

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DUAL KUATERNİYON UZAYINDA FONKSİYONEL ANALİZ

ÇİĞDEM AY

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. SALİM YÜCE**

İSTANBUL, 2014

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL KUATERNİYON UZAYINDA FONKSİYONEL ANALİZ

Çiğdem AY tarafından hazırlanan tez çalışması 18/08/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Erhan ÇALIŞKAN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Fügen TORUNBALCI AYDIN
Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Öncelikle eğitimim ve tez çalışmam boyunca benden emeğini, yardımlarını ve bilgisini esirgemeyen, sabırla ve anlayışla öğrenimime katkı sağlayan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Salim YÜCE ' ye çok teşekkür ederim.

Yine bu süreçte her daim yanımda olan ve desteklerini benden hiç eksik etmeyen çok sevdiğim anne ve babama teşekkürü bir borç bilirim.

Ağustos, 2014

Çiğdem AY

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT.....	ix
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	1
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
ÖN BİLGİLER	3
2.1 Lineer Cebir	3
2.2 Analiz	6
2.3 Tensör Çarpım	13
2.4 Bir Reel Vektör Uzayının Kompleksleştirilmesi	20
2.4.1 Direkt Toplamlar ile Kompleksleştirme	20
2.4.2 Tensör Çarpımı ile Kompleksleştirme	28
BÖLÜM 3	
KUATERNİYONLAR	34
3.1 Reel Kuaterniyonlar	34
3.1.1 Reel Kuaterniyona Karşılık Gelen Matris.....	36
3.2 Kompleks Kuaterniyonlar	37
3.3 Dual Kuaterniyonlar	39
3.3.1 Dual Kuaterniyona Karşılık Gelen Matris	41
BÖLÜM 4	
KOMPLEKS KUATERNİYON ÜZERİNDE ANALİZ YAPISI	42
4.1 Kompleks Simplektik Geometri.....	42
4.2 Kompleks Kuaternizasyonlaştırma.....	45
4.2.1 Direkt Toplamlar ile Kuaternizasyonlaştırma	45

4.2.2 Tensör Çarpımı ile Kuaternizasyonlaştırma	56
4.3 Kompleks Kuaterniyon Norm Uzayları	62
4.4 Kompleks Kuaterniyon Hilbert Uzayları	69
BÖLÜM 5	
BİR REEL VEKTÖR UZAYININ DUALLEŞTİRİLMESİ	77
5.1 Direkt Toplamlar ile Dualleştirme	77
5.2 Tensör Çarpımı ile Dualleştirme	85
BÖLÜM 6	
DUAL KUATERNİYON ÜZERİNDE ANALİZ YAPISI	90
6.1 Dual Simplektik Geometri	90
6.2 Dual Kuaternizasyonlaştırma	93
6.2.1 Direkt Toplamlar ile Kuaternizasyonlaştırma	93
6.2.2 Tensör Çarpımı ile Kuaternizasyonlaştırma	103
6.3 Dual Kuaterniyon Yarı-Normlu Modül	107
6.4 Dual Kuaterniyon Yarı Hilbert Modül	115
BÖLÜM 7	
SONUÇ VE ÖNERİLER	123
KAYNAKLAR	124
ÖZGEÇMİŞ	125

SİMGE LİSTESİ

$\otimes$	Cebirsel tensör çarpım
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$	Reel kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$	Kompleks kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{H}_D$	Dual kuaterniyonlar kümesi
$V_{\mathbb{C}}$	Kompleks vektör uzayı
$V_{\mathbb{R}}$	Reel vektör uzayı
$V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$	Kompleks kuaterniyon vektör uzayı
$V_{\mathbb{H}_D}$	Dual kuaterniyon vektör uzayı

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2. 1 Evrensel özellik	15
Şekil 2. 2 Evrensel özellik	16
Şekil 2. 3 Tensör çarpımın evrensel özelliği	17
Şekil 2. 4 Tensör çarpımın evrensel özelliği yardımcı diyagram	18
Şekil 2. 5 Kompleks dönüşümlerin diyagramı	25
Şekil 2. 6 Kompleksleştirme diyagramı	31
Şekil 4. 1 Kompleks kuaterniyon dönüşümleri diyagramı.....	52
Şekil 5.1 Dual dönüşümlerin diyagramı	82
Şekil 6.1 Dual kuaterniyon dönüşümleri diyagramı.....	99

DUAL KUATERNİYON UZAYINDA FONKSİYONEL ANALİZ

Çiğdem AY

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Salim YÜCE

Bu çalışmada ilk olarak literatürde yer alan reel vektör uzayının iki farklı kompleksleştirilmesi, buna benzer olarak kompleks vektör uzayının iki farklı kuaternizasyonu verilerek, kompleks kuaterniyon vektör uzayları için fonksiyonel analizin bazı temel tanım ve kavramlarından bahsedilmiştir.

Tezimizin orijinal bölümünde ise, reel vektör uzayının dual sayılar halkası yardımıyla dualleştirilmesi ve buna paralel olarak, reel vektör uzaylarının dual kuaternizasyonlar yardımıyla kuaternizasyonlaştırılması incelenerek, dual kuaterniyon modül yapısı elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen bu dual kuaterniyon modül yapısı üzerindeki yarı norm, yarı Banach ve yarı Hilbert modülün bazı temel tanım ve kavramları elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kompleksleştirme, Kuaternizasyonlaştırma, Dual kuaterniyon, Dualleştirme, Normlu uzay, Banach uzayı, Hilbert uzayı

ABSTRACT

FUNCTIONAL ANALYSIS IN THE DUAL QUATERNION SPACE

Çiğdem AY

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Salim YÜCE

In this study; initially given two different complexification of real vector space in literature and some basic definitions and concepts of functional analysis is mentioned for complex quaternion vector space.

In the original part of our thesis, as dualization of real vector spaces with the help of ring of dual numbers and correspondingly, quaternionization of real vector space through dual quaternions are examined, module structure of dual quaternions is obtained . besides some fundamantel definitions and notations of semi-norm, semi Banach and semi Hilbert modules on this module structure of dual quaternions which is obtained in previous chapters.

Keywords: Complexification, Quaternionized, Quaternion, Dual Quaternion, Normed Space, Banach Space, Hilbert Space

1.1 Literatür Özeti

Literatürde reel vektör uzayları Conrad, K., [8] tarafından kompleksleştirilmiş ve kompleks vektör uzayları kompleks kuaternizasyonlaştırılarak elde edilen kuaterniyon vektör uzayları Omran, S., [12] tarafından incelenmiş olup, bu çalışmada kuaterniyon vektör uzayları için norm, Banach ve Hilbert uzayları ile ilgili bazı kavramlar verilmiştir. Dual kuaterniyonlar kümesi ise literatürde iki farklı şekilde bulunmaktadır. İlk olarak

1) $Q = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k$ olmak üzere, burada Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 birer dual sayı ve $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ şeklinde olup, bu kuaterniyonu **dual katsayılı kuaterniyon** olarak adlandıracaktır. Bir diğeri ise,

2) $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ olmak üzere, burada q_0, q_1, q_2, q_3 birer reel sayı ve $i^2 = j^2 = k^2 = 0$ şeklinde olup, bu kuaterniyona **dual kuaterniyon** adı verilecektir. *Tezimizde ve bundan sonraki tüm çalışmalarımızda literatürdeki karışıklığı gidermek açısından buna dikkat edilecektir.*

1.2 Tezin Amacı

Kuaterniyon vektör uzayları yapısı reel ve kompleks kuaterniyonlar kümesi üzerinde tanımlanmış olmasına rağmen literatürde dual kuaterniyon kümesi üzerinde incelemesi yapılmamıştır. Bu çalışmada ilk olarak V. Majernik, [13] tarafından tanımlanmış olan ve S.Yüce ve Z. Ercan, [1] tarafından bazı özellikleri incelenen dual kuaterniyonlar kümesini ele alarak

dual kuaterniyon modülü üzerinde norm, Banach ve Hilbert yapılarının bazı tanım ve kavramlarının farklı sonuçları elde edilmiştir.

1.3 Hipotez

Bir reel vektör uzayını direkt toplam ve tensör çarpımlar aracılığıyla iki şekilde kompleksleştirilebilir. Buradan hareketle reel vektör uzaylarını direkt toplam ve tensör çarpımlar aracılığıyla kuaternizasyonlaştırabilir ve bu iki yapı arasında bir izomorfizma verebiliriz.

Daha sonra elde edilen bu kuaterniyon modülü için literatürde bulunan normlu, Banach ve Hilbert yapıları için elde edilenden farklı sonuçları irdeleyebiliriz.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

2.1 Lineer Cebir

Tanım 2.1 Boş olmayan bir G kümesi ile aşağıdaki aksiyomları sağlayan

$$T: G \times G \rightarrow G$$

$$(x, y) \rightarrow xTy \in G$$

iç işleminden oluşan (G, T) ikilisine **grup** adı verilir.

T iç işleminin sağladığı grup aksiyomları ise şunlardır.

G1) T iç işlemi kapalıdır, yani $\forall x, y \in G$ için $xTy \in G$ dir.

G2) T iç işlemi birleşmelidir.

$$\forall x, y, z \in G \text{ için } (xTy)Tz = xT(yTz) \text{ eşitliği sağlanır.}$$

G3) T iç işlemi için G de bir tek e birim elemanı vardır.

$$\forall x \in G \text{ için } eTx = xTe = x \text{ olacak şekilde bir tek } e \in G \text{ vardır.}$$

G4) T iç işlemi için $x \in G$ nin bir tek x' inversi vardır.

$$\forall x \in G \text{ için } xTx' = x'Tx = e \text{ olacak şekilde bir tek } x' \text{ inversi vardır.}$$

Bir (G, T) grubunda T iç işlemi değişmeli ise, yani $\forall x, y \in G$ için $xTy = yTx$ oluyor ise, (G, T) grubuna **değişmeli grup** veya **abel Grup** adı verilir, [2].

Örnek 2.1 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi (+) işlemine göre bir grup oluşturur ve $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun birim elemanı $e = 0$ 'dır. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi (.) ikinci iç işleme göre grup aksiyomlarından G4) aksiyomunu sağlamadığından $(\mathbb{Z}, .)$ ikilisi (.) işlemi ile birlikte bir grup değildir.

Örnek 2.2 $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinden $0 \in \mathbb{R}$ sayısını çıkarırsak, yani $G = \mathbb{Q} - \{0\}$ olarak alırsak, $(G, .)$ ikilisi bir grup olur. Bu grubun etkisiz elemanı 1 dir. Ayrıca $a, b \neq 0$ için $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ elemanının tersi $\frac{b}{a}$ dır.

Tanım 2.2 Boş olmayan bir H kümesi ve $T, \perp$ iç işlemlerinden oluşan $(H, T, \perp)$ üçlüsünü ele alalım. Eğer (H, T) ikilisi abel grup iken, $\perp$ ikinci işlemi H da birleşmeli ve T birinci işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılımlı ise, $(H, T, \perp)$ üçlüsüne **halka** denir. T işleminin sağlaması gereken aksiyomlar ise,

$$\left. \begin{array}{ll} G1) \forall x, y \in H \text{ için } , xTy \in H & \text{(kapalılık aksiyomu)} \\ G2) \forall x, y, z \in H \text{ için, } (xTy)Tz = xT(yTz) & \text{(birleşme aksiyomu)} \\ G3) \forall x \in H \text{ için, } eTx = xTe = x & \text{(etkisiz elemanın varlığı)} \\ G4) \forall x \in H \text{ için, } xTx' = x'Tx = e & \text{(ters elemanın varlığı)} \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

Bu aksiyomlar ile birlikte (H, T) ikilisi değişmeli gruptur.

$$\perp: H \times H \rightarrow H$$

$$(x, y) \rightarrow x \perp y \in H$$

şeklinde tanımlanan $\perp$ ikinci iç işleminin sağlaması gereken aksiyomlar ise,

$$H1) (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z) \quad \text{(birleşme aksiyomu)}$$

$$H2) (xTy) \perp z = (x \perp z)T(y \perp z) \quad \text{(dağılma aksiyomu)}$$

$$z \perp (xTy) = (z \perp x)T(z \perp y)$$

olarak verilebilir.

Bir $(H, T, \perp)$ halkası ikinci işleme göre değişmeli ise, halkaya **değişmeli halka** denir, [2].

Örnek 2.3 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi ile toplama ve çarpma işlemlerinden oluşan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır. Burada toplama işleminin birimi $e=0$ ve çarpma işleminin birimi de $\varepsilon=1$ dir.

Örnek 2.4 $\mathbb{D} = \{a + \varepsilon a_0 : a, a_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$ dual sayılar kümesi olmak üzere,

Dual sayıların toplamı

$$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$(a + \varepsilon a_0, b + \varepsilon b_0) \rightarrow (a + b) + \varepsilon(a_0 + b_0)$$

şeklinde tanımlanan toplama işlemine göre dual sayılar kümesi bir abel gruptur.

Dual sayıların çarpımı

$$\bullet : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$(a + \varepsilon a_0, b + \varepsilon b_0) \rightarrow (a + \varepsilon a_0) \oplus (b + \varepsilon b_0) = (a + b) + \varepsilon(a_0 + b_0)$$

şeklinde tanımlanan işlem ile birlikte de halka özelliklerini sağlar.

Böylece $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır. Bu halkaya **dual sayılar halkası** adı verilir. Bu halkanın toplama işlemine göre birimi $e = 0 + \varepsilon.0$ ve çarpma işlemine göre birimi de $E = 1 + \varepsilon.0$ şeklindedir. *Dual sayılar halkasında her elemanın tersi bulunmadığından cisim değildir.*

Tanım 2.3 $(C, T, \perp)$ üçlüsü bir halka olsun. (C, T) abel grubunun birim elemanı e olmak üzere $C^* = C - \{e\}$ olarak alalım. Eğer $(C^*, \perp)$ ikinci işleme göre abel grup ise, $(C, T, \perp)$ üçlüsüne **cisim** denir.

Bu tanıma göre C^* in $\perp$ ikinci işlemine göre bir ε birim elemanı vardır, [2].

Örnek 2.5 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ üçlüsü bir halkadır, fakat cisim değildir.

Tanım 2.4 V bir abel grup ve $(C, +, \cdot)$ üçlüsü bir cisim olsun. V üzerinde dış işlem olarak tanımlanan ve $\forall c, c_1, c_2 \in C$ ve $v, v_1, v_2 \in V$ elemanları için aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir

$$\odot : C \times V \rightarrow V$$

$$(c, v) \rightarrow c \odot v$$

dönüşümünün var olduğunu kabul edelim.

$$\left. \begin{array}{l} V1) c \odot (v_1 + v_2) = (c \odot v_1) + (c \odot v_2) \\ V2) (c_1 + c_2) \odot v = (c_1 \odot v) + (c_2 \odot v) \\ V3) (c_1 \cdot c_2) \odot v = c_1 \odot (c_2 \odot v) \\ V4) 1_c \odot v = v \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

Bu taktirde $\{V, \oplus, C, +, \cdot, \odot\}$ altılısına bir **vektör uzayı** adı verilir, [2].

Not 2.1 Eğer dış işlemi bir cisim yerine halka yapısı üzerinde alırsak ve vektör uzayı aksiyomlarını gerçeklersek **modül** kavramını elde ederiz.

Örnek 2.6 $\mathbb{D} = \{a + \varepsilon a_0 : a, a_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$ dual sayılar halkası kendisi üzerinde bir modül oluşturmaktadır.

2.2 Analiz

Tanım 2.5 Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlanmış bir $y = f(x)$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonu $f(n) = x_n$ ile gösterirsek, her $n \in N$ doğal sayısına belli bir $x_n \in \mathbb{R}$ reel sayısı karşılık gelir. $f(n)$ in bu sonsuz elemanlı değerler kümesine, **reel sayı dizisi** adı verilir. Bu reel sayılar dizisi $\{x_1, \dots, x_n\}$ veya $\{x_n\}$ ile gösterilir. Dizinin genel terimi ise x_n dir, [3].

Örnek 2.7 $x_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ şeklinde tanımlanan dizinin terimleri $\left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \dots, 1 + \frac{1}{2^n}, \dots \right\}$ dir.

Tanım 2.6 Bir $\{x_n\}$ dizisi verildiğinde her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $n_0(\varepsilon) > 0$ doğal sayısı bulunabiliyor ve her $n > n_0(\varepsilon)$ değerleri için $|x_n - x_0| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyor ise, $\{x_n\}$ dizisine **yakınsak dizi** x_0 sayısına da bu dizinin **limiti** denir. Bir $\{x_n\}$ dizisinin limiti, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ veya $x_n \rightarrow x_0$ ile gösterilir, [3].

Örnek 2.8 Yukarıdaki örnekte verilen $\{x_n\} = \left\{1 + \frac{1}{2^n}\right\}$ dizisinin limiti $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = 1$ dir.

Çözüm

Gerçekten keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için, $|x_n - x_0| = \left| \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) - 1 \right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ eşitsizliğinden $\frac{1}{\varepsilon} < 2^n$ ise, $\log \frac{1}{\varepsilon} < \log 2^n$ ve buradan da $-\log_2 \varepsilon < n$ dir. O halde $n_0(\varepsilon) = -\log_2 \varepsilon$ kabul edilir ve n değerlerinin $-\log_2 \varepsilon < n$ koşulunu sağlaması yeterlidir.

Tanım 2.7 Bir $\{x_n\}$ dizisi verilmiş olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık gelen $N(\varepsilon)$ doğal sayısı $m, n > N(\varepsilon)$ için $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, bu taktirde $\{x_n\}$ dizisine **Cauchy dizisi** adı verilir, [3].

Örnek 2.9 $x_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)$ şeklinde tanımlanan dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

Çözüm

$x_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)$ şeklinde verilen dizi için $n > m$ olduğunu düşünelim.

$$|x_n - x_m| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} \right| \text{ olarak yazılır.}$$

Eğer $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k.k} < \frac{1}{k.(k-1)}$ eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} \right| < \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k \cdot (k-1)} \right| \\
&= \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $x_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

Tanım 2.8 V reel veya kompleks vektör uzayı olmak üzere,

$$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{x} \rightarrow \|\vec{x}\|$$

şeklinde tanımlanan ve aşağıdaki özelliklerini sağlayan $\|\cdot\|$ fonksiyonuna V üzerinde bir **norm** ve $(V, \|\cdot\|)$ ikilisine de **normlu uzay** adı verilir, [4].

$$\left. \begin{aligned}
N1) \|\vec{x}\| &\geq 0 \\
N2) \|\vec{x}\| &= 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0 \\
N3) \|\alpha \vec{x}\| &= |\alpha| \|\vec{x}\| \\
N4) \|\vec{x} + \vec{y}\| &\leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|
\end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Not 2.2 Eğer V vektör uzayı (2.3) ile verdiğimiz norm aksiyomlarından ikinci aksiyom şartını gerçekleştiriyor ise, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna **yarı-norm** ve $(V, \|\cdot\|)$ ikilisine de **yarı normlu uzay** adı verilir.

Örnek 2.10 $\|\cdot\|: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\vec{x} = (x, y) \rightarrow \|\vec{x}\| = |x| + |y|$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|$ fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir normdur.

Çözüm

Bu $\|\cdot\|$ fonksiyonunun (2.3) ile verilen norm aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

N1) $\|\vec{x}\| = |x| + |y|$ ifadesinde $|x| \geq 0$ ve $|y| \geq 0$ olduğundan $\|\vec{x}\| \geq 0$ dır.

N2) $\|\vec{x}\| = |x| + |y| = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$ ve $|y| = 0$ dır.

$$x = y = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = (x, y) = (0, 0) = \theta$$

N3) $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda|(|x| + |y|) = |\lambda| \|\vec{x}\|$

N4) $\|\vec{x} + \vec{y}\| = \|(x, y) + (x', y')\| = \|(x + x', y + y')\| = |x + x'| + |y + y'|$
 $\leq (|x| + |y|) + (|x'| + |y'|) = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ elde edilir,[4].

Örnek 2.11 $[a, b]$ kümesi üzerinde tanımlı reel (veya kompleks) değerli sürekli

fonksiyonların $C[a, b] = \left\{ f : [a, b] \xrightarrow{\text{sürekli}} K \right\}$ kümesini alalım. $C[a, b]$ uzayında

$\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ tanımı ile verilen dönüşümü için (2.3) ile verilen norm aksiyomlarını

inceleyelim.

N1) $\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| \geq 0$ olduğu açıktır.

N2) $\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a, b] \text{ için}$

$$|f(x)| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a, b] \text{ için } f(x) = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

N3) $\|\alpha f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |(\alpha f)(x)| = \sup_{a \leq x \leq b} |\alpha f(x)| = |\alpha| \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| = |\alpha| \|f\|$

N4) $\|f + g\| = \sup_{a \leq x \leq b} |(f + g)(x)| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) + g(x)| =$

$$\leq \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \sup_{a \leq x \leq b} |g(x)| = \|f\| + \|g\|$$

Dolayısıyla $C[a, b]$ uzayı $\|f\|$ dönüşümüne göre bir normlu uzaydır.

Tanım 2.9 Bir normlu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, bu uzaya **tam uzay** adı verilir, [4].

Örnek 2.12 $C[a, b] = \left\{ f : [a, b] \xrightarrow{\text{sürekli}} K \right\}$ uzayında $\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ dönüşümünün bir norm olduğunu ve $(C[a, b], \|\cdot\|)$ ikilisinin de bir normlu uzay olduğunu önceki örnekte göstermiştik. Şimdi ise bu uzayın tam olduğunu gösterelim.

Çözüm

$C[a, b]$ uzayında bir $\{f_n\}$ Cauchy dizisi alalım.

$$F : \mathbb{N} \rightarrow C[a, b]$$

$$n \rightarrow F(n) = f_n$$

Bu şekilde verilen $\{f_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisi olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde $m, n > N(\varepsilon)$ doğal sayıları vardır. Bu ifade aynı zamanda $\|f_n - f_m\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ anlamına gelmektedir. Keyfi x sabiti için $f_n(x) = a_n^x$ ile tanımlayalım. Bu taktirde $\|f_n - f_m\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f_m(x)| = \sup_{a \leq x \leq b} |a_n^x - a_m^x| < \varepsilon$ ve buradan da $|a_n^x - a_m^x| < \varepsilon$ eşitsizliği elde edilir. Yani her x değeri için $\{a_n^x\}$ dizisi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir. Reel sayılar ve kompleks sayılarda her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan, $\exists a^x \in \mathbb{R}$ için $a_n^x \rightarrow a^x$ dır. O halde $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $|a_n^x - a^x| < \varepsilon$ yazılabilir.

Eğer $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları ile tanımlarsak,

$$x \rightarrow f_n(x) = a_n^x \quad x \rightarrow f(x) = a^x$$

$|a_n^x - a^x| = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği mevcuttur. Bu yakınsaklık düzgündür. Düzgün yakınsaklık limit teoreminden f süreklidir. Yani $f \in C[a, b]$ dir. Her x için $|a_n^x - a^x| = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ise, $\sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\| < \varepsilon$ olur. Yani, $f_n \rightarrow f$ dir. Buradan $C[a, b]$ uzayının tamlığı gösterilmiş olur.

Tanım 2.10 V normlu vektör uzayı olsun. Eğer bu uzay tam ise, V normlu uzayına **Banach uzayı** adı verilir. V nin reel ya da kompleks vektör uzayı olmasına göre, Banach uzayına **reel Banach uzayı** ya da **kompleks Banach uzayı** adı verilir, [4].

Tanım 2.11 V bir $\mathfrak{S} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathfrak{S}$$

$$(\vec{x}, \vec{x}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$$

fonksiyonu aşağıda verilen koşulları sağlıyor ise, bu fonksiyona V vektör uzayı üzerinde **iç çarpım fonksiyonu** ve üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı V vektör uzayına ise, **Öklid uzayı (veya iç çarpım uzayı)** adı verilir, [4].

$$\left. \begin{array}{l} P1) \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0 \\ P2) \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \theta \\ P3) \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \\ P4) \langle \alpha \vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \\ P5) \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle} \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

Not 2.3 V bir $\mathfrak{S} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, V vektör uzayı üzerinde tanımlanan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonu (2.4) ile verdiğimiz iç çarpım aksiyomlarından $P2)$ aksiyomunu sağlamıyor ise bu iç çarpım fonksiyonuna V vektör uzayı üzerinde **yarı iç çarpım fonksiyonu** denir.

Örnek 2.13 $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) olmak üzere,

$\mathbb{R}^n$ üzerinde,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun (2.4) ile verdiğimiz iç çarpım aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

Çözüm

P1) $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0 \text{ olduğu açıktır.}$$

P2) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ olur.

$$P3) \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + \dots + (x_n + y_n)z_n$$

$$= x_1z_1 + y_1z_1 + x_2z_2 + y_2z_2 + \dots + x_nz_n + y_nz_n$$

$$= \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$$

$$P4) \langle \alpha \vec{x}, \vec{y} \rangle = (\alpha x_1)y_1 + (\alpha x_2)y_2 + \dots + (\alpha x_n)y_n$$

$$= \alpha(x_1y_1) + \alpha(x_2y_2) + \dots + \alpha(x_ny_n)$$

$$= \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

$$P5) \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n$$

$$= \overline{y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n} = \overline{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}$$

aksiyomları gerçekleştiğinden $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonu bir iç çarpım dönüşümüdür. Dolayısıyla

$(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayıdır. Aynı düşünce ile $\mathbb{C}^n$ $\langle z, z \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \overline{z_i}$ iç çarpımına göre

kompleks Öklid uzayıdır, [4].

Tanım 2.12 V bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer V iç çarpım uzayı tam ise, V ye **Hilbert uzayı** adı verilir, [4].

Örnek 2.14 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

fonksiyonu ile tanımlanan $\mathbb{R}^n$ uzayının iç çarpım uzayı olduğunu örnek 2.13 ile göstermiştik. Şimdi ise $\mathbb{R}^n$ iç çarpım uzayının $\|\vec{x} - \vec{y}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$ normuna göre tam olduğunu gösterelim.

Çözüm

iç çarpımın normu tanımından $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ eşitliği yazılabilir. $\|\vec{x} - \vec{y}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$ normuna göre tamlığını incelemek için bir $\{x_m\}$ Cauchy dizisini alalım ve

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$m \rightarrow f(m) = x_m = (x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu nedenle $\varepsilon > 0$ sayısı için $m, n > n_0$ olduğunda

$$\|x_m - x_n\| = \left[\sum_{i=1}^n |x_i^m - x_i^n|^2 \right]^{1/2} < \varepsilon \text{ olacak şekilde } \varepsilon \text{ sayısına bağlı bir } n_0 \text{ sayısı vardır.}$$

$i = 1, 2, \dots, n$ değerleri için $|x_i^m - x_i^n|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |x_i^m - x_i^n| < \varepsilon$ elde edilir. Her bir i değeri için $x_i^n = (x_1^n, x_2^n, \dots)$ reel sayıların bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. O halde, $x_i^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_i$ 'ye yakınsadığını kabul edelim ve

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ diyelim. $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ dir ve $\|x_m - x_n\|_2 \leq \varepsilon$ elde edilir. Bu $\{x_m\}$ dizisinin limitinin x olduğunu gösterir ve $\{x_m\}$ 'i keyfi aldığımızdan ispat tamamlanmış olur. Sonuç olarak $\mathbb{R}^n$ bir Hilbert uzayıdır.

2.3 Tensör Çarpım

Tanım 2.13 (Serbest vektör uzayı) $S \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve K bir cisim olmak

üzere, $F(S) = \left\{ f: S \rightarrow K \mid f(s) \neq 0, \forall s \in S \right\}$ kümesini tanımlayalım.

$$i: S \rightarrow F(S)$$

$$s \rightarrow i(s)$$

fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanan S kümesinin $F(S)$ kümesi içine birebir

gömülmesidir. Yani $i(s)(x) = \delta_{sx} = \begin{cases} 1 & , x = s \\ 0 & , x \neq s \end{cases}$ şeklinde tanımlanan Kronocker

deltadır. Buradan bir $f \in F(S)$ elemanı $f = \sum_{s \in S} f(s)i(s)$ veya notasyonun kolaylığı

açısından $f = \sum_{s \in S} f(s)s$ şeklinde yazılabilir.

$F(S)$ kümesi aşağıda tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte K cismi üzerinde vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına S kümesinin **serbest vektör uzayı** adı verilir, [5].

Toplama

$$\oplus: F(S) \times F(S) \rightarrow F(S)$$

$$(f, g) \rightarrow f \oplus g = \sum_{s \in S} f(s).s \oplus \sum_{s \in S} g(s).s = \sum_{s \in S} (f(s) \oplus g(s)).s$$

Dış işlem

$$\odot: K \times F(S) \rightarrow F(S)$$

$$(c, f) \rightarrow c \odot f = \sum_{s \in S} c.f(s)s$$

Tanım 2.14 V bir vektör uzayı ve V vektör uzayının alt uzayı W olmak üzere, V de denklik bağıntısı ise, $v_1, v_2 \in V$ elemanları için $v_1 \equiv v_2$ olması için gerek yeter koşul $v_1 - v_2 \in W$ olması şeklinde tanımlanır. V vektör uzayının denklik sınıflarının tamamı V/W ile gösterilir ve **bölüm uzayı** adını alır, [6].

Önerme 2.1 $S \neq \emptyset$ bir küme ve i fonksiyonu S kümesinin $F(S)$ kümesine gömülmesi ise $i(S)$ kümesi $F(S)$ in bir bazıdır, [6].

İspat

Varsayalım ki $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ olsun. O halde $\sum_{j=1}^n \alpha_j i(s_j) = 0$ eşitliği

mevcut iken $\forall t=1,2,\dots,n$ değeri için $\sum_{j=1}^n \alpha_j i(s_j)(s_t) = 0(s_t)$ eşitliğinden $\alpha_t = 0$

olmaktadır. Dolayısıyla $i(s_1), i(s_2), \dots, i(s_n)$ ler lineer bağımsızdır. Bu nedenle $i(S)$ kümesi lineer bağımsız vektörlerin kümesidir.

Şimdi ise $i(S)$ kümesinin $F(S)$ 'i gerdiğini göstermek için bir $f \in F(S)$ keyfi elemanını alalım. O halde $F(S)$ kümesinin tanımından sonlu tane $s_1, s_2, \dots, s_m$ noktasında f fonksiyonunun değeri sıfırdan farklıdır. Buradan $j=1,2,\dots,m$ değerleri

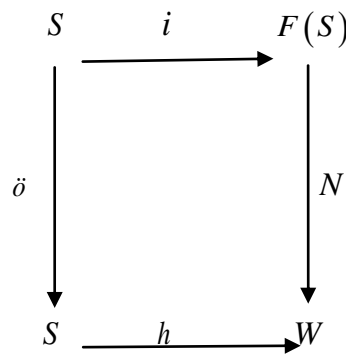
için $f(s_j) = \alpha_j \in K$ ile tek türlü belirlenir. O halde $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j i(s_j)$ şeklinde

yazılabilir. Yani $i(s_1), i(s_2), \dots, i(s_m)$ elemanları $F(S)$ kümesini germektedir.

Önerme 2.2 (Serbest vektör uzaylarının evrensel özelliği)

Varsayalım ki $S \neq \emptyset$ bir küme ve $F(S)$ kümesi serbest vektör uzayı olsun. Eğer $i: S \rightarrow F(S)$ şeklindeki fonksiyon S kümesinin $F(S)$ 'e gömülmesi ise, şu iki durum mevcuttur.

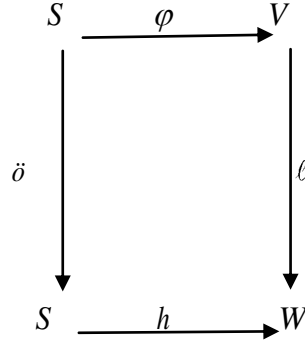
- i) Eğer W bir vektör uzayı ve $h: S \rightarrow W$ bir fonksiyon ise, $h = N \circ i$ olmak üzere bir tek $N: F(S) \rightarrow W$ lineer dönüşümü vardır. Eğer $\phi: S \rightarrow W$ şeklinde tanımlı özdeşlik dönüşümü ise aşağıdaki diyagram değişmelidir.



Şekil 2. 1 Evrensel özellik

Diyagramın değişmeli olması ise, $h \circ \ddot{o} = N \circ i = h$ olması demektir.

- ii) V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve $\varphi: S \rightarrow V$ bir fonksiyon olsun. O halde her W vektör uzayı ve $h: S \rightarrow W$ fonksiyonu için bir tek $\ell: V \rightarrow W$ lineer dönüşümü vardır öyle ki $h = \ell \circ \varphi$ dir ve aşağıdaki diyagram değişmelidir.



şekil 2.2 Evrensel özellik 2

Yani bu diyagramdan $\ell \circ \varphi = h \circ \ddot{o} = h$ eşitliği vardır, [5].

Tanım 2.15 V ve W bir K cismi üzerinde iki vektör uzayı ve bu vektör uzaylarının kartezyen çarpımı $V \times W$ olsun. $F(V \times W)$ kümesi K cismi üzerinde serbest vektör uzayıdır. O halde $V \times W$ nın $F(V \times W)$ ya bir i gömülmesi vardır ve $F(V \times W)$ serbest vektör uzayının $V \times W$ alt kümesi aslında $F(V \times W)$ kümesi için bir bazdır.

$F(V \times W)$ bir serbest vektör uzayı ve $\mathfrak{R}$ ise, $F(V \times W)$ nın aşağıdaki biçimdeki elemanlardan herhangi birinin oluşturduğu alt kümesi olsun. Yani $\mathfrak{R}$ kümesi $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W$ ve $c \in K$ olmak üzere,

$$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)$$

$$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)$$

$$c(v, w) - (cv, w)$$

$c(v, w) - (v, cw)$ biçimindeki elemanların herhangi biri tarafından üretilir. Burada serbest vektör uzayının elemanları için $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) \neq (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$ ve $x(v_1, w_1) \neq (xv_1, xw_1)$ olduğuna dikkat edelim.

$L = \text{span}_K \mathfrak{R}$ kümesi ise $F(V \times W)$ nın $\mathfrak{R}$ kümesini içeren en küçük alt kümesi olsun. O halde V ve W vektör uzaylarının **tensör çarpımı** $V \otimes_K W = F(V \times W) / L$ ile verilir. Eğer $v \in V$ ve $w \in W$ ise v ve w gibi iki elemanın tensör çarpımı, $F(V \times W)$ nın bir (v, w) baz elemanının kosetidir, yani $v \otimes w = (v, w) + L$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca, aşağıdaki eşitliklere sahiptir, [5].

$$\left. \begin{aligned} (v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\ v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\ cv \otimes w &= v \otimes cw \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Tanım 2.16 V, W ve Z bir K cismi üzerinde vektör uzayları olsun. Eğer $h: V \times W \rightarrow Z$ fonksiyonu $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ ve $a \in K$ elemanları için,

$$h(v_1 + v_2, w) = h(v_1, w) + h(v_2, w)$$

$$h(v, w_1 + w_2) = h(v, w_1) + h(v, w_2)$$

$$h(va, w) = h(v, aw)$$

özelliklerini sağlıyorsa bu h fonksiyonuna **bilineer fonksiyon** adı verilir, [6].

Önerme 2.3 (Tensör çarpımların evrensel özelliği)

V, W ve Z bir K cismi üzerindeki vektör uzayları olsun. Eğer $h: V \times W \rightarrow Z$ şeklinde bilineer fonksiyon ise, bir tek $\ell: V \otimes W \rightarrow Z$ lineer dönüşümü vardır öyleki $h = \ell \circ \otimes$ ve aşağıdaki diyagram değişmelidir, [5].

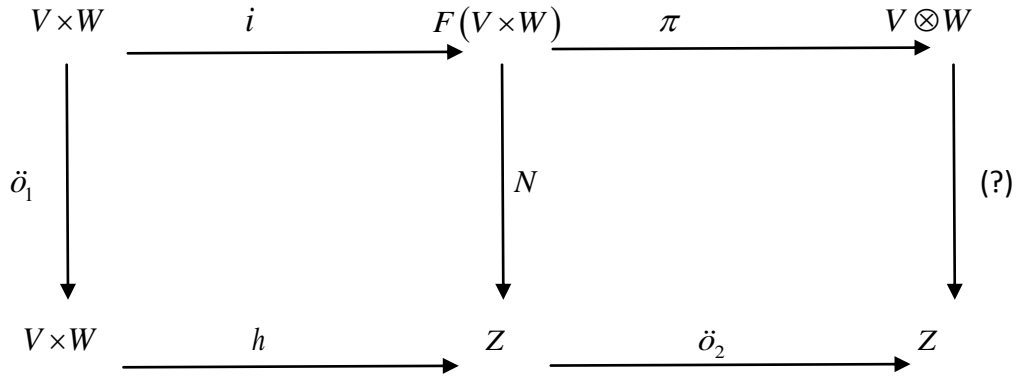
$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes W \\ \downarrow \scriptstyle \bar{o} & & \downarrow \scriptstyle \ell \\ V \times W & \xrightarrow{h} & Z \end{array}$$

Şekil 2. 3 Tensör çarpımın evrensel özelliği

İspat

$i: V \times W \rightarrow F(V \times W)$ fonksiyonu $V \times W$ kartezyen çarpım kümesinin $F(V \times W)$ ya gömülmesi olsun. Notasyonun basitliği için i kullanımını düşürelim. Burada $V \times W$ kartezyen çarpım kümesi $F(V \times W)$ kümesinin alt kümesi olarak davranır. $V \otimes W$ tensör çarpımı, $F(V \times W)$ kümesinin $L \subseteq F(V \times W)$ alt uzayına bölümüdür.

$\pi: F(V \times W) \rightarrow F(V \times W)/L = V \otimes W$ şeklinde tanımlanan bölüm fonksiyonu ise, $\otimes = \pi \circ i$ olur. Önerme 2.2 ile verdiğimiz serbest vektör uzaylarının evrensel özelliğinden, bir tek $N: F(V \times W) \rightarrow Z$ lineer dönüşümü vardır, öyle ki $h = N \circ i$ eşitliği vardır. Amacımız aşağıdaki diyagramda (?) ile gösterilen kısmı bir tek ℓ lineer dönüşümü ile tamamlamaktır.



Şekil 2. 4 Tensör çarpımın evrensel özelliği yardımcı diyagram

Varsayalım ki $\xi \in F(V \times W)$ L alt uzayı için $\mathfrak{R}$ üretici kümesindeki vektörlerden biri olsun. h fonksiyonu bilineer ve $h = N \circ i$ olduğundan $N\xi = 0$ dır. Eğer $\xi = (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \in F(V \times W)$ şeklindeki formda ise,

$$\begin{aligned}
 N\xi &= N(v, w_1 + w_2) - N(v, w_1) - N(v, w_2) \\
 &= h(v, w_1 + w_2) - h(v, w_1) - h(v, w_2) \\
 &= h(v, w_1) + h(v, w_2) - h(v, w_1) - h(v, w_2)
 \end{aligned}$$

$=0$ bulunur. Böylece $\mathfrak{R} \subseteq \text{çekN}$ olur ve $L = \text{span}\mathfrak{R} \subseteq \text{çekN}$ dir. Bu nedenle $\forall \xi \in F(V \times W)$ elemanı için $\ell : F(V \times W) / L \rightarrow Z$ şeklindeki fonksiyonu tanımlanabilir.

$$[\xi] \rightarrow \ell[\xi] = N\xi$$

Burada $[\xi]$ elemanı $F(V \times W) / L$ bölüm uzayında $\xi \in F(V \times W)$ elemanının kosetidir.

Örnek 2.15 V ve W vektör uzaylarının bazları sırası ile $\{v_i\}$ ve $\{w_j\}$ kümeleri ise, $V \otimes_K W$ vektör uzayının bazı $\{v_i \otimes w_j\}$ tensörleridir. Tensör çarpım aynı zamanda vektör uzayları arasındaki lineer fonksiyonlar için tanımlanır.

Tanım 2.17 Eğer $S : V \rightarrow X$ ve $T : W \rightarrow Y$ vektör uzayları arasında tanımlı iki lineer fonksiyon ise, S ve T lineer fonksiyonlarının tensör çarpımı da $S \otimes T : V \otimes W \rightarrow X \otimes Y$ şeklinde bir lineer fonksiyondur. Bu lineer fonksiyon da $(S \otimes T)(v \otimes w) = S(v) \otimes T(w)$ ile tanımlanır. Eğer S ve T birebir, örten ve sürekli ise $S \otimes T$ tensör çarpımı da birebir, örten ve süreklidir. Eğer vektör uzaylarının bazlarını seçersek, S ve T lineer dönüşümleri matrislerle gösterilebilir. $S \otimes T$ tensör çarpımına karşılık gelen matrise ise, S ve T dönüşümlerine karşılık gelen iki matrisin kronocker çarpımıdır.

Yani V, X, W ve Y yukarıda verilen vektör uzayları, S ve T lineer dönüşümlerine

karşılık gelen matrisler $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ şeklinde ise, bu iki matrisin tensör

çarpımı

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{12} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ a_{21} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{22} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

ile tanımlanır, [7].

2.4 Bir Reel Vektör Uzayının Kompleksleştirilmesi

$V_{\mathbb{R}}$ bir reel vektör uzayı ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi olmak üzere, $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayından kompleks vektör uzayı oluşturmak için bir $(a+ib) \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı ile $\vec{x} \in V_{\mathbb{R}}$ elemanının $(a+ib)\vec{x}$ çarpımının $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayında tanımlı olması gerekir. Fakat bu çarpımdaki $b\vec{x}$ elemanı $V_{\mathbb{R}}$ de anlamlı olmadığından bu ifadeyi anlamlandırmak için çarpım ifadesini $(a\vec{x}, b\vec{x})$ şeklinde ifade etmeliyiz.

2.4.1 Direkt Toplamlar ile Kompleksleştirme

Tanım 2.18 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi olmak üzere $\vec{x} \in V_{\mathbb{R}}$ vektörü ve $z \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı için, $z.\vec{x} = (a+ib).\vec{x} = a\vec{x} + ib\vec{x} = (a\vec{x}, b\vec{x}) = (w_1, w_2)$ şeklindeki elemanlardan oluşan ve $V_{\mathbb{C}} = \{z.\vec{x} \mid z.\vec{x} = (w_1, w_2), w_i \in V_{\mathbb{R}}, i=1,2\}$ ile tanımlanan kümeye $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının **kompleksleştirilmesi** adı verilir, [8].

Teorem 2.1 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının kompleksleştirilmesi olan $V_{\mathbb{C}}$ kümesi, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde kompleks vektör uzayıdır.

İspat

Toplama

$$\oplus: V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$$

$$(w_1, w_2), (v_1, v_2) \rightarrow (w_1, w_2) \oplus (v_1, v_2) = (w_1 + v_1, w_2 + v_2) \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanan iç işleme göre (2.1) ile verdiğimiz grup aksiyomlarını gerçekleyelim.

G1) $(w_1, w_2) \oplus (v_1, v_2) = (w_1 + v_1, w_2 + v_2) \in V_{\mathbb{C}}$ olduğundan $\oplus$ işlemi kapalılık aksiyomunu gerçekler.

$$G2) (w_1 + v_1, w_2 + v_2) \oplus (y_1, y_2)$$

$$(w_1 + v_1 + y_1, w_2 + v_2 + y_2) = (w_1, w_2) \oplus (v_1 + y_1, v_2 + y_2)$$

olduğundan $\oplus$ işlemi birleşme aksiyomunu gerçekler.

G3) $(w_1, w_2) \oplus (v_1, v_2) = (w_1, w_2)$ iken,

$$(w_1 + v_1, w_2 + v_2) = (w_1, w_2)$$

$\left. \begin{array}{l} w_1 + v_1 = w_1 \\ w_2 + v_2 = w_2 \end{array} \right\}$ eşitliklerinden $(v_1, v_2) = (0, 0)$ bulunur.

O halde $\oplus$ işleminin etkisiz elemanı $(0, 0)$ dır.

G4) $(w_1, w_2) \oplus (v_1, v_2) = (0, 0)$ iken,

$\left. \begin{array}{l} w_1 + v_1 = 0 \\ w_2 + v_2 = 0 \end{array} \right\}$ eşitliklerinden de $\begin{array}{l} v_1 = -w_1 \\ v_2 = -w_2 \end{array}$ bulunur.

O halde $\oplus$ işlemine göre bir $(w_1, w_2) \in V_{\mathbb{C}}$ elemanının tersi $(-w_1, -w_2)$ olur.

$\forall (w_1, w_2), (v_1, v_2) \in V_{\mathbb{C}}$ için

$$(w_1, w_2) \oplus (v_1, v_2) = (w_1 + v_1, w_2 + v_2)$$

$$= (v_1 + w_1, v_2 + w_2) = (v_1, v_2) \oplus (w_1, w_2) \text{ olduğundan } V_{\mathbb{C}} \text{ kümesi } \oplus$$

işlemine göre abel gruptur.

Dış işlem

$$\odot : \mathbb{C} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$$

$$(a + ib), (w_1, w_2) \rightarrow (a + ib) \odot (w_1, w_2) = (aw_1 - bw_2, bw_1 + aw_2) \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanan dış işlem ile birlikte $V_{\mathbb{C}}$ kümesinin (2.2) ile verdiğimiz vektör uzayı aksiyomlarını gerçeklediğini gösterelim.

V1) $z_1 = a + ib, z_2 = c + id \in \mathbb{C}$ ve $(w_1, w_2) \in V_{\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$(z_1 + z_2) \odot (w_1, w_2) = ((a + c) + i(b + d)) \odot (w_1, w_2)$$

(2.7) ile verdiğimiz dış işlem ifadesinden,

$$(z_1 + z_2) \odot (w_1, w_2) = ((a + c)w_1 - (b + d)w_2, (a + c)w_2 + (b + d)w_1)$$

$$\begin{aligned}
&= (aw_1 + cw_1 - bw_2 - dw_2, aw_2 + cw_2 + bw_1 + dw_1) \\
&= (aw_1 - bw_2, bw_1 + aw_2) + (cw_1 - dw_2, dw_1 + cw_2) \\
&= (a + ib) \odot (w_1, w_2) + (c + id) \odot (w_1, w_2) \\
&= z_1 \odot (w_1, w_2) + z_2 \odot (w_1, w_2) \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

V2) $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ve $(w_1, w_2), (v_1, v_2) \in V_{\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
z \odot ((w_1, w_2) + (v_1, v_2)) &= z \odot (w_1 + v_1, w_2 + v_2) \\
&= (a + ib) \odot (w_1 + v_1, w_2 + v_2) \\
&= (a(w_1 + v_1) - b(w_2 + v_2), a(w_2 + v_2) + b(w_1 + v_1)) \\
&= (aw_1 - bw_2, aw_2 + bw_1) + (av_1 - bv_2, av_2 + bv_1) \\
&= (a + ib) \odot (w_1, w_2) + (a + ib) \odot (v_1, v_2) \\
&= z \odot (w_1, w_2) + z \odot (v_1, v_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V3) z_1 \cdot z_2 \odot (w_1, w_2) &= ((a + ib) \cdot (c + id)) \odot (w_1, w_2) \\
&= ((ac - bd) + i(ad + bc)) \odot (w_1, w_2) \\
&= ((ac - bd)w_1 - (bc + ad)w_2, (ad + bc)w_1 + (ac - bd)w_2) \\
&= z_1 \odot (z_2 \odot (w_1, w_2))
\end{aligned}$$

$$V4) 1_z \odot (w_1, w_2) = (1 + 0i) \odot (w_1, w_2) = (1.w_1 - 0.w_2, 1.w_2 + 0.w_1) = (w_1, w_2)$$

aksiyomları gerçeğlendiğinden, $V_{\mathbb{C}}$ kümesi $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir kompleks vektör uzayıdır.

Not 2.4 Bir $(w_1, w_2) \in V_{\mathbb{C}}$ elemanın i ile çarpımı

$$i(w_1, w_2) = (-w_2, w_1) \quad (2.8)$$

olmak üzere,

$(w_1, w_2) = (w_1, 0) + (0, w_2)$ eşitliği ve (2.8) ile tanımladığımız çarpım ifadesinden,

$$(w_1, w_2) = (w_1, 0) + i(w_2, 0)$$

$$(w_1, w_2) = w_1 + w_2 i$$

yazılabildiğinden, $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayını

$$V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}} \text{ veya } V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{R}} + iV_{\mathbb{R}} \quad (2.9)$$

olarak da ifade edebiliriz, [8].

Tanım 2.19 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının kompleksleştirilmesi $V_{\mathbb{C}}$ olsun. $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayının $V_{\mathbb{R}} \oplus \{0\}$ veya $\{0\} \oplus V_{\mathbb{R}}$ reel alt uzaylarını alırsak,

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{R}} &\rightarrow V_{\mathbb{C}} \\ w &\rightarrow (w, 0) \end{aligned} \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayı içine **gömülmesi** denir, [8].

Örnek 2.16 Eğer $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ olarak alırsak, $\mathbb{R}$ nin kompleksleştirilmesi olan $\mathbb{R}_{\mathbb{C}}$ kümesi reel sayıların (x, y) sıralı ikililerinin kümesidir ve $(a + ib)(x, y) = (ax - by, bx + ay)$ çarpımı (dış işlemi) ile birlikte bir kompleks vektör uzayı olur. (2.9) ifadesinden $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}}$ olarak yazılabildiğinden $\mathbb{R}_{\mathbb{C}} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ eşitliği vardır.

Teorem 2.2 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve kompleksleştirilmesi de $V_{\mathbb{C}}$ olsun. Eğer $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının bir $\mathbb{R}$ bazı $1 \leq t \leq n$ olmak üzere $\{e_t\}$ ise, $\{(e_t, 0)\}$ $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayının bir $\mathbb{C}$ bazıdır, [8].

İspat

Eğer $V_{\mathbb{R}} = 0$ ise, (2.9) ile verdiğimiz $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}}$ ifadesinden $V_{\mathbb{C}} = 0$ olduğu açıktır. O halde $V_{\mathbb{R}} \neq 0$ ve $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının bir $\mathbb{R}$ bazını $\{e_t\}$ olarak alalım.

Germe Aksiyomu

$V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayının (w_1, w_2) elemanındaki w_1 ve w_2 bileşenleri e_t lerin $\mathbb{R}$ lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Yani,

$$w_1 = \sum_{t=1}^n a_t e_t \text{ ve } w_2 = \sum_{t=1}^n b_t e_t \quad (2.11)$$

biçiminde $\mathbb{R}$ lineer kombinasyonları vardır.

$(w_1, w_2) = (w_1, 0) + (0, w_2)$ eşitliğinden (2.11) ile verdiğimiz kombinasyonlar yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} (w_1, w_2) &= \left(\sum_{t=1}^n a_t e_t, 0 \right) + \left(0, \sum_{t=1}^n b_t e_t \right) = \left(\sum_{t=1}^n a_t e_t, 0 \right) + i \left(\sum_{t=1}^n b_t e_t, 0 \right) \\ &= \sum_{t=1}^n a_t (e_t, 0) + i \sum_{t=1}^n b_t (e_t, 0) = \sum_{t=1}^n (a_t + ib_t) (e_t, 0) \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Bu eşitlikten $\{(e_t, 0)\}$ ların $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayının bir $\mathbb{C}$ lineer geren kümesi olduğu görülür.

Lineer Bağımsızlık

$V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayının bir $\mathbb{C}$ lineer geren kümesi olan $\{(e_t, 0)\}$ sisteminin lineer bağımsız dolayısıyla baz olduğunu göstermek için, $\{(e_t, 0)\}$ ların $\mathbb{C}$ lineer kombinasyonundaki bileşenlerin sıfır olması gerekir.

$$(a_1 + ib_1)(e_1, 0) + (a_2 + ib_2)(e_2, 0) + \dots + (a_n + ib_n)(e_n, 0) = (0, 0)$$

$$(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n, 0) + i(b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n, 0) = (0, 0)$$

$$(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n, 0) + (0, b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n) = (0, 0)$$

$$(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n, b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n) = (0, 0) \text{ eşitliği bulunur. Son eşitlikte}$$

bileşenlerin eşitliğinden, $\sum_{t=1}^n a_t e_t = 0$ ve $\sum_{t=1}^n b_t e_t = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $\{e_t\}$ ler

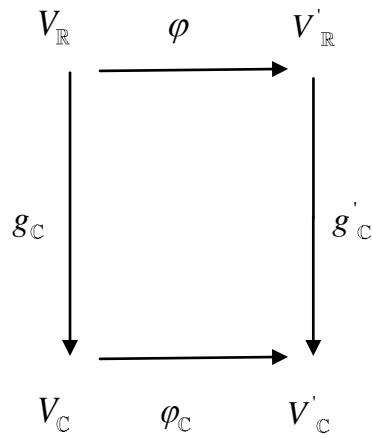
$\mathbb{R}$ üzerindeki lineer bağımsız olduğundan, tüm a_t ve b_t bileşenleri sıfırdır. Yani $\forall t = 1, 2, \dots, n$ değeri için $a_t + ib_t = 0$ olur, [8].

Önerme 2.4 $V_{\mathbb{R}}$ ve $V'_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayları ve bunların kompleksleştirilmeleri sırasıyla $V_{\mathbb{C}}$ ve $V'_{\mathbb{C}}$ olsun. Eğer $\varphi: V_{\mathbb{R}} \rightarrow V'_{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$ lineer dönüşüm ise, bu dönüşümü

$$\varphi_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow V'_{\mathbb{C}}$$

$$(w_1, w_2) \rightarrow \varphi_{\mathbb{C}}(w_1, w_2) = (\varphi(w_1), \varphi(w_2)) \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanan $V_{\mathbb{C}}$ ve $V'_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzaylarının $\mathbb{C}$ lineer dönüşümüne genişletebiliriz ve $g_{\mathbb{C}}, g'_{\mathbb{C}}$ (2.10) ile tanımladığımız gibi gömmeler ise aşağıda verilen diyagram değişmelidir, [8].



şekil 2.5 Kompleks dönüşümlerin diyagramı

İspat

Eğer (2.12) deki gibi tanımlanan bir $\varphi_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow V'_{\mathbb{C}}$ fonksiyonu var ise, bu fonksiyonun $\mathbb{C}$ lineer olduğunu gösterelim.

L1) $(w_1, w_2), (v_1, v_2) \in V_{\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\varphi_{\mathbb{C}}((w_1, w_2) \oplus (v_1, v_2)) = \varphi_{\mathbb{C}}(w_1 + v_1, w_2 + v_2) = (\varphi(w_1 + v_1), \varphi(w_2 + v_2))$$

yazabiliriz. Buradaki φ dönüşümü $\mathbb{R}$ lineer olduğundan,

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbb{C}}((w_1, w_2) \oplus (v_1, v_2)) &= (\varphi(w_1) + \varphi(v_1), \varphi(w_2) + \varphi(v_2)) \\ &= (\varphi(w_1), \varphi(w_2)) + (\varphi(v_1), \varphi(v_2)) \\ &= \varphi_{\mathbb{C}}(w_1, w_2) \oplus \varphi_{\mathbb{C}}(v_1, v_2) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

L2) $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ve $(w_1, w_2) \in V_{\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\varphi_{\mathbb{C}}(z \odot (w_1, w_2)) = \varphi_{\mathbb{C}}((a + ib) \odot (w_1, w_2))$$

(2.7) ile verilen dış işlem tanımından,

$\varphi_{\mathbb{C}}(z \odot (w_1, w_2)) = \varphi_{\mathbb{C}}((aw_1 - bw_2, aw_2 + bw_1))$ yazılır. $\varphi_{\mathbb{C}}$ dönüşümünün (2.12) ile verilen tanımından ise,

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbb{C}}(z \odot (w_1, w_2)) &= (\varphi(aw_1 - bw_2), \varphi(aw_2 + bw_1)) \\ &= (a\varphi(w_1) - b\varphi(w_2), a\varphi(w_2) + b\varphi(w_1)) \\ &= a(\varphi(w_1), \varphi(w_2)) + b(-\varphi(w_2), \varphi(w_1)) \\ &= a(\varphi(w_1), \varphi(w_2)) + ib(\varphi(w_1), \varphi(w_2)) \\ &= (a + ib) \odot (\varphi(w_1), \varphi(w_2)) = z \odot \varphi_{\mathbb{C}}(w_1, w_2) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\varphi_{\mathbb{C}}$ dönüşümünün $\mathbb{C}$ lineer dönüşüm olduğu gösterilmiş olur. Burada $\varphi_{\mathbb{C}}$ dönüşümüne φ nin kompleksleştirilmesi adı verilir, [8].

Teorem 2.3 $V_{\mathbb{R}}$ ve $V'_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayları ve bunların kompleksleştirilmeleri sırasıyla $V_{\mathbb{C}}$ ve $V'_{\mathbb{C}}$ olsun. Eğer $\varphi: V_{\mathbb{R}} \rightarrow V'_{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$ lineer dönüşüm ve kompleksleştirilmesi de

$$\varphi_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow V'_{\mathbb{C}}$$

$$(w_1, w_2) \rightarrow \varphi_{\mathbb{C}}(w_1, w_2) = (\varphi(w_1), \varphi(w_2))$$

şeklinde tanımlı $\mathbb{C}$ lineer dönüşüm olmak üzere, $\zeta ek \varphi_{\mathbb{C}} = (\zeta ek \varphi)_{\mathbb{C}}$ ve $\varphi_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}) = (\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{C}}$ eşitlikleri vardır, [8].

İspat

$\varphi: V_{\mathbb{R}} \rightarrow V'_{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$ lineer dönüşümünün çekirdeğini $\zeta ek \varphi = \{x \in V_{\mathbb{R}} \mid \varphi(x) = 0_{V'_{\mathbb{R}}}\} \subset V_{\mathbb{R}}$ ve

$\varphi_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow V'_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$ lineer dönüşümünün çekirdeğini $\zeta ek \varphi_{\mathbb{C}} = \{x \in V_{\mathbb{C}} \mid \varphi_{\mathbb{C}}(x) = 0_{V'_{\mathbb{C}}}\} \subset V_{\mathbb{C}}$

şeklinde verelim. Burada $(\zeta ek \varphi)_{\mathbb{C}} = \zeta ek \varphi_{\mathbb{C}}$ eşitliğini göstermek için $\forall x \in (\zeta ek \varphi)_{\mathbb{C}} \subset V_{\mathbb{C}}$

elemanı için $x = (x_1, x_2)$ şeklinde olmak üzere $\varphi_{\mathbb{C}}(x) = 0_{V'_{\mathbb{C}}}$ olduğunu gösterelim.

$\varphi_{\mathbb{C}}(x) = \varphi_{\mathbb{C}}(x_1, x_2) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = (0_{V'_{\mathbb{R}}}, 0_{V'_{\mathbb{R}}}) = 0_{V'_{\mathbb{C}}}$ olduğundan $x \in \text{çek}\varphi_{\mathbb{C}}$ olup

$$(\text{çek}\varphi)_{\mathbb{C}} \subset \text{çek}\varphi_{\mathbb{C}} \quad (2.13)$$

elde edilir.

Diğer taraftan $\forall x \in \text{çek}\varphi_{\mathbb{C}} \subset V_{\mathbb{C}}$ elemanı için $x = (x_1, x_2)$ şeklinde olup $x_1, x_2 \in V_{\mathbb{R}}$ dir.

$\varphi_{\mathbb{C}}(x_1, x_2) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = (0_{V'_{\mathbb{R}}}, 0_{V'_{\mathbb{R}}}) = 0_{V'_{\mathbb{C}}}$ olduğundan $\varphi(x_1) = 0_{V'_{\mathbb{R}}}$, $\varphi(x_2) = 0_{V'_{\mathbb{R}}}$

elde edilir. Buradan $x_1 \in \text{çek}\varphi$, $x_2 \in \text{çek}\varphi$, yani $x \in (\text{çek}\varphi)_{\mathbb{C}}$ olmaktadır. Dolayısıyla

$$\text{çek}\varphi_{\mathbb{C}} \subset (\text{çek}\varphi)_{\mathbb{C}} \quad (2.14)$$

yazılabilir.

Sonuç olarak (2.13) ve (2.14) ifadeleri göz önüne alınırsa $(\text{çek}\varphi)_{\mathbb{C}} = \text{çek}\varphi_{\mathbb{C}}$ eşitliği gösterilmiş olur.

Benzer şekilde, $\varphi_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}) = (\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{C}}$ eşitliğini göstermek istersek, $\forall y \in \varphi_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}) = V'_{\mathbb{C}}$

elemanını aldığımızda $\varphi_{\mathbb{C}}(x) = y$ olacak şekilde $x \in V_{\mathbb{C}}$ vardır. $y = (y_1, y_2)$ şeklinde

olduğundan ve $\varphi_{\mathbb{C}}$ dönüşümünün tanımından $y = (y_1, y_2) = \varphi_{\mathbb{C}}(x) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2))$

eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla $y \in (\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{C}}$ olur ve $\varphi_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}) \subset (\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{C}}$ yazılır. Tersine

$y \in (\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{C}}$ elemanını aldığımızda $y = (y_1, y_2)$ olduğundan $\varphi(x_1) = y_1$ ve $\varphi(x_2) = y_2$

olacak şekilde $x_1, x_2 \in V_{\mathbb{R}}$ vardır. $y = (y_1, y_2) = \varphi_{\mathbb{C}}(x) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2))$ eşitliğinden

$y = (y_1, y_2) \in V'_{\mathbb{C}} = \varphi_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ olur. Buradan $(\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{C}} \subset \varphi_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ yazılır ve istenilen

eşitlik gösterilmiş olur.

Sonuç 2.1 $\varphi: V_{\mathbb{R}} \rightarrow V'_{\mathbb{R}}$ bir $\mathbb{R}$ lineer dönüşüm ve $\varphi_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow V'_{\mathbb{C}}$ dönüşümü de (2.12)

ile tanımlanan bir $\mathbb{C}$ lineer dönüşüm olmak üzere, φ dönüşümü bir izomorfizma ise

$\varphi_{\mathbb{C}}$ dönüşümü de bir izomorfizmadır, [8].

İspat

Varsayalım ki $\varphi: V_{\mathbb{R}} \rightarrow V'_{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$ lineer dönüşümü bir izomorfizma olsun. φ dönüşümü bir $\mathbb{R}$ lineer dönüşüm iken $\varphi_{\mathbb{C}}$ nin de $\mathbb{C}$ lineer olduğunu biliyoruz. Aldığımız $\forall x = (x_1, x_2) \in V_{\mathbb{C}}$ elemanı için $\varphi_{\mathbb{C}}(x) = 0$ iken $x = 0$ oluyor ise $\varphi_{\mathbb{C}}$ dönüşümünün birebir olduğunu göstermiş oluruz. $\varphi_{\mathbb{C}}(x_1, x_2) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = (0_{V'_{\mathbb{R}}}, 0_{V'_{\mathbb{R}}})$ olduğundan $\varphi(x_1) = 0_{V'_{\mathbb{R}}}$, ve $\varphi(x_2) = 0_{V'_{\mathbb{R}}}$ eşitlikleri vardır. φ dönüşümü izomorfizma olduğundan 1-1 ve örten olup, $\varphi(x_1) = 0_{V'_{\mathbb{R}}}$, $\varphi(x_2) = 0_{V'_{\mathbb{R}}}$ için $x_1 = x_2 = 0$ dır. Bu nedenle $x = (x_1, x_2) = (0, 0)$ elde edilir. Yani $\varphi_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$ lineer dönüşümü 1-1 dir. $\varphi_{\mathbb{C}}$ dönüşümünün örtenliğini göstermek için $\forall y \in V'_{\mathbb{C}}$ için $\varphi_{\mathbb{C}}(x) = y$ olacak şekilde $\exists x \in V_{\mathbb{C}}$ olduğunu gösterelim. $\forall y \in V'_{\mathbb{C}}$ için $\varphi_{\mathbb{C}}(x_1, x_2) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = (y_1, y_2) = y$ olur. Buradaki eşitlikten $\varphi(x_1) = y_1$ ve $\varphi(x_2) = y_2$ bulunur. φ dönüşümü bir izomorfizma olduğundan örtendir ve $\forall y_1, y_2 \in V'_{\mathbb{R}}$ için $\varphi(x_1) = y_1, \varphi(x_2) = y_2$ olacak şekilde $\exists x_1, x_2 \in V_{\mathbb{R}}$ vardır. Dolayısıyla $x = (x_1, x_2) \in V_{\mathbb{C}}$ bulunur. O halde $\varphi_{\mathbb{C}}$ dönüşümünün de örten, sonuç olarak bir izomorfizma olduğu gösterilmiş olur.

2.4.2 Tensör Çarpımı ile Kompleksleştirme

$V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının baz seçimine bağlı olmayan bir diğer kompleksleştirme $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ şeklinde tensör çarpımlar yardımıyla oluşturulabilir.

Tanım 2.20 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi olmak üzere, $\vec{x} \in V_{\mathbb{R}}$ ve $z = a + ib \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı için $z \otimes \vec{x} = (a + ib) \otimes \vec{x} = a \otimes \vec{x} + ib \otimes \vec{x} = 1 \otimes w_1 + i \otimes w_2$ şeklindeki elemanlardan oluşan ve $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = \{ z \otimes \vec{x} \mid z \otimes \vec{x} = 1 \otimes w_1 + i \otimes w_2, w_i \in V_{\mathbb{R}} \}$ ile tanımlanan kümeye, $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının **tensör çarpım ile kompleksleştirilmesi** denir, [8].

Tanım 2.21 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının kompleksleştirilmesi de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ olmak üzere,

$$G_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$$

$$w \rightarrow 1_{\mathbb{C}} \otimes w \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ içine **gömülmesi** denir.

Teorem 2.4 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi olsun. $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının kompleksleştirilmesi olan $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ kümesi $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde vektör uzayıdır, [8].

İspat

$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ kümesinin vektör uzayı olduğunu göstermek için ilk olarak abel grup işlemini tanımlayalım.

Toplama

$$\oplus: (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}) \times (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}) \rightarrow (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}})$$

$$(1_{\mathbb{C}} \otimes x, 1_{\mathbb{C}} \otimes y) \rightarrow (1_{\mathbb{C}} \otimes x) \oplus (1_{\mathbb{C}} \otimes y) = 1_{\mathbb{C}} \otimes (x + y)$$

şeklinde tanımlanan iç işleme göre grup olduğunu gösterelim.

G1) $1_{\mathbb{C}} \otimes (x + y) \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ olduğundan kapalılık aksiyomu gerçekleşir.

$$\begin{aligned} G2) (1_{\mathbb{C}} \otimes (x + y)) \oplus (1_{\mathbb{C}} \otimes z) &= 1_{\mathbb{C}} \otimes (x + y + z) \\ &= (1_{\mathbb{C}} \otimes x) \oplus (1_{\mathbb{C}} \otimes (y + z)) \end{aligned}$$

olduğundan birleşme aksiyomu gerçekleşir.

G3) $(1_{\mathbb{C}} \otimes x) \oplus (1_{\mathbb{C}} \otimes y) = (1_{\mathbb{C}} \otimes (x + y)) = (1_{\mathbb{C}} \otimes x)$ eşitliğinden,

$$(1_{\mathbb{C}} \otimes (x + y)) - (1_{\mathbb{C}} \otimes x) = 0$$

$$1_{\mathbb{C}} \otimes (x + y - x) = 0 \Rightarrow y = 0$$

O halde $\oplus$ işleminin etkisiz elemanı $(1_{\mathbb{C}} \otimes 0)$ dır.

$$G4) (1_{\mathbb{C}} \otimes x) \oplus (1_{\mathbb{C}} \otimes y) = (1_{\mathbb{C}} \otimes 0)$$

$$(1_{\mathbb{C}} \otimes (x+y)) = (1_{\mathbb{C}} \otimes 0)$$

$$x+y=0 \Rightarrow y=-x$$

dolayısıyla $(1_{\mathbb{C}} \otimes x)$ elemanın tersi $(1_{\mathbb{C}} \otimes -x)$ olarak bulunur.

Buradan $\oplus$ işleminin (2.1) ile verdiğimiz grup aksiyomlarını gerçeklediği gösterilmiş olur.

Dış işlem

$$\odot: \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}) \rightarrow (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}})$$

$$(z, (1_{\mathbb{C}} \otimes x)) \rightarrow z \odot (1_{\mathbb{C}} \otimes x) = (z \cdot 1_{\mathbb{C}} \otimes x)$$

şeklinde tanımlanan dış işleme göre (2.2) ile verdiğimiz vektör uzayı aksiyomlarını gerçekleyelim.

$$V1) z \odot ((1_{\mathbb{C}} \otimes x) + (1_{\mathbb{C}} \otimes y)) = z \odot (1_{\mathbb{C}} \otimes (x+y)) = z \cdot 1_{\mathbb{C}} \otimes (x+y)$$

$$= z \cdot (1_{\mathbb{C}} \otimes x) + z \cdot (1_{\mathbb{C}} \otimes y)$$

$$= z \odot (1_{\mathbb{C}} \otimes x) + z \odot (1_{\mathbb{C}} \otimes y)$$

$$V2) (z_1 + z_2) \odot (1_{\mathbb{C}} \otimes x) = ((z_1 + z_2) \cdot 1_{\mathbb{C}} \otimes x) = z_1 \cdot 1_{\mathbb{C}} \otimes x + z_2 \cdot 1_{\mathbb{C}} \otimes x$$

$$= z_1 \odot (1_{\mathbb{C}} \otimes x) + z_2 \odot (1_{\mathbb{C}} \otimes x)$$

$$V3) (z_1 \cdot z_2) \odot (1_{\mathbb{C}} \otimes x) = ((z_1 \cdot z_2) \cdot 1_{\mathbb{C}} \otimes x) = z_1 \odot (z_2 \cdot 1_{\mathbb{C}} \otimes x)$$

$$= z_1 \odot (z_2 \odot (1_{\mathbb{C}} \otimes x))$$

$$V4) 1_{\mathbb{C}} \odot (1_{\mathbb{C}} \otimes x) = 1_{\mathbb{C}} \cdot 1_{\mathbb{C}} \otimes x = 1_{\mathbb{C}} \otimes x$$

olduğundan $(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}})$ kümesi $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde kompleks vektör uzayıdır. Böylece şu sonucu verebiliriz.

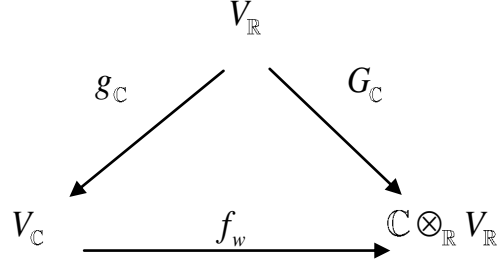
Sonuç 2.2 $\{(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}), \oplus, \mathbb{C}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı kompleks vektör uzayı olur.

Teorem 2.5 $V_{\mathbb{R}}$ bir reel vektör uzayı ve kompleksleştirilmeleri de $V_{\mathbb{C}}$ ve $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ olmak üzere,

$$f_w : V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$$

$$(w_1, w_2) \rightarrow f_w(w_1, w_2) = 1 \otimes w_1 + i \otimes w_2 \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{C}$ lineer izomorfizma vardır ve aşağıdaki diyagram değişmelidir, [8].



Şekil 2.6 Kompleksleştirme diyagramı

İspat

Yukarıdaki önermede (2.16) eşitliği ile tanımlanan f_w dönüşümünün $\mathbb{C}$ lineer olduğunu gösterelim.

L1) $(w_1, w_2), (v_1, v_2) \in V_{\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f_w((w_1, w_2) \oplus (v_1, v_2)) &= f_w(w_1 + v_1, w_2 + v_2) = 1 \otimes (w_1 + v_1) + i \otimes (w_2 + v_2) \\ &= 1 \otimes w_1 + 1 \otimes v_1 + i \otimes w_2 + i \otimes v_2 \\ &= f_w(w_1, w_2) \oplus f_w(v_1, v_2) \end{aligned}$$

L2) $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ve $(w_1, w_2) \in V_{\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$f_w(z \odot (w_1, w_2)) = f_w((a + ib) \odot (w_1, w_2))$$

(2.7) ile verilen dış işlem ifadesinden,

$$f_w(z \odot (w_1, w_2)) = f_w(aw_1 - bw_2, bw_1 + aw_2) \quad \text{yazılır ve (2.16) ile verilen } f_w$$

dönüşümünün tanımından da,

$$f_w(z \odot (w_1, w_2)) = 1 \otimes (aw_1 - bw_2) + i \otimes (bw_1 + aw_2) \quad \text{bulunur. Eğer (2.5) ile verilen}$$

tensor çarpımının lineerliği kullanılırsa,

$$f_w(z \odot (w_1, w_2)) = 1 \otimes aw_1 - 1 \otimes bw_2 + i \otimes bw_1 + i \otimes aw_2$$

$$\begin{aligned}
&= a \otimes w_1 - b \otimes w_2 + ib \otimes w_1 + ia \otimes w_2 \\
&= (a + ib) \odot (1 \otimes w_1 + i \otimes w_2) = (a + ib) \odot f_w(w_1, w_2) \\
&= z \odot f_w(w_1, w_2) \text{ elde edilir.}
\end{aligned}$$

Böylece f_w fonksiyonunun $\mathbb{C}$ lineer olduğu gösterilmiş olur. f_w fonksiyonunun izomorfizma olduğunu göstermek için,

$$g_w : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$$

$$(1 \otimes w) \rightarrow (w, 0)$$

$$z \otimes w = z(1 \otimes w) \rightarrow z(w, 0)$$

şeklindeki ters fonksiyonunu tanımlayalım.

Bu şekilde tanımlanan g_w fonksiyonunun $\mathbb{C}$ lineer olduğunu göstermek için $t = z \otimes w \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ ve $z' \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $g_w(z' \odot t) = z' \odot g_w(t)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\begin{aligned}
g_w(z' \odot t) &= g_w(z' \odot (z \otimes w)) = g_w(z' z \otimes w) \\
&= z' z(w, 0) = z' \odot (z(w, 0)) = z' \odot g_w(t)
\end{aligned}$$

Son olarak f_w ile g_w fonksiyonlarının birbirlerinin tersi olduğunu gösterelim.

$$g_w(f_w(w_1, w_2)) = g_w(1 \otimes w_1 + i \otimes w_2)$$

$g_w(f_w(w_1, w_2)) = g_w(1 \otimes w_1 + i(1 \otimes w_2))$ yazabiliriz. Biz g_w fonksiyonunun $\mathbb{C}$ lineer olduğunu gösterdiğimizden,

$$= g_w(1 \otimes w_1) + i g_w(1 \otimes w_2)$$

$$g_w(f_w(w_1, w_2)) = (w_1, 0) + i(w_2, 0) = (w_1, w_2)$$

$$f_w(g_w(z \otimes w)) = f_w(z(w, 0)) = f_w(zw, 0) = 1 \otimes zw + i \otimes 0 = z \otimes w \text{ bulunur.}$$

Böylece $f_w \circ g_w = I$ elde edilir. O halde f_w fonksiyonu terslenebilir bir fonksiyon olup 1-1 ve örtendir. Dolayısıyla f_w fonksiyonu bir izomorfizmadır ve $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} \cong V_{\mathbb{C}}$ eşitliği gerçekleşir, [8].

BÖLÜM 3

KUATERNİYONLAR

Bu kısımda reel, kompleks ve dual kuaterniyonların bazı tanım ve özelliklerine değinilecektir.

3.1 Reel Kuaterniyonlar

Bir q reel kuaterniyonu bir q_0 skalerinin ve $q_v = (q_1, q_2, q_3)$ vektörünün toplamı ile tanımlanır. Yani bir reel kuaterniyonu $q = q_0 + q_v = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ şeklinde ifade edebiliriz. Buradan hareketle reel kuaterniyonlar kümesini

$\mathbb{H}_{\mathbb{R}} = \{q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$ ile tanımlayabiliriz, [9].

Tanım 3.1 İki reel kuaterniyonun toplamı için,

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 + p_1i + p_2j + p_3k \\ q &= q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

reel kuaterniyonlarını göz önüne alalım. O halde iki reel kuaterniyonun toplamı

$p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k$ şeklinde tanımlanır. Bu toplama işlemi ile birlikte $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ kümesi abel gruptur. İki reel kuaterniyonun çarpımı ise Hamilton tarafından verilen

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj \quad \text{ve} \quad ki = j = -ik \quad (3.2)$$

çarpım kurallarına sahiptir ve şu şekilde tanımlanır, [9].

Tanım 3.2 p ve q gibi iki reel kuaterniyon aldığımızda bu iki kuaterniyonun çarpımı,

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k) \cdot (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \\ &= p_0q_0 - (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + p_0(q_1i + q_2j + q_3k) + q_0(p_1i + p_2j + p_3k) \\ &\quad + (p_2q_3 - p_3q_2)i + (p_3q_1 - p_1q_3)j + (p_1q_2 - p_2q_1)k \end{aligned}$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu çarpım eşitliğini hatırlamak oldukça güç olduğundan, $\mathbb{R}^3$ deki iki vektörün iç çarpım ve kartezyen çarpım tanımını kullanarak, p ve q kuaterniyonlarının vektörel kısımları $p_v = (p_1, p_2, p_3)$ ve $q_v = (q_1, q_2, q_3)$ olmak üzere bu iki kuaterniyonun çarpımını

$$pq = p_0q_0 - p_v \bullet q_v + p_0q_v + q_0p_v + p_v \times q_v \quad (3.3)$$

şeklinde daha kısa biçimde ifade edebiliriz. Ayrıca reel kuaterniyonlar çarpma işlemine göre değişmeli olmadığından $(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ üçlüsü bir yarı cisimdir, [9].

Örnek 3.1 $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ reel kuaterniyonlar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde 4 boyutlu vektör uzayıdır.

Örnek 3.2 $p = 3 + i - 2j + k$ ve $q = 2 - i + 2j + 3k$ şeklinde verilen iki reel kuaterniyon olsun. Bu kuaterniyonların vektörel kısımları $p_v = (1, -2, 1)$ ve $q_v = (-1, 2, 3)$ şeklindedir. Eğer p_v ve q_v vektörel kısımlarının iç çarpımını ve kartezyen çarpımını hesaplarsak,

$$p_v \cdot q_v = -2$$

$$p_v \times q_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8i - 4j \text{ buluruz.}$$

O halde (3.3) denklemi ile verdiğimiz iki kuaterniyonun çarpımından p ve q kuaterniyonlarının çarpımını,

$$\begin{aligned} pq &= 6 - (-2) + 3(-i + 2j + 3k) + 2(i - 2j + k) + (-8i - 4j) \\ &= 8 - 9i - 2j + 11k \text{ olarak buluruz.} \end{aligned}$$

Bu elde ettiğimiz sonuçtan, iki kuaterniyonun çarpımının yine bir kuaterniyon olduğu görülmektedir.

Tanım 3.3 $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ reel kuaterniyonunun eşleniği $\bar{q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$ ile tanımlanır ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$i) \overline{(\bar{q})} = q_0 - (-q_v) = q$$

$$ii) q + \bar{q} = 2q_0$$

$$iii) \bar{q} \cdot q = (q_0 - q_v)(q_0 + q_v)$$

İki kuaterniyonun çarpım denklemi olarak verdiğimiz (3.3) denkleminde ve (3.2) ile verdiğimiz çarpım kurallarından $\bar{q} \cdot q = q_0^2 + q_v \cdot q_v = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = q \cdot \bar{q}$ eşitliği elde edilir, [9].

Tanım 3.4 Bir q reel kuaterniyonunun normu $\|q\|$ ile gösterilir. Bu bir skaler değerdir ve $\|q\| = \sqrt{q \cdot q}$ şeklinde tanımlanır. Normu 1 olan kuaterniyona **birim kuaterniyon** adı verilir. p ve q gibi iki reel kuaterniyonun çarpımının normu ayrı ayrı normlarının çarpım özelliğine sahiptir. $\|pq\|^2 = (pq)(\overline{pq}) = pq \cdot \bar{q} \bar{p} = p \|q\|^2 \bar{p} = p \bar{p} \|q\|^2 = \|p\|^2 \|q\|^2$

Tanım 3.5 Bir q reel kuaterniyonunun tersi q^{-1} şeklinde gösterilir ve $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$ ile tanımlanır, [9].

3.1.1 Reel Kuaterniyona Karşılık Gelen Matris

Bir p reel kuaterniyonunu alalım.

Bir sol çarpım fonksiyonunu

$$L_q : \mathbb{H}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$$

$$p \rightarrow L_q(p) = q \cdot p$$

şeklinde tanımlayalım.

$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ reel kuaterniyonlar kümesinin $B = \{1, i, j, k\}$ baz vektörlerini kullanarak,

$$L_q(1) = q \cdot 1 = (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \cdot 1 = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

$$L_q(i) = q \cdot i = (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \cdot i = -q_1 + q_0 i + q_3 j - q_2 k$$

$$L_q(j) = q \cdot j = (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \cdot j = -q_2 - q_3 i + q_0 j + q_1 k$$

$$L_q(k) = q \cdot k = (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \cdot k = -q_3 + q_2 i - q_1 j + q_0 k$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece L_q dönüşümünün matris temsili,

$$A_{L_q} = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \text{ olarak bulunur, [9].}$$

3.2 Kompleks Kuaterniyonlar

Kompleks kuaterniyonlar, reel kuaterniyonların kompleks bir ifadesidir. Yani $q = q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, $q' = q_0' 1 + q_1' i + q_2' j + q_3' k \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ gibi iki reel kuaterniyonu aldığımızda bir kompleks kuaterniyon

$$Q = q + i q' \text{ veya}$$

$$\begin{aligned} Q &= (q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) + i (q_0' 1 + q_1' i + q_2' j + q_3' k) \\ &= (q_0 + i q_0') + (q_1 + i q_1') i + (q_2 + i q_2') j + (q_3 + i q_3') k \\ &= Q_0 1 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ olup, Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 katsayıları ise kompleks sayılardır. Diğer bir ifadeyle bileşenleri reel sayı olan kuaterniyon nasıl reel kuaterniyon olarak adlandırılıyor ise, bileşenleri kompleks sayılar olan kuaterniyon da kompleks kuaterniyon olarak ifade edilir. Kompleks kuaterniyonlar kümesini $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} = \{Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k \mid Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{C}, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$ şeklinde verebiliriz. Bir Q kompleks kuaterniyonunun reel kısmı $S_Q = Q_0$ ve vektörel kısmı da

$V_Q = Q_1i + Q_2j + Q_3k$ olmak üzere bir kompleks kuaterniyonu aynı reel kuaterniyonlarda olduğu gibi $Q = S_Q + V_Q = Q_01 + Q_1i + Q_2j + Q_3k$ şeklinde de ifade edebiliriz. Reel ve kompleks kuaterniyonlar cebirsel olarak benzer özellikler göstermektedir.

Kompleks kuaterniyonlar kümesi reel kuaterniyonlarda olduğu gibi çarpma işlemine göre değişmeli olmadığından, yarı cisim olmaktadır, [10].

Tanım 3.7 $P = P_0 + P_1i + P_2j + P_3k$ ve $Q = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k$ gibi iki kompleks kuaterniyonun çarpımı, $PQ = (P_0 + P)(Q_0 + Q) = P_0Q_0 + P_0Q + Q_0P - P.Q + P \times Q$ biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.8 Q kompleks kuaterniyonunun eşleniği $\bar{Q} = S_Q - V_Q = Q_01 - Q_1i - Q_2j - Q_3k$ ile tanımlanır. Görüldüğü gibi bir kompleks kuaterniyonun eşleniği vektörel kısmının işaretinin değiştirilmesiyle elde edilir. Her kompleks kuaterniyon için bir eşlenik tanımlamak mümkündür. Eğer $P, Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonlar ise, kompleks kuaterniyonların çarpımının eşleniği $(\overline{PQ}) = \bar{Q}\bar{P}$ şeklinde ters sıradaki eşlenikleri çarpımlarıdır. Kompleks kuaterniyonlar için kompleks eşlenik de Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 kompleks sayılarının eşleniklerinin alınmasıyla

$$\begin{aligned} Q^{\mathbb{C}} &= S_Q^{\mathbb{C}} + V_Q^{\mathbb{C}} = (q_0 - iq_0') + (q_1 - iq_1')i + (q_2 - iq_2')j + (q_3 - iq_3')k \\ &= Q_0^{\mathbb{C}}1 + Q_1^{\mathbb{C}}i + Q_2^{\mathbb{C}}j + Q_3^{\mathbb{C}}k \text{ ile verilir, [10].} \end{aligned}$$

Tanım 3.9

Bir $Q = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k$ kuaterniyonu $\|Q\| = \sqrt{Q \cdot \bar{Q}} = \sqrt{Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}$ şeklinde tanımlanan bir norma sahiptir. Burada Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 kompleks sayılar olduğuna göre, kompleks kuaterniyonların normu kompleks bir skalerdir. Normu birim olan kompleks kuaterniyona ise, **birim kompleks kuaterniyon** adı verilir. P ve Q kompleks kuaterniyonlarının çarpımının normu herbirinin normlarının çarpımına eşittir.

$$\|PQ\| = (PQ)(\overline{PQ}) = PQ \cdot \bar{Q}\bar{P} = Q\bar{Q} \cdot P\bar{P} = \|Q\|\|P\| = \|P\|\|Q\|$$

Tanım 3.10 Normu sıfırdan farklı olmak üzere bir Q kompleks kuaterniyonunun tersi

Q^{-1} ile gösterilir ve yine reel kuaterniyonlarda olduğu gibi $Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{N_Q}$ şeklinde tanımlanır, [10].

3.3 Dual Kuaterniyonlar

Bir dual kuaterniyon $Q = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$ biçiminde ifade edilir.

Dual kuaterniyonlar kümesi ise, $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = 0, ij = -ji = jk = -kj = ki = -ik$ çarpım kurallarına sahiptir. O halde dual kuaterniyonlar kümesini,

$$\mathbb{H}_D = \{Q = p_01 + p_1i + p_2j + p_3k \mid p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = 0\} \quad \text{şeklinde}$$

tanımlayabiliriz. Bir $Q = q_01 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonunun skaler kısmı q_0 ve vektörel kısmı $Q_v = q_1i + q_2j + q_3k$ olmak üzere, bir dual kuaterniyonu $Q = q_0 + Q_v$ olarak da gösterebiliriz, [1].

Tanım 3.11 $P = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ ve $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ gibi iki dual kuaterniyonun toplamı, $P + Q = (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k) + (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)$

$$= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $(\mathbb{H}_D, +)$ ikilisi bir abel gruptur.

Tanım 3.12 $P = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$, $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ gibi iki dual kuaterniyonun çarpımı için $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = 0$ bağıntılarını göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned} P.Q &= (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k) \cdot (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \\ &= p_0q_0 + p_0q_1i + p_0q_2j + p_0q_3k + p_1q_0i + p_1q_1i^2 \\ &\quad + p_1q_2ij + p_1q_3ik + p_2q_0j + p_2q_1ji + p_2q_2j^2 \\ &\quad + p_2q_3jk + p_3q_0k + p_3q_1ki + p_3q_2kj + p_3q_3k^2 \\ &= p_0q_0 + p_0q_1i + p_0q_2j + p_0q_3k + p_1q_0i + p_2q_0j + p_3q_0k \\ &= p_0q_0 + (p_0q_1 + p_1q_0)i + (p_0q_2 + p_2q_0)j + (p_0q_3 + p_3q_0)k \text{ eşitliği elde edilir.} \end{aligned}$$

$P = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ ve $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ dual kuaterniyonlarını $P = p_0 + P_v$ ve $Q = q_0 + Q_v$ şeklinde de gösterebildiğimizden iki dual kuaterniyonun çarpımı $P.Q = (p_0 + P_v).(q_0 + Q_v) = p_0q_0 + p_0Q_v + q_0P_v + P_vQ_v$ olarak da yazılabilir ve burada $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = 0$ çarpım eşitliklerini kullanırsak, $P_vQ_v = 0$ olduğundan $P.Q = (p_0 + P_v).(q_0 + Q_v) = p_0q_0 + p_0Q_v + q_0P_v$ eşitliği elde edilir.

Tanım 3.12 Bir $Q = p_01 + p_1i + p_2j + p_3k = p_0 + Q_v$ dual kuaterniyonunun eşleniği $\bar{Q} = p_01 - p_1i - p_2j - p_3k = p_0 - Q_v$ şeklinde tanımlanır ve şu özelliklere sahiptir.

$$i) \overline{(\bar{Q})} = \overline{(q_0 - Q_v)} = q_0 + Q_v = Q \text{ dir.}$$

$$ii) Q + \bar{Q} = (q_01 + q_1i + q_2j + q_3k) + (q_01 - q_1i - q_2j - q_3k) \\ = (q_0 + Q_v) + (q_0 - Q_v) = 2q_0 \text{ dir.}$$

$$iii) Q.\bar{Q} = (q_0 + Q_v).(q_0 - Q_v) = q_0^2 - q_0Q_v + Q_vq_0 - Q_v^2 = q_0^2 \text{ dir.}$$

Tanım 3.13 Bir Q dual kuaterniyonunun normu $\|Q\| = \sqrt{Q.\bar{Q}} = \sqrt{q_0^2} = |q_0|$ ile tanımlanan bir değere sahiptir. Normu $\|Q\| = 1$ olan dual kuaterniyona ise, **birim dual kuaterniyon** denir. Bir Q dual kuaterniyonunun normundan bahsedebilmemiz için $q_0 \neq 0$ olması gerekir. İki dual kuaterniyonun normları arasında şu şekilde bir ilişki yazabiliriz. Yani

$$\|Q_1Q_2\|^2 = (Q_1Q_2)(\overline{Q_1Q_2}) = (Q_1Q_2)(\bar{Q}_2\bar{Q}_1)$$

$$\|Q_1Q_2\|^2 = Q_1Q_2\bar{Q}_2\bar{Q}_1 = Q_1\|Q_2\|^2\bar{Q}_1 = Q_1\bar{Q}_1\|Q_2\|^2$$

$$\|Q_1Q_2\|^2 = \|Q_1\|^2\|Q_2\|^2$$

$$\|Q_1Q_2\| = \|Q_1\|\|Q_2\| \text{ eşitliği mevcuttur.}$$

Tanım 3.14 Bir Q dual kuaterniyonunun tersi ise,

$$Q^{-1} = \frac{1}{Q} = \frac{1}{p_0 + p_v} = \frac{p_0 - p_v}{|p_0|^2} = \frac{\bar{Q}}{|p_0|^2} = \frac{\bar{Q}}{\|Q\|^2} \quad (3.4)$$

şeklinde bulunur.

Eğer bir $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ dual kuaterniyonunda $q_0 = 0$ ise, dual kuaterniyona **pure dual kuaterniyon** adı verilir. İki $P = p_1i + p_2j + p_3k$ ve $Q = q_1i + q_2j + q_3k$ pure dual kuaterniyonlarını alırsak, $P.Q = 0$ olur.

Cebirsel olarak ise, $\mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonlar kümesi (3.4) deki eşitlikten de görülebileceği gibi pure elemanların tersi bulunmadığından birimli ve değişmeli bir halka oluşturmaktadır.

3.3.1 Dual Kuaterniyona Karşılık Gelen Matris

$P = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k = p_0 + P_v$ şeklinde tanımlanan bir dual kuaterniyon olsun.

Bir sol çarpım fonksiyonunu,

$$L_Q : \mathbb{H}_D \rightarrow \mathbb{H}_D$$

$P \rightarrow L_Q(P) = Q.P$ şeklinde tanımlayalım.

$\mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonlar kümesinin $B = \{1, i, j, k\}$ baz vektörlerini kullanarak,

$$L_Q(1) = Q.1 = (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k).1 = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$$

$$L_Q(i) = Q.i = (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k).i = q_0i + q_1i^2 + q_2ji + q_3ki = q_0i$$

$$L_Q(j) = Q.j = (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k).j = q_0j + q_1ij + q_2j^2 + q_3kj = q_0j$$

$$L_Q(k) = Q.k = (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k).k = q_0k + q_1ik + q_2jk + q_3k^2 = q_0k$$

eşitliklerini yazabiliriz. Böylece tanımladığımız L_Q dönüşümünün matris temsili,

$$A_{L_Q} = \begin{pmatrix} q_0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & q_0 & 0 & 0 \\ q_2 & 0 & q_0 & 0 \\ q_3 & 0 & 0 & q_0 \end{pmatrix} \text{şeklindedir, [1].}$$

KOMPLEKS KUATERNİYON ÜZERİNDE ANALİZ YAPISI

Bu bölümde kompleks kuaterniyon vektör uzaylarının yapısı ve bu yapı üzerine kurulan bazı cebirsel özellikler incelenecektir.

4.1 Kompleks Simplektik Geometri

$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonlar kümesi olmak üzere, $(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n = \left\{ \vec{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \mid Q_t \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}, 1 \leq t \leq n \right\}$ kümesini tanımlarsak, $(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ kümesinin elemanlarına birer vektör ve $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ kompleks kuaterniyonlarına da bu vektörün bileşenleri denir.

Teorem 4.1 $(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ kümesi $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonlar yarı cismi üzerinde bir kompleks kuaterniyon vektör uzayı olur.

İspat

$(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ kümesinin kompleks kuaterniyon vektör uzayı olduğunu göstermek için ilk olarak abel grup işlemi tanımlayalım.

Toplama

$$\oplus : (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n \times (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$$

$$(\vec{Q}, \vec{P}) \rightarrow \vec{Q} \oplus \vec{P}$$

iç işlemi $\forall \vec{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ ve $\forall \vec{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ elemanları için

$\vec{Q} \oplus \vec{P} = (Q_1 + P_1, Q_2 + P_2, \dots, Q_n + P_n)$ şeklinde tanımlanırsa $((\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n, \oplus)$ ikilisi abel grup olur.

Grup aksiyomlarını gerçeklemek istersek,

G1) $\vec{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$ ve $\vec{P} = (P_1, \dots, P_n) \in (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ olmak üzere,

$\vec{Q} \oplus \vec{P} = (Q_1 + P_1, Q_2 + P_2, \dots, Q_n + P_n) \in (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ olduğundan $\oplus$ işlemi kapalılık aksiyomunu gerçekler.

G2) $\vec{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$ ve $\vec{P} = (P_1, \dots, P_n), \vec{R} = (R_1, \dots, R_n) \in (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} (\vec{Q} \oplus \vec{P}) \oplus \vec{R} &= (Q_1 + P_1, Q_2 + P_2, \dots, Q_n + P_n) \oplus (R_1, \dots, R_n) \\ &= (Q_1 + P_1 + R_1, Q_2 + P_2 + R_2, \dots, Q_n + P_n + R_n) \\ &= (Q_n, Q_n, \dots, Q_n) \oplus (P_1 + R_1, P_2 + R_2, \dots, P_n + R_n) = \vec{Q} \oplus (\vec{P} \oplus \vec{R}) \end{aligned}$$

eşitliğinden birleşme aksiyomu gerçekleşir.

G3) $\vec{Q} \oplus \vec{P} = \vec{Q}$ yani $(Q_1, \dots, Q_n) \oplus (P_1, \dots, P_n) = (Q_1, \dots, Q_n)$ eşitliği var iken,

$$(Q_1 + P_1, Q_2 + P_2, \dots, Q_n + P_n) = (Q_1, \dots, Q_n)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 + P_1 = Q_1 \\ Q_2 + P_2 = Q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_n + P_n = Q_n \end{array} \right\} \text{eşitliklerinden } P_1 = \dots = P_n = 0 \text{ bulunur.}$$

Dolayısıyla $\oplus$ işleminin etkisiz elemanı $(0, 0, \dots, 0)$ dır.

G4) $(Q_1, \dots, Q_n) \oplus (P_1, \dots, P_n) = (0, 0, \dots, 0)$ eşitliği var iken

$$(Q_1 + P_1, Q_2 + P_2, \dots, Q_n + P_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 + P_1 = 0 \\ Q_2 + P_2 = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_n + P_n = 0 \end{array} \right\} \text{ eşitliklerinden } P_1 = -Q_1, P_2 = -Q_2, \dots, P_n = -Q_n \text{ bulunur.}$$

Dolayısıyla $\bar{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$ elemanının $\oplus$ işlemine göre tersi $(-Q_1, -Q_2, \dots, -Q_n)$ dir.

Dış işlem

$$\odot : \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \times (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n \rightarrow (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$$

$$\alpha, \bar{Q} \rightarrow \alpha \odot \bar{Q} = (\alpha Q_1, \alpha Q_2, \dots, \alpha Q_n)$$

şeklinde tanımlanan dış işlemin $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2 \in (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ vektörleri ve $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonları için aşağıdaki özellikleri sağladığı açıktır.

$$V1) \alpha \odot (\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2) = \alpha \odot \bar{Q}_1 + \alpha \odot \bar{Q}_2$$

$$V2) (\alpha_1 + \alpha_2) \odot \bar{Q} = \alpha_1 \odot \bar{Q} + \alpha_2 \odot \bar{Q}$$

$$V3) (\alpha_1 \alpha_2) \odot \bar{Q} = \alpha_1 \odot (\alpha_2 \odot \bar{Q})$$

$$V4) 1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \odot \bar{Q} = \bar{Q}$$

$(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ kümesi tanımlanan dış işlem ile birlikte sol kompleks kuaterniyon vektör uzayı olur. Benzer biçimde,

$$\bullet : (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n \times \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \rightarrow (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$$

$$(\bar{Q}, \beta) \rightarrow \bar{Q} \bullet \beta = (Q_1 \beta, Q_2 \beta, \dots, Q_n \beta)$$

şeklinde tanımlanan dış işlem ile birlikte de $(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ kümesi sağ kompleks kuaterniyon vektör uzayı olur.

Sonuç 4.1 Böylece $\{(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n, \oplus, \mathbb{H}_{\mathbb{C}}, +, \cdot, \odot, \bullet\}$ sistemi $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonlar yarı cismi üzerinde bir kompleks kuaterniyon vektör uzayı olur.

Tanım 4.1 $\langle \cdot \rangle : (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n \times (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n \rightarrow (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$

$$(\vec{P}, \vec{Q}) \rightarrow \langle \vec{P}, \vec{Q} \rangle = \sum_{t=1}^n \overline{P_t} Q_t$$

şeklinde tanımlanan işlem eğer aşağıdaki aksiyomlarını sağlıyor ise, $(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ üzerinde **kompleks simplektik çarpım** adını alır.

$$P1) \langle \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2, \vec{P} \rangle = \langle \vec{Q}_1, \vec{P} \rangle + \langle \vec{Q}_2, \vec{P} \rangle$$

$$P2) \langle \vec{Q}, \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \rangle = \langle \vec{Q}, \vec{P}_1 \rangle + \langle \vec{Q}, \vec{P}_2 \rangle$$

$$P3) \langle \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 \alpha \rangle = \langle \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 \rangle \alpha$$

$$P4) \langle \vec{Q}_1 \alpha, \vec{Q}_2 \rangle = \overline{\alpha} \langle \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 \rangle$$

Bu tanıma göre $\langle \vec{Q}, \vec{Q} \rangle = \sum_{t=1}^n \overline{Q_t} Q_t = \sum_{t=1}^n \|Q_t\|^2$ olmaktadır, [11].

4.2 Kompleks Kuaternizasyonlaştırma

4.2.1 Direkt Toplamlar ile Kuaternizasyonlaştırma

Kompleks kuaterniyonlar kümesini $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ ile göstererek, $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kümesinin ikinci işleme göre değişmeli olmadığını ve bu nedenle yarı cisim olduğunu önceki bölümde belirtmiştik. Kompleks kuaterniyon yarı cismi üzerinde vektör uzayı oluşturmak için, dış işlem aksiyomlarını sağ ve sol olarak ayrı ayrı incelemeliyiz.

Tanım 4.2 $V_{\mathbb{C}}$ bir kompleks vektör uzayı ve $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonlar kümesi olmak üzere $Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonu ve $\vec{x} \in V_{\mathbb{C}}$ vektörü için, $Q \cdot \vec{x} = (Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) \vec{x} = (Q_0 \vec{x}, Q_1 \vec{x}, Q_2 \vec{x}, Q_3 \vec{x}) = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ şeklindeki elemanlardan oluşan ve $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = \{Q \cdot \vec{x} \mid Q \cdot \vec{x} = (w_1, w_2, w_3, w_4), w_i \in V_{\mathbb{C}}, i = 1, 2, 3, 4\}$ ile tanımlanan kümeye $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayının **kompleks kuaternizasyonlaştırılması** adı verilir, [12].

Teorem 4.2 $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayı ve bu vektör uzayının kuaternizasyonlaştırılması olan $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kümesi, $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyon yarı cismi üzerinde kompleks kuaterniyon vektör uzayıdır.

İspat

$V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kuaternizasyonlaştırılmasının kompleks kuaterniyon vektör uzayı olduğunu göstermek için ilk olarak $\oplus$ ile gösterdiğimiz bir abel grup işlemi tanımlayalım.

Toplama

$$\oplus: V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \times V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \rightarrow V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$$

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus (v_1, v_2, v_3, v_4) = (w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4) \quad (4.1)$$

şimdi de $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ nin tanımlanan $\oplus$ işlemine göre (2.1) ile verdiğimiz grup aksiyomlarını gerçeklediğini gösterelim.

G1) $(w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus (v_1, v_2, v_3, v_4) = (w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4) \in V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kapalılık aksiyomu gerçekleşir.

$$\begin{aligned} G2) & (w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4) \oplus (y_1, y_2, y_3, y_4) \\ &= (w_1 + v_1 + y_1, w_2 + v_2 + y_2, w_3 + v_3 + y_3, w_4 + v_4 + y_4) \\ &= (w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus (v_1 + y_1, v_2 + y_2, v_3 + y_3, v_4 + y_4) \end{aligned}$$

eşitliğinden birleşme aksiyomu gerçekleşir.

$$\begin{aligned} G3) & (w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus (v_1, v_2, v_3, v_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4) \\ & (w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} w_1 + v_1 &= w_1 \\ w_2 + v_2 &= w_2 \\ w_3 + v_3 &= w_3 \\ w_4 + v_4 &= w_4 \end{aligned} \right\} \text{eşitliklerinden } v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0 \text{ elde edilir.}$$

Dolayısıyla $\oplus$ işleminin etkisiz elemanı $(0,0,0,0)$ dır.

G4) $(w_1, w_2, w_3, w_4) \in V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}$ elemanı için,

$(w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus (v_1, v_2, v_3, v_4) = (0, 0, 0, 0)$ iken,

$$\left. \begin{array}{l} w_1 + v_1 = 0 \\ w_2 + v_2 = 0 \\ w_3 + v_3 = 0 \\ w_4 + v_4 = 0 \end{array} \right\} \text{eşitliklerinden} \left. \begin{array}{l} v_1 = -w_1 \\ v_2 = -w_2 \\ v_3 = -w_3 \\ v_4 = -w_4 \end{array} \right\} \text{elde edilir.}$$

Dolayısıyla $(w_1, w_2, w_3, w_4) \in V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}$ elemanının tersi $(-w_1, -w_2, -w_3, -w_4)$ olur.

Dış işlem

$(w_1, w_2, w_3, w_4) \in V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}$ ve $Q = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k \in \mathbb{H}_\mathbb{C}$ olmak üzere,

$$\bullet : \mathbb{H}_\mathbb{C} \times V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}$$

$$Q \bullet (w_1, w_2, w_3, w_4) \rightarrow (Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k) \bullet (w_1, w_2, w_3, w_4)$$

$$= \begin{pmatrix} Q_0w_1 - Q_1w_2 - Q_2w_3 - Q_3w_4, Q_0w_2 + Q_1w_1 + Q_2w_4 - Q_3w_3, \\ Q_0w_3 - Q_1w_4 + Q_2w_1 + Q_3w_2, Q_0w_4 + Q_1w_3 - Q_2w_2 + Q_3w_1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanan dış işleme göre (2.2) ile verdiğimiz vektör uzayı aksiyomlarını gerçekleyelim.

V1) $(w_1, w_2, w_3, w_4), (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}$ ve $Q = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k \in \mathbb{H}_\mathbb{C}$ olmak üzere,

$$Q \bullet ((w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus (v_1, v_2, v_3, v_4))$$

$$(Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k) \bullet (w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4)$$

(4.2) ile verilen dış işlem tanımını uygularsak,

$$\begin{pmatrix} Q_0(w_1 + v_1) - Q_1(w_2 + v_2) - Q_2(w_3 + v_3) - Q_3(w_4 + v_4), \\ Q_1(w_1 + v_1) + Q_0(w_2 + v_2) - Q_3(w_3 + v_3) + Q_2(w_4 + v_4), \\ Q_2(w_1 + v_1) + Q_3(w_2 + v_2) + Q_0(w_3 + v_3) - Q_1(w_4 + v_4), \\ Q_3(w_1 + v_1) - Q_2(w_2 + v_2) + Q_1(w_3 + v_3) + Q_0(w_4 + v_4) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} Q_0 w_1 - Q_1 w_2 - Q_2 w_3 - Q_3 w_4, \\ Q_1 w_1 + Q_0 w_2 - Q_3 w_3 + Q_2 w_4, \\ Q_2 w_1 + Q_3 w_2 + Q_0 w_3 - Q_1 w_4, \\ Q_3 w_1 - Q_2 w_2 + Q_1 w_3 + Q_0 w_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} Q_0 v_1 - Q_1 v_2 - Q_2 v_3 - Q_3 v_4, \\ Q_1 v_1 + Q_0 v_2 - Q_3 v_3 + Q_2 v_4, \\ Q_2 v_1 + Q_3 v_2 + Q_0 v_3 - Q_1 v_4, \\ Q_3 v_1 - Q_2 v_2 + Q_1 v_3 + Q_0 v_4 \end{pmatrix} \\
&= (Q \bullet (w_1, w_2, w_3, w_4)) \oplus (Q \bullet (v_1, v_2, v_3, v_4)) \text{ eşitliği gerçeklenir.}
\end{aligned}$$

Diğerk vektör uzayı aksiyomları da benzer şekilde gösterilebilir. Bu dış işlem ile birlikte $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kümesi, $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyon yarı cismi üzerinde sol kompleks kuaterniyon vektör uzayı olur.

$$\begin{aligned}
&\odot : V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \times \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \\
&(w_1, w_2, w_3, w_4), Q \rightarrow (w_1, w_2, w_3, w_4) \odot (Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) \\
&= \begin{pmatrix} w_1 Q_0 - w_2 Q_1 - w_3 Q_2 - w_4 Q_3, w_1 Q_1 + w_2 Q_0 + w_3 Q_3 - w_4 Q_2, \\ w_1 Q_2 - w_2 Q_3 + w_3 Q_0 + w_4 Q_1, w_1 Q_3 + w_2 Q_2 - w_3 Q_1 + w_4 Q_0 \end{pmatrix} \quad (4.3)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dış işlem ile birlikte $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kümesinin sağ kompleks kuaterniyon vektör uzayı aksiyomları da benzer biçimde gereklenir. O halde řu sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.2 $\{V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}, \oplus, \mathbb{H}_{\mathbb{C}}, +, \cdot, \odot, \bullet\}$ ifadesi bir kompleks kuaterniyon vektör uzayı olur.

Not 4.1 $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayının (w_1, w_2, w_3, w_4) elemanı ile,

$$\left. \begin{aligned} i(w_1, w_2, w_3, w_4) &= (-w_2, w_1, -w_4, w_3) \\ j(w_1, w_2, w_3, w_4) &= (-w_3, w_4, w_1, -w_2) \\ k(w_1, w_2, w_3, w_4) &= (-w_4, -w_3, w_2, w_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

arpımlarını tanımlayalım.

$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (w_1, 0, 0, 0) + (0, w_2, 0, 0) + (0, 0, w_3, 0) + (0, 0, 0, w_4)$ şeklinde bileşenleri ayırırsak ve (4.4) ile verdiğimiz i, j, k arpım ifadelerini kullanırsak,

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (w_1, 0, 0, 0) + i(w_2, 0, 0, 0) + j(w_3, 0, 0, 0) + k(w_4, 0, 0, 0)$$

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = w_1 + iw_2 + jw_3 + kw_4$$

eşitliğini yazabileceğimizden $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayını,

$$\left. \begin{aligned} V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} &= V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}} \\ V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} &= V_{\mathbb{C}} + iV_{\mathbb{C}} + jV_{\mathbb{C}} + kV_{\mathbb{C}} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

biçiminde de ifade edebiliriz, [8].

Tanım 4.3 $V_{\mathbb{C}}$ bir kompleks vektör uzayı ve bu vektör uzayının kompleks kuaternizasyonlaştırılması $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ olmak üzere,

$$g_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$$

$$w = (w_1, w_2) \rightarrow g_{\mathbb{C}}(w) = (w, 0, 0, 0) \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayının $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ içine **gömülmesi** denir, [12].

Teorem 4.3 Bir $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayının kompleks kuaterniyonlaştırılması $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ olsun. Eğer $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayının bir $\mathbb{C}$ bazı $1 \leq t \leq n$ için $\{e_t\}$ ise, $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayının bir $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ bazı $\{(e_t, 0, 0, 0)\}$ olur, [12].

İspat

Eğer $V_{\mathbb{C}} = 0$ ise, (4.5) ile verdiğimiz $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}}$ eşitliğinden $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = 0$ olduğu açıktır. O halde $V_{\mathbb{C}} \neq 0$ ve $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayının bir $\mathbb{C}$ bazını $\{e_t\}$ olarak alalım.

Germe Aksiyomu

$V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayının (w_1, w_2, w_3, w_4) elemanındaki her bir $w_i \in V_{\mathbb{C}}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) bileşeni kompleks vektör uzayının elemanı olduğundan, e_t lerin $\mathbb{C}$ lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

O halde bu bileşenler için,

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \sum_{t=1}^n (\alpha_t + i\alpha'_t) e_t, \quad w_2 = \sum_{t=1}^n (\beta_t + i\beta'_t) e_t \\ w_3 &= \sum_{t=1}^n (\gamma_t + i\gamma'_t) e_t, \quad w_4 = \sum_{t=1}^n (\mu_t + i\mu'_t) e_t \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

lineer kombinasyonları vardır.

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (w_1, 0, 0, 0) + (0, w_2, 0, 0) + (0, 0, w_3, 0) + (0, 0, 0, w_4)$$

eşitliğinde (4.7) ile verdiğimiz lineer kombinasyonlar yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{t=1}^n (\alpha_t + i\alpha'_t) e_t, 0, 0, 0 \right) + \left(0, \sum_{t=1}^n (\beta_t + i\beta'_t) e_t, 0, 0 \right) \\ &+ \left(0, 0, \sum_{t=1}^n (\gamma_t + i\gamma'_t) e_t, 0 \right) + \left(0, 0, 0, \sum_{t=1}^n (\mu_t + i\mu'_t) e_t \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

eşitliği elde edilir. Bu son ifade (4.4) ile verdiğimiz çarpımlardan yararlanılarak düzenlenirse,

$$= \sum_{t=1}^n \left((\alpha_t + i\alpha'_t) + i(\beta_t + i\beta'_t) + j(\gamma_t + i\gamma'_t) + k(\mu_t + i\mu'_t) \right) (e_t, 0, 0, 0) \quad (4.9)$$

bulunur. Burada $\alpha_t + i\alpha'_t, \beta_t + i\beta'_t, \gamma_t + i\gamma'_t, \mu_t + i\mu'_t \in \mathbb{C}$ kompleks sayılar olduğundan $\{(e_t, 0, 0, 0)\}$ sistemi $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayının bir $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ lineer geren kümesi olmaktadır.

Lineer Bağımsızlık

$V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayının bir $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ lineer geren kümesi olan $\{(e_t, 0, 0, 0)\}$ sisteminin $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ nin bir $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ bazı olduğunu göstermek için lineer bağımsızlıklarını inceleyelim. Yani, $\forall t = 1, 2, \dots, n$ değeri için

$$\left. \begin{aligned} &(\alpha_1 + i\beta_1 + j\gamma_1 + k\mu_1)(e_1, 0, 0, 0) + (\alpha_2 + i\beta_2 + j\gamma_2 + k\mu_2)(e_2, 0, 0, 0) \\ &+ \dots + (\alpha_n + i\beta_n + j\gamma_n + k\mu_n)(e_n, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

eşitliği varken $\alpha_t + i\beta_t + j\gamma_t + k\mu_t = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

Bu son ifade düzenlenirse,

$$\left. \begin{aligned} &(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, 0, 0, 0) + i(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n, 0, 0, 0) + \\ &j(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_n e_n, 0, 0, 0) + k(\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

elde edilir ve (4.4) denklemleri ile verdiğimiz çarpımlardan da,

$$\left. \begin{aligned} &(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, 0, 0, 0) + (0, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n, 0, 0) + \\ &(0, 0, \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_n e_n, 0) + (0, 0, 0, \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

elde ederiz.

$$\left(\begin{array}{l} \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n, \\ \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_n e_n, \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n \end{array} \right) = (0, 0, 0, 0) \quad \text{eşitliğinde} \quad \text{karşılıklı}$$

bileşenleri birbirine eşitlersek $\forall t=1, 2, \dots, n$ değeri için $\alpha_t = \beta_t = \gamma_t = \mu_t = 0$ olur.

Dolayısıyla $\forall t=1, 2, \dots, n$ için $\alpha_t + i\beta_t + j\gamma_t + k\mu_t = 0$ bulunur.

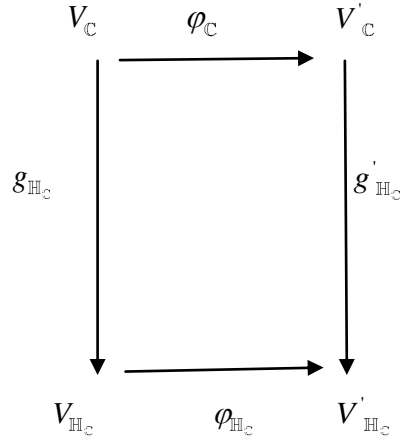
Önerme 4.1 $V_{\mathbb{C}}$ ve $V'_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayları ve bu vektör uzaylarının kompleks kuaternizasyonları sırasıyla $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ ve $V'_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ olsun. Eğer $\varphi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V'_{\mathbb{C}}$ bir $\mathbb{C}$ lineer dönüşüm olmak üzere, bu dönüşümü

$$\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} : V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \rightarrow V'_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$$

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) \rightarrow \varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(w_1, w_2, w_3, w_4) = (\varphi_{\mathbb{C}}(w_1), \varphi_{\mathbb{C}}(w_2), \varphi_{\mathbb{C}}(w_3), \varphi_{\mathbb{C}}(w_4)) \quad (4.13)$$

şeklinde tanımlanan bir $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ lineer dönüşümüne genişletebiliriz ve eğer $g_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}, g'_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ (4.6)

ile tanımladığımız gibi birer gömme ise, aşağıdaki diyagram değişmelidir, [12].



Şekil 4.1 Kompleks kuaterniyon dönüşümleri diyagramı

İspat

Yukarıdaki önermede (4.13) denklemi ile verilen $\varphi_{\mathbb{H}_\mathbb{C}} : V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}} \rightarrow V'_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}$ dönüşümünün $\mathbb{H}_\mathbb{C}$ lineer olduğunu gösterelim.

L1) (w_1, w_2, w_3, w_4) ve $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\varphi_{\mathbb{H}_\mathbb{C}} \left((w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus (v_1, v_2, v_3, v_4) \right) = \varphi_{\mathbb{H}_\mathbb{C}} (w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4)$$

(4.13) ile verilen eşitlikten,

$$(\varphi_{\mathbb{C}}(w_1 + v_1), \varphi_{\mathbb{C}}(w_2 + v_2), \varphi_{\mathbb{C}}(w_3 + v_3), \varphi_{\mathbb{C}}(w_4 + v_4)) \text{ yazılır.}$$

$\varphi_{\mathbb{C}}$ dönüşümünün $\mathbb{C}$ lineerliğinden ise,

$$\begin{aligned} & (\varphi_{\mathbb{C}}(w_1) + \varphi_{\mathbb{C}}(v_1), \varphi_{\mathbb{C}}(w_2) + \varphi_{\mathbb{C}}(v_2), \varphi_{\mathbb{C}}(w_3) + \varphi_{\mathbb{C}}(v_3), \varphi_{\mathbb{C}}(w_4) + \varphi_{\mathbb{C}}(v_4)) \\ &= (\varphi_{\mathbb{C}}(w_1), \varphi_{\mathbb{C}}(w_2), \varphi_{\mathbb{C}}(w_3), \varphi_{\mathbb{C}}(w_4)) \oplus (\varphi_{\mathbb{C}}(v_1), \varphi_{\mathbb{C}}(v_2), \varphi_{\mathbb{C}}(v_3), \varphi_{\mathbb{C}}(v_4)) \\ &= \varphi_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}(w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus \varphi_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}(v_1, v_2, v_3, v_4) \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

L2) $(w_1, w_2, w_3, w_4) \in V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}$ ve $Q = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k \in \mathbb{H}_\mathbb{C}$ olmak üzere,

$$\varphi_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}(Q \odot (w_1, w_2, w_3, w_4)) = \varphi_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}((Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k) \odot (w_1, w_2, w_3, w_4))$$

(4.2) ile verdiğimiz dış işleminden,

$$= \varphi_{\mathbb{H}_\mathbb{C}} \left(\begin{array}{l} Q_0 w_1 - Q_1 w_2 - Q_2 w_3 - Q_3 w_4, Q_0 w_2 + Q_1 w_1 + Q_2 w_4 - Q_3 w_3, \\ Q_0 w_3 - Q_1 w_4 + Q_2 w_1 + Q_3 w_2, Q_0 w_4 + Q_1 w_3 - Q_2 w_2 + Q_3 w_1 \end{array} \right) \text{ yazabiliriz.}$$

(4.13) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa,

$$= \left(\begin{array}{l} Q_0 \varphi_{\mathbb{C}}(w_1) - Q_1 \varphi_{\mathbb{C}}(w_2) - Q_2 \varphi_{\mathbb{C}}(w_3) - Q_3 \varphi_{\mathbb{C}}(w_4), \\ Q_0 \varphi_{\mathbb{C}}(w_2) + Q_1 \varphi_{\mathbb{C}}(w_1) + Q_2 \varphi_{\mathbb{C}}(w_4) - Q_3 \varphi_{\mathbb{C}}(w_3), \\ Q_0 \varphi_{\mathbb{C}}(w_3) - Q_1 \varphi_{\mathbb{C}}(w_4) + Q_2 \varphi_{\mathbb{C}}(w_1) + Q_3 \varphi_{\mathbb{C}}(w_2), \\ Q_0 \varphi_{\mathbb{C}}(w_4) + Q_1 \varphi_{\mathbb{C}}(w_3) - Q_2 \varphi_{\mathbb{C}}(w_2) + Q_3 \varphi_{\mathbb{C}}(w_1) \end{array} \right)$$

$$\left((Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) \varphi_{\mathbb{C}}(w_1), (Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) \varphi_{\mathbb{C}}(w_2), \right.$$

$$\left. (Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) \varphi_{\mathbb{C}}(w_3), (Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) \varphi_{\mathbb{C}}(w_4) \right)$$

$$(Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) (\varphi_{\mathbb{C}}(w_1), \varphi_{\mathbb{C}}(w_2), \varphi_{\mathbb{C}}(w_3), \varphi_{\mathbb{C}}(w_4))$$

$$Q \odot \varphi_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}(w_1, w_2, w_3, w_4) \text{ bulunur.}$$

Benzer şekilde sağ lineerlik incelenirse,

$$\varphi_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}((w_1, w_2, w_3, w_4) \odot (Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k))$$

(4.3) ile verdiğimiz dış işlemde,

$$\varphi_{\mathbb{H}_\mathbb{C}} \left(\begin{array}{l} w_1 Q_0 - w_2 Q_1 - w_3 Q_2 - w_4 Q_3, w_1 Q_1 + w_2 Q_0 + w_3 Q_3 - w_4 Q_2, \\ w_1 Q_2 - w_2 Q_3 + w_3 Q_0 + w_4 Q_1, w_1 Q_3 + w_2 Q_2 - w_3 Q_1 + w_4 Q_0 \end{array} \right) \text{ yazabiliriz.}$$

(4.13) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa,

$$\left(\begin{array}{l} \varphi_{\mathbb{C}}(w_1) Q_0 - \varphi_{\mathbb{C}}(w_2) Q_1 - \varphi_{\mathbb{C}}(w_3) Q_2 - \varphi_{\mathbb{C}}(w_4) Q_3, \\ \varphi_{\mathbb{C}}(w_1) Q_1 + \varphi_{\mathbb{C}}(w_2) Q_0 + \varphi_{\mathbb{C}}(w_3) Q_3 - \varphi_{\mathbb{C}}(w_4) Q_2, \\ \varphi_{\mathbb{C}}(w_1) Q_2 - \varphi_{\mathbb{C}}(w_2) Q_3 + \varphi_{\mathbb{C}}(w_3) Q_0 + \varphi_{\mathbb{C}}(w_4) Q_1, \\ \varphi_{\mathbb{C}}(w_1) Q_3 + \varphi_{\mathbb{C}}(w_2) Q_2 - \varphi_{\mathbb{C}}(w_3) Q_1 + \varphi_{\mathbb{C}}(w_4) Q_0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \varphi_{\mathbb{C}}(w_1) (Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k), \varphi_{\mathbb{C}}(w_2) (Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k), \\ \varphi_{\mathbb{C}}(w_3) (Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k), \varphi_{\mathbb{C}}(w_4) (Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) \end{array} \right)$$

$$(\varphi_{\mathbb{C}}(w_1), \varphi_{\mathbb{C}}(w_2), \varphi_{\mathbb{C}}(w_3), \varphi_{\mathbb{C}}(w_4))(Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k) \\ = \varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(w_1, w_2, w_3, w_4) \odot (Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k) \text{ bulunur.}$$

Burada tanımladığımız $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}'$ ye $\varphi_{\mathbb{C}}$ dönüşümünün **kompleks kuaternizasyonlaştırılması** adı verilir.

Teorem 4.4 $V_{\mathbb{C}}$ ve $V'_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayları ve bu vektör uzaylarının kompleks kuaternizasyonlaştırmaları sırasıyla $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ ve $V'_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ olsun. Eğer $\varphi_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow V'_{\mathbb{C}}$ bir $\mathbb{C}$ lineer dönüşüm ve kompleks kuaternizasyonlaştırılması da (4.13) denklemi ile verdiğimiz gibi tanımlı bir $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ lineer dönüşüm olmak üzere, $\text{çek}\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = (\text{çek}\varphi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ ve $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}) = (\varphi_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}))_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ eşitlikleri vardır, [12].

İspat

$\varphi_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow V'_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$ lineer dönüşümünün çekirdeğini $\text{çek}\varphi_{\mathbb{C}} = \{x \in V_{\mathbb{C}} : \varphi_{\mathbb{C}}(x) = 0_{V'_{\mathbb{C}}}\} \subset V_{\mathbb{C}}$ ve $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}: V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \rightarrow V'_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ dönüşümünün çekirdeğini de $\text{çek}\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = \{x \in V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} : \varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(x) = 0_{V'_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}}\} \subset V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ ile verelim. Burada $(\text{çek}\varphi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = \text{çek}\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ eşitliğini göstermek için ilk olarak $\forall x \in (\text{çek}\varphi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \subset V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ elemanını için $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ olmak üzere $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(x) = 0_{V'_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}}$ olduğunu gösterelim. O halde $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\varphi_{\mathbb{C}}(x_1), \varphi_{\mathbb{C}}(x_2), \varphi_{\mathbb{C}}(x_3), \varphi_{\mathbb{C}}(x_4)) = (0_{V'_{\mathbb{C}}}, 0_{V'_{\mathbb{C}}}, 0_{V'_{\mathbb{C}}}, 0_{V'_{\mathbb{C}}})$ şeklinde olduğundan $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(x) = 0_{V'_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}}$ elde edilir. Dolayısıyla $x \in \text{çek}\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ olup

$$(\text{çek}\varphi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \subset \text{çek}\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \quad (4.14)$$

yazılabilir.

Diğer taraftan $\forall x \in \text{çek}\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \subset V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ elemanı için $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ şeklinde olup $x_1, x_2, x_3, x_4 \in V_{\mathbb{C}}$ dir.

$\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\varphi_{\mathbb{C}}(x_1), \varphi_{\mathbb{C}}(x_2), \varphi_{\mathbb{C}}(x_3), \varphi_{\mathbb{C}}(x_4)) = (0_{V'_{\mathbb{C}}}, 0_{V'_{\mathbb{C}}}, 0_{V'_{\mathbb{C}}}, 0_{V'_{\mathbb{C}}})$ olduğundan $\varphi_{\mathbb{C}}(x_1) = 0_{V'_{\mathbb{C}}}, \varphi_{\mathbb{C}}(x_2) = 0_{V'_{\mathbb{C}}}, \varphi_{\mathbb{C}}(x_3) = 0_{V'_{\mathbb{C}}}$ ve $\varphi_{\mathbb{C}}(x_4) = 0_{V'_{\mathbb{C}}}$ elde edilir. Buradan $x_1 \in \text{çek}\varphi_{\mathbb{C}}, x_2 \in \text{çek}\varphi_{\mathbb{C}}, x_3 \in \text{çek}\varphi_{\mathbb{C}}, x_4 \in \text{çek}\varphi_{\mathbb{C}}$ ve buradan da $x \in (\text{çek}\varphi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ olmaktadır. Dolayısıyla

$$\text{çek}\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \subset (\text{çek}\varphi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \quad (4.15)$$

yazılabilir.

Sonuç olarak (4.14) ve (4.15) ifadeleri göz önüne alınırsa $(\text{çek}\varphi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = \text{çek}\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ eşitliği gösterilmiş olur.

Benzer şekilde, $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}) = (\varphi_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}))_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ eşitliğinin varlığını göstermek istersek, $\forall y \in \varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}})$ elemanını aldığımızda $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(x) = y$ olacak şekilde $x \in V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ vardır. $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ şeklinde olduğundan ve $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ dönüşümünün tanımından ve $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = \varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(x) = (\varphi_{\mathbb{C}}(x_1), \varphi_{\mathbb{C}}(x_2), \varphi_{\mathbb{C}}(x_3), \varphi_{\mathbb{C}}(x_4)) \in (\varphi_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}))_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ eşitliğinden $y \in (\varphi_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}))_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ olur ve $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}) \subset (\varphi_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}))_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ yazılır. Tersine $y \in (\varphi_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}))_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ elemanını aldığımızda $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ şeklinde olduğundan $\varphi_{\mathbb{C}}(x_1) = y_1, \varphi_{\mathbb{C}}(x_2) = y_2, \varphi_{\mathbb{C}}(x_3) = y_3, \varphi_{\mathbb{C}}(x_4) = y_4$ olacak şekilde $y_1, y_2, y_3, y_4 \in V'_{\mathbb{C}}$ olur. Dolayısıyla $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in V'_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = \varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}})$ olur. Buradan da $(\varphi_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}))_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \subset \varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}})$ yazılarak istenilen eşitlik gösterilmiş olur.

Sonuç 4.3 Eğer $\varphi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V'_{\mathbb{C}}$ bir $\mathbb{C}$ lineer dönüşüm ve kuaternizasyonlaştırılması da

$$\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} : V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \rightarrow V'_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$$

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) \rightarrow \varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(w_1, w_2, w_3, w_4) = (\varphi_{\mathbb{C}}(w_1), \varphi_{\mathbb{C}}(w_2), \varphi_{\mathbb{C}}(w_3), \varphi_{\mathbb{C}}(w_4))$$

şeklinde tanımlı $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ lineer dönüşüm ise, $\varphi_{\mathbb{C}}$ bir izomorfizma iken $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ dönüşümü de bir izomorfizmadır.

İspat

Varsayalım ki $\varphi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V'_{\mathbb{C}}$ lineer dönüşümü bir izomorfizma olsun. Bu durumda $\varphi_{\mathbb{C}}$ dönüşümü bir $\mathbb{C}$ lineer dönüşüm iken $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ nin de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ lineer olduğunu biliyoruz. $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ dönüşümünün birebirliğini göstermek için $x_1, x_2, x_3, x_4 \in V_{\mathbb{C}}$ olmak üzere $\forall x \in V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ için $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(x) = 0$ iken $x = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\varphi_{\mathbb{C}}(x_1), \varphi_{\mathbb{C}}(x_2), \varphi_{\mathbb{C}}(x_3), \varphi_{\mathbb{C}}(x_4)) = (0_{V'_{\mathbb{C}}}, 0_{V'_{\mathbb{C}}}, 0_{V'_{\mathbb{C}}}, 0_{V'_{\mathbb{C}}})$ olduğunda $\varphi_{\mathbb{C}}(x_1) = 0_{V'_{\mathbb{C}}}, \varphi_{\mathbb{C}}(x_2) = 0_{V'_{\mathbb{C}}}, \varphi_{\mathbb{C}}(x_3) = 0_{V'_{\mathbb{C}}}$ ve $\varphi_{\mathbb{C}}(x_4) = 0_{V'_{\mathbb{C}}}$ dir. $\varphi_{\mathbb{C}}$ dönüşümü izomorfizma olduğundan 1-1 ve örten olup, $\varphi_{\mathbb{C}}(x_1) = 0_{V'_{\mathbb{C}}}, \varphi_{\mathbb{C}}(x_2) = 0_{V'_{\mathbb{C}}}, \varphi_{\mathbb{C}}(x_3) = 0_{V'_{\mathbb{C}}}$ ve $\varphi_{\mathbb{C}}(x_4) = 0_{V'_{\mathbb{C}}}$ için $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, yani $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$ elde edilir. Buradan da $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} : \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \rightarrow V'_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ lineer dönüşümü 1-1 dir. $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ dönüşümünün örtenliğini göstermek için $\forall y \in V'_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ elemanı için $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(x) = y$ olacak şekilde $\exists x \in V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ olduğunu gösterelim. $\forall y \in V'_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ elemanı için

$\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\varphi_{\mathbb{C}}(x_1), \varphi_{\mathbb{C}}(x_2), \varphi_{\mathbb{C}}(x_3), \varphi_{\mathbb{C}}(x_4)) = (y_1, y_2, y_3, y_4) = y$ eşitliğinden $\varphi_{\mathbb{C}}(x_1) = y_1, \varphi_{\mathbb{C}}(x_2) = y_2, \varphi_{\mathbb{C}}(x_3) = y_3$ ve $\varphi_{\mathbb{C}}(x_4) = y_4$ bulunur. $\varphi_{\mathbb{C}}$ dönüşümü bir izomorfizma olduğundan $\forall y_1, y_2, y_3, y_4 \in V'_{\mathbb{C}}$ için

$\varphi_{\mathbb{C}}(x_1) = y_1, \varphi_{\mathbb{C}}(x_2) = y_2, \varphi_{\mathbb{C}}(x_3) = y_3, \varphi_{\mathbb{C}}(x_4) = y_4$ olacak şekilde $\exists x_1, x_2, x_3, x_4 \in V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ vardır. O halde $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ dönüşümünün de örtenliği gösterilmiş olur. Sonuç olarak $\varphi_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ dönüşümü de izomorfizmadır.

4.2.2 Tensör Çarpımı ile Kuaternizasyonlaştırma

Tanım 4.4 $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayı ve $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyon yarı cismi verilsin. $Q = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonu ve $\vec{x} \in V_{\mathbb{C}}$ vektörü için $Q \otimes \vec{x} = (Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k) \otimes \vec{x} = Q_0 \otimes \vec{x} + Q_1i \otimes \vec{x} + Q_2j \otimes \vec{x} + Q_3k \otimes \vec{x}$ eşitliğinde (2.5) ile verdiğimiz tensör çarpımın lineerliğini kullanırsak $Q_i \in \mathbb{C}$ kompleks sayılar olduğundan, $Q \otimes \vec{x} = 1 \otimes Q_0\vec{x} + i \otimes Q_1\vec{x} + j \otimes Q_2\vec{x} + k \otimes Q_3\vec{x}$ ile yazılabilen $(Q_{i-1}\vec{x} = w_i)$

olarak alınırsa $Q \otimes \vec{x} = 1 \otimes w_1 + i \otimes w_2 + j \otimes w_3 + k \otimes w_4$ şeklindeki elemanlardan oluşan ve $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \left\{ Q \otimes \vec{x} \mid Q \otimes \vec{x} = 1 \otimes w_1 + i \otimes w_2 + j \otimes w_3 + k \otimes w_4, w_i \in V_{\mathbb{C}}, i = 1, 2, 3, 4 \right\}$ şeklinde tanımlanan kümeye $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayının tensör çarpım ile **kompleks kuaternizasyonu** adı verilir, [12].

Tanım 4.5 $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayı ve bu vektör uzayının kuaternizasyonlaştırılması $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} : V_{\mathbb{C}} &\rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} \\ w &\rightarrow 1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes w \end{aligned} \quad (4.16)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayının $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ içine **gömülmesi** denir, [12].

Teorem 4.5 $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayı ve bu vektör uzayının kuaternizasyonlaştırılması olan $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ ifadesi $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonlar yarı cismi üzerinde kompleks kuaterniyon vektör uzayıdır.

İspat

$\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ kümesinin vektör uzayı olduğunu göstermek için ilk olarak abel grup işlemi tanımlayalım.

Toplama

$$\begin{aligned} \oplus : (\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}) \times (\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}) &\rightarrow (\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}) \\ ((1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x), (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes y)) &\rightarrow 1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes (x + y) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\oplus$ işlemine göre (2.1) ile verdiğimiz grup aksiyomlarını gerçekleyelim.

G1) $1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes (x + y) \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ olduğundan kapalılık aksiyomu gerçekleşir.

$$\begin{aligned} G2) (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes (x + y)) \oplus (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes z) &= 1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes (x + y + z) \\ &= (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x) \oplus (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes (y + z)) \end{aligned}$$

olduğundan birleşme aksiyomu gerçekleşir.

$$G3) (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x) \oplus (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes y) = (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes (x + y)) = (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x) \text{ eşitliği var iken,}$$

$$(1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes (x + y - x)) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ bulunur.}$$

O halde $\oplus$ işleminin etkisiz elemanı $(1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes 0)$ dir.

$$G4) (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x) \oplus (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes y) = (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes 0) \Rightarrow (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes (x + y)) = (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes 0)$$

$$\Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x$$

O halde $(1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x)$ elemanının tersi $(1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes -x)$ elemanıdır.

Dış işlem

$$\odot : \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \times (\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}) \rightarrow (\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}})$$

$$Q, (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x) \rightarrow Q \odot (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x) = Q.1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x$$

şeklinde tanımlanan dış işleme göre (2.2) ile verilen vektör uzayı aksiyomlarını gerçekleyelim.

$$V1) Q \odot ((1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x) + (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes y)) = Q \odot (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes (x + y)) = Q.1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes (x + y)$$

$$= Q.1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x + Q.1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes y$$

$$= Q \odot (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x) + Q \odot (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes y)$$

$$V2) (Q_1 + Q_2) \odot (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x) = ((Q_1 + Q_2).1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x) = (Q_1.1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x) + (Q_2.1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x)$$

$$= Q_1 \odot (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x) + Q_2 \odot (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x)$$

$$V3) Q_1.Q_2 \odot (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x) = Q_1.Q_2.1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x = Q_1 \odot (Q_2.1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x) = Q_1 \odot (Q_2 \odot (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x))$$

$$V4) 1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \odot (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x) = (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x)$$

Bu aksiyomlar ile birlikte $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ sol kompleks kuaterniyon vektör uzayıdır.

$$\bullet: (\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}) \times \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \rightarrow (\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}})$$

$$(Q, 1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x) \rightarrow (1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \otimes x) \odot Q = 1_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \cdot Q \otimes x$$

ile tanımlanan dış işleme göre de aynı aksiyomlar gerçekleşir ve $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ ifadesinin sağ kompleks kuaterniyon vektör uzayı olduğu görülür.

Sonuç 4.4 $\{(\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}), \oplus, \mathbb{H}_{\mathbb{C}}, +, \cdot, \odot, \bullet\}$ ifadesi bir kompleks kuaterniyon vektör uzayı olur.

Teorem 4.6 $V_{\mathbb{C}}$ bir kompleks vektör uzayı ve bu vektör uzayının kuaternizasyonları $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ ile $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ olsun. Bu taktirde,

$$f_w: V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$$

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) \rightarrow f_w(w_1, w_2, w_3, w_4) = 1 \otimes w_1 + i \otimes w_2 + j \otimes w_3 + k \otimes w_4 \quad (4.17)$$

şeklinde tanımlanan bir $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ lineer izomorfizma vardır, [12].

İspat

Yukarıda (4.17) eşitliği ile verildiği gibi bir değere sahip olan f_w fonksiyonunun $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ lineer olduğunu gösterelim.

L1) (w_1, w_2, w_3, w_4) ve $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ olmak üzere,

$$f_w((w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus (v_1, v_2, v_3, v_4)) = f_w(w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4)$$

(4.17) ile verilen f_w fonksiyonunun tanımından,

$1 \otimes (w_1 + v_1) + i \otimes (w_2 + v_2) + j \otimes (w_3 + v_3) + k \otimes (w_4 + v_4)$ yazılır ve (2.5) ile verilen tensör çarpımın lineerliğinden de,

$$1 \otimes w_1 + 1 \otimes v_1 + i \otimes w_2 + i \otimes v_2 + j \otimes w_3 + j \otimes v_3 + k \otimes w_4 + k \otimes v_4$$

$$= f_w(w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus f_w(v_1, v_2, v_3, v_4) \text{ bulunur.}$$

L2) $Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ ve $(w_1, w_2, w_3, w_4) \in V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ olmak üzere dış işleme göre sol lineerliği incelersek,

$$f_w((Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k) \odot (w_1, w_2, w_3, w_4))$$

(4.3) ile verdiğimiz dış işlem tanımından,

$$f_w \left(\begin{matrix} Q_0w_1 - Q_1w_2 - Q_2w_3 - Q_3w_4, Q_0w_2 + Q_1w_1 + Q_2w_4 - Q_3w_3 \\ Q_0w_3 - Q_1w_4 + Q_2w_1 + Q_3w_2, Q_0w_4 + Q_1w_3 - Q_2w_2 + Q_3w_1 \end{matrix} \right) \text{ yazabiliriz ve (4.17) ile}$$

verdiğimiz fonksiyonun tanımından,

$$\begin{aligned} &= 1 \otimes (Q_0w_1 - Q_1w_2 - Q_2w_3 - Q_3w_4) + i \otimes (Q_0w_2 + Q_1w_1 + Q_2w_4 - Q_3w_3) \\ &+ j \otimes (Q_0w_3 - Q_1w_4 + Q_2w_1 + Q_3w_2) + k \otimes (Q_0w_4 + Q_1w_3 - Q_2w_2 + Q_3w_1) \\ &= Q_0 \otimes w_1 - Q_1 \otimes w_2 - Q_2 \otimes w_3 - Q_3 \otimes w_4 + Q_0i \otimes w_2 + Q_1i \otimes w_1 + Q_2i \otimes w_4 - Q_3i \otimes w_3 \\ &+ jQ_0 \otimes w_3 \\ &- jQ_1 \otimes w_4 + jQ_2 \otimes w_1 + jQ_3 \otimes w_2 + kQ_0 \otimes w_4 + kQ_1 \otimes w_3 - kQ_2 \otimes w_2 + kQ_3 \otimes w_1 \\ &= (Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k) \otimes w_1 + (-Q_1 + Q_0i + Q_3j - Q_2k) \otimes w_2 \\ &+ (-Q_2 - Q_3i + Q_0j + Q_1k) \otimes w_3 + (-Q_3 + Q_2i - Q_1j + Q_0k) \otimes w_4 \\ &= (Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k) \otimes w_1 + (Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k)i \otimes w_2 \\ &+ (Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k)j \otimes w_3 + (Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k)k \otimes w_4 \\ &= (Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k)(1 \otimes w_1 + i \otimes w_2 + j \otimes w_3 + k \otimes w_4) \\ &= (Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k) \odot f_w(w_1, w_2, w_3, w_4) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Benzer biçimde sağdan çarpıma göre lineerliği incelersek,

$$\begin{aligned} &f_w((w_1, w_2, w_3, w_4) \bullet (Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k)) \\ &= f_w \left(\begin{matrix} w_1Q_0 - w_2Q_1 - w_3Q_2 - w_4Q_3, w_1Q_1 + w_2Q_0 + w_3Q_3 - w_4Q_2, \\ w_1Q_2 - w_2Q_3 + w_3Q_0 + w_4Q_1, w_1Q_3 + w_2Q_2 - w_3Q_1 + w_4Q_0 \end{matrix} \right) \\ &= 1 \otimes (w_1Q_0 - w_2Q_1 - w_3Q_2 - w_4Q_3) + i \otimes (w_1Q_1 + w_2Q_0 + w_3Q_3 - w_4Q_2) \\ &+ j \otimes (w_1Q_2 - w_2Q_3 + w_3Q_0 + w_4Q_1) + k \otimes (w_1Q_3 + w_2Q_2 - w_3Q_1 + w_4Q_0) \\ &= 1 \otimes w_1Q_0 - 1 \otimes w_2Q_1 - 1 \otimes w_3Q_2 - 1 \otimes w_4Q_3 + i \otimes w_1Q_1 + i \otimes w_2Q_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +i \otimes w_3 Q_3 - i \otimes w_4 Q_2 + j \otimes w_1 Q_2 - j \otimes w_2 Q_3 + j \otimes w_3 Q_0 + j \otimes w_4 Q_1 \\
& +k \otimes w_1 Q_3 + k \otimes w_2 Q_2 - k \otimes w_3 Q_1 + k \otimes w_4 Q_0 \\
& = 1 \otimes w_1 (Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) + i \otimes w_2 (Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) \\
& = j \otimes w_3 (Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) + k \otimes w_4 (Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) \\
& = (1 \otimes w_1 + i \otimes w_2 + j \otimes w_3 + k \otimes w_4) (Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) \\
& = f_w (w_1, w_2, w_3, w_4) \bullet (Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k) \\
& = f_w (w_1, w_2, w_3, w_4) \bullet Q \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Böylece f_w fonksiyonunun $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ lineerliği gösterilmiş olur. f_w fonksiyonunun izomorfizma olduğunu göstermek için,

$$g_w : \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$$

$$(1 \otimes w) \rightarrow (w, 0, 0, 0)$$

$$Q \otimes w = Q(1 \otimes w) \rightarrow Q(w, 0, 0, 0)$$

şeklindeki ters fonksiyonunu tanımlayalım.

g_w fonksiyonunun $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ lineer olduğunu göstermek için $t = Q \otimes w \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ ve $Q' \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ için $g_w(Q' \odot t) = Q' \odot g_w(t)$ ve $g_w(t \bullet Q') = g_w(t) \bullet Q'$ olduğunu göstermemiz gerekir.

$$\begin{aligned}
g_w(Q' \odot (Q \otimes w)) &= g_w(Q' \cdot Q \otimes w) = Q' Q(w, 0, 0, 0) \\
&= Q'(Q(w, 0, 0, 0)) = Q' \odot g_w(Q \otimes w) \\
g_w((Q \otimes w) \bullet Q') &= g_w(Q \otimes w Q') = Q(w, 0, 0, 0) Q' \\
&= (Q(w, 0, 0, 0)) Q' = g_w(Q \otimes w) \bullet Q'
\end{aligned}$$

Son olarak f_w ile g_w fonksiyonlarının birbirlerinin tersi olduğunu gösterelim.

$$g_w(f_w(w_1, w_2, w_3, w_4)) = g_w(1 \otimes w_1 + i \otimes w_2 + j \otimes w_3 + k \otimes w_4)$$

$$g_w(f_w(w_1, w_2, w_3, w_4)) = g_w(1 \otimes w_1 + i(1 \otimes w_2) + j(1 \otimes w_3) + k(1 \otimes w_4))$$

g_w fonksiyonunun $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ lineer olduğunu gösterdiğimizden,

$$\begin{aligned} g_w(f_w(w_1, w_2, w_3, w_4)) &= g_w(1 \otimes w_1) + g_w(i \otimes w_2) + g_w(j \otimes w_3) + g_w(k \otimes w_4) \\ &= (w_1, 0, 0, 0) + i(w_2, 0, 0, 0) + j(w_3, 0, 0, 0) + k(w_4, 0, 0, 0) \\ &= (w_1, w_2, w_3, w_4) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Böylece $f_w \circ g_w = I$ olduğundan f_w terslenebilir bir fonksiyondur, yani f_w 1-1 ve örtendir. Dolayısıyla f_w fonksiyonu bir izomorfizmadır ve $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} \cong V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ olur.

4.3 Kompleks Kuaterniyon Norm Uzayları

Tanım 4.6

$V_{\mathbb{C}}$ bir kompleks vektör uzayı ve kuaternizasyonlaştırılması $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ olsun. $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayı üzerinde,

$$\|\cdot\|: V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \rightarrow \|w\|$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|$ fonksiyonu $\forall v, w \in V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}, \lambda \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ elemanları için aşağıdaki koşulları gerçeklerse $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayına, **kompleks kuaterniyon norm uzayı** adı verilir.

$$\left. \begin{aligned} N1) & \|w\| \geq 0 \\ N2) & \|w\| = 0 \Leftrightarrow w = 0 \\ N3) & \|\lambda w\| = \|w\lambda\| = |\lambda| \|w\| \\ N4) & \|w + v\| \leq \|w\| + \|v\| \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Kompleks kuaterniyonlar kümesi çarpma işlemi (dış işlem) 'ne göre değişmeli olmadığından, yukarıda verdiğimiz norm aksiyomlarından N3) aksiyomunun iki taraflı da gerçekleşmesi gerekmektedir, [12].

Örnek 4.1 $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayı ve kompleks kuaternizasyonlaştırılması $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ olmak üzere, eğer kompleks vektör uzayını $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ olarak alırsak $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaternizasyonlaştırılması ise $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = V_{\mathbb{C}} \cdot \mathbb{H}_{\mathbb{C}} = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ bulunur ve $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayıdır. Bu $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayı, aldığımız $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ için $Q \rightarrow \|Q\| = \sqrt{\langle Q, Q \rangle}$ şeklinde tanımlanan norm ile birlikte kompleks kuaterniyon normlu uzaydır.

Çözüm

Norm fonksiyonu,

$$\|\cdot\| : \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Q \rightarrow \|Q\| = \sqrt{\langle Q, Q \rangle}$$

şeklinde tanımlandığından (418) ile verilen normlu uzay şartlarını gerçeklemek istersek,

$$N1) \|Q\| = \sqrt{\langle Q, Q \rangle} \geq 0 \text{ olduğu açıktır.}$$

$$N2) \|Q\| = \sqrt{\langle Q, Q \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle Q, Q \rangle = 0 \Leftrightarrow Q = 0$$

$$N3) \|\lambda Q\| = \sqrt{\langle \lambda Q, \lambda Q \rangle} = \sqrt{\bar{\lambda} \langle Q, Q \rangle \lambda} = \sqrt{\bar{\lambda} \|Q\|^2 \lambda} = [\bar{\lambda} \lambda]^{\frac{1}{2}} [\|Q\|^2]^{\frac{1}{2}} = \|\lambda\| \|Q\| \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ olur}$$

ve benzer biçimde $\|Q\lambda\| = \|Q\| \|Q\lambda\|$ eşitliği de gösterilebilir.

$$N4) \|Q + P\|^2 = \langle Q + P, Q + P \rangle = \langle Q, Q \rangle + \langle Q, P \rangle + \langle P, Q \rangle + \langle P, P \rangle$$

$$= \|Q\|^2 + \langle Q, P \rangle + \overline{\langle Q, P \rangle} + \|P\|^2$$

$$\stackrel{z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z}{=} \|Q\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle Q, P \rangle) + \|P\|^2 \stackrel{\operatorname{Re} z \leq |z|}{\leq} \|Q\|^2 + 2(|\langle Q, P \rangle|) + \|P\|^2$$

$$\stackrel{schwartz}{\leq} \|Q\|^2 + 2\|Q\|\|P\| + \|P\|^2 = (\|Q\| + \|P\|)^2$$

Son eşitlikten her iki tarafın karekökü alınırsa $\|Q + P\| \leq \|Q\| + \|P\|$ bulunur. Dolayısıyla

$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyon normlu uzaydır.

Örnek 4.2 $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayı olmak üzere bu vektör uzayının kompleks kuaternizasyonu $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ olsun. Eğer $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$ kümesini alırsak, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ vektörü ve $Q = Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonu için,

$$\begin{aligned} Q.\vec{x} &= (Q_0 + Q_1i + Q_2j + Q_3k)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= Q_0(x_1, x_2, \dots, x_n) + Q_1i(x_1, x_2, \dots, x_n) + Q_2j(x_1, x_2, \dots, x_n) + Q_3k(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (Q_0x_1, Q_0x_2, \dots, Q_0x_n) + (Q_1ix_1, Q_1ix_2, \dots, Q_1ix_n) \\ &\quad + (Q_2jx_1, Q_2jx_2, \dots, Q_2jx_n) + (Q_3kx_1, Q_3kx_2, \dots, Q_3kx_n) \\ &= \left((Q_0x_1 + Q_1ix_1 + Q_2jx_1 + Q_3kx_1), (Q_0x_2 + Q_1ix_2 + Q_2jx_2 + Q_3kx_2), \dots, \right. \\ &\quad \left. (Q_0x_{n-1} + Q_1ix_{n-1} + Q_2jx_{n-1} + Q_3kx_{n-1}), (Q_0x_n + Q_1ix_n + Q_2jx_n + Q_3kx_n) \right) \in (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n \end{aligned}$$

olmaktadır. Sonuç olarak $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayının kuaternizasyonu $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ kompleks kuaterniyon vektör uzayıdır.

Örnek 4.3 $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ kompleks kuaterniyon vektör uzayı,

$$\|\cdot\|: (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \rightarrow \|Q\| = \sqrt{\sum_{t=1}^n \overline{Q_t} \cdot Q_t}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon ile birlikte kompleks kuaterniyon normlu uzaydır.

Çözüm

$V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ kompleks kuaterniyon vektör uzayı için bu şekilde bir norm tanımının yapılabileceğini kompleks simplektik geometri kısmında göstermiştik. Bu şekilde tanımlanan $\|\cdot\|$ fonksiyonu için normlu uzay şartlarını gerçeklemek istersek,

$$N1) \|Q\| = \sqrt{\sum_{t=1}^n \overline{Q_t} Q_t} = \left[\sum_{t=1}^n \|Q_t\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \geq 0 \text{ olduğu açıktır.}$$

$$N2) \|Q\| = \sqrt{\sum_{t=1}^n \overline{Q_t} Q_t} = \left[\sum_{t=1}^n \|Q_t\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{t=1}^n \|Q_t\|^2 = 0 \quad \forall t=1,2,\dots,n \text{ değeri için}$$

$$Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = (0, 0, \dots, 0) \text{ bulunur.}$$

$$\begin{aligned} N3) \|\lambda Q\| &= \sqrt{\sum_{t=1}^n \overline{\lambda Q_t} \lambda Q_t} = \sqrt{\sum_{t=1}^n \overline{Q_t} \overline{\lambda} \lambda Q_t} = \sqrt{\sum_{t=1}^n \overline{Q_t} \|\lambda\|^2 Q_t} \\ &= \left[\|\lambda\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sum_{t=1}^n \overline{Q_t} Q_t} = \|\lambda\| \|Q\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N4) \|Q+P\| &= \|(Q_1+P_1, Q_2+P_2, \dots, Q_n+P_n)\| = \sqrt{\sum_{t=1}^n \|Q_t+P_t\|^2} = \sqrt{\sum_{t=1}^n (\overline{Q_t+P_t})(Q_t+P_t)} \\ &= \sqrt{\sum_{t=1}^n (\overline{Q_t} + \overline{P_t})(Q_t + P_t)} = \left[\sum_{t=1}^n \overline{Q_t} Q_t + \overline{Q_t} P_t + \overline{P_t} Q_t + \overline{P_t} P_t \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{t=1}^n \|Q_t\|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{Q_t} P_t) + \|P_t\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{t=1}^n \|Q_t\|^2 + 2\|\overline{Q_t} P_t\| + \|P_t\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{t=1}^n \|Q_t\|^2 + 2\|\overline{Q_t}\| \|P_t\| + \|P_t\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{t=1}^n \|Q_t\|^2 + 2\|Q_t\| \|P_t\| + \|P_t\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{t=1}^n (\|Q_t\| + \|P_t\|)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{t=1}^n \|Q_t\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{t=1}^n \|P_t\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \|Q\| + \|P\| \end{aligned}$$

Teorem 4.7 $V_{\mathbb{C}}$ kompleks normlu uzay olmak üzere, $V_{\mathbb{C}}$ nin kompleks kuaternizasyonu olan $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ ifadesi de kompleks kuaterniyon normlu uzaydır, [12].

İspat

$V_{\mathbb{C}}$ kompleks normlu uzayının kompleks kuaternizasyonu olan $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ ifadesinin elemanlarını $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonu ve $\vec{x} \in V_{\mathbb{C}}$ vektörü için $Q \otimes \vec{x}$ ile tanımlayarak, $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \{Q \otimes \vec{x} \mid Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}, x \in V_{\mathbb{C}}\}$ şeklinde göstermiştik. $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$

kompleks kuaterniyon vektör uzayı üzerindeki norm fonksiyonunu $\|\cdot\|$ ile gösterirsek, $Q \otimes \vec{x} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ elemanının normu için $\|Q \otimes x\|$ yazabiliriz. Teorem 4.6 ile gösterdiğimiz $V_{\mathbb{C}}$ kompleks vektör uzayının kuaternizasyonları olan $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ ve $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ arasındaki izomorfluktan $\|Q \otimes \vec{x}\| = \|Q\| \cdot \|\vec{x}\|$ eşitliğini tanımlayalım. Bu eşitliğe göre (4.18) ifadesinde verilen normlu uzay koşullarını gerçekleyelim.

$$N1) \|Q \otimes \vec{x}\| = \|Q\| \cdot \|\vec{x}\| \geq 0$$

$$N2) \|Q \otimes \vec{x}\| = \|Q\| \cdot \|\vec{x}\| = 0 \Rightarrow \|Q\| = 0 \text{ veya } \|\vec{x}\| = 0 \text{ dır.}$$

$$\|Q\| = 0 \text{ ise, } Q = 0 \Rightarrow Q \otimes \vec{x} = 0$$

$$\|\vec{x}\| = 0 \text{ ise, } \vec{x} = 0 \text{ olur ve } Q \otimes \vec{x} = 0 \text{ dır.}$$

Tersine $Q \otimes \vec{x} = 0$ ise, $\|Q \otimes \vec{x}\| = 0$ dır.

$$N3) \|\lambda(Q \otimes \vec{x})\| = \|\lambda Q \otimes \vec{x}\| = \|\lambda Q\| \cdot \|\vec{x}\| = \|\lambda\| \|Q\| \cdot \|\vec{x}\| = \|\lambda\| \|Q \otimes \vec{x}\|$$

$$\|(Q \otimes \vec{x})\lambda\| = \|Q\lambda \otimes \vec{x}\| = \|Q\lambda\| \cdot \|\vec{x}\| = \|Q\| \|\lambda\| \cdot \|\vec{x}\| = \|Q \otimes \vec{x}\| \|\lambda\|$$

$$N4) \|Q_1 \otimes \vec{x} + Q_2 \otimes \vec{x}\| = \|(Q_1 + Q_2) \otimes \vec{x}\| = \|Q_1 + Q_2\| \cdot \|\vec{x}\|$$

$$\leq (\|Q_1\| + \|Q_2\|) \|\vec{x}\| = \|Q_1 \otimes \vec{x}\| + \|Q_2 \otimes \vec{x}\|$$

Dolayısıyla tanımladığımız norm ile birlikte $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ nin kompleks kuaterniyon normlu uzay olduğu gösterilmiş olur, [12].

Tanım 4.7 $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyon normlu uzayı olsun. Eğer bu normlu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ normlu uzayına **tam uzay** veya **Banach uzayı** adı verilir, [12].

Örnek 4.4 $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayında aldığımız bir $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonu için, $\|Q\| = \sqrt{\langle Q, Q \rangle}$ şeklinde verilen norm tanımına göre

normlu uzay olduğunu örnek 4.1 ile gösterdik. $V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}} = \mathbb{H}_\mathbb{C}$ kompleks kuaterniyon normlu uzayının bu norma göre tamlığını gösterelim.

Çözüm

$V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}} = \mathbb{H}_\mathbb{C}$ kompleks kuaterniyonlar kümesi üzerinde bir $\{Q_n\}$ Cauchy dizisini alalım.

$$Q: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{H}_\mathbb{C}$$

$$n \rightarrow Q(n) = Q_n = Q_{0_n} + Q_{1_n}i + Q_{2_n}j + Q_{3_n}k$$

şeklindeki fonksiyon ile dizinin elemanlarını belirleyelim. $\{Q_n\}$ bir Cauchy dizisi olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık gelen $N(\varepsilon)$ doğal sayısı $m, n > N(\varepsilon)$ iken $\|Q_n - Q_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde vardır. Şimdi ise $\{Q_n\}$ Cauchy dizisinin $Q_n \rightarrow Q$ yakınsak olduğunu, yani $\forall \varepsilon > 0$ için $\|Q_n - Q\| < \varepsilon$ olacak şekilde $n > N(\varepsilon)$ sayısının varlığını gösterelim.

$\{Q_n\}$ bir Cauchy dizisi olduğundan elemanlarını

$$Q_n = Q_{0_n} + Q_{1_n}i + Q_{2_n}j + Q_{3_n}k$$

$$Q_m = Q_{0_m} + Q_{1_m}i + Q_{2_m}j + Q_{3_m}k \text{ olarak belirlersek,}$$

$$\|Q_n - Q_m\|^2 = (\overline{Q_n} - \overline{Q_m}) \cdot (Q_n - Q_m) < \varepsilon^2 \text{ yazılır ve } \sum_{i=0}^3 |Q_{i_n} - Q_{i_m}|^2 < \varepsilon^2 \text{ eşitsizliği elde edilir.}$$

Son eşitsizlikten $|Q_{i_n} - Q_{i_m}| < \varepsilon$ yazılabilir ve bu bize $\{Q_{i_n}\} \in \mathbb{C}$ ifadesinin $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinde de bir Cauchy dizisi olduğunu söyler. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi tam olduğundan bu dizi $Q_{i_n} \rightarrow Q_i$ gibi bir değere yakınsar. Yani $\forall \varepsilon_i > 0$ için $\|Q_{i_n} - Q_i\| < \varepsilon_i$ olacak şekilde $n > N(\varepsilon_i)$ sayısı vardır.

$$\begin{aligned} \text{O halde } \|Q_n - Q\| &= \|(Q_{0_n}, Q_{1_n}, Q_{2_n}, Q_{3_n}) - (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)\| \\ &= \|(Q_{0_n} - Q_0, Q_{1_n} - Q_1, Q_{2_n} - Q_2, Q_{3_n} - Q_3)\| \\ &\leq |Q_{0_n} - Q_0| + |Q_{1_n} - Q_1| + |Q_{2_n} - Q_2| + |Q_{3_n} - Q_3| \end{aligned}$$

$$< \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \varepsilon \text{ olur.}$$

Dolayısıyla $\{Q_n\}$ Cauchy dizisinin yakınsaklığı gösterilmiş olur. Sonuç olarak $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyon normlu uzayı verilen norma göre tamdır.

Örnek 4.5 $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ kompleks kuaterniyon vektör uzayının üzerinde tanımlanan

$$\|Q\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \overline{Q_i} Q_i} = \left[\sum_{i=1}^n \|Q_i\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ normuna göre normlu uzay olduğunu örnek 4.3 ile}$$

gösterdik. Şimdi de bu norma göre tamlığını inceleyelim.

Çözüm

$\{Q_k\} (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ kompleks kuaterniyon vektör uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O halde,

$\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\|Q_k - Q_p\| < \varepsilon$ olacak şekilde $k, p > N(\varepsilon)$ doğal sayıları vardır.

Dizinin elemanlarını,

$$Q_k = (Q_{k_1}, Q_{k_2}, \dots, Q_{k_n})$$

$$Q_p = (Q_{p_1}, Q_{p_2}, \dots, Q_{p_n}) \text{ ile belirleyelim.}$$

Biz $\{Q_k\}$ Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu yani $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\|Q_k - Q\| < \varepsilon$

olacak şekilde $k > N(\varepsilon)$ doğal sayısının varlığını göstermek istiyoruz. $\|Q_k - Q_p\| < \varepsilon$

$$\text{olduğundan, } \|Q_k - Q_p\| = \|(Q_{k_1}, Q_{k_2}, \dots, Q_{k_n}) - (Q_{p_1}, Q_{p_2}, \dots, Q_{p_n})\| < \varepsilon$$

$$\|Q_k - Q_p\| = \|(Q_{k_1} - Q_{p_1}, Q_{k_2} - Q_{p_2}, \dots, Q_{k_n} - Q_{p_n})\| < \varepsilon$$

$$= \sum_{i=1}^n \overline{(Q_{k_i} - Q_{p_i})} (Q_{k_i} - Q_{p_i}) < \varepsilon^2$$

$$= \sum_{i=1}^n \|Q_{k_i} - Q_{p_i}\|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \|Q_{k_i} - Q_{p_i}\| < \varepsilon_i \text{ olur.}$$

Dolayısıyla $\forall i$ değeri için $\|Q_{k_i} - Q_{p_i}\| < \varepsilon_i$ olduğundan $\{Q_{k_i}\}$ ler $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ de Cauchy dizisi

olur. Örnek 4.4' de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ nin tam olduğunu gösterdiğimizden $Q_{k_i} \rightarrow Q_i$ olacak şekilde

yakınsadığı bir nokta vardır. Yani $\forall \varepsilon > 0$ için $\|Q_{k_i} - Q_i\| < \delta_i$ olacak şekilde $\delta_i > 0$ sayıları vardır.

$$\begin{aligned} \|Q_k - Q\| &= \|(Q_{k_1}, Q_{k_2}, \dots, Q_{k_n}) - (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)\| = \|(Q_{k_1} - Q_1, Q_{k_2} - Q_2, \dots, Q_{k_n} - Q_n)\| \\ &\leq \|Q_{k_1} - Q_1\| + \|Q_{k_2} - Q_2\| + \dots + \|Q_{k_n} - Q_n\| < \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = \varepsilon \quad \text{olur.} \quad \text{Böylece} \\ \{Q_k\} &\text{ Cauchy dizisinin yakınsaklığı gösterilmiş olur.} \end{aligned}$$

4.4 Kompleks Kuaterniyon Hilbert Uzayları

Bu bölümde daha önce oluşturduğumuz kompleks kuaterniyon vektör uzayları için, kompleks kuaterniyon Hilbert uzayının tanımı ve bazı teoremleri verilecektir.

Tanım 4.8 $V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}} &\rightarrow \mathbb{H}_\mathbb{C} \\ (v, w) &\rightarrow \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonu $\forall v, w, u \in V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}$ ve $a, b \in \mathbb{H}_\mathbb{C}$ elemanları için,

$$\left. \begin{aligned} P1) \langle v, v \rangle &\geq 0 \\ P2) \langle v, v \rangle &= 0 \Leftrightarrow v = 0 \\ P3) \langle v + u, w \rangle &= \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle \\ P4) \overline{\langle v, w \rangle} &= \langle w, v \rangle \\ P5) \langle va, wb \rangle &= \overline{a} \langle v, w \rangle b \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

özelliklerini sağlıyorsa, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonuna **kompleks kuaterniyon değerli iç çarpım** adı verilir.

Eğer bu iç çarpım fonksiyonu var iken $\forall v \in V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}$ elemanı için $\|v\| = \sqrt{\|\langle v, v \rangle\|}$ iç çarpım fonksiyonunun normuna göre tam ise, $V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}$ 'ye **kompleks kuaterniyon Hilbert uzayı** adı verilir, [12].

Örnek 4.6 $V_{\mathbb{H}_\mathbb{C}} = \mathbb{H}_\mathbb{C}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayı üzerinde, $\forall P, Q \in \mathbb{H}_\mathbb{C}$ elemanları için

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$$

$$(P, Q) \rightarrow \langle P, Q \rangle = \overline{P} \cdot Q$$

şeklinde kompleks kuaterniyon değerli bir iç çarpım tanımı yapalım. $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayı bu iç çarpım fonksiyonuna göre kompleks kuaterniyon Hilbert uzayıdır.

Çözüm

İlk olarak verilen fonksiyonun (4.19) ile verilen iç çarpım aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

$$P1) \langle P, P \rangle = \overline{P}P = \|P\|^2 \geq 0$$

$$P2) \langle P, P \rangle = \overline{P}P = \|P\|^2 = 0 \Rightarrow P = 0$$

$$P3) \langle P + R, Q \rangle = (\overline{P + R})Q = \overline{P}Q + \overline{R}Q = \langle P, Q \rangle + \langle R, Q \rangle$$

$$P4) \langle P, Q \rangle = \overline{P} \cdot Q = \overline{\overline{Q} \cdot P} = \overline{\langle Q, P \rangle}$$

$$P5) \langle P\alpha, Q\beta \rangle = \overline{P\alpha} \cdot Q\beta = \overline{\alpha} \cdot \overline{P} \cdot Q\beta = \overline{\alpha} \langle P, Q \rangle \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Buradan görülüyor ki, bu şekilde tanımlanan iç çarpım, kompleks kuaterniyon değerli bir iç çarpımdır. Bu iç çarpım tanımına göre tamlığı örnek 4.4 de gösterdiğimizden kompleks kuaterniyonlar kümesi kompleks kuaterniyon Hilbert uzayı olur.

Örnek 4.7

$V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ kompleks kuaterniyon vektör uzayı,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n \times (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$$

$$(P_1, P_2, \dots, P_n), (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \rightarrow \langle (P_1, P_2, \dots, P_n), (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{P_i} \cdot Q_i$$

şeklinde tanımlanan iç çarpım fonksiyonuna göre kompleks kuaterniyon Hilbert uzayıdır.

Çözüm

İlk olarak bu iç çarpım fonksiyonunun kompleks kuaterniyon değerli bir iç çarpım olduğunu gösterelim.

P1) $P = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ elemanının bileşenlerini $t = 1, 2, \dots, n$ değerleri için

$P_n = P_{0_n} + P_{1_n}i + P_{2_n}j + P_{3_n}k$ şeklinde tanımlarsak

$$\langle P, P \rangle = \langle (P_1, P_2, \dots, P_n), (P_1, P_2, \dots, P_n) \rangle = \sum_{t=1}^n \overline{P_t} \cdot P_t = \sum_{t=1}^n \|P_t\|^2 \geq 0 \text{ olduğu açıktır.}$$

P2) $P = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle P, P \rangle &= \langle (P_1, P_2, \dots, P_n), (P_1, P_2, \dots, P_n) \rangle = \sum_{t=1}^n \overline{P_t} \cdot P_t \\ &= \sum_{t=1}^n \|P_t\|^2 = 0 \text{ iken, } \forall t = 1, 2, \dots, n \text{ değeri için} \end{aligned}$$

$\|P_t\| = 0$ dır. Buradan $P = (P_1, P_2, \dots, P_n) = (0, 0, \dots, 0)$ olur.

P3) $P = (P_1, P_2, \dots, P_n), Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ ve $R = (R_1, R_2, \dots, R_n) \in (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle P + R, Q \rangle &= \langle (P_1, P_2, \dots, P_n) + (R_1, R_2, \dots, R_n), (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \rangle \\ &= \langle (P_1 + R_1, P_2 + R_2, \dots, P_n + R_n), (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \rangle \\ &= \sum_{t=1}^n \overline{(P_t + R_t)} \cdot Q_t = \sum_{t=1}^n (\overline{P_t} + \overline{R_t}) \cdot Q_t = \sum_{t=1}^n \overline{P_t} \cdot Q_t + \sum_{t=1}^n \overline{R_t} \cdot Q_t \\ &= \langle (P_1, P_2, \dots, P_n), (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \rangle + \langle (R_1, R_2, \dots, R_n), (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \rangle \\ &= \langle P, Q \rangle + \langle R, Q \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P4) \langle P, Q \rangle &= \langle (P_1, P_2, \dots, P_n), (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \rangle = \sum_{t=1}^n \overline{P_t} \cdot Q_t = \sum_{t=1}^n \overline{\overline{Q_t} \cdot P_t} \\ &= \overline{\langle Q, P \rangle} \end{aligned}$$

P5) $\alpha, \beta \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 \langle P\alpha, Q\beta \rangle &= \langle (P_1, P_2, \dots, P_n)\alpha, (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)\beta \rangle \\
 &= \overline{(P_1, P_2, \dots, P_n)\alpha} \cdot (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)\beta \\
 &= \overline{\alpha(P_1, P_2, \dots, P_n)} (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)\beta \\
 &= \overline{\alpha} \langle P, Q \rangle \beta
 \end{aligned}$$

Sonuç olarak $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ kompleks kuaterniyon vektör uzayının iç çarpım uzayı olduğu gösterilmiş olur. Örnek 4.5 de $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ kompleks kuaterniyon vektör uzayının bu iç çarpıma göre tam olduğu gösterildiğinden $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = (\mathbb{H}_{\mathbb{C}})^n$ kompleks kuaterniyon Hilbert uzayıdır.

Önerme 4.2 $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayının herhangi v, w elemanları için $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ Schwartz eşitsizliği gerçekleşir, [12].

İspat

$v, w \in V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ ve $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ elemanlarını alalım ve $\|v - wQ\|$ şeklindeki norm ifadesini düşünelim.

$$0 \leq \|v - wQ\|^2 = \langle v - wQ, v - wQ \rangle = \langle v, v \rangle - \langle v, wQ \rangle - \langle wQ, v \rangle + \langle wQ, wQ \rangle$$

$$0 \leq \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle Q - \overline{Q} \langle w, v \rangle + \overline{Q} \langle w, w \rangle Q$$

$0 \leq \|v\|^2 - \langle v, w \rangle Q - \overline{Q} \langle w, v \rangle + \overline{Q} \|w\|^2 Q$ yazılabilir. Bu eşitsizlik $\forall Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ için geçerli olduğundan

$$Q = \frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} \text{ olarak seçebiliriz. O halde}$$

$$0 \leq \|v\|^2 - \langle v, w \rangle \frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \langle w, v \rangle + \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \|w\|^2 \frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2}$$

$$0 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2}$$

$$|\langle v, w \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \quad v, w \in V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}, Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \text{ eşitsizliği gereklenmiş olur.}$$

Önerme 4.3 $V_{\mathbb{C}}$ kompleks Hilbert uzayı olsun. $V_{\mathbb{C}}$ uzayının kompleks kuaternizasyonlaştırılması olan $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} = \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$ ile tanımlanan $V_{\mathbb{C}}$ nin kuaternizasyonu olan $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayı,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}) \times (\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$$

$$(Q \otimes x, P \otimes y) \rightarrow \langle Q \otimes x, P \otimes y \rangle = \overline{Q} \langle x, y \rangle_{V_{\mathbb{C}}} P \quad (4.20)$$

şeklinde tanımlanan iç çarpım ile birlikte bir Hilbert uzayı olur.

İspat

Aşağıda ilk olarak $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ nin bir iç çarpım uzayı olduğunu yani, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonunun iç çarpım aksiyomlarını gereklediğini gösterelim.

$$P1) \langle Q \otimes x, Q \otimes x \rangle = \overline{Q} \langle x, x \rangle Q = \overline{Q} \|x\|^2 Q = \|Q\|^2 \|x\|^2 \geq 0$$

$$P2) \langle Q \otimes x, Q \otimes x \rangle = \overline{Q} \langle x, x \rangle Q = \overline{Q} \|x\|^2 Q = \|Q\|^2 \|x\|^2 = 0 \text{ ise,}$$

$$\|Q\| = 0 \text{ veya } \|x\| = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\text{Eğer } \|Q\| = 0 \text{ ise } Q = 0 \text{ ve } Q \otimes x = 0 \text{ olur.}$$

$$\text{Eğer } \|x\| = 0 \text{ ise } x = 0 \text{ ve } Q \otimes x = 0 \text{ olur.}$$

$$\text{Tersine } Q \otimes x = 0 \text{ ise } \langle Q \otimes x, Q \otimes x \rangle = 0 \text{ bulunur.}$$

$$P3) \overline{\langle Q \otimes x, P \otimes y \rangle} = \overline{\overline{Q} \langle x, y \rangle P} = \overline{P} \overline{\langle x, y \rangle} Q = \overline{P} \langle y, x \rangle Q = \langle P \otimes y, Q \otimes x \rangle$$

$$P4) \langle Q_1 \otimes x + Q_2 \otimes x, P \otimes y \rangle = \langle (Q_1 + Q_2) \otimes x, P \otimes y \rangle = \overline{(Q_1 + Q_2)} \langle x, y \rangle P$$

$$= \overline{Q_1} \langle x, y \rangle P + \overline{Q_2} \langle x, y \rangle P = \langle Q_1 \otimes x, P \otimes y \rangle + \langle Q_2 \otimes x, P \otimes y \rangle$$

$$\begin{aligned}
P5) \langle (Q \otimes x)a, (P \otimes y)b \rangle &= \langle (Qa \otimes x), (Pb \otimes y) \rangle = \overline{Qa} \langle x, y \rangle Pb = \overline{aQ} \langle x, y \rangle Pb \\
&= \overline{aQ} \langle x, y \rangle Pb = \overline{a} \langle Q \otimes x, P \otimes y \rangle b
\end{aligned}$$

Dolayısıyla bu şekilde tanımlanan iç çarpımın kompleks kuaterniyon değerli iç çarpım olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi tamlığını gösterelim.

$\{Q \otimes x_n\} \subset V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Yani $\forall \varepsilon > 0$ için $\|Q \otimes x_n - Q \otimes x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde $m, n > N$ doğal sayıları vardır. (4.20) de verdiğimiz iç çarpım tanımından,

$$\begin{aligned}
\|Q \otimes (x_n - x_m)\|^2 &= \langle Q \otimes (x_n - x_m), Q \otimes (x_n - x_m) \rangle \\
&= \langle Q \otimes (x_n - x_m), Q \otimes (x_n - x_m) \rangle = \overline{Q} \langle (x_n - x_m), (x_n - x_m) \rangle Q \\
&= \|Q\|^2 \|x_n - x_m\|^2 < \varepsilon^2 \quad \text{yazılır ve bu ifadenin her 2 yanının karekökü}
\end{aligned}$$

alınırsa $\|Q \otimes (x_n - x_m)\| = \|Q\| \|x_n - x_m\| < \varepsilon$ bulunur.

Bu eşitsizlikten de $\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{\|Q\|} = \delta, \delta > 0$ yazılabilir. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi $V_{\mathbb{C}}$

kompleks vektör uzayında Cauchy dizisi olmuş olur. $V_{\mathbb{C}}$ bir Hilbert uzayı olduğundan $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsaktır. Yani $\delta_1 > 0$ sayısı için $\|x_n - x\| < \delta_1$ olacak şekilde $n > N$ doğal sayısı vardır.

Biz $\{Q \otimes x_n\}$ Cauchy dizisinin yakınsaklığını, yani $\|Q \otimes x_n - Q \otimes x\| < \varepsilon$ olacak şekilde $n > N$ doğal sayısının varlığını göstermek istiyoruz.

$$\|Q \otimes x_n - Q \otimes x\| = \|Q \otimes (x_n - x)\| = \|Q\| \cdot \|x_n - x\|$$

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\| \leq \delta_1 + \delta_2 = \frac{\varepsilon}{\|Q\|} \quad \text{seçersek, } \|x_n - x\| < \delta_1 < \frac{\varepsilon}{\|Q\|} \quad \text{dir ve}$$

$\|Q \otimes x_n - Q \otimes x\| = \|Q \otimes (x_n - x)\| = \|Q\| \cdot \|x_n - x\| < \|Q\| \cdot \delta_1 < \|Q\| \frac{\varepsilon}{\|Q\|} = \varepsilon$ olur. Buradan

$\{Q \otimes x_n\}$ Cauchy dizisinin yakınsaklığı görülür. Sonuç olarak $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyon Hilbert uzayıdır.

Önerme 4.4 $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayı, üzerinde tanımlanan iç çarpım ile birlikte bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer $x \in V_{\mathbb{C}}$ vektörünü ve $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ kuaterniyonunu alırsak ve norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ şeklinde tanımlı ise, $\|Q \otimes x\| = \sqrt{\langle Q, Q \rangle \langle x, x \rangle}$ ifadesi $V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayı üzerinde bir norm tanımlar, [12].

İspat

$V_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}$ kompleks kuaterniyon vektör uzayının elemanları $x \in V_{\mathbb{C}}$ ve $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ için $Q \cdot \vec{x}$ şeklinde olduğundan, $\|Q \cdot \vec{x}\| = \|Q\| \cdot \|\vec{x}\|$ norm tanımı vardır. Teorem 4.6 dan $\|Q \otimes \vec{x}\| = \|Q\| \cdot \|\vec{x}\|$ eşitliğini alalım. Eğer $x \in V_{\mathbb{C}}$ vektörü için norm, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ şeklinde tanımlı ise, $\|Q \otimes x\| = \sqrt{\langle Q \otimes x, Q \otimes x \rangle} = \|Q\| \|x\|$ eşitliği vardır. Eğer her iki tarafın karesi alınırsa, $\|Q \otimes x\|^2 = \langle Q \otimes x, Q \otimes x \rangle = \langle Q, Q \rangle \langle x, x \rangle$ bulunur. Bu ifade için (4.18) ile verdiğimiz norm şartlarını gerçeklemek istersek,

$$N1) \|Q \otimes x\|^2 = \langle Q, Q \rangle \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$N2) \|Q \otimes x\|^2 = \langle Q \otimes x, Q \otimes x \rangle = \langle Q, Q \rangle \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow Q \otimes x = 0$$

$$N3) \|\lambda(Q \otimes x)\|^2 = \|\lambda Q \otimes x\|^2 = \langle \lambda Q \otimes x, \lambda Q \otimes x \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle Q \otimes x, Q \otimes x \rangle = |\lambda|^2 \|Q \otimes x\|^2$$

$$\begin{aligned} N4) \|Q \otimes x + P \otimes y\|^2 &= \langle Q \otimes x + P \otimes y, Q \otimes x + P \otimes y \rangle \\ &= \langle Q \otimes x, Q \otimes x \rangle + \langle Q \otimes x, P \otimes y \rangle + \langle P \otimes y, Q \otimes x \rangle + \langle P \otimes y, P \otimes y \rangle \\ &= \|Q \otimes x\|^2 + \|P \otimes y\|^2 + \langle Q \otimes x, P \otimes y \rangle + \overline{\langle Q \otimes x, P \otimes y \rangle} \\ &= \|Q \otimes x\|^2 + \|P \otimes y\|^2 + 2\text{Re}(\langle Q \otimes x, P \otimes y \rangle) \\ &\leq \|Q \otimes x\|^2 + \|P \otimes y\|^2 + 2|\langle Q \otimes x, P \otimes y \rangle| \end{aligned}$$

$$\leq \|Q \otimes x\|^2 + \|P \otimes y\|^2 + 2\|Q \otimes x\|\|P \otimes y\| = (\|Q \otimes x\| + \|P \otimes y\|)^2$$

Her iki tarafın karekökü alınırsa $\|Q \otimes x + P \otimes y\| = \|Q \otimes x\| + \|P \otimes y\|$ bulunur, [12].

BİR REEL VEKTÖR UZAYININ DUALLEŞTİRİLMESİ

Tezimizin bu ilk orijinal bölümünde bir reel vektör uzayını dualleştirerek dual modülleri elde edeceğiz. Bu kısım tezin sonraki bölümü için bir dayanak oluşturmaktadır.

5.1 Direkt Toplamlar ile Dualleştirme

Tanım 5.1 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası olmak üzere $\vec{x} \in V_{\mathbb{R}}$ vektörü ve $d \in \mathbb{D}$ dual sayısı için $d\vec{x} = (a + \varepsilon b) \cdot \vec{x} = a\vec{x} + \varepsilon b\vec{x} = (a\vec{x}, b\vec{x}) = (w_1, w_2)$ şeklindeki elemanlardan oluşan ve $V_{\mathbb{D}} = \{d\vec{x} \mid d\vec{x} = (w_1, w_2), w_i \in V_{\mathbb{R}}, i = 1, 2\}$ ile tanımlanan küme, $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının **dualleştirilmesi** adı verilir.

Teorem 5.1 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının dualleştirilmesi olan $V_{\mathbb{D}}$ kümesi, $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür.

İspat

Toplama

$$\oplus: V_{\mathbb{D}} \times V_{\mathbb{D}} \rightarrow V_{\mathbb{D}}$$

$$(w_1, w_2), (v_1, v_2) \rightarrow (w_1, w_2) \oplus (v_1, v_2) = (w_1 + v_1, w_2 + v_2) \quad (5.1)$$

iç işleme göre (2.1) ile verilen grup aksiyomlarını gerçekleyelim.

G1) $(w_1, w_2) \oplus (v_1, v_2) = (w_1 + v_1, w_2 + v_2) \in V_{\mathbb{D}}$ olduğundan $\oplus$ işlemi kapalılık aksiyomunu gerçekler.

$$G2) (w_1 + v_1, w_2 + v_2) \oplus (y_1, y_2)$$

$$(w_1 + v_1 + y_1, w_2 + v_2 + y_2) = (w_1, w_2) \oplus (v_1 + y_1, v_2 + y_2)$$

olduğundan $\oplus$ işlemi birleşme aksiyomunu gerçekler.

$$G3) (w_1, w_2) \oplus (v_1, v_2) = (w_1, w_2) \text{ iken,}$$

$$(w_1 + v_1, w_2 + v_2) = (w_1, w_2)$$

$$\left. \begin{array}{l} w_1 + v_1 = w_1 \\ w_2 + v_2 = w_2 \end{array} \right\} \text{ eşitliklerinden } (v_1, v_2) = (0, 0) \text{ bulunur.}$$

O halde $\oplus$ işleminin etkisiz elemanı $(0, 0)$ dır.

$$G4) (w_1, w_2) \oplus (v_1, v_2) = (0, 0) \text{ iken,}$$

$$\left. \begin{array}{l} w_1 + v_1 = 0 \\ w_2 + v_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ eşitliklerinden de } \begin{array}{l} v_1 = -w_1 \\ v_2 = -w_2 \end{array} \text{ bulunur.}$$

O halde $\oplus$ işlemine göre $(w_1, w_2) \in V_{\mathbb{D}}$ elemanının tersi $(-w_1, -w_2)$ olur.

$$\forall (w_1, w_2), (v_1, v_2) \in V_{\mathbb{D}} \text{ için}$$

$$(w_1, w_2) \oplus (v_1, v_2) = (w_1 + v_1, w_2 + v_2)$$

$$= (v_1 + w_1, v_2 + w_2) = (v_1, v_2) \oplus (w_1, w_2)$$

olduğundan $V_{\mathbb{D}}$ kümesi $\oplus$ işlemine göre abel gruptur.

Dış işlem

$$\odot : \mathbb{D} \times V_{\mathbb{D}} \rightarrow V_{\mathbb{D}}$$

$$(a + \varepsilon b), (w_1, w_2) \rightarrow (a + \varepsilon b) \odot (w_1, w_2) = (aw_1, bw_1 + aw_2) \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanan dış işlem ile birlikte $V_{\mathbb{D}}$ kümesinin modül aksiyomlarını gerçeklediğini gösterelim.

$$M1) d_1 = a + \varepsilon b, d_2 = c + \varepsilon d \in \mathbb{D} \text{ ve } (w_1, w_2) \in V_{\mathbb{D}} \text{ olmak üzere,}$$

$$(d_1 + d_2) \odot (w_1, w_2) = ((a + c) + \varepsilon(b + d)) \odot (w_1, w_2)$$

(5.2) ile verdiğimiz dış işlem ifadesinden,

$$\begin{aligned} (d_1 + d_2) \odot (w_1, w_2) &= ((a + c)w_1, (a + c)w_2 + (b + d)w_1) \\ &= (aw_1 + cw_1, aw_2 + cw_2 + bw_1 + dw_1) \\ &= (aw_1, bw_1 + aw_2) + (cw_1, dw_1 + cw_2) \\ &= d_1 \odot (w_1, w_2) + d_2 \odot (w_1, w_2) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

M2) $d = a + \varepsilon b \in \mathbb{D}$ ve $(w_1, w_2), (v_1, v_2) \in V_{\mathbb{D}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} d \odot ((w_1, w_2) + (v_1, v_2)) &= d \odot (w_1 + v_1, w_2 + v_2) \\ &= (a + \varepsilon b) \odot (w_1 + v_1, w_2 + v_2) \\ &= (a(w_1 + v_1), a(w_2 + v_2) + b(w_1 + v_1)) \\ &= (aw_1, aw_2 + bw_1) + (av_1, av_2 + bv_1) \\ &= d \odot (w_1, w_2) + d \odot (v_1, v_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M3) d_1 d_2 \odot (w_1, w_2) &= ((a + \varepsilon b) \cdot (c + \varepsilon d)) \odot (w_1, w_2) \\ &= (ac + \varepsilon(ad + bc)) \odot (w_1, w_2) \\ &= (acw_1, acw_2 + (ad + bc)w_1) \\ &= d_1 \odot (d_2 \odot (w_1, w_2)) \end{aligned}$$

$$M4) 1_d \odot (w_1, w_2) = (1 + 0 \cdot \varepsilon) \odot (w_1, w_2) = (1.w_1, 1.w_2 + 0.w_1) = (w_1, w_2)$$

aksiyomları gerçekleştiğinden, $V_{\mathbb{D}}$ kümesi $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde bir dual modüldür.

Not 5.1 Bir $(w_1, w_2) \in V_{\mathbb{D}}$ elemanının ε ile çarpımı

$$\varepsilon(w_1, w_2) = (0, w_1) \tag{5.3}$$

olmak üzere,

$(w_1, w_2) = (w_1, 0) + (0, w_2)$ eşitliğinden ve (5.3) ile tanımladığımız çarpım ifadesinden,

$$(w_1, w_2) = (w_1, 0) + \varepsilon(w_2, 0)$$

$$(w_1, w_2) = w_1 + \varepsilon w_2$$

yazılabildiğinden, $V_{\mathbb{D}}$ dual modülünü

$$V_{\mathbb{D}} = V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}} \text{ veya } V_{\mathbb{D}} = V_{\mathbb{R}} + \varepsilon V_{\mathbb{R}} \quad (5.4)$$

olarak da ifade edebiliriz.

Tanım 5.2 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının dualleştirilmesi $V_{\mathbb{D}}$ olsun.

$V_{\mathbb{D}}$ dual modülünün $V_{\mathbb{R}} \oplus \{0\}$ veya $\{0\} \oplus V_{\mathbb{R}}$ reel alt uzaylarını alırsak,

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{D}} : V_{\mathbb{R}} &\rightarrow V_{\mathbb{D}} \\ w &\rightarrow (w, 0) \end{aligned} \quad (5.5)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının $V_{\mathbb{D}}$ modülü içine **gömülmesi** denir.

Teorem 5.1 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve dualleştirilmesi de $V_{\mathbb{D}}$ olsun. Eğer $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının bir $\mathbb{R}$ bazı $1 \leq t \leq n$ olmak üzere $\{e_t\}$ ise, $\{(e_t, 0)\}$ sistemi de $V_{\mathbb{D}}$ dual modülünün bir $\mathbb{D}$ bazıdır.

İspat

Eğer $V_{\mathbb{R}} = 0$ ise, (5.4) ile verdiğimiz $V_{\mathbb{D}} = V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}}$ ifadesinden $V_{\mathbb{D}} = 0$ olduğu açıktır. O halde $V_{\mathbb{R}} \neq 0$ ve $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının bir $\mathbb{R}$ bazını $\{e_t\}$ olarak alalım.

Germe Aksiyomu

$V_{\mathbb{D}}$ dual modülünün (w_1, w_2) elemanındaki w_1 ve w_2 bileşenleri e_t lerin $\mathbb{R}$ lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Yani,

$$w_1 = \sum_{t=1}^n a_t e_t \text{ ve } w_2 = \sum_{t=1}^n b_t e_t \quad (5.6)$$

biçiminde $\mathbb{R}$ lineer kombinasyonları mevcuttur.

$(w_1, w_2) = (w_1, 0) + (0, w_2)$ eşitliğinde (5.6) ile verdiğimiz kombinasyonlar yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} (w_1, w_2) &= \left(\sum_{t=1}^n a_t e_t, 0 \right) + \left(0, \sum_{t=1}^n b_t e_t \right) = \left(\sum_{t=1}^n a_t e_t, 0 \right) + \varepsilon \left(\sum_{t=1}^n b_t e_t, 0 \right) \\ &= \sum_{t=1}^n a_t (e_t, 0) + \varepsilon \sum_{t=1}^n b_t (e_t, 0) = \sum_{t=1}^n (a_t + \varepsilon b_t) (e_t, 0) \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Bu eşitlikten $\{(e_t, 0)\}$ ların $V_{\mathbb{D}}$ dual modülünün bir $\mathbb{D}$ lineer geren kümesi olduğu görülür.

Lineer Bağımsızlık

$V_{\mathbb{D}}$ dual modülünün bir $\mathbb{D}$ lineer geren kümesi olan $\{(e_t, 0)\}$ ların lineer bağımsız dolayısıyla baz olduklarını göstermek için, $\{(e_t, 0)\}$ ların $\mathbb{D}$ lineer kombinasyonundaki bileşenlerin sıfır olması gerekir.

$$(a_1 + \varepsilon b_1)(e_1, 0) + (a_2 + \varepsilon b_2)(e_2, 0) + \dots + (a_n + \varepsilon b_n)(e_n, 0) = (0, 0)$$

$$(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n, 0) + \varepsilon (b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n, 0) = (0, 0)$$

$$(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n, 0) + (0, b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n) = (0, 0)$$

$$(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n, b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n) = (0, 0) \text{ eşitliği bulunur. Son ifadede}$$

bileşenlerin eşitliğinden, $\sum_{t=1}^n a_t e_t = 0$ ve $\sum_{t=1}^n b_t e_t = 0$ elde edilir.

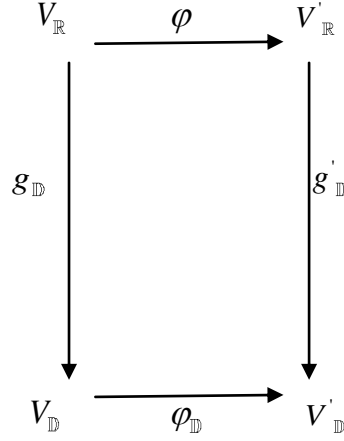
Sonuç olarak $\{e_t\}$ ler $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bağımsız olduğundan, tüm a_t ve b_t bileşenleri sıfırdır. Yani $\forall t = 1, 2, \dots, n$ değeri için $a_t + \varepsilon b_t = 0$ olur.

Önerme 5.1 $V_{\mathbb{R}}$ ve $V'_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayları ve dualleştirilmeleri sırasıyla $V_{\mathbb{D}}$ ve $V'_{\mathbb{D}}$ olsun. Eğer $\varphi: V_{\mathbb{R}} \rightarrow V'_{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$ lineer dönüşüm ise, bu dönüşümü

$$\varphi_{\mathbb{D}}: V_{\mathbb{D}} \rightarrow V'_{\mathbb{D}}$$

$$(w_1, w_2) \rightarrow \varphi_{\mathbb{D}}(w_1, w_2) = (\varphi(w_1), \varphi(w_2)) \quad (5.7)$$

şeklinde tanımlanan $V_{\mathbb{D}}$ ve $V'_{\mathbb{D}}$ dual modüllerinin $\mathbb{D}$ lineer dönüşümüne genişletebiliriz ve $g_{\mathbb{D}}, g'_{\mathbb{D}}$ (5.5) ile tanımladığımız gibi gömmeler ise aşağıda verilen diyagram değişmelidir.



şekil 5.1 Dual dönüşümlerin diyagramı

İspat

Eğer (5.7) deki gibi tanımlanan bir $\varphi_{\mathbb{D}} : V_{\mathbb{D}} \rightarrow V'_{\mathbb{D}}$ fonksiyonu var ise, bu fonksiyonun $\mathbb{D}$ lineer olduğunu gösterelim.

L1) $(w_1, w_2), (v_1, v_2) \in V_{\mathbb{D}}$ olmak üzere,

$$\varphi_{\mathbb{D}}((w_1, w_2) \oplus (v_1, v_2)) = \varphi_{\mathbb{D}}(w_1 + v_1, w_2 + v_2) = (\varphi(w_1 + v_1), \varphi(w_2 + v_2))$$

yazabiliriz. Buradaki φ dönüşümü $\mathbb{R}$ lineer olduğundan,

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\mathbb{D}}((w_1, w_2) \oplus (v_1, v_2)) &= (\varphi(w_1) + \varphi(v_1), \varphi(w_2) + \varphi(v_2)) \\
 &= (\varphi(w_1), \varphi(w_2)) + (\varphi(v_1), \varphi(v_2)) \\
 &= \varphi_{\mathbb{D}}(w_1, w_2) \oplus \varphi_{\mathbb{D}}(v_1, v_2) \text{ bulunur.}
 \end{aligned}$$

L2) $d = a + \varepsilon b \in \mathbb{D}$ ve $(w_1, w_2) \in V_{\mathbb{D}}$ olmak üzere,

$$\varphi_{\mathbb{D}}(d \odot (w_1, w_2)) = \varphi_{\mathbb{D}}((a + \varepsilon b) \odot (w_1, w_2))$$

(5.2) ile verilen dış işlem tanımından,

$\varphi_{\mathbb{D}}(d \odot (w_1, w_2)) = \varphi_{\mathbb{D}}((aw_1, aw_2 + bw_1))$ yazılır ve $\varphi_{\mathbb{D}}$ dönüşümünün (5.7) ile verilen tanımından

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbb{D}}(d \odot (w_1, w_2)) &= (\varphi(aw_1), \varphi(aw_2 + bw_1)) \\ &= (a\varphi(w_1), a\varphi(w_2) + b\varphi(w_1)) \\ &= a(\varphi(w_1), \varphi(w_2)) + b(0, \varphi(w_1)) \\ &= (a + \varepsilon b) \odot (\varphi(w_1), \varphi(w_2)) = d \odot \varphi_{\mathbb{D}}(w_1, w_2) \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Dolayısıyla $\varphi_{\mathbb{D}}$ dönüşümünün $\mathbb{D}$ lineer olduğu gösterilmiş olur. Burada $\varphi_{\mathbb{D}}$ dönüşümüne φ nin **dualleştirilmesi** adı verilir.

Teorem 5.2 $V_{\mathbb{R}}$ ve $V'_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayları ve bunların dualleştirilmeleri sırasıyla $V_{\mathbb{D}}$ ve $V'_{\mathbb{D}}$ olsun. Eğer $\varphi: V_{\mathbb{R}} \rightarrow V'_{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$ lineer dönüşüm ve dualleştirilmesi de

$$\varphi_{\mathbb{D}}: V_{\mathbb{D}} \rightarrow V'_{\mathbb{D}}$$

$$(w_1, w_2) \rightarrow \varphi_{\mathbb{D}}(w_1, w_2) = (\varphi(w_1), \varphi(w_2))$$

şeklinde tanımlı $\mathbb{D}$ -lineer dönüşüm olmak üzere, $\zeta ek \varphi_{\mathbb{D}} = (\zeta ek \varphi)_{\mathbb{D}}$ ve $\varphi_{\mathbb{D}}(V_{\mathbb{D}}) = (\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{D}}$ eşitlikleri vardır.

İspat

$\varphi: V_{\mathbb{R}} \rightarrow V'_{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$ lineer dönüşümünün çekirdeğini $\zeta ek \varphi = \{x \in V_{\mathbb{R}} \mid \varphi(x) = 0_{V'_{\mathbb{R}}}\} \subset V_{\mathbb{R}}$ ve $\varphi_{\mathbb{D}}: V_{\mathbb{D}} \rightarrow V'_{\mathbb{D}}$ $\mathbb{D}$ lineer dönüşümünün de $\zeta ek \varphi_{\mathbb{D}} = \{x \in V_{\mathbb{D}} \mid \varphi_{\mathbb{D}}(x) = 0_{V'_{\mathbb{D}}}\} \subset V_{\mathbb{D}}$ şeklinde verelim. Burada $(\zeta ek \varphi)_{\mathbb{D}} = \zeta ek \varphi_{\mathbb{D}}$ eşitliğini göstermek için aldığımız $\forall x \in (\zeta ek \varphi)_{\mathbb{D}} \subset V_{\mathbb{D}}$ elemanını için $x = (x_1, x_2)$ şeklinde olmak üzere ilk olarak $\varphi_{\mathbb{D}}(x) = 0_{V'_{\mathbb{D}}}$ olduğunu gösterelim. O halde $\varphi_{\mathbb{D}}(x) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = (0_{V'_{\mathbb{R}}}, 0_{V'_{\mathbb{R}}}) = 0_{V'_{\mathbb{D}}}$ olduğundan $\varphi_{\mathbb{D}}(x) = 0_{V'_{\mathbb{D}}}$ elde edilir. Dolayısıyla $x \in \zeta ek \varphi_{\mathbb{D}}$ olup

$$(\zeta ek \varphi)_{\mathbb{D}} \subset \zeta ek \varphi_{\mathbb{D}} \quad (5.8)$$

elde edilir.

Diğer taraftan $\forall x \in \text{çek}\varphi_{\mathbb{D}} \subset V_{\mathbb{D}}$ elemanı için $x = (x_1, x_2)$ şeklinde olup $x_1, x_2 \in V_{\mathbb{R}}$ dir.

$$\varphi_{\mathbb{D}}(x) = \varphi_{\mathbb{D}}(x_1, x_2) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = (0_{V'_{\mathbb{D}}}, 0_{V'_{\mathbb{D}}}) \quad \text{olduğundan}$$

$$\varphi(x_1) = 0_{V'_{\mathbb{R}}}, \varphi(x_2) = 0_{V'_{\mathbb{R}}} \quad \text{elde edilir. Buradan } x_1 \in \text{çek}\varphi, x_2 \in \text{çek}\varphi, \text{ yani } x \in (\text{çek}\varphi)_{\mathbb{D}}$$

olmaktadır. Dolayısıyla

$$\text{çek}\varphi_{\mathbb{D}} \subset (\text{çek}\varphi)_{\mathbb{D}} \quad (5.9)$$

yazılabilir.

Sonuç olarak (5.8) ve (5.9) ifadeleri göz önüne alınırsa $(\text{çek}\varphi)_{\mathbb{D}} = \text{çek}\varphi_{\mathbb{D}}$ eşitliği gösterilmiş olur.

Benzer şekilde, $\varphi_{\mathbb{D}}(V_{\mathbb{D}}) = (\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{D}}$ eşitliğinin varlığını göstermek istersek,

$\forall y \in \varphi_{\mathbb{D}}(V_{\mathbb{D}}) = V'_{\mathbb{D}}$ elemanını aldığımızda $\varphi_{\mathbb{D}}(x) = y$ olacak şekilde $x \in V_{\mathbb{D}}$ vardır.

$y = (y_1, y_2)$ şeklinde olduğundan $\varphi(x_1) = y_1$ ve $\varphi(x_2) = y_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in V_{\mathbb{R}}$

vardır. O halde $y = (y_1, y_2) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \in (\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{D}}$ olur. Dolayısıyla

$$\varphi_{\mathbb{D}}(V_{\mathbb{D}}) \subset (\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{D}} \text{ yazılır. Tersine } y \in (\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{D}} \text{ elemanını aldığımızda } y = (y_1, y_2)$$

şeklinde olduğundan $\varphi(x_1) = y_1$ ve $\varphi(x_2) = y_2$ olacak şekilde $y_1, y_2 \in V'_{\mathbb{R}}$ olur.

Dolayısıyla $y = (y_1, y_2) \in V'_{\mathbb{D}} = \varphi_{\mathbb{D}}(V_{\mathbb{D}})$ olur. Buradan da $(\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{D}} \subset \varphi_{\mathbb{D}}(V_{\mathbb{D}})$ yazılır ve

istenilen eşitlik gösterilmiş olur.

Sonuç 5.1 $\varphi: V_{\mathbb{R}} \rightarrow V'_{\mathbb{R}}$ bir $\mathbb{R}$ lineer dönüşüm ve $\varphi_{\mathbb{D}}: V_{\mathbb{D}} \rightarrow V'_{\mathbb{D}}$ (5.7) deki gibi tanımlı $\mathbb{D}$ -lineer dönüşüm olmak üzere, φ bir izomorfizma ise $\varphi_{\mathbb{D}}$ dönüşümü de bir izomorfizmadır.

İspat

Varsayalım ki $\varphi: V_{\mathbb{R}} \rightarrow V'_{\mathbb{R}}$ lineer dönüşümü bir izomorfizma olsun. Bu durumda φ

dönüşümü bir $\mathbb{R}$ lineer dönüşüm iken $\varphi_{\mathbb{D}}$ nin de $\mathbb{D}$ lineer olduğunu biliyoruz. $\varphi_{\mathbb{D}}$

dönüşümünün 1-1 liğini gösterirken $\forall x = (x_1, x_2) \in V_{\mathbb{D}}$ için $\varphi_{\mathbb{D}}(x) = 0$ iken $x = 0$

olduğunu göstermeliyiz. $\varphi_{\mathbb{D}}(x_1, x_2) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = (0_{V'_{\mathbb{D}}}, 0_{V'_{\mathbb{D}}})$ olduğundan $\varphi(x_1) = 0_{V'_{\mathbb{D}}}$, $\varphi(x_2) = 0_{V'_{\mathbb{D}}}$ dır. φ dönüşümü izomorfizma olduğundan 1-1 ve örten olup, $\varphi(x_1) = 0_{V'_{\mathbb{D}}}$, $\varphi(x_2) = 0_{V'_{\mathbb{D}}}$ için $x_1 = x_2 = 0$ dır. Yani $x = (x_1, x_2) = (0, 0)$ elde edilir ve $\varphi_{\mathbb{D}}$ $\mathbb{D}$ lineer dönüşümü 1-1 dir. $\varphi_{\mathbb{D}}$ dönüşümünün örtenliğini göstermek için $\forall y \in V'_{\mathbb{D}}$ için $\varphi_{\mathbb{D}}(x) = y$ olacak şekilde $\exists x \in V_{\mathbb{D}}$ olduğunu gösterelim. $\forall y \in V'_{\mathbb{D}}$ için $\varphi_{\mathbb{D}}(x_1, x_2) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = (y_1, y_2) = y$ olur. Buradaki eşitlikten $\varphi(x_1) = y_1$ ve $\varphi(x_2) = y_2$ bulunur. φ dönüşümü bir izomorfizma olduğundan $\forall y_1, y_2 \in V'_{\mathbb{D}}$ için $\varphi(x_1) = y_1, \varphi(x_2) = y_2$ olacak şekilde $\exists x_1, x_2 \in V_{\mathbb{R}}$ vardır. O halde $\varphi_{\mathbb{D}}$ dönüşümünün de örten, sonuç olarak izomorfizma olduğu gösterilmiş olur.

5.2 Tensör Çarpımı ile Dualleştirme

Tanım 5.3 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası olmak üzere, $\vec{x} \in V_{\mathbb{R}}$ vektörü ve $d \in \mathbb{D}$ dual sayısı için $d \otimes \vec{x} = (a + \varepsilon b) \otimes \vec{x} = a \otimes \vec{x} + \varepsilon b \otimes \vec{x} = 1 \otimes w_1 + \varepsilon \otimes w_2$ elemanlarından oluşan ve $\mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = \{d \otimes x \mid d \otimes x = 1 \otimes w_1 + \varepsilon \otimes w_2, w_i \in V_{\mathbb{R}}\}$ ile tanımlanan kümeye, $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının **tensör çarpım ile dualleştirilmesi** denir.

Tanım 5.4 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının dualleştirilmesi de $\mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ olmak üzere,

$$G_{\mathbb{D}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$$

$$w \rightarrow 1_{\mathbb{D}} \otimes w \quad (5.10)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının $\mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ içine **gömülmesi** denir.

Teorem 5.3 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası olsun. $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının dualleştirilmesi olan $\mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ kümesi $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür.

İspat

Toplama

$$\oplus : (\mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}) \times (\mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}) \rightarrow (\mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}})$$

$$((1_{\mathbb{D}} \otimes x), (1_{\mathbb{D}} \otimes y)) \rightarrow 1_{\mathbb{D}} \otimes (x + y)$$

şeklinde tanımlanan $\oplus$ işlemine göre grup olduğunu gösterelim.

G1) $1_{\mathbb{D}} \otimes (x + y) \in \mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ olduğundan kapalılık aksiyomu gerçekleşir.

$$\begin{aligned} G2) (1_{\mathbb{D}} \otimes (x + y)) \oplus (1_{\mathbb{D}} \otimes z) &= 1_{\mathbb{D}} \otimes (x + y + z) \\ &= (1_{\mathbb{D}} \otimes x) \oplus (1_{\mathbb{D}} \otimes (y + z)) \end{aligned}$$

olduğundan birleşme aksiyomu gerçekleşir.

G3) $(1_{\mathbb{D}} \otimes x) \oplus (1_{\mathbb{D}} \otimes y) = (1_{\mathbb{D}} \otimes (x + y)) = (1_{\mathbb{D}} \otimes x)$ eşitliğinden,

$$(1_{\mathbb{D}} \otimes (x + y)) - (1_{\mathbb{D}} \otimes x) = 0$$

$$1_{\mathbb{D}} \otimes (x + y - x) = 0 \Rightarrow y = 0$$

O halde $\oplus$ işleminin etkisiz elemanı $(1_{\mathbb{D}} \otimes 0)$ dır.

$$G4) (1_{\mathbb{D}} \otimes x) \oplus (1_{\mathbb{D}} \otimes y) = (1_{\mathbb{D}} \otimes 0)$$

$$(1_{\mathbb{D}} \otimes (x + y)) = (1_{\mathbb{D}} \otimes 0)$$

$$x + y = 0 \Rightarrow y = -x$$

dolayısıyla $(1_{\mathbb{D}} \otimes x)$ elemanının tersi $(1_{\mathbb{D}} \otimes -x)$ olarak bulunur.

Böylece $\oplus$ işleminin (2.1) ile verdiğimiz grup aksiyomlarını gerçeklediği gösterilmiş olur.

Dış işlem

$$\odot : \mathbb{D} \times (\mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}) \rightarrow (\mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}})$$

$$d, (1_{\mathbb{D}} \otimes x) \rightarrow d.1_{\mathbb{D}} \otimes x$$

şeklinde tanımlanan dış işlem ile birlikte modül aksiyomlarını gerçekleyelim.

$$\begin{aligned}
M1) \quad d \odot ((1_{\mathbb{D}} \otimes x) + (1_{\mathbb{D}} \otimes y)) &= d \odot (1_{\mathbb{D}} \otimes (x + y)) = d \cdot 1_{\mathbb{D}} \otimes (x + y) \\
&= d \odot (1_{\mathbb{D}} \otimes x) + d \odot (1_{\mathbb{D}} \otimes y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M2) \quad (d_1 + d_2) \odot (1_{\mathbb{D}} \otimes x) &= (d_1 + d_2) \cdot 1_{\mathbb{D}} \otimes x = d_1 \cdot 1_{\mathbb{D}} \otimes x + d_2 \cdot 1_{\mathbb{D}} \otimes x \\
&= d_1 \odot (1_{\mathbb{D}} \otimes x) + d_2 \odot (1_{\mathbb{D}} \otimes x)
\end{aligned}$$

$$M3) \quad d_1 \cdot d_2 \odot (1_{\mathbb{D}} \otimes x) = d_1 \cdot d_2 \odot (1_{\mathbb{D}} \otimes x) = d_1 \cdot d_2 \cdot 1_{\mathbb{D}} \otimes x = d_1 \odot (d_2 \odot (1_{\mathbb{D}} \otimes x))$$

$$M4) \quad 1_{\mathbb{D}} \odot (1_{\mathbb{D}} \otimes x) = (1_{\mathbb{D}} \cdot 1_{\mathbb{D}} \otimes x) = (1_{\mathbb{D}} \otimes x)$$

olduğundan $(\mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}})$ kümesi $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde modüldür. Böylece şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.2 $\{(\mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}), \oplus, \mathbb{D}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir $\mathbb{D}$ -modüldür.

Teorem 5.4 $V_{\mathbb{R}}$ bir reel vektör uzayı ve dualleştirilmeleri de $V_{\mathbb{D}}$ ve $\mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
f_w : V_{\mathbb{D}} &\rightarrow \mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} \\
(w_1, w_2) &\rightarrow f_w(w_1, w_2) = 1 \otimes w_1 + \varepsilon \otimes w_2
\end{aligned} \tag{5.11}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{D}$ lineer izomorfizma vardır ve aşağıdaki diyagram değişmelidir.

İspat

Yukarıdaki önermede (5.11) eşitliği ile verilen f_w dönüşümünün $\mathbb{D}$ lineer olduğunu gösterelim.

L1) $(w_1, w_2), (v_1, v_2) \in V_{\mathbb{D}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
f_w((w_1, w_2) \oplus (v_1, v_2)) &= f_w(w_1 + v_1, w_2 + v_2) \\
&= 1 \otimes (w_1 + v_1) + \varepsilon \otimes (w_2 + v_2) \\
&= 1 \otimes w_1 + 1 \otimes v_1 + \varepsilon \otimes w_2 + \varepsilon \otimes v_2 \\
&= f_w(w_1, w_2) \oplus f_w(v_1, v_2)
\end{aligned}$$

L2) $d = a + \varepsilon b \in \mathbb{D}$ ve $(w_1, w_2) \in V_{\mathbb{D}}$ olmak üzere,

$$f_w(d \odot (w_1, w_2)) = f_w((a + \varepsilon b) \odot (w_1, w_2))$$

(5.2) ile verilen dış işlem ifadesinden,

$f_w(d \odot (w_1, w_2)) = f_w(aw_1, bw_1 + aw_2)$ yazılır ve (5.11) ile verilen f_w dönüşümünün tanımından da,

$$f_w(d \odot (w_1, w_2)) = 1 \otimes (aw_1) + \varepsilon \otimes (bw_1 + aw_2)$$

$$f_w(d \odot (w_1, w_2)) = 1 \otimes aw_1 + \varepsilon \otimes bw_1 + \varepsilon \otimes aw_2$$

$$= a \otimes w_1 + \varepsilon b \otimes w_1 + \varepsilon a \otimes w_2$$

$$= (a + \varepsilon b) \odot (1 \otimes w_1 + \varepsilon \otimes w_2) = (a + \varepsilon b) \odot f_w(w_1, w_2)$$

$$= d \odot f_w(w_1, w_2) \text{ elde edilir.}$$

Böylece f_w fonksiyonunun $\mathbb{D}$ lineer olduğu gösterilmiş olur. f_w fonksiyonunun izomorfizma olduğunu göstermek için,

$$g_w : \mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{D}}$$

$$(1 \otimes w) \rightarrow (w, 0)$$

$$d \otimes w = d(1 \otimes w) \rightarrow d(w, 0)$$

şeklindeki ters fonksiyonunu tanımlayalım.

Bu şekilde tanımlanan g_w fonksiyonunun $\mathbb{D}$ lineerliğini göstermek için $t = d \otimes w \in \mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ ve $d' \in \mathbb{D}$ olmak üzere, $g_w(d' \odot t) = d' \odot g_w(t)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$g_w(d' \odot t) = g_w(d' \odot (d \otimes w)) = g_w(d' d \otimes w) = g_w(d' d(1 \otimes w))$$

$$= d' d(w, 0) = d' \odot d(w, 0) = d' \odot g_w(d \otimes w) = d' \odot g_w(t)$$

Son olarak f_w ile g_w fonksiyonlarının birbirlerinin tersi olduğunu gösterelim.

$$g_w(f_w(w_1, w_2)) = g_w(1 \otimes w_1 + \varepsilon \otimes w_2)$$

$g_w(f_w(w_1, w_2)) = g_w(1 \otimes w_1 + \varepsilon(1 \otimes w_2))$ yazabiliriz ve g_w fonksiyonunun $\mathbb{D}$ lineer olduğunu gösterdiğimizden,

$$= g_w(1 \otimes w_1) + \varepsilon g_w(1 \otimes w_2)$$

$$= (w_1, 0) + \varepsilon(w_2, 0) = (w_1, w_2)$$

$f_w(g_w(d \otimes w)) = f_w(d(w, 0)) = f_w(dw, 0) = 1 \otimes dw + \varepsilon \otimes 0 = d \otimes w$ bulunur. Böylece

$f_w \circ g_w = I$ elde edilir. O halde f_w fonksiyonu terslenebilir bir fonksiyon olup 1-1 ve örtendir. Dolayısıyla f_w fonksiyonu bir izomorfizmadır ve $V_{\mathbb{D}} \cong \mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ dir.

DUAL KUATERNİYON ÜZERİNDE ANALİZ YAPISI

Tezimizin bu son orijinal kısmında bir reel vektör uzayını iki farklı şekilde dual kuaternizasyonlaştırarak dual kuaterniyon modüllerini elde edeceğiz. Daha sonra elde ettiğimiz iki kuaternizasyon arasında bir izomorfizma tanımı vererek, dual kuaterniyon modülünün norm, Banach ve Hilbert yapılarını inceleyeceğiz.

6.1 Dual Simplektik Geometri**Tanım 6.1**

$\mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonlar kümesi olmak üzere, $(\mathbb{H}_D)^n = \left\{ \vec{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \mid Q_t \in \mathbb{H}_D, 1 \leq t \leq n \right\}$ kümesini tanımlayalım. $(\mathbb{H}_D)^n$ in elemanlarına birer vektör ve $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ dual kuaterniyonlarına da bu vektörün bileşenleri adı verilir.

Teorem 6.1 $(\mathbb{H}_D)^n$ kümesi $\mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonlar halkası üzerinde dual kuaterniyon modül olur.

İspat

$(\mathbb{H}_D)^n$ kümesinin dual kuaterniyon modül olduğunu göstermek için ilk olarak abel grup işlemi tanımlayalım.

Toplama

$$\oplus : (\mathbb{H}_D)^n \times (\mathbb{H}_D)^n \rightarrow \mathbb{H}_D$$

$$(\vec{Q}, \vec{P}) \rightarrow \vec{Q} \oplus \vec{P}$$

iç işlemi $\forall \vec{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ ve $\forall \vec{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ elemanları için

$$\vec{Q} \oplus \vec{P} = (Q_1 + P_1, Q_2 + P_2, \dots, Q_n + P_n) \text{ şeklinde tanımlanırsa } ((\mathbb{H}_D)^n, \oplus) \text{ ikilisi abel grup}$$

olur.

Grup aksiyomlarını gerçeklemek istersek,

$$G1) \vec{Q} = (Q_1, \dots, Q_n) \text{ ve } \vec{P} = (P_1, \dots, P_n) \in (\mathbb{H}_D)^n \text{ olmak üzere,}$$

$$\vec{Q} \oplus \vec{P} = (Q_1 + P_1, Q_2 + P_2, \dots, Q_n + P_n) \in (\mathbb{H}_D)^n \text{ olduğundan } \oplus \text{ işlemi kapalılık aksiyomunu gerçekler.}$$

$$G2) \vec{Q} = (Q_1, \dots, Q_n) \text{ ve } \vec{P} = (P_1, \dots, P_n), \vec{R} = (R_1, \dots, R_n) \in (\mathbb{H}_D)^n \text{ olmak üzere,}$$

$$\begin{aligned} (\vec{Q} \oplus \vec{P}) \oplus \vec{R} &= (Q_1 + P_1, Q_2 + P_2, \dots, Q_n + P_n) \oplus (R_1, \dots, R_n) \\ &= (Q_1 + P_1 + R_1, Q_2 + P_2 + R_2, \dots, Q_n + P_n + R_n) \\ &= (Q_n, Q_n, \dots, Q_n) \oplus (P_1 + R_1, P_2 + R_2, \dots, P_n + R_n) = \vec{Q} \oplus (\vec{P} \oplus \vec{R}) \end{aligned}$$

eşitliğinden birleşme aksiyomu gerçekleşir.

$$G3) \vec{Q} \oplus \vec{P} = \vec{Q} \text{ yani } (Q_1, \dots, Q_n) \oplus (P_1, \dots, P_n) = (Q_1, \dots, Q_n) \text{ eşitliği var iken,}$$

$$(Q_1 + P_1, Q_2 + P_2, \dots, Q_n + P_n) = (Q_1, \dots, Q_n)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 + P_1 = Q_1 \\ Q_2 + P_2 = Q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_n + P_n = Q_n \end{array} \right\} \text{ eşitliklerinden } P_1 = \dots = P_n = 0 \text{ bulunur.}$$

Dolayısıyla $\oplus$ işleminin etkisiz elemanı $(0,0,...,0)$ dır.

G4) $(Q_1,...,Q_n) \oplus (P_1,...,P_n) = (0,0,...,0)$ eşitliği var iken

$$(Q_1 + P_1, Q_2 + P_2, ..., Q_n + P_n) = (0,0,...,0)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 + P_1 = 0 \\ Q_2 + P_2 = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_n + P_n = 0 \end{array} \right\} \text{ eşitliklerinden } P_1 = -Q_1, P_2 = -Q_2, ..., P_n = -Q_n \text{ bulunur.}$$

Dolayısıyla $\bar{Q} = (Q_1, ..., Q_n)$ elemanının $\oplus$ işlemine göre tersi $(-Q_1, -Q_2, ..., -Q_n)$ dir.

Dış işlem

$$\odot : \mathbb{H}_D \times (\mathbb{H}_D)^n \rightarrow (\mathbb{H}_D)^n$$

$$\alpha, \bar{Q} \rightarrow \alpha \odot \bar{Q} = (\alpha Q_1, \alpha Q_2, ..., \alpha Q_n)$$

şeklinde tanımlanan dış işlemin $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2 \in (\mathbb{H}_D)^n$ vektörleri ve $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonları için aşağıdaki özellikleri sağladığı açıktır.

$$M1) \alpha \odot (\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2) = \alpha \odot \bar{Q}_1 + \alpha \odot \bar{Q}_2$$

$$M2) (\alpha_1 + \alpha_2) \odot \bar{Q} = \alpha_1 \odot \bar{Q} + \alpha_2 \odot \bar{Q}$$

$$M3) (\alpha_1 \alpha_2) \odot \bar{Q} = \alpha_1 \odot (\alpha_2 \odot \bar{Q})$$

$$M4) 1 \otimes \bar{Q} = \bar{Q}$$

Sonuç 6.1 Böylece $\{(\mathbb{H}_D)^n, \oplus, \mathbb{H}_D, +, \cdot, \odot\}$ sistemi $\mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonlar halkası üzerinde bir dual kuaterniyon modül olur.

Tanım 6.2 $\langle \rangle : (\mathbb{H}_D)^n \times (\mathbb{H}_D)^n \rightarrow (\mathbb{H}_D)^n$

$$(\bar{P}, \bar{Q}) \rightarrow \langle \bar{P}, \bar{Q} \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i Q_i$$

şeklinde tanımlanan işlem eğer aşağıdaki aksiyomlarını sağlıyor ise, $(\mathbb{H}_D)^n$ üzerinde **dual simplektik çarpım** adını alır.

$$P1) \langle \overrightarrow{Q_1} + \overrightarrow{Q_2}, \overrightarrow{P} \rangle = \langle \overrightarrow{Q_1}, \overrightarrow{P} \rangle + \langle \overrightarrow{Q_2}, \overrightarrow{P} \rangle$$

$$P2) \langle \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} \rangle = \langle \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{P_1} \rangle + \langle \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{P_2} \rangle$$

$$P3) \langle \overrightarrow{Q_1}, \overrightarrow{Q_2} \alpha \rangle = \langle \overrightarrow{Q_1}, \overrightarrow{Q_2} \rangle \alpha$$

$$P4) \langle \overrightarrow{Q_1} \alpha, \overrightarrow{Q_2} \rangle = \alpha \langle \overrightarrow{Q_1}, \overrightarrow{Q_2} \rangle$$

Bu tanıma göre $\langle \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{Q} \rangle = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{Q_i} Q_i = \sum_{i=1}^n \|Q_i\|^2$ olmaktadır.

6.2 Dual Kuaternizasyonlaştırma

6.2.1 Direkt Toplamlar ile Kuaternizasyonlaştırma

Tanım 6.3 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve $\mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonlar kümesi olmak üzere

$Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonu ve $\vec{x} \in V_{\mathbb{R}}$ vektörü için,

$$Q \cdot \vec{x} = (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \vec{x} = (q_0 \vec{x}, q_1 \vec{x}, q_2 \vec{x}, q_3 \vec{x}) = (w_1, w_2, w_3, w_4) \quad \text{şeklindeki}$$

elemanlardan oluşan ve $V_{\mathbb{H}_D} = \{Q \cdot \vec{x} \mid Q \cdot \vec{x} = (w_1, w_2, w_3, w_4), w_i \in V_{\mathbb{R}}, i = 1, 2, 3, 4\}$ ile

tanımlanan kümeye $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının **dual kuaternizasyonlaştırılması** adı verilir.

Teorem 6.2 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve bu vektör uzayının dual kuaterniyonlaştırılması $V_{\mathbb{H}_D}$

olsun. Bu durumda $V_{\mathbb{H}_D}$ kümesi $\mathbb{H}_D$ dual kuaterniyon halkası üzerinde bir modüldür.

Bu modüle **dual kuaterniyon modül** adı verilir.

İspat

$V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaternizasyonlaştırmasının modül olduğunu göstermek için ilk olarak abel grup işlemi tanımlayalım.

Toplama

$$\oplus: V_{\mathbb{H}_D} \times V_{\mathbb{H}_D} \rightarrow V_{\mathbb{H}_D}$$

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus (v_1, v_2, v_3, v_4) = (w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4) \quad (6.1)$$

$V_{\mathbb{H}_D}$ kümesinin $\oplus$ işlemine göre grup aksiyomlarını gerçeklediğini gösterelim.

G1) $(w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus (v_1, v_2, v_3, v_4) = (w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4) \in V_{\mathbb{H}_D}$ olduğundan, kapalılık aksiyomu gerçekleşir.

G2) $(w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4) \oplus (y_1, y_2, y_3, y_4)$
 $= (w_1 + v_1 + y_1, w_2 + v_2 + y_2, w_3 + v_3 + y_3, w_4 + v_4 + y_4)$
 $= (w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus (v_1 + y_1, v_2 + y_2, v_3 + y_3, v_4 + y_4)$ olduğundan birleşme aksiyomu gerçekleşir.

$$G3) (w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus (v_1, v_2, v_3, v_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4)$$

$$(w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4)$$

$$\left. \begin{array}{l} w_1 + v_1 = w_1 \\ w_2 + v_2 = w_2 \\ w_3 + v_3 = w_3 \\ w_4 + v_4 = w_4 \end{array} \right\} \text{eşitliklerinden } v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0 \text{ elde edilir.}$$

Dolayısıyla $\oplus$ işleminin etkisiz elemanı $(0,0,0,0)$ dır.

G4) $(w_1, w_2, w_3, w_4) \in V_{\mathbb{H}_D}$ elemanı için,

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus (v_1, v_2, v_3, v_4) = (0,0,0,0) \text{ iken,}$$

$$\left. \begin{array}{l} w_1 + v_1 = 0 \\ w_2 + v_2 = 0 \\ w_3 + v_3 = 0 \\ w_4 + v_4 = 0 \end{array} \right\} \text{eşitliklerinden} \left. \begin{array}{l} v_1 = -w_1 \\ v_2 = -w_2 \\ v_3 = -w_3 \\ v_4 = -w_4 \end{array} \right\} \text{elde edilir.}$$

Dolayısıyla $(w_1, w_2, w_3, w_4) \in V_{\mathbb{H}_D}$ elemanının tersi $(-w_1, -w_2, -w_3, -w_4)$ olur.

Dış işlem

$(w_1, w_2, w_3, w_4) \in V_{\mathbb{H}_D}$ ve $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}_D$ olmak üzere,

$$\odot : \mathbb{H}_D \times V_{\mathbb{H}_D} \rightarrow V_{\mathbb{H}_D}$$

$$\begin{aligned} Q, (w_1, w_2, w_3, w_4) &\rightarrow (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \odot (w_1, w_2, w_3, w_4) \\ &= (q_0w_1, q_0w_2 + q_1w_1, q_0w_3 + q_2w_1, q_0w_4 + q_3w_1) \end{aligned} \quad (6.2)$$

şeklinde tanımlanan dış işleme göre modül aksiyomlarını inceleyelim.

M1) $(w_1, w_2, w_3, w_4), (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V_{\mathbb{H}_D}$ ve $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}_D$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} Q \odot ((w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus (v_1, v_2, v_3, v_4)) \\ = (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \odot (w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4) \end{aligned} \quad (6.2) \text{ ile verilen dış işlem}$$

tanımını uygularsak,

$$\begin{aligned} &= (q_0(w_1 + v_1), q_0(w_2 + v_2) + q_1(w_1 + v_1), q_0(w_3 + v_3) + q_2(w_1 + v_1), q_0(w_4 + v_4) + q_3(w_1 + v_1)) \\ &= (q_0w_1, q_0w_2 + q_1w_1, q_0w_3 + q_2w_1, q_0w_4 + q_3w_1) \\ &\quad \oplus (q_0v_1, q_0v_2 + q_1v_1, q_0v_3 + q_2v_1, q_0v_4 + q_3v_1) \\ &= (Q \odot (w_1, w_2, w_3, w_4)) \oplus (Q \odot (v_1, v_2, v_3, v_4)) \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

M2) $Q_1 = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k, Q_2 = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}_D$ ve $(w_1, w_2, w_3, w_4) \in V_{\mathbb{H}_D}$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} &(Q_1 + Q_2) \odot (w_1, w_2, w_3, w_4) \\ &= ((p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k) \odot (w_1, w_2, w_3, w_4) \end{aligned}$$

(6.2) ile verilen dış işlem tanımından,

$$\begin{aligned} &= ((p_0 + q_0)w_1, (p_0 + q_0)w_2 + (p_1 + q_1)w_1, (p_0 + q_0)w_3 + (p_2 + q_2)w_1, (p_0 + q_0)w_4 + (p_3 + q_3)w_1) \\ &= (p_0w_1, p_0w_2 + p_1w_1, p_0w_3 + p_2w_1, p_0w_4 + p_3w_1) \\ &\quad \oplus (q_0w_1, q_0w_2 + q_1w_1, q_0w_3 + q_2w_1, q_0w_4 + q_3w_1) \\ &= Q_1 \odot (w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus Q_2 \odot (w_1, w_2, w_3, w_4) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$$M3) (Q_1, Q_2) \odot (w_1, w_2, w_3, w_4)$$

$$(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)(p_0 + p_1i + p_2j + p_3k)(w_1, w_2, w_3, w_4)$$

$$= q_0p_0w_1 + q_0p_0w_2i + q_0p_0w_3j + q_0p_0w_4k + q_0p_1w_1i$$

$$+ q_0p_2w_1j + q_0p_3w_1k + q_1p_0w_1i + q_2p_0w_1j + q_3p_0w_1k$$

$$= (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)(p_0w_1 + p_0w_2i + p_2w_3j + p_0w_4k + p_1w_1i + p_2w_1j + p_3w_1k)$$

$$= Q_1 \odot (Q_2 \odot (w_1, w_2, w_3, w_4))$$

$$M4) (w_1, w_2, w_3, w_4) \in V_{\mathbb{H}_D} \text{ olmak üzere,}$$

$$1_{\mathbb{H}_D} \odot (w_1, w_2, w_3, w_4)$$

$$= (1 + 0i + 0j + 0k) \odot (w_1, w_2, w_3, w_4) =$$

$$(1.w_1, 1.w_2 + 0.w_1, 1.w_3 + 0.w_1, 1.w_4 + 0.w_1) = (w_1, w_2, w_3, w_4)$$

olduğundan $V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaternizasyonlaştırılması $\mathbb{H}_D$ dual kuaterniyon halkası üzerinde dual kuaterniyon modül olur.

Buradan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 6.2 $\{V_{\mathbb{H}_D}, \oplus, \mathbb{H}_D, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir dual kuaterniyon modül oluşturmaktadır.

Not 6.1 $V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaterniyon modülünün (w_1, w_2, w_3, w_4) elemanı ile,

$$\left. \begin{aligned} i(w_1, w_2, w_3, w_4) &= (0, w_1, 0, 0) \\ j(w_1, w_2, w_3, w_4) &= (0, 0, w_1, 0) \\ k(w_1, w_2, w_3, w_4) &= (0, 0, 0, w_1) \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

çarpımlarını tanımlayalım. Bu (w_1, w_2, w_3, w_4) elemanını,

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (w_1, 0, 0, 0) + (0, w_2, 0, 0) + (0, 0, w_3, 0) + (0, 0, 0, w_4)$$

biçiminde yazarsak ve (6.3) ile tanımladığımız çarpım ifadelerinden,

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (w_1, 0, 0, 0) + i(w_2, 0, 0, 0) + j(w_3, 0, 0, 0) + k(w_4, 0, 0, 0)$$

$(w_1, w_2, w_3, w_4) = w_1 + iw_2 + jw_3 + kw_4$ şeklinde düzenlersek, $V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaterniyon modülünü

$$\left. \begin{aligned} V_{\mathbb{H}_D} &= V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}} \\ V_{\mathbb{H}_D} &= V_{\mathbb{R}} + iV_{\mathbb{R}} + jV_{\mathbb{R}} + kV_{\mathbb{R}} \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

olarak da ifade edebiliriz.

Tanım 6.4 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının dual kuaternizasyonlaştırılması $V_{\mathbb{H}_D}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{H}_D} : V_{\mathbb{R}} &\rightarrow V_{\mathbb{H}_D} \\ w &\rightarrow (w, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (6.5)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının $V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaterniyon modülü içine gömülmesi denir.

Teorem 6.3 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının dual kuaternizasyonlaştırılması $V_{\mathbb{H}_D}$ olsun. Eğer $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının bir $\mathbb{R}$ bazı $1 \leq t \leq n$ olmak üzere $\{e_t\}$ ise, $V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaterniyon vektör uzayının bir $\mathbb{H}_D$ bazı da $\{(e_t, 0, 0, 0)\}$ olur.

İspat

Eğer $V_{\mathbb{R}} = 0$ ise, (6.4) ile verdiğimiz $V_{\mathbb{H}_D} = V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}}$ eşitliğinden $V_{\mathbb{H}_D} = 0$ olduğu açıktır. O halde $V_{\mathbb{R}} \neq 0$ ve $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının bir $\mathbb{R}$ bazı olarak $\{e_t\}$ yi alalım.

Germe Aksiyomu

$V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaterniyon modülünün (w_1, w_2, w_3, w_4) elemanındaki bileşenlerini, e_t lerin $\mathbb{R}$ lineer kombinasyonu olarak yazabiliriz. Yani,

$$w_1 = \sum_{t=1}^n a_t e_t, w_2 = \sum_{t=1}^n b_t e_t, w_3 = \sum_{t=1}^n c_t e_t, w_4 = \sum_{t=1}^n d_t e_t \quad (6.6)$$

$\mathbb{R}$ lineer kombinasyonları vardır.

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (w_1, 0, 0, 0) + (0, w_2, 0, 0) + (0, 0, w_3, 0) + (0, 0, 0, w_4)$$

eşitliğinde (6.6) ile verdiğimiz ifadeler yerine konulursa,

$$= \left(\sum_{t=1}^n a_t e_t, 0, 0, 0 \right) + \left(0, \sum_{t=1}^n b_t e_t, 0, 0 \right) + \left(0, 0, \sum_{t=1}^n c_t e_t, 0 \right) + \left(0, 0, 0, \sum_{t=1}^n d_t e_t \right) \quad (6.7)$$

eşitliği elde edilir ve (6.3) ile verdiğimiz çarpımlardan yararlanarak bu eşitlikleri düzenlersek,

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{t=1}^n a_t e_t, 0, 0, 0 \right) + i \left(\sum_{t=1}^n b_t e_t, 0, 0, 0 \right) + j \left(\sum_{t=1}^n c_t e_t, 0, 0, 0 \right) + k \left(\sum_{t=1}^n d_t e_t, 0, 0, 0 \right) \\ &= \sum_{t=1}^n (a_t + ib_t + jc_t + kd_t)(e_t, 0, 0, 0) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Böylece $\{(e_t, 0, 0, 0)\}$ sistemi $V_{\mathbb{H}_D}$ kuaterniyon modülünü $\mathbb{H}_D$ lineer olarak gerer.

Lineer Bağımsızlık

$V_{\mathbb{H}_D}$ kuaterniyon modülünü $\mathbb{H}_D$ lineer olarak geren kümesi olarak bulduğumuz

$\{(e_t, 0, 0, 0)\}$ sisteminin lineer bağımsız olduğunu, yani

$$\left. \begin{aligned} &(a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1)(e_1, 0, 0, 0) + (a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2)(e_2, 0, 0, 0) + \\ &+ \dots + (a_n + ib_n + jc_n + kd_n)(e_n, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

eşitliği var iken $\forall t = 1, 2, \dots, n$ değeri için $a_t + ib_t + jc_t + kd_t = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

O halde (6.8) ile verdiğimiz eşitlikten,

$$\left. \begin{aligned} &(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, 0, 0, 0) + i(b_1 e_1 + \dots + b_n e_n, 0, 0, 0) \\ &+ j(c_1 e_1 + \dots + c_n e_n, 0, 0, 0) + k(d_1 e_1 + \dots + d_n e_n, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

$$(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, b_1 e_1 + \dots + b_n e_n, c_1 e_1 + \dots + c_n e_n, d_1 e_1 + \dots + d_n e_n) = (0, 0, 0, 0) \quad (6.10)$$

denklemini elde ederiz. Son olarak (6.10) denkleminde bileşenlerin eşitliğinden,

$\forall t=1,2,\dots,n$ değeri için, $\sum_{i=1}^n a_i e_i = 0, \sum_{i=1}^n b_i e_i = 0, \sum_{i=1}^n c_i e_i = 0, \sum_{i=1}^n d_i e_i = 0$ bulunur. Yani

$\forall t=1,2,\dots,n$ değeri için, $a_i + b_i i + c_i j + d_i k = 0$ olur.

Böylece $\{(e_i, 0, 0, 0)\}$ sisteminin $V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaterniyon modülünün bir $\mathbb{H}_D$ bazı olduğu gösterilmiş olur.

Önerme 6.1 $V_{\mathbb{R}}$ ve $V'_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayları ve bu vektör uzaylarının dual kuaternizasyonları sırasıyla $V_{\mathbb{H}_D}$ ve $V'_{\mathbb{H}_D}$ olsun. Eğer $\varphi: V_{\mathbb{R}} \rightarrow V'_{\mathbb{R}}$ bir $\mathbb{R}$ lineer dönüşüm ise, bu dönüşümü

$$\varphi_{\mathbb{H}_D}: V_{\mathbb{H}_D} \rightarrow V'_{\mathbb{H}_D}$$

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) \rightarrow \varphi_{\mathbb{H}_D}(w_1, w_2, w_3, w_4) = (\varphi(w_1), \varphi(w_2), \varphi(w_3), \varphi(w_4)) \quad (6.11)$$

şeklinde tanımlanan $V_{\mathbb{H}_D}$ ve $V'_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaterniyon modüllerinin bir $\mathbb{H}_D$ lineer dönüşümüne genişletebiliriz ve eğer $g_{\mathbb{H}_D}, g'_{\mathbb{H}_D}$ (6.5) ile tanımlandığı gibi gömmeler ise, aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{\varphi} & V'_{\mathbb{R}} \\ \downarrow g_{\mathbb{H}_D} & & \downarrow g'_{\mathbb{H}_D} \\ V_{\mathbb{H}_D} & \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{H}_D}} & V'_{\mathbb{H}_D} \end{array}$$

Şekil 6.1 Dual kuaterniyon dönüşümleri diyagramı

İspat

Yukarıdaki önermede (6.11) eşitliği ile verilen $\varphi_{\mathbb{H}_D} : V_{\mathbb{H}_D} \rightarrow V'_{\mathbb{H}_D}$ dönüşümünün $\mathbb{H}_D$ lineer olduğunu gösterelim.

L1) $(w_1, w_2, w_3, w_4), (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V_{\mathbb{H}_D}$ olmak üzere,

$$\varphi_{\mathbb{H}_D}((w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus (v_1, v_2, v_3, v_4)) = \varphi_{\mathbb{H}_D}(w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4)$$

$\varphi_{\mathbb{H}_D}$ dönüşümü için (6.11) ile verilen eşitlikten,

$$\varphi_{\mathbb{H}_D}(w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4) = (\varphi(w_1 + v_1), \varphi(w_2 + v_2), \varphi(w_3 + v_3), \varphi(w_4 + v_4))$$

yazabiliriz ve φ dönüşümü $\mathbb{R}$ lineer olduğundan,

$$(\varphi(w_1) + \varphi(v_1), \varphi(w_2) + \varphi(v_2), \varphi(w_3) + \varphi(v_3), \varphi(w_4) + \varphi(v_4))$$

$$(\varphi(w_1), \varphi(w_2), \varphi(w_3), \varphi(w_4)) \oplus (\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3), \varphi(v_4))$$

$$= \varphi_{\mathbb{H}_D}(w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus \varphi_{\mathbb{H}_D}(v_1, v_2, v_3, v_4) \text{ elde edilir.}$$

L2) $(w_1, w_2, w_3, w_4) \in V_{\mathbb{H}_D}$ ve $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}_D$ olmak üzere,

$$\varphi_{\mathbb{H}_D}(Q \odot (w_1, w_2, w_3, w_4)) = \varphi_{\mathbb{H}_D}((q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \odot (w_1, w_2, w_3, w_4))$$

(6.2) ile verdiğimiz dış işlem tanımından,

$$\varphi_{\mathbb{H}_D}(q_0w_1, q_0w_2 + q_1w_1, q_0w_3 + q_2w_1, q_0w_4 + q_3w_1) \text{ yazabiliriz ve bu ifadeyi } \varphi_{\mathbb{H}_D}$$

dönüşümünün (6.11) ile verilen tanımını kullanarak düzenlersek

$$(\varphi(q_0w_1), \varphi(q_0w_2 + q_1w_1), \varphi(q_0w_3 + q_2w_1), \varphi(q_0w_4 + q_3w_1)) \text{ bulunur. Burada } \varphi$$

dönüşümü $\mathbb{R}$ lineer olduğundan,

$$(q_0\varphi(w_1), q_0\varphi(w_2) + q_1\varphi(w_1), q_0\varphi(w_3) + q_2\varphi(w_1), q_0\varphi(w_4) + q_3\varphi(w_1))$$

$$= q_0(\varphi(w_1), \varphi(w_2), \varphi(w_3), \varphi(w_4)) + q_1i(\varphi(w_1), \varphi(w_2), \varphi(w_3), \varphi(w_4))$$

$$+ q_2j(\varphi(w_1), \varphi(w_2), \varphi(w_3), \varphi(w_4)) + q_3k(\varphi(w_1), \varphi(w_2), \varphi(w_3), \varphi(w_4))$$

$= Q \odot \varphi_{\mathbb{H}_D}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ bulunur. Dolayısıyla (6.11) eşitliği ile tanımlanan $\varphi_{\mathbb{H}_D}$ dönüşümü $\mathbb{H}_D$ lineerdir.

Burada $\varphi_{\mathbb{H}_D}$ dönüşümüne φ dönüşümünün **dual kuaternizasyonlaştırılması** adı verilir.

Teorem 6.4 $V_{\mathbb{R}}$ ve $V'_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayları ve bunların dual kuaternizasyonlaştırılmaları sırasıyla $V_{\mathbb{H}_D}$ ve $V'_{\mathbb{H}_D}$ olsun. Eğer $\varphi: V_{\mathbb{R}} \rightarrow V'_{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$ lineer dönüşüm ve dual kuaternizasyonlaştırılması da

$$\varphi_{\mathbb{H}_D}: V_{\mathbb{H}_D} \rightarrow V'_{\mathbb{H}_D}$$

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) \rightarrow \varphi_{\mathbb{H}_D}(w_1, w_2, w_3, w_4) = (\varphi(w_1), \varphi(w_2), \varphi(w_3), \varphi(w_4))$$

şeklinde tanımlı $\mathbb{H}_D$ lineer dönüşüm olmak üzere, $\check{\varphi} \varphi_{\mathbb{H}_D} = (\check{\varphi} \varphi)_{\mathbb{H}_D}$ ve $\varphi_{\mathbb{H}_D}(V_{\mathbb{H}_D}) = (\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{H}_D}$ eşitlikleri vardır.

İspat

$\varphi: V_{\mathbb{R}} \rightarrow V'_{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$ lineer dönüşümünün çekirdeğini $\check{\varphi} \varphi = \{x \in V_{\mathbb{R}} \mid \varphi(x) = 0_{V'_{\mathbb{R}}}\} \subset V_{\mathbb{R}}$ ve

$\varphi_{\mathbb{H}_D}: V_{\mathbb{H}_D} \rightarrow V'_{\mathbb{H}_D}$ $\mathbb{H}_D$ lineer dönüşümünün çekirdeğini de

$\check{\varphi} \varphi_{\mathbb{H}_D} = \{x \in V_{\mathbb{H}_D} \mid \varphi_{\mathbb{H}_D}(x) = 0_{V'_{\mathbb{H}_D}}\}$ ile verelim. $(\check{\varphi} \varphi)_{\mathbb{H}_D} = \check{\varphi} \varphi_{\mathbb{H}_D}$ eşitliğini göstermek

için $\forall x \in (\check{\varphi} \varphi)_{\mathbb{H}_D} \subset V_{\mathbb{H}_D}$ elemanı için $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ olmak üzere ilk olarak

$\varphi_{\mathbb{H}_D}(x) = 0_{V'_{\mathbb{H}_D}}$ olduğunu gösterelim. O halde

$$\varphi_{\mathbb{H}_D}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \varphi(x_4)) = (0_{V'_{\mathbb{H}_D}}, 0_{V'_{\mathbb{H}_D}}, 0_{V'_{\mathbb{H}_D}}, 0_{V'_{\mathbb{H}_D}}) \text{ elde edilir.}$$

Dolayısıyla $x \in \check{\varphi} \varphi_{\mathbb{H}_D}$ olup

$$(\check{\varphi} \varphi)_{\mathbb{H}_D} \subset \check{\varphi} \varphi_{\mathbb{H}_D} \quad (6.12)$$

elde edilir.

Diğer taraftan $\forall x \in \check{\varphi} \varphi_{\mathbb{H}_D} \subset V_{\mathbb{H}_D}$ elemanı için $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ şeklinde olup

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in V_{\mathbb{R}}$ dir.

$\varphi_{\mathbb{H}_D}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \varphi(x_4)) = (0_{V'_{\mathbb{H}_D}}, 0_{V'_{\mathbb{H}_D}}, 0_{V'_{\mathbb{H}_D}}, 0_{V'_{\mathbb{H}_D}})$ olduğundan $\varphi(x_1) = 0_{V'_{\mathbb{R}}}, \varphi(x_2) = 0_{V'_{\mathbb{R}}}, \varphi(x_3) = 0_{V'_{\mathbb{R}}}, \varphi(x_4) = 0_{V'_{\mathbb{R}}}$ elde edilir. Buradan $x_1 \in \text{çek}\varphi, x_2 \in \text{çek}\varphi, x_3 \in \text{çek}\varphi, x_4 \in \text{çek}\varphi$, yani $x \in (\text{çek}\varphi)_{\mathbb{H}_D}$ olmaktadır. Dolayısıyla

$$\text{çek}\varphi_{\mathbb{H}_D} \subset (\text{çek}\varphi)_{\mathbb{H}_D} \quad (6.13)$$

yazılabilir.

Sonuç olarak (6.12) ve (6.13) ifadeleri göz önüne alınırsa $\text{çek}\varphi_{\mathbb{H}_D} = (\text{çek}\varphi)_{\mathbb{H}_D}$ eşitliği gösterilmiş olur.

Benzer şekilde, $\varphi_{\mathbb{H}_D}(V_{\mathbb{H}_D}) = (\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{H}_D}$ eşitliğinin varlığını göstermek istersek, $\forall y \in \varphi_{\mathbb{H}_D}(V_{\mathbb{H}_D}) = V'_{\mathbb{H}_D}$ elemanını alalım. Bu durumda $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ şeklinde olduğundan $\varphi(x_1) = y_1, \varphi(x_2) = y_2, \varphi(x_3) = y_3$ ve $\varphi(x_4) = y_4$ olacak şekilde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in V_{\mathbb{R}}$ vardır.

O halde $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \varphi(x_4)) \in (\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{H}_D}$ olur. Dolayısıyla $\varphi_{\mathbb{H}_D}(V_{\mathbb{H}_D}) \subset (\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{H}_D}$ yazılır. Tersine $(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \varphi(x_4)) \in (\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{H}_D}$ alalım. Buradan $\varphi(x_1) = y_1$ ve $\varphi(x_2) = y_2, \varphi(x_3) = y_3$ ve $\varphi(x_4) = y_4$ olacak şekilde $y_1, y_2, y_3, y_4 \in V'_{\mathbb{R}}$ olur. Dolayısıyla $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in V'_{\mathbb{H}_D} = \varphi_{\mathbb{H}_D}(V_{\mathbb{H}_D})$ olur. Buradan da $(\varphi(V_{\mathbb{R}}))_{\mathbb{H}_D} \subset \varphi_{\mathbb{H}_D}(V_{\mathbb{H}_D})$ yazılır ve istenilen eşitlik gösterilmiş olur.

Sonuç 6.3 $\varphi: V_{\mathbb{R}} \rightarrow V'_{\mathbb{R}}$ bir $\mathbb{R}$ lineer dönüşüm ve $\varphi_{\mathbb{H}_D}: V_{\mathbb{H}_D} \rightarrow V'_{\mathbb{H}_D}$ dönüşümü de (6.11) ile tanımlanan bir $\mathbb{H}_D$ lineer dönüşüm olmak üzere, φ dönüşümü bir izomorfizma ise $\varphi_{\mathbb{H}_D}$ dönüşümü de bir izomorfizmadır.

İspat

Varsayalım ki $\varphi: V_{\mathbb{R}} \rightarrow V'_{\mathbb{R}}$ lineer dönüşümü bir izomorfizma olsun. Bu durumda φ dönüşümü bir $\mathbb{R}$ lineer dönüşüm iken $\varphi_{\mathbb{H}_D}$ nin de $\mathbb{H}_D$ lineer olduğunu biliyoruz. $\varphi_{\mathbb{H}_D}$

dönüşümünün 1-1 liğini gösterirken $\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_{\mathbb{H}_D}$ elemanı için $\varphi_{\mathbb{H}_D}(x) = 0$ iken $x = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$\varphi_{\mathbb{H}_D}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \varphi(x_4)) = (0_{V'_{\mathbb{H}_D}}, 0_{V'_{\mathbb{H}_D}}, 0_{V'_{\mathbb{H}_D}}, 0_{V'_{\mathbb{H}_D}})$ olduğundan $\varphi(x_1) = 0_{V'_{\mathbb{H}_D}}, \varphi(x_2) = 0_{V'_{\mathbb{H}_D}}, \varphi(x_3) = 0_{V'_{\mathbb{H}_D}}, \varphi(x_4) = 0_{V'_{\mathbb{H}_D}}$ dir. φ dönüşümü izomorfizma olduğundan 1-1 ve örten olup, $\varphi(x_1) = 0_{V'_{\mathbb{H}_D}}, \varphi(x_2) = 0_{V'_{\mathbb{H}_D}}, \varphi(x_3) = 0_{V'_{\mathbb{H}_D}}, \varphi(x_4) = 0_{V'_{\mathbb{H}_D}}$ eşitlikleri için $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ olup $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$ elde edilir. Yani $\varphi_{\mathbb{H}_D}$ lineer dönüşümü de 1-1 olur.

$\varphi_{\mathbb{H}_D}$ dönüşümünün örtenliğini göstermek için $\forall y \in V'_{\mathbb{H}_D}$ için $\varphi_{\mathbb{H}_D}(x) = y$ olacak şekilde $\exists x \in V_{\mathbb{H}_D}$ olduğunu gösterelim. $\forall y \in V'_{\mathbb{H}_D}$ elemanı için $\varphi_{\mathbb{H}_D}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \varphi(x_4)) = (y_1, y_2, y_3, y_4) = y$ olur. Buradaki eşitlikten $\varphi(x_1) = y_1, \varphi(x_2) = y_2, \varphi(x_3) = y_3, \varphi(x_4) = y_4$ bulunur. φ dönüşümü örten olduğundan $\forall y_1, y_2, y_3, y_4 \in V'_{\mathbb{H}_D}$ için $\varphi(x_1) = y_1, \varphi(x_2) = y_2, \varphi(x_3) = y_3, \varphi(x_4) = y_4$ olacak şekilde $\exists x_1, x_2, x_3, x_4 \in V_{\mathbb{H}_D}$ vardır. O halde $\varphi_{\mathbb{H}_D}$ dönüşümünün de örten, sonuç olarak izomorfizma olduğu gösterilmiş olur.

6.2.2 Tensör Çarpımı ile Kuaternizasyonlaştırma

Tanım 6.5 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve $\mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonlar kümesi olsun.

$Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonu ve $\vec{x} \in V_{\mathbb{R}}$ vektörü için,

$$Q \otimes \vec{x} = (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \otimes \vec{x} = q_0 \otimes \vec{x} + q_1i \otimes \vec{x} + q_2j \otimes \vec{x} + q_3k \otimes \vec{x} \text{ eşitliğinde (2.5)}$$

ile verdiğimiz tensör çarpımın lineerliğini kullanırsak, $q_i \in \mathbb{R}$ reel sayılar olduğundan,

$$Q \otimes \vec{x} = 1 \otimes q_0\vec{x} + i \otimes q_1\vec{x} + j \otimes q_2\vec{x} + k \otimes q_3\vec{x} \text{ olarak yazılabilen ve } (q_{i-1}\vec{x}) = w_i \text{ iken}$$

$$Q \otimes \vec{x} = 1 \otimes w_1 + i \otimes w_2 + j \otimes w_3 + k \otimes w_4 \text{ şeklindeki elemanlardan oluşan ve}$$

$$\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = \left\{ Q \otimes \vec{x} \mid Q \otimes \vec{x} = 1 \otimes w_1 + i \otimes w_2 + j \otimes w_3 + k \otimes w_4, w_i \in V_{\mathbb{R}}, i = 1, 2, 3, 4 \right\} \text{ ile}$$

tanımlanan kümeye $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının tensör çarpım yardımıyla **dual kuaternizasyonlaştırılması** adı verilir.

Tanım 6.6 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve dual kuaternizasyonlaştırılması $\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ olsun.

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{H}_D} : V_{\mathbb{R}} &\rightarrow \mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} \\ w &\rightarrow 1_{\mathbb{H}_D} \otimes w \end{aligned} \quad (6.14)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının $\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ içine **gömülmesi** denir.

Teorem 6.5 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve bu vektör uzayının dual kuaterniyonlaştırılması $\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ olsun. O halde $\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ kümesi $\mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonlar halkası üzerinde dual kuaterniyon modül olur.

İspat

Toplama

$$\begin{aligned} \oplus : (\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}) \times (\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}) &\rightarrow (\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}) \\ (1_{\mathbb{H}_D} \otimes x), (1_{\mathbb{H}_D} \otimes y) &\rightarrow 1_{\mathbb{H}_D} \otimes (x + y) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\oplus$ işleminin grup aksiyomlarını gerçeklediğini gösterelim.

G1) $1_{\mathbb{H}_D} \otimes (x + y) \in \mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ olduğundan $\oplus$ işlemi kapalılık aksiyomunu gerçekleştir.

$$G2) (1_{\mathbb{H}_D} \otimes (x + y)) \oplus (1_{\mathbb{H}_D} \otimes z) = 1_{\mathbb{H}_D} \otimes (x + y + z) = (1_{\mathbb{H}_D} \otimes x) \oplus (1_{\mathbb{H}_D} \otimes (y + z))$$

olduğundan birleşme aksiyomu gerçekleşir.

$$G3) (1_{\mathbb{H}_D} \otimes x) \oplus (1_{\mathbb{H}_D} \otimes y) = (1_{\mathbb{H}_D} \otimes x)$$

$$(1_{\mathbb{H}_D} \otimes (x + y)) = (1_{\mathbb{H}_D} \otimes x) \text{ eşitliğinden,}$$

$$(1_{\mathbb{H}_D} \otimes 0) \text{ etkisiz elemandır.}$$

$$G4) (1_{\mathbb{H}_D} \otimes x) \oplus (1_{\mathbb{H}_D} \otimes y) = (1_{\mathbb{H}_D} \otimes 0)$$

$$(1_{\mathbb{H}_D} \otimes (x + y)) = (1_{\mathbb{H}_D} \otimes 0) \Rightarrow (1_{\mathbb{H}_D} \otimes (x + y - 0)) = (1_{\mathbb{H}_D} \otimes 0)$$

eşitliğinden $(1_{\mathbb{H}_D} \otimes x)$ elemanın tersi $(1_{\mathbb{H}_D} \otimes -x)$ dir.

Dış işlem

$$\odot : \mathbb{H}_D \times (\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}) \rightarrow (\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}})$$

$$(Q, 1_{\mathbb{H}_D} \otimes x) \rightarrow Q \odot (1_{\mathbb{H}_D} \otimes x) = Q \cdot 1_{\mathbb{H}_D} \otimes x$$

şeklinde tanımlanan dış işleme göre modül aksiyomlarını gerçekleyelim.

$$M1) Q \odot ((1_{\mathbb{H}_D} \otimes x) + (1_{\mathbb{H}_D} \otimes y)) = Q \odot (1_{\mathbb{H}_D} \otimes (x + y)) = Q \cdot 1_{\mathbb{H}_D} \otimes (x + y)$$

$$= Q \cdot 1_{\mathbb{H}_D} \otimes x + Q \cdot 1_{\mathbb{H}_D} \otimes y$$

$$= Q \odot (1_{\mathbb{H}_D} \otimes x) + Q \odot (1_{\mathbb{H}_D} \otimes y)$$

$$M2) (Q_1 + Q_2) \odot (1_{\mathbb{H}_D} \otimes x) = ((Q_1 + Q_2) \cdot 1_{\mathbb{H}_D} \otimes x) = (Q_1 \cdot 1_{\mathbb{H}_D} \otimes x) + (Q_2 \cdot 1_{\mathbb{H}_D} \otimes x)$$

$$= Q_1 \odot (1_{\mathbb{H}_D} \otimes x) + Q_2 \odot (1_{\mathbb{H}_D} \otimes x)$$

$$M3) Q_1 \cdot Q_2 \odot (1_{\mathbb{H}_D} \otimes x) = Q_1 \cdot Q_2 \cdot 1_{\mathbb{H}_D} \otimes x = Q_1 \odot (Q_2 \cdot 1_{\mathbb{H}_D} \otimes x) = Q_1 \odot (Q_2 \odot (1_{\mathbb{H}_D} \otimes x))$$

$$M4) 1_{\mathbb{H}_D} \odot (1_{\mathbb{H}_D} \otimes x) = (1_{\mathbb{H}_D} \otimes x) \text{ bulunur.}$$

Sonuç 6.4 $\{(\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}), \oplus, \mathbb{H}_D, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir dual kuaterniyon modül olur.

Teorem 6.6 Bir $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının dual kuaternizasyonlaştırılmaları $V_{\mathbb{H}_D}$ ve $\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ olmak üzere,

$$f_w : V_{\mathbb{H}_D} \rightarrow \mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$$

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) \rightarrow f_w(w_1, w_2, w_3, w_4) = 1 \otimes w_1 + i \otimes w_2 + j \otimes w_3 + k \otimes w_4 \quad (6.15)$$

şeklinde tanımlanan bir $\mathbb{H}_D$ lineer izomorfizma vardır.

İspat

Yukarıda (6.15) eşitliği ile verilen f_w fonksiyonunun $\mathbb{H}_D$ lineer olduğunu gösterelim.

L1) $(w_1, w_2, w_3, w_4), (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V_{\mathbb{H}_D}$ olmak üzere,

$$f_w((w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus (v_1, v_2, v_3, v_4)) = f_w(w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4)$$

f_w fonksiyonunun tanımındaki (6.15) ile verilen eşitlikten,

$1 \otimes (w_1 + v_1) + i \otimes (w_2 + v_2) + j \otimes (w_3 + v_3) + k \otimes (w_4 + v_4)$ yazılır ve (2.5) ile verilen tensör çarpımın lineerliğinden,

$$1 \otimes w_1 + 1 \otimes v_1 + i \otimes w_2 + i \otimes v_2 + j \otimes w_3 + j \otimes v_3 + k \otimes w_4 + k \otimes v_4$$

$$1 \otimes w_1 + i \otimes w_2 + j \otimes w_3 + k \otimes w_4 + 1 \otimes v_1 + i \otimes v_2 + j \otimes v_3 + k \otimes v_4$$

$$= f_w(w_1, w_2, w_3, w_4) \oplus f_w(v_1, v_2, v_3, v_4) \text{ bulunur.}$$

L2) $(w_1, w_2, w_3, w_4) \in V_{\mathbb{H}_D}$ ve $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}_D$ olmak üzere,

$$f_w(Q \odot (w_1, w_2, w_3, w_4)) = f_w((q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \odot (w_1, w_2, w_3, w_4))$$

(6.2) ile verdiğimiz dış işlem tanımından,

$f_w(q_0w_1, q_0w_2 + q_1w_1, q_0w_3 + q_2w_1, q_0w_4 + q_3w_1)$ yazılır ve (6.15) ile verdiğimiz eşitlikten,

$$1 \otimes q_0w_1 + i \otimes (q_0w_2 + q_1w_1) + j \otimes (q_0w_3 + q_2w_1) + k \otimes (q_0w_4 + q_3w_1)$$

$$= q_0(1 \otimes w_1) + q_0(i \otimes w_2) + q_1(i \otimes w_1) + q_2(j \otimes w_1) + q_3(k \otimes w_1)$$

$$+ q_0(k \otimes w_4)$$

$$= q_0(1 \otimes w_1 + i \otimes w_2 + j \otimes w_3 + k \otimes w_4)$$

$$+ q_1i(1 \otimes w_1 + i \otimes w_2 + j \otimes w_3 + k \otimes w_4)$$

$$+ q_2j(1 \otimes w_1 + i \otimes w_2 + j \otimes w_3 + k \otimes w_4)$$

$$+ q_3k(1 \otimes w_1 + i \otimes w_2 + j \otimes w_3 + k \otimes w_4)$$

$$= (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)(1 \otimes w_1 + i \otimes w_2 + j \otimes w_3 + k \otimes w_4)$$

$= Q \odot f_w(w_1, w_2, w_3, w_4)$ bulunur. Böylece f_w fonksiyonunun $\mathbb{H}_D$ lineerliğini göstermiş

oluruz. f_w fonksiyonunun izomorfizma olduğunu göstermek için ise,

$$g_w : \mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{H}_D}$$

$$(1 \otimes w) \rightarrow (w, 0, 0, 0)$$

$$Q \otimes w = Q(1 \otimes w) \rightarrow Q(w, 0, 0, 0) \quad (6.16)$$

ters fonksiyonunu tanımlayalım. Bu şekilde tanımladığımız g_w fonksiyonunun $\mathbb{H}_D$ lineer olduğunu göstermek için $t = Q \otimes w \in \mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ elemanı ve $Q' \in \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonu için, $g_w(Q' \odot t) = Q' \odot g_w(t)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\begin{aligned} g_w(Q' \odot t) &= g_w(Q' \odot (Q \otimes w)) = g_w(Q' Q \otimes w) = Q' Q(w, 0, 0, 0) \\ &= Q' \odot (Q(w, 0, 0, 0)) = Q' \odot g_w(Q \otimes w) = Q' \odot g_w(t) \end{aligned}$$

olduğundan g_w fonksiyonu $\mathbb{H}_D$ lineer olur. Son olarak f_w ile g_w fonksiyonlarının birbirlerinin tersi olduğunu gösterelim.

$$g_w(f_w(w_1, w_2, w_3, w_4)) = g_w(1 \otimes w_1 + i \otimes w_2 + j \otimes w_3 + k \otimes w_4)$$

g_w fonksiyonu $\mathbb{H}_D$ lineer olduğundan,

$$g_w(f_w(w_1, w_2, w_3, w_4)) = g_w(1 \otimes w_1) + g_w(i \otimes w_2) + g_w(j \otimes w_3) + g_w(k \otimes w_4)$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu nedenle

$$g_w(f_w(w_1, w_2, w_3, w_4)) = g_w(1 \otimes w_1) + g_w(i(1 \otimes w_2)) + g_w(j(1 \otimes w_3)) + g_w(k(1 \otimes w_4))$$

şeklinde yazarsak, (6.16) ile verdiğimiz g_w fonksiyonunun tanımından,

$$\begin{aligned} g_w(f_w(w_1, w_2, w_3, w_4)) &= (w_1, 0, 0, 0) + i(w_2, 0, 0, 0) + j(w_3, 0, 0, 0) + k(w_4, 0, 0, 0) \\ &= (w_1, w_2, w_3, w_4) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$$f_w(g_w(Q \otimes w)) = f_w(Q(w, 0, 0, 0)) = f_w(Qw, 0, 0, 0) = 1 \otimes Qw = Q \otimes w$$

Sonuç olarak $f_w \circ g_w = I$ ve f_w terslenebilir bir fonksiyondur. Dolayısıyla 1-1 ve örten olur. O halde f_w fonksiyonu izomorfizmadır ve $\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} \cong V_{\mathbb{H}_D}$ yazılır.

6.3 Dual Kuaterniyon Yarı-Normlu Modül

$V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve bu vektör uzayının dual kuaternizasyonu $V_{\mathbb{H}_D}$ olsun. $V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaternizasyonunun $\mathbb{H}_D$ dual kuaterniyon halkası üzerinde dual kuaterniyon modül

oluşturduğunu göstermiştik. $V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaterniyon modülünün elemanlarını (6.3) den $w = w_1 + w_2i + w_3j + w_4k$ şeklinde yazabileceğimizi biliyoruz.

$V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaterniyon modülü üzerindeki

$$\|\cdot\|: V_{\mathbb{H}_D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightarrow \|w\|$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon aşağıdaki koşulları gerçeklerse $V_{\mathbb{H}_D}$ ye **dual kuaterniyon yarı norm modülü** adı verilir.

$$N1) \|w\| \geq 0$$

$$N2) \|\lambda w\| = |\lambda| \|w\|$$

$$N3) \|w + v\| \leq \|w\| + \|v\|$$

Örnek 6.1 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının dual kuaternizasyonu $V_{\mathbb{H}_D}$ olsun. Eğer $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ olarak alınırsa $V_{\mathbb{H}_D} = V_{\mathbb{R}} \cdot \mathbb{H}_D = \mathbb{H}_D$ kolaylıkla elde edilebilir. O halde $\forall x \in V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ sayısı ve $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonu için,

$$Q.x = (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k).x$$

$= q_0x + q_1ix + q_2jx + q_3kx \in \mathbb{H}_D$ elde edilir ve $V_{\mathbb{H}_D} = \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyon modülüdür.

$V_{\mathbb{H}_D} = \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyon modülü

$$\|\cdot\|: \mathbb{H}_D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Q \rightarrow \|Q\| = |q_0|$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|$ fonksiyonu ile birlikte dual kuaterniyon yarı normlu modüldür.

Çözüm

$V_{\mathbb{H}_D} = \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyon modülü üzerinde tanımlanan $\|\cdot\|$ fonksiyonu için norm aksiyomlarını gerçekleyelim.

N1) $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}_D$ olmak üzere,

$$\|Q\| = |q_0| \geq 0 \text{ olduğu açıktır.}$$

N2) $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1i + \lambda_2j + \lambda_3k \in \mathbb{H}_D$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|\lambda Q\| &= \|\lambda_0 q_0 + (\lambda_0 q_1 + \lambda_1 q_0)i + (\lambda_0 q_2 + \lambda_2 q_0)j + (\lambda_0 q_3 + \lambda_3 q_0)k\| \\ &= |\lambda_0 q_0| = |\lambda_0| |q_0| = \|\lambda\| \|Q\| \end{aligned}$$

N3) $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, $P = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k \in \mathbb{H}_D$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|Q + P\| &= \|(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) + (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k)\| \\ &= \|((q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)i + (q_2 + p_2)j + (q_3 + p_3)k)\| \\ &= |q_0 + p_0| \leq |q_0| + |p_0| = \|Q\| + \|P\| \end{aligned}$$

$\forall Q \in \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonu için $\|Q\| = |q_0| = 0 \Rightarrow q_0 = 0$ bulunur. Burada $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k = 0$ olmak zorunda değildir. Yani $\mathbb{H}_D$ dual kuaterniyon kümesi üzerinde tanımlı $\|\cdot\|$ fonksiyonu yarı norm fonksiyonudur. Böylece $V_{\mathbb{H}_D} = \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyon modülünün tanımlanan $\|\cdot\|$ fonksiyonu ile birlikte dual kuaterniyon yarı normlu modül olduğu gösterilmiş olur.

Örnek 6.2 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı olmak üzere bu vektör uzayının dual kuaternizasyonu

$V_{\mathbb{H}_D}$ olsun. Eğer $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$ olarak alırsak $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve

$Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonu için,

$$\begin{aligned} Q \cdot \vec{x} &= (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= q_0(x_1, x_2, \dots, x_n) + q_1i(x_1, x_2, \dots, x_n) + q_2j(x_1, x_2, \dots, x_n) + q_3k(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \left((q_0x_1 + q_1ix_1 + q_2jx_1 + q_3kx_1), (q_0x_2 + q_1ix_2 + q_2jx_2 + q_3kx_2), \dots, (q_0x_n + q_1ix_n + q_2jx_n + q_3kx_n) \right) \in (\mathbb{H}_D)^n \text{ olmaktadır} \end{aligned}$$

Bu nedenle $V_{\mathbb{H}_D} = V_{\mathbb{R}} \cdot \mathbb{H}_D = \mathbb{R}^n \cdot \mathbb{H}_D = (\mathbb{H}_D)^n$ dual kuaterniyon modülü kolaylıkla elde edilebilir.

Örnek 6.3 $V_{\mathbb{H}_D} = (\mathbb{H}_D)^n$ dual kuaterniyon modülünün

$$\|\cdot\| : (\mathbb{H}_D)^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \rightarrow \|Q\| = \sqrt{\sum_{t=1}^n \overline{Q_t} Q_t} = \left[\sum_{t=1}^n \|Q_t\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.17)$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|$ fonksiyonuna göre dual kuaterniyon yarı normlu modül olduğunu gösterelim.

Çözüm

$V_{\mathbb{H}_D} = (\mathbb{H}_D)^n$ dual kuaterniyon modülünün norm tanımının bu şekilde verilebileceğini bölüm 6.1' de dual simplektik geometri tanımından biliyoruz. O halde (6.17) eşitliği ile verilen $\|\cdot\|$ fonksiyonu için norm koşullarını gerçeklemek istersek,

N1) $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \in (\mathbb{H}_D)^n$ olmak üzere, $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ elemanındaki dual kuaterniyonların herbirini $t = 1, 2, \dots, n$ değerleri için $Q_t = q_{0_t} + q_{1_t}i + q_{2_t}j + q_{3_t}k$ şeklinde gösterirsek,

$$\begin{aligned} \|Q\| &= \sqrt{\sum_{t=1}^n \overline{Q_t} Q_t} = \left[\sum_{t=1}^n \|Q_t\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\|Q_1\|^2 + \|Q_2\|^2 + \dots + \|Q_n\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[|q_{0_1}|^2 + |q_{0_2}|^2 + \dots + |q_{0_n}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{t=1}^n |q_{0_t}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \geq 0 \text{ olduğu açıktır.} \end{aligned}$$

N2) $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \in (\mathbb{H}_D)^n$ ve $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \in \mathbb{H}_D$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|\lambda Q\| &= \sqrt{\sum_{t=1}^n \overline{\lambda Q_t} \lambda Q_t} = \sqrt{\sum_{t=1}^n \overline{Q_t} \overline{\lambda} \lambda Q_t} = \sqrt{\sum_{t=1}^n \overline{Q_t} \|\lambda\|^2 Q_t} \\ &= \left[\|\lambda\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sum_{t=1}^n \|Q_t\|^2} = \left[\|\lambda\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sum_{t=1}^n |q_{0_t}|^2} \\ &= \|\lambda\| \left[\sum_{t=1}^n |q_{0_t}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \|\lambda\| \|Q\| \text{ olur.} \end{aligned}$$

N3) $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ ve $P = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in (\mathbb{H}_D)^n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\|Q + P\| &= \sqrt{\sum_{t=1}^n (\overline{Q_t + P_t})(Q_t + P_t)} = \sqrt{\sum_{t=1}^n (\overline{Q_t} + \overline{P_t})(Q_t + P_t)} \\
&= \sqrt{\sum_{t=1}^n (\overline{Q_t} + \overline{P_t})(Q_t + P_t)} = \left[\sum_{t=1}^n \|(Q_t + P_t)\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sum_{t=1}^n |q_{0_t} + p_{0_t}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \stackrel{\text{Minkovski}}{\leq} \left[\sum_{t=1}^n |q_{0_t}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{t=1}^n |p_{0_t}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sum_{t=1}^n \|Q_t\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{t=1}^n \|P_t\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \|Q\| + \|P\|
\end{aligned}$$

$$\forall Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \in (\mathbb{H}_D)^n \text{ için } \|Q\| = \sqrt{\sum_{t=1}^n \overline{Q_t} Q_t} = \left[\sum_{t=1}^n |q_{0_t}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ ise, } \forall t = 1, 2, \dots, n$$

değeri için $|q_{0_t}| = 0$ olur. Dolayısıyla $q_{0_1} = q_{0_2} = \dots = q_{0_n} = 0$ bulunur, fakat

$$Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = \begin{pmatrix} q_{0_1} + q_{1_1}i + q_{2_1}j + q_{3_1}k, q_{0_2} + q_{1_2}i + q_{2_2}j + q_{3_2}k, \dots, \\ q_{0_n} + q_{1_n}i + q_{2_n}j + q_{3_n}k \end{pmatrix} \neq (0, 0, \dots, 0)$$

olabilir. Bu nedenle $V_{\mathbb{H}_D} = (\mathbb{H}_D)^n$ dual kuaterniyon modülü üzerinde tanımlanan $\|\cdot\|$ fonksiyonu yarı norm fonksiyonudur. Böylece $V_{\mathbb{H}_D} = (\mathbb{H}_D)^n$ dual kuaterniyon modülü (6.17) eşitliği ile tanımlanan $\|\cdot\|$ fonksiyonuna göre dual kuaterniyon yarı normlu modül olur.

Teorem 6.7 $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı ve bu uzayın dual kuaternizasyonlaştırılması da $\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ olsun. Eğer $V_{\mathbb{R}}$ reel normlu uzay ise $\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ dual kuaterniyon yarı normlu modüldür.

İspat

$V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının dual kuaternizasyonu olan $\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ ifadesinin dual kuaterniyon modül olduğunu sonuç 6.4' den biliyoruz. $\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ dual kuaterniyon modülü üzerindeki normu $\|\cdot\|$ ile gösterirsek, $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}_D$ dual

kuaterniyonu ve $\vec{x} \in V_{\mathbb{R}}$ vektörü için $Q \otimes \vec{x} \in \mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ elemanının normunu $\|Q \otimes \vec{x}\|$ olarak yazabiliriz. Teorem 6.6 ile verdiğimiz $V_{\mathbb{H}_D}$ ve $\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ dual kuaterniyon modülleri arasındaki izomorfizma tanımından

$$\|Q \otimes \vec{x}\| = \|Q\| \|\vec{x}\| = |q_0| \|\vec{x}\| \quad (6.18)$$

eşitliğini tanımlayalım. Bu eşitlik yardımıyla üzerinde bir yarı norm olduğunu gösterelim.

$$N1) \|Q \otimes \vec{x}\| = |q_0| \|\vec{x}\| \geq 0 \text{ olduğu açıktır.}$$

$$N2) \lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \in \mathbb{H}_D \text{ olmak üzere,}$$

(6.18) ile verdiğimiz norm eşitliğini kullanırsak,

$$\|\lambda(Q \otimes \vec{x})\| = \|\lambda Q \otimes \vec{x}\| = \|\lambda Q\| \|\vec{x}\| = |\lambda_0| |q_0| \|\vec{x}\| = \|\lambda\| \|Q \otimes \vec{x}\| \text{ bulunur.}$$

$$N3) Q_1 = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \text{ ve } Q_2 = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k \in \mathbb{H}_D \text{ olmak üzere,}$$

$$\begin{aligned} \|Q_1 \otimes \vec{x} + Q_2 \otimes \vec{x}\| &= \|(Q_1 + Q_2) \otimes \vec{x}\| = \|Q_1 + Q_2\| \|\vec{x}\| = |q_0 + p_0| \|\vec{x}\| \\ &\leq (|q_0| + |p_0|) \|\vec{x}\| = |q_0| \|\vec{x}\| + |p_0| \|\vec{x}\| = \|Q_1\| \|\vec{x}\| + \|Q_2\| \|\vec{x}\| \\ &= (\|Q_1\| + \|Q_2\|) \|\vec{x}\| = \|Q_1 \otimes \vec{x} + Q_2 \otimes \vec{x}\| \end{aligned}$$

Burada $\|Q \otimes \vec{x}\| = |q_0| \|\vec{x}\| = 0 \Rightarrow |q_0| = 0 \text{ veya } \|\vec{x}\| = 0 \text{ olmalıdır. Eğer } |Q| = |q_0| = 0 \text{ ise } q_0 = 0 \text{ dır, fakat } Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \neq 0 \text{ olabilir. Bu nedenle } Q \otimes \vec{x} \neq 0 \text{ dır. Eğer } \|\vec{x}\| = 0 \text{ ise } V_{\mathbb{R}} \text{ norm uzayı olduğundan, } \vec{x} = 0 \text{ olmalıdır ve } Q \otimes \vec{x} = 0 \text{ dır. Dolayısıyla } \|\cdot\| \text{ fonksiyonu yarı norm fonksiyonudur. Buradan } \mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} \text{ dual kuaterniyon modülü } \|\cdot\| \text{ fonksiyonuna göre dual kuaterniyon yarı normlu modüldür.}$

Tanım 6.7 $V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaterniyon yarı normlu modül olsun. Eğer bu normlu modüldeki her Cauchy dizisi yakınsak ise $V_{\mathbb{H}_D}$ ye **tam modül veya Banach modül** adı verilir.

Örnek 6.4 $V_{\mathbb{H}_D} = \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyon modülünün bir $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}_D$ elemanı için $\|Q\| = |q_0|$ şeklinde tanımlanan norma göre dual kuaterniyon yarı normlu modül olduğunu örnek 6.1 'de gösterdik. Bu şekilde tanımlanan yarı norm fonksiyonu için $V_{\mathbb{H}_D} = \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyon yarı normlu modülün tamlığını inceleyelim.

Çözüm

$V_{\mathbb{H}_D} = \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyon modülünde bir $\{Q_n\}$ Cauchy dizisi alalım. Yani $\forall \varepsilon > 0$ için $\|Q_n - Q_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde $m, n > N(\varepsilon)$ doğal sayıları vardır. Biz $\{Q_n\}$ Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu, yani $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\|Q_n - Q\| < \varepsilon$ olacak şekilde $n > N(\varepsilon)$ doğal sayısının varlığını göstermek istiyoruz. Eğer $\{Q_n\}$ dizisinin elemanlarını

$$Q_n = q_{0_n} + q_{1_n}i + q_{2_n}j + q_{3_n}k$$

$Q_m = q_{0_m} + q_{1_m}i + q_{2_m}j + q_{3_m}k$ olarak belirlersek, $\{Q_n\}$ Cauchy dizisi olduğundan

$$\|Q_n - Q_m\| = \left\| (q_{0_n} - q_{0_m}) + (q_{1_n} - q_{1_m})i + (q_{2_n} - q_{2_m})j + (q_{3_n} - q_{3_m})k \right\| = |q_{0_n} - q_{0_m}| < \varepsilon$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $\{q_{0_n}\}$ $\mathbb{R}$ de Cauchy dizisi olur. $\mathbb{R}$ tam olduğundan, $q_{0_n} \rightarrow q_0$ olacak şekilde yakınsadığı bir nokta vardır. Yani $|q_{0_n} - q_0| < \varepsilon_1$ olacak şekilde $n > N$ sayısı vardır.

$$\text{O halde } \|Q_n - Q\| = \left\| (q_{0_n}, q_{1_n}, q_{2_n}, q_{3_n}) - (q_0, q_1, q_2, q_3) \right\|$$

$$= \left| (q_{0_n} - q_0, q_{1_n} - q_1, q_{2_n} - q_2, q_{3_n} - q_3) \right|$$

$$\leq |q_{0_n} - q_0| + |q_{1_n} - q_1| + |q_{2_n} - q_2| + |q_{3_n} - q_3|$$

$< \varepsilon_1 + \delta_x + \delta_y + \delta_z = \varepsilon_k$ olur. Burada $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ değerleri birden fazla

olabilir. $\mathbb{H}_D$ dual kuaterniyon modülü yarı normlu olduğundan, yakınsadığı noktalar birden fazla olabilir.

Dolayısıyla $\{Q_n\}$ Cauchy dizisinin yakınsaklığı gösterilmiş olur. Sonuç olarak $V_{\mathbb{H}_D} = \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyon yarı normlu modülü verilen norma göre tamdır.

Örnek 6.5 $V_{\mathbb{H}_D} = (\mathbb{H}_D)^n$ dual kuaterniyon modülünün üzerinde tanımlanan $\|\cdot\|$ normuna göre dual kuaterniyon yarı normlu modül olduğunu örnek 6.3 ile gösterdik. $V_{\mathbb{H}_D} = (\mathbb{H}_D)^n$ dual kuaterniyon modülünün bu norma göre tamlığını inceleyelim.

Çözüm

$(\mathbb{H}_D)^n$ dual kuaterniyon modülünde bir $\{Q_k\}$ Cauchy dizisi alalım. Yani $\forall \varepsilon > 0$ için $\|Q_k - Q_p\| < \varepsilon$ olacak şekilde $k, p > N(\varepsilon)$ doğal sayıları vardır. Biz $\{Q_k\}$ Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu, yani $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\|Q_k - Q\| < \varepsilon$ olacak şekilde $k > N(\varepsilon)$ doğal sayısının varlığını göstermek istiyoruz. $\{Q_k\}$ Cauchy dizisinin elemanlarını,

$$Q_k = (Q_{k_1}, Q_{k_2}, \dots, Q_{k_n})$$

$$Q_p = (Q_{p_1}, Q_{p_2}, \dots, Q_{p_n})$$

olarak belirlersek, daha açık bir ifadeyle

$$Q_k = (Q_{k_1}, Q_{k_2}, \dots, Q_{k_n}) = (q_{0_{k_1}} + q_{1_{k_1}}i + q_{2_{k_1}}j + q_{3_{k_1}}k, \dots, q_{0_{k_n}} + q_{1_{k_n}}i + q_{2_{k_n}}j + q_{3_{k_n}}k)$$

$$Q_p = (Q_{p_1}, Q_{p_2}, \dots, Q_{p_n}) = (q_{0_{p_1}} + q_{1_{p_1}}i + q_{2_{p_1}}j + q_{3_{p_1}}k, \dots, q_{0_{p_n}} + q_{1_{p_n}}i + q_{2_{p_n}}j + q_{3_{p_n}}k)$$

şeklindeki elemanları alırsak, $\{Q_k\}$ bir Cauchy dizisi olduğundan

$$\|Q_k - Q_p\| = \|(Q_{k_1} - Q_{p_1}, Q_{k_2} - Q_{p_2}, \dots, Q_{k_n} - Q_{p_n})\| = \left[\sum_{i=1}^n \|Q_{k_i} - Q_{p_i}\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

$$= \left[\sum_{i=1}^n \|Q_{k_i} - Q_{p_i}\|^2 \right] < \varepsilon^2 \Rightarrow \|Q_{k_i} - Q_{p_i}\| = |q_{0_{k_i}} - q_{0_{p_i}}| < \varepsilon$$

yazılabilir. $\|Q_{k_i} - Q_{p_i}\| = |q_{0_{k_i}} - q_{0_{p_i}}| < \varepsilon_i$ olduğundan $\{q_{0_{k_i}}\}$ lerin $\mathbb{H}_D$ de Cauchy dizisi olduğu sonucuna varılır. Örnek 6.4' de $\mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonlar kümesinin tam olduğunu gösterdiğimizden, $q_{0_{k_i}} \rightarrow q_{0_i}$ olacak şekilde yakınsadığı bir nokta vardır.

$$\begin{aligned}
\|Q_k - Q\| &= \|(Q_{k_1}, Q_{k_2}, \dots, Q_{k_n}) - (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)\| = \|(Q_{k_1} - Q_1, Q_{k_2} - Q_2, \dots, Q_{k_n} - Q_n)\| \\
&= \|(Q_{k_1} - Q_1, Q_{k_2} - Q_2, \dots, Q_{k_n} - Q_n)\| \leq \|Q_{k_1} - Q_1\| + \|Q_{k_2} - Q_2\| + \dots + \|Q_{k_n} - Q_n\| \\
&= |q_{0_{k_1}} - q_{0_1}| + |q_{0_{k_2}} - q_{0_2}| + \dots + |q_{0_{k_n}} - q_{0_n}| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $(\mathbb{H}_D)^n$ dual kuaterniyonlar kümesi $\|\cdot\|$ yarı normuna göre tamdır.

6.4 Dual Kuaterniyon Yarı Hilbert Modül

$V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayı olmak üzere, $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının dual kuaternizasyonu $V_{\mathbb{H}_D}$ olsun. $V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaterniyon modülü üzerinde,

$$\begin{aligned}
\langle \cdot, \cdot \rangle : V_{\mathbb{H}_D} \times V_{\mathbb{H}_D} &\rightarrow \mathbb{H}_D \\
(v, w) &\rightarrow \langle v, w \rangle
\end{aligned}$$

fonksiyonu $\forall w, v, u \in V_{\mathbb{H}_D}$ ve $a, b \in \mathbb{H}_D$ için aşağıdaki özellikleri sağlarsa bu fonksiyon **dual kuaterniyon değerli yarı iç çarpım fonksiyonu** adını alır.

$$P1) \langle v, v \rangle \geq 0$$

$$P2) \langle w + v, u \rangle = \langle w, u \rangle + \langle v, u \rangle$$

$$P3) \langle w, v \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}$$

$$P4) \langle wa, vb \rangle = \bar{a} \langle w, v \rangle b$$

Böylece, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonu $V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaterniyon modülü üzerinde dual kuaterniyon değerli yarı iç çarpımdır.

$\forall w \in V_{\mathbb{H}_D}$ elemanı $\|w\| = \sqrt{\|\langle w, w \rangle\|}$ normuna göre tam ise, $V_{\mathbb{H}_D}$ ye **dual kuaterniyon yarı Hilbert modül** denir.

Önerme 6.2 $V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaterniyon modülünün herhangi v, w elemanları için

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \text{ Schwartz eşitsizliği gerçekleşir.}$$

İspat

$v, w \in \mathbb{H}_D$ ve $Q \in \mathbb{H}_D$ elemanlarını alalım ve $\|v - wQ\|$ şeklindeki norm ifadesini düşünelim.

$$0 \leq \|v - wQ\|^2 = \langle v - wQ, v - wQ \rangle = \langle v, v \rangle - \langle v, wQ \rangle - \langle wQ, v \rangle + \langle wQ, wQ \rangle$$

$$0 \leq \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle Q - \overline{Q} \langle w, v \rangle + \overline{Q} \langle w, w \rangle Q$$

$0 \leq \|v\|^2 - \langle v, w \rangle Q - \overline{Q} \langle w, v \rangle + \overline{Q} \|w\|^2 Q$ yazılabilir. Bu eşitsizlik $\forall Q \in \mathbb{H}_D$ için geçerli olduğundan

$$Q = \frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} \text{ olarak seçebiliriz. O halde}$$

$$0 \leq \|v\|^2 - \langle v, w \rangle \frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \langle w, v \rangle + \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \|w\|^2 \frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2}$$

$$0 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2}$$

$$|\langle v, w \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \text{ eşitsizliği gerçekleşir.}$$

Önerme 6.3 $V_{\mathbb{R}}$ reel Hilbert uzayı olsun. $V_{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayının $V_{\mathbb{H}_D} = \mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ dual kuaterniyon modülü

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}) \times (\mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathbb{H}_D$$

$$Q \otimes x, P \otimes y \rightarrow \langle Q \otimes x, P \otimes y \rangle = \overline{Q} \langle x, y \rangle_{V_{\mathbb{R}}} P \quad (6.19)$$

tanımlanan iç çarpım ile birlikte **dual kuaterniyon yarı Hilbert modüldür.**

İspat

Bu şekilde tanımlanan bir fonksiyonu için iç çarpım aksiyomlarını inceleyelim.

P1) $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonu ve $\vec{x} \in V_{\mathbb{R}}$ için $Q \otimes \vec{x} \in \mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ elemanını alalım.

$$\langle Q \otimes x, Q \otimes x \rangle = \overline{Q} \langle x, x \rangle Q = \overline{Q} \|x\|^2 Q = \|x\|^2 \|Q\|^2 = \|x\|^2 |q_0|^2 \geq 0 \text{ olduğu açıktır.}$$

$$P2) \overline{\langle Q \otimes x, P \otimes y \rangle} = \overline{\overline{Q} \langle x, y \rangle P} = \overline{P \langle x, y \rangle Q} = \overline{P} \langle y, x \rangle Q = \langle P \otimes y, Q \otimes x \rangle$$

$$\begin{aligned} P3) \langle Q_1 \otimes x + Q_2 \otimes x, P \otimes y \rangle &= \langle (Q_1 + Q_2) \otimes x, P \otimes y \rangle = \overline{(Q_1 + Q_2)} \langle x, y \rangle P \\ &= \overline{Q_1} \langle x, y \rangle P + \overline{Q_2} \langle x, y \rangle P = \langle Q_1 \otimes x, P \otimes y \rangle + \langle Q_2 \otimes x, P \otimes y \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P4) \langle (Q \otimes x)a, (P \otimes y)b \rangle &= \langle Qa \otimes x, Pb \otimes y \rangle = \overline{Qa} \langle x, y \rangle Pb \\ &= \overline{a} \overline{Q} \langle x, y \rangle Pb = \overline{a} \langle Q \otimes x, P \otimes y \rangle b \end{aligned}$$

Burada $\langle Q \otimes x, Q \otimes x \rangle = \|x\|^2 |q_0|^2 = 0$ ise, $\|x\| \cdot |q_0| = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $|q_0| = 0$ veya $\|x\| = 0$ olmalıdır. Eğer $|q_0| = 0$ ise, $q_0 = 0$ dır. Fakat $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \neq 0$ olabilir. Eğer $\|x\| = 0$ ise, $x \in V_{\mathbb{R}}$ olduğundan ve $V_{\mathbb{R}}$ reel normlu uzay olduğundan $x = 0$ olmalıdır. Buradan $Q \otimes x \neq 0$ bulunur. Dolayısıyla $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonu yarı iç çarpım fonksiyonudur. Böylece $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ile gösterilen ve (6.19) eşitliği ile tanımlanan fonksiyonunun dual kuaterniyon değerli yarı iç çarpım fonksiyonu olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi ise (6.19) eşitliği ile verilen dual kuaterniyon değerli yarı iç çarpım fonksiyonuna göre, $V_{\mathbb{H}_D} = \mathbb{H}_D \otimes_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ dual kuaterniyon modülünün tamlığını inceleyelim.

$\{Q \otimes x_n\} \subset V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaterniyon modülünde bir Cauchy dizisi olsun. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $\|Q \otimes x_n - Q \otimes x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde $m, n > N$ doğal sayıları vardır. Bu durumda

$$\|Q \otimes (x_n - x_m)\|^2 = \langle Q \otimes (x_n - x_m), Q \otimes (x_n - x_m) \rangle < \varepsilon^2 \text{ eşitsizliği yazılabilir. (6.19)}$$

eşitliği ile verdiğimiz dual kuaterniyon değerli yarı iç çarpım fonksiyonu tanımından,

$$\|Q \otimes (x_n - x_m)\|^2 = \langle Q \otimes (x_n - x_m), Q \otimes (x_n - x_m) \rangle = \overline{Q} \langle (x_n - x_m), (x_n - x_m) \rangle Q$$

$$\|Q \otimes (x_n - x_m)\|^2 = \overline{Q} \cdot \|x_n - x_m\|^2 \cdot Q = \|Q\|^2 \|x_n - x_m\|^2 < \varepsilon^2 \text{ eşitsizliği mevcuttur.}$$

Bu eşitsizliğin her 2 yanının karekökü alınırsa,

$$\|Q \otimes (x_n - x_m)\| = \|Q\| \|x_n - x_m\| = |q_0| \cdot \|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \text{bulunur.} \quad \text{Buradan} \quad \text{da}$$

$$\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{|q_0|} = \eta \quad \text{dersek, } \eta > 0 \text{ dır. Dolayısıyla } \{x_n\} \text{ } V_{\mathbb{R}} \text{ reel vektör uzayında Cauchy}$$

dizisi olmuş olur. $V_{\mathbb{R}}$ reel Hilbert uzayı olduğundan, $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsaktır. Yani

$\delta_1 > 0$ sayısı için $\|x_n - x\| < \delta_1$ olacak şekilde $n > N$ doğal sayısı vardır. Biz burada

$\{Q \otimes x_n\}$ Cauchy dizisinin yakınsaklığını, yani $\|Q \otimes x_n - Q \otimes x\| < \varepsilon$ olacak şekilde $n > N$

doğal sayısının varlığını göstermek istiyoruz.

$$\|Q \otimes x_n - Q \otimes x\| = \|Q \otimes (x_n - x)\| = \|Q\| \cdot \|x_n - x\| \quad (6.20)$$

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\| \leq \delta_1 + \delta_2 \text{ yazılabilir.}$$

Burada $\|x_n - x_m\| \leq \delta_1 + \delta_2 = \frac{\varepsilon}{\|q_0\|}$ olarak seçersek, $\|x_n - x\| \leq \delta_1 < \frac{\varepsilon}{\|q_0\|}$ olur. Son olarak

$$(6.20) \text{ eşitliğine dönersek, } \|Q \otimes x_n - Q \otimes x\| = \|Q \otimes (x_n - x)\| = \|Q\| \cdot \|x_n - x\| < |q_0| \cdot \frac{\varepsilon}{|q_0|} = \varepsilon$$

elde edilir. O halde $\{Q \otimes x_n\}$ Cauchy dizisi tamdır. Dolayısıyla $V_{\mathbb{H}_D}$ tanımlanan yarı iç çarpım fonksiyonuna göre dual kuaterniyon yarı Hilbert modül olur.

Örnek 6.6 $V_{\mathbb{H}_D} = \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyon modülü üzerinde,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{H}_D \times \mathbb{H}_D \rightarrow \mathbb{H}_D$$

$$(P, Q) \rightarrow \langle P, Q \rangle = \bar{P} \cdot Q$$

şeklinde dual kuaterniyon değerli bir iç çarpım tanımlayalım. Bu iç çarpım tanımı ile birlikte $V_{\mathbb{H}_D} = \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyon modülü, dual kuaterniyon yarı Hilbert modüldür.

Çözüm

İlk olarak iç çarpım koşullarını inceleyelim.

P1) $P = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k \in \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonu için,

$$\langle P, P \rangle = \bar{P} P = p_0^2 \geq 0 \text{ olduğu açıktır.}$$

P2) $P, Q, R \in \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonları için

$$\langle P+Q, R \rangle = \overline{(P+Q)} \cdot R = (\overline{P} + \overline{Q}) \cdot R = \overline{P} \cdot R + \overline{Q} \cdot R = \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle$$

P3) $P, Q \in \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonlar olmak üzere,

$$\overline{\langle P, Q \rangle} = \overline{\overline{P} \cdot Q} = \overline{Q} \cdot \overline{P} = \langle Q, P \rangle$$

P4) $\alpha, \beta \in \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle P\alpha, Q\beta \rangle &= \overline{(P\alpha)} \cdot Q\beta = \overline{\alpha} (\overline{PQ}) \beta \\ &= \overline{\alpha} \langle P, Q \rangle \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{H}_D \end{aligned}$$

Böylece verilen fonksiyonun dual kuaterniyon değerli yarı iç çarpım fonksiyonu olduğu gösterilmiş olur.

$V_{\mathbb{H}_D} = \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyon modülünün tanımlanan yarı iç çarpım fonksiyonuna göre tam olduğu örnek 6.4' de gösterildiğinden dual kuaterniyon yarı Hilbert modül olur.

Örnek 6.7 $V_{\mathbb{H}_D} = (\mathbb{H}_D)^n$ dual kuaterniyon modülü,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathbb{H}_D)^n \times (\mathbb{H}_D)^n \rightarrow \mathbb{H}_D$$

$$(P_1, P_2, \dots, P_n), (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \rightarrow \langle (P_1, P_2, \dots, P_n), (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \rangle = \sum_{t=1}^n \overline{P_t} \cdot Q_t$$

şeklinde tanımlanan iç çarpım fonksiyonuna göre dual kuaterniyon yarı Hilbert modül olur.

Çözüm

$V_{\mathbb{H}_D} = (\mathbb{H}_D)^n$ dual kuaterniyon modülü üzerinde böyle bir iç çarpım tanımlanabileceğini bölüm 6.1' de dual simplektik çarpma tanımı ile vermiştik. İlk olarak bu iç çarpım fonksiyonunun dual kuaterniyon değerli yarı iç çarpım olduğunu gösterelim.

P1) $P = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in (\mathbb{H}_D)^n$ elemanının bileşenlerini $t = 1, 2, \dots, n$ değerleri için

$$P_t = p_{0_t} + p_{1_t}i + p_{2_t}j + p_{3_t}k \text{ şeklinde tanımlarsak}$$

$$\langle P, P \rangle = \langle (P_1, P_2, \dots, P_n), (P_1, P_2, \dots, P_n) \rangle = \sum_{t=1}^n \overline{P_t} \cdot P_t = \sum_{t=1}^n \|P_t\|^2 = \sum_{t=1}^n |p_{0_t}|^2 \geq 0 \quad \text{olduğu}$$

açıktır.

P2) $P = (P_1, P_2, \dots, P_n), Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ ve $R = (R_1, R_2, \dots, R_n) \in (\mathbb{H}_D)^n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle P + R, Q \rangle &= \langle (P_1, P_2, \dots, P_n) + (R_1, R_2, \dots, R_n), (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \rangle \\ &= \langle (P_1 + R_1, P_2 + R_2, \dots, P_n + R_n), (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \rangle \\ &= \sum_{t=1}^n \overline{(P_t + R_t)} \cdot Q_t = \sum_{t=1}^n (\overline{P_t} + \overline{R_t}) \cdot Q_t = \sum_{t=1}^n \overline{P_t} \cdot Q_t + \sum_{t=1}^n \overline{R_t} \cdot Q_t \\ &= \langle (P_1, P_2, \dots, P_n), (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \rangle + \langle (R_1, R_2, \dots, R_n), (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \rangle \\ &= \langle P, Q \rangle + \langle R, Q \rangle \end{aligned}$$

$$P3) \langle P, Q \rangle = \langle (P_1, P_2, \dots, P_n), (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \rangle = \sum_{t=1}^n \overline{P_t} \cdot Q_t = \sum_{t=1}^n \overline{\overline{Q_t} \cdot P_t} = \overline{\langle Q, P \rangle}$$

P4) $\alpha, \beta \in \mathbb{H}_D$ ve $P = (P_1, P_2, \dots, P_n), Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$

$$\langle P\alpha, Q\beta \rangle = \overline{P\alpha} \cdot Q\beta = \overline{\alpha} \overline{P} \cdot Q\beta = \overline{\alpha} \langle P, Q \rangle \beta$$

Buradan $(\mathbb{H}_D)^n$ dual kuaterniyon modülü üzerinde tanımlanan iç çarpım dual kuaterniyon değerli yarı iç çarpım oluşturur. Bu şekilde tanımlanan iç çarpıma göre tamlığı örnek 6.5' de gösterdiğimizden $(\mathbb{H}_D)^n$ dual kuaterniyon yarı Hilbert modül olur.

Önerme 6.4 $V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaterniyon modülü, üzerinde tanımlanan iç çarpım ile birlikte

yarı iç çarpım modül olsun. Eğer $\vec{x} \in V_{\mathbb{R}}$ ve $Q \in \mathbb{H}_D$ alırsak ve norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ şeklinde tanımlı ise, $\|Q \otimes x\| = \sqrt{\langle Q, Q \rangle \langle x, x \rangle}$ ifadesi $V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaterniyon modülü üzerinde yarı norm tanımlar.

İspat

$V_{\mathbb{H}_D}$ dual kuaterniyon modülünün elemanları $\vec{x} \in V_{\mathbb{R}}$ vektörü ve $Q \in \mathbb{H}_D$ dual kuaterniyonu için $Q \cdot \vec{x}$ şeklinde olduğundan,

$$\|Q\vec{x}\| = \|Q\| \cdot \|\vec{x}\| = |q_0| \|\vec{x}\| \quad (6.21)$$

şeklinde bir norm eşitliği vardır. Teorem 6.6 ile verdiğimiz izomorfluk nedeniyle

$$\|Q \otimes \vec{x}\| = \|Q\vec{x}\| = |q_0| \cdot \|\vec{x}\| \quad \text{eşitliğini yazabiliriz. Eğer } \vec{x} \in V_{\mathbb{R}} \text{ vektörü için norm}$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ şeklinde tanımlı ise, } \|Q \otimes x\| = \sqrt{\langle Q \otimes x, Q \otimes x \rangle} \text{ eşitliği yazılabilir ve}$$

$$(6.21) \text{ eşitliği göz önüne alınırsa, } \|Q \otimes x\| = \sqrt{\langle Q \otimes x, Q \otimes x \rangle} = |q_0| \|x\| \text{ norm eşitliği elde}$$

edilir. Buradan her 2 tarafın karesi alınırsa $\|Q \otimes x\|^2 = \langle Q \otimes x, Q \otimes x \rangle = \langle q_0, q_0 \rangle \langle x, x \rangle$ bulunur.

Norm şartlarını gerçeklemek istersek,

$$N1) \|Q \otimes x\|^2 = \langle Q \otimes x, Q \otimes x \rangle = \langle q_0, q_0 \rangle \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ olduğu açıktır.}$$

$$N2) \|\lambda(Q \otimes x)\|^2 = \|\lambda Q \otimes x\|^2 = \langle \lambda Q \otimes x, \lambda Q \otimes x \rangle = \langle \lambda_0 q_0, \lambda_0 q_0 \rangle \langle x, x \rangle$$

$$= \langle \lambda_0, \lambda_0 \rangle \langle q_0, q_0 \rangle \langle x, x \rangle = |\lambda_0|^2 |q_0|^2 \|x\|^2 = \|\lambda\|^2 \|Q \otimes x\|^2$$

eşitliğinden her iki tarafın karekökü alınırsa $\|\lambda(Q \otimes x)\| = \|\lambda\| \|Q \otimes x\|$ bulunur.

$$N3) \|Q \otimes x + P \otimes y\|^2 = \langle Q \otimes x + P \otimes y, Q \otimes x + P \otimes y \rangle$$

$$= \langle Q \otimes x, Q \otimes x \rangle + \langle Q \otimes x, P \otimes y \rangle + \langle P \otimes y, Q \otimes x \rangle + \langle P \otimes y, P \otimes y \rangle$$

$$= \|Q \otimes x\|^2 + \|P \otimes y\|^2 + \langle Q \otimes x, P \otimes y \rangle + \overline{\langle Q \otimes x, P \otimes y \rangle}$$

$$= \|Q \otimes x\|^2 + \|P \otimes y\|^2 + 2\text{Re}(\langle Q \otimes x, P \otimes y \rangle)$$

$$\leq \|Q \otimes x\|^2 + \|P \otimes y\|^2 + 2|\langle Q \otimes x, P \otimes y \rangle|$$

$$\leq \|Q \otimes x\|^2 + \|P \otimes y\|^2 + 2\|Q \otimes x\| \cdot \|P \otimes y\| = (\|Q \otimes x\| + \|P \otimes y\|)^2$$

Son olarak her iki tarafın karekökü alınırsa, $\|Q \otimes x + P \otimes y\| = \|Q \otimes x\| + \|P \otimes y\|$ bulunur.

Burada $\|Q \otimes x\|^2 = \langle Q \otimes x, Q \otimes x \rangle = \langle q_0, q_0 \rangle \langle x, x \rangle = 0$ ise, $V_{\mathbb{H}_d}$ dual kuaterniyon modülü

üzerinde tanımlanan iç çarpım fonksiyonu yarı iç çarpım fonksiyonu olduğundan

$Q \otimes x = 0$ olması gerekmez ve dolayısıyla $\|Q \otimes \vec{x}\| = 0$ iken $Q \otimes x = 0$ olmayabilir. Bu nedenle yarı normludur.

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında dual kuaterniyonlar kümesi üzerinde dual kuaterniyon modülleri elde edilerek analizin bazı tanım ve teoremleri dual kuaterniyon modülleri için incelenmiştir. Bu tez çalışmasından yola çıkarak farklı kuaterniyon çeşitleri için aynı işlemler veya analizin diğer konularındaki farklı sonuçlar incelenebilir.

KAYNAKLAR

-
- [1] Yüce, S. ve Ercan, Z., (2011). “ On Properties of the Dual Quaternions “
European Journal Of Pure and Applied Mathematics, 4 (2): 142-146.
 - [2] Hacısalihoğlu, H.H., (1975). Lineer Cebir, Hacısalihoğlu Yayınları.
 - [3] Halilov, H., Hasanoğlu A. ve Can M., (2005) . Tek Değişkenli Fonksiyonlar Analizi
 - [4] Kunt, M., (2008) . Tensör çarpımları ve nükleer C^* cebirleri, Yüksek Lisans tezi ,
Karadeniz teknik üniversitesi, Trabzon.
 - [5] Douglas, R. F., (2000) . Algebras of Linear Transformations.
 - [6] Du sautoy, M.,(1964) . ” Tensor spaces Marcus seminar notes UCSB”
 - [7] Wikipedia, tensor product, http://en.wikipedia.org/wiki/Tensor_product,
06.08.2014
 - [8] Conrad, K., Complexification, <http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/linmultialg/complexification.pdf>, 06.08.2014
 - [9] Jia. Yan Bin, (2003) . “Quaternions and Rotations ” , 455-577
 - [10] Demir, S., (2003) . Kompleks ve Dual Kuaterniyonların Fiziksel Uygulamaları,
Doktora tezi.
 - [11] Douglas, R. F., ve Pidkowich, A. F., (2003) . “ The spectral theorem in
quaternions, linear algebra and its aplication”
 - [12] Omran, S., ve Harthy, A., (2011) “ On Operator Algebras over Quaternions”
Journal Math.
 - [13] Majernik, V. (2006) “ Quaternion formulation of the Galilean Space time
Transformation,

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Çiğdem AY
Doğum Tarihi ve Yeri :04.12.1988 / Beyoğlu
Yabancı Dili :İngilizce
E-posta :cigdem_ay88@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	İstanbul Üniversitesi	2010
Lise	Fen Bilimleri	Kadriye Moroğlu Lisesi	2005