A = \{x = (x_k) \in w : Ax \in X\}$ notasyonunu dikkate alırsak $f_0(Q(r, s, t, u))$, $f(Q(r, s, t, u))$ ve $fs(Q(r, s, t, u))$ dizi uzayları $Q(r, s, t, u)$ dörtlü band matrisinin etki alanı vasıtasıyla aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$f_0(Q) = (f_0)_Q, \quad f(Q) = f_Q \quad \text{ve} \quad fs(Q) = fs_Q \quad (2.1)$$

Teorem 2.1. $f_0(Q(r, s, t, u)), f(Q(r, s, t, u))$ ve $fs(Q(r, s, t, u))$ dizi uzayları

$$\|x\|_{f(Q(r, s, t, u))} = \|x\|_{f_0(Q(r, s, t, u))} = \|Q(r, s, t, u)x\|_f$$

ve

$$\|x\|_{fs(Q(r, s, t, u))} = \|Q(r, s, t, u)x\|_{fs}$$

şeklinde tanımlanan norm ile birlikte sırasıyla BK - uzayıdırlar.

İspat 2.1. f_0, f ve fs nin BK –uzayları olduğu aşıkardır ve $Q = Q(r, s, t, u)$ bir üçgen matristir. Dahası, (2.1) sağlanır. Wilansky(1984)’in Teorem 1.3.2.4 ve bu üç koşulu birleştirerek biz $f_0(Q(r, s, t, u)), f(Q(r, s, t, u))$ ve $fs(Q(r, s, t, u))$ dizi uzaylarının her birinin birer BK –uzayı olduğu çıkarımında bulunuruz. Bu ise ispatımızı tamamlar.

Şimdi $r, s, t, u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere;

$$rz^3 + sz^2 + tz + u = 0$$

denklemini ele alalım, bu denklemin kökleri

$$z_1 = \frac{1}{3r} [a - b - s],$$

$$z_2 = -\frac{1}{6r} [(1 - i\sqrt{3})a - (1 + i\sqrt{3})b + 2s]$$

ve

$$z_3 = -\frac{1}{6r} [(1 + i\sqrt{3})a - (1 - i\sqrt{3})b + 2s]$$

şeklinde olup; burada

$$a = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(-27r^2u + 9rst - 2s^3)^2 + 4(3rt - s^2)^3} - 27r^2u + 9rst - 2s^3}{2}}$$

ve

$$b = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(-27r^2u + 9rst - 2s^3)^2 + 4(3rt - s^2)^3} + 27r^2u - 9rst + 2s^3}{2}}$$

şeklinde tanımlanır. Burada ve devamında aksi belirtilmedikçe $rz^3 + sz^2 + tz + u = 0$ denkleminin üç kökünü rastgele μ_1, μ_2 ve μ_3 varsayacağız. Ayrıca, biz basit bir hesaplama kullanarak;

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = -\frac{s}{r}, \quad \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 = \frac{t}{r} \quad \text{ve} \quad \mu_1\mu_2\mu_3 = -\frac{u}{r}$$

$$\mu_1^3 + \frac{s}{r}\mu_1^2 + \frac{t}{r}\mu_1 + \frac{u}{r} = 0 \tag{2.2}$$

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \frac{s}{r}(\mu_1 + \mu_2) + \mu_1\mu_2 + \frac{t}{r} = 0 \tag{2.3}$$

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 + \frac{s}{r}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + \frac{t}{r} = 0 \tag{2.4}$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \frac{s}{r} = 0 \quad (2.5)$$

elde ederiz.

Teorem 2.2. $f_0(Q(r, s, t, u))$, $f(Q(r, s, t, u))$ ve $fs(Q(r, s, t, u))$ dizi uzayları sırasıyla f_0 , f ve fs dizi uzayları ile lineer olarak izomorfiktirler.

İspat 2.2. Benzer ifadeleri tekrar tekrar kullanmamak için sadece $f(Q(r, s, t, u))$ dizi uzayının ispatını vereceğiz. İspat için $f(Q(r, s, t, u))$ ve f uzaylarının arasında birebir örten ve norm koruyan lineer dönüşümünün mevcudiyetini göstermeye ihtiyaç duyarız.

$L: f(Q(r, s, t, u)) \rightarrow f, L(x) = Qx$ şeklinde tanımlı L dönüşümünü göz önüne alalım. L 'nin lineer olduğu açıktır. Ayrıca, $x = (x_k) \in f(Q(r, s, t, u))$ olduğunda $L(x) = Q(r, s, t, u)x \in f$ olduğu açıktır. Ek olarak $L(x) = 0$ olduğunda $x = 0$ kolayca görülebilir. Bu yüzden L birebirdir.

$y = (y_k) \in f$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x = (x_k)$ dizisini;

$$x_k = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-j} \sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{k-j-i-v} \mu_2^v \mu_3^i y_j$$

şeklinde tanımlayalım. Sonrasında ise (2.2)-(2.5) eşitliklerini göz önünde bulundurularak $\forall k \in \mathbb{N}$ için;

$$(Qx)_k = rx_k + sx_{k-1} + tx_{k-2} + ux_{k-3}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-j} \sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{k-j-i-v} \mu_2^v \mu_3^i y_j + \frac{s}{r} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{k-j-1} \sum_{v=0}^{k-j-i-1} \mu_1^{k-j-i-v-1} \mu_2^v \mu_3^i y_j \\ &+ \frac{t}{r} \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{i=0}^{k-j-2} \sum_{v=0}^{k-j-i-2} \mu_1^{k-j-i-v-2} \mu_2^v \mu_3^i y_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{u}{r} \sum_{j=0}^{k-3} \sum_{i=0}^{k-j-3} \sum_{v=0}^{k-j-i-3} \mu_1^{k-j-i-v-3} \mu_2^v \mu_3^i y_j \\
& = \sum_{j=0}^{k-3} \left[\sum_{i=0}^{k-j-3} \left[\sum_{v=0}^{k-j-i-3} \mu_3^i \mu_2^v \mu_1^{k-j-i-v-3} \left(\mu_1^3 + \frac{S}{r} \mu_1^2 + \frac{t}{r} \mu_1 + \frac{u}{r} \right) \right. \right. \\
& + \mu_3^i \mu_2^{k-j-i-2} \left(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \frac{S}{r} (\mu_1 + \mu_2) + \mu_1 \mu_2 + \frac{t}{r} \right) \\
& + \mu_3^{k-j-2} \left(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_3 + \frac{S}{r} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + \frac{t}{r} \right) \left. \right] y_j \\
& + \left[y_{k-2} \left(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_3 + \frac{S}{r} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + \frac{t}{r} \right) \right. \\
& + y_{k-1} \left(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \frac{S}{r} \right) + y_k \left. \right] \\
& = y_k
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu bize

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^i \frac{rx_{n+j} + sx_{n+j-1} + tx_{n+j-2} + ux_{n+j-3}}{i+1} = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^i \frac{y_{n+j}}{i+1} = F - \lim y_n$$

eşitliğinin sağlandığını gösterir. O halde $x = (x_k) \in f(Q(r, s, t, u))$ ve $L(x) = y$ 'dir. L örtendir. Ayrıca $\forall x = (x_k) \in f(Q(r, s, t, u))$ için;

$$\|L(x)\|_f = \|Q(r, s, t, u)x\|_f = \|x\|_{f(Q(r, s, t, u))}$$

yazılabilir. Bundan dolayı L norm koruyandır. Bu ise istediğimiz gibi $f(Q(r, s, t, u))$ ve f dizi uzayları arasında L birebir örten ve norm koruyan lineer bir dönüşüm bulunduğumuzu gösterir. Yani $f(Q(r, s, t, u)) \cong f$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

3. $f(Q)$ ve $fs(Q)$ DİZİ UZAYLARIN SCHAUDER BAZLARI İLE β – ve γ – DUALLERİ

Bu bölümde $f(Q(r, s, t, u))$ ve $fs(Q(r, s, t, u))$ dizi uzaylarının β – ve γ – duallerinin belirleyip $f(Q(r, s, t, u))$ ve $fs(Q(r, s, t, u))$ dizi uzaylarının Schauder bazlarını vereceğiz.

Teorem 3.1. $f, (l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ nin ayrılabilir olmayan kapalı bir alt kümesidir(Başar ve Kirişçi ,2011).

İspat 3.1. Keyfi olarak alınan X dizi uzayını

$$X := \{x = (x_k) \in w : x_k \in \{0, 1\}, \forall k \in \mathbb{N}\} \subset l_\infty$$

şeklinde tanımlayalım ve x dizisini de;

$$x_k = \begin{cases} 1, & (k = n^2, n \in \mathbb{N}) \\ 0, & (k \neq n^2, n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

şeklinde verilsin. Buradan X 'in sayılamaz olduğu açıktır ve

$$F - \lim x_k = 0$$

dır.Ayrıca $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. O zaman $\frac{1}{\sqrt{k_0}} < \frac{1}{\varepsilon}$ koşulunu sağlayan $\forall k_0 \in \mathbb{N}$ için;

$$t_{mn}(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m x_{n+j} \leq \frac{1}{m+1} (\sqrt{m+1} + 1) \leq \frac{2}{\sqrt{k_0}} < \varepsilon$$

ifadesi $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq k_0$ olmak üzere sağlanır. Bundan dolayı $m \rightarrow \infty$ iken $t_{mn}(x) \rightarrow 0$ (n 'ye göre düzgün) dır.Buradan $x \in f$ olur ki bu da bize $X \subset f$ kapsamasını verir.

Bu yüzden f , 0'lar ve 1'lerden oluşan sayılamayan bir X dizi uzayını içerir. Dahası $x \neq y$ iken $\forall x, y \in X$ için $\|x - y\|_\infty = 1$ olduğu için $(f, \|\cdot\|_\infty)$ uzayı

ayrılabilir değildir.

$f \subset l_\infty$ olduğu Teorem 1.2.3. den biliniyor. f bir FK – uzayıdır ve FK – topolojisi $\|\cdot\|_\infty$ – topolojisinden daha güçlüdür. Ancak FK – topolojisini üreten doğal yarınormlar açık olarak $\|\cdot\|_\infty$ – sürekli olduğundan f nin FK – topolojisi $\|\cdot\|_\infty$ – tarafından türetilmiştir. Bundan dolayı f, l_∞ ’ un kapalı alt uzayıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Bu teorem de bize bir sonraki Sonuç 3.2. yi verir.

Sonuç 3.2. Hemen hemen yakınsak f dizi uzayı Schauder bazlarına sahip değildir. (Başar ve Kirişçi ,2011)

Açıklama 3.3. X keyfi bir dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ üçlü band matrisi olmak üzere, X_A nın bir baza sahip olması için gerek ve yeter şart X in bir baza sahip olmasıdır.(Malkowsky, 1998).

Açıklama 3.3. ve Sonuç 3.2. bize bir sonraki sonucu verir.

Sonuç 3.4. $f(Q(r, s, t, u))$ ve $fs(Q(r, s, t, u))$ dizi uzaylarının Schauder bazları yoktur(Bişgin, 2021).

Teorem 3.5. Kompleks sayılardan oluşan keyfi olarak verilen sonsuz bir $A = (a_{nk})$ matrisi için aşağıdakiler sağlanır (Bişgin, 2021).

i. $A \in (c(Q): \ell_p)$ ancak ve ancak

$$\sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k \in K} g_{nk}^{r,s,t,u} \right|^p < \infty \quad (3.1)$$

$$g_{nk}^{r,s,t,u} \quad \forall k, n \in \mathbb{N} \text{ için mevcuttur} \quad (3.2)$$

$$\sum_k g_{nk}^{r,s,t,u} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ için yakınsar.} \quad (3.3)$$

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^m \left| \frac{1}{r} \sum_{j=k}^m \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_{nj} \right| < \infty, n \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

Burada $1 \leq p < \infty$ dır.

ii. $A \in (c(Q): l_\infty) \Leftrightarrow (3.2)$ ve (3.4) sağlanır ayrıca

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |g_{nk}^{r,s,t,u}| < \infty \quad (3.5)$$

Burada $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için;

$$g_{nk}^{r,s,t,u} = \frac{1}{r} \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_{nj}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.6. Keyfi olarak verilen ve karmaşık sayılardan oluşan sonsuz $A = (a_{nk})$ matrisi için, $A \in (c(Q): c) \Leftrightarrow (3.2), (3.4)$ ve (3.5) sağlanır ayrıca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{nk}^{r,s,t,u} = \alpha_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ için} \quad (3.6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k g_{nk}^{r,s,t,u} = \alpha \quad (3.7)$$

(Bişgin, 2021)

Şimdi bir sonraki Lemmada kullanılmak üzere aşağıdaki ifadeleri verelim. Keyfi olarak verilen ve kompleks sayılardan oluşan sonsuz matris $A = (a_{nk})$ için ;

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty, \quad (3.8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = \xi_k, \quad (3.9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} = \xi, \quad \text{her sabit } k \in \mathbb{N} \text{ için} \quad (3.10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |\Delta(a_{nk} - \xi_k)| = 0, \quad (3.11)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\Delta a_{nk}| < \infty, \quad (3.12)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 \quad \forall \text{ sabit } n \in \mathbb{N} \text{ için}, \quad (3.13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |\Delta^2 a_{nk}| = a, \quad (3.14)$$

$\Delta a_{nk} = a_{nk} - a_{n,k+1}$ ve $\Delta^2 a_{nk} = \Delta(\Delta a_{nk})$ olup aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz.

Lemma 3.7. Kompleks sayılardan oluşan $A = (a_{nk})$ sonsuz matris için alttakiler geçerlidir.

- i. $A = (a_{nk}) \in (fs: l_\infty) \Leftrightarrow (3.12) \text{ ve } (3.13)$ (Başar ve Kirişçi ,2011)
- ii. $A = (a_{nk}) \in (fs: c) \Leftrightarrow (3.9), (3.12), (3.13) \text{ ve } (3.14)$ (Öztürk, 1983)

Teorem 3.8. Aşağıdaki gibi verilen $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ ve t_7 kümeleri;

$$t_1 = \left\{ a = (a_k) \in w: \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{r} \sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_j \right| < \infty \right\},$$

$$t_2 = \left\{ a = (a_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_j, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ için mevcut} \right\},$$

$$t_3 = \left\{ a = (a_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left[\frac{1}{r} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-j} \sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i \right] a_k \text{ mevcut} \right\},$$

$$t_4 = \left\{ a = (a_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \left\| \Delta \left[\frac{1}{r} \sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_j - \xi_k \right] \right\| = 0 \right\},$$

$$t_5 = \left\{ a = (a_k) \in w: \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k \left| \Delta \left[\frac{1}{r} \sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_j \right] \right| < \infty \right\},$$

$$t_6 = \left\{ a = (a_k) \in w: \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_j = 0, \forall n \in \mathbb{N} \text{ için} \right\},$$

ve

$$t_7 = \left\{ a = (a_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \left| \Delta^2 \left[\frac{1}{r} \sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_j \right] \right| \text{ mevcut} \right\},$$

göz önüne alınsın. Burada $\forall k \in \mathbb{N}$ için;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_j = \xi_k$$

olup aşağıdaki eşitlikler gerçekleşir.

- i. $\{f(Q(r, s, t, u))\}^\beta = t_1 \cap t_2 \cap t_3 \cap t_4;$
- ii. $\{f(Q(r, s, t, u))\}^\gamma = t_1;$
- iii. $\{fs(Q(r, s, t, u))\}^\beta = t_2 \cap t_5 \cap t_6 \cap t_7;$
- iv. $\{fs(Q(r, s, t, u))\}^\gamma = t_5 \cap t_6;$

İspat 3.8. Benzer ifadelerin tekrarından kaçınmak için , sadece (i) nin ispatını vereceğiz.

O halde $a = (a_k) \in w$ olmak üzere $\forall k \in \mathbb{N}$ için;

$$x = (x_k) = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-j} \sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{k-j-i-v} \mu_2^v \mu_3^i y_j$$

şeklinde ele alalım. O zaman $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n a_k x_k &= \sum_{k=0}^n \left[\frac{1}{r} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-j} \sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{k-j-i-v} \mu_2^v \mu_3^i y_j \right] a_k \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\frac{1}{r} \sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_j \right] y_k \\
&= (Dy)_n
\end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için $D = (d_{nk})$ matrisi;

$$d_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{r} \sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_j, & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu yüzden $x = (x_k) \in f(Q(r, s, t, u))$ olması durumunda $ax = (a_k x_k) \in cs$ olması için gerek ve yeter şart $y = (y_k) \in f$ olması durumunda $Dy \in c$ olmasıdır, yani buradan $a = (a_k) \in \{f(Q(r, s, t, u))\}^\beta$ gerek ve yeter şart $D \in (f:c)$ dir. Bu sonuç ve Lemma 1.3.2.13. ii birlikte düşünülürse $a = (a_k) \in \{f(Q(r, s, t, u))\}^\beta$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |d_{nk}| < \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{nk} = \xi_k \text{ her sabit } k \in \mathbb{N} \text{ için;}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k d_{nk} = \xi$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |\Delta(d_{nk} - \xi_k)| = 0$$

olup bu da bize $\{f(Q(r, s, t, u))\}^\beta = t_1 \cap t_2 \cap t_3 \cap t_4$ eşitliğini sağlar. Bu da ispatı tamamlar.

4.MATRİS SINIFLARI

Bu bölümde $f(Q(r, s, t, u))$ ve $fs(Q(r, s, t, u))$ dizi uzaylarının matris sınıfları arasındaki ilişkiyi karakterize ediyoruz. Burada ve sonrasında $G = (g_{nk})$ ve $V = (v_{nk})$ matrisleri $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için;

$$g_{nk} = \frac{1}{r} \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_{nj} \quad (4.1)$$

$$v_{nk} = r a_{nk} + s a_{n-1,k} + t a_{n-2,k} + u a_{n-3,k} \quad (4.2)$$

eşitlikleri ile tanımlanacaktır.

Teorem 4.1. X keyfi bir dizi uzayı olmak üzere $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi (4.1) ve (4.2) bağıntılarını sağlasın. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- i. $A = (a_{nk}) \in (f(Q(r, s, t, u)): X) \Leftrightarrow G = (g_{nk}) \in (f: X)$ ve $\{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{f(Q(r, s, t, u))\}^\beta \forall n \in \mathbb{N}$ için;
- ii. $A = (a_{nk}) \in (X: f(Q(r, s, t, u))) \Leftrightarrow V = (v_{nk}) \in (X: f)$.

İspat 4.1.

i. $A = (a_{nk}) \in (f(Q(r, s, t, u)): X)$ olduğunu varsayalım. Burada $y = (y_k) = Q(r, s, t, u)x$ olmak üzere keyfi bir $y = (y_k) \in f$ alalım ve $f(Q(r, s, t, u)) \cong f$ izomorfizmini göz önüne alalım.

O zaman $GQ(r, s, t, u)$ mevcut ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{f(Q(r, s, t, u))\}^\beta$ olur ki; bu $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{g_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in l_1$ olmasını sağlar. Bundan dolayı Gy mevcut ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$\sum_k g_{nk} y_k = \sum_k a_{nk} x_k$$

olur. Yani $Gy = Ax$ ' dir. Bu yüzden $G \in (f: X)$ olur.

Tersine ise $G \in (f: X)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{f(Q(r, s, t, u))\}^\beta$ olduğunu varsayalım. Şimdi keyfi bir $x = (x_k) \in f(Q(r, s, t, u))$ dizi alalım. O zaman Ax dönüşümü açık olarak mevcuttur. Dahası $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\sigma} a_{nk} x_k &= \sum_{k=0}^{\sigma} \left[\frac{1}{r} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-j} \sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i y_j \right] a_{nk} \\ &= \sum_{k=0}^{\sigma} \left[\frac{1}{r} \sum_{j=k}^{\sigma} \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_{nj} \right] y_k \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Eğer biz $\sigma \rightarrow \infty$ için limit alırsak, $Ax = Gy$ elde ederiz. Burdan da

$$A = (a_{nk}) \in (f(Q(r, s, t, u)): X)$$

olur.

ii. Herhangi bir $x = (x_k) \in X$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned} \{Q(Ax)\}_n &= r(Ax)_n + s(Ax)_{n-1} + t(Ax)_{n-2} + u(Ax)_{n-3} \\ &= \sum_k (ra_{nk} + sa_{n-1,k} + ta_{n-2,k} + ua_{n-3,k}) x_k \\ &= (Vx)_n \end{aligned}$$

eşitliğini gözönüne alalım. Her iki tarafın genelleştirilmiş limiti alınırsa buradan $Ax \in f(Q(r, s, t, u))$ olması için gerek ve yeter şart $Vx \in f$ olmasıyladır. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi biz bir sonraki lemma için $A = (a_{nk})$ bir sonsuz matrisini dikkate alarak aşağıdaki eşitlikleri yazalım.

$$F - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = \xi_k \text{ her sabit } k \in \mathbb{N} \quad (4.3)$$

$$F - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} = \xi, \quad (4.4)$$

$$F - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n a_{jk} = \xi_k \quad \text{her sabit } k \in \mathbb{N}, \quad (4.5)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k \left| \Delta \left(\sum_{j=0}^n a_{jk} \right) \right| < \infty, \quad (4.6)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k \left| \sum_{j=0}^n a_{jk} \right| < \infty, \quad (4.7)$$

$$\sum_n a_{nk} = \xi_k \quad \text{her sabit } k \in \mathbb{N}, \quad (4.8)$$

$$\sum_n \sum_k a_{nk} = \xi, \quad (4.9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \left| \Delta \left[\sum_{j=0}^n a_{jk} - \xi_k \right] \right| = 0, \quad (4.10)$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sum_k \left| \frac{1}{v+1} \sum_{j=0}^v a_{n+j,k} - \xi_k \right| = 0 \text{ n'ye göre düzgün}, \quad (4.11)$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sum_k \left| \Delta \left[\frac{1}{v+1} \sum_{j=0}^v a_{n+j,k} - \xi_k \right] \right| = 0 \text{ n'ye göre düzgün}, \quad (4.12)$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sum_k \frac{1}{v+1} \left| \sum_{i=0}^{n+i} \Delta \left[\sum_{j=0}^v a_{jk} - \xi_k \right] \right| = 0 \text{ n'ye göre düzgün}, \quad (4.13)$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sum_k \frac{1}{v+1} \left\| \sum_{i=0}^v \Delta^2 \left[\sum_{j=0}^{n+i} a_{jk} - \xi_k \right] \right\| = 0 \text{ n'ye göre düzgün,} \quad (4.14)$$

Lemma 4.2. $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi için aşağıdakiler doğrudur.

- i. $A = (a_{nk}) \in (c: f) \Leftrightarrow (3.8), (4.3) \text{ ve } (4.4)$ (King, 1966).
- ii. $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty: f) \Leftrightarrow (3.8), (4.3) \text{ ve } (4.11)$ (Duran, 1972).
- iii. $A = (a_{nk}) \in (f: f) \Leftrightarrow (3.8), (4.3), (4.4) \text{ ve } (4.12)$ (Duran, 1972).
- iv. $A = (a_{nk}) \in (f: cs) \Leftrightarrow (4.7), (4.8), (4.9) \text{ ve } (4.10)$ (Başar, 1989).
- v. $A = (a_{nk}) \in (cs: f) \Leftrightarrow (3.12) \text{ ve } (3.3)$ (Başar ve Çolak, 1989).
- vi. $A = (a_{nk}) \in (cs: fs) \Leftrightarrow (4.5) \text{ ve } (4.6)$ (Başar ve Çolak, 1989).
- vii. $A = (a_{nk}) \in (bs: f) \Leftrightarrow (3.12), (3.13), (4.3) \text{ ve } (4.13)$ (Başar ve Solak, 1989).
- viii. $A = (a_{nk}) \in (bs: fs) \Leftrightarrow (3.13), (4.5), (4.6) \text{ ve } (4.13)$ (Başar ve Solak, 1989).
- ix. $A = (a_{nk}) \in (fs: f) \Leftrightarrow (3.13), (4.3), (4.12) \text{ ve } (4.13)$ (Başar, 1989).
- x. $A = (a_{nk}) \in (fs: fs) \Leftrightarrow (4.5), (4.6), (4.13) \text{ ve } (4.14)$ (Başar, 1989).

Biz Lemma 3.6. , (4.1) ve (4.2) bağıntıları, Teorem 4.1. ve Lemma 4.2. yi kombinlersek, bize iki sonuç daha verebilir.

Sonuç 4.3. (3.8) – (3.14) ve (4.3)-(4.14) de $A = (a_{nk})$ matrisinin girdilerinin yerine $G = (g_{nk})$ matrisinin girdilerini ele alalım. Bu durumda aşağıdaki durumlar ortaya çıkar (Bişgin, 2021).

- i. $A = (a_{nk}) \in (f(Q(r, s, t, u)): c) \Leftrightarrow \{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{f(Q(r, s, t, u))\}^\beta, \forall n \in \mathbb{N}$ için ve (3.8), (3.9), (3.10) ve (3.14) sağlar;
- ii. $A = (a_{nk}) \in (f(Q(r, s, t, u)): \ell_\infty) \Leftrightarrow \{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{f(Q(r, s, t, u))\}^\beta \forall n \in \mathbb{N}$ ve (3.8);
- iii. $A = (a_{nk}) \in (f(Q(r, s, t, u)): cs) \Leftrightarrow \{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{f(Q(r, s, t, u))\}^\beta \forall n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ ve (4.7), (4.8) ve (4.10);

- iv.** $A = (a_{nk}) \in (f(Q(r, s, t, u)): bs) \Leftrightarrow \{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{f(Q(r, s, t, u))\}^\beta \forall n \in \mathbb{N}$ ve (4.8) dir.

Sonuç 4.4. (3.8) – (3.14) ve (4.3)-(4.14) de $A = (a_{nk})$ matrisinin girdilerinin yerine $V = (v_{nk})$ matrisinin girdilerini ele alalım. Bu durumda aşağıdaki durumlar ortaya çıkar (Bişgin, 2021).

- i.** $A = (a_{nk}) \in (c: f(Q(r, s, t, u))) \Leftrightarrow (3.8), (4.3) \text{ ve } (4.4)$
- ii.** $A = (a_{nk}) \in (l_\infty: f(Q(r, s, t, u))) \Leftrightarrow (3.8), (4.3) \text{ ve } (4.11)$
- iii.** $A = (a_{nk}) \in (f: f(Q(r, s, t, u))) \Leftrightarrow (3.8), (4.3), (4.4) \text{ ve } (4.12)$
- iv.** $A = (a_{nk}) \in (cs: f(Q(r, s, t, u))) \Leftrightarrow (3.12) \text{ ve } (4.3)$
- v.** $A = (a_{nk}) \in (bs: f(Q(r, s, t, u))) \Leftrightarrow (3.12), (3.13), (4.3) \text{ ve } (4.13)$
- vi.** $A = (a_{nk}) \in (fs: f(Q(r, s, t, u))) \Leftrightarrow (4.13), (5.3), (5.12) \text{ ve } (5.13)$
- vii.** $A = (a_{nk}) \in (cs: fs(Q(r, s, t, u))) \Leftrightarrow (4.5) \text{ ve } (4.6)$
- viii.** $A = (a_{nk}) \in (bs: fs(Q(r, s, t, u))) \Leftrightarrow (3.13), (4.5), (4.6) \text{ ve } (4.13)$
- ix.** $A = (a_{nk}) \in (fs: fs(Q(r, s, t, u))) \Leftrightarrow (4.5), (4.6), (4.13) \text{ ve } (4.14)$

5. $l_p(Q(r, s, t, u))$ DİZİ UZAYININ BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde $l_p(Q(r, s, t, u))$ dizi uzayının bazı geometrik özelliklerinden bahsedilecektir. Bahsetmeden önce birkaç özellik belirtelim.

Tanım 5.1. X Normlu bir Banach uzayı ve $S(X)$ de X in bir birim küresi olsun, o halde $0 \leq \epsilon \leq 2$ olmak üzere;

$$\beta_X(\epsilon) = \inf \left\{ 1 - \inf_{0 \leq a \leq 1} \|ax + (1-a)y\| : x, y \in S(X), \|x - y\| = \epsilon \right\}$$

eşitliğine Gurarii'nin konvekslik modülü diye isimlendirilir(Sanchez and Ullan, 1998).

Teorem 5.2. $l_p(Q)$ dizi uzayı p Tipi Banach-Saks özelliğine sahiptir(Bişgin, 2021)..

İspat 5.2. $B(l_p(Q))$, $l_p(Q)'$ nun birim yuvarı olmak üzere, $x = (x_n) \in B(l_p(Q))$ şeklinde zayıf sıfır dizisi ele alalım ve (ϵ_n) dizisini ise $\sum \epsilon_n \leq \frac{1}{2}$ koşulunu sağlayan pozitif sayıların bir dizi olarak varsayalım. $y_0 = x_0 = 0$ ve $y_1 = x_{n_1} = x_1$ olarak tanımlayalım. O zaman bir $m_1 \in \mathbb{N}$ bulunabilir öyleki;

$$\left\| \sum_{i=m_1+1}^{\infty} y_1(i)e^{(i)} \right\|_{\ell_p(Q)} < \epsilon_1.$$

$x_n \xrightarrow{w} 0$ olması koordinatsal olarak $x_n \rightarrow 0$ olmasını gerektirdiği sonucundan hareketle bir $n_2 \in \mathbb{N}$ bulunabilir öyleki $n \geq n_2$ iken

$$\left\| \sum_{i=0}^{m_1} x_n(i)e^{(i)} \right\|_{\ell_p(Q)} < \epsilon_1,$$

yazılabilir. $y_2 = x_{n_2}$ olarak tanımlayalım. O zaman $m_2 > m_1$ bulunabilir öyleki

$$\left\| \sum_{i=m_2+1}^{\infty} y_2(i)e^{(i)} \right\|_{l_p(Q)} < \epsilon_2,$$

yazılabilir. Koordinatsal olarak $v_n \rightarrow 0$ olması birkez daha kullanılarak bir $n_3 > n_2$ bulunabilir öyleki $n \geq n_3$ iken

$$\left\| \sum_{i=0}^{m_2} x_n(i)e^{(i)} \right\|_{l_p(Q)} < \epsilon_2,$$

olur.

Bu metot devam ettirilirse (m_k) ve (n_k) gibi iki artan dizi türetilebilir. Öyleki $\forall n \geq n_{k+1}$ için

$$\left\| \sum_{i=0}^{m_k} x_n(i)e^{(i)} \right\|_{l_p(Q)} < \epsilon_k,$$

olur ve $y_k = x_{n_k}$ olmak üzere;

$$\left\| \sum_{i=m_k+1}^{\infty} y_2(i)e^{(i)} \right\|_{l_p(Q)} < \epsilon_k$$

eşitsizliği elde edilir. Bu yol ile;

$$\left\| \sum_{k=0}^n y_k \right\|_{l_p(Q)} = \left\| \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^{m_{k-1}} y_k(i)e^{(i)} + \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} y_k(i)e^{(i)} + \sum_{i=m_k+1}^{\infty} y_k(i)e^{(i)} + \right) \right\|_{l_p(Q)}$$

$$\leq \left\| \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} y_k(i) e^{(i)} \right) \right\|_{l_p(Q)} + 2 \sum_{k=0}^n \epsilon_k$$

ve

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} y_k(i) e^{(i)} \right) \right\|_{l_p(Q)}^p \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} |ry_k(i) + sy_k(i-1) + ty_k(i-2) + uy_k(i-3)|^p \\ &\leq \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{\infty} |ry_k(i) + sy_k(i-1) + ty_k(i-2) + uy_k(i-3)|^p \\ &\leq n+1 \end{aligned}$$

yazılabilir. Bundan dolayı

$$\left\| \sum_{k=0}^n y_k \right\|_{l_p(Q)} \leq (n+1)^{\frac{1}{p}} + 1 \leq 2(n+1)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir ki bu bize $l_p(Q)$ 'nun p tipi Banach-Saks özelliğinde olduğunu verir. Bu ise ispatı tamamlar.

(Bişgin, 2021) de $l_p(Q)$ dizi uzayı l_p dizi uzayı ile lineer olarak izomorfik olduğunu gösterdi. Bunun sonucunda ise biz

$$R(l_p(Q)) = R(l_p) = 2^{\frac{1}{p}}$$

eşitliğini yazarız.

Bu sonuç ile Teorem 5.2. i kombinlediğimizde bir sonraki teorem verilebilir.

Teorem 5.3. $p \in [1, \infty)$ için $l_p(Q)$ dizi uzayı zayıf sabit nokta özelliğine sahiptir.

Teorem 5.4. $l_p(Q)$ dizi uzayının Gurarii'nin konvekslik modülü $0 \leq \epsilon \leq 2$ için;

$$\beta_{l_p(Q)}(\epsilon) \leq 1 - \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat 5.4. $0 \leq \epsilon \leq 2$ verilsin. Q dörtlü band matrisinin tersinin G olduğunu varsayalım ve şimdi aşağıdaki gibi x ve y olmak üzere iki dizi tanımlayalım.

$$x = \left(\left(G \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right), G \left(\frac{\epsilon}{2} \right), 0, 0, \dots \right)$$

$$y = \left(\left(G \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right), G \left(-\frac{\epsilon}{2} \right), 0, 0, \dots \right)$$

O zaman aşağıdaki eşitlikleri

$$\|Qx\|_{l_p} = \|x\|_{l_p(Q)} = 1 \text{ ve } \|Qy\|_{l_p} = \|y\|_{l_p(Q)} = 1$$

yazılabiliriz. Buda bize $x, y \in S(l_p(Q))$ ve $\|Qx - Qy\|_{l_p} = \|x - y\|_{l_p(Q)} = \epsilon$ eşitliklerini verir.

$0 \leq a \leq 1$ için;

$$\begin{aligned} \|ax + (1-a)y\|_{l_p}^p &= \|a.Qx + (1-a)Qy\|_{l_p}^p \\ &= 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p + |2a-1| \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p \end{aligned}$$

ve

$$\inf_{0 \leq a \leq 1} \|ax + (1-a)y\|_{l_p(Q)}^p = 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p \quad (5.1)$$

yazılabilir. Bu yüzden $p \geq 1$ için

$$\beta_{l_p(Q)}^{(\epsilon)} \leq 1 - \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır. Buda ispatı tamamlar.

(5.1) eşitliği dikkate alınarak aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 5.5. $\epsilon = 2$ için $\beta_{l_p(Q)}(\epsilon) = 1$ olduğundan $l_p(Q)$ dizi uzayı kesin olarak konvektir.

Sonuç 5.6. $0 < \epsilon \leq 2$ için $0 < \beta_{l_p(Q)}(\epsilon) \leq 1$ olduğundan $l_p(Q)$ dizi uzayı düzgün konvektir.

6. BULGULAR

Dörtlü band matrisinin kullanılması ile türetilen hemen hemen yakınsak dizi uzayları ve $l_p(Q(r, s, t, u))$ dizi uzayının geometrik özellikleri incelendi. Ele alınan bu çalışmanın da literatürdeki bu eksikliği kapatması açısından ve gelecekte yapılacak olan çalışmalara kaynak olması açısından önemli olduğu düşünülmektedir. Ayrıca $Q = Q(r, s, t, u)$ dörtlü band matrisi Δ^3 , $B(r, s, t)$, Δ^2 , $B(r, s)$ ve Δ şeklinde gösterilen ve sırasıyla üçüncü mertebeden fark, üçlü band, ikinci mertebeden fark, ikili band ve fark matrisi olarak adlandırılan matrisleri geneller. Bundan dolayı $Q = Q(r, s, t, u)$ dörtlü band matrisi ile türetilen dizi uzaylarının özellikleri yukarıda bahsedilen matrisler ile türetilen dizi uzaylarının özelliklerinden daha genel ve kapsamlıdır.

Ayrıca $Q = Q(r, s, t, u)$ dörtlü band matrisinin etki alanı kullanılarak $f(Q(r, s, t, u))$, $f_0(Q(r, s, t, u))$, ve $f_s(Q(r, s, t, u))$ dizi uzayları inşa edildi. Daha sonra bu uzayların BK – uzayı oldukları ispatlanıp, sırasıyla f , f_0 ve f_s uzaylarına lineer olarak izomorfik oldukları gösterildi. İlaveten bu uzayların Schauder bazları ile β – ve γ –dualleri belirlenip, bazı matris sınıfları karakterize edildi. Son olarak $l_p(Q(r, s, t, u))$ dizi uzayının bazı geometrik özelliklerinden bahsedildi.

7. SONUÇ

Bu çalışmada dörtlü band matrisi kullanılarak oluşturulan hemen hemen yakınsak dizi uzayları ve $l_p(Q(r,s,t,u))$ dizi uzayının geometrik özelliklerine yönelik bilgiler verilmiştir. Çalışma kapsamında öncelikle matris dönüşümler ve Dual uzaylar konusu ele alınmış ve bu konu kapsamında ifade edilen matrislere yer verilmiştir. Daha sonrasında çeşitli araştırmacılar tarafından yapılan teorem ve bu teoremlerin ispatlarına göz atılmıştır. Daha sonrasında matris sınıfları, dual uzaylar tek tek incelenmiştir. Dizi uzayları kapsamında hemen hemen yakınsak dizi uzayları, hemen hemen yakınsak sıfır dizi uzayları kavramları ele alınarak çeşitli teoremlere yer verilmiş ve sonrasında bazı geometrik özellikleri ele alınmıştır. Çalışmada literatür özetine yer verilerek genişletilmiştir. Son olarak daha önceki çalışmalara yer verilerek bu alanda yapılan çalışmaların teoremleri ve ispatlarına bakılmıştır. Çalışmada dörtlü band matrisi vasıtasıyla türetilen hemen hemen yakınsak dizi uzaylarının çeşitli özelliklerine bakılmış; daha sonra bu uzayların BK – uzayı oldukları ispatlanıp, sırasıyla f, f_0 ve f_s uzaylarına lineer olarak izomorfik oldukları gösterilmiş; ilaveten bu uzayların Schauder bazları ile β – ve γ –dualleri belirlenmiş; bazı matris sınıfları karakterize edilmiş olup son olarak ta $l_p(Q(r,s,t,u))$ dizi uzayının bazı geometrik özelliklerinden bahsedilmiştir.

KAYNAKÇA

- Ahmad, Zaheer, and Mohammad Mursaleen. "Köthe-Toeplitz duals of some new sequence spaces and their matrix maps." *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* 42(56): 57-61.
- Balcı, M., "Matematik Analiz", Balcı Yayınları, Ankara, 420 s., (1997).
- Bektas, Çigdem Asma, and Rifat Çolak. "On the Köthe-Toeplitz duals of some generalized sets of difference sequences." *Demonstratio Math.* 33, no. 4 (2000):797-803.
- Basar, Feyzi, and Murat Kirişçi. "Almost convergence and generalized difference matrix." *Comput. Math. Appl.* 61, no. 3 (2011): 602-611.
- Basar, Feyzi, and Rifat Çolak. "Almost-conservative matrix transformations." *Doga Mat.* 13, no. 3 (1989): 91-100.
- Basar, Feyzi. "Strongly-conservative sequence-to-series matrix transformations." *Erc Üni Fen Bil Derg.* 5, no. 12 (1989): 888-893.
- Basar, Feyzi, and Ihsan Solak. "Almost-coercive matrix transformations." *Rend. Mat. Appl. (7)* 11, no. 2: 249-256.
- Basar, Feyzi. " f -conservative matrix sequences." *Tamkang J. Math.* 22, no. 2 (1991): 205-212.
- Basar, Feyzi. *Summability Theory and Its Applications*. Vol. 44 of *Nijhoff International Philosophy Series*. Istanbul: Bentham Science Publishers, 2012.
- Basarir, Metin and Mustafa Kayıkçı. *On the generalized Bm-Riesz difference sequence space and $_$ -property*. J. Inequal. Appl. 2009, Art. ID 385029.
- Bektas, Çigdem Asma. "On some new generalized sequence spaces." *J. Math. Anal. Appl.* 277, no. 2 (2003): 681-688.
- Bişgin, M.C. (2014). Bazı yeni dizi uzayları ve topolojik özellikleri. Doktora Tezi. Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri, Türkiye, 66 s.
- Bişgin, M.C. (2020). Four new sequence spaces obtained from the domain of quarduble band matrix operator. Under Review.
- Boos, Johann. *Classical and Modern Methods in Summability*. Oxford Mathematical Monographs. New York: Oxford University Press Inc., 2000.
- Choudhary, B., and Sudarsan Nanda. *Functional Analysis with Applications*. New

- York: John Wiley & sons Inc., 1989.
- Duran, J. Peter. "Infinite matrices and almost-convergence." *Math. Z.* 128 (1972): 75-83.
- Et, Mikâil, and Rifat Çolak. "On some generalized difference sequence spaces." *Soochow J. Math.* 21, no. 4 (1995): 377-386.
- Et, Mikâil. "On some difference sequence spaces." *Doga Mat.* 17, no. 1 (1993): 18-24.
- Jarrah, Abdullah M., and Eberhard Malkowsky. "BK spaces, bases and linear operators." *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.* No.52 (1998): 177-191.
- Kızmaz, Hüsnü. "On certain sequence spaces." *Canad. Math. Bull.* 24, no. 2 (1981): 169-176.
- King, Jerry Porter "Almost summable sequences." *Proc. Amer. Math. Soc.* 17(1966): 1219-1225.
- Lorentz, George Gunther. "A contribution to the theory of divergent sequences." *Acta Math.* 80 (1948): 167-190.
- Maddox, Ivor John. *Elements of Functional Analysis*. Cambridge, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney: Cambridge University Press, 1988.
- Mursaleen, Mohammad. "Generalized spaces of difference sequences." *J. Math. Anal. Appl.* 203, no. 3 (1996): 738-745.
- Mursaleen, Mohammad. *Applied Summability Methods*. Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer Briefs, 2014.
- Mursaleen, Mohammad and Basar, Feyzi. *Sequence Spaces: Topics in Modern Summability Theory*. Boca Raton, London, New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2020.
- Mustafa, Nizami “ Fonksiyonel Analiz”Seçkin Yayınları, Ankara, (2016)
- Öztürk, Ekrem. "On strongly regular dual summability methods." *Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara Sér. A1 Math.* 32, no. 1 (1983): 1-5.
- Sanhan W., Suthep S., On k-nearly uniform convex property in generalized Cesaro Sequence Spaces, Hindawi Publishing Corp., 57, 3599- 3607, 2003
- Sanhan W., Suthep S., Some Geometric Properties of Cesaro Sequence Space, Kyungpook J. Math., 43, 191-197, 2003.
- Siddiqi, Jamil Ahmad. "Infinite matrices summing every almost periodic sequence."

Pacific J. Math. 39 (1971): 235-251.

Soykan, Yüksel “Metrik Uzaylar ve Topolojisi”, Nobel Yayınları, Ankara, (2012)

Sönmez, Abdulcabbar. "Some new sequence spaces derived by the domain of the triple band matrix." *Comput. Math. Appl.* 62, no. 2 (2011): 641-650.

Sönmez, Abdulcabbar. "Almost convergence and triple band matrix." *Math. Comput. Model.* 57, no. 9-10 (2013): 2393-2402.

Stieglitz, M. and Tietz, H., “Matrix transformationen von Folgenräumen Eine Ergebnisübersicht”, *Math. Z.*, 154, 1-16, (1977).

Stieglitz, M., “Eine verallgemeinerung des begriffs der fastkonvergenz”, *Math. Japon.*, 18, 53-70, 1973.

Wilansky, Albert. *Summability Through Functional Analysis*. Vol. 85 of *North-Holland Mathematics Studies*. Amsterdam, New York, Oxford: Elsevier SciencePublishers, 1984.