

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL LORENTZİYEN UZAYDA BİR PARAMETRELİ HAREKETLER VE DİSTELİ DİYAGRAMI

DOKTORA TEZİ

Arş. Gör. Zehra EKİNCİ

Anabilim Dalı: MATEMATİK

Programı: GEOMETRİ

MANİSA 2013

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL LORENTZİYEN UZAYDA BİR PARAMETRELİ HAREKETLER VE DİSTELİ
DİYAGRAMI

DOKTORA TEZİ

Arş. Gör. Zehra EKİNCİ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 25 Ekim 2013

Tezin Savunulduğu Tarih: 18 Kasım 2013

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN

Prof. Dr. Mehmet SEZER

Doç. Dr. Mustafa KAZAZ

Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

MANİSA 2013

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ	v
TEŞEKKÜR	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
GİRİŞ	x
 I. BÖLÜM	
DUAL GEOMETRİNİN TEMEL TANIM VE TEOREMLERİ	1
1.1. Dual Vektörlerin Uzayı	3
 II. BÖLÜM	
DUAL LORENTZİYEN UZAYDA TEMEL KAVRAMLAR VE KÜRESEL EĞRİLERİN GEOMETRİSİ	8
2.1. Dual Hiperbolik Küresel Eğrilerin Geometrisi.....	11
2.2. Dual Lorentziyen Küresel Eğrilerin Geometrisi.....	16
 III. BÖLÜM	
DUAL LORENTZİYEN UZAYDA BİR PARAMETRELİ KÜRESEL HAREKETLER	19
3.1. Bir Parametrelili Dual Hiperbolik Küresel Hareketler	19
3.1.1. Hiperbolik Küresel Harekette Eksen Yüzeyleri ile Birleştirilmiş Bir Timelike Regle Yüzeye Blaschke Yaklaşımı.....	26
3.1.2. Hiperbolik Küresel Harekette Doğru Kompleksi.....	31
3.1.3. Hiperbolik Küresel Harekette Doğru Yörüngeleri ve Disteli Formülü.....	36
3.1.4. Dual Hiperbolik Açık Yaklaşımıyla Lorentziyen Disteli Ekseninin İncelenmesi.....	41
3.1.5. Örnek	44
3.2. Bir Parametrelili Dual Lorentziyen Küresel Hareketler	53
3.2.a.) $\tilde{a}_m$ ve $\tilde{a}_f$ in Timelike Olması Durumunda Bir Parametrelili Dual Lorentziyen Küresel Hareketler	55
3.2.1. $\tilde{a}_m$ ve $\tilde{a}_f$ nin Timelike Olması Durumunda Eksen Yüzeyleri ile Birleştirilmiş Bir Timelike Regle Yüzeye Blaschke Yaklaşımı.....	60
3.2.2. $\tilde{a}$ nin Timelike Olması Durumunda Doğru Kompleksi.....	65
3.2.3. $\tilde{a}$ nin Timelike Olması Durumunda Doğru Yörüngeleri ve Disteli Formülü.....	69

3.2.4. Dual Merkez Açık Yaklaşımıyla Lorentziyen Disteli Ekseninin İncelenmesi.....	74
3.2.5. Örnek.....	77
3.2.b.) $\tilde{h}_m$ ve $\tilde{h}_f$ in Timelike Olması Durumunda Bir Parametrelili Dual Lorentziyen Küresel Hareketler.....	86
3.2.6. Eksen Yüzeyleri ile Birleştirilmiş Bir Spacelike Regle Yüzeye Blaschke Yaklaşımı.....	91
3.2.7. $\tilde{h}$ nın Timelike Olması Durumunda Doğru Kompleksi.....	96
3.2.8. $\tilde{h}$ nın Timelike Olması Durumunda Doğru Yörüngeleri ve Disteli Formülü.....	100
3.2.9. Dual Spacelike Açık Yaklaşımıyla Lorentziyen Disteli Ekseninin İncelenmesi.....	105
3.2.10. Örnek.....	108
 IV. BÖLÜM	
DUAL LORENTZİYEN UZAYDA DİSTELİ DİYAGRAMI.....	117
4.1. Dual Hiperbolik Küresel Hareketin Disteli Diyagramı.....	117
4.1.1. Dual Hiperbolik Küresel Harekette Disteli Diyagramının Genel Durumu.....	125
4.1.2. Timelike Disteli Diyagramında Dağılıma Parametresi.....	130
 4.2. Dual Lorentziyen Küresel Hareketin Disteli Diyagramı.....	135
4.2.1. Dual Lorentziyen Küresel Harekette Disteli Diyagramının Genel Durumu.....	144
4.2.2. Spacelike Disteli Diyagramında Dağılıma Parametresi	149
 EK 1	
LORENTZİYEN UZAYDA TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	155
E.1.1. Lorentziyen 3-Uzayında Eğrilerin Frenet Formülleri.....	162
E.1.2. Lorentziyen 3-Uzayında Regle Yüzeylerin Diferansiyel Geometrisi.....	164
 REFERANSLAR.....	173
ÖZGEÇMİŞ	176

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{R}_1^2$	: Minkowski 2-uzayı
S_1^1	: Lorentziyen birim çember
H_0^1	: Hiperbolik birim çember
$\mathbb{R}_1^3$	: Minkowski 3-uzayı
S_1^2	: Lorentziyen birim küre
H_0^2	: Hiperbolik birim küre
$\mathbb{D}_1^3$	: Dual Lorentziyen uzay
$\tilde{S}_1^2$	: Dual Lorentziyen birim küre
$\tilde{H}_0^2$	: Dual hiperbolik birim küre
$\mathbb{D}$	: Dual sayılar cümlesi
$\varepsilon = (0,1)$	: Dual birim
$\bar{a} = a + \varepsilon a^*$	: Dual sayı
$\mathbb{D}^3$	: Dual vektörlerin uzayı ($\mathbb{D}$ -Modül)
$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}^*$	: Dual vektör
$\tilde{S}^2$	: Birim dual küre
$\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$	: Dual açı
L_1	: $\mathbb{R}_1^3$ de izafi uzay
L_2	: $\mathbb{R}_1^3$ de sabit uzay
L_3	: $\mathbb{R}_1^3$ de hareketli uzay
L_3 / L_2	: Hareketli uzayın sabit uzaya göre hareketi
Σ_1	: Dual Lorentziyen izafi uzay
Σ_2	: Dual Lorentziyen sabit uzay
Σ_3	: Dual Lorentziyen hareketli uzay
$\{O; \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{a}}\}$	: Σ_1 in ortogonal sistemi
$\{O; \tilde{\mathbf{q}}_f, \tilde{\mathbf{h}}_f, \tilde{\mathbf{a}}_f\}$	: Σ_2 nin ortogonal sistemi
$\{O; \tilde{\mathbf{q}}_m, \tilde{\mathbf{h}}_m, \tilde{\mathbf{a}}_m\}$	: Σ_3 ün ortogonal sistemi

$\tilde{\Omega}$	: Ani dual Pfaff vektörü
$\bar{\Omega}$	: Dual açısal hız vektörü
$\tilde{\Omega}_m(t)$	: Hareketli pol eğrisi
$\tilde{\Omega}_f(t)$	: Sabit pol eğrisi
$\bar{k}_{1m}, \bar{k}_{2m}$	: Hareketli eksen yüzeyinin Blaschke invariantları
$\bar{k}_{1f}, \bar{k}_{2f}$	: Sabit eksen yüzeyinin Blaschke invariantları
$\tilde{U}$	: Blaschke çatısında Disteli eksen

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1.1. Dual açısı.....	7
Şekil 2.1.1. $\tilde{S}_1^2$ Dual Lorentziyen birim küresi, $\tilde{H}_0^2$ dual hiperbolik birim küresi ve $\tilde{\Lambda}$ dual ışık konisi.....	10
Şekil 3.1.1. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili hiperbolik küresel hareketinin sabitlenmiş $\tilde{X}$ timelike doğrusu.....	36
Şekil 3.1.2. $\tilde{q}$ nın timelike olması durumunda hareketli timelike doğru $\tilde{X}$ ve bu Doğrunun $\tilde{U}$ Disteli eksenini.....	37
Şekil 3.2.1. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketinin sabitlenmiş $\tilde{X}$ spacelike doğrusu.....	70
Şekil 3.2.2. $\tilde{a}$ nın timelike olması durumunda hareketli spacelike doğru $\tilde{X}$ ve bu doğrunun $\tilde{U}$ Disteli eksenini.....	70
Şekil 3.2.3. $\tilde{h}$ nın timelike olması durumunda Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketinin sabitlenmiş $\tilde{X}$ spacelike doğrusu	101
Şekil 3.2.4. $\tilde{h}$ nın timelike olması durumunda hareketli spacelike doğru $\tilde{X}$ ve bu doğrunun $\tilde{U}$ Disteli eksenini.....	101
Şekil 4.1.1. Küçük ve büyük dışlinin $\tilde{p}_{21}, \tilde{p}_{31}$ timelike eksenleri ve $\tilde{p}_{32}$ izafi timelike eksenini.....	118
Şekil 4.1.2. Küçük dışlinin $\tilde{p}_{21}$ timelike eksenini ve büyük dışlinin $\tilde{p}_{31}$ timelike eksenini.....	119
Şekil 4.1.3. Ani vida ekseninin $\tilde{p}_{32}$ birim dual timelike vektörü.....	120
Şekil 4.1.4. Timelike Plücker konoidi.....	123
Şekil 4.1.5. Dual hiperbolik küresel hareketin Disteli diyagramı.....	125
Şekil 4.1.6. Dual hiperbolik küresel hareketin Disteli diyagramı için genel durum.....	129
Şekil 4.1.7. Ψ timelike Plücker konoidinin δ_Ψ dağılıma parametresi.....	130
Şekil 4.1.8. Σ_3 / Σ_2 eksen yüzeylerinin δ dağılıma parametresi.....	131
Şekil 4.2.1. Küçük ve büyük dışlinin $\tilde{p}_{21}, \tilde{p}_{31}$ spacelike eksenleri ve $\tilde{p}_{32}$ izafi spacelike eksenini.....	136
Şekil 4.2.2. Küçük dışlinin $\tilde{p}_{21}$ spacelike eksenini ve büyük dışlinin $\tilde{p}_{31}$ spacelike eksenini.....	137
Şekil 4.2.3. Ani vida ekseninin $\tilde{p}_{32}$ birim dual spacelike vektörü.....	138

Şekil 4.2.4. Spacelike Plücker konoidi.....	141
Şekil 4.2.5 Dual Lorentziyen küresel hareketin Disteli diyagramı.....	143
Şekil 4.2.6. Dual Lorentziyen küresel hareketin Disteli diyagramı için genel durum.....	148
Şekil 4.2.7. Ψ spacelike Plücker konoidinin δ_Ψ dağılma parametresi.....	150
Şekil 4.2.8. Σ_3/Σ_2 eksen yüzeylerinin δ dağılma parametresi.....	151
Şekil E.1. Lorentziyen ve hiperbolik birim çemberler.....	156
Şekil E.2. Hiperbolik açı.....	157
Şekil E.3. Lorentziyen düzlemde merkez açı teoremi.....	158
Şekil E.4. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında vektörler.....	159
Şekil E.5. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında birim küreler.....	160

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım esnasında kıymetli vakitlerini ayırıp elinizdeki bu tezin son hâlini almasında yardımlarını esirgemeyen, her daim beni destekleyen ve teşvik eden, kendisinin doktora öğrencisi olmakla gurur duyduğum saygıdeğer hocam Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU' ya hürmet ve şükranlarımı sunarım.

Tezin hazırlanma aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle çalışmamıza destek veren değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet Önder'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca tez izleme komitesinde bulunan, ufuk açıcı fikir ve önerileriyle çalışmamıza ışık tutan ikinci danışmanım Doç. Dr. Mustafa KAZAZ'a ve hocam Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT'e teşekkürlerimi sunarım.

Maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, bugünlere gelmeme vesile olan babam Salih ARI ve annem Ayten ARI' ya, güven, anlayış ve desteğini her daim yanımda hissettiğim eşim Ramazan EKİNCİ' ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Dual Lorentziyen uzayda bir parametrelili hareketler ve Disteli diyagramı ile ilgili olan bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, dual geometrinin temel tanım ve teoremlerine yer verilmiştir.

İkinci bölümde, dual Lorentziyen uzayda temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca bu uzayda dual hiperbolik küresel eğrilerin ve dual Lorentziyen küresel eğrilerin geometrisi hatırlatılmıştır.

Üçüncü bölümde, dual Lorentziyen uzayda bir parametrelili dual hiperbolik küresel hareketler ve bir parametrelili dual Lorentziyen küresel hareketler incelenmiştir. Bu inceleme, küreler üzerinde alınan eğrilere karşılık gelen eksen yüzeylerinin Blaschke çatıları ile yapılmıştır. Blaschke çatısında disteli eksenini ele alınarak, hiperbolik ve Lorentziyen küresel hareketlerde Euler-Savary formülü elde edilmiştir. Kısımların sonlarında verilen örneklerde Lorentziyen anlamda ortogonal dönme matrisleri ele alınarak hareketli ve sabit eksen yüzeylerinin reel ve dual invaryantları elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, Martin Disteli tarafından verilen diyagram Figliolini, Stachel ve Angeles'in çalışmaları göz önüne alınarak, Lorentziyen uzayda hiperbolik küresel hareket ve Lorentziyen küresel hareket için incelenmiştir. Bu diyagramlar, Lorentziyen uzayda vida dişlilerinin bir çiftinin açılma hızı, konumu ve vida hareketinin adımları arasındaki bağıntıyı vermektedir.

Son olarak tezin ek bölümünde Lorentziyen uzayda temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca bu uzayda eğrilerin ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi hatırlatılmıştır.

ABSTRACT

This thesis which is related to the one parameter motions and Disteli diagram in dual Lorentzian space consists of four sections.

In the first section, we have given basic concepts and theorems in dual geometry.

In the second section, we have given basic concepts and theorems in dual Lorentzian space. Moreover, dual hyperbolic spherical curves and Lorentzian spherical curves in the dual Lorentzian space are brought to mind.

In the third section, we have introduced one parameter dual hyperbolic spherical motions and one parameter dual Lorentzian spherical motions in the dual Lorentzian space. This investigation the curves on the sphere corresponding to with Blaschke frame of axodes have been given. By considering Disteli axis on the Blaschke frame we have obtained Euler Savary formulae of hyperbolic and Lorentzian spherical motions. At the end of sections, by obtaining orthogonal rotation matrices in the sense of dual Lorentzian type 3×3 , we have found real and dual invariants of fixed and moving axodes.

In the fourth section, by considering diagram given by Martin Disteli and study of Figliolini, Stachel and Angeles we have introduced this diagram for hyperbolic spherical and Lorentzian spherical motions in the dual Lorentzian space. These diagrams, illustrating the relation between the angular velocities of a pair of skew gears and the position and pitch of their relative screw motion in the dual Lorentzian space.

Finally, in the appendix of this thesis we have given basic concepts and theorems in the Lorentzian geometry. Furthermore, differential geometry of curves and surfaces in the Lorentzian geometry are brought to mind.

1.0. GİRİŞ

Doğru yörüngeleri kinematik dizaynda ve mekanizmde önemli rol oynamaktadır. Uzak hareketlerinde katı bir cisme bağlanmış yönlü doğruların yörüngeleri regle yüzeylerdir. Regle yüzeylerin diferansiyel geometrisi, dizayn problemleri, uzak mekaniği, bilgisayar modellemeleri ve robot biliminin analitik araçlarının kinematik modellemelerinde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

Hareket geometrisinde önemli bir yere sahip olan dişlilerin bir ikilisinin hareketi, uzayda küresel hareket olarak çalışılmaktadır. Bu düşünceyle, uzaydaki bir dişli küresel hareketin eksen yüzeyi olarak düşünülebilir ve bu hareket regle yüzeylerin diferansiyel geometrisinin göz önüne alınmasıyla belirlenebilir. Böylece regle yüzeyler, dual uzayın birim dual küresinin yüzeyi üzerinde yatan küresel eğriler olarak ifade edilebilir. Bu karşılık gelme Transfer prensibi veya E. Study dönüşümü olarak bilinmektedir [18,25]. Bazı yapıların bir dual vektör ile ifade edilmesi daha uygun olduğu için vida teorisi dual kavramlarla doğrudan bağlantılıdır [3,17,34].

Martin Disteli, dişlilerin bir ikilisinin üç boyutlu uzayda küre üzerine transferinde Releaux prensibini kullanarak inceleme yapmıştır [8,9]. Disteli, aynı zamanda vida teorisinde hareketleri incelemiş ve bir diyagram vermiştir. Bu diyagram, dişlilerin vida hareketinin adımı, bir ikilisinin açısal hızı ve konumu arasındaki bağıntıyı vermektedir [9,10]. Disteli'nin makalelerini alışılmış olmayan sol el çatının kullanılması, vektör notasyonlarının eksikliğinden ve alt indis kullanılmadığı için altıdan fazla çatının oluşmasından dolayı anlamak oldukça zordur. Bu sebeple Figliolini, Stachel ve Angeles Disteli'nin makalelerini daha anlaşılabilir bir hale getirmek için, yönlü doğruları ve vida hareketlerini ifade ederken dual vektörleri kullanmışlardır [12].

Uzak kinematikinde regle yüzeylerin bir parçası olan hareketli bir cismin ani vida eksen, hareketli uzakta hareketli eksen yüzeyi, sabit uzakta sabit eksen yüzeyi üretir. Bu hareket boyunca bu eksen yüzeyleri tek bir teğet boyunca birbiri üzerinde yuvarlanırlar. Yine bu eksen yüzeylerine karşılık gelen dual eğriler ile bu yüzeylerin kinematik ve geometrisi bazı matematikçiler tarafından incelenmiştir [2,11,19,24].

Düzlem kinematikinde, düzgün bir eğrinin herhangi bir noktasında olan eğrilik çemberinin yarıçapı ve merkezi, noktanın konumu hareketli düzlemde verilmişse Euler-Savary formülü ile belirlenebilir. Düzlemde verilen Euler-Savary formülü daha sonra küre üzerinde de incelenmiştir [2,10,34]. Müller, 1-parametrelili küresel hareketlerin yörünge eğrileri ile bağlantılı olarak karşılık gelen Euler-Savary formülünü ifade etmiştir [19].

Lorentziyen uzakta Öklidyen uzaya benzer olarak birçok bağıntı elde edilmiştir. Ayrıca Lorentziyen uzakta doğru karakterlerine göre daha farklı ve ilginç sonuçlar karşımıza çıkmaktadır. Birman ve Nomizu, Lorentziyen uzakta trigonometrik kavramları çalışmıştır [9]. Lorentziyen uzakta eğrilerin ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi ile ilgili çalışmalar bulunmaktadır [16,22,26,27,30,31,32].

Lorentziyen uzay kinematiğinde küresel hareket, hareketli ve sabit hiperbolik küreler ile belirleniyorsa hiperbolik küresel hareket, hareketli ve sabit Lorentziyen küreler ile belirleniyorsa Lorentziyen küresel hareket olarak adlandırılır [21]. Öklidyen duruma benzer olarak Lorentziyen uzayda Uğurlu ve Çalışkan tarafından verilen E.Study dönüşümü ile dual Lorentziyen uzayda birim dual hiperbolik (veya Lorentziyen) kürenin birim dual timelike (veya spacelike) vektörleri Lorentziyen uzayda yönlü timelike (veya spacelike) doğrulara birebir karşılık gelirler [29]. Kürelerin birbirlerine göre 1-parametrelili küresel hareketleri Lorentziyen uzayda ve dual Lorentziyen uzayda birçok çalışmada incelenmiştir [4,13,21,28,29]. Hiperbolik küresel harekette Öklidyen uzaya benzer olarak Euler-Savary formülü verilmiştir [28].

Bu tez çalışmasında, ilk olarak dual Lorentziyen uzayda sabit ve hareketli birim dual hiperbolik kürelerin birbirlerine göre 1-parametrelili hareketleri incelenmiştir. Bu inceleme, hareketli ve sabit birim dual hiperbolik küre üzerinde alınan eğrilere karşılık gelen regle yüzeylerin Blaschke çatıları ile yapılmıştır. Blaschke çatısında, Disteli eksenini ele alınarak hiperbolik küresel harekette dual hiperbolik açı vasıtasıyla Euler savary formülüne ulaşılmış ve Disteli eksenini verilmiştir. Daha sonra Lorentziyen anlamda ortogonal dönme matrisleri ele alınarak verilen örnekte, bir parametrelili dual hiperbolik küresel hareketin Pfaff vektörü bulunmuş, hareketli ve sabit eksen yüzeylerinin integral invaryantları elde edilmiştir.

İkinci kısımda ise hareketli ve sabit birim dual Lorentziyen kürelerin birbirlerine göre hareketleri iki durumda incelenmiştir. Bu iki durum, Blascke çatı elemanlarının karakterlerinin farklı olmasından dolayı karşımıza çıkmaktadır. Yine birinci kısma benzer incelemeler bu kısımda da yapılmıştır.

Son bölümde ise Martin Disteli tarafından verilen diyagram Figliolini, Stachel ve Angeles'in çalışmaları göz önüne alınarak, Lorentziyen uzayda hiperbolik küresel hareket ve Lorentziyen küresel hareket için iki kısımda incelenmiştir [9,10,11,12]. Bu diyagram, birim dual timelike vektör ile verilen dual hiperbolik hareketin ani vida eksenini için timelike Disteli diyagramı, birim dual spacelike vektör ile verilen dual Lorentziyen hareketin ani vida eksenini için spacelike Disteli diyagramı olarak adlandırılmıştır. Bu diyagramlar, Lorentziyen uzayda vida dişlilerinin bir parçasının açısal hızı, konumu ve vida hareketinin adımı aralarındaki bağıntıyı vermektedir.

I. BÖLÜM

DUAL GEOMETRİNİN TEMEL TANIM VE TEOREMLERİ

Dual geometri, uzay mekaniğinin kinematik analizinde büyük avantaj sağlamaktadır. Dual geometri, özellikle katı bir cismin kinematik dönüşüm yoluyla yer değiştirmesinde kullanılmaktadır. Ayrıca bu kullanımın kinematik, dinamik, robot hareketleri ve mühendislik için önemli uygulamaları bulunmaktadır. Dual geometrinin avantajlarından yararlandığımız çalışmamızın bu bölümünde dual geometrinin temelini teşkil eden bazı kavramlar verilecektir.

$\forall a, a^* \in \mathbb{R}$ için $\bar{a} = (a, a^*)$ sıralı ikililerinin cümlesi olan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kartezyen çarpımı

$$\mathbb{D} = \{(a, a^*) \mid a, a^* \in \mathbb{R}\}$$

ile gösterilsin. Bu cümle üzerinde aşağıdaki biçimde tanımlanan işlemleri göz önüne alalım:

$\forall (a, a^*), (b, b^*) \in \mathbb{D}$ için,

Toplama:

$$+ : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \bar{a} + \bar{b},$$

$$\bar{a} + \bar{b} = (a, a^*) + (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$$

Çarpma:

$$\cdot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = (ab, ab^* + a^*b)$$

$$\text{Eşitlik} \quad : (a, a^*) = (b, b^*) \Leftrightarrow a = b \text{ ve } a^* = b^*$$

dır [7, 15].

Tanım 1.1. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesine “dual sayılar sistemi” ve $\forall (a, a^*) \in \mathbb{D}$ elemanına da bir *dual sayı* denir [14].

Teorem 1.1. $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır [14].

Teorem 1.2. $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ üçlüsü bir cisim değildir [14].

Teorem 1.3 $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar [14].

Tanım 1.2. Bir $\bar{a} = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısındaki " a " ya $\bar{a}$ 'nin *reel kısmı* " a^* " a da $\bar{a}$ 'nin *dual kısmı* denir. Böylece $\text{Re}(\bar{a}) = a$ ve $\text{Du}(\bar{a}) = a^*$ yazılır [14].

Tanım 1.3. $(0, 1) \in \mathbb{D}$ dual sayısına *dual birim* denir ve

$$\varepsilon = (0, 1)$$

notasyonu ile gösterilir.

Buna göre

$$\varepsilon^2 = \varepsilon \cdot \varepsilon = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0, 0) = 0$$

olur [14].

Teorem 1.4. Bir $\bar{a} = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı

$$\bar{a} = a + \varepsilon a^*$$

formunda yazılabilir [14].

Tanım 1.4. Bir $\bar{a} = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısının bir $\lambda \in \mathbb{R}$ skaları ile çarpımı

$$\lambda \bar{a} = \lambda(a, a^*) = (\lambda a, \lambda a^*)$$

eşitliği ile verilir [14].

Teorem 1.5. $a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} a & a^* \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

formundaki matrislerin cümlesi $\mathbb{D}$ ye izomorftur [14].

Tanım 1.5. $\bar{a} = (a, a^*)$ dual sayılarının bütününe *dual düzlem* denir ve " $\mathbb{D}$ " ile gösterilir. Her bir (a, a^*) ikilisine de dual düzlemin bir *dual noktası* denir [14].

Tanım 1.6. Bir $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$ dual sayısının mutlak değeri

$$|\bar{a}| = |a|$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanım $\mathbb{D}$ de bir metrik vermez [14].

Tanım 1.7. f , $\bar{x} = x + \varepsilon x^*$ dual değerli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde f nin Maclaurin seri açılımı

$$f(\bar{x}) = f(x + \varepsilon x^*) = f(x) + \varepsilon x^* f'(x)$$

ile tanımlanır. Burada $f'(x)$, f nin x e göre türevidir [14,34].

1.1. Dual Vektörlerin Uzayı (ID-Modül)

Dual sayılar halkasının kendisiyle üç defa Kartezyen çarpımı olan

$$\mathbb{D}^3 = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \left\{ \tilde{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \mid \bar{a}_i \in \mathbb{D}, 1 \leq i \leq 3 \right\}$$

cümlesini göz önüne alalım. Elemanları sıralı dual sayı üçlülerinden oluşan bu cümle üzerinde, toplama ve skaler ile çarpma işlemleri aşağıdaki biçimde tanımlansın:

Toplama:

$$\begin{aligned}
 + : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 &\rightarrow \mathbb{D}^3 \\
 (\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}) &\rightarrow \tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{b}} \\
 \tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{b}} &= (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) + (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) \\
 &= (\bar{a}_1 + \bar{b}_1, \bar{a}_2 + \bar{b}_2, \bar{a}_3 + \bar{b}_3)
 \end{aligned}$$

Skaler ile çarpma:

$$\begin{aligned}
 \cdot : \mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 &\rightarrow \mathbb{D}^3 \\
 (\bar{\lambda}, \tilde{\mathbf{a}}) &\rightarrow \bar{\lambda} \cdot \tilde{\mathbf{a}} \\
 \bar{\lambda} \cdot \tilde{\mathbf{a}} &\rightarrow \bar{\lambda}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = (\bar{\lambda}\bar{a}_1, \bar{\lambda}\bar{a}_2, \bar{\lambda}\bar{a}_3)
 \end{aligned}$$

Teorem 1.6. $(\mathbb{D}^3, +, \cdot)$ üçlüsü bir $\mathbb{D}$ -modüldür [14].

Tanım 1.8. $\mathbb{D}$ -Modül'ün elemanları olan sıralı dual sayı üçlülerine *dual vektörler* denir [14].

Teorem 1.7. $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}}^* \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere, $\mathbb{D}$ -Modül'ün her bir $\tilde{\mathbf{a}}$ dual vektörü

$$\tilde{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}} + \varepsilon \vec{\mathbf{a}}^*, \quad \varepsilon = (0, 1) \in \mathbb{D}$$

biçiminde yazılabilir [14].

Tanım 1.9. Bir $\tilde{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}} + \varepsilon \vec{\mathbf{a}}^*$ dual vektörünün $\bar{\lambda} \in \mathbb{D}$ skaleri ile çarpımı

$$\bar{\lambda} \tilde{\mathbf{a}} = \bar{\lambda}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = \bar{\lambda}(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}}^*) = (\bar{\lambda}\vec{\mathbf{a}}, \bar{\lambda}\vec{\mathbf{a}}^*)$$

biçiminde tanımlanır [7, 14, 34].

Teorem 1.8. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı, $\mathbb{D}$ -Modül'ün $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{0}})$ biçimindeki elemanların cümlesine izomorftur [14].

Tanım 1.10. $(\vec{\mathbf{0}}, \vec{\mathbf{0}}) \in \mathbb{D}$ -Modül elemanına, *sıfır dual vektörü* denir ve f izomorfizminde karşılık geldiği $\vec{\mathbf{0}}$ reel vektörü ile gösterilir [14].

Tanım 1.11. $\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \tilde{b} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in \mathbb{D}$ -Modül dual vektörlerinin iç çarpımı

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 &\rightarrow \mathbb{D} \\ (\tilde{a}, \tilde{b}) &\rightarrow \langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle, \\ \langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle &= \langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır [7,14].

Reel vektör uzayları üzerinde tanımlanan iç çarpımın sağladığı bütün aksiyomlar, $\mathbb{D}^3$ uzayında da gerçekleşir.

$$\forall \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{D} \text{ Modül ve } \bar{\lambda} \in \mathbb{D} \text{ için,}$$

$$\text{i) } \langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \langle \tilde{b}, \tilde{a} \rangle$$

$$\text{ii) } \langle \bar{\lambda} \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \bar{\lambda} \langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \langle \tilde{a}, \bar{\lambda} \tilde{b} \rangle$$

$$\text{iii) } \langle \tilde{a} + \tilde{b}, \tilde{c} \rangle = \langle \tilde{a}, \tilde{c} \rangle + \langle \tilde{b}, \tilde{c} \rangle, \langle \tilde{a}, \tilde{b} + \tilde{c} \rangle = \langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle + \langle \tilde{a}, \tilde{c} \rangle$$

$$\text{iv) } \langle \tilde{a}, \tilde{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \tilde{a} = 0$$

şartları sağlanır.

Tanım 1.12. Bir dual vektörünün *normu*

$$\|\tilde{a}\| = (\langle \tilde{a}, \tilde{a} \rangle)^{1/2} = \left(\|\vec{a}\|, \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \right), \vec{a} \neq 0$$

biçiminde tanımlanır [7,14,34].

Tanım 1.13. Bir $\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ dual vektörü için

$$\|\vec{a}\| = (1, 0)$$

ise $\tilde{a}$ ya bir *birim dual vektör* denir [14].

Sonuç 1.1. $\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ bir birim dual vektör ise

$$\|\tilde{\vec{a}}\|=1 \text{ ve } \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$$

olur [14].

Teorem 1.9. $\tilde{\vec{a}} = (\vec{a}, \vec{a}^*) \in \mathbb{D}$ -Modül olmak üzere

$$\tilde{\vec{a}}_0 = \frac{\tilde{\vec{a}}}{\|\tilde{\vec{a}}\|}$$

bir *birim dual vektördür* [14].

Tanım 1.14. $\tilde{S}^2 = \left\{ \tilde{\vec{x}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \mid \|\tilde{\vec{x}}\| = (1, 0); \vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{R}^3 \right\}$ cümlesine $\mathbb{D}$ -Modül'de *birim dual küre* denir [7, 14].

Teorem 1.10. (E. Study) $\tilde{\vec{x}} \neq (\vec{0}, \vec{x}) \in \mathbb{D}$ -Modül olmak üzere $\mathbb{D}$ -Modül'de denklemi

$$\|\tilde{\vec{x}}\| = (1, 0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları, $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir [7, 14].

Tanım 1.15. $\tilde{\vec{x}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \in \mathbb{D}$ -Modül olmak üzere,

$$\tilde{U} = \frac{\tilde{\vec{x}}}{\|\tilde{\vec{x}}\|}$$

birim dual vektörüne $\tilde{\vec{x}}$ vektörünün *ekseni* denir [14].

Tanım 1.16.

$$k = \frac{\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle}{\|\vec{x}\|^2}$$

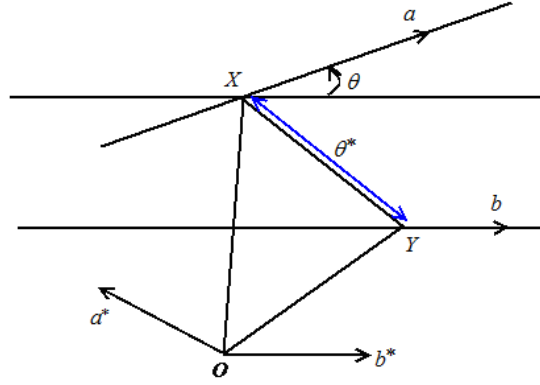
reel sayısına $\tilde{\vec{x}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$ dual vektörünün *adımı* veya *yükselişi* denir [14].

Tanım 1.17. $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual vektörleri verildiğinde bunların iç çarpımı

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \cos \bar{\theta}$$

ile verilir. Bu eşitlikteki $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual sayısına $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual vektörleri arasındaki *dual açı* denir [14].

$\bar{\theta}$ dual açısı, $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual vektörlerinin $\mathbb{R}^3$ deki temsil ettikleri yönlü doğrular arasındaki θ açısı ile bu iki doğru arasındaki en kısa uzaklık olan θ^* dan oluşmaktadır.



Şekil 1.1.1. Dual açı

II. BÖLÜM

DUAL LORENTZİYEN UZAYDA TEMEL KAVRAMLAR VE KÜRESEL EĞRİLERİN GEOMETRİSİ

$\mathbb{D}^3$ dual uzayı üzerinde, dual anlamda $(-, +, +)$ işaretli Lorentziyen iç çarpımı tanımlanırsa, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentziyen uzayı karşımıza çıkar. Bu kesimde dual Lorentziyen uzayın temel tanım ve teoremleri verilecektir.

Tanım 2.1. $\tilde{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}} + \varepsilon \vec{\mathbf{a}}^*$, $\tilde{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \varepsilon \vec{\mathbf{b}}^* \in \mathbb{D}^3$ olsun. $\mathbb{D}^3$ uzayı üzerinde

$$\langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}} \rangle = \langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \rangle + \varepsilon \left[\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}^* \rangle + \langle \vec{\mathbf{a}}^*, \vec{\mathbf{b}} \rangle \right]$$

biçiminde tanımlanan dual Lorentziyen iç çarpımı alınırsa $(\mathbb{D}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine *dual Lorentziyen uzay* denir ve bu uzay $\mathbb{D}_1^3$ ile gösterilir. Buna göre,

$$\mathbb{D}_1^3 = \left\{ \tilde{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}} + \varepsilon \vec{\mathbf{a}}^* \mid \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}}^* \in \mathbb{R}_1^3 \right\}$$

dir [26,29,35].

Tanım 2.2. $\tilde{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}} + \varepsilon \vec{\mathbf{a}}^* \in \mathbb{D}_1^3$ olmak üzere,

- i) $\vec{\mathbf{a}}$ spacelike vektör ise $\tilde{\mathbf{a}}$ 'ya *dual spacelike vektör*,
- ii) $\vec{\mathbf{a}}$ timelike vektör ise $\tilde{\mathbf{a}}$ 'ya *dual timelike vektör*,
- iii) $\vec{\mathbf{a}}$ lightlike (null) vektör ise $\tilde{\mathbf{a}}$ 'ya *dual lightlike (dual null) vektör*

denir [29].

Tanım 2.3. $\tilde{\vec{a}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathbb{D}_1^3$ vektörünün *norm* u

$$\|\tilde{\vec{a}}\| = \sqrt{\langle \tilde{\vec{a}}, \tilde{\vec{a}} \rangle} = \left(\|\vec{a}\|, \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \right)$$

ile verilen bir dual sayıdır [29].

Tanım 2.4. $\tilde{\vec{a}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$, $\tilde{\vec{b}} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in \mathbb{D}_1^3$ olmak üzere $\tilde{\vec{a}}$ ve $\tilde{\vec{b}}$ nin *Lorentziyen vektörel çarpımı*

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{D}_1^3 \times \mathbb{D}_1^3 &\rightarrow \mathbb{D}_1^3, \\ (\tilde{\vec{a}}, \tilde{\vec{b}}) &\rightarrow \tilde{\vec{a}} \times \tilde{\vec{b}} = \vec{a} \times \vec{b} + \varepsilon (\vec{a} \times \vec{b}^* + \vec{a}^* \times \vec{b}) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan bir dönüşümdür [29].

Yukarıda verilen eşitliğin sağındaki vektörel çarpımlar, $\mathbb{R}_1^3$ uzayındaki vektörel çarpımlardır.

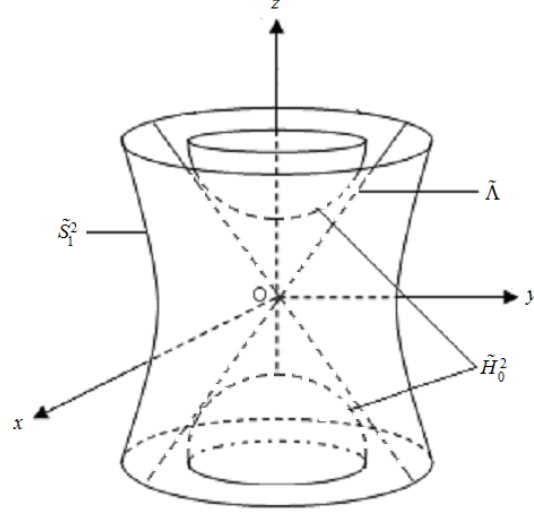
Tanım 2.5. $\tilde{\vec{a}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathbb{D}_1^3$ olmak üzere,

$$\tilde{S}_1^2 = \left\{ \tilde{\vec{a}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \mid \|\tilde{\vec{a}}\| = (1, 0); \vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}_1^3, \vec{a} \text{ birim spacelike vektör} \right\}$$

cümlesine *dual Lorentziyen birim küre*,

$$\tilde{H}_0^2 = \left\{ \tilde{\vec{a}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \mid \|\tilde{\vec{a}}\| = (1, 0); \vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}_1^3, \vec{a} \text{ birim timelike vektör} \right\}$$

cümlesine *dual hiperbolik birim küre* denir [29].



Şekil 2.1.1. $\tilde{S}_1^2$ Dual Lorentziyen birim küresi, $\tilde{H}_0^2$ dual hiperbolik birim küresi ve $\tilde{\Lambda}$ dual ışık konisi

Teorem 2.1. (E. Study Dönüşümü) $\mathbb{D}_1^3$ uzayındaki $\tilde{H}_0^2$ dual hiperbolik (veya $\tilde{S}_1^2$ dual Lorentziyen) birim kürenin noktaları, $\mathbb{R}_1^3$ Lorentziyen çizgiler uzayındaki yönlü timelike (veya spacelike) doğrulara birebir karşılık gelirler [29].

Tanım 2.6. i) Dual Hiperbolik Açısı: $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual timelike vektörler olsunlar. Bu vektörlere karşılık gelen yönlü timelike doğrular arasındaki hiperbolik açı θ ve bu doğrular arasındaki en kısa uzaklık θ^* olmak üzere, $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual sayısına $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual timelike vektörleri arasındaki *dual hiperbolik açı* denir ve

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = -\cosh \bar{\theta}$$

olarak tanımlanır [35].

ii) Dual Merkez Açısı: $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual spacelike vektörler ve $Sp\{\tilde{a}, \tilde{b}\}$ düzlemi dual timelike olsun. Bu vektörlere karşılık gelen yönlü spacelike doğrular arasındaki merkez açı θ ve bu doğrular arasındaki en kısa uzaklık θ^* olmak üzere, $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual sayısına $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual spacelike vektörleri arasındaki *dual merkez açı* denir ve

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \cosh \bar{\theta}$$

olarak tanımlanır [4,26,31,35].

iii) Dual Spacelike Açısı: $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual spacelike vektörler ve $Sp\{\tilde{a}, \tilde{b}\}$ düzlemi dual spacelike olsun. Bu vektörlere karşılık gelen yönlü spacelike doğrular arasındaki spacelike açı θ ve bu doğrular arasındaki en kısa uzaklık θ^* olmak üzere, $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual sayısına $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual spacelike vektörleri arasındaki *dual spacelike açı* denir ve

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \cos \bar{\theta}$$

olarak tanımlanır [4,26,31].

iv) Dual Lorentziyen Timelike Açısı: $\tilde{a}$ bir birim dual spacelike vektör ve $\tilde{b}$ bir birim dual timelike vektör olsunlar. Bu vektörlere karşılık gelen, sırasıyla, yönlü spacelike doğru ve yönlü timelike doğru arasındaki Lorentziyen timelike açı θ ve bu doğrular arasındaki en kısa uzaklık θ^* olmak üzere, $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual sayısına $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual vektörleri arasındaki *dual Lorentziyen timelike açı* denir ve

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \sinh \bar{\theta}$$

olarak tanımlanır [4,26,31].

2.1. Dual Hiperbolik Küresel Eğrilerin Geometrisi

$\tilde{H}_0^2$ dual hiperbolik birim küresi üzerinde yatan bir eğri, E. Study dönüşümü ile $\mathbb{R}_1^3$ Lorentziyen çizgiler uzayında anadoğruları timelike olan, yani M_-^1 tipinden olan bir timelike regle yüzeye karşılık gelir. Dolayısıyla dual hiperbolik küresel eğrilerin geometrisi, M_-^1 tipinden timelike regle yüzeylerin geometrisiyle çıkarılır [22,26]. Bu kesimde, M_-^1 tipinden bir timelike regle yüzeyin boğaz çizgisinin Blaschke türev formülleri hatırlatılacaktır.

$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(t) + \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}^*(t)$ birim dual timelike vektörü reel bir t parametresine bağlanırsa $\tilde{H}_0^2$ dual hiperbolik birim küresi üzerinde bir eğri çizer. E Study dönüşümü ile bu eğriye $\mathbb{R}_1^3$ çizgiler uzayında M_-^1 tipinden bir timelike regle yüzey karşılık gelir.

$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(t)$ dual küresel eğrisinin $d\bar{\theta} = d\theta + \varepsilon d\theta^*$ dual yay elementi için,

$$\begin{aligned} d\bar{\theta}^2 &= (d\theta + \varepsilon d\theta^*)^2 = \langle d\tilde{\mathbf{q}}, d\tilde{\mathbf{q}} \rangle = \langle d\tilde{\mathbf{q}} + \varepsilon d\tilde{\mathbf{q}}^*, d\tilde{\mathbf{q}} + \varepsilon d\tilde{\mathbf{q}}^* \rangle \\ &= \langle d\tilde{\mathbf{q}}, d\tilde{\mathbf{q}} \rangle + \varepsilon \left(\langle d\tilde{\mathbf{q}}, d\tilde{\mathbf{q}}^* \rangle + \langle d\tilde{\mathbf{q}}^*, d\tilde{\mathbf{q}} \rangle \right) \\ &= \langle d\tilde{\mathbf{q}}, d\tilde{\mathbf{q}} \rangle + 2\varepsilon \langle d\tilde{\mathbf{q}}, d\tilde{\mathbf{q}}^* \rangle \end{aligned}$$

ifadesinden

$$d\theta^2 + 2\varepsilon d\theta d\theta^* = \langle d\tilde{\mathbf{q}}, d\tilde{\mathbf{q}} \rangle + 2\varepsilon \langle d\tilde{\mathbf{q}}, d\tilde{\mathbf{q}}^* \rangle \quad (2.1.1)$$

bulunur. Buradan,

$$d\theta^2 = \langle d\tilde{\mathbf{q}}, d\tilde{\mathbf{q}} \rangle, \quad d\theta d\theta^* = \langle d\tilde{\mathbf{q}}, d\tilde{\mathbf{q}}^* \rangle \quad (2.1.2)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\delta_q = \frac{d\theta^*}{d\theta} = \frac{\langle d\tilde{\mathbf{q}}, d\tilde{\mathbf{q}}^* \rangle}{\langle d\tilde{\mathbf{q}}, d\tilde{\mathbf{q}} \rangle} = \frac{\langle \tilde{\mathbf{q}}', \tilde{\mathbf{q}}'^* \rangle}{\langle \tilde{\mathbf{q}}', \tilde{\mathbf{q}}' \rangle} \quad (2.1.3)$$

bağıntısı ile, timelike regle yüzeylerin en basit diferansiyel invariantı elde edilir. δ_q invariantına timelike regle yüzeyin *dağılıma parametresi* veya *dral* denir. $\langle \tilde{\mathbf{q}}', \tilde{\mathbf{q}}' \rangle = 0$ olması durumunda timelike silindirler söz konusu olduğundan bu durum hariç tutulur [22].

Şimdi, timelike regle yüzeye bağlı olmak üzere Blaschke üç yüzlüsü olarak adlandırılan çatıyı oluşturalım. Birinci eksen $\tilde{\mathbf{q}}$ doğuranından, ikinci eksen

$$\tilde{\mathbf{h}} = \frac{\tilde{\mathbf{q}}'}{k_1}, \quad \bar{k}_1 = \sqrt{|\langle \tilde{\mathbf{q}}', \tilde{\mathbf{q}}' \rangle|} \quad (2.1.4)$$

doğrusundan, üçüncü eksen de

$$\tilde{\mathbf{a}} = -\tilde{\mathbf{q}} \times \tilde{\mathbf{h}} \quad (2.1.5)$$

doğrusundan oluşsun. $\tilde{\mathbf{h}}$ ve $\tilde{\mathbf{a}}$ vektörlerinin geometrik anlamlarını belirlemek için $\langle \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \rangle = -1$ eşitliğinin diferansiyelinden $\langle \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}' \rangle = 0$ bulunur. Şimdi, birbirine yakın $\tilde{\mathbf{q}}$ ve $\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}' dt$ doğrularının ortak dikmesinin $\tilde{\mathbf{a}}$ vektörü olduğunu gösterelim. Gerçekten;

$$\langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{q}} \rangle = 0 \quad (2.1.6)$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}' dt \rangle &= 0 \\ \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{q}} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{q}}' \rangle dt &= 0 \\ \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{q}}' \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

olduğu görülür. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle &= \langle \tilde{\mathbf{q}} \times \tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{q}} \times \tilde{\mathbf{h}} \rangle \\ &= -\langle \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \rangle \langle \tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{h}} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{h}} \rangle^2 \\ &= -(-1)1 + 0 = 1 \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

bulunur. Yani $\tilde{\mathbf{a}}$ vektörü, birim dual spacelike vektördür. Üçyüzlünün $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{a}}$ eksenlerinin C kesişme noktası $\tilde{\mathbf{q}}$ üzerindedir ve komşu doğurana en kısa uzaklığa sahiptir. Bu nokta, timelike regle yüzeyin *boğaz noktası* olarak adlandırılır ve $C(t)$ noktalarının geometrik yerine de yüzeyin *boğaz çizgisi* veya *striksiyon çizgisi* denir. $\tilde{\mathbf{a}}$ doğrusu, yüzeyimizin $\tilde{\mathbf{q}}$ doğurana dik olan boğaz noktasındaki teğettir. $\tilde{\mathbf{h}}$ ise yüzeyin boğaz noktasındaki normalidir. $\tilde{\mathbf{q}}$ ve $\tilde{\mathbf{h}}$ dan geçen düzleme yüzeyin *asimptotik düzlemi* denir [28].

Şimdi, hesaplamalarda kolaylık olması bakımından $\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{a}}_1$, $\tilde{\mathbf{h}} = \tilde{\mathbf{a}}_2$, $\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}}_3$ alalım.

$1 \leq k \leq 3$ için $\tilde{\mathbf{a}}_k$ dual vektörünün $\tilde{\mathbf{a}}'_k$ türevleri $\tilde{\mathbf{a}}_k$ cinsinden lineer olarak,

$$\tilde{\mathbf{a}}'_k = \sum a_{kl} \tilde{\mathbf{a}}_l, \quad a_{kl} = \langle \tilde{\mathbf{a}}_k, \tilde{\mathbf{a}}_l \rangle \quad (2.1.9)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\langle \tilde{\mathbf{a}}_k, \tilde{\mathbf{a}}_l \rangle = \begin{cases} -1, & k = l = 1 \\ 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \neq 1 \end{cases} \quad (2.1.10)$$

bağıntılarından türev alarak

$$\langle \tilde{\mathbf{a}}'_k, \tilde{\mathbf{a}}_l \rangle + \langle \tilde{\mathbf{a}}_k, \tilde{\mathbf{a}}'_l \rangle = 0 \quad (2.1.11)$$

olur. Buradan vektörlerin türevlerini belirten sistem

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}'_1 &= u_{11} \tilde{\mathbf{a}}_1 + u_{12} \tilde{\mathbf{a}}_2 + u_{13} \tilde{\mathbf{a}}_3 \\ \tilde{\mathbf{a}}'_2 &= u_{21} \tilde{\mathbf{a}}_1 + u_{22} \tilde{\mathbf{a}}_2 + u_{23} \tilde{\mathbf{a}}_3 \\ \tilde{\mathbf{a}}'_3 &= u_{31} \tilde{\mathbf{a}}_1 + u_{32} \tilde{\mathbf{a}}_2 + u_{33} \tilde{\mathbf{a}}_3 \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu sistem, sırasıyla, $\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3$ vektörleriyle iç çarpılırsa $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 0$ bulunur ve sistem

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}'_1 &= u_{12} \tilde{\mathbf{a}}_2 + u_{13} \tilde{\mathbf{a}}_3 \\ \tilde{\mathbf{a}}'_2 &= u_{21} \tilde{\mathbf{a}}_1 + u_{23} \tilde{\mathbf{a}}_3 \\ \tilde{\mathbf{a}}'_3 &= u_{31} \tilde{\mathbf{a}}_1 + u_{32} \tilde{\mathbf{a}}_2 \end{aligned}$$

şeklini alır. Ayrıca, vektörlerin Lorentziyen karakterlerinin de dikkate alınmasıyla $\langle \tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2 \rangle = 0$ ifadesinin türevinden $u_{12} = u_{21}$ bulunur. Benzer şekilde $\langle \tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_3 \rangle = 0$ ifadesinin türevinden $u_{13} = u_{31}$ ve $\langle \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3 \rangle = 0$ ifadesinin türevinden $u_{23} = -u_{32}$ bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}'_1 &= u_{12} \tilde{\mathbf{a}}_2 + u_{13} \tilde{\mathbf{a}}_3 \\ \tilde{\mathbf{a}}'_2 &= u_{12} \tilde{\mathbf{a}}_1 + u_{23} \tilde{\mathbf{a}}_3 \\ \tilde{\mathbf{a}}'_3 &= u_{13} \tilde{\mathbf{a}}_1 - u_{23} \tilde{\mathbf{a}}_2 \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

denklemler sistemi elde edilir. (2.1.4) eşitlikleri dikkate alınarak, $\tilde{q}' = \tilde{a}' = \bar{k}_1 \tilde{a}_2$ ve $\tilde{a}'_1 = u_{12} \tilde{a}_2 + u_{13} \tilde{a}_3$ eşitliğinden,

$$u_{12} = \bar{k}_1 \quad (2.1.13)$$

ve $\langle \tilde{a}'_1, \tilde{a}_3 \rangle = u_{31}$ eşitliğinden $u_{31} = u_{13}$ bulunur. Benzer olarak,

$$\langle \tilde{a}'_2, \tilde{a}_3 \rangle = u_{21} \langle \tilde{a}_1, \tilde{a}_3 \rangle + u_{23} \langle \tilde{a}_3, \tilde{a}_3 \rangle = u_{23} \quad (2.1.14)$$

elde edilir. (2.1.4) dikkate alınırrsa,

$$\tilde{h}' = \tilde{a}'_2 = \frac{\tilde{a}_1''}{\bar{k}_1} + \tilde{a}'_1 \left(\frac{1}{\bar{k}_1} \right)' \quad (2.1.15)$$

ve $\tilde{a}_3 = -\tilde{a}_1 \times \tilde{a}_2 = -\frac{\tilde{a}_1 \times \tilde{a}_1'}{\bar{k}_1}$ olduğundan, (2.1.15) de bulunan değer (2.1.14) da yazılır ve

$u_{23} = \bar{k}_2$ ile gösterilirse,

$$\bar{k}_2 = -\frac{(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{q}'')}{\bar{k}_1^2} = -\frac{(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{q}'')}{\langle \tilde{q}', \tilde{q}' \rangle} \quad (2.1.16)$$

ifadesi elde edilir. Böylece Blaschke türev formülleri aşağıdaki gibi bulunmuş olur:

$$\begin{cases} \tilde{q}' = \bar{k}_1 \tilde{h}, & \bar{k}_1 = \sqrt{\langle \tilde{q}', \tilde{q}' \rangle} \\ \tilde{h}' = \bar{k}_1 \tilde{q} + \bar{k}_2 \tilde{a}, & \bar{k}_2 = -\frac{(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{q}'')}{\langle \tilde{q}', \tilde{q}' \rangle} \\ \tilde{a}' = -\bar{k}_2 \tilde{h}. \end{cases} \quad (2.1.17)$$

(2.1.17) denklemlerinden bir $\tilde{\psi} = \tilde{\psi} + \varepsilon \tilde{\psi}^* = -\bar{k}_2 \tilde{q} - \bar{k}_1 \tilde{a}$ dual vektörü için

$$\tilde{q}' = \tilde{\psi} \times \tilde{q}, \quad \tilde{h}' = \tilde{\psi} \times \tilde{h}, \quad \tilde{a}' = \tilde{\psi} \times \tilde{a}$$

yazılabilir. $\tilde{\psi} = \bar{\psi} + \varepsilon \bar{\psi}^* = -\bar{k}_2 \tilde{q} - \bar{k}_1 \tilde{a}$ dual vektörüne *dual Pfaff vektörü* denir. $\tilde{\psi} = \|\tilde{\psi}\| \tilde{P}$ eşitliğindeki $\tilde{P}$ dual vektörüne de *dual pol vektörü* denir. Böylece dual Steiner vektörü

$$\tilde{d} = \oint \tilde{\psi} \quad (2.1.18)$$

ile tanımlanır [22].

2.2. Dual Lorentziyen Küresel Eğrilerin Geometrisi

$\tilde{S}_1^2$ dual Lorentziyen birim küresi üzerinde yatan bir eğri, E. Study dönüşümü ile $\mathbb{R}_1^3$ Lorentziyen çizgiler uzayında anadoğruları spacelike olan, yani M_+^1 veya M_+^2 tipinden olan bir timelike veya spacelike regle yüzeye karşılık gelir. Dolayısıyla dual Lorentziyen küresel eğrilerin geometrisi, M_+^1 ve M_+^2 tipinden regle yüzeylerin geometrisiyle çakışır [22,26]. Bu kesimde, M_+^1 ve M_+^2 tipinden olan regle yüzeylerin boğaz çizgilerinin Blaschke türev formülleri hatırlatılacaktır [26].

$\tilde{q} = \bar{q}(t) + \varepsilon \bar{q}^*(t)$ birim dual spacelike vektörü reel bir t parametresine bağlanırsa $\tilde{S}_1^2$ dual Lorentziyen birim küresi üzerinde bir eğri çizer. E Study dönüşümü ile bu eğriye $\mathbb{R}_1^3$ çizgiler uzayında M_+^1 veya M_+^2 tipinden bir regle yüzey karşılık gelir.

$\tilde{q} = \tilde{q}(t)$ dual küresel eğrisinin $d\bar{\theta} = d\theta + \varepsilon d\theta^*$ dual yay elementi için,

$$d\theta^2 + 2\varepsilon d\theta d\theta^* = \langle d\tilde{q}, d\tilde{q} \rangle + 2\varepsilon \langle d\tilde{q}, d\tilde{q}^* \rangle \quad (2.2.1)$$

dir. Buradan,

$$d\theta^2 = \langle d\tilde{q}, d\tilde{q} \rangle, \quad d\theta d\theta^* = \langle d\tilde{q}, d\tilde{q}^* \rangle \quad (2.2.2)$$

ve

$$\delta_q = \frac{d\theta^*}{d\theta} = \frac{\langle d\tilde{q}, d\tilde{q}^* \rangle}{\langle d\tilde{q}, d\tilde{q} \rangle} = \frac{\langle \tilde{q}', \tilde{q}^{*'} \rangle}{\langle \tilde{q}', \tilde{q}' \rangle} \quad (2.2.3)$$

bağıntısı ile, spacelike anadoğrulu regle yüzeylerin en basit diferansiyel invariantı elde edilmiştir. δ_q invariantına *dağılma parametresi* veya *dral* denir. $\langle \tilde{q}', \tilde{q}' \rangle = 0$ olması durumunda silindirler söz konusu olduğundan bu durum hariç tutulur [22].

Şimdi, regle yüzeye bağlı olmak üzere Blaschke üç yüzlüsü olarak adlandırılan çatıyı oluşturalım. Birinci eksen $\tilde{q}$ doğuranından, ikinci eksen

$$\tilde{h} = \frac{\tilde{q}'}{k_1}, \quad \bar{k}_1 = \sqrt{|\langle \tilde{q}', \tilde{q}' \rangle|} \quad (2.2.4)$$

doğrusundan oluşsun. $\tilde{h}$ birim dual vektörünün spacelike olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $\tilde{q}$ birim dual spacelike vektörü M_+^1 tipinden bir timelike regle yüzeye karşılık gelir. Böylece üç yüzölünün üçüncü eksen

$$\tilde{a} = \tilde{q} \times \tilde{h} \quad (2.2.5)$$

timelike doğrusundan ibaret olur. Üçyüzölünün $\tilde{q}, \tilde{h}, \tilde{a}$ eksenlerinin C kesişme noktası $\tilde{q}$ üzerindedir ve komşu doğurana en kısa uzaklığa sahiptir. Bu nokta, timelike regle yüzeyin boğaz noktası olarak adlandırılır ve $C(t)$ noktalarının geometrik yerine de yüzeyin *boğaz çizgisi* veya *striksiyon çizgisi* denir. $\tilde{a}$ doğrusu, boğaz noktasında yüzeyin $\tilde{q}$ doğuranına dik olan teğettir. $\tilde{h}$ ise yüzeyin boğaz noktasındaki normalidir. $\tilde{q}$ ve $\tilde{h}$ dan geçen düzleme yüzeyin *asimptotik düzlemi* denir [22].

Bu durumda Blaschke türev formülleri aşağıdaki gibi verilmiş olur;

$$\begin{cases} \tilde{q}' = \bar{k}_1 \tilde{h}, & \bar{k}_1 = \sqrt{|\langle \tilde{q}', \tilde{q}' \rangle|} \\ \tilde{h}' = -\bar{k}_1 \tilde{q} + \bar{k}_2 \tilde{a}, & \bar{k}_2 = -\frac{(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{q}'')}{\langle \tilde{q}', \tilde{q}' \rangle} \\ \tilde{a}' = \bar{k}_2 \tilde{h}. \end{cases} \quad (2.2.6)$$

(2.2.6) denklemlerinden bir $\tilde{\psi} = \tilde{\psi} + \varepsilon \tilde{\psi}^* = \bar{k}_2 \tilde{q} - \bar{k}_1 \tilde{a}$ dual vektörü için

$$\tilde{q}' = \tilde{\psi} \times \tilde{q}, \quad \tilde{h}' = \tilde{\psi} \times \tilde{h}, \quad \tilde{a}' = \tilde{\psi} \times \tilde{a}$$

yazılabilir. $\tilde{\psi} = \bar{\psi} + \varepsilon \bar{\psi}^* = \bar{k}_2 \tilde{q} - \bar{k}_1 \tilde{a}$ dual vektörüne *dual Pfaff vektörü* denir. $\tilde{\psi} = \|\tilde{\psi}\| \tilde{P}$ eşitliğindeki $\tilde{P}$ dual vektörüne de *dual pol vektörü* denir. Böylece *dual Steiner vektörü*

$$\tilde{d} = \oint \tilde{\psi} \quad (2.2.7)$$

ile tanımlanır [22,26].

Eğer $\tilde{h} = \frac{\tilde{q}'}{k_1}$ vektörü timelike olarak kabul edilirse $\tilde{q}$ dual spacelike vektörünün

çizdiği dual Lorentziyen eğri M_+^2 tipinden bir spacelike regle yüzeye karşılık gelir. Bu yüzeyin Blaschke türev formülleri ise

$$\begin{cases} \tilde{q}' = \bar{k}_1 \tilde{h}, & \bar{k}_1 = \sqrt{\langle \tilde{q}', \tilde{q}' \rangle} \\ \tilde{h}' = \bar{k}_1 \tilde{q} + \bar{k}_2 \tilde{a}, & \bar{k}_2 = -\frac{(\tilde{q}, \tilde{q}', \tilde{q}'')}{\langle \tilde{q}', \tilde{q}' \rangle} \\ \tilde{a}' = \bar{k}_2 \tilde{h} \end{cases} \quad (2.2.8)$$

olarak elde edilir. (2.2.8) denklemlerinden bir $\tilde{\psi} = \bar{\psi} + \varepsilon \bar{\psi}^* = -\bar{k}_2 \tilde{q} + \bar{k}_1 \tilde{a}$ dual vektörü için

$$\tilde{q}' = \tilde{\psi} \times \tilde{q}, \quad \tilde{h}' = \tilde{\psi} \times \tilde{h}, \quad \tilde{a}' = \tilde{\psi} \times \tilde{a}$$

yazılabilir. $\tilde{\psi} = \bar{\psi} + \varepsilon \bar{\psi}^* = -\bar{k}_2 \tilde{q} + \bar{k}_1 \tilde{a}$ dual vektörüne *dual Pfaff vektörü* denir. $\tilde{\psi} = \|\tilde{\psi}\| \tilde{P}$ eşitliğindeki $\tilde{P}$ dual vektörüne de *dual pol vektörü* denir. Böylece *dual Steiner vektörü*

$$\tilde{d} = \oint \tilde{\psi} \quad (2.2.9)$$

ile tanımlanır [22,26].

III. BÖLÜM

DUAL LORENTZİYEN UZAYDA BİR PARAMETRELİ KÜRESEL HAREKETLER

3.1. Bir Parametrelili Dual Hiperbolik Küresel Hareketler

$\mathbb{R}_1^3$ de sabit ve hareketli sistemler, sırasıyla, L_2 ve L_3 ; bu sistemlerin ortonormal koordinat sistemleri de $\{O'; \vec{q}_f, \vec{h}_f, \vec{a}_f\}$ ve $\{O; \vec{q}_m, \vec{h}_m, \vec{a}_m\}$ olsun. L_3 / L_2 hareketini incelemek için, L_1 izafi uzayın çatısı olan $\{Q; \vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ortonormal izafi koordinat sistemini alalım. Lorentziyen uzaylardaki transfer prensibine göre, aynı O merkezli Σ_1, Σ_2 ve Σ_3 birim dual hiperbolik kürelerin noktaları $\{O; \tilde{q}, \tilde{h}, \tilde{a}\}$, $\{O; \tilde{q}_f, \tilde{h}_f, \tilde{a}_f\}$ ve $\{O; \tilde{q}_m, \tilde{h}_m, \tilde{a}_m\}$ dual ortogonal sistemleri ile ifade edilebilir. Böylece L_1 / L_2 , L_1 / L_3 ve L_3 / L_2 hareketleri, sırasıyla, 1-parametrelili Σ_1 / Σ_2 , Σ_1 / Σ_3 ve Σ_3 / Σ_2 dual hiperbolik küresel hareketler olarak göz önüne alınabilir. Dual Lorentziyen anlamda ortogonal dönüşüm ile birinden diğerine geçilebilir.

A_f ve A_m matrisleri 3×3 tipinde Lorentziyen anlamda dual ortogonal matrisler olmak üzere,

$$\Sigma_1 = A_f \Sigma_2, \quad \Sigma_1 = A_m \Sigma_3$$

yazılabilir, burada

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{h} \\ \tilde{a} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} \tilde{q}_f \\ \tilde{h}_f \\ \tilde{a}_f \end{bmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{bmatrix} \tilde{q}_m \\ \tilde{h}_m \\ \tilde{a}_m \end{bmatrix}$$

dual sütun matrisleridir. A_f ve A_m , Lorentziyen anlamda dual ortogonal matrislerin elemanları,

$\bar{t} = t + \varepsilon t^*$ dual parametresinin yeteri kadar türevlenebilen fonksiyonlarıdır. Burada dual

Lorentziyen uzayda 1-parametrelili hiperbolik küresel hareketler inceleneneğinden $t^* = 0$ alınacaktır.

Σ_1 vektörlerinin Σ_2 sabit ve Σ_3 hareketli birim dual hiperbolik kürelerine göre diferansiyellerine bakılırsa

$$d\Sigma_{1f} = dA_f \Sigma_2 = dA_f (A_f)^{-1} \Sigma_1, \quad d\Sigma_{1m} = dA_m \Sigma_3 = dA_m (A_m)^{-1} \Sigma_1$$

dir.

$$\tilde{\Omega}_f = dA_f (A_f)^{-1}, \quad \tilde{\Omega}_m = dA_m (A_m)^{-1}$$

olarak seçilirse

$$\begin{bmatrix} d\tilde{q}_f \\ d\tilde{h}_f \\ d\tilde{a}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\Omega}_{3f} & -\bar{\Omega}_{2f} \\ \bar{\Omega}_{3f} & 0 & -\bar{\Omega}_{1f} \\ -\bar{\Omega}_{2f} & \bar{\Omega}_{1f} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_f \\ \tilde{h}_f \\ \tilde{a}_f \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} d\tilde{q}_m \\ d\tilde{h}_m \\ d\tilde{a}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\Omega}_{3m} & -\bar{\Omega}_{2m} \\ \bar{\Omega}_{3m} & 0 & -\bar{\Omega}_{1m} \\ -\bar{\Omega}_{2m} & \bar{\Omega}_{1m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_m \\ \tilde{h}_m \\ \tilde{a}_m \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

olur. Burada $\tilde{\Omega}_f = dA_f (A_f)^{-1}$, $\tilde{\Omega}_m = dA_m (A_m)^{-1}$ matrisleri Lorentziyen anlamda anti-simetrik matrislerdir.

Σ_3 / Σ_2 hareketi boyunca Σ_3 birim dual hiperbolik küresinin, koordinatları $\tilde{X}_i = \bar{x}_i + \varepsilon \bar{x}_i^*$ ($1 \leq i \leq 3$) olan noktasının hız vektörü,

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \tilde{\Omega} \times \tilde{X} \quad (3.1.2)$$

şeklinde olup, burada $\tilde{\Omega} = \omega + \varepsilon \omega^*$ vektörü Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili dual hiperbolik küresel hareketin dual hiperbolik Pfaff vektörü olarak adlandırılır. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili dual hiperbolik küresel hareketin dual hiperbolik Pfaff vektörü t anında $\mathbb{R}_1^3$ uzay eğrilerinin diferansiyel geometrisinde Darboux vektörüne benzerdir. $\tilde{\Omega}$ nın ω reel ve ω^* dual kısımları dual hiperbolik dönme hareketine karşılık gelen L_3 / L_2 hiperbolik küresel hareketinin, sırasıyla, ani

dönme ve ani öteleme Pfaff vektörlerine karşılık gelirler. $\|\tilde{\Omega}\| = \bar{\Omega} = \omega + \varepsilon\omega^*$ dual sayısı, Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili dual hiperbolik küresel hareketin dual açısal hızıdır.

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\Omega}_3 & -\bar{\Omega}_2 \\ \bar{\Omega}_3 & 0 & -\bar{\Omega}_1 \\ -\bar{\Omega}_2 & \bar{\Omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_1 \\ \bar{\Omega}_2 \\ \bar{\Omega}_3 \end{bmatrix} = \tilde{\Omega} \quad (3.1.3)$$

olarak alalım. Buradaki matris dual Lorentziyen anlamda anti-simetrik matristir [13].

Teorem 3.1.1. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili dual hiperbolik küresel hareketi için aşağıdaki durumlar sağlanır.

(i) $\tilde{\Omega}_m(t) = A^{-1}A'$ ile belirli 3×3 tipinde dual Lorentziyen anlamda anti-simetrik matris *hareketli pol eğrisi* olarak adlandırılır.

(ii) $\tilde{\Omega}_f(t) = A'A^{-1}$ ile belirli 3×3 tipinde dual Lorentziyen anlamda anti-simetrik matris *sabit pol eğrisi* olarak adlandırılır.

(iii) Hareketli ve sabit pol eğrileri arasında $\tilde{\Omega}_f(t) = adA(t)\tilde{\Omega}_m(t)$ bağıntısı vardır.

Burada $adA\tilde{\Omega}_m = A\tilde{\Omega}_m A^{-1}$ dır.

$$(iv) \tilde{q}_f(t) = \frac{\tilde{\Omega}(t)}{\|\tilde{\Omega}(t)\|} \text{ ve } \tilde{q}_m(t) = \frac{\tilde{\Omega}_m(t)}{\|\tilde{\Omega}_m(t)\|} \quad (3.1.4)$$

birim dual vektörleri sırasıyla, Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili dual hiperbolik küresel hareketin sabit ve hareketli eksen yüzeyleri olarak adlandırılır.

$$(v) \frac{d\tilde{q}_f}{dt} = adA \frac{d\tilde{q}_m}{dt} \Leftrightarrow \frac{d\tilde{q}_f}{dt} = A \frac{d\tilde{q}_m}{dt} A^{-1} \text{ bağıntısı vardır [4].}$$

Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili dual hiperbolik küresel hareket boyunca

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow \tilde{q}_m(t) \in \Sigma_3 \quad (3.1.5)$$

diferansiyellenebilir eğrisi, düz doğruların diferansiyellenebilir bir ailesini veya hareketli eksen yüzeyini gösterir. Bu eğri boyunca hareketli ortonormal çatı;

$$\tilde{\mathbf{q}}_m = \tilde{\mathbf{q}}_m(t) \text{ (timelike)}, \quad \tilde{\mathbf{h}}_m = \left(\frac{d\tilde{\mathbf{q}}_m}{dt} \right) \left\| \frac{d\tilde{\mathbf{q}}_m}{dt} \right\|^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{a}}_m = -\tilde{\mathbf{q}}_m \times \tilde{\mathbf{h}}_m \quad (3.1.6)$$

ile verilir. Bu çatı, Blaschke çatısı olarak adlandırılır. Bu çatı elemanlarına karşılık gelen doğrular $\tilde{\mathbf{q}}_m = \tilde{\mathbf{q}}_m(t)$ eksen yüzeyinin boğaz noktasında kesişirler. $\tilde{\mathbf{a}}_m$ ve $\tilde{\mathbf{h}}_m$, sırasıyla, $\tilde{\mathbf{q}}_m = \tilde{\mathbf{q}}_m(t)$ timelike regle yüzeyinin merkez teğeti ve merkez normali olarak bilinir. Σ_1^m birim dual hiperbolik küresinin üreteçlerinin cümlesi $\{O; \tilde{\mathbf{q}}_m, \tilde{\mathbf{h}}_m, \tilde{\mathbf{a}}_m\}$ olsun. Böylece Σ_1^m / Σ_3 hareketi

$$\begin{bmatrix} d\tilde{\mathbf{q}}_m \\ d\tilde{\mathbf{h}}_m \\ d\tilde{\mathbf{a}}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_{1m} & 0 \\ \bar{k}_{1m} & 0 & \bar{k}_{2m} \\ 0 & -\bar{k}_{2m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_m \\ \tilde{\mathbf{h}}_m \\ \tilde{\mathbf{a}}_m \end{bmatrix} \quad (3.1.7)$$

ile tanımlanır. Burada

$$\bar{k}_{1m} = k_{1m} + \varepsilon k_{1m}^* = \left\| \frac{d\tilde{\mathbf{q}}_m}{dt} \right\|, \quad \bar{k}_{2m} = k_{2m} + \varepsilon k_{2m}^* = \frac{\det \left(\tilde{\mathbf{q}}_m, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}_m}{dt}, \frac{d^2\tilde{\mathbf{q}}_m}{dt^2} \right)}{\bar{k}_{1m}^2} \quad (3.1.8)$$

dual fonksiyonları hareketli eksen yüzeyinin *Blaschke invaryantları* olarak adlandırılır. Boğaz çizgisi

$$\frac{d\mathbf{C}^m}{dt} = \bar{k}_{2m}^* \tilde{\mathbf{q}}_m + \bar{k}_{1m}^* \tilde{\mathbf{a}}_m$$

ile verilir. Bu takdirde (3.1.8) de verilen dual fonksiyonlar

$$\bar{k}_{1m} = k_{1m} + \varepsilon \sinh \bar{\sigma}_m, \quad \bar{k}_{2m} = k_{2m} + \varepsilon \cosh \bar{\sigma}_m \quad (3.1.9)$$

şeklinde verilebilir. Burada $\bar{\sigma}_m$ açısı, boğaz çizgisinden $\tilde{\mathbf{q}}_m(t)$ üreteç doğrusunun sapma miktarını ölçer. Hareketli timelike eksen yüzeyinin dağılma parametresi

$$\lambda_m = \frac{k_{1m}^*}{k_{1m}} = \frac{\sinh \bar{\sigma}_m}{k_{1m}} \quad (3.1.10)$$

şeklindedir.

Σ_3 / Σ_2 1-parametrel dual hiperbolik küresel hareketi boyunca ani vida eksen, sabit dual hiperbolik küresi Σ_2 küresi üzerinde ani vida eksen sabit eksen yüzeyini üretir. Buradaki eksen yüzeyindeki Blaschke çatısı

$$\tilde{\mathbf{q}}_f = \tilde{\mathbf{q}}_f(t) \text{ (timelike)}, \quad \tilde{\mathbf{h}}_f = \left(\frac{d\tilde{\mathbf{q}}_f(t)}{dt} \right) \left\| \frac{d\tilde{\mathbf{q}}_f}{dt} \right\|^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{a}}_f = -\tilde{\mathbf{q}}_f \times \tilde{\mathbf{h}}_f \quad (3.1.11)$$

ile verilir. Σ_1^f birim dual hiperbolik küresinin üreteçlerinin cümlesi $\{O; \tilde{\mathbf{q}}_f, \tilde{\mathbf{h}}_f, \tilde{\mathbf{a}}_f\}$ olsun.

Böylece Σ_1^f / Σ_2 hareketi

$$\begin{bmatrix} d\tilde{\mathbf{q}}_f \\ d\tilde{\mathbf{h}}_f \\ d\tilde{\mathbf{a}}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_{1f} & 0 \\ \bar{k}_{1f} & 0 & \bar{k}_{2f} \\ 0 & -\bar{k}_{2f} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_f \\ \tilde{\mathbf{h}}_f \\ \tilde{\mathbf{a}}_f \end{bmatrix} \quad (3.1.12)$$

ile verilir. Burada

$$\bar{k}_{1f} = k_{1f} + \varepsilon k_{1f}^* = \left\| \frac{d\tilde{\mathbf{q}}_f}{dt} \right\|, \quad \bar{k}_{2f} = k_{2f} + \varepsilon k_{2f}^* = \frac{\det \left(\tilde{\mathbf{q}}_f, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}_f}{dt}, \frac{d^2\tilde{\mathbf{q}}_f}{dt^2} \right)}{\bar{k}_{1f}^2} \quad (3.1.13)$$

dual fonksiyonları sabit eksen yüzeyinin Blaschke invariantları olarak adlandırılır. Boğaz çizgisi

$$\frac{d\mathbf{C}^f}{dt} = \bar{k}_{2f}^* \tilde{\mathbf{q}}_f + \bar{k}_{1f}^* \tilde{\mathbf{a}}_f$$

ile verilir. Böylece (3.1.9) denkleminde benzer şekilde

$$\bar{k}_{1f} = k_{1f} + \varepsilon \sinh \bar{\sigma}_f, \quad \bar{k}_{2f} = k_{2f} + \varepsilon \cosh \bar{\sigma}_f \quad (3.1.14)$$

şeklinde verilebilir [26]. Burada $\bar{\sigma}_f$ açısı, boğaz çizgisinden $\tilde{\mathbf{q}}_f(t)$ üreteç doğrusunun sapma miktarını ölçer. Sabit timelike eksen yüzeyinin dağılma parametresi

$$\lambda_f = \frac{k_{1f}^*}{k_{1f}} = \frac{\sinh \sigma_f}{k_{1f}} \quad (3.1.15)$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.2. Timelike eksen yüzeylerinin Blaschke invariantları için

$$\bar{k}_{1m} = \bar{k}_{1f}, \quad \bar{k}_{2m} - \bar{k}_{2f} = \|\tilde{\mathcal{Q}}\| \quad (3.1.16)$$

dır.

İspat. Denklem (2.1.7), (2.1.12) ve Teorem 2.1.1 in (v) şikkından

$$\frac{d\tilde{\mathbf{q}}_m}{dt} = \bar{k}_{1m} \tilde{\mathbf{h}}_m, \quad \frac{d\tilde{\mathbf{q}}_f}{dt} = \bar{k}_{1f} \tilde{\mathbf{h}}_f$$

dır. Buradan, iç çarpım adA altında invariant olduğundan

$$\bar{k}_{1f}^2 = \left\langle \frac{d\tilde{\mathbf{q}}_f}{dt}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}_f}{dt} \right\rangle = \left\langle adA(t) \frac{d\tilde{\mathbf{q}}_m}{dt}, adA(t) \frac{d\tilde{\mathbf{q}}_m}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d\tilde{\mathbf{q}}_m}{dt}, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}_m}{dt} \right\rangle = \bar{k}_{1m}^2$$

yazılabilir. $\bar{k}_{1m} > 0$, $\bar{k}_{1f} > 0$ olduğundan $\bar{k}_{1m} = \bar{k}_{1f}$ bulunur. Şimdi,

$$\frac{d\tilde{\mathbf{q}}_f}{dt} = adA \left(\frac{d\tilde{\mathbf{q}}_m}{dt} \right)$$

denkleminde adA lineer olduğundan

$$\bar{k}_{1f} \tilde{\mathbf{h}}_f = adA(\bar{k}_{1m} \tilde{\mathbf{h}}_m) \Rightarrow \tilde{\mathbf{h}}_f = adA(\tilde{\mathbf{h}}_m)$$

bulunur. Son denklemin türevi alınırsa, Teorem 3.1.1 in (iii) şikkından

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\mathbf{h}}_f}{dt} &= \frac{d}{dt} (A\tilde{\mathbf{h}}_m A^{-1}) = \frac{dA}{dt} \tilde{\mathbf{h}}_m A^{-1} + A\tilde{\mathbf{h}}_m \frac{dA^{-1}}{dt} + A \frac{d\tilde{\mathbf{h}}_m}{dt} A^{-1} \\
&= \frac{dA}{dt} A^{-1} \underbrace{A\tilde{\mathbf{h}}_m A^{-1}} + \underbrace{A\tilde{\mathbf{h}}_m A^{-1}} A \frac{dA^{-1}}{dt} + adA \left(\frac{d\tilde{\mathbf{h}}_m}{dt} \right) \\
&= \tilde{\mathbf{\Omega}}_f \tilde{\mathbf{h}}_f - \tilde{\mathbf{h}}_f \tilde{\mathbf{\Omega}}_f + adA \left(\frac{d\tilde{\mathbf{h}}_m}{dt} \right) \\
&= -\tilde{\mathbf{\Omega}}_f \tilde{\mathbf{a}}_f + adA \left(\frac{d\tilde{\mathbf{h}}_m}{dt} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.1.7) ve (3.1.12) denklemleri bu denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{k}_{1f} \tilde{\mathbf{q}}_f + \bar{k}_{2f} \tilde{\mathbf{a}}_f &= -\tilde{\mathbf{\Omega}}_f \tilde{\mathbf{a}}_f + adA (\bar{k}_{1m} \tilde{\mathbf{q}}_m + \bar{k}_{2m} \tilde{\mathbf{a}}_m) \\
\bar{k}_{1f} \tilde{\mathbf{q}}_f + \bar{k}_{2f} \tilde{\mathbf{a}}_f &= -\tilde{\mathbf{\Omega}}_f \tilde{\mathbf{a}}_f + \bar{k}_{1m} \underbrace{adA \tilde{\mathbf{q}}_m} + \bar{k}_{2m} \underbrace{adA \tilde{\mathbf{a}}_m} \\
\bar{k}_{1f} \tilde{\mathbf{q}}_f + \bar{k}_{2f} \tilde{\mathbf{a}}_f &= -\tilde{\mathbf{\Omega}}_f \tilde{\mathbf{a}}_f + \bar{k}_{1f} \tilde{\mathbf{q}}_f + \bar{k}_{2m} \tilde{\mathbf{a}}_f
\end{aligned}$$

ve

$$\bar{k}_{2m} - \bar{k}_{2f} = \|\tilde{\mathbf{\Omega}}\| \quad (3.1.17)$$

bulunur. Bu teoremin sonucu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1.1. Herhangi bir t anında, Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili dual hiperbolik küresel harekette hareketli pol eğrisi ani vida eksenini boyunca sabit pol eğrisine birinci mertebeden değer. Timelike eksen yüzeylerinin ortak dağılıma parametresi

$$\lambda := \lambda_m = \lambda_f = \frac{k_1^*}{k_1} \quad (3.1.18)$$

şeklindedir.

Σ_1 birim dual hiperbolik küresinin üreteçlerinin cümlesi $\{O; \tilde{\mathbf{q}}(timelike), \tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{a}}\}$ olsun.

Bu sistemde $\tilde{\mathbf{a}}(t) = a(t) + \varepsilon a^*(t)$, $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ ve $\tilde{\mathbf{q}}(t+dt)$ nın ortak dikmesi ve

$\tilde{a}(t) = a(t) + \varepsilon a^*(t) = -\tilde{q} \times \tilde{h}$ olarak tanımlanır. Bu çatı izafi çatı olarak adlandırılır. $\tilde{q}, \tilde{h}$ ve $\tilde{a}$, Lorentziyen uzayda ortogonal doğrulara karşılık gelirler. Bunların kesiştiği nokta, hareketli ve sabit timelike eksen yüzeylerinin boğaz noktasıdır. $\tilde{h}$ ve $\tilde{a}$, sırasıyla, boğaz noktasında timelike eksen yüzeyinin merkez normal ve merkez teğetidir. Böylece, Σ_1 / Σ_3 ve Σ_1 / Σ_2 1-parametreli dual hiperbolik küresel hareketlerin türev denklemleri, sırasıyla,

$$\left. \frac{d\tilde{q}}{dt} \right|_m = C(M)\tilde{q}(t), \quad \tilde{q}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{h} \\ \tilde{a} \end{bmatrix}, \quad C(M) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_1 & 0 \\ \bar{k}_1 & 0 & \bar{k}_{2m} \\ 0 & -\bar{k}_{2m} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.19)$$

ve

$$\left. \frac{d\tilde{q}}{dt} \right|_f = C(F)\tilde{q}(t), \quad \tilde{q}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{h} \\ \tilde{a} \end{bmatrix}, \quad C(F) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_1 & 0 \\ \bar{k}_1 & 0 & \bar{k}_{2f} \\ 0 & -\bar{k}_{2f} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.20)$$

dır. Burada,

$$\bar{k}_1 = k_1 + \varepsilon k_1^*, \quad \bar{k}_{2m} = k_{2m} + \varepsilon k_{2m}^*, \quad \bar{k}_{2f} = k_{2f} + \varepsilon k_{2f}^* \quad (3.1.21)$$

Σ_3 / Σ_2 1-parametreli dual hiperbolik küresel hareketin Blaschke invariantlarıdır.

3.1.1. Hiperbolik Küresel Harekette Eksen Yüzeyleri ile Birleştirilmiş Bir Timelike Regle Yüzeye Blaschke Yaklaşımı

Bu kesimde, pol eğrilerinin Blaschke invariantları verilecektir ve bunların geometrik ve kinematik manaları incelenecektir. Bu inceleme için koordinatları $\bar{X}_i = x_i + \varepsilon x_i^*$ ($1 \leq i \leq 3$) olan birim dual hiperbolik küre üzerinde

$$-\bar{X}_1^2 + \bar{X}_2^2 + \bar{X}_3^2 = -1, \quad \tilde{X} = X^T \tilde{q} \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{bmatrix} \quad (3.1.22)$$

şartını sağlayan $\tilde{X}$ timelike vektörünü ele alalım.

Eğer $\tilde{X}$, t nin bir fonksiyonu ise Σ_3 hareketli birim dual hiperbolik küresine göre t anında $\tilde{X}$ timelike vektörünün hızı

$$\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_m = \frac{d\tilde{X}^T}{dt} \tilde{q} + \tilde{X}^T \left. \frac{d\tilde{q}}{dt} \right|_m \quad (3.1.23)$$

olur. Benzer şekilde, $\tilde{X}$, t nin bir fonksiyonu ise Σ_2 sabit birim dual hiperbolik küresine göre t anında $\tilde{X}$ timelike vektörünün hızı

$$\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_f = \frac{d\tilde{X}^T}{dt} \tilde{q} + \tilde{X}^T \left. \frac{d\tilde{q}}{dt} \right|_f \quad (3.1.24)$$

ile verilir. (3.1.19) ve (3.1.20) denklemlerinden

$$\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_m = \left(\frac{d\tilde{X}^T}{dt} + \tilde{X}^T C(M) \right) \tilde{q} \quad (3.1.25)$$

ve

$$\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_f = \left(\frac{d\tilde{X}^T}{dt} + \tilde{X}^T C(F) \right) \tilde{q} \quad (3.1.26)$$

bulunur. $\tilde{X}$ vektörü, Σ_3 hareketli birim dual hiperbolik küresine sabitlenirse, bu taktirde türevi

$$\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_m = 0 \text{ dır [15]. Yani,}$$

$$\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_m = \left(\left[\left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_m, \left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_m, \left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_m \right] + [\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3] \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_1 & 0 \\ \bar{k}_1 & 0 & \bar{k}_{2m} \\ 0 & -\bar{k}_{2m} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{h} \\ \tilde{a} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_m &= \left(\left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_m + \bar{X}_2 \bar{k}_1 \right) \tilde{\mathbf{q}} + \left(\bar{X}_1 \bar{k}_1 + \left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_m - \bar{X}_3 \bar{k}_{2m} \right) \tilde{\mathbf{h}} + \left(\bar{X}_2 \bar{k}_{2m} + \left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_m \right) \tilde{\mathbf{a}} \\
&= (dx_1 + x_2 k_1)q + \mathcal{E}[(dx_1^* + x_2 k_1^* + x_2^* k_1)q + (dx_1 + x_2 k_1)q^*] \\
&\quad + (dx_2 + x_1 k_1 - x_3 k_{2m})h + \mathcal{E}[(x_1 k_1^* + x_1^* k_1 + dx_2^* - x_3 k_{2m}^* - x_3^* k_{2m})h + (dx_2 + x_1 k_1 - x_3 k_{2m})h^*] \\
&\quad + (dx_3 + x_2 k_{2m})a + \mathcal{E}[(x_2 k_{2m}^* + x_2^* k_{2m} + dx_3^*)a + (dx_3 + x_2 k_{2m})a^*] = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_m &= -\bar{X}_2 \bar{k}_1 \quad \Rightarrow dx_1 + \mathcal{E}x_1^* = -(x_2 + \mathcal{E}x_2^*)(k_1 + \mathcal{E}k_1^*) \\
\left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_m &= \bar{X}_3 \bar{k}_{2m} - \bar{X}_1 \bar{k}_1 \Rightarrow dx_2 + \mathcal{E}x_2^* = (x_3 + \mathcal{E}x_3^*)(k_{2m} + \mathcal{E}k_{2m}^*) - (x_1 + \mathcal{E}x_1^*)(k_1 + \mathcal{E}k_1^*) \\
\left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_m &= -\bar{X}_2 \bar{k}_{2m} \quad \Rightarrow dx_3 + \mathcal{E}x_3^* = -(x_2 + \mathcal{E}x_2^*)(k_{2m} + \mathcal{E}k_{2m}^*) \\
\Rightarrow dx_1 &= -x_2 p, \quad dx_1^* = -(x_2 k_1^* + x_2^* k_1) \\
\Rightarrow dx_2 &= x_3 k_{2m} - x_1 k_1, \quad dx_2^* = x_3 k_{2m}^* + x_3^* k_{2m} - x_1 k_{01} - x_1^* k_1 \\
\Rightarrow dx_3 &= -x_2 k_{2m}, \quad dx_3^* = -x_2 k_{2m}^* - x_2^* k_{2m}
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde, $\tilde{X}$ vektörü Σ_2 sabit birim dual hiperbolik küresine sabitlenirse, bu

taktirde türevi $\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_f = 0$ dır [15]. Yani,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_f &= \left(\left[\left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_f, \left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_f, \left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_f \right] + [\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3] \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_1 & 0 \\ \bar{k}_1 & 0 & \bar{k}_{2f} \\ 0 & -\bar{k}_{2f} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{h}} \\ \tilde{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \\
\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_f &= \left(\left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_f + \bar{X}_2 \bar{k}_1 \right) \tilde{\mathbf{q}} + \left(\bar{X}_1 \bar{k}_1 + \left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_f - \bar{X}_3 \bar{k}_{2f} \right) \tilde{\mathbf{h}} + \left(\bar{X}_2 \bar{k}_{2f} + \left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_f \right) \tilde{\mathbf{a}} \\
&= (dx_1 + x_2 k_1)q + \mathcal{E}[(dx_1^* + x_2 k_1^* + x_2^* k_1)q + (dx_1 + x_2 k_1)q_0] \\
&\quad + (dx_2 + x_1 k_1 - x_3 k_{2f})h + \mathcal{E}[(x_1 k_1^* + x_1^* k_1 + dx_2^* - x_3 k_{2f}^* - x_3^* k_{2f})h + (dx_2 + x_1 k_1 - x_3 k_{2f})h^*] \\
&\quad + (dx_3 + x_2 k_{2f})a + \mathcal{E}[(x_2 k_{2f}^* + x_2^* k_{2f} + dx_3^*)a + (dx_3 + x_2 k_{2f})a^*] = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_f &= -\bar{X}_2 \bar{k}_1 \quad \Rightarrow dx_1 + \varepsilon x_1^* = -(x_2 + \varepsilon x_2^*)(k_1 + \varepsilon k_1^*) \\
\left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_f &= \bar{X}_3 \bar{k}_{2f} - \bar{X}_1 \bar{k}_1 \Rightarrow dx_2 + \varepsilon x_2^* = (x_3 + \varepsilon x_3^*)(k_{2f} + \varepsilon k_{2f}^*) - (x_1 + \varepsilon x_1^*)(k_1 + \varepsilon k_1^*) \\
\left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_f &= -\bar{X}_2 \bar{k}_{2f} \quad \Rightarrow dx_3 + \varepsilon x_3^* = -(x_2 + \varepsilon x_2^*)(k_{2f} + \varepsilon k_{2f}^*) \\
\Rightarrow dx_1 &= -x_2 p, \quad dx_1^* = -(x_2 k_1^* + x_2^* k_1) \\
\Rightarrow dx_2 &= x_3 k_{2f} - x_1 k_1, \quad dx_2^* = x_3 k_{2f}^* + x_{03} k_{2f} - x_1 k_1^* - x_1^* k_1 \\
\Rightarrow dx_3 &= -x_2 k_{2f}, \quad dx_3^* = -x_2 k_{2f}^* - x_2^* k_{2f}
\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi, $\tilde{X}$ vektörünün Σ_3 hareketli birim dual hiperbolik küresine göre sabit olduğunu kabul edilsin ve Σ_2 sabit birim dual hiperbolik küresine göre hız vektörünü hesaplayalım:

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \tilde{X}^T (C(F) - C(M)) \tilde{q} \quad (3.1.27)$$

olup

$$C(R) = C(F) - C(M) \quad (3.1.28)$$

olarak ele alalım. Böylece (3.1.27) denklemi

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \tilde{X}^T (C(R)) \tilde{q} \quad (3.1.29)$$

şeklinde yazılabilir. (3.1.29) ifadesi $\tilde{X}$ timelike vektörünün Σ_2 birim dual hiperbolik küresine göre hızıdır, bu hıza sürüklenme hızı denir. Böylece

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_2 & \bar{X}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_{2m} - \bar{k}_{2f} \\ 0 & -(\bar{k}_{2m} - \bar{k}_{2f}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{h} \\ \tilde{a} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \left[-\bar{X}_3(\bar{k}_{2m} - \bar{k}_{2f}) \right] \tilde{h} + \left[\bar{X}_2(\bar{k}_{2m} - \bar{k}_{2f}) \right] \tilde{a} \quad (3.1.30)$$

bulunur. $C(R)$ Lorentziyen anlamda anti-simetrik matris olduğundan

$$C(R)^t + C(R) = 0 \quad (3.1.31)$$

şeklindedir.

$$C(R)\tilde{X} = \tilde{D}_r \times \tilde{X} \quad (3.1.32)$$

olacak şekilde $\tilde{D}_r = d + \varepsilon d^*$ dual vektörü vardır.

Böylece, (3.1.29) denklemi

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \tilde{D}_r \times \tilde{X}, \quad \tilde{D}_r = \tilde{D}_f - \tilde{D}_m = -\bar{\Omega}\tilde{q} \quad (3.1.33)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\|\tilde{\Omega}\| = \bar{\Omega} = \omega + \varepsilon\omega^*$ dir. Böylece, (3.1.17) ve (3.1.33) denklemlerinden

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = (-\bar{X}_3\bar{\Omega})\tilde{h} + (\bar{X}_2\bar{\Omega})\tilde{a} \quad (3.1.34)$$

dir. (3.1.33) denkleminde $\tilde{X}$ timelike vektörünün ivmesi

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{X}}{dt^2} &= (\tilde{D}_r \times \tilde{X})' = (-\bar{\Omega}\tilde{q} \times \tilde{X})' \\ &= (-\bar{\Omega}'\tilde{q} \times \tilde{X}) - (\bar{\Omega}\tilde{q}' \times \tilde{X}) - (\bar{\Omega}\tilde{q} \times \tilde{X}') \\ &= (-\bar{\Omega}'\tilde{q} \times (\bar{X}_1\tilde{q} + \bar{X}_2\tilde{h} + \bar{X}_3\tilde{a})) - ((\bar{\Omega}\tilde{q}' \times \tilde{X}) - (\bar{\Omega}\tilde{q} \times \tilde{X}')) \\ &= (-\bar{\Omega}'\tilde{q} \times (\bar{X}_1\tilde{q} + \bar{X}_2\tilde{h} + \bar{X}_3\tilde{a})) - ((\bar{\Omega}\tilde{q}' \times \tilde{X}) - (\bar{\Omega}\tilde{q} \times \tilde{X}')) \\ &= (-\bar{\Omega}'\tilde{q} \times (\bar{X}_1\tilde{q} + \bar{X}_2\tilde{h} + \bar{X}_3\tilde{a})) - ((\bar{\Omega}\tilde{q}' \times \tilde{X}) - (\bar{\Omega}\tilde{q} \times \tilde{X}')) \\ &= \bar{\Omega}'\bar{X}_2\tilde{a} - \bar{\Omega}'\bar{X}_3\tilde{h} - \bar{\Omega}\bar{k}_1\bar{X}_1\tilde{a} - \bar{\Omega}\bar{k}_1\bar{X}_3\tilde{q} - \bar{\Omega}^2\bar{X}_2\tilde{h} - \bar{\Omega}^2\bar{X}_3\tilde{a} \end{aligned}$$

veya

$$\frac{d^2 \tilde{X}}{dt^2} = (-\bar{\Omega} \bar{k}_1 \bar{X}_3) \tilde{q} + (-\bar{\Omega}' \bar{X}_3 - \bar{\Omega}^2 \bar{X}_2) \tilde{h} + (-\bar{\Omega} \bar{k}_1 \bar{X}_1 + \bar{\Omega}' \bar{X}_2 - \bar{\Omega}^2 \bar{X}_3) \tilde{a} \quad (3.1.35)$$

bulunur.

Reel kısım ω ve dual kısım ω^* , hareketli timelike eksen yüzeyi ortak bir ana doğru boyunca yuvarlanma ve kayma yaparken, sırasıyla, dönme ve öteleme hareketlerine karşılık gelir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1.2. Herhangi bir t anında Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili hiperbolik küresel hareketinde, pol eğrilerine karşılık gelen eksen yüzeylerinin dağılma parametresi λ sıfırdan farklı iken hareketin adımı

$$h = \frac{\omega^*}{\omega} = \frac{k_{2m}^* - k_{2f}^*}{k_{2m} - k_{2f}} = \lambda \left(\frac{\coth \bar{\sigma}_m - \coth \bar{\sigma}_f}{\coth \bar{\theta}_m - \coth \bar{\theta}_f} \right) \quad (3.1.36)$$

ile verilir. Burada $\bar{\sigma}_f, \bar{\sigma}_m$ boğaz açıları, $\bar{\theta}_f, \bar{\theta}_m$ eksen yüzeylerinin dönmesiyle oluşan yönlü koninin tepe açılarıdır.

3.1.2. Hiperbolik Küresel Harekette Doğru Kompleksi

$\tilde{X}$ timelike doğrusu ile üretilen timelike regle yüzeyi inceleyelim. Σ_2 birim dual hiperbolik küre üzerinde $\tilde{X}(t)$ eğrisi boyunca hareketli bir çatı tanımlayalım. Bu eğri, L_2 sabit Lorentziyen uzayda bir timelike regle yüzeye karşılık gelir. $\tilde{X}(t)$ eğrisi boyunca Blaschke çatısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tilde{E}_1 = \tilde{X} = \bar{X}_1 \tilde{q} + \bar{X}_2 \tilde{h} + \bar{X}_3 \tilde{a}, \text{ (time)} \quad (3.1.37)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_2 &= \frac{\tilde{X}'}{\|\tilde{X}'\|} = \frac{\tilde{D} \times \tilde{X}}{\sqrt{\langle \tilde{X}', \tilde{X}' \rangle}} = \frac{(\bar{\Omega}_1 \tilde{q}) \times (\bar{X}_1 \tilde{q} + \bar{X}_2 \tilde{h} + \bar{X}_3 \tilde{a})}{\sqrt{\langle \tilde{X}', \tilde{X}' \rangle}} \\
&= \frac{\bar{\Omega} \bar{X}_2 \tilde{a} - \bar{\Omega} \bar{X}_3 \tilde{h}}{\sqrt{\langle \bar{\Omega} \bar{X}_2 \tilde{a} - \bar{\Omega} \bar{X}_3 \tilde{h}, \bar{\Omega} \bar{X}_2 \tilde{a} - \bar{\Omega} \bar{X}_3 \tilde{h} \rangle}} \\
\tilde{E}_2 &= \frac{-\bar{X}_3 \tilde{h} + \bar{X}_2 \tilde{a}}{\sqrt{\bar{X}_2^2 + \bar{X}_3^2}} \tag{3.1.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_3 &= -(\tilde{E}_1 \times \tilde{E}_2) = -\left((\bar{X}_1 \tilde{q} + \bar{X}_2 \tilde{h} + \bar{X}_3 \tilde{a}) \times \frac{(-\bar{X}_3 \tilde{h} + \bar{X}_2 \tilde{a})}{\sqrt{\bar{X}_2^2 + \bar{X}_3^2}} \right) \\
\tilde{E}_3 &= -\left(\frac{(1 + \bar{X}_1^2) \tilde{q} + \bar{X}_1 \bar{X}_2 \tilde{h} + \bar{X}_1 \bar{X}_3 \tilde{a}}{\sqrt{\bar{X}_2^2 + \bar{X}_3^2}} \right) \tag{3.1.39}
\end{aligned}$$

$\tilde{E}_1$ birim dual timelike vektörü $\mathbb{R}_1^3$ Lorentziyen çizgiler uzayında bir yönlü timelike doğrusuna karşılık gelirken, $\tilde{E}_2, \tilde{E}_3$ birim dual spacelike vektörleri de $\mathbb{R}_1^3$ çizgiler uzayında spacelike doğrularına karşılık gelirler. Bu noktaların kesişimi $\tilde{X}$ timelike ana doğrusunun boğaz noktasıdır. Böylece Blaschke çatısı,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{E}_1 \\ \tilde{E}_2 \\ \tilde{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_{1x} & 0 \\ \bar{k}_{1x} & 0 & \bar{k}_{2x} \\ 0 & -\bar{k}_{2x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_1 \\ \tilde{E}_2 \\ \tilde{E}_3 \end{bmatrix} \tag{3.1.40}$$

ile verilir. Burada,

$$\begin{aligned}
\bar{k}_{1x} &= k_{1x} + \varepsilon k_{1x}^* = \left\| \frac{d\tilde{X}}{dt} \right\| = \bar{\Omega} \sqrt{\bar{X}_2^2 + \bar{X}_3^2}, \\
\bar{k}_{2x} &= k_{2x} + \varepsilon k_{2x}^* = \frac{\det(\tilde{X}, \tilde{X}', \tilde{X}'')}{(\bar{k}_{1x})^2} = \bar{\Omega} \bar{X}_1 + \frac{\bar{k}_{1x} \bar{X}_3}{\bar{X}_2^2 + \bar{X}_3^2} \tag{3.1.41}
\end{aligned}$$

Blaschke invariantlarıdır.

$\tilde{X}$ timelike doğrusu ile üretilen timelike regle yüzeyin dağılma parametresi

$$\lambda_x = \frac{\bar{k}_{1x}^*}{\bar{k}_{1x}} = \frac{x_2 x_2^* + x_3 x_3^* + h(x_2^2 + x_3^2)}{(x_2^2 + x_3^2)} \quad (3.1.42)$$

ile verilir. (3.1.42) denklemi, hareketli eksen yüzeylerinin timelike doğrularının ürettiği timelike regle yüzeylerin aynı dağılma parametresine sahip olduğu durumlarda kullanılabilir. Doğruların bu ailesi doğru kompleksi olarak adlandırılır ve

$$x_2 x_2^* + x_3 x_3^* + (h - \lambda_x)(x_2^2 + x_3^2) = 0 \quad (3.1.43)$$

denklemi ile gösterilir. Bu denklem kuadratik doğru kompleksidir. Sonuç olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.3. Σ_3 / Σ_2 1-parametrel dual hiperbolik küresel harekete karşılık gelen hareketli eksen yüzeylerinin timelike doğrularının bir cümlesini göz önüne alalım. Bu doğrular, L_2 sabit Lorentziyen uzayında aynı dağılma parametresine sahip timelike regle yüzeylerin üreteçleri olsunlar. Böylece doğruların bu cümlesi kuadratik doğru kompleksi oluşturur.

$\tilde{X}$ timelike doğrusu üzerinde keyfi bir noktanın konumu $\mathbf{p}(x, y, z)$ olsun. Böylece

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{p} \times \mathbf{x},$$

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & -\vec{e}_2 & -\vec{e}_3 \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} = (yx_3 - zx_2, xx_3 - zx_1, yx_1 - xx_2)$$

dan

$$x_1^* = x_3 y - x_2 z, \quad x_2^* = x_3 x - x_1 z, \quad x_3^* = x_1 y - x_2 x \quad (3.1.44)$$

bulunur. (3.1.44) denklemi (3.1.43) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x_2(x_3 x - x_1 z) + x_3(x_1 y - x_2 x) + (h - \lambda_x)(x_2^2 + x_3^2) &= 0, \\ x_1 x_3 y - x_1 x_2 z + (h - \lambda_x)(x_2^2 + x_3^2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.45)$$

bulunur. Bu denklem, hareketli eksen yüzeyinin $\tilde{X}$ timelike doğrularına karşılık gelen aynı dağılma parametresine sahip bir düzlemde yatan timelike regle yüzeylerin, Σ_3 / Σ_2 1-parametreli hiperbolik küresel hareketinin ani vida eksenine paralel olduğunu verir.

(3.1.45) denklemi için iki farklı durum söz konusudur: $\lambda_x = h$ olması durumunda dağılma parametresi, ani vida eksenini boyunca düzlemdeki doğrular ile bağlantılıdır. $\lambda_x = 0$ olması durumunda

$$x_1 x_3 y - x_1 x_2 z + h(x_2^2 + x_3^2) = 0$$

hareketli eksen yüzeyinin $\tilde{X}$ timelike doğrusunun bir açılabilir regle yüzey üretmesi demektir. Bu durumda, $\tilde{X}$ üreteç doğrusu ve komşu $\tilde{X}(t + dt)$ doğrusu, regle yüzeyin döndüğü noktaların teğet doğrularıdır. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.1.4. Σ_3 / Σ_2 1-parametreli hiperbolik küresel hareketi boyunca, karşılık gelen hareketli eksen yüzeyinin doğruları L_2 uzayında açılabilir regle yüzey üretir. Bu doğrular özel bir doğru kompleksinde içerilirler.

$\bar{k}_{1x} = k_{1x} + \varepsilon k_{1x}^*$ ve $\bar{k}_{2x} = k_{2x} + \varepsilon k_{2x}^*$ Blaschke invariantları Blaschke çatsının kinematik yorumunu verir. Şimdi

$$\tilde{D}_x = -\bar{k}_{2x} \tilde{E}_1 - \bar{k}_{1x} \tilde{E}_3 \quad (3.1.46)$$

biçiminde tanımlanan dual vektörünü alalım bu vektör dual hiperbolik pfaff vektörü olarak bilinir.

$\|\tilde{D}\| = \sqrt{\bar{k}_{1x}^2 - \bar{k}_{2x}^2} = \omega_x + \varepsilon \omega_x^*$, $\tilde{E}_1$ timelike vektörünün dual açısal hızıdır. Burada,

$$\omega_x = \sqrt{|k_{1x}^2 - k_{2x}^2|}, \quad \omega_x^* = \frac{k_{1x} k_{1x}^* - k_{2x} k_{2x}^*}{\sqrt{|k_{1x}^2 - k_{2x}^2|}} \quad (3.1.47)$$

reel ve dual kısımları, sırasıyla, $\tilde{E}_1$ timelike vektörünün dönme ve öteleme açısal hızlarıdır.

Dual hiperbolik pfaff vektörü boyunca $\tilde{E}_1$ timelike vektörünün adımı

$$h_x = \frac{\omega_x^*}{\omega_x} = \frac{k_{1x}k_{1x}^* - k_{2x}k_{2x}^*}{k_{1x}^2 - k_{2x}^2} \quad (3.1.48)$$

dır. Buna göre;

$$\tilde{U} = \frac{\tilde{D}_x}{\|\tilde{D}_x\|} = \frac{-\bar{k}_{2x}\tilde{E}_1 - \bar{k}_{1x}\tilde{E}_3}{\sqrt{\bar{k}_{1x}^2 - \bar{k}_{2x}^2}} \quad (3.1.49)$$

birim dual timelike vektörü, $\tilde{U}$ Blaschke çatısında $\tilde{E}_1$ timelike doğrusunun hareketinin Disteli eksenidir. (3.1.49) denkleminde Disteli eksen $\tilde{X} = \tilde{X}(t)$ timelike regle yüzeyinin teğet düzlemine paraleldir ve $\tilde{E}_2$ spacelike merkez normaline diktir. Böylece Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili hiperbolik küresel hareketin ani vida eksen ve Disteli eksen, $\tilde{E}_1, \tilde{E}_3$ düzlemi ile Σ_2 birim dual hiperbolik küresinin kesişimi ile belirlenen bir tek büyük dual hiperbolik çember üzerinde yatar. $\Delta = \delta + \varepsilon\delta^*$, Disteli eksen ve $\tilde{X}$ timelike doğrusu arasındaki dual hiperbolik açı ise

$$\tilde{U} = -\cosh \Delta \tilde{E}_1 - \sinh \Delta \tilde{E}_3 \quad (3.1.50)$$

yazılabilir. $\Delta = \delta + \varepsilon\delta^*$ dual hiperbolik küresel eğrilik yarıçapıdır. (3.1.50) denkleminin türevi alınır

$$\begin{aligned} \tilde{U}' &= -\sinh \Delta \tilde{E}_1 \Delta' - \cosh \Delta \tilde{E}_1' - \cosh \Delta \tilde{E}_3 \Delta' - \sinh \Delta \tilde{E}_3' \\ \tilde{U}' &= (-\sinh \Delta \tilde{E}_1 - \cosh \Delta \tilde{E}_3) \Delta' - \cosh \Delta (\bar{k}_{1x} \tilde{E}_2) - \sinh \Delta (-\bar{k}_{2x} \tilde{E}_2) \\ \tilde{U}' &= (-\sinh \Delta \tilde{E}_1 - \cosh \Delta \tilde{E}_3) \Delta' + (\bar{k}_{2x} \sinh \Delta - \bar{k}_{1x} \cosh \Delta) \tilde{E}_2 \end{aligned} \quad (3.1.51)$$

elde edilir. Böylece

$$\coth \Delta = \frac{\bar{k}_{2x}}{\bar{k}_{1x}} \quad (3.1.52)$$

bulunur. Bu denklem dual hiperbolik küresel eğrilik $\bar{\rho}$ ve dual hiperbolik küresel eğrilik yarıçapı arasındaki bağıntının

$$\bar{\rho} = \rho + \varepsilon\rho^* = \coth \Delta \quad (3.1.53)$$

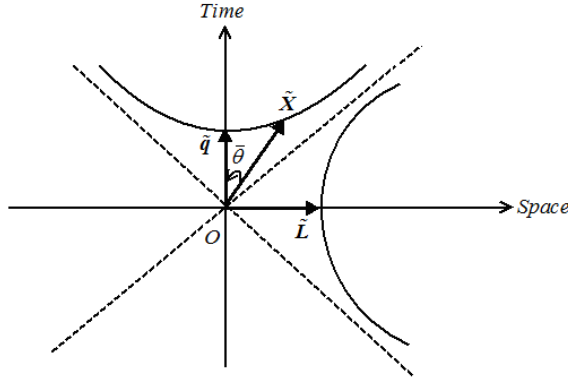
biçiminde olduğunu verir.

3.1.3. Hiperbolik Küresel Harekette Doğru Yörüngeleri ve Disteli Formülü

Bu kesimde dual Lorentziyen uzayda dual hiperbolik açı vasıtasıyla Euler formülü ve Disteli formülünü elde etmek için bir metot verilmiştir. Hareketli L_3 Lorentziyen uzayda yönlü bir timelike doğrunun, sabit L_2 Lorentziyen uzayda verilen timelike doğru ile sabit hiperbolik açı yaptığını kabul edelim. Bundan dolayı Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili hiperbolik küresel hareketinin sabitlenmiş $\tilde{X}$ timelike doğrusunun doğrultusunu belirlemek için $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual hiperbolik açısını ve $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual merkez açısını alalım. $\tilde{X}$ birim olduğundan $\tilde{X}$ nın bileşenleri

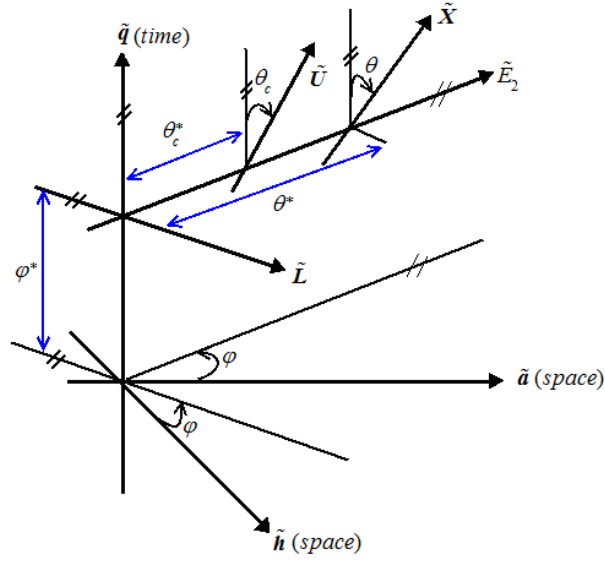
$$\tilde{X} = \cosh \bar{\theta} \tilde{q} + \sinh \bar{\theta} \tilde{L}, \quad \tilde{L} = \cos \bar{\varphi} \tilde{h} + \sin \bar{\varphi} \tilde{a} \quad (3.1.54)$$

olarak yazılabilir.



Şekil 3.1.1. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili hiperbolik küresel hareketinin sabitlenmiş $\tilde{X}$ timelike doğrusu

$\bar{\theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual hiperbolik açısı Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili hiperbolik küresel hareketinin ani vida eksenine göre $\tilde{X}$ nın konumunu tanımlar.



Şekil 3.1.2. $\tilde{q}$ nın timelike olması durumunda hareketli timelike doğru $\tilde{X}$ ve bu doğrunun Disteli ekseni $\tilde{U}$

Koordinatların cümlesinin bir benzeri, $t = t_0$ anında, $\tilde{X} = \tilde{X}(t)$ timelike yüzeyinin $\tilde{U}$ timelike ekseninin belirlenmesinde kullanılabilir. $\tilde{E}_2$ merkez normal olduğundan Disteli eksenine diktir. Bu, L_3 / L_2 1-parametrelili uzaysal hareketinin ani vida ekseni etrafında aynı $\bar{\varphi}$ dual merkez açısı ile belirlenir. Ani vida ekseni ile tanımlanan $\bar{\theta}_c = \theta_c + \varepsilon \theta_c^*$ dual hiperbolik açı ile

$$\tilde{U} = \cosh \bar{\theta}_c \tilde{q} + \sinh \bar{\theta}_c \cos \bar{\varphi} \tilde{h} + \sinh \bar{\theta}_c \sin \bar{\varphi} \tilde{a} \quad (3.1.55)$$

timelike vektörü yazılabilir. (3.1.54) ve (3.1.55) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle &= -\cosh \bar{\theta}_c \cosh \bar{\theta} + \sinh \bar{\theta}_c \sinh \bar{\theta} \cos^2 \bar{\varphi} + \sinh \bar{\theta}_c \sinh \bar{\theta} \sin^2 \bar{\varphi} \\ &= -\cosh \bar{\theta}_c \cosh \bar{\theta} + \sinh \bar{\theta}_c \sinh \bar{\theta} \\ \langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle &= -\cosh(\bar{\theta}_c - \bar{\theta}) \end{aligned} \quad (3.1.56)$$

bulunur. Burada, $\tilde{U}$ timelike Disteli ekseni olduğundan $(\bar{\theta}_c - \bar{\theta})$, $t = t_0$ da ikinci mertebeden sabit kalır. Yani,

$$\left. \frac{d(\bar{\theta}_c - \bar{\theta})}{dt} \right|_{t=t_0} = 0, \quad \left. \frac{d\tilde{U}}{dt} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (3.1.57)$$

ve

$$\left. \frac{d^2(\bar{\theta}_c - \bar{\theta})}{dt^2} \right|_{t=t_0} = 0, \quad \left. \frac{d^2\tilde{U}}{dt^2} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (3.1.58)$$

olur. (3.1.56) denkleminin türevinden,

$$\left\langle \frac{d\tilde{X}}{dt}, \tilde{U} \right\rangle + \left\langle \tilde{X}, \frac{d\tilde{U}}{dt} \right\rangle = 0$$

ve (3.1.57) denkleminde

$$\left\langle \frac{d\tilde{X}}{dt}, \tilde{U} \right\rangle = 0 \quad (3.1.59)$$

bulunur. (3.1.59) denkleminin türevi alınırsa

$$\left\langle \frac{d^2\tilde{X}}{dt^2}, \tilde{U} \right\rangle + \left\langle \frac{d\tilde{X}}{dt}, \frac{d\tilde{U}}{dt} \right\rangle = 0$$

veya

$$\left\langle \frac{d^2\tilde{X}}{dt^2}, \tilde{U} \right\rangle = 0 \quad (3.1.60)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{X}}{dt} &= \bar{\Omega} \sinh \bar{\theta} \cos \bar{\varphi} \tilde{a} - \bar{\Omega} \sinh \bar{\theta} \sin \bar{\varphi} \tilde{h} \\ \tilde{U} &= \cosh \bar{\theta}_c \tilde{q} + \sinh \bar{\theta}_c \cos \bar{\varphi} \tilde{h} + \sinh \bar{\theta}_c \sin \bar{\varphi} \tilde{a} \end{aligned}$$

vektörlerinin iç çarpımı,

$$\left\langle \frac{d\tilde{X}}{dt}, \tilde{U} \right\rangle = -\bar{\Omega} \sinh \bar{\theta} \sin \bar{\varphi} \sinh \bar{\theta}_c \cos \bar{\varphi} + \bar{\Omega} \sinh \bar{\theta} \cos \bar{\varphi} \sinh \bar{\theta}_c \sin \bar{\varphi} = 0$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{X}}{dt^2} &= (\tilde{D}_r \times \tilde{X})' = -\bar{\Omega}' \tilde{q} \times (\cosh \bar{\theta} \tilde{q} + \sinh \bar{\theta} \cos \bar{\varphi} \tilde{h} + \sinh \bar{\theta} \sin \bar{\varphi} \tilde{a}) \\ &\quad - \bar{\Omega} \tilde{k}_1 \tilde{h} \times (\cosh \bar{\theta} \tilde{q} + \sinh \bar{\theta} \cos \bar{\varphi} \tilde{h} + \sinh \bar{\theta} \sin \bar{\varphi} \tilde{a}) \\ &\quad + \bar{\Omega}^2 \tilde{q} \times (\tilde{q} \times (\cosh \bar{\theta} \tilde{q} + \sinh \bar{\theta} \cos \bar{\varphi} \tilde{h} + \sinh \bar{\theta} \sin \bar{\varphi} \tilde{a})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{X}}{dt^2} &= (-\bar{\Omega} \tilde{k}_1 \sinh \bar{\theta} \cos \bar{\varphi}) \tilde{q} + (-\bar{\Omega}' \sinh \bar{\theta} \sin \bar{\varphi} - \bar{\Omega}^2 \sinh \bar{\theta} \cos \bar{\varphi}) \tilde{h} \\ &\quad + (\bar{\Omega}' \sinh \bar{\theta} \cos \bar{\varphi} - \bar{\Omega} \tilde{k}_1 \cosh \bar{\theta} - \bar{\Omega}^2 \sinh \bar{\theta} \sin \bar{\varphi}) \tilde{a} \end{aligned}$$

olduğundan (3.1.60) eşitliği

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^2 \tilde{X}}{dt^2}, \tilde{U} \right\rangle &= 0 \Rightarrow \\ &\left\langle \begin{aligned} &((- \bar{\Omega} \tilde{k}_1 \sinh \bar{\theta} \cos \bar{\varphi}) \tilde{q} + (-\bar{\Omega}' \sinh \bar{\theta} \sin \bar{\varphi} - \bar{\Omega}^2 \sinh \bar{\theta} \cos \bar{\varphi}) \tilde{h}) \\ &+ (\bar{\Omega}' \sinh \bar{\theta} \cos \bar{\varphi} - \bar{\Omega} \tilde{k}_1 \cosh \bar{\theta} - \bar{\Omega}^2 \sinh \bar{\theta} \sin \bar{\varphi}) \tilde{a}, \\ &(\cosh \bar{\theta}_c \tilde{q} + \sinh \bar{\theta}_c \cos \bar{\varphi} \tilde{h} + \sinh \bar{\theta}_c \sin \bar{\varphi} \tilde{a}) \end{aligned} \right\rangle \\ &= \bar{\Omega} \tilde{k}_1 \sinh \bar{\theta} \sin \bar{\varphi} \cosh \bar{\theta}_c - \bar{\Omega}' \sinh \bar{\theta} \sin \bar{\varphi} \sinh \bar{\theta}_c \cos \bar{\varphi} - \bar{\Omega}^2 \sinh \bar{\theta} \cos^2 \bar{\varphi} \sinh \bar{\theta}_c \\ &\quad + \bar{\Omega}' \sinh \bar{\theta} \cos \bar{\varphi} \sinh \bar{\theta}_c \sin \bar{\varphi} - \bar{\Omega} \tilde{k}_1 \cosh \bar{\theta} \sinh \bar{\theta}_c \sin \bar{\varphi} - \bar{\Omega}^2 \sinh \bar{\theta} \sin^2 \bar{\varphi} \sinh \bar{\theta}_c = 0 \end{aligned}$$

demektir. Buradan

$$\bar{\Omega} \tilde{k}_1 \sin \bar{\varphi} (\sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\theta}_c - \cosh \bar{\theta} \sinh \bar{\theta}_c) - \bar{\Omega}^2 \sinh \bar{\theta} \sinh \bar{\theta}_c = 0$$

Bu denklemin her iki tarafı $\sinh \bar{\theta}_c \sinh \bar{\theta}$ ile bölünürse

$$(\coth \bar{\theta}_c - \coth \bar{\theta}) \sin \bar{\varphi} = \frac{\bar{\Omega}}{\tilde{k}_1} \quad (3.1.61)$$

elde edilir. (3.1.61) denklemi dual hiperbolik küresel hareketin Euler-Savary formülüdür. (3.1.53) denkleminde $\bar{\rho} = \coth \Delta$ olduğundan Euler-Savary denklemi

$$(\coth \bar{\theta}_c - \coth \bar{\theta}) \sin \bar{\varphi} = \bar{\rho} \quad (3.1.62)$$

formunda yazılır. Burada

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\Omega}}{\bar{k}_1} = \frac{\bar{k}_{2f}}{\bar{k}_1} - \frac{\bar{k}_{2m}}{\bar{k}_1} . \quad (3.1.63)$$

(3.1.62) denkleminin reel ve dual kısımları

$$(\coth \theta_c - \coth \theta) \sin \varphi = \rho \quad (3.1.64)$$

ve

$$(\coth \theta_c - \coth \theta) \varphi^* \cos \varphi - \left(\frac{\theta_c^*}{\sin h^2 \theta_c} - \frac{\theta^*}{\sin h^2 \theta} \right) \sin \varphi = \rho^* \quad (3.1.65)$$

ile verilir [28]. (3.1.64) Lorentziyen Euler-Savary denklemi (3.1.65) denklemi ile birlikte Dual hiperbolik hareketinin eksen yüzeylerinin Disteli formülü olarak adlandırılır. (3.1.64) denklemi Lorentziyen uzayda reel hiperbolik küresel hareketin eksen yüzeyleri için Euler-Savary formülüdür. (3.1.65) denklemini daha basit hale indirmek için (3.1.64) denklemi kullanılırsa

$$\rho \varphi^* \cot \varphi - \left(\frac{\theta_c^*}{\sinh^2 \theta_c} - \frac{\theta^*}{\sinh^2 \theta} \right) \sin \varphi = \rho^* \quad (3.1.66)$$

bulunur. θ_c ve θ_c^* bilindiğinde (3.1.64) denklemden θ ve (3.1.65) denklemden θ^* bulunabilir. Tersine θ ve θ^* bilindiğinde θ_c ve θ_c^* belirlenebilir.

3.1.4. Dual Hiperbolik Açık Yaklaşımıyla Lorentziyen Disteli Ekseninin İncelenmesi

Bu kesimde, dual hiperbolik açı yaklaşımıyla Lorentziyen Disteli ekseninin yeni bir karakteristik özelliği incelenecektir: ψ , $\tilde{X}$ timelike doğrusu ile $\tilde{U}$ timelike disteli eksenini arasındaki açı ve ψ^* bunlar arasındaki en kısa uzaklık olmak üzere, $\bar{\psi} = \psi + \varepsilon\psi^* = \bar{\theta}_c - \bar{\theta}$ dual hiperbolik açısı (3.1.56) eşitliğinden

$$-\arccos h(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle) = \bar{\psi} \quad (3.1.67)$$

biçiminde yazılabilir. Bu bağıntı, birim dual hiperbolik küre üzerindeki noktalar için bir metrik tanımlar. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili hiperbolik küresel hareketi boyunca bu dual hiperbolik açı değişir. dS dual yay elementine göre (3.1.67) nin türevi alınır

$$\frac{d\bar{\psi}}{dS} = \frac{\langle -\tilde{X}', \tilde{U} \rangle}{\sqrt{(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2 - 1}} \quad (3.1.68)$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{d\bar{\psi}}{dS} = 0 \Leftrightarrow \langle -\tilde{X}', \tilde{U} \rangle = 0 \Leftrightarrow \tilde{T} \perp \tilde{U} \Leftrightarrow \tilde{U} = \bar{A}_1 \tilde{N} + \bar{A}_2 \tilde{B} \quad (3.1.69)$$

bulunur.

Burada Lorentziyen uzayda transfer prensibini uygularsak sonuç olarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.1.6. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili hiperbolik küresel hareketi için, $\tilde{X}$ yönlü timelike doğrusu ve bunun timelike $\tilde{U}$ Disteli eksenini arasındaki dual hiperbolik açı ve en kısa uzaklığının birinci türevinin sıfır olması, $\tilde{X}$ doğrusu için ve $\tilde{U}$ Disteli ekseninin, ani dönme eksenini ile lineer bağımlı olması için bir karakteristiktir. Böyle doğrular arasındaki dual hiperbolik açı ve en kısa uzaklık birinci yaklaşımda invaryanttır.

Benzer şekilde (3.1.68) denkleminin türevi alınır

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{dS^2} = \frac{\left(\langle -\tilde{X}', \tilde{U} \rangle\right)' \sqrt{\left(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle\right)^2 - 1} - \langle -\tilde{X}', \tilde{U} \rangle \left(\sqrt{\left(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle\right)^2 - 1}\right)'}{\left(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle\right)^2 - 1} \quad (3.1.70)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\psi}}{dS} = \frac{d^2\bar{\psi}}{dS^2} = 0 &\Leftrightarrow \langle -\tilde{X}', \tilde{U} \rangle = \langle -\tilde{X}'', \tilde{U} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle (\bar{A}_1\tilde{N} + \bar{A}_2\tilde{B}), \kappa\tilde{N} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \tilde{U} = \bar{A}_2\tilde{B} \end{aligned}$$

den

$$\langle \tilde{U}, \tilde{U} \rangle = -1 \Rightarrow \bar{A}_2 = -1$$

bulunur. Böylece,

$$\frac{d\bar{\psi}}{dS} = \frac{d^2\bar{\psi}}{dS^2} = 0 \Leftrightarrow \tilde{U} = -\tilde{B} \quad (3.1.71)$$

elde edilir. Lorentziyen uzayda transfer prensibi uygulanırsa aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 3.1.7. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili hiperbolik küresel hareketi için $\tilde{X}$ yönlü timelike doğrusu ve bunun $\tilde{U}$ Disteli ekseni arasındaki dual hiperbolik açı ve en kısa uzaklığının birinci ve ikinci türevlerinin sıfır olması karakteristiktir ve $\tilde{B} \rightarrow -\tilde{U}$ karşılık gelir ve $\tilde{B}$ vektörü $\tilde{X}(t)$ timelike regle yüzeyinin Disteli eksenidir.

(3.1.70) denkleminin türevi alınır

$$\begin{aligned}
\frac{d^3\bar{\psi}}{dS^3} = & \frac{1}{(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2 - 1} \left\{ (\langle -\tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^* \sqrt{(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2 - 1} - (\langle -\tilde{X}', \tilde{U} \rangle) \left(\sqrt{(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2 - 1} \right)^* \right\} \\
& + \left(\frac{1}{(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2 - 1} \right)' \left\{ (\langle -\tilde{X}', \tilde{U} \rangle) \left(\sqrt{(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2 - 1} \right)' - (\langle -\tilde{X}', \tilde{U} \rangle)' \sqrt{(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2 - 1} \right\}
\end{aligned} \tag{3.1.72}$$

ve böylece,

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\psi}}{dS} = \frac{d^2\bar{\psi}}{dS^2} = \frac{d^3\bar{\psi}}{dS^3} = 0 & \Leftrightarrow \langle -\tilde{X}', \tilde{U} \rangle = \langle -\tilde{X}'', \tilde{U} \rangle = \langle -\tilde{X}''', \tilde{U} \rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \tilde{U} = -\tilde{B}, \quad \langle -\tilde{U}, (\kappa\tilde{N})' \rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \tilde{U} = -\tilde{B}, \quad \langle -\tilde{U}, (\kappa'\tilde{N} + \kappa\tilde{N}') \rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \tilde{U} = -\tilde{B}, \quad \langle -\tilde{U}, (\kappa'\tilde{N} + \kappa(\kappa\tilde{T} + \tau\tilde{B})) \rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \tilde{U} = -\tilde{B}, \quad \kappa\tilde{T} = 0 \Leftrightarrow \tilde{U} = -\tilde{B}, \quad \tau = 0 \quad (\kappa \neq 0)
\end{aligned}$$

bulunur. Lorentziyen uzayda transfer prensibi uygulanırsa aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 3.1.8. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili hiperbolik küresel hareketi için $\tilde{X}$ yönlü timelike doğrusu ve bunun $\tilde{U}$ Disteli eksenini arasındaki hiperbolik açı ve en kısa uzaklığının birinci, ikinci ve üçüncü türevinin sıfır olması, burulma doğru kongüransının doğrularını karakterize eder. Burada $\tilde{U}$, $\tilde{X}$ timelike regle yüzeyinin Disteli eksenidir.

$\tau = 0$ olduğundan, Disteli eksenini ikinci mertebeden sabitlenir ve timelike $\tilde{X}(t)$ regle yüzeyinin üreteç doğrusu sabit adımla hareket eder.

3.1.5. Örnek

Bu kesimde, ilk olarak, Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili hiperbolik küresel hareketinin ani vida eksenini için dual Lorentziyen vektörler kullanılmıştır. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili hiperbolik küresel hareketi analitik olarak,

$$\tilde{\mathbf{x}}_f(t) = A(t)\tilde{\mathbf{x}}_m(t) + \tilde{\mathbf{m}}_f(t) \quad , \quad \tilde{\mathbf{x}}_m(t) = A^{-1}(t)\tilde{\mathbf{x}}_f(t) + \tilde{\mathbf{m}}_m(t) \quad (3.1.73)$$

biçiminde tanımlanabilir. Burada $\tilde{\mathbf{x}}_f, \tilde{\mathbf{x}}_m$, sırasıyla, sabit çatı ve hareketli çatıda bir noktanın vektörleri ve $\tilde{\mathbf{m}}_f, \tilde{\mathbf{m}}_m$ öteleme vektörleri olup, bunlar $\bar{t} = t + \varepsilon t^*$ dual parametresine göre diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. Bir parametrelili hareket söz konusu olduğu için $t^* = 0$ alınmıştır. Ayrıca,

$$\tilde{\mathbf{m}}_f = -A\tilde{\mathbf{m}}_m \quad , \quad \tilde{\mathbf{m}}_m = -A^{-1}\tilde{\mathbf{m}}_f \quad (3.1.74)$$

bağıntıları mevcuttur ve burada A dual Lorentziyen ortogonal matris olup

$$A^{-1} = \varepsilon A' \varepsilon; \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.75)$$

şartı sağlanır.

$\tilde{\mathbf{x}}_f$ ve $\tilde{\mathbf{x}}_m$, sırasıyla, sabit Σ_2 ve hareketli Σ_3 Lorentz uzaylarının ortonormal çatılarına göre, aynı $\tilde{\mathbf{X}}$ noktasının konum vektörünü gösterirler.

$$\tilde{\mathbf{x}}_m \in \Sigma_3 \quad (\tilde{\mathbf{x}}_m' = 0) \text{ noktasının hızı sabit iken}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_f' = A'\tilde{\mathbf{x}}_m + A\tilde{\mathbf{x}}_m' + \tilde{\mathbf{m}}_f' = A'\tilde{\mathbf{x}}_m + \tilde{\mathbf{m}}_f' \quad (3.1.76)$$

olur. (3.1.73) ve (3.1.74) denklemleri (3.1.76) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}'_f &= A'(A^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_f + \tilde{\mathbf{m}}_m) + \tilde{\mathbf{m}}'_f \\
&= A'(A^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_f - A^{-1}\tilde{\mathbf{m}}_f) + \tilde{\mathbf{m}}'_f \\
\tilde{\mathbf{x}}'_f &= A'A^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_f + (\tilde{\mathbf{m}}'_f - A'A^{-1}\tilde{\mathbf{m}}_f)
\end{aligned} \tag{3.1.77}$$

bulunur. $A'A^{-1}$ Lorentziyen anlamda anti-simetrik matris olup,

$$A'A^{-1} + A(A^{-1})' = 0. \tag{3.1.78}$$

$\omega = A'A^{-1}$ alınırsa (3.1.78) denklemi

$$\omega + \omega' = 0 \tag{3.1.79}$$

şeklinde kısıtlanabilir. Böylece (3.1.77) denklemi

$$\tilde{\mathbf{x}}'_f = \omega \tilde{\mathbf{x}}_f + (\tilde{\mathbf{m}}'_f - \omega \tilde{\mathbf{m}}_f) \tag{3.1.80}$$

formunda yeniden yazılabilir. Bu denklemin bir sonucu olarak,

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t) = \omega(t) + \varepsilon \omega^*(t) \tag{3.1.81}$$

dual vektörü vardır burada,

$$\omega \mathbf{x}_f = \omega \times \mathbf{x}_f; \quad \omega^* = (\mathbf{m}' - \omega \times \mathbf{m}). \tag{3.1.82}$$

Şimdi basit bir örnek ile yukarıdaki durumları açıklayalım. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili hiperbolik küresel hareketini incelemek için

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cosh \bar{\theta} & -\sinh \bar{\theta} & 0 \\ -\sinh \bar{\theta} & \cosh \bar{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \cosh \bar{\varphi} & 0 & -\sinh \bar{\varphi} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \bar{\varphi} & 0 & \cosh \bar{\varphi} \end{pmatrix} \tag{3.1.83}$$

ve $\bar{\theta} = \bar{\varphi}$, $\theta^* = \varphi^* = 0$ olmak üzere,

$$A = \begin{pmatrix} \cosh^2 \varphi & -\sinh \varphi & -\cosh \varphi \sinh \varphi \\ -\sinh \varphi \cosh \varphi & \cosh \varphi & \sinh^2 \varphi \\ -\sinh \varphi & 0 & \cosh \varphi \end{pmatrix} \quad (3.1.84)$$

matrisini ve $\mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere Lorentziyen anlamda anti-simetrik

$$m(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \sinh \varphi \\ 0 & 0 & -\mu \cosh \varphi \\ \mu \sinh \varphi & \mu \cosh \varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.85)$$

matrisini ele alalım. $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}_m, \tilde{\mathbf{q}}_f$ timelike vektörler olduğundan

$$\mathbf{m}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mu \cosh \varphi \\ \mu \sinh \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.86)$$

vektörünü alabiliriz. $\omega = A'A^{-1}$ olduğundan

$$\omega(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \cosh \varphi \sinh \varphi & -\cosh \varphi & -\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi \\ -\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi & \sinh \varphi & 2 \cosh \varphi \sinh \varphi \\ -\cosh \varphi & 0 & \sinh \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh^2 \varphi & \sinh \varphi \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 \\ \sinh \varphi \cosh \varphi & \sinh^2 \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}$$

$$\omega(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\cosh \varphi \\ -1 & 0 & \sinh \varphi \\ -\cosh \varphi & -\sinh \varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.87)$$

Lorentziyen anlamda anti-simetrik matrisi elde edilir. Böylece dönme hareketinin vektörü

$$\omega(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sinh \varphi \\ -\cosh \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.88)$$

olarak bulunur. (3.1.80) denkleminde öteleme hareketinin vektörü

$$\begin{aligned}\omega^*(\varphi) &= (\mathbf{m}' - \omega \times \mathbf{m}) = \begin{pmatrix} \mu \sinh \varphi \\ \mu \cosh \varphi \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\mu \sinh \varphi \\ -\mu \cosh \varphi \\ -\mu \end{pmatrix} \\ \omega^*(\varphi) &= \begin{pmatrix} 2\mu \sinh \varphi \\ 2\mu \cosh \varphi \\ \mu \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.1.89)$$

olarak bulunur. Böylece, her φ anında, Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili hiperbolik küresel hareketinin Pfaff vektörü

$$\tilde{\Omega}(\varphi) = \omega(\varphi) + \varepsilon \omega^*(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sinh \varphi + 2\varepsilon\mu \sinh \varphi \\ -\cosh \varphi + 2\varepsilon\mu \cosh \varphi \\ 1 + \varepsilon\mu \end{pmatrix}\quad (3.1.90)$$

ve Teo. 3.1.1 den sabit eksen yüzeyi

$$\tilde{q}_f(\varphi) = \frac{\tilde{\Omega}}{\|\tilde{\Omega}\|} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\varepsilon\mu}} \begin{pmatrix} -\sinh \varphi + 2\varepsilon\mu \sinh \varphi \\ -\cosh \varphi + 2\varepsilon\mu \cosh \varphi \\ 1 + \varepsilon\mu \end{pmatrix}\quad (3.1.91)$$

olarak bulunur.

Böylece, Σ_3 hareketli birim dual hiperbolik küresinde hareketli pol eğrisi

$$\Omega_m = \frac{dM^{-1}}{d\varphi} \cdot M; \quad M = (A + \varepsilon mA)\quad (3.1.92)$$

ile tanımlanır. Burada

$$M = \begin{pmatrix} \cosh^2 \varphi + \varepsilon\mu(-\sinh^2 \varphi) & -\sinh \varphi & -\sinh \varphi \cosh \varphi + \varepsilon\mu(\sinh \varphi \cosh \varphi) \\ -\sinh \varphi \cosh \varphi + \varepsilon\mu(\sinh \varphi \cosh \varphi) & \cosh \varphi & \sinh^2 \varphi - \varepsilon\mu(\cosh^2 \varphi) \\ -\sinh \varphi & \varepsilon\mu & \cosh \varphi \end{pmatrix}$$

olup

$$\Omega_m = \begin{pmatrix} 0 & \cosh \varphi & 1 - \varepsilon\mu \\ \cosh \varphi & 0 & -\sinh \varphi \\ 1 - \varepsilon\mu & \sinh \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece

$$\tilde{\Omega}_m(\varphi) = \begin{pmatrix} \sinh \varphi \\ 1 - \varepsilon\mu \\ -\cosh \varphi \end{pmatrix} \quad (3.1.93)$$

olur. Hareketli eksen yüzeyi de

$$\tilde{q}_m(\varphi) = \frac{\tilde{\Omega}_m}{\|\tilde{\Omega}_m\|} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\varepsilon\mu}} \begin{pmatrix} \sinh \varphi \\ 1 - \varepsilon\mu \\ -\cosh \varphi \end{pmatrix} \quad (3.1.94)$$

biçiminde elde edilir.

Şimdi, $\tilde{q} = \tilde{q}_f(\varphi)$ sabit eksen yüzeyinin Blaschke invaryantlarını hesaplayalım:

Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili hiperbolik küresel hareketi için (3.1.91) denkleminde,

$$\tilde{\Omega}_f(\varphi) = \bar{\Omega} \tilde{q}(\varphi); \quad \bar{\Omega} = \sqrt{2 - 2\varepsilon\mu}. \quad (3.1.95)$$

(3.1.95) denkleminin her iki tarafının φ ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\Omega}_f}{d\varphi} &= \tilde{\Omega}_f' = \bar{\Omega}' \tilde{q} + \bar{\Omega} \tilde{q}' \\ \tilde{\Omega}_f' &= \bar{\Omega}' \tilde{q} + \bar{k}_1 \bar{\Omega} \tilde{h} \end{aligned} \quad (3.1.96)$$

ve tekrar türev alıp (3.1.19) eşitliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_f'' &= \bar{\Omega}''\tilde{q} + \bar{\Omega}'\tilde{q}' + \bar{k}_1'\bar{\Omega}\tilde{h} + \bar{k}_1\bar{\Omega}'\tilde{h} + \bar{k}_1\bar{\Omega}\tilde{h}' \\
&= \bar{\Omega}''\tilde{q} + \bar{\Omega}'(\bar{k}_1\tilde{h}) + \bar{k}_1'\bar{\Omega}\tilde{h} + \bar{k}_1\bar{\Omega}'\tilde{h} + \bar{k}_1\bar{\Omega}(\bar{k}_1\tilde{q} + \bar{k}_{2f}\tilde{a}) \\
\tilde{\Omega}_f'' &= (\bar{\Omega}'' + \bar{k}_1^2\bar{\Omega})\tilde{q} + (2\bar{k}_1\bar{\Omega}' + \bar{k}_1'\bar{\Omega})\tilde{h} + (\bar{k}_1\bar{\Omega}\bar{k}_{2f})\tilde{a}
\end{aligned} \tag{3.1.97}$$

bulunur. (3.1.96) ve (3.1.97) denklemlerinin Lorentziyen vektörel çarpımı alınırsa

$$\tilde{\Omega}_f(\varphi) \times \tilde{\Omega}_f'(\varphi) = (\bar{\Omega}\tilde{q}) \times (\bar{\Omega}'\tilde{q} + \bar{k}_1\bar{\Omega}\tilde{h}) = -\bar{k}_1\bar{\Omega}^2\tilde{a} \tag{3.1.98}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\left\| \tilde{\Omega}_f(\varphi) \times \tilde{\Omega}_f'(\varphi) \right\|^2 = -\left\langle \tilde{\Omega}_f(\varphi), \tilde{\Omega}_f(\varphi) \right\rangle \left\langle \tilde{\Omega}_f'(\varphi), \tilde{\Omega}_f'(\varphi) \right\rangle + \left(\left\langle \tilde{\Omega}_f(\varphi), \tilde{\Omega}_f'(\varphi) \right\rangle \right)^2 \tag{3.1.99}$$

ve

$$\left\| \tilde{\Omega}_f(\varphi) \times \tilde{\Omega}_f'(\varphi) \right\|^2 = -\left\langle \bar{\Omega}\tilde{q}, \bar{\Omega}\tilde{q} \right\rangle \left\langle \bar{\Omega}'\tilde{q} + \bar{k}_1\bar{\Omega}\tilde{h}, \bar{\Omega}'\tilde{q} + \bar{k}_1\bar{\Omega}\tilde{h} \right\rangle + \left(\left\langle \bar{\Omega}\tilde{q}, \bar{\Omega}'\tilde{q} + \bar{k}_1\bar{\Omega}\tilde{h} \right\rangle \right)^2 = \bar{k}_1^2\bar{\Omega}^4 \tag{3.1.100}$$

den

$$\det(\tilde{\Omega}_f, \tilde{\Omega}_f', \tilde{\Omega}_f'') = -\left\langle \tilde{\Omega}_f \times \tilde{\Omega}_f', \tilde{\Omega}_f'' \right\rangle \tag{3.1.101}$$

$$\det(\tilde{\Omega}_f, \tilde{\Omega}_f', \tilde{\Omega}_f'') = \bar{k}_1^2\bar{\Omega}^3\bar{k}_{2f} \tag{3.1.102}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.1.90) denkleminde,

$$\tilde{\Omega}_f'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\cosh \varphi + 2\varepsilon\mu \cosh \varphi \\ -\sinh \varphi + 2\varepsilon\mu \sinh \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.103}$$

ve

$$\tilde{\mathbf{Q}}_f''(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sinh \varphi + 2\varepsilon\mu \sinh \varphi \\ -\cosh \varphi + 2\varepsilon\mu \cosh \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.104)$$

olduğu görülür. (3.1.90) ve (3.1.103) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\mathbf{Q}}_f(\varphi), \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi) \right\rangle &= (-\sinh \varphi \cosh \varphi + \sinh \varphi \cosh \varphi) + \varepsilon\mu(2 \sinh \varphi \cosh \varphi + 2 \sinh \varphi \cosh \varphi \\ &\quad - 2 \sinh \varphi \cosh \varphi - 2 \sinh \varphi \cosh \varphi) \end{aligned}$$

veya

$$\left\langle \tilde{\mathbf{Q}}_f(\varphi), \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi) \right\rangle = 0 \quad (3.1.105)$$

bulunur. (3.1.105) nin her iki tarafının karesi alınırsa

$$\left(\left\langle \tilde{\mathbf{Q}}_f(\varphi), \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi) \right\rangle \right)^2 = 0 \quad (3.1.106)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\left\langle \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi), \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi) \right\rangle = -\cosh^2 \varphi + \sinh^2 \varphi + 2\varepsilon\mu(2 \cosh^2 \varphi - 2 \sinh^2 \varphi)$$

dan

$$\left\langle \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi), \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi) \right\rangle = -1 + 4\varepsilon\mu \quad (3.1.107)$$

bulunur. (3.1.90), (3.1.106) ve (3.1.107) denklemleri (3.1.105) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
-(2-2\varepsilon\mu)(-1+4\varepsilon\mu) &= \bar{k}_1^2 \bar{\Omega}^4 \\
-(-2+10\varepsilon\mu) &= \bar{k}_1^2 (4-8\varepsilon\mu) \\
\Rightarrow \bar{k}_1^2 &= \frac{2-10\varepsilon\mu}{4-8\varepsilon\mu} = \frac{1-5\varepsilon\mu}{2-4\varepsilon\mu} \\
&\quad (2+4\varepsilon\mu) \\
(k_1 + \varepsilon k_1^*)^2 &= \frac{2-6\varepsilon\mu}{4} \\
k_1^2 + 2\varepsilon k_1 k_1^* &= \frac{1-3\varepsilon\mu}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$k_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad k_1^* = -\frac{3\sqrt{2}\mu}{4} \quad (3.1.108)$$

bulunur. (3.1.10) denkleminde $\lambda := \lambda_m = \lambda_f = \frac{k_1^*}{k_1}$ olduğundan eksen yüzeyinin dağılıma parametresi

$$\lambda = \frac{3\mu}{2} \quad (3.1.109)$$

bulunur. (3.1.91), (3.1.103) ve (3.1.104) denklemleri (3.1.101) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_f \times \tilde{\Omega}_f' &= \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & -\bar{e}_2 & -\bar{e}_3 \\ -\sinh \varphi + 2\varepsilon\mu \sinh \varphi & -\cosh \varphi + 2\varepsilon\mu \cosh \varphi & 1 + \varepsilon\mu \\ -\cosh \varphi + 2\varepsilon\mu \cosh \varphi & -\sinh \varphi + 2\varepsilon\mu \sinh \varphi & 0 \end{vmatrix} \\
\tilde{\Omega}_f \times \tilde{\Omega}_f' &= [(\sinh \varphi + \varepsilon\mu(\sinh \varphi - 2 \sinh \varphi)), (\cosh \varphi + \varepsilon\mu(-2 \cosh \varphi + \cosh \varphi), (1 - 4\varepsilon\mu)]
\end{aligned}$$

ve

$$\langle \tilde{\Omega}_f \times \tilde{\Omega}_f', \tilde{\Omega}_f'' \rangle = -1 + 3\varepsilon\mu \quad (3.1.110)$$

bulunur. Böylece (3.1.102) ve (3.1.110) denklemlerinden

$$\det(\tilde{\mathbf{\Omega}}_f, \tilde{\mathbf{\Omega}}_f', \tilde{\mathbf{\Omega}}_f'') = 1 - 3\varepsilon\mu = \bar{k}_1^2 \bar{\Omega}^3 \bar{k}_{2f} \quad (3.1.111)$$

elde edilir.

$$1 - 3\varepsilon\mu = \frac{1 - 3\varepsilon\mu}{2} \cdot (2 - 2\varepsilon\mu) \cdot \sqrt{2 - 2\varepsilon\mu} \cdot \bar{k}_{2f}$$

ve

$$\bar{k}_{2f} = \frac{1}{(1 - \varepsilon\mu)(\sqrt{2 - 2\varepsilon\mu} \frac{\sqrt{2}}{2})}$$

bulunur. Böylece,

$$\bar{k}_{2f} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon\mu \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad (3.1.112)$$

elde edilir. (3.1.112) denklemi reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$k_{2f} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad k_{2f}^* = \mu \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad (3.1.113)$$

bulunur. (3.1.9) denkleminde $\bar{k}_{2m} - \bar{k}_{2f} = \tilde{\mathbf{\Omega}}_f$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \bar{k}_{2m} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon\mu \frac{3\sqrt{2}}{4} \right) + \left(\sqrt{2} - \varepsilon\mu \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \varepsilon\mu \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

olup, reel ve dual kısımları

$$k_{2m} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad k_{2m}^* = \mu \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (3.1.114)$$

biçiminde elde edilir. Böylece, eksen yüzeylerinin integral invaryantlarının reel ve dual kısımları elde edilmiş oldu.

3.2. Bir Parametrelili Dual Lorentziyen Küresel Hareketler

$\mathbb{R}_1^3$ de sabit ve hareketli sistemler, sırasıyla, L_2 ve L_3 ; bu sistemlerin ortonormal koordinat sistemleri de $\{O'; \vec{q}_f, \vec{h}_f, \vec{a}_f\}$ ve $\{O; \vec{q}_m, \vec{h}_m, \vec{a}_m\}$ olsun. L_3 / L_2 hareketini incelemek için, L_1 izafi uzayın çatısı olan $\{Q; \vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ ortonormal izafi koordinat sistemini alalım. Lorentziyen uzaylardaki transfer prensibine göre, aynı O merkezli Σ_1, Σ_2 ve Σ_3 birim dual Lorentziyen kürelerin noktaları $\{O; \vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$, $\{O; \vec{q}_f, \vec{h}_f, \vec{a}_f\}$ ve $\{O; \vec{q}_m, \vec{h}_m, \vec{a}_m\}$ dual ortogonal sistemleri ile ifade edilebilir. Böylece L_1 / L_2 , L_1 / L_3 ve L_3 / L_2 hareketleri, sırasıyla, Σ_1 / Σ_2 , Σ_1 / Σ_3 ve Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili dual Lorentziyen küresel hareketler olarak göz önüne alınabilir. Dual Lorentziyen anlamda ortogonal dönüşüm ile birinden diğerine geçilebilir.

A_f ve A_m matrisleri 3×3 tipinde Lorentziyen anlamda dual ortogonal matrisler olmak üzere,

$$\Sigma_1 = A_f \Sigma_2, \quad \Sigma_1 = A_m \Sigma_3$$

yazılabilir, burada

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{h} \\ \vec{a} \end{bmatrix}, \Sigma_2 = \begin{bmatrix} \vec{q}_f \\ \vec{h}_f \\ \vec{a}_f \end{bmatrix}, \Sigma_3 = \begin{bmatrix} \vec{q}_m \\ \vec{h}_m \\ \vec{a}_m \end{bmatrix}$$

dual sütun matrisleridir. A_f ve A_m , Lorentziyen anlamda dual ortogonal matrislerin elemanları, $\bar{t} = t + \varepsilon t^*$ dual parametresinin yeteri kadar türevlenebilen fonksiyonlarıdır. Burada dual Lorentziyen uzayda 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketler inceleneceğinden $t^* = 0$ alınacaktır.

Σ_1 vektörlerinin Σ_2 sabit ve Σ_3 hareketli birim dual Lorentziyen kürelerine göre diferansiyellerine bakılırsa

$$d\Sigma_{1f} = dA_f \Sigma_2 = dA_f (A_f)^{-1} \Sigma_1, \quad d\Sigma_{1m} = dA_m \Sigma_3 = dA_m (A_m)^{-1} \Sigma_1$$

dir.

$$\tilde{\Omega}_f = dA_f(A_f)^{-1}, \quad \tilde{\Omega}_m = dA_m(A_m)^{-1}$$

olarak seçilirse

$$\begin{bmatrix} d\tilde{q}_f \\ d\tilde{h}_f \\ d\tilde{a}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\Omega}_{3f} & -\bar{\Omega}_{2f} \\ \bar{\Omega}_{3f} & 0 & -\bar{\Omega}_{1f} \\ -\bar{\Omega}_{2f} & \bar{\Omega}_{1f} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_f \\ \tilde{h}_f \\ \tilde{a}_f \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} d\tilde{q}_m \\ d\tilde{h}_m \\ d\tilde{a}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\Omega}_{3m} & -\bar{\Omega}_{2m} \\ \bar{\Omega}_{3m} & 0 & -\bar{\Omega}_{1f} \\ -\bar{\Omega}_{2m} & \bar{\Omega}_{1m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_m \\ \tilde{h}_m \\ \tilde{a}_m \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

olur. Burada $\tilde{\Omega}_f = dA_f(A_f)^{-1}$, $\tilde{\Omega}_m = dA_m(A_m)^{-1}$ matrisleri Lorentziyen anlamda anti-simetrik matrislerdir.

Σ_3/Σ_2 hareketi boyunca Σ_3 birim dual Lorentziyen küresinin koordinatları $\tilde{X}_i = x_i + \varepsilon x_i^*$ ($1 \leq i \leq 3$) olan noktasının hız vektörü,

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \tilde{\Omega} \times \tilde{X} \quad (3.2.2)$$

şeklinde olup, burada $\tilde{\Omega} = \omega + \varepsilon \omega^*$ vektörü Σ_3/Σ_2 1-parametrelili dual Lorentziyen küresel hareketin dual Lorentziyen Pfaff vektörü olarak adlandırılır. Σ_3/Σ_2 1-parametrelili dual Lorentziyen küresel hareketin dual Lorentziyen Pfaff vektörü t anında $\mathbb{R}_1^3$ -uzay eğrilerinin diferansiyel geometrisinde Darboux vektörüne benzerdir. $\tilde{\Omega}$ nın ω reel ve ω^* dual kısımları dual Lorentziyen dönme hareketine karşılık gelen L_3/L_2 Lorentziyen küresel hareketinin, sırasıyla, ani dönme ve ani öteleme Pfaff vektörlerine karşılık gelirler. $\bar{\Omega} = \omega + \varepsilon \omega^* = \|\tilde{\Omega}\|$ dual sayısı Σ_3/Σ_2 bir parametrelili dual Lorentziyen küresel hareketin dual açısal hızıdır.

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\Omega}_3 & -\bar{\Omega}_2 \\ \bar{\Omega}_3 & 0 & -\bar{\Omega}_1 \\ -\bar{\Omega}_2 & \bar{\Omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_1 \\ \bar{\Omega}_2 \\ \bar{\Omega}_3 \end{bmatrix} = \tilde{\Omega} \quad (3.2.3)$$

olarak alalım. Buradaki matris dual Lorentziyen anlamda anti-simetrik matristir.

3.2.a.) $\tilde{a}_m$ ve $\tilde{a}_f$ Timelike Olması Durumunda Bir Parametrelili Dual Lorentziyen Küresel Hareketler

Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili dual Lorentziyen küresel hareket boyunca

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow \tilde{q}_m(t) \in \Sigma_3 \quad (3.2.4)$$

diferansiyellenebilir eğrisi, doğruların diferansiyellenebilir bir ailesini veya hareketli eksen yüzeyini gösterir. Bu eğri boyunca hareketli ortonormal çatısı;

$$\tilde{q}_m = \tilde{q}_m(t), \quad \tilde{h}_m = \left(\frac{d\tilde{q}_m}{dt} \right) \left\| \frac{d\tilde{q}_m}{dt} \right\|^{-1}, \quad \tilde{a}_m = \tilde{q}_m \times \tilde{h}_m \text{ (timelike)} \quad (3.2.5)$$

ile verilir ve bu çatı Blaschke çatısı olarak adlandırılır. Bu çatı elemanlarına karşılık gelen doğrular, $\tilde{q}_m = \tilde{q}_m(t)$ eksen yüzeyinin boğaz noktasında kesişirler. $\tilde{a}_m$ ve $\tilde{h}_m$, sırasıyla, $\tilde{q}_m = \tilde{q}_m(t)$ timelike regle yüzeyinin merkez teğeti ve merkez normali olarak bilinir. Σ_1^m dual Lorentziyen birim küresinin üreteçlerinin cümlesi $\{O; \tilde{q}_m, \tilde{h}_m, \tilde{a}_m\}$ olsun. Bu durumda Σ_1^m / Σ_3 hareketi

$$\begin{bmatrix} d\tilde{q}_m \\ d\tilde{h}_m \\ d\tilde{a}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_{1m} & 0 \\ -\bar{k}_{1m} & 0 & \bar{k}_{2m} \\ 0 & \bar{k}_{2m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_m \\ \tilde{h}_m \\ \tilde{a}_m \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

ile tanımlanır. Burada

$$\bar{k}_{1m} = k_{1m} + \varepsilon k_{1m}^* = \left\| \frac{d\tilde{q}_m}{dt} \right\|, \quad \bar{k}_{2m} = k_{2m} + \varepsilon k_{2m}^* = \frac{\det \left(\tilde{q}_m, \frac{d\tilde{q}_m}{dt}, \frac{d^2\tilde{q}_m}{dt^2} \right)}{\bar{k}_{1m}^2} \quad (3.2.7)$$

dual fonksiyonları hareketli eksen yüzeyinin *Blaschke invaryantları* olarak adlandırılır. Boğaz çizgisi

$$\frac{d\mathbf{C}^m}{dt} = \bar{k}_{2f}^* \tilde{\mathbf{q}}_m + \bar{k}_{1f}^* \tilde{\mathbf{a}}_m$$

dir. Bu takdirde (3.2.7) de verilen dual fonksiyonlar

$$\bar{k}_{1m} = k_{1m} + \varepsilon \sinh \bar{\sigma}_m, \quad \bar{k}_{2m} = k_{2m} + \varepsilon \cosh \bar{\sigma}_m \quad (3.2.8)$$

şeklinde verilebilir. Burada $\bar{\sigma}_m$ açısı, boğaz çizgisinden $\tilde{\mathbf{q}}_m(t)$ üreteç doğrusunun sapma miktarını ölçer. Hareketli timelike eksen yüzeyinin dağılma parametresi

$$\lambda_m = \frac{k_{1m}^*}{k_{1m}} = \frac{\sinh \bar{\sigma}_m}{k_{1m}} \quad (3.2.9)$$

şeklindedir.

Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili dual Lorentziyen küresel hareketi boyunca ani vida eksenini, Σ_2 sabit birim dual Lorentziyen küresinde sabit eksen yüzeyini üretir. Buradaki eksen yüzeyindeki Blaschke çatısı

$$\tilde{\mathbf{q}}_f = \tilde{\mathbf{q}}_f(t), \quad \tilde{\mathbf{h}}_f = \left(\frac{d\tilde{\mathbf{q}}_f(t)}{dt} \right) \left\| \frac{d\tilde{\mathbf{q}}_f}{dt} \right\|^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{a}}_f = \tilde{\mathbf{q}}_f \times \tilde{\mathbf{h}}_f \text{ (timelike)} \quad (3.2.10)$$

ile verilir. Σ_1^f birim dual Lorentziyen küresinin üreteçlerinin cümlesi $\{O; \tilde{\mathbf{q}}_f, \tilde{\mathbf{h}}_f, \tilde{\mathbf{a}}_f\}$ olsun.

Böylece Σ_1^f / Σ_2 hareketi

$$\begin{bmatrix} d\tilde{\mathbf{q}}_f \\ d\tilde{\mathbf{h}}_f \\ d\tilde{\mathbf{a}}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_{1f} & 0 \\ -\bar{k}_{1f} & 0 & \bar{k}_{2f} \\ 0 & \bar{k}_{2f} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_f \\ \tilde{\mathbf{h}}_f \\ \tilde{\mathbf{a}}_f \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

ile verilir. Burada

$$\bar{k}_{1f} = k_{1f} + \varepsilon k_{1f}^* = \left\| \frac{d\tilde{\mathbf{q}}_f}{dt} \right\|, \quad \bar{k}_{2f} = k_{2f} + \varepsilon k_{2f}^* = \frac{\det \left(\tilde{\mathbf{q}}_f, \frac{d\tilde{\mathbf{q}}_f}{dt}, \frac{d^2\tilde{\mathbf{q}}_f}{dt^2} \right)}{\bar{k}_{1f}^2} \quad (3.2.12)$$

dual fonksiyonları sabit eksen yüzeyinin Blaschke invaryantları olarak adlandırılır. Boğaz çizgisi

$$\frac{dC^f}{dt} = \bar{k}_{2f}^* \tilde{q}_f + \bar{k}_{1f}^* \tilde{a}_f$$

olup (3.2.8) denkleminde benzer şekilde

$$\bar{k}_{1f} = k_{1f} + \varepsilon \sinh \bar{\sigma}_f, \quad \bar{k}_{2f} = k_{2f} + \varepsilon \cosh \bar{\sigma}_f \quad (3.2.13)$$

şeklinde verilebilir. Burada $\bar{\sigma}_f$ açısı, boğaz çizgisinden $\tilde{q}_f(t)$ üreteç doğrusunun sapma miktarını ölçer. Sabit timelike eksen yüzeyinin dağılıma parametresi

$$\lambda_f = \frac{k_{1f}^*}{k_{1f}} = \frac{\sinh \bar{\sigma}_f}{k_{1f}} \quad (3.2.14)$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.1. $\tilde{a}_m$ ve $\tilde{a}_f$ timelike olması durumunda timelike eksen yüzeylerinin Blaschke invaryantları için

$$\bar{k}_{1m} = \bar{k}_{1f}, \quad \bar{k}_{2f} - \bar{k}_{2m} = \|\tilde{\Omega}\| \quad (3.2.15)$$

dır.

İspat. Denklem (3.2.6), (3.2.11) ve Teorem 3.1.1 in (v) şikkından

$$\frac{d\tilde{q}_m}{dt} = \bar{k}_{1m} \tilde{h}_m, \quad \frac{d\tilde{q}_f}{dt} = \bar{k}_{1f} \tilde{h}_f$$

dir. Buradan, iç çarpım adA altında invaryant olduğundan

$$\bar{k}_{1f}^2 = \left\langle \frac{d\tilde{q}_f}{dt}, \frac{d\tilde{q}_f}{dt} \right\rangle = \left\langle adA(t) \frac{d\tilde{q}_m}{dt}, adA(t) \frac{d\tilde{q}_m}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d\tilde{q}_m}{dt}, \frac{d\tilde{q}_m}{dt} \right\rangle = \bar{k}_{1m}^2$$

yazılabilir. $\bar{k}_{1m} > 0$, $\bar{k}_{1f} > 0$ olduğundan $\bar{k}_{1m} = \bar{k}_{1f}$ bulunur. Şimdi,

$$\frac{d\tilde{q}_f}{dt} = adA \left(\frac{d\tilde{q}_m}{dt} \right)$$

denklemden adA lineer olduğundan

$$\bar{k}_{1f} \tilde{h}_f = adA(\bar{k}_{1m} \tilde{h}_m) \Rightarrow \tilde{h}_f = adA(\tilde{h}_m)$$

bulunur. Son denklemin türevini alırsak Teorem 3.1.1 in (iii) şıkından ve

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{h}_f}{dt} &= \frac{d}{dt} (A\tilde{h}_m A^{-1}) = \frac{dA}{dt} \tilde{h}_m A^{-1} + A\tilde{h}_m \frac{dA^{-1}}{dt} + A \frac{d\tilde{h}_m}{dt} A^{-1} \\ &= \frac{dA}{dt} A^{-1} \underbrace{A\tilde{h}_m A^{-1}} + \underbrace{A\tilde{h}_m A^{-1}} A \frac{dA^{-1}}{dt} + adA \left(\frac{d\tilde{h}_m}{dt} \right) \\ &= \tilde{\mathbf{Q}}_f \tilde{h}_f - \tilde{h}_f \tilde{\mathbf{Q}}_f + adA \left(\frac{d\tilde{h}_m}{dt} \right) \\ &= \tilde{\mathbf{Q}}_f \tilde{a}_f + adA \left(\frac{d\tilde{h}_m}{dt} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemde (3.2.6) ve (3.2.11) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -\bar{k}_{1f} \tilde{q}_f + \bar{k}_{2f} \tilde{a}_f &= \tilde{\mathbf{Q}}_f \tilde{a}_f + adA(-\bar{k}_{1m} \tilde{q}_m + \bar{k}_{2m} \tilde{a}_m) \\ -\bar{k}_{1f} \tilde{q}_f + \bar{k}_{2f} \tilde{a}_f &= \tilde{\mathbf{Q}}_f \tilde{a}_f - \bar{k}_{1m} \underbrace{adA \tilde{q}_m} + \bar{k}_{2m} \underbrace{adA \tilde{a}_m} \\ -\bar{k}_{1f} \tilde{q}_f + \bar{k}_{2f} \tilde{a}_f &= \tilde{\mathbf{Q}}_f \tilde{a}_f - \bar{k}_{1f} \tilde{q}_f + \bar{k}_{2m} \tilde{a}_f \end{aligned}$$

böylece

$$\bar{k}_{2f} - \bar{k}_{2m} = \|\tilde{\mathbf{Q}}\| \quad (3.2.16)$$

bulunur. Bu teoremden aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.1. Herhangi bir t anında, Σ_3 / Σ_2 bir parametrelili dual Lorentziyen küresel harekette hareketli pol eğrisi ani vida eksenini boyunca sabit pol eğrisine birinci mertebeden değer. Timelike eksen yüzeylerinin ortak dağılıma parametresi

$$\lambda := \lambda_m = \lambda_f = \frac{k_1^*}{k_1} \quad (3.2.17)$$

şeklindedir.

Σ_1 birim dual Lorentziyen küresinin üreteçlerinin cümlesi $\{O; \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{a}}(\text{timelike})\}$ olsun. Bu sistemde $\tilde{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{a}(t) + \varepsilon \mathbf{a}^*(t)$, $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ ve $\tilde{\mathbf{q}}(t+dt)$ nın ortak dikmesi ve $\tilde{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{a}(t) + \varepsilon \mathbf{a}^*(t) = \tilde{\mathbf{q}} \times \tilde{\mathbf{h}}$ olarak tanımlanır. Bu çatı izafi çatı olarak adlandırılır. $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{h}}$ ve $\tilde{\mathbf{a}}$, Lorentziyen uzayda ortogonal doğrulara karşılık gelirler. Bunların kesiştiği nokta, hareketli ve sabit timelike eksen yüzeylerinin boğaz noktasıdır. $\tilde{\mathbf{h}}$ ve $\tilde{\mathbf{a}}$, sırasıyla, boğaz noktasında timelike eksen yüzeyinin merkez normal ve merkez teğettir. Böylece Σ_1 / Σ_3 ve Σ_1 / Σ_2 1-parametrelili dual Lorentziyen küresel hareketlerin türev denklemleri, sırasıyla,

$$\left. \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} \right|_m = C(M)\tilde{\mathbf{q}}(t), \quad \tilde{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{h}} \\ \tilde{\mathbf{a}} \end{bmatrix}, \quad C(M) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_1 & 0 \\ -\bar{k}_1 & 0 & \bar{k}_{2m} \\ 0 & \bar{k}_{2m} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.18)$$

ve

$$\left. \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} \right|_f = C(F)\tilde{\mathbf{q}}(t), \quad \tilde{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{h}} \\ \tilde{\mathbf{a}} \end{bmatrix}, \quad C(F) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_1 & 0 \\ -\bar{k}_1 & 0 & \bar{k}_{2f} \\ 0 & \bar{k}_{2f} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.19)$$

dir. Burada,

$$\bar{k}_1 = k_1 + \varepsilon k_1^*, \quad \bar{k}_{2m} = k_{2m} + \varepsilon k_{2m}^*, \quad \bar{k}_{2f} = k_{2f} + \varepsilon k_{2f}^* \quad (3.2.20)$$

Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili dual Lorentziyen küresel hareketin Blaschke invaryantlarıdır.

3.2.1. $\tilde{a}_m$ ve $\tilde{a}_f$ nın Timelike Olması Durumunda Eksen Yüzeyleri ile Birleştirilmiş Bir Timelike Regle Yüzeye Blaschke Yaklaşımı

Bu kesimde pol eğrilerinin Blaschke invariantları verilecektir ve bunların geometrik ve kinematik manaları incelenecektir. Bu inceleme için koordinatları $\bar{X}_i = x_i + \varepsilon x_i^*$ ($1 \leq i \leq 3$) olan birim dual Lorentziyen küre üzerinde,

$$-\bar{X}_1^2 + \bar{X}_2^2 + \bar{X}_3^2 = 1, \quad \tilde{X} = X^T \tilde{q} \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.21)$$

şartını sağlayan $\tilde{X}$ vektörünü alalım.

$\tilde{X}$, t nin bir fonksiyonu ise Σ_3 hareketli birim dual Lorentziyen küresine göre t anında $\tilde{X}$ spacelike vektörünün hızı

$$\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_m = \frac{d\tilde{X}^T}{dt} \tilde{q} + \tilde{X}^T \left. \frac{d\tilde{q}}{dt} \right|_m \quad (3.2.22)$$

olur. Benzer şekilde, $\tilde{X}$, t nin bir fonksiyonu ise Σ_2 sabit birim dual Lorentziyen küresine göre t anında $\tilde{X}$ spacelike vektörünün hızı

$$\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_f = \frac{d\tilde{X}^T}{dt} \tilde{q} + \tilde{X}^T \left. \frac{d\tilde{q}}{dt} \right|_f \quad (3.2.23)$$

ile verilir. (3.2.18) ve (3.2.19) denklemlerinden

$$\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_m = \left(\frac{d\tilde{X}^T}{dt} + \tilde{X}^T C(M) \right) \tilde{q} \quad (3.2.24)$$

ve

$$\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_f = \left(\frac{d\tilde{X}^T}{dt} + \tilde{X}^T C(F) \right) \tilde{q} \quad (3.2.25)$$

bulunur. $\tilde{X}$ vektörü Σ_3 hareketli birim dual Lorentziyen küresine sabitlenirse, bu taktirde türevi

$$\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_m = 0 \text{ dır [13]. Yani,}$$

$$\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_m = \left[\left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_m, \left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_m, \left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_m \right] + [\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3] \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_1 & 0 \\ -\bar{k}_1 & 0 & \bar{k}_{2m} \\ 0 & \bar{k}_{2m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{h} \\ \tilde{a} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_m &= \left(\left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_m - \bar{X}_2 \bar{k}_1 \right) \tilde{q} + \left(\bar{X}_1 \bar{k}_1 + \left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_m + \bar{X}_3 \bar{k}_{2m} \right) \tilde{h} + \left(\bar{X}_2 \bar{k}_{2m} + \left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_m \right) \tilde{a} \\ &= (dx_1 - x_2 k_1) q + \mathcal{E}[(dx_1^* - x_2 k_1^* - x_2^* k_1) q + (dx_1 - x_2 k_1) q^*] \\ &\quad + (dx_2 + x_1 k_1 + x_3 k_{2m}) h + \mathcal{E}[(x_1 k_1^* + x_1^* k_1 + dx_2^* + x_3 k_{2m}^* + x_3^* k_{2m}) h + (dx_2 + x_1 k_1 + x_3 k_{2m}) h^*] \\ &\quad + (dx_3 + x_2 k_{2m}) a + \mathcal{E}[(x_2 k_{2m}^* + x_2^* k_{2m} + dx_3^*) a + (dx_3 + x_2 k_{2m}) a^*] = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_m &= \bar{X}_2 \bar{k}_1 \quad \Rightarrow dx_1 + \mathcal{E}x_1^* = (x_2 + \mathcal{E}x_2^*)(k_1 + \mathcal{E}k_1^*) \\ \left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_m &= -\bar{X}_3 \bar{k}_{2m} - \bar{X}_1 \bar{k}_1 \Rightarrow dx_2 + \mathcal{E}x_2^* = -(x_3 + \mathcal{E}x_3^*)(k_{2m} + \mathcal{E}k_{2m}^*) - (x_1 + \mathcal{E}x_1^*)(k_1 + \mathcal{E}k_1^*) \\ \left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_m &= -\bar{X}_2 \bar{k}_{2m} \quad \Rightarrow dx_3 + \mathcal{E}x_3^* = -(x_2 + \mathcal{E}x_2^*)(k_{2m} + \mathcal{E}k_{2m}^*) \\ \Rightarrow dx_1 &= x_2 p, \quad dx_1^* = (x_2 k_1^* + x_2^* k_1) \\ \Rightarrow dx_2 &= -x_3 k_{2m} - x_1 k_1, \quad dx_2^* = -x_3 k_{2m}^* - x_3^* k_{2m} - x_1 k_{01} - x_1^* k_1 \\ \Rightarrow dx_3 &= -x_2 k_{2m}, \quad dx_3^* = -x_2 k_{2m}^* - x_2^* k_{2m} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $\tilde{X}$ vektörü Σ_2 sabit birim dual Lorentziyen küresine sabitlenirse, bu

taktirde türevi $\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_f = 0$ dır [13]. Yani,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_f &= \left(\left[\left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_f, \left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_f, \left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_f \right] + [\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3] \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_1 & 0 \\ -\bar{k}_1 & 0 & \bar{k}_{2f} \\ 0 & \bar{k}_{2f} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{h} \\ \tilde{a} \end{bmatrix} \\ \left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_f &= \left(\left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_f - \bar{X}_2 \bar{k}_1 \right) \tilde{q} + \left(\bar{X}_1 \bar{k}_1 + \left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_f + \bar{X}_3 \bar{k}_{2f} \right) \tilde{h} + \left(\bar{X}_2 \bar{k}_{2f} + \left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_f \right) \tilde{a} \\ &= (dx_1 - x_2 k_1)q + \mathcal{E}[(dx_1^* - x_2 k_1^* - x_2^* k_1)q + (dx_1 - x_2 k_1)q_0] \\ &\quad + (dx_2 + x_1 k_1 + x_3 k_{2f})h + \mathcal{E}[(x_1 k_1^* + x_1^* k_1 + dx_2^* + x_3 k_{2f}^* + x_3^* k_{2f})h + (dx_2 + x_1 k_1 + x_3 k_{2f})h^*] \\ &\quad + (dx_3 + x_2 k_{2f})a + \mathcal{E}[(x_2 k_{2f}^* + x_2^* k_{2f} + dx_3^*)a + (dx_3 + x_2 k_{2f})a^*] = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_f &= \bar{X}_2 \bar{k}_1 \quad \Rightarrow dx_1 + \mathcal{E}x_1^* = (x_2 + \mathcal{E}x_2^*)(k_1 + \mathcal{E}k_1^*) \\ \left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_f &= -\bar{X}_3 \bar{k}_{2f} - \bar{X}_1 \bar{k}_1 \Rightarrow dx_2 + \mathcal{E}x_2^* = -(x_3 + \mathcal{E}x_3^*)(k_{2f} + \mathcal{E}k_{2f}^*) - (x_1 + \mathcal{E}x_1^*)(k_1 + \mathcal{E}k_1^*) \\ \left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_f &= -\bar{X}_2 \bar{k}_{2f} \quad \Rightarrow dx_3 + \mathcal{E}x_3^* = -(x_2 + \mathcal{E}x_2^*)(k_{2f} + \mathcal{E}k_{2f}^*) \\ \Rightarrow dx_1 &= x_2 p, \quad dx_1^* = (x_2 k_1^* + x_2^* k_1) \\ \Rightarrow dx_2 &= -x_3 k_{2f} - x_1 k_1, \quad dx_2^* = -x_3 k_{2f}^* - x_0 k_{2f} - x_1 k_1^* - x_1^* k_1 \\ \Rightarrow dx_3 &= -x_2 k_{2f}, \quad dx_3^* = -x_2 k_{2f}^* - x_2^* k_{2f} \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi, $\tilde{X}$ vektörünün Σ_3 hareketli birim dual Lorentziyen küresine göre sabit olduğunu kabul edelim ve Σ_2 sabit birim dual Lorentziyen küresine göre hız vektörünü hesaplayalım.

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \tilde{X}^T (C(F) - C(M)) \tilde{q} \quad (3.2.26)$$

olup

$$C(R) = C(F) - C(M) \quad (3.2.27)$$

alalım. Böylece (3.2.26) denklemi

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \tilde{X}^T (C(R)) \tilde{q} \quad (3.2.28)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.28) ifadesi $\tilde{X}$ spacelike vektörünün Σ_2 birm dual Lorentziyen küresine göre hızıdır, bu hıza *sürüklenme hızı* denir [13]. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{X}}{dt} &= \begin{bmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_2 & \bar{X}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_{2f} - \bar{k}_{2m} \\ 0 & \bar{k}_{2f} - \bar{k}_{2m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{h} \\ \tilde{a} \end{bmatrix} \\ \frac{d\tilde{X}}{dt} &= \begin{bmatrix} \bar{X}_3(\bar{k}_{2f} - \bar{k}_{2m}) \end{bmatrix} \tilde{h} + \begin{bmatrix} \bar{X}_2(\bar{k}_{2f} - \bar{k}_{2m}) \end{bmatrix} \tilde{a} \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

bulunur. $C(R)$ Lorentziyen anlamda anti-simetrik matris olduğundan

$$C(R)^t + C(R) = 0 \quad (3.2.30)$$

şeklindedir.

$$C(R)\tilde{X} = \tilde{D}_r \times \tilde{X} \quad (3.2.31)$$

olacak şekilde $\tilde{D}_r = d + \varepsilon d^*$ dual vektörü vardır.

Böylece, (3.2.28) denklemi

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \tilde{D}_r \times \tilde{X}, \quad \tilde{D}_r = \tilde{D}_f - \tilde{D}_m = \bar{\Omega} \tilde{q} \quad (3.2.32)$$

şeklinde yazılabilir burada $\|\tilde{\Omega}\| = \bar{\Omega} = \omega + \varepsilon\omega^*$ dir. Böylece (3.2.16) ve (3.2.32) denklemlerinden

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = (\bar{X}_3\bar{\Omega})\tilde{h} + (\bar{X}_2\bar{\Omega})\tilde{a} \quad (3.2.33)$$

dir. (3.2.32) denkleminde $\tilde{X}$ spacelike vektörünün ivmesi

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{X}}{dt^2} &= (\tilde{D}_r \times \tilde{X})' = (\bar{\Omega}\tilde{q} \times \tilde{X})' \\ &= (\bar{\Omega}'\tilde{q} \times \tilde{X}) + (\bar{\Omega}\tilde{q}' \times \tilde{X}) + (\bar{\Omega}\tilde{q} \times \tilde{X}') \\ &= (\bar{\Omega}'\tilde{q} \times (\bar{X}_1\tilde{q} + \bar{X}_2\tilde{h} + \bar{X}_3\tilde{a})) + ((\bar{\Omega}\tilde{q}') \times (\bar{X}_1\tilde{q} + \bar{X}_2\tilde{h} + \bar{X}_3\tilde{a})) + (\bar{\Omega}\tilde{q} \times (\bar{\Omega}\tilde{q}' \times \tilde{X})) \\ &= (\bar{\Omega}'\tilde{q} \times (\bar{X}_1\tilde{q} + \bar{X}_2\tilde{h} + \bar{X}_3\tilde{a})) + ((\bar{\Omega}\tilde{q}') \times (\bar{X}_1\tilde{q} + \bar{X}_2\tilde{h} + \bar{X}_3\tilde{a})) \\ &\quad + (\bar{\Omega}\tilde{q}' \times (\bar{\Omega}\tilde{q} \times (\bar{X}_1\tilde{q} + \bar{X}_2\tilde{h} + \bar{X}_3\tilde{a}))) \\ &= \bar{\Omega}'\bar{X}_2\tilde{a} + \bar{\Omega}'\bar{X}_3\tilde{h} - \bar{\Omega}\bar{k}_1\bar{X}_1\tilde{a} - \bar{\Omega}\bar{k}_1\bar{X}_3\tilde{q} + \bar{\Omega}^2\bar{X}_2\tilde{h} - \bar{\Omega}^2\bar{X}_3\tilde{a} \end{aligned}$$

böylece

$$\frac{d^2\tilde{X}}{dt^2} = (-\bar{\Omega}\bar{k}_1\bar{X}_3)\tilde{q} + (\bar{\Omega}'\bar{X}_3 + \bar{\Omega}^2\bar{X}_2)\tilde{h} + (-\bar{\Omega}\bar{k}_1\bar{X}_1 + \bar{\Omega}'\bar{X}_2 + \bar{\Omega}^2\bar{X}_3)\tilde{a} \quad (3.2.34)$$

bulunur.

Reel kısım ω ve dual kısım ω^* , hareketli timelike eksen yüzeyi ortak bir ana doğru boyunca yuvarlanma ve kayma yaparken, sırasıyla, dönme ve öteleme hareketlerine karşılık gelir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.2. Herhangi bir t anında Σ_3 / Σ_2 bir parametrelili Lorentziyen küresel hareketinde pol eğrilerine karşılık gelen timelike eksen yüzeylerinin dağılma parametresi λ sıfırdan farklı iken hareketin adımı

$$h = \frac{\omega^*}{\omega} = \frac{k_{2f}^* - k_{2m}^*}{k_{2f} - k_{2m}} = \lambda \left(\frac{\coth \bar{\sigma}_f - \coth \bar{\sigma}_m}{\coth \bar{\theta}_f - \coth \bar{\theta}_m} \right) \quad (3.2.35)$$

burada $\bar{\sigma}_f, \bar{\sigma}_m$ boğaz açıları, $\bar{\theta}_f, \bar{\theta}_m$ timelike eksen yüzeylerinin dönmesiyle oluşan yönlü koninin tepe açılarıdır.

3.2.2. $\tilde{a}$ nın Timelike Olması Durumunda Doğru Kompleksi

$\tilde{X}$ doğrusu ile üretilen timelike regle yüzeyi inceleyelim. Σ_2 birim dual Lorentziyen küre üzerinde $\tilde{X}(t)$ eğrisi boyunca hareketli bir çatı tanımlayalım. Bu eğri, L_2 sabit Lorentziyen uzayda bir timelike regle yüzeye karşılık gelir. $\tilde{X}(t)$ eğrisi boyunca Blaschke çatısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tilde{E}_1 = \tilde{X} = \bar{X}_1 \tilde{q} + \bar{X}_2 \tilde{h} + \bar{X}_3 \tilde{a}, \quad (3.2.36)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_2 &= \frac{\tilde{X}'}{\|\tilde{X}'\|} = \frac{\tilde{D} \times \tilde{X}}{\sqrt{\langle \tilde{X}', \tilde{X}' \rangle}} = \frac{(\bar{\Omega}_1 \tilde{q}) \times (\bar{X}_1 \tilde{q} + \bar{X}_2 \tilde{h} + \bar{X}_3 \tilde{a})}{\sqrt{\langle \tilde{X}', \tilde{X}' \rangle}} \\ &= \frac{\bar{\Omega}_1 \bar{X}_2 \tilde{a} + \bar{\Omega}_1 \bar{X}_3 \tilde{h}}{\sqrt{\langle \bar{\Omega}_1 \bar{X}_2 \tilde{a} + \bar{\Omega}_1 \bar{X}_3 \tilde{h}, \bar{\Omega}_1 \bar{X}_2 \tilde{a} + \bar{\Omega}_1 \bar{X}_3 \tilde{h} \rangle}} \\ \tilde{E}_2 &= \frac{\bar{X}_3 \tilde{h} + \bar{X}_2 \tilde{a}}{\sqrt{\bar{X}_3^2 - \bar{X}_2^2}} \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_3 &= \tilde{E}_1 \times \tilde{E}_2 = (\bar{X}_1 \tilde{q} + \bar{X}_2 \tilde{h} + \bar{X}_3 \tilde{a}) \times \frac{(\bar{X}_3 \tilde{h} + \bar{X}_2 \tilde{a})}{\sqrt{\bar{X}_3^2 - \bar{X}_2^2}} \\ \tilde{E}_3 &= \frac{(\bar{X}_3^2 - \bar{X}_2^2) \tilde{q} + \bar{X}_1 \bar{X}_2 \tilde{h} + \bar{X}_1 \bar{X}_3 \tilde{a}}{\sqrt{\bar{X}_3^2 - \bar{X}_2^2}} (time) \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

$\tilde{E}_1, \tilde{E}_2$ birim dual spacelike vektörleri $\mathbb{R}_1^3$ Lorentziyen çizgiler uzayında yönlü spacelike doğrularına karşılık gelirlerken, $\tilde{E}_3$ birim dual timelike vektörü $\mathbb{R}_1^3$ Lorentziyen çizgiler uzayında yönlü bir timelike doğrusuna karşılık gelir. Bu noktaların kesişimi $\tilde{X}$ ana doğrusunun boğaz noktasıdır. Böylece Blaschke türev formülleri,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{E}_1 \\ \tilde{E}_2 \\ \tilde{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_{1x} & 0 \\ -\bar{k}_{1x} & 0 & \bar{k}_{2x} \\ 0 & \bar{k}_{2x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_1 \\ \tilde{E}_2 \\ \tilde{E}_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.39)$$

ile verilir. Burada,

$$\begin{aligned} \bar{k}_{1x} &= k_{1x} + \varepsilon k_{1x}^* = \left\| \frac{d\tilde{X}}{dt} \right\| = \bar{\Omega} \sqrt{\bar{X}_3^2 - \bar{X}_2^2}, \\ \bar{k}_{2x} &= k_{2x} + \varepsilon k_{2x}^* = \frac{\det(\tilde{X}, \tilde{X}', \tilde{X}'')}{(\bar{k}_{1x})^2} = \bar{k}_{1x} \bar{X}_3 + \bar{\Omega} \bar{X}_1 - \frac{\bar{k}_{1x} \bar{X}_3 \bar{X}_1^2}{\bar{X}_3^2 - \bar{X}_2^2} \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

Blaschke invariantlarıdır.

$\tilde{X}$ doğrusu ile üretilen timelike regle yüzeyin dağılma parametresi,

$$\lambda_x = \frac{\bar{k}_1^*}{\bar{k}_1} = \frac{x_3 x_3^* - x_2 x_2^* + h(x_3^2 - x_2^2)}{(x_3^2 - x_2^2)} \quad (3.2.41)$$

ile verilir. (3.2.41) denklemi, hareketli eksen yüzeylerinin doğrularının ürettiği timelike regle yüzeylerin aynı dağılma parametresine sahip olduğu durumlarda kullanılabilir. Doğruların bu cümlesi doğru kompleksi olarak adlandırılır ve

$$x_3 x_3^* - x_2 x_2^* + (h - \lambda_x)(x_3^2 - x_2^2) = 0 \quad (3.2.42)$$

denklemi ile gösterilir. Denklem (3.2.42) kuadratik doğru kompleksidir. Sonuç olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.2. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel harekete karşılık gelen hareketli eksen yüzeylerinin doğrularının bir cümlesini göz önüne alalım. Bu doğrular, L_2 sabit Lorentziyen uzayında aynı dağılma parametresine sahip timelike regle yüzeylerin üreteçleridirler. Böylece doğruların bu cümlesi kuadratik doğru kompleksi oluşturur.

$\tilde{X}$ doğrusu üzerinde keyfi bir noktanın konumu $\mathbf{p}(x, y, z)$ olsun. Böylece

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{p} \times \mathbf{x},$$

veya

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & -\vec{e}_2 & -\vec{e}_3 \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} = (yx_3 - zx_2, x_1x_3 - zx_1, yx_1 - xx_2)$$

dan

$$x_1^* = x_3y - x_2z, \quad x_2^* = x_3x - x_1z, \quad x_3^* = x_1y - x_2x \quad (3.2.43)$$

bulunur. (3.2.43) denkleminde (3.2.42) denklemi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -x_2(x_3x - x_1z) + x_3(x_1y - x_2x) + (h - \lambda_x)(x_3^2 - x_2^2) &= 0, \\ x_1x_3y - 2x_2x_3x + x_1x_2z + (h - \lambda_x)(x_3^2 - x_2^2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

bulunur. Bu denklem, hareketli eksen yüzeyinin $\tilde{X}$ doğrularına karşılık gelen aynı dağılma parametresine sahip timelike regle yüzeylerin bulunduğu düzlemin, Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketinin ani vida eksenine paralel olduğunu verir.

Denklem (3.2.44) için iki farklı durum söz konusudur: $\lambda_x = h$ olması durumunda dağılma parametresi ani vida eksenini boyunca düzlemdeki doğrular boyunca düzlemdeki doğrular ile bağlantılıdır. $\lambda_x = 0$ olması durumunda

$$x_1x_3y - 2x_2x_3x + x_1x_2z + h(x_3^2 - x_2^2) = 0$$

t anında hareketli eksen yüzeyinin $\tilde{X}$ doğrusu açılabilir timelike bir regle yüzey üretir. Bu durumda $\tilde{X}$ üreteç doğrusu ve bu doğrunun komşuluğundaki $\tilde{X}(t + dt)$ doğrusu regle yüzeyin döndüğü noktaya teğettirler. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.2.3. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketi boyunca, karşılık gelen hareketli eksen yüzeyinin doğruları L_2 uzayında açılabilir timelike regle yüzey üretir. Bu doğrular özel bir doğru kompleksinde içerilirler.

$\bar{k}_{1x} = k_{1x} + \varepsilon k_{1x}^*$ ve $\bar{k}_{2x} = k_{2x} + \varepsilon k_{2x}^*$ Blaschke invariantları Blaschke çatsının kinematik yorumunu verir. Şimdi

$$\tilde{\mathbf{D}}_x = \bar{k}_{2x} \tilde{\mathbf{E}}_I - \bar{k}_{1x} \tilde{\mathbf{E}}_3 \quad (3.2.45)$$

biçiminde tanımlanan dual vektörünü alalım bu vektör dual Lorentziyen pfaff vektörü olarak bilinir. $\|\tilde{\mathbf{D}}\| = \sqrt{\bar{k}_{2x}^2 - \bar{k}_{1x}^2} = \omega_x + \varepsilon \omega_x^*, \tilde{\mathbf{E}}_I$ spacelike vektörünün dual açısal hızıdır. Burada,

$$\omega_x = \sqrt{|k_{2x}^2 - k_{1x}^2|}, \quad \omega_x^* = \frac{k_{2x} k_{2x}^* - k_{1x} k_{1x}^*}{\sqrt{|k_{2x}^2 - k_{1x}^2|}} \quad (3.2.46)$$

reel ve dual kısımları, sırasıyla, $\tilde{\mathbf{E}}_I$ spacelike vektörünün dönme ve öteleme açısal hızlarıdır.

Dual Lorentziyen pfaff vektörü boyunca $\tilde{\mathbf{E}}_I$ spacelike vektörünün adımı

$$h_x = \frac{\omega_x^*}{\omega_x} = \frac{k_{2x} k_{2x}^* - k_{1x} k_{1x}^*}{k_{2x}^2 - k_{1x}^2} \quad (3.2.47)$$

dır. Buna göre;

$$\tilde{U} = \frac{\tilde{\mathbf{D}}}{\|\tilde{\mathbf{D}}\|} = \frac{\bar{k}_{2x} \tilde{\mathbf{E}}_I - \bar{k}_{1x} \tilde{\mathbf{E}}_3}{\sqrt{\bar{k}_{2x}^2 - \bar{k}_{1x}^2}} \quad (3.2.48)$$

birim dual spacelike vektörü, $\tilde{U}$ Blaschke çatısında $\tilde{\mathbf{E}}_I$ spacelike doğrusunun hareketinin Disteli eksenidir. (3.2.48) denkleminde Disteli eksen $\tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{X}}(t)$ timelike regle yüzeyinin teğet düzlemine paraleldir ve $\tilde{\mathbf{E}}_2$ spacelike merkez normaline diktir. Böylece Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketin ani vida eksenini ve Disteli eksenini, $\tilde{\mathbf{E}}_I, \tilde{\mathbf{E}}_3$ düzlemi ile Σ_2 birim dual Lorentziyen küresinin kesişimi ile belirlenen bir tek büyük dual Lorentziyen çember üzerinde yatar. $\Delta = \delta + \varepsilon \delta^*$, Disteli eksenini ve $\tilde{\mathbf{X}}$ spacelike doğrusu arasındaki dual merkez açısı ise

$$\tilde{U} = \cosh \Delta \tilde{\mathbf{E}}_I - \sinh \Delta \tilde{\mathbf{E}}_3 \quad (3.2.49)$$

yazılabilir. $\Delta = \delta + \varepsilon \delta^*$ dual Lorentziyen küresel eğrilik yarıçapıdır. (3.2.49) denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{U}' &= \sinh \Delta \tilde{E}_1 \Delta' + \cosh \Delta \tilde{E}_1' - \cosh \Delta \tilde{E}_3 \Delta' - \sinh \Delta \tilde{E}_3' \\
\tilde{U}' &= (\sinh \Delta \tilde{E}_1 - \cosh \Delta \tilde{E}_3) \Delta' + \cosh \Delta (\bar{k}_{1x} \tilde{E}_2) - \sinh \Delta (\bar{k}_{2x} \tilde{E}_2) \\
\tilde{U}' &= (\sinh \Delta \tilde{E}_1 - \cosh \Delta \tilde{E}_3) \Delta' + (\bar{k}_{1x} \cosh \Delta - \bar{k}_{2x} \sinh \Delta) \tilde{E}_2
\end{aligned} \tag{3.2.50}$$

elde edilir. Böylece

$$\coth \Delta = \frac{\bar{k}_{2x}}{\bar{k}_{1x}} \tag{3.2.51}$$

bulunur. Bu denklem dual Lorentziyen küresel eğrilik $\bar{\rho}$ ve dual küresel eğrilik yarıçapı arasındaki bağıntının

$$\bar{\rho} = \rho + \varepsilon \rho^* = \coth \Delta \tag{3.2.52}$$

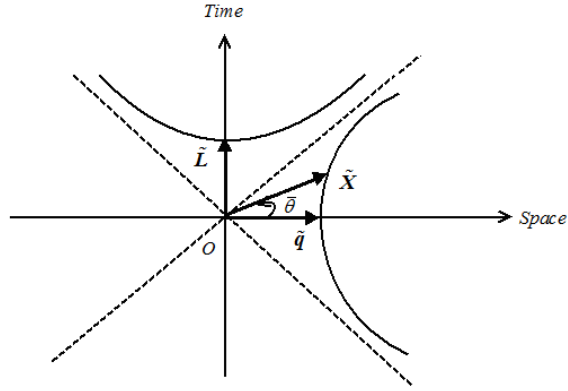
biçiminde olduğunu verir.

3.2.3. $\tilde{a}$ nın Timelike Olması Durumunda Doğru Yörüngeleri ve Disteli Formülü

Bu kesimde, dual Lorentziyen uzayda dual Lorentziyen açı vasıtasıyla Euler formülü ve Disteli formülünü elde etmek için bir metot verildi. Hareketli L_3 Lorentziyen uzayda yönlü bir spacelike doğrunun, sabit L_2 Lorentziyen uzayda verilen spacelike doğru ile sabit dual merkez açı yaptığını kabul edelim. Bundan dolayı Σ_3 / Σ_2 1-parametrel Lorentziyen küresel hareketinin sabitlenmiş $\tilde{X}$ spacelike doğrusu $\tilde{X}$ nın doğrultusunu belirlemek için $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual merkez açısını ve $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ dual timelike açısını alalım. $\tilde{X}$ birim olduğundan $\tilde{X}$ nın bileşenleri

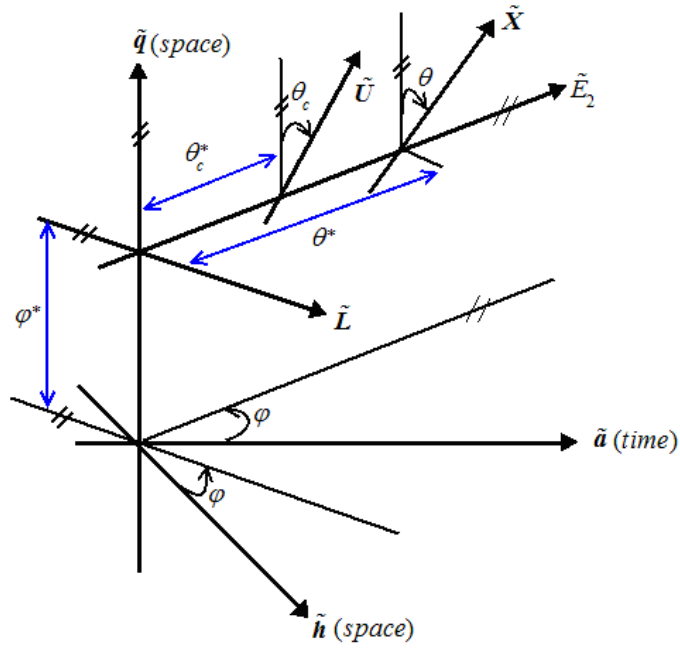
$$\tilde{X} = \cosh \bar{\theta} \tilde{q} + \sinh \bar{\theta} \tilde{L}, \quad \tilde{L} = \sinh \bar{\varphi} \tilde{h} + \cosh \bar{\varphi} \tilde{a} \tag{3.2.53}$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 3.2.1. Σ_3 / Σ_2 1-parametrel Lorentziyen küresel hareketinin sabitlenmiş $\tilde{X}$ spacelike doğrusu

$\bar{\theta} = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual merkez açısı Σ_3 / Σ_2 1-parametrel Lorentziyen küresel hareketinin ani vida eksenine göre $\tilde{X}$ nın konumunu tanımlar.



Şekil 3.2.2. $\tilde{a}$ nın timelike olması durumunda hareketli spacelike doğru $\tilde{X}$ ve bu doğrunun Disteli ekseni $\tilde{U}$

Koordinatların cümlesinin bir benzeri $t = t_0$ anında $\tilde{X} = \tilde{X}(t)$ timelike yüzeyinin $\tilde{U}$ spacelike ekseninin belirlenmesinde kullanılabilir. Ani vida ekseni ile tanımlanan $\bar{\theta}_c = \theta_c + \varepsilon \theta_c^*$ dual merkez açısı ile

$$\tilde{U} = \cosh \bar{\theta}_c \tilde{q} + \sinh \bar{\theta}_c \sinh \bar{\varphi} \tilde{h} + \sinh \bar{\theta}_c \cosh \bar{\varphi} \tilde{a} \quad (3.2.54)$$

spacelike vektörü yazılabilir. (3.2.53) ve (3.2.54) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle &= \sinh \bar{\theta} \sinh \bar{\theta}_c \sin^2 h \bar{\varphi} - \sinh \bar{\theta} \sinh \bar{\theta}_c \cos^2 h \bar{\varphi} + \cosh \bar{\theta}_c \cosh \bar{\theta} \\ &= \cosh \bar{\theta}_c \cosh \bar{\theta} - \sinh \bar{\theta} \sinh \bar{\theta}_c \\ \langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle &= \cosh(\bar{\theta} - \bar{\theta}_c) \end{aligned} \quad (3.2.55)$$

bulunur. Burada $\tilde{U}$ spacelike Disteli ekseni olduğundan $(\bar{\theta} - \bar{\theta}_c)$, $t = t_0$ anında ikinci mertebeden sabit kalır. Yani,

$$\left. \frac{d(\bar{\theta} - \bar{\theta}_c)}{dt} \right|_{t=t_0} = 0, \quad \left. \frac{d\tilde{U}}{dt} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (3.2.56)$$

ve

$$\left. \frac{d^2(\bar{\theta} - \bar{\theta}_c)}{dt^2} \right|_{t=t_0} = 0, \quad \left. \frac{d^2\tilde{U}}{dt^2} \right|_{t=t_0} = 0. \quad (3.2.57)$$

olur. (3.2.55) denkleminin türevinden,

$$\left\langle \frac{d\tilde{X}}{dt}, \tilde{U} \right\rangle + \left\langle \tilde{X}, \frac{d\tilde{U}}{dt} \right\rangle = 0$$

ve (3.2.56) denkleminde

$$\left\langle \frac{d\tilde{X}}{dt}, \tilde{U} \right\rangle = 0 \quad (3.2.58)$$

bulunur. (3.2.58) denkleminin türevi alınırsa

$$\left\langle \frac{d^2\tilde{X}}{dt^2}, \tilde{U} \right\rangle + \left\langle \frac{d\tilde{X}}{dt}, \frac{d\tilde{U}}{dt} \right\rangle = 0$$

veya

$$\left\langle \frac{d^2\tilde{X}}{dt^2}, \tilde{U} \right\rangle = 0 \quad (3.2.59)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{X}}{dt} &= (\tilde{D}_r \times \tilde{X}) = \bar{\Omega} \tilde{q} \times (\cosh \bar{\theta} \tilde{q} + \sinh \bar{\varphi} \sinh \bar{\theta} \tilde{h} + \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi} \tilde{a}) \\ &= \bar{\Omega} \cosh \bar{\varphi} \sinh \bar{\theta} \tilde{h} + \bar{\Omega} \sinh \bar{\theta} \sinh \bar{\varphi} \tilde{a} \\ \tilde{U} &= \cosh \bar{\theta}_c \tilde{q} + \sinh \bar{\theta}_c \sinh \bar{\varphi} \tilde{h} + \sinh \bar{\theta}_c \cosh \bar{\varphi} \tilde{a} \end{aligned}$$

vektörlerinin iç çarpımı,

$$\left\langle \frac{d\tilde{X}}{dt}, \tilde{U} \right\rangle = \bar{\Omega} \sinh \bar{\theta} \sinh \bar{\varphi} \sinh \bar{\theta}_c \cosh \bar{\varphi} - \bar{\Omega} \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi} \sinh \bar{\theta}_c \sinh \bar{\varphi} = 0$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{X}}{dt^2} &= (\tilde{D}_r \times \tilde{X})' = \bar{\Omega}' \tilde{q} \times (\cosh \bar{\theta} \tilde{q} + \sinh \bar{\varphi} \sinh \bar{\theta} \tilde{h} + \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi} \tilde{a}) \\ &\quad + \bar{\Omega} \tilde{k}_r \tilde{h} \times (\cosh \bar{\theta} \tilde{q} + \sinh \bar{\varphi} \sinh \bar{\theta} \tilde{h} + \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi} \tilde{a}) \\ &\quad + \bar{\Omega}^2 \tilde{q} \times (\tilde{q} \times (\cosh \bar{\theta} \tilde{q} + \sinh \bar{\varphi} \sinh \bar{\theta} \tilde{h} + \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi} \tilde{a})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{X}}{dt^2} = & (-\bar{\Omega} \bar{k}_1 \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi}) \tilde{q} + (\bar{\Omega}' \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi} + \bar{\Omega}^2 \sinh \bar{\theta} \sinh \bar{\varphi}) \tilde{h} \\ & + (\bar{\Omega}' \sinh \bar{\theta} \sinh \bar{\varphi} - \bar{\Omega} \bar{k}_1 \cosh \bar{\theta} + \bar{\Omega}^2 \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi}) \tilde{a} \end{aligned}$$

olduğundan (3.2.59) eşitliği

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^2 \tilde{X}}{dt^2}, \tilde{U} \right\rangle = 0 \Rightarrow \\ \left\langle \begin{aligned} & ((-\bar{\Omega} \bar{k}_1 \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi}) \tilde{q} + (\bar{\Omega}' \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi} + \bar{\Omega}^2 \sinh \bar{\theta} \sinh \bar{\varphi}) \tilde{h}) \\ & + (\bar{\Omega}' \sinh \bar{\theta} \sinh \bar{\varphi} - \bar{\Omega} \bar{k}_1 \cosh \bar{\theta} + \bar{\Omega}^2 \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi}) \tilde{a}, \\ & (\cosh \bar{\theta}_c \tilde{q} + \sinh \bar{\theta}_c \sinh \bar{\varphi} \tilde{h} + \sinh \bar{\theta}_c \cosh \bar{\varphi} \tilde{a}) \end{aligned} \right\rangle \\ = -\bar{\Omega} \bar{k}_1 \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi} \cosh \bar{\theta}_c + \bar{\Omega}' \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi} \sinh \bar{\theta}_c \sinh \bar{\varphi} + \bar{\Omega}^2 \sinh \bar{\theta} \sin^2 h \bar{\varphi} \sinh \bar{\theta}_c \\ - \bar{\Omega}' \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi} \sinh \bar{\theta}_c \sinh \bar{\varphi} + \bar{\Omega} \bar{k}_1 \cosh \bar{\theta} \sinh \bar{\theta}_c \cosh \bar{\varphi} - \bar{\Omega}^2 \sinh \bar{\theta} \cos^2 h \bar{\varphi} \sinh \bar{\theta}_c = 0 \end{aligned}$$

demektir. Buradan

$$\bar{\Omega} \bar{k}_1 \cosh \bar{\varphi} (-\sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\theta}_c + \cosh \bar{\theta} \sinh \bar{\theta}_c) = \bar{\Omega}^2 \sinh \bar{\theta} \sinh \bar{\theta}_c$$

Bu denklemin her iki tarafı $\sinh \bar{\theta} \sinh \bar{\theta}_c$ ile bölünürse

$$(\coth \bar{\theta} - \coth \bar{\theta}_c) \cosh \bar{\varphi} = \frac{\bar{\Omega}}{\bar{k}_1} \quad (3.2.60)$$

elde edilir. (3.2.60) denklemi dual Lorentziyen küresel hareketin eksen yüzeylerinin timelike olması durumunda Euler-Savary formülüdür. (3.2.52) denkleminde $\bar{\rho} = \coth \Delta$ olduğundan Euler-Savary denklemi

$$(\coth \bar{\theta} - \coth \bar{\theta}_c) \cosh \bar{\varphi} = \bar{\rho} \quad (3.2.61)$$

formunda yazılır. Burada

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\Omega}}{\bar{k}_1} = \frac{\bar{k}_{2f}}{\bar{k}_1} - \frac{\bar{k}_{2m}}{\bar{k}_1} . \quad (3.2.62)$$

(3.2.61) denkleminin reel ve dual kısımları

$$(\coth \theta - \coth \theta_c) \cosh \varphi = \rho \quad (3.2.63)$$

ve

$$\varphi^* (\coth \theta - \coth \theta_c) \sinh \varphi + \left(-\frac{\theta_c^*}{\sinh^2 \theta_c} + \frac{\theta^*}{\sinh^2 \theta} \right) \cosh \varphi = \rho^* \quad (3.2.64)$$

bulunur. (3.2.64) denklemini daha basit hale indirmek için (3.2.63) denklemini kullanırsak

$$\rho \varphi^* \tanh \varphi - \left(\frac{\theta^*}{\sinh^2 \theta_c} - \frac{\theta_c^*}{\sinh^2 \theta_c} \right) \cosh \varphi = \rho^* \quad (3.2.65)$$

bulunur. θ_c ve θ_c^* bilindiğinde (3.2.63) denkleminde θ ve (3.2.64) denkleminde θ^* bulunabilir. Tersine θ ve θ^* bilindiğinde θ_c ve θ_c^* belirlenebilir.

3.2.4. Dual Merkez Açık Yaklaşımıyla Lorentziyen Disteli Ekseninin İncelenmesi

Bu kesimde dual merkez açı yaklaşımıyla Lorentziyen Disteli ekseninin yeni bir karakteristik özelliği incelenecektir: ψ , $\tilde{X}$ spacelike doğrusu ile $\tilde{U}$ spacelike disteli eksenindeki açı ve ψ^* bunlar arasındaki en kısa uzaklık olmak üzere, $\bar{\psi} = \psi + \varepsilon \psi^* = \bar{\theta} - \bar{\theta}_c$ dual merkez açısı (3.2.55) eşitliğinden

$$\arccos h(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle) = \bar{\psi} \quad (3.2.66)$$

biçiminde yazılabilir. Bu bağıntı dual Lorentziyen birim küre üzerinde noktalar için bir metrik tanımlar. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketi boyunca bu dual merkez açı değişir. dS dual yay elementine göre (3.2.66) nin türevi alınırsa

$$\frac{d\bar{\psi}}{dS} = \frac{\langle \tilde{X}', \tilde{U} \rangle}{\sqrt{(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2 - 1}} \quad (3.2.67)$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{d\bar{\psi}}{dS} = 0 \Leftrightarrow \langle \tilde{X}', \tilde{U} \rangle = 0 \Leftrightarrow \tilde{T} \perp \tilde{U} \Leftrightarrow \tilde{U} = \bar{A}_1 \tilde{N} + \bar{A}_2 \tilde{B} \quad (3.2.68)$$

bulunur.

Burada Lorentziyen uzayda transfer prensibini uygularsak sonuç olarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.2.4. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketi için $\tilde{X}$ yönlü spacelike doğrusu ve bunun spacelike $\tilde{U}$ Disteli eksenini arasındaki dual merkez açı ve en kısa uzaklığının birinci türevinin sıfır olması, $\tilde{X}$ doğrusu için ve $\tilde{U}$ Disteli ekseninin, ani dönme eksenini ile lineer bağımlı olması için bir karakteristiktir. Böyle doğrular arasındaki dual merkez açı ve en kısa uzaklık birinci yaklaşımda invaryanttır.

Benzer şekilde (3.2.67) denkleminin türevi alınırsa

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{dS^2} = \frac{(\langle \tilde{X}', \tilde{U} \rangle)' \sqrt{(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2 - 1} - \langle \tilde{X}', \tilde{U} \rangle \left(\sqrt{(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2 - 1} \right)'}{(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2 - 1} \quad (3.2.69)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\psi}}{dS} = \frac{d^2\bar{\psi}}{dS^2} = 0 &\Leftrightarrow \langle \tilde{X}', \tilde{U} \rangle = \langle \tilde{X}'', \tilde{U} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle (\bar{A}_1 \tilde{N} + \bar{A}_2 \tilde{B}), \kappa \tilde{N} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \tilde{U} = \bar{A}_2 \tilde{B} \end{aligned}$$

den

$$\langle \tilde{U}, \tilde{U} \rangle = 1 \Rightarrow \bar{A}_2 = i$$

bulunur. Böylece,

$$\frac{d\bar{\psi}}{dS} = \frac{d^2\bar{\psi}}{dS^2} = 0 \Leftrightarrow \tilde{U} = i\tilde{B} \quad (3.2.70)$$

elde edilir. Lorentziyen uzayda transfer prensibini uygularsak aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 3.2.5. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketi için $\tilde{X}$ yönlü spacelike doğrusu ve bunun $\tilde{U}$ spacelike Disteli eksenini arasındaki dual spacelike açı ve en kısa uzaklığının birinci türevinin ve ikinci türevinin sıfır olması karakteristiktir ve $i\tilde{B} \rightarrow \tilde{U}$ karşılık gelir ve $i\tilde{B}$ vektörü $\tilde{X}$ timelike regle yüzeyinin Disteli eksenidir.

(3.2.69) denkleminin türevinin alınmasıyla

$$\begin{aligned} \frac{d^3\bar{\psi}}{dS^3} = & \frac{1}{(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle^2 - 1)} \left\{ (\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)'' \sqrt{(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle^2 - 1)} - (\langle \tilde{X}', \tilde{U} \rangle) \left(\sqrt{(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle^2 - 1)} \right)' \right\} \\ & + \left(\frac{1}{(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle^2 - 1)} \right)' \left\{ (\langle \tilde{X}', \tilde{U} \rangle) \left(\sqrt{(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle^2 - 1)} \right)' - (\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)' \sqrt{(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle^2 - 1)} \right\} \end{aligned} \quad (3.2.71)$$

ve böylece,

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\psi}}{dS} = \frac{d^2\bar{\psi}}{dS^2} = \frac{d^3\bar{\psi}}{dS^3} = 0 & \Leftrightarrow \langle \tilde{X}', \tilde{U} \rangle = \langle \tilde{X}'', \tilde{U} \rangle = \langle \tilde{X}''', \tilde{U} \rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow \tilde{U} = i\tilde{B}, \quad \langle \tilde{U}, (\kappa\tilde{N})' \rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow \tilde{U} = i\tilde{B}, \quad \langle \tilde{U}, (\kappa'\tilde{N} + \kappa\tilde{N}') \rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow \tilde{U} = i\tilde{B}, \quad \langle \tilde{U}, (\kappa'\tilde{N} + \kappa(-\kappa\tilde{T} + \tau\tilde{B})) \rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow \tilde{U} = i\tilde{B}, \quad -\kappa\tilde{T} = 0 \Leftrightarrow \tilde{U} = i\tilde{B}, \quad \tau = 0 \quad (\kappa \neq 0) \end{aligned}$$

bulunur. Lorentziyen uzayda transfer prensibini uygularsak aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 3.2.6. Σ_3 / Σ_2 1-parametrel Lorentziyen küresel hareketi için $\tilde{X}$ yönlü spacelike doğrusu ve bunun $\tilde{U}$ spacelike Disteli eksenini arasındaki merkez açı ve en kısa uzaklığının birinci, ikinci ve üçüncü türevinin sıfır olması burulma doğru kongüransının doğrularını karakterize eder burada $\tilde{U}$, $\tilde{X}$ timelike regle yüzeyinin Disteli eksenidir.

$\tau = 0$ olduğundan, Disteli eksenini ikinci mertebeden sabitlenir ve timelike $\tilde{X}$ regle yüzeyinin üreteç doğrusu sabit adımla hareket eder.

3.2.5. Örnek

Bu kesimde, ilk olarak Σ_3 / Σ_2 1-parametrel Lorentziyen küresel hareketinin ani vida eksenini için dual Lorentziyen vektörler kullanıldı. Σ_3 / Σ_2 1-parametrel Lorentziyen küresel hareketi analitik olarak,

$$\tilde{x}_f(t) = A(t)\tilde{x}_m(t) + \tilde{m}_f(t) \quad , \quad \tilde{x}_m(t) = A^{-1}(t)\tilde{x}_f(t) + \tilde{m}_m(t) \quad (3.2.72)$$

tanımlanabilir. Burada $\tilde{x}_f$, $\tilde{x}_m$, sırasıyla, sabit çatı ve hareketli çatıda bir noktanın vektörleri ve $\tilde{m}_f$, $\tilde{m}_m$ öteleme vektörleri olup, bunlar $\bar{t} = t + \varepsilon t^*$ dual parametresine göre diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. Bir parametrel hareket söz konusu olduğu için $t^* = 0$ alınacaktır. Ayrıca,

$$\tilde{m}_f = -A\tilde{m}_m \quad , \quad \tilde{m}_m = -A^{-1}\tilde{m}_f \quad (3.2.73)$$

bağıntıları mevcuttur ve burada A dual Lorentziyen ortogonal matris olup

$$A^{-1} = \varepsilon A' \varepsilon; \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.74)$$

şartı sağlanır.

$\tilde{x}_f$ ve $\tilde{x}_m$, sırasıyla, sabit Σ_2 ve hareketli Σ_3 Lorentz uzayının ortonormal çatılarına göre aynı $\tilde{X}$ noktasının konum vektörünü gösterirler.

$\tilde{\mathbf{x}}_m \in \Sigma_3$ ($\tilde{\mathbf{x}}_m' = 0$) noktasının hızı sabit iken

$$\tilde{\mathbf{x}}_f' = A' \tilde{\mathbf{x}}_m + A \tilde{\mathbf{x}}_m' + \tilde{\mathbf{m}}_f' = A' \tilde{\mathbf{x}}_m + \tilde{\mathbf{m}}_f' \quad (3.2.75)$$

burada (3.2.72) ve (3.2.73) denklemleri, (3.2.75) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_f' &= A'(A^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_f + \tilde{\mathbf{m}}_m) + \tilde{\mathbf{m}}_f' \\ &= A'(A^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_f - A^{-1} \tilde{\mathbf{m}}_f) + \tilde{\mathbf{m}}_f' \\ \tilde{\mathbf{x}}_f' &= A'A^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_f + (\tilde{\mathbf{m}}_f' - A'A^{-1} \tilde{\mathbf{m}}_f) \end{aligned} \quad (3.2.76)$$

bulunur. $A'A^{-1}$ Lorentziyen anlamda anti-simetrik matris olup,

$$A'A^{-1} + A(A^{-1})' = 0. \quad (3.2.77)$$

$\omega = A'A^{-1}$ alırsak (3.2.77) denklemi

$$\omega + \omega' = 0 \quad (3.2.78)$$

şeklinde kısıtlanabilir. Böylece (3.2.76) denklemini

$$\tilde{\mathbf{x}}_f' = \omega \tilde{\mathbf{x}}_f + (\tilde{\mathbf{m}}_f' - \omega \tilde{\mathbf{m}}_f) \quad (3.2.79)$$

formunda yeniden yazabiliriz. Bu denklemin bir sonucu olarak,

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t) = \omega(t) + \varepsilon \omega^*(t) \quad (3.2.80)$$

dual vektörü vardır burada,

$$\omega \mathbf{x}_f = \omega \times \mathbf{x}_f; \quad \omega^* = (\mathbf{m}' - \omega \times \mathbf{m}). \quad (3.2.81)$$

Şimdi basit bir örnek ile yukarıdaki durumları açıklayalım. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketini incelemek için

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cosh \bar{\theta} & -\sinh \bar{\theta} & 0 \\ -\sinh \bar{\theta} & \cosh \bar{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \cosh \bar{\varphi} & 0 & -\sinh \bar{\varphi} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \bar{\varphi} & 0 & \cosh \bar{\varphi} \end{pmatrix} \quad (3.2.82)$$

ve $\bar{\theta} = \bar{\varphi}$, $\theta^* = \varphi^* = 0$ olmak üzere, Lorentziyen anlamda ortogonal

$$A = \begin{pmatrix} \cosh^2 \varphi & -\sinh \varphi & -\cosh \varphi \sinh \varphi \\ -\sinh \varphi \cosh \varphi & \cosh \varphi & \sinh^2 \varphi \\ -\sinh \varphi & 0 & \cosh \varphi \end{pmatrix} \quad (3.2.83)$$

matrisini ve $\mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere Lorentziyen anlamda anti-simetrik

$$m(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \sinh \varphi \\ 0 & 0 & -\mu \cosh \varphi \\ \mu \sinh \varphi & \mu \cosh \varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.84)$$

matrisini alalım. $\tilde{a}, \tilde{a}_m, \tilde{a}_f$ timelike vektörler olduğundan

$$m(\varphi) = \begin{pmatrix} \mu \cosh \varphi \\ -\mu \sinh \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.85)$$

vektörü ele alınsın. $\omega = A'A^{-1}$ olduğundan

$$\omega(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \cosh \varphi \sinh \varphi & -\cosh \varphi & -\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi \\ -\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi & \sinh \varphi & 2 \cosh \varphi \sinh \varphi \\ -\cosh \varphi & 0 & \sinh \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh^2 \varphi & \sinh \varphi \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 \\ \sinh \varphi \cosh \varphi & \sinh^2 \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}$$

$$\omega(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\cosh \varphi \\ -1 & 0 & \sinh \varphi \\ -\cosh \varphi & -\sinh \varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.86)$$

Lorentziyen anlamda anti-simetrik matrisini elde ederiz. Böylece dönme hareketinin vektörü

$$\omega(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sinh \varphi \\ \cosh \varphi \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.2.87)$$

olarak bulunur. (3.2.81) denkleminde öteleme hareketinin vektörü

$$\begin{aligned} \omega^*(\varphi) &= (\mathbf{m}' - \omega \times \mathbf{m}) = \begin{pmatrix} \mu \sinh \varphi \\ -\mu \cosh \varphi \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\mu \sinh \varphi \\ \mu \cosh \varphi \\ \mu \end{pmatrix} \\ \omega^*(\varphi) &= \begin{pmatrix} 2\mu \sinh \varphi \\ -2\mu \cosh \varphi \\ -\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.88)$$

olarak bulunur. Böylece, her φ anında, Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketinin Pfaff vektörü,

$$\tilde{\Omega}(\varphi) = \omega(\varphi) + \varepsilon \omega^*(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sinh \varphi + 2\varepsilon\mu \sinh \varphi \\ \cosh \varphi - 2\varepsilon\mu \cosh \varphi \\ -1 - \varepsilon\mu \end{pmatrix} \quad (3.2.89)$$

olarak bulunur. Teo. 3.1.1 den sabit eksen yüzeyi

$$\tilde{\mathbf{q}}_f(\varphi) = \frac{\tilde{\Omega}}{\|\tilde{\Omega}\|} = \frac{1}{\sqrt{2-2\varepsilon\mu}} \begin{pmatrix} -\sinh \varphi + 2\varepsilon\mu \sinh \varphi \\ \cosh \varphi - 2\varepsilon\mu \cosh \varphi \\ -1 - \varepsilon\mu \end{pmatrix} \quad (3.2.90)$$

olarak bulunur.

Böylece, Σ_3 hareketli birim dual Lorentziyen küresinde hareketli pol eğrisi

$$\Omega_m = \frac{dM^{-1}}{d\varphi} \cdot M; \quad M = (A + \varepsilon mA) \quad (3.2.91)$$

ile tanımlanır. Burada

$$M = \begin{pmatrix} \cosh^2 \varphi + \varepsilon\mu(-\sinh^2 \varphi) & -\sinh \varphi & -\sinh \varphi \cosh \varphi + \varepsilon\mu(\sinh \varphi \cosh \varphi) \\ -\sinh \varphi \cosh \varphi + \varepsilon\mu(\sinh \varphi \cosh \varphi) & \cosh \varphi & \sinh^2 \varphi - \varepsilon\mu(\cosh^2 \varphi) \\ -\sinh \varphi & \varepsilon\mu & \cosh \varphi \end{pmatrix}$$

olup

$$\Omega_m = \begin{pmatrix} 0 & \cosh \varphi & 1 - \varepsilon\mu \\ \cosh \varphi & 0 & -\sinh \varphi \\ 1 - \varepsilon\mu & \sinh \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece

$$\tilde{\Omega}_m(\varphi) = \begin{pmatrix} \sinh \varphi \\ -1 + \varepsilon\mu \\ \cosh \varphi \end{pmatrix} \quad (3.2.92)$$

olur. Hareketli eksen yüzeyi de

$$\tilde{q}_m(\varphi) = \frac{\tilde{\Omega}_m}{\|\tilde{\Omega}_m\|} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\varepsilon\mu}} \begin{pmatrix} \sinh \varphi \\ -1 + \varepsilon\mu \\ \cosh \varphi \end{pmatrix} \quad (3.2.93)$$

biçiminde elde edilir.

Şimdi, $\tilde{q} = \tilde{q}_f(\varphi)$ sabit eksen yüzeyinin Blaschke invaryantlarını hesaplayalım.

Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketi için (3.2.90) denkleminde,

$$\tilde{\Omega}_f(\varphi) = \bar{\Omega} \tilde{q}(\varphi); \quad \bar{\Omega} = \sqrt{2 - 2\varepsilon\mu}. \quad (3.2.94)$$

(3.2.94) denkleminin her iki tarafının φ ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\tilde{\Omega}_f}{d\varphi} = \tilde{\Omega}_f' = \bar{\Omega}' \tilde{q} + \bar{\Omega} \tilde{q}'$$

$$\tilde{\Omega}_f' = \bar{\Omega}' \tilde{q} + \bar{k}_1 \bar{\Omega} \tilde{h} \quad (3.2.95)$$

ve bu ifadenin türevini alıp (3.2.18) eşitliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_f'' &= \bar{\Omega}'' \tilde{q} + \bar{\Omega}' \tilde{q}' + \bar{k}_1' \bar{\Omega} \tilde{h} + \bar{k}_1 \bar{\Omega}' \tilde{h} + \bar{k}_1 \bar{\Omega} \tilde{h}' \\ &= \bar{\Omega}'' \tilde{q} + \bar{\Omega}' (\bar{k}_1 \tilde{h}) + \bar{k}_1' \bar{\Omega} \tilde{h} + \bar{k}_1 \bar{\Omega}' \tilde{h} + \bar{k}_1 \bar{\Omega} (-\bar{k}_1 \tilde{q} + \bar{k}_{2f} \tilde{a}) \\ \tilde{\Omega}_f'' &= (\bar{\Omega}'' - \bar{k}_1'^2 \bar{\Omega}) \tilde{q} + (2\bar{k}_1 \bar{\Omega}' + \bar{k}_1' \bar{\Omega}) \tilde{h} + (\bar{k}_1 \bar{\Omega} \bar{k}_{2f}) \tilde{a} \end{aligned} \quad (3.2.96)$$

bulunur. (3.2.95) ve (3.2.96) denklemlerinin Lorentziyen vektörel çarpımları alınırsa

$$\tilde{\Omega}_f(\varphi) \times \tilde{\Omega}_f'(\varphi) = (\bar{\Omega} \tilde{q}) \times (\bar{\Omega}' \tilde{q} + \bar{k}_1 \bar{\Omega} \tilde{h}) = \bar{k}_1 \bar{\Omega}^2 \tilde{a} \quad (3.2.97)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\left\| \tilde{\Omega}_f(\varphi) \times \tilde{\Omega}_f'(\varphi) \right\| = - \left\langle \tilde{\Omega}_f(\varphi), \tilde{\Omega}_f(\varphi) \right\rangle \left\langle \tilde{\Omega}_f'(\varphi), \tilde{\Omega}_f'(\varphi) \right\rangle + \left(\left\langle \tilde{\Omega}_f(\varphi), \tilde{\Omega}_f'(\varphi) \right\rangle \right)^2 \quad (3.2.98)$$

ve

$$\left\| \tilde{\Omega}_f(\varphi) \times \tilde{\Omega}_f'(\varphi) \right\|^2 = - \left\langle \bar{\Omega} \tilde{q}, \bar{\Omega} \tilde{q} \right\rangle \left\langle \bar{\Omega}' \tilde{q} + \bar{k}_1 \bar{\Omega} \tilde{h}, \bar{\Omega}' \tilde{q} + \bar{k}_1 \bar{\Omega} \tilde{h} \right\rangle + \left(\left\langle \bar{\Omega} \tilde{q}, \bar{\Omega}' \tilde{q} + \bar{k}_1 \bar{\Omega} \tilde{h} \right\rangle \right)^2 = -\bar{k}_1^2 \bar{\Omega}^4 \quad (3.2.99)$$

den

$$\det(\tilde{\Omega}_f, \tilde{\Omega}_f', \tilde{\Omega}_f'') = - \left\langle \tilde{\Omega}_f \times \tilde{\Omega}_f', \tilde{\Omega}_f'' \right\rangle \quad (3.2.100)$$

$$\det(\tilde{\Omega}_f, \tilde{\Omega}_f', \tilde{\Omega}_f'') = \bar{k}_1^2 \bar{\Omega}^3 \bar{k}_{2f} \quad (3.2.101)$$

bulunur. Diğer taraftan (3.2.89) denkleminde,

$$\tilde{\Omega}_f'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\cosh \varphi + 2\varepsilon\mu \cosh \varphi \\ \sinh \varphi - 2\varepsilon\mu \sinh \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.102)$$

ve

$$\tilde{\mathbf{Q}}_f''(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sinh \varphi + 2\varepsilon\mu \sinh \varphi \\ \cosh \varphi - 2\varepsilon\mu \cosh \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.103)$$

bulunur. (3.2.89) ve (3.2.102) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\mathbf{Q}}_f(\varphi), \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi) \right\rangle &= (-\sinh \varphi \cosh \varphi + \sinh \varphi \cosh \varphi) + \varepsilon\mu(2 \sinh \varphi \cosh \varphi + 2 \sinh \varphi \cosh \varphi \\ &\quad - 2 \sinh \varphi \cosh \varphi - 2 \sinh \varphi \cosh \varphi) \end{aligned}$$

veya

$$\left\langle \tilde{\mathbf{Q}}_f(\varphi), \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi) \right\rangle = 0 \quad (3.2.104)$$

bulunur. (3.2.104) nin her iki tarafının karesi alınırsa

$$\left(\left\langle \tilde{\mathbf{Q}}_f(\varphi), \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi) \right\rangle \right)^2 = 0 \quad (3.2.105)$$

bulunur. Ayrıca,

$$\left\langle \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi), \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi) \right\rangle = -\cosh^2 \varphi + \sinh^2 \varphi + 2\varepsilon\mu(2 \cosh^2 \varphi - 2 \sinh^2 \varphi)$$

dan

$$\left\langle \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi), \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi) \right\rangle = -1 + 4\varepsilon\mu \quad (3.2.106)$$

bulunur. (3.2.89), (3.2.105) ve (3.2.106) denklemleri, (3.2.98) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
(-2+2\varepsilon\mu)(-1+4\varepsilon\mu) &= -\bar{k}_1^2 \bar{\Omega}^4 \\
(2-10\varepsilon\mu) &= \bar{k}_1^2 (-4+8\varepsilon\mu) \\
\Rightarrow \bar{k}_1^2 &= \frac{2-10\varepsilon\mu}{-4+8\varepsilon\mu} = \frac{1-5\varepsilon\mu}{-2+4\varepsilon\mu} \\
&\quad (-2-4\varepsilon\mu) \\
(k_1 + \varepsilon k_1^*)^2 &= \frac{-2+6\varepsilon\mu}{4} \\
k_1^2 + 2\varepsilon k_1 k_1^* &= \frac{-1+3\varepsilon\mu}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$k_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad k_1^* = -\frac{3\sqrt{2}\mu}{4i} \quad (3.2.107)$$

bulunur. (3.2.16) denkleminde $\lambda := \lambda_m = \lambda_f = \frac{k_1^*}{k_1}$ olduğundan eksen yüzeyinin dağılma parametresi

$$\lambda = \frac{-3\mu}{2} \quad (3.2.108)$$

bulunur. (3.2.90), (3.2.102) ve (3.2.103) denklemleri, (3.2.100) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_f \times \tilde{\Omega}_f' &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & -\vec{e}_2 & -\vec{e}_3 \\ -\sinh \varphi + 2\varepsilon\mu \sinh \varphi & \cosh \varphi - 2\varepsilon\mu \cosh \varphi & -1 - \varepsilon\mu \\ -\cosh \varphi + 2\varepsilon\mu \cosh \varphi & \sinh \varphi - 2\varepsilon\mu \sinh \varphi & 0 \end{vmatrix} \\
\tilde{\Omega}_f \times \tilde{\Omega}_f' &= [(\sinh \varphi + \varepsilon\mu(\sinh \varphi - 2 \sinh \varphi)), (-\cosh \varphi + \varepsilon\mu(2 \cosh \varphi - \cosh \varphi)), (-1 - 4\varepsilon\mu)] \\
\langle \tilde{\Omega}_f \times \tilde{\Omega}_f', \tilde{\Omega}_f'' \rangle &= -1 + 3\varepsilon\mu \quad (3.2.109)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.2.101) ve (3.2.109) denklemlerinden

$$\det(\tilde{\Omega}_f, \tilde{\Omega}_f', \tilde{\Omega}_f'') = 1 - 3\varepsilon\mu = \bar{k}_1^2 \bar{\Omega}^3 \bar{k}_{2f} \quad (3.2.110)$$

bulunur.

$$1 - 3\varepsilon\mu = \frac{-1 + 3\varepsilon\mu}{2} \cdot (2 - 2\varepsilon\mu) \cdot \sqrt{2 - 2\varepsilon\mu} \cdot \bar{k}_{2f}$$

ve

$$\bar{k}_{2f} = \frac{1}{(-1 + \varepsilon\mu)(\sqrt{2} - \varepsilon\mu \frac{\sqrt{2}}{2})}$$

bulunur. Böylece,

$$\bar{k}_{2f} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon\mu \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad (3.2.111)$$

elde edilir. (3.2.111) denklemi reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$k_{2f} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad k_{2f}^* = -\mu \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad (3.2.112)$$

bulunur. (3.2.14) denkleminde $\bar{k}_{2f} - \bar{k}_{2m} = \tilde{\Omega}_f$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \bar{k}_{2m} &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon\mu \frac{3\sqrt{2}}{4} \right) - \left(\sqrt{2} - \varepsilon\mu \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \varepsilon\mu \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

olup reel ve dual kısımları

$$k_{2m} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad k_{2m}^* = -\mu \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (3.2.113)$$

elde edilir. Böylece eksen yüzeylerinin integral invariantlarının reel ve dual kısımları elde edilir.

3.2.b.) $\tilde{h}_m$ ve $\tilde{h}_f$ in Timelike Olması Durumunda Bir Parametrelili Dual Lorentziyen Küresel Hareketler

Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili dual Lorentziyen küresel hareket boyunca

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow \tilde{q}_m(t) \in \Sigma_3 \quad (3.2.114)$$

diferansiyellenebilir eğrisi, düz doğruların diferansiyellenebilir bir ailesini veya hareketli eksen yüzeyini gösterir. Bu eğri boyunca hareketli ortonormal çatısı;

$$\tilde{q}_m = \tilde{q}_m(t), \quad \tilde{h}_m = \left(\frac{d\tilde{q}_m}{dt} \right) \left\| \frac{d\tilde{q}_m}{dt} \right\|^{-1} \text{ (timelike) }, \quad \tilde{a}_m = -\tilde{q}_m \times \tilde{h}_m \quad (3.2.115)$$

ile verilir ve bu çatı Blaschke çatısı olarak adlandırılır. Bu çatı elemanlarına karşılık gelen doğrular $\tilde{q}_m = \tilde{q}_m(t)$ eksen yüzeyinin boğaz noktasında kesişirler. $\tilde{a}_m$ ve $\tilde{h}_m$, sırasıyla, $\tilde{q}_m = \tilde{q}_m(t)$ spacelike regle yüzeyinin merkez teğeti ve merkez normali olarak bilinir. Σ_1^m dual Lorentziyen birim küresinin üreteçlerinin cümlesi $\{O; \tilde{q}_m, \tilde{h}_m, \tilde{a}_m\}$ olsun. Böylece Σ_1^m / Σ_3 hareketi

$$\begin{bmatrix} d\tilde{q}_m \\ d\tilde{h}_m \\ d\tilde{a}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_{1m} & 0 \\ \bar{k}_{1m} & 0 & \bar{k}_{2m} \\ 0 & \bar{k}_{2m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_m \\ \tilde{h}_m \\ \tilde{a}_m \end{bmatrix} \quad (3.2.116)$$

ile tanımlanır. Burada

$$\bar{k}_{1m} = k_{1m} + \varepsilon k_{1m}^* = \left\| \frac{d\tilde{q}_m}{dt} \right\|, \quad \bar{k}_{2m} = k_{2m} + \varepsilon k_{2m}^* = \frac{\det \left(\tilde{q}_m, \frac{d\tilde{q}_m}{dt}, \frac{d^2\tilde{q}_m}{dt^2} \right)}{\bar{k}_{1m}^2} \quad (3.2.117)$$

dual fonksiyonları hareketli eksen yüzeyinin *Blaschke invaryantları* olarak adlandırılır. Boğaz çizgisi

$$\frac{dC^m}{dt} = \bar{k}_{2m}^* \tilde{q}_m + \bar{k}_{1m}^* \tilde{a}_m$$

olarak verilir. Bu takdirde (3.2.117) de verilen dual fonksiyonlar

$$\bar{k}_{1m} = k_{1m} + \varepsilon \sin \bar{\sigma}_m, \quad \bar{k}_{2m} = k_{2m} + \varepsilon \cos \bar{\sigma}_m \quad (3.2.118)$$

şeklinde verilebilir. Burada $\bar{\sigma}_m$ açısı, boğaz çizgisinden $\tilde{q}_m(t)$ üreteç doğrusunun sapma miktarını ölçer. Hareketli spacelike eksen yüzeyinin dağılma parametresi

$$\lambda_m = \frac{k_{1m}^*}{k_{1m}} = \frac{\sin \bar{\sigma}_m}{k_{1m}} \quad (3.2.119)$$

şeklinde dir.

Σ_3 / Σ_2 1-parametrel dual Lorentziyen küresel hareketi boyunca ani vida eksenini, Σ_2 sabit birim dual Lorentziyen küresinde sabit eksen yüzeyini üretir. Bu eksen yüzeyindeki Blaschke çatısı

$$\tilde{q}_f = \tilde{q}_f(t), \quad \tilde{h}_f = \left(\frac{d\tilde{q}_f(t)}{dt} \right) \left\| \frac{d\tilde{q}_f}{dt} \right\|^{-1} (timelike), \quad \tilde{a}_f = -\tilde{q}_f \times \tilde{h}_f \quad (3.2.120)$$

ile verilir. Σ_1^f dual Lorentziyen birim küresinin üreteçlerinin cümlesi $\{O; \tilde{q}_f, \tilde{h}_f, \tilde{a}_f\}$ olsun.

Böylece Σ_1^f / Σ_2 hareketi

$$\begin{bmatrix} d\tilde{q}_f \\ d\tilde{h}_f \\ d\tilde{a}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_{1f} & 0 \\ \bar{k}_{1f} & 0 & \bar{k}_{2f} \\ 0 & \bar{k}_{2f} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_f \\ \tilde{h}_f \\ \tilde{a}_f \end{bmatrix} \quad (3.2.121)$$

ile tanımlanır. Burada

$$\bar{k}_{1f} = k_{1f} + \varepsilon k_{1f}^* = \left\| \frac{d\tilde{q}_f}{dt} \right\|, \quad \bar{k}_{2f} = k_{2f} + \varepsilon k_{2f}^* = \frac{\det \left(\tilde{q}_f, \frac{d\tilde{q}_f}{dt}, \frac{d^2\tilde{q}_f}{dt^2} \right)}{\bar{k}_{1f}^2} \quad (3.2.122)$$

dual fonksiyonları sabit eksen yüzeyinin Blaschke invaryantları olarak adlandırılır. (3.2.118) denkleminde benzer şekilde

$$\bar{k}_{1f} = k_{1f} + \varepsilon \sin \bar{\sigma}_f, \quad \bar{k}_{2f} = k_{2f} + \varepsilon \cos \bar{\sigma}_f \quad (3.2.123)$$

şeklinde verilebilir. Burada $\bar{\sigma}_f$ açısı, boğaz çizgisinden $\tilde{q}_f(t)$ üreteç doğrusunun sapma miktarını ölçer. Sabit spacelike eksen yüzeyinin dağılıma parametresi

$$\lambda_f = \frac{k_{1f}^*}{k_{1f}} = \frac{\sin \bar{\sigma}_f}{k_{1f}} \quad (3.2.124)$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.7. Spacelike eksen yüzeylerinin Blaschke invariantları için

$$\bar{k}_{1m} = \bar{k}_{1f}, \quad \bar{k}_{2f} - \bar{k}_{2m} = \|\tilde{\Omega}\| \quad (3.2.125)$$

dır.

İspat. Denklem (3.2.116), (3.2.121) ve teorem 3.1.1 in (v) şıkkından

$$\frac{d\tilde{q}_m}{dt} = \bar{k}_{1m} \tilde{h}_m, \quad \frac{d\tilde{q}_f}{dt} = \bar{k}_{1f} \tilde{h}_f$$

olup,

$$\bar{k}_{1f}^2 = \left\langle \frac{d\tilde{q}_f}{dt}, \frac{d\tilde{q}_f}{dt} \right\rangle = \left\langle adA(t) \frac{d\tilde{q}_m}{dt}, adA(t) \frac{d\tilde{q}_m}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d\tilde{q}_m}{dt}, \frac{d\tilde{q}_m}{dt} \right\rangle = \bar{k}_{1m}^2$$

ve $\bar{k}_{1m} > 0$, $\bar{k}_{1f} > 0$ olduğundan $\bar{k}_{1m} = \bar{k}_{1f}$ bulunur.

$$\frac{d\tilde{q}_f}{dt} = adA \left(\frac{d\tilde{q}_m}{dt} \right)$$

denkleminde adA lineer olduğundan

$$\bar{k}_{1f} \tilde{\mathbf{h}}_f = adA(\bar{k}_{1m} \tilde{\mathbf{h}}_m) \Rightarrow \tilde{\mathbf{h}}_f = adA(\tilde{\mathbf{h}}_m)$$

bulunur. Son denklemin türevini alırsak teorem 3.1.1 in (iii) şıkkından

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{h}}_f}{dt} &= \frac{d}{dt}(A\tilde{\mathbf{h}}_m A^{-1}) = \frac{dA}{dt} \tilde{\mathbf{h}}_m A^{-1} + A\tilde{\mathbf{h}}_m \frac{dA^{-1}}{dt} + A \frac{d\tilde{\mathbf{h}}_m}{dt} A^{-1} \\ &= \frac{dA}{dt} A^{-1} \underbrace{A\tilde{\mathbf{h}}_m A^{-1}} + \underbrace{A\tilde{\mathbf{h}}_m A^{-1}} A \frac{dA^{-1}}{dt} + adA \left(\frac{d\tilde{\mathbf{h}}_m}{dt} \right) \\ &= \tilde{\mathbf{Q}}_f \tilde{\mathbf{h}}_f - \tilde{\mathbf{h}}_f \tilde{\mathbf{Q}}_f + adA \left(\frac{d\tilde{\mathbf{h}}_m}{dt} \right) \\ &= \tilde{\mathbf{Q}}_f \tilde{\mathbf{a}}_f + adA \left(\frac{d\tilde{\mathbf{h}}_m}{dt} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemde (3.2.116) ve (3.2.121) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \bar{k}_{1f} \tilde{\mathbf{q}}_f + \bar{k}_{2f} \tilde{\mathbf{a}}_f &= \tilde{\mathbf{Q}}_f \tilde{\mathbf{a}}_f + adA(\bar{k}_{1m} \tilde{\mathbf{q}}_m + \bar{k}_{2m} \tilde{\mathbf{a}}_m) \\ \bar{k}_{1f} \tilde{\mathbf{q}}_f + \bar{k}_{2f} \tilde{\mathbf{a}}_f &= \tilde{\mathbf{Q}}_f \tilde{\mathbf{a}}_f + \bar{k}_{1m} \underbrace{adA \tilde{\mathbf{q}}_m} + \bar{k}_{2m} \underbrace{adA \tilde{\mathbf{a}}_m} \\ \bar{k}_{1f} \tilde{\mathbf{q}}_f + \bar{k}_{2f} \tilde{\mathbf{a}}_f &= \tilde{\mathbf{Q}}_f \tilde{\mathbf{a}}_f + \bar{k}_{1f} \tilde{\mathbf{q}}_f + \bar{k}_{2m} \tilde{\mathbf{a}}_f \end{aligned}$$

böylece

$$\bar{k}_{2f} - \bar{k}_{2m} = \|\tilde{\mathbf{Q}}\| \quad (3.2.126)$$

bulunur. Bu teoremden aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.3. Herhangi bir t anında, Σ_3 / Σ_2 bir parametrelili dual Lorentziyen küresel harekette hareketli pol eğrisi ani vida eksenini boyunca sabit pol eğrisine birinci mertebeden değer. Böylece spacelike eksen yüzeylerinin ortak dağılıma parametresi

$$\lambda := \lambda_m = \lambda_f = \frac{k_1^*}{k_1} \quad (3.2.127)$$

şeklindedir.

Σ_1 birim dual Lorentziyen küresinin üreteçlerinin cümlesi $\{O; \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{h}}(\text{timelike}), \tilde{\mathbf{a}}\}$ olsun. Bu sistemde $\tilde{\mathbf{a}}(t) = a(t) + \varepsilon a^*(t)$, $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ ve $\tilde{\mathbf{q}}(t+dt)$ nın ortak dikmesi ve $\tilde{\mathbf{a}}(t) = a(t) + \varepsilon a^*(t) = \tilde{\mathbf{q}} \times \tilde{\mathbf{h}}$ olarak tanımlanır. Bu çatı izafi çatı olarak adlandırılır $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{h}}$ ve $\tilde{\mathbf{a}}$, Lorentziyen uzayda ortogonal doğrulara karşılık gelirler. Bunların kesiştiği nokta hareketli ve sabit spacelike eksen yüzeylerinin boğaz noktasıdır. $\tilde{\mathbf{h}}$ ve $\tilde{\mathbf{a}}$, sırasıyla, boğaz noktasında spacelike eksen yüzeyinin merkez normal ve merkez teğetidir. Böylece Σ_1 / Σ_3 ve Σ_1 / Σ_2 1-parametreli dual Lorentziyen küresel hareketlerin türev denklemleri, sırasıyla,

$$\left. \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} \right|_m = C(M)\tilde{\mathbf{q}}(t), \quad \tilde{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{h}} \\ \tilde{\mathbf{a}} \end{bmatrix}, \quad C(M) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_1 & 0 \\ \bar{k}_1 & 0 & \bar{k}_{2m} \\ 0 & \bar{k}_{2m} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.128)$$

ve

$$\left. \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} \right|_f = C(F)\tilde{\mathbf{q}}(t), \quad \tilde{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{h}} \\ \tilde{\mathbf{a}} \end{bmatrix}, \quad C(F) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_1 & 0 \\ \bar{k}_1 & 0 & \bar{k}_{2f} \\ 0 & \bar{k}_{2f} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.129)$$

dir. Burada,

$$\bar{k}_1 = k_1 + \varepsilon k_1^*, \quad \bar{k}_{2m} = k_{2m} + \varepsilon k_{2m}^*, \quad \bar{k}_{2f} = k_{2f} + \varepsilon k_{2f}^* \quad (3.2.130)$$

Σ_3 / Σ_2 1-parametreli dual Lorentziyen küresel hareketin Blaschke invaryantlarıdır.

3.2.6. Eksen Yüzeyleri ile Birleştirilmiş Bir Spacelike Regle Yüzeye Blaschke Yaklaşımı

Bu kesimde pol eğrilerinin Blaschke invariantları verilecektir ve bunların geometrik ve kinematik manaları incelenecektir. Bu inceleme için koordinatları $\bar{X}_i = x_i + \varepsilon x_i^*$ ($1 \leq i \leq 3$) olan birim dual Lorentziyen küre üzerinde

$$-\bar{X}_1^2 + \bar{X}_2^2 + \bar{X}_3^2 = 1, \quad \tilde{X} = X^T \tilde{q} \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.131)$$

şartını sağlayan $\tilde{X}$ vektörünü alalım.

$\tilde{X}$, t nin bir fonksiyonu ise Σ_3 hareketli birim dual Lorentziyen küresine göre t anında $\tilde{X}$ spacelike vektörünün hızı

$$\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_m = \frac{d\tilde{X}^T}{dt} \tilde{q} + \tilde{X}^T \left. \frac{d\tilde{q}}{dt} \right|_m \quad (3.2.132)$$

olur. Benzer şekilde, $\tilde{X}$, t nin bir fonksiyonu ise Σ_2 sabit birim dual Lorentziyen küresine göre t anında $\tilde{X}$ spacelike vektörünün hızı

$$\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_f = \frac{d\tilde{X}^T}{dt} \tilde{q} + \tilde{X}^T \left. \frac{d\tilde{q}}{dt} \right|_f \quad (3.2.133)$$

ile verilir. (3.2.128) ve (3.2.129) denklemlerinden

$$\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_m = \left(\frac{d\tilde{X}^T}{dt} + \tilde{X}^T C(M) \right) \tilde{q} \quad (3.2.134)$$

ve

$$\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_f = \left(\frac{d\tilde{X}^T}{dt} + \tilde{X}^T C(F) \right) \tilde{q} \quad (3.2.135)$$

bulunur. $\tilde{X}$ vektörü hareketli Σ_3 hareketli birim dual Lorentziyen küresine sabitlenirse, bu

taktirde türevi $\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_m = 0$ dır. Yani,

$$\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_m = \left(\left[\left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_m, \left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_m, \left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_m \right] + [\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3] \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_1 & 0 \\ \bar{k}_1 & 0 & \bar{k}_{2m} \\ 0 & \bar{k}_{2m} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{h} \\ \tilde{a} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_m &= \left(\left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_m + \bar{X}_2 \bar{k}_1 \right) \tilde{q} + \left(\bar{X}_1 \bar{k}_1 + \left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_m + \bar{X}_3 \bar{k}_{2m} \right) \tilde{h} + \left(\bar{X}_2 \bar{k}_{2m} + \left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_m \right) \tilde{a} \\ &= (dx_1 + x_2 k_1) q + \mathcal{E}[(dx_1^* + x_2 k_1^* + x_2^* k_1) q + (dx_1 + x_2 k_1) q^*] \\ &\quad + (dx_2 + x_1 k_1 + x_3 k_{2m}) h + \mathcal{E}[(x_1 k_1^* + x_1^* k_1 + dx_2^* + x_3 k_{2m}^* + x_3^* k_{2m}) h + (dx_2 + x_1 k_1 + x_3 k_{2m}) h^*] \\ &\quad + (dx_3 + x_2 k_{2m}) a + \mathcal{E}[(x_2 k_{2m}^* + x_2^* k_{2m} + dx_3^*) a + (dx_3 + x_2 k_{2m}) a^*] = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_m &= -\bar{X}_2 \bar{k}_1 \quad \Rightarrow dx_1 + \mathcal{E}x_1^* = -(x_2 + \mathcal{E}x_2^*)(k_1 + \mathcal{E}k_1^*) \\ \left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_m &= -\bar{X}_3 \bar{k}_{2m} - \bar{X}_1 \bar{k}_1 \quad \Rightarrow dx_2 + \mathcal{E}x_2^* = -(x_3 + \mathcal{E}x_3^*)(k_{2m} + \mathcal{E}k_{2m}^*) - (x_1 + \mathcal{E}x_1^*)(k_1 + \mathcal{E}k_1^*) \\ \left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_m &= -\bar{X}_2 \bar{k}_{2m} \quad \Rightarrow dx_3 + \mathcal{E}x_3^* = -(x_2 + \mathcal{E}x_2^*)(k_{2m} + \mathcal{E}k_{2m}^*) \\ \Rightarrow dx_1 &= -x_2 p, \quad dx_1^* = -(x_2 k_1^* + x_2^* k_1) \\ \Rightarrow dx_2 &= -x_3 k_{2m} - x_1 k_1, \quad dx_2^* = -x_3 k_{2m}^* - x_3^* k_{2m} - x_1 k_{01} - x_1^* k_1 \\ \Rightarrow dx_3 &= -x_2 k_{2m}, \quad dx_3^* = -x_2 k_{2m}^* - x_2^* k_{2m} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $\tilde{X}$ vektörü Σ_2 sabit birim dual Lorentziyen küresine sabitlenirse, bu

taktirde türevi $\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_f = 0$ dır. Yani,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_f &= \left(\left[\left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_f, \left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_f, \left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_f \right] + [\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3] \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_1 & 0 \\ -\bar{k}_1 & 0 & \bar{k}_{2f} \\ 0 & \bar{k}_{2f} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{h} \\ \tilde{a} \end{bmatrix} \\
\left. \frac{d\tilde{X}}{dt} \right|_f &= \left(\left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_f - \bar{X}_2 \bar{k}_1 \right) \tilde{q} + \left(\bar{X}_1 \bar{k}_1 + \left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_f + \bar{X}_3 \bar{k}_{2f} \right) \tilde{h} + \left(\bar{X}_2 \bar{k}_{2f} + \left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_f \right) \tilde{a} \\
&= (dx_1 - x_2 k_1)q + \mathcal{E}[(dx_1^* - x_2 k_1^* - x_2^* k_1)q + (dx_1 - x_2 k_1)q_0] \\
&+ (dx_2 + x_1 k_1 + x_3 k_{2f})h + \mathcal{E}[(x_1 k_1^* + x_1^* k_1 + dx_2^* + x_3 k_{2f}^* + x_3^* k_{2f})h + (dx_2 + x_1 k_1 + x_3 k_{2f})h^*] \\
&+ (dx_3 + x_2 k_{2f})a + \mathcal{E}[(x_2 k_{2f}^* + x_2^* k_{2f} + dx_3^*)a + (dx_3 + x_2 k_{2f})a^*] = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\bar{X}_1}{dt} \right|_f &= -\bar{X}_2 \bar{k}_1 \quad \Rightarrow dx_1 + \mathcal{E}x_1^* = -(x_2 + \mathcal{E}x_2^*)(k_1 + \mathcal{E}k_1^*) \\
\left. \frac{d\bar{X}_2}{dt} \right|_f &= -\bar{X}_3 \bar{k}_{2f} - \bar{X}_1 \bar{k}_1 \Rightarrow dx_2 + \mathcal{E}x_2^* = -(x_3 + \mathcal{E}x_3^*)(k_{2f} + \mathcal{E}k_{2f}^*) - (x_1 + \mathcal{E}x_1^*)(k_1 + \mathcal{E}k_1^*) \\
\left. \frac{d\bar{X}_3}{dt} \right|_f &= -\bar{X}_2 \bar{k}_{2f} \quad \Rightarrow dx_3 + \mathcal{E}x_3^* = -(x_2 + \mathcal{E}x_2^*)(k_{2f} + \mathcal{E}k_{2f}^*) \\
\Rightarrow dx_1 &= -x_2 p, \quad , dx_1^* = -(x_2 k_1^* + x_2^* k_1) \\
\Rightarrow dx_2 &= -x_3 k_{2f} - x_1 k_1, \quad , dx_2^* = -x_3 k_{2f}^* - x_0 k_{2f} - x_1 k_1^* - x_1^* k_1 \\
\Rightarrow dx_3 &= -x_2 k_{2f}, \quad , dx_3^* = -x_2 k_{2f}^* - x_2^* k_{2f}
\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi, $\tilde{X}$ vektörünün Σ_3 hareketli birim dual Lorentziyen küresine göre sabit olduğunu kabul edelim ve Σ_2 sabit birim dual Lorentziyen küresine göre hız vektörünü hesaplayalım.

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \tilde{X}^T (C(F) - C(M)) \tilde{q} \quad (3.2.136)$$

olup

$$C(R) = C(F) - C(M) \quad (3.2.137)$$

alalım. Böylece (3.2.136) denklemi

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \tilde{X}^T (C(R)) \tilde{q} \quad (3.2.138)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.138) ifadesi $\tilde{X}$ spacelike vektörünün Σ_2 birim dual Lorentziyen küresine göre hızıdır, bu hıza sürüklenme hızı denir. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{X}}{dt} &= \begin{bmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_2 & \bar{X}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_{2f} - \bar{k}_{2m} \\ 0 & \bar{k}_{2f} - \bar{k}_{2m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{h} \\ \tilde{a} \end{bmatrix} \\ \frac{d\tilde{X}}{dt} &= \begin{bmatrix} \bar{X}_3(\bar{k}_{2f} - \bar{k}_{2m}) \end{bmatrix} \tilde{h} + \begin{bmatrix} \bar{X}_2(\bar{k}_{2f} - \bar{k}_{2m}) \end{bmatrix} \tilde{a} \end{aligned} \quad (3.2.139)$$

bulunur. $C(R)$ Lorentziyen anlamda anti-simetrik matris olduğundan

$$C(R)^t + C(R) = 0 \quad (3.2.140)$$

şeklindedir.

$$C(R)\tilde{X} = \tilde{D}_r \times \tilde{X} \quad (3.2.141)$$

olacak şekilde $\tilde{D}_r = \mathbf{d} + \varepsilon \mathbf{d}^*$ dual vektörü vardır.

Böylece, (3.2.139) denklemi

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \tilde{D}_r \times \tilde{X}, \quad \tilde{D}_r = \tilde{D}_f - \tilde{D}_m = -\bar{\Omega} \tilde{q} \quad (3.2.142)$$

şeklinde yazılabilir burada $\|\tilde{\Omega}\| = \bar{\Omega} = \omega + \varepsilon \omega^*$ dir. Böylece (3.2.126) ve (3.2.142)

denklemlerinden

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = (\bar{X}_3 \bar{\Omega}) \tilde{h} + (\bar{X}_2 \bar{\Omega}) \tilde{a} \quad (3.2.143)$$

dir. (3.2.142) denkleminden $\tilde{X}$ spacelike vektörünün ivmesi

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{X}}{dt^2} &= (\tilde{D}_r \times \tilde{X})' = (-\bar{\Omega} \tilde{q} \times \tilde{X})' \\ &= (-\bar{\Omega}' \tilde{q} \times \tilde{X}) - (\bar{\Omega} \tilde{q}' \times \tilde{X}) + (\bar{\Omega} \tilde{q}' \times \tilde{X}') \\ &= (-\bar{\Omega}' \tilde{q} \times (\bar{X}_1 \tilde{q} + \bar{X}_2 \tilde{h} + \bar{X}_3 \tilde{a})) - ((\bar{\Omega} \tilde{q}' \times \tilde{X}) - ((\bar{\Omega} \tilde{q}' \times (\bar{X}_1 \tilde{q} + \bar{X}_2 \tilde{h} + \bar{X}_3 \tilde{a}))) + (\bar{\Omega} \tilde{q}' \times (\bar{\Omega} \tilde{q} \times \tilde{X}))) \\ &= (-\bar{\Omega}' \tilde{q} \times (\bar{X}_1 \tilde{q} + \bar{X}_2 \tilde{h} + \bar{X}_3 \tilde{a})) - ((\bar{\Omega} \tilde{q}' \times (\bar{X}_1 \tilde{q} + \bar{X}_2 \tilde{h} + \bar{X}_3 \tilde{a}))) + (\bar{\Omega} \tilde{q}' \times (\bar{\Omega} \tilde{q} \times \tilde{X})) \\ &= \bar{\Omega}' \bar{X}_2 \tilde{a} + \bar{\Omega}' \bar{X}_3 \tilde{h} - \bar{\Omega} \bar{k}_1 \bar{X}_1 \tilde{a} + \bar{\Omega} \bar{k}_1 \bar{X}_3 \tilde{q} + \bar{\Omega}^2 \bar{X}_2 \tilde{h} + \bar{\Omega}^2 \bar{X}_3 \tilde{a} \end{aligned}$$

böylece

$$\frac{d^2 \tilde{X}}{dt^2} = (\bar{\Omega} \bar{k}_1 \bar{X}_3) \tilde{q} + (\bar{\Omega}' \bar{X}_3 + \bar{\Omega}^2 \bar{X}_2) \tilde{h} + (-\bar{\Omega} \bar{k}_1 \bar{X}_1 + \bar{\Omega}' \bar{X}_2 + \bar{\Omega}^2 \bar{X}_3) \tilde{a} \quad (3.2.144)$$

bulunur.

Reel kısım ω ve dual kısım ω^* , sırasıyla, hareketli spacelike eksen yüzeyi ortak bir ana doğru boyunca yuvarlanma ve kayma yaparken dönme ve öteleme hareketlerine karşılık gelir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.4. Herhangi bir t anında Σ_3 / Σ_2 bir parametrelili Lorentziyen küresel hareketinde pol eğrilerine karşılık gelen spacelike eksen yüzeylerinin dağılma parametresi λ sıfırdan farklı iken hareketin adımı

$$h = \frac{\omega^*}{\omega} = \frac{k_{2f}^* - k_{2m}^*}{k_{2f} - k_{2m}} = \lambda \left(\frac{\cot \bar{\sigma}_f - \cot \bar{\sigma}_m}{\cot \bar{\theta}_f - \cot \bar{\theta}_m} \right) \quad (3.2.145)$$

burada $\bar{\sigma}_f, \bar{\sigma}_m$ boğaz açıları, $\bar{\theta}_f, \bar{\theta}_m$ spacelike eksen yüzeylerinin dönmesiyle oluşan yönlü koninin tepe açılarıdır.

3.2.7. $\tilde{h}$ nin Timelike Olması Durumunda Doğru Kompleksi

$\tilde{X}$ spacelike doğrusu ile üretilen spacelike regle yüzeyi inceleyelim. Σ_2 birim dual Lorentziyen küre üzerinde $\tilde{X}(t)$ eğrisi boyunca hareketli bir çatı tanımlayalım. Bu eğri, L_2 sabit Lorentziyen uzayda bir spacelike regle yüzeye karşılık gelir. $\tilde{X}(t)$ eğrisi boyunca Blaschke çatısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tilde{E}_1 = \tilde{X} = \bar{X}_1 \tilde{q} + \bar{X}_2 \tilde{h} + \bar{X}_3 \tilde{a}, \quad (3.2.146)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_2 &= \frac{\tilde{X}'}{\|\tilde{X}'\|} = \frac{\tilde{D} \times \tilde{X}}{\sqrt{\langle \tilde{X}', \tilde{X}' \rangle}} = \frac{(-\bar{\Omega}_1 \tilde{q}) \times (\bar{X}_1 \tilde{q} + \bar{X}_2 \tilde{h} + \bar{X}_3 \tilde{a})}{\sqrt{\langle \tilde{X}', \tilde{X}' \rangle}} \\ &= \frac{\bar{\Omega}_1 \bar{X}_2 \tilde{a} + \bar{\Omega}_1 \bar{X}_3 \tilde{h}}{\sqrt{\langle \bar{\Omega}_1 \bar{X}_2 \tilde{a} + \bar{\Omega}_1 \bar{X}_3 \tilde{h}, \bar{\Omega}_1 \bar{X}_2 \tilde{a} + \bar{\Omega}_1 \bar{X}_3 \tilde{h} \rangle}} \\ \tilde{E}_2 &= \frac{\bar{X}_3 \tilde{h} + \bar{X}_2 \tilde{a}}{\sqrt{\bar{X}_2^2 - \bar{X}_3^2}} \quad (\text{time}) \end{aligned} \quad (3.2.147)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_3 &= -\tilde{E}_1 \times \tilde{E}_2 = (\bar{X}_1 \tilde{q} + \bar{X}_2 \tilde{h} + \bar{X}_3 \tilde{a}) \times \frac{(\bar{X}_3 \tilde{h} + \bar{X}_2 \tilde{a})}{\sqrt{\bar{X}_2^2 - \bar{X}_3^2}} \\ \tilde{E}_3 &= \frac{(\bar{X}_2^2 - \bar{X}_3^2) \tilde{q} + \bar{X}_1 \bar{X}_2 \tilde{h} + \bar{X}_1 \bar{X}_3 \tilde{a}}{\sqrt{\bar{X}_2^2 - \bar{X}_3^2}} \end{aligned} \quad (3.2.148)$$

$\tilde{E}_1, \tilde{E}_3$ birim dual spacelike vektörleri $\mathbb{R}_1^3$ Lorentziyen çizgiler uzayında yönlü spacelike doğrularına karşılık gelirken, $\tilde{E}_2$ birim dual timelike vektörü de $\mathbb{R}_1^3$ Lorentziyen çizgiler uzayında yönlü timelike vektörüne karşılık gelir. Bu noktaların kesişimi $\tilde{X}$ spacelike ana doğrusunun boğaz noktasıdır. Böylece Blaschke çatısı,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{E}_1 \\ \tilde{E}_2 \\ \tilde{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_{1x} & 0 \\ \bar{k}_{1x} & 0 & \bar{k}_{2x} \\ 0 & \bar{k}_{2x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_1 \\ \tilde{E}_2 \\ \tilde{E}_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.149)$$

ile verilir. Burada,

$$\begin{aligned}\bar{k}_{1x} &= k_{1x} + \varepsilon k_{1x}^* = \left\| \frac{d\tilde{X}}{dt} \right\| = \bar{\Omega} \sqrt{\bar{X}_2^2 - \bar{X}_3^2}, \\ \bar{k}_{2x} &= k_{2x} + \varepsilon k_{2x}^* = \frac{\det(\tilde{X}, \tilde{X}', \tilde{X}'')}{(\bar{k}_{1x})^2} = \bar{k}_{1x} \bar{X}_3 - \bar{\Omega} \bar{X}_1 - \frac{\bar{k}_{1x} \bar{X}_3 \bar{X}_1^2}{\bar{X}_2^2 - \bar{X}_3^2}\end{aligned}\quad (3.2.150)$$

Blaschke invariantlarıdır.

$\tilde{X}$ spacelike doğrusu ile üretilen spacelike regle yüzeyin dağılma parametresi,

$$\lambda_x = \frac{\bar{k}_1^*}{\bar{k}_1} = \frac{x_2 x_2^* - x_3 x_3^* + h(x_2^2 - x_3^2)}{(x_2^2 - x_3^2)} \quad (3.2.151)$$

ile verilir. (3.2.151) denklemi, hareketli eksen yüzeylerinin spacelike doğrularının ürettiği spacelike regle yüzeylerin aynı dağılma parametresine sahip olduğu durumlarda kullanılabilir. Doğruların bu cümlesi doğru kompleksi olarak adlandırılır ve

$$x_2 x_2^* - x_3 x_3^* + (h - \lambda_x)(x_2^2 - x_3^2) = 0 \quad (3.2.152)$$

denklemi ile gösterilir. Denklem (3.2.152) kuadratik doğru kompleksidir. Sonuç olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.8. Σ_3 / Σ_2 1-parametrel Lorentziyen küresel harekete karşılık gelen hareketli eksen yüzeylerinin spacelike doğrularının bir cümlesini göz önüne alalım. Bu doğrular, L_2 sabit Lorentziyen uzayında aynı dağılma parametresine sahip spacelike regle yüzeylerin üreteçleridirler. Böylece spacelike doğruların bu cümlesi kuadratik doğru kompleksi oluşturur.

$\tilde{X}$ spacelike doğrusu üzerinde keyfi bir noktanın konumu $\mathbf{p}(x, y, z)$ olsun. Böylece

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{p} \times \mathbf{x},$$

veya

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & -\vec{e}_2 & -\vec{e}_3 \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} = (yx_3 - zx_2, xx_3 - zx_1, yx_1 - xx_2)$$

dan

$$x_1^* = x_3y - x_2z, \quad x_2^* = x_3x - x_1z, \quad x_3^* = x_1y - x_2x \quad (3.2.153)$$

bulunur. (3.2.153) denkleminde (3.2.152) denklemini yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -x_2(x_3x - x_1z) + x_3(x_1y - x_2x) + (h - \lambda_x)(x_2^2 - x_3^2) &= 0, \\ x_1x_3y - 2x_2x_3x + x_1x_2z + (h - \lambda_x)(x_2^2 - x_3^2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.154)$$

bulunur. Bu denklem, hareketli eksen yüzeyinin $\tilde{X}$ spacelike doğrularına karşılık gelen aynı dağılıma parametresine sahip spacelike regle yüzeylerin bulunduğu düzlemin, Σ_3 / Σ_2 1-parametreli Lorentziyen küresel hareketinin ani vida eksenine paralel olduğunu verir.

(3.2.154) denklemini için iki farklı durum söz konusudur: $\lambda_x = h$ olması durumunda dağılıma parametresi ani vida eksenini boyunca düzlemdeki doğrular boyunca düzlemdeki doğrular ile bağlantılıdır. $\lambda_x = 0$ olması durumunda

$$x_1x_3y - 2x_2x_3x + x_1x_2z + h(x_2^2 - x_3^2) = 0$$

t anında hareketli eksen yüzeyinin $\tilde{X}$ spacelike doğrusu açılabilir spacelike bir regle yüzey üretir. Bu durumda $\tilde{X}$ üreteç doğrusu ve bu doğrunun komşuluğundaki $\tilde{X}(t + dt)$ doğrusu regle yüzeyin döndüğü noktaya teğettirler. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.2.9. Σ_3 / Σ_2 1-parametreli Lorentziyen küresel hareketi boyunca, karşılık gelen hareketli eksen yüzeyinin doğruları L_2 uzayında açılabilir regle yüzey üretir. Bu doğrular özel bir doğru kompleksinde içerilirler.

$\bar{k}_{1x} = k_{1x} + \varepsilon k_{1x}^*$ ve $\bar{k}_{2x} = k_{2x} + \varepsilon k_{2x}^*$ Blaschke invaryantları Blaschke çatsının kinematik yorumunu verir. Şimdi

$$\tilde{D}_x = -\bar{k}_{2x}\tilde{E}_1 + \bar{k}_{1x}\tilde{E}_3 \quad (3.2.155)$$

biçiminde tanımlanan dual vektörünü alalım bu vektör dual Lorentziyen pfaff vektörü olarak bilinir. $\|\tilde{D}\| = \sqrt{\bar{k}_{2x}^2 + \bar{k}_{1x}^2} = \omega_x + \varepsilon \omega_x^*$, $\tilde{E}_I$ spacelike vektörünün dual açısal hızıdır. Burada,

$$\omega_x = \sqrt{k_{2x}^2 + k_{1x}^2}, \quad \omega_x^* = \frac{k_{2x}k_{2x}^* + k_{1x}k_{1x}^*}{\sqrt{k_{2x}^2 + k_{1x}^2}} \quad (3.2.156)$$

reel ve dual kısımları, sırasıyla, $\tilde{E}_I$ spacelike vektörünün dönme ve öteleme açısal hızlarıdır.

Dual Lorentziyen pfaff vektörü boyunca $\tilde{E}_I$ spacelike vektörünün adımı

$$h_x = \frac{\omega_x^*}{\omega_x} = \frac{k_{2x}k_{2x}^* + k_{1x}k_{1x}^*}{k_{2x}^2 + k_{1x}^2} \quad (3.2.157)$$

dır. Buna göre;

$$\tilde{U} = \frac{\tilde{D}}{\|\tilde{D}\|} = \frac{-\bar{k}_{2x}\tilde{E}_I + \bar{k}_{1x}\tilde{E}_3}{\sqrt{\bar{k}_{2x}^2 + \bar{k}_{1x}^2}} \quad (3.2.158)$$

birim dual spacelike vektörü, $\tilde{U}$ Blaschke çatısında $\tilde{E}_I$ spacelike doğrusunun hareketinin Disteli eksenidir. (3.2.158) denkleminde Disteli eksenini $\tilde{X} = \tilde{X}(t)$ spacelike regle yüzeyinin teğet düzlemine paraleldir ve $\tilde{E}_2$ timelike merkez normaline diktir. Böylece Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketin anı vida eksenini ve Disteli eksenini, $\tilde{E}_I \tilde{E}_3$ düzlemi ile Σ_2 birim dual Lorentziyen küresinin kesişimi ile belirlenen bir tek büyük dual Lorentziyen çember üzerinde yatar. $\Delta = \delta + \varepsilon \delta^*$, Disteli eksenini ve $\tilde{X}$ spacelike doğrusu arasındaki dual spacelike açı ise

$$\tilde{U} = \cos \Delta \tilde{E}_I - \sin \Delta \tilde{E}_3, \quad (3.2.159)$$

yazılabilir. $\Delta = \delta + \varepsilon \delta^*$ dual Lorentziyen küresel eğrilik yarıçapıdır. (3.2.159) denkleminin türevi alınır

$$\begin{aligned}
\tilde{U}' &= \sin \Delta \tilde{E}_1 \Delta' - \cos \Delta \tilde{E}_1' + \cos \Delta \tilde{E}_3 \Delta' + \sin \Delta \tilde{E}_3' \\
\tilde{U}' &= (\sin \Delta \tilde{E}_1 + \cos \Delta \tilde{E}_3) \Delta' - \cos \Delta (\bar{k}_{1x} \tilde{E}_2) + \sin \Delta (\bar{k}_{2x} \tilde{E}_2) \\
\tilde{U}' &= (\sin \Delta \tilde{E}_1 + \cos \Delta \tilde{E}_3) \Delta' + (-\bar{k}_{1x} \cos \Delta + \bar{k}_{2x} \sin \Delta) \tilde{E}_2
\end{aligned} \tag{3.2.160}$$

elde edilir. Böylece

$$\cot \Delta = \frac{\bar{k}_{2x}}{\bar{k}_{1x}} \tag{3.2.161}$$

bulunur. Bu denklem dual Lorentziyen küresel eğrilik $\bar{\rho}$ ve dual küresel eğrilik yarıçapı arasındaki bağıntının

$$\bar{\rho} = \rho + \varepsilon \rho^* = \cot \Delta \tag{3.2.162}$$

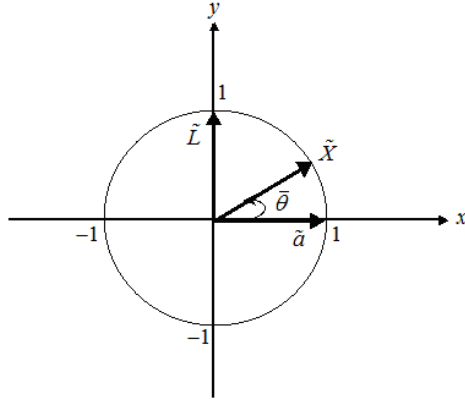
biçiminde olduğunu verir.

3.2.8. $\tilde{h}$ nin Timelike Olması Durumunda Doğru Yörüngeleri ve Disteli Formülü

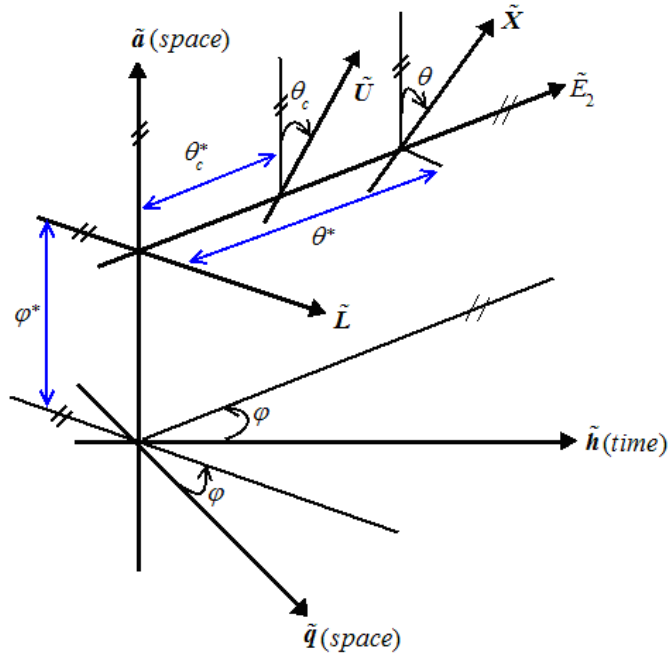
Bu kesimde dual Lorentziyen uzayda dual Lorentziyen açı vasıtasıyla Euler formülü ve Disteli formülünü elde etmek için bir metot verilecektir. Hareketli L_3 Lorentziyen uzayda yönlü bir spacelike doğru, sabit L_2 Lorentziyen uzayda verilen spacelike doğru ile sabit dual spacelike açı yapar. Bundan dolayı Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketinin sabitlenmiş $\tilde{X}$ spacelike doğrusu $\tilde{X}$ nin doğrultusunu belirlemek için $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual spacelike açısını ve $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ dual timelike açısını alalım. $\tilde{X}$ birim olduğundan $\tilde{X}$ nin bileşenleri

$$\tilde{X} = \sin \bar{\theta} \tilde{L} + \cos \bar{\theta} \tilde{a}, \quad \tilde{L} = \cosh \bar{\varphi} \tilde{q} + \sinh \bar{\varphi} \tilde{h} \tag{3.2.163}$$

şeklinde yazılabilir. $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual spacelike açısı Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketinin ani vida eksenine göre $\tilde{X}$ nin konumunu tanımlar.



Şekil 3.2.3. $\tilde{h}$ nın timelike olması durumunda Σ_3 / Σ_2 1-parametrel Lorentziyen küresel hareketinin sabitlenmiş $\tilde{X}$ spacelike doğrusu



Şekil 3.2.4. $\tilde{h}$ nın timelike olması durumunda hareketli spacelike doğru $\tilde{X}$ ve bu doğrunun Disteli eksen $\tilde{U}$

Koordinatların cümlesinin bir benzeri $t = t_0$ anında $\tilde{X} = \tilde{X}(t)$ spacelike yüzeyinin $\tilde{U}$ spacelike ekseninin belirlenmesinde kullanılabilir. $\tilde{E}_2$ merkez normal olduğundan aynı zamanda Disteli eksenine diktir, bu L_3 / L_2 1-parametrel uzaysal hareketinin ani vida eksen

etrafında aynı $\bar{\varphi}$ dual timelike açısı ile belirlenir. Ani vida eksenini tanımlanan $\bar{\theta}_c = \theta_c + \varepsilon \theta_c^*$ dual spacelike açısı ile

$$\tilde{U} = \sin \bar{\theta}_c \cosh \bar{\varphi} \tilde{q} + \sin \bar{\theta}_c \sinh \bar{\varphi} \tilde{h} + \cos \bar{\theta}_c \tilde{a} \quad (3.2.164)$$

spacelike vektörü yazılabilir. (3.2.163) ve (3.2.164) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle &= \sin \bar{\theta} \sin \bar{\theta}_c \cosh^2 \bar{\varphi} - \sin \bar{\theta} \sin \bar{\theta}_c \sinh^2 \bar{\varphi} + \cos \bar{\theta}_c \cos \bar{\theta} \\ &= \sin \bar{\theta} \sin \bar{\theta}_c + \cos \bar{\theta}_c \cos \bar{\theta} \end{aligned}$$

$$\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle = \cos(\bar{\theta}_c + \bar{\theta}) \quad (3.2.165)$$

bulunur. Burada $\tilde{U}$ spacelike Disteli eksenini olduğundan $(\bar{\theta}_c + \bar{\theta})$, $t = t_0$ anında ikinci mertebeden sabit kalır. Yani,

$$\left. \frac{d(\bar{\theta}_c + \bar{\theta})}{dt} \right|_{t=t_0} = 0, \quad \left. \frac{d\tilde{U}}{dt} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (3.2.166)$$

ve

$$\left. \frac{d^2(\bar{\theta}_c + \bar{\theta})}{dt^2} \right|_{t=t_0} = 0, \quad \left. \frac{d^2\tilde{U}}{dt^2} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (3.2.167)$$

olur. (3.2.165) denkleminin türevinden,

$$\left\langle \frac{d\tilde{X}}{dt}, \tilde{U} \right\rangle + \left\langle \tilde{X}, \frac{d\tilde{U}}{dt} \right\rangle = 0,$$

ve (3.2.166) denkleminde

$$\left\langle \frac{d\tilde{X}}{dt}, \tilde{U} \right\rangle = 0 \quad (3.2.168)$$

bulunur. Bu denklemin türevi alınırsa

$$\left\langle \frac{d^2\tilde{X}}{dt^2}, \tilde{U} \right\rangle + \left\langle \frac{d\tilde{X}}{dt}, \frac{d\tilde{U}}{dt} \right\rangle = 0$$

veya

$$\left\langle \frac{d^2\tilde{X}}{dt^2}, \tilde{U} \right\rangle = 0 \quad (3.2.169)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{X}}{dt} &= (\tilde{D}_r \times \tilde{X}) = (-\bar{\Omega}\tilde{q}) \times (\sin \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi}\tilde{q} + \sin \bar{\theta} \sinh \bar{\varphi}\tilde{h} + \cos \bar{\theta}\tilde{a}) \\ &= \bar{\Omega} \sinh \bar{\varphi} \sin \bar{\theta}\tilde{a} + \bar{\Omega} \cos \bar{\theta}\tilde{h} \\ \tilde{U} &= \sin \bar{\theta}_c \cosh \bar{\varphi}\tilde{q} + \sin \bar{\theta}_c \sinh \bar{\varphi}\tilde{h} + \cos \bar{\theta}_c\tilde{a} \end{aligned}$$

vektörlerinin iç çarpımı,

$$\left\langle \frac{d\tilde{X}}{dt}, \tilde{U} \right\rangle = \bar{\Omega} \sin \bar{\theta} \sinh \bar{\varphi} \cos \bar{\theta}_c - \bar{\Omega} \cos \bar{\theta} \sin \bar{\theta}_c \sinh \bar{\varphi} = 0$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{X}}{dt^2} &= (\tilde{D}_r \times \tilde{X})' = -\bar{\Omega}'\tilde{q} \times (\sin \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi}\tilde{q} + \sin \bar{\theta} \sinh \bar{\varphi}\tilde{h} + \cos \bar{\theta}\tilde{a}) \\ &\quad - \bar{\Omega}\tilde{k}_1\tilde{h} \times (\sin \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi}\tilde{q} + \sin \bar{\theta} \sinh \bar{\varphi}\tilde{h} + \cos \bar{\theta}\tilde{a}) \\ &\quad + \bar{\Omega}^2\tilde{q} \times (\tilde{q} \times (\sin \bar{\theta} \cosh \bar{\varphi}\tilde{q} + \sin \bar{\theta} \sinh \bar{\varphi}\tilde{h} + \cos \bar{\theta}\tilde{a})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{X}}{dt^2} = & (\bar{\Omega} \bar{k}_1 \cos \bar{\theta}) \tilde{q} + (\bar{\Omega}' \cos \bar{\theta} + \bar{\Omega}^2 \sin \bar{\theta} \sinh \bar{\varphi}) \tilde{h} \\ & + (\bar{\Omega}' \sin \bar{\theta} \sinh \bar{\varphi} - \bar{\Omega} \bar{k}_1 \cosh \bar{\varphi} \sin \bar{\theta} + \bar{\Omega}^2 \cos \bar{\theta}) \tilde{a} \end{aligned}$$

olduğundan (3.2.169) eşitliği

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^2 \tilde{X}}{dt^2}, \tilde{U} \right\rangle = 0 \Rightarrow & \left\langle \begin{aligned} & ((\bar{\Omega} \bar{k}_1 \cos \bar{\theta}) \tilde{q} + (\bar{\Omega}' \cos \bar{\theta} + \bar{\Omega}^2 \sin \bar{\theta} \sinh \bar{\varphi}) \tilde{h} \\ & + (\bar{\Omega}' \sin \bar{\theta} \sinh \bar{\varphi} - \bar{\Omega} \bar{k}_1 \cosh \bar{\varphi} \sin \bar{\theta} + \bar{\Omega}^2 \cos \bar{\theta}) \tilde{a}), \end{aligned} \right. \\ & \left. (\sin \bar{\theta}_c \cosh \bar{\varphi} \tilde{q} + \sin \bar{\theta}_c \sinh \bar{\varphi} \tilde{h} + \cos \bar{\theta}_c \tilde{a}) \right\rangle \\ = & \bar{\Omega} \bar{k}_1 \sin \bar{\theta}_c \cosh \bar{\varphi} \cos \bar{\theta} - \bar{\Omega}' \cos \bar{\theta} \sin \bar{\theta}_c \sinh \bar{\varphi} - \bar{\Omega}^2 \sin \bar{\theta} \sinh^2 \bar{\varphi} \sin \bar{\theta}_c \\ & + \bar{\Omega}' \sin \bar{\theta} \sinh \bar{\varphi} \cos \bar{\theta}_c - \bar{\Omega} \bar{k}_1 \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta}_c \cosh \bar{\varphi} + \bar{\Omega}^2 \cos \bar{\theta}_c \cos \bar{\theta} = 0 \end{aligned}$$

demektir. Buradan

$$\bar{\Omega} \bar{k}_1 \cosh \bar{\varphi} (\sin \bar{\theta}_c \cos \bar{\theta} - \cos \bar{\theta}_c \sin \bar{\theta}) = \bar{\Omega}^2 (\sin \bar{\theta} \sin \bar{\theta}_c \sinh^2 \bar{\varphi} - \cos \bar{\theta}_c \cos \bar{\theta})$$

Bu denklemin her iki tarafı $\sin \bar{\theta} \sin \bar{\theta}_c$ ile bölünürse

$$\frac{(\cot \bar{\theta} - \cot \bar{\theta}_c) \cosh \bar{\varphi}}{\sinh^2 \bar{\varphi} - \cot \bar{\theta} \cot \bar{\theta}_c} = \frac{\bar{\Omega}}{\bar{k}_1} \quad (3.2.170)$$

elde edilir. (3.2.170) denklemini dual Lorentziyen küresel hareketin eksen yüzeylerinin spacelike olması durumunda Euler-Savary formülüdür. (3.2.162) denkleminde $\bar{\rho} = \cot \Delta$ olduğundan Euler-Savary denklemi

$$\frac{(\cot \bar{\theta} - \cot \bar{\theta}_c) \cosh \bar{\varphi}}{\sinh^2 \bar{\varphi} - \cot \bar{\theta} \cot \bar{\theta}_c} = \bar{\rho} \quad (3.2.171)$$

formunda yazılır. Burada

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\Omega}}{\bar{k}_1} = \frac{\bar{k}_{2f}}{\bar{k}_1} - \frac{\bar{k}_{2m}}{\bar{k}_1} . \quad (3.2.172)$$

(3.2.171) denkleminin reel ve dual kısımları

$$\frac{(\cot \theta - \cot \theta_c) \cosh \varphi}{\sinh^2 \varphi - \cot \theta \cot \theta_c} = \rho \quad (3.2.173)$$

ve

$$\frac{(\cot \theta - \cot \theta_c) \varphi^* \sinh \varphi + \left(-\frac{\theta_c^*}{\sin^2 \theta_c} + \frac{\theta^*}{\sin^2 \theta} \right) \cosh \varphi}{\varphi^* 2 \sinh \varphi \cosh \varphi - \left(\frac{\cot \theta \theta_c^*}{\sin^2 \theta_c} + \frac{\cot \theta_c \theta^*}{\sin^2 \theta} \right)} = \rho^* \quad (3.2.174)$$

bulunur. θ_c ve θ_c^* bilindiğinde (3.2.173) denkleminde θ ve (3.2.174) denkleminde θ^* bulunabilir. Tersine θ ve θ^* bilindiğinde θ_c ve θ_c^* belirlenebilir.

3.2.9. Dual Spacelike Açık Yaklaşımıyla Lorentziyen Disteli Ekseninin İncelenmesi

Bu kesimde dual spacelike açı yaklaşımıyla Lorentziyen Disteli ekseninin yeni bir karakteristik özelliğini incelenecektir: ψ , $\tilde{X}$ spacelike doğrusu ile $\tilde{U}$ spacelike disteli eksenindeki açı ve ψ^* bunlar arasındaki en kısa uzaklık olmak üzere, $\bar{\psi} = \psi + \varepsilon \psi^* = \bar{\theta}_c + \bar{\theta}$ dual spacelike açı tanımlanırsa (3.2.165) eşitliğinden

$$\arccos(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle) = \bar{\psi} \quad (3.2.175)$$

yazılabilir. Bu bağıntı dual Lorentziyen birim küre üzerinde noktalar için bir metrik tanımlar. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketi boyunca bu dual spacelike açı değişir. $d\bar{\psi}$ dual yay elementine göre (3.2.175) nin türevini alırsak

$$\frac{d\bar{\psi}}{dS} = \frac{\langle -\tilde{X}', \tilde{U} \rangle}{\sqrt{1 - (\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2}} \quad (3.2.176)$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{d\bar{\psi}}{dS} = 0 \Leftrightarrow \langle -\tilde{X}', \tilde{U} \rangle = 0 \Leftrightarrow \tilde{T} \perp \tilde{U} \Leftrightarrow \tilde{U} = \bar{A}_1 \tilde{N} + \bar{A}_2 \tilde{B} \quad (3.2.177)$$

bulunur.

Burada Lorentziyen uzayda transfer prensibini uygularsak sonuç olarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.2.10. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketi için $\tilde{X}$ yönlü spacelike doğrusu ve bunun spacelike $\tilde{U}$ Disteli eksenini arasındaki dual spacelike açı ve en kısa uzaklığının birinci türevinin sıfır olması, $\tilde{X}$ doğrusu için ve $\tilde{U}$ Disteli ekseninin, ani dönme eksenini ile lineer bağımlı olması için bir karakteristiktir. Böyle doğrular arasındaki dual spacelike açı ve en kısa uzaklık birinci yaklaşımda invarianttır.

Benzer şekilde (3.2.176) denkleminin türevi alınırsa

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{dS^2} = \frac{\left(\langle -\tilde{X}', \tilde{U} \rangle\right)' \sqrt{1 - \left(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle\right)^2} - \langle -\tilde{X}', \tilde{U} \rangle \left(\sqrt{1 - \left(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle\right)^2}\right)'}{1 - \left(\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle\right)^2} \quad (3.2.178)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\psi}}{dS} = \frac{d^2\bar{\psi}}{dS^2} = 0 &\Leftrightarrow \langle -\tilde{X}', \tilde{U} \rangle = \langle -\tilde{X}'', \tilde{U} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle (\bar{A}_1 \tilde{N} + \bar{A}_2 \tilde{B}), \kappa \tilde{N} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \tilde{U} = \bar{A}_2 \tilde{B} \end{aligned}$$

den

$$\langle \tilde{U}, \tilde{U} \rangle = 1 \Rightarrow \bar{A}_2 = \mp 1$$

bulunur. Böylece,

$$\frac{d\bar{\psi}}{dS} = \frac{d^2\bar{\psi}}{dS^2} = 0 \Leftrightarrow \tilde{U} = \mp \tilde{B} \quad (3.2.179)$$

elde edilir. Lorentziyen uzayda transfer prensibini uygularsak aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 3.2.11. Σ_3 / Σ_2 1-parametrel Lorentziyen küresel hareketi için $\tilde{X}$ yönlü spacelike doğrusu ve bunun $\tilde{U}$ Disteli eksenini arasındaki dual spacelike açı ve en kısa uzaklığının birinci türevinin ve ikinci türevinin sıfır olması karakteristiktir ve $\mp \tilde{B} \rightarrow \tilde{U}$ karşılık gelir ve $\tilde{B}$ vektörü $\tilde{X}$ spacelike regle yüzeyinin Disteli eksenidir.

(3.2.178) denkleminin türevinin alınmasıyla

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \bar{\psi}}{dS^3} = & \frac{1}{1 - (\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2} \left\{ \left(\langle -\tilde{X}, \tilde{U} \rangle \right)' \sqrt{1 - (\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2} - \langle -\tilde{X}', \tilde{U} \rangle \left(\sqrt{1 - (\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2} \right)' \right\} \\ & + \left(\frac{1}{1 - (\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2} \right)' \left\{ \langle -\tilde{X}', \tilde{U} \rangle \left(\sqrt{1 - (\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2} \right)' - \langle -\tilde{X}, \tilde{U}' \rangle \sqrt{1 - (\langle \tilde{X}, \tilde{U} \rangle)^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.2.180)$$

ve böylece,

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\psi}}{dS} = \frac{d^2 \bar{\psi}}{dS^2} = \frac{d^3 \bar{\psi}}{dS^3} = 0 & \Leftrightarrow \langle -\tilde{X}', \tilde{U} \rangle = \langle -\tilde{X}'', \tilde{U} \rangle = \langle -\tilde{X}''', \tilde{U} \rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow \tilde{U} = \mp \tilde{B}, \quad \langle \tilde{U}, (\kappa \tilde{N})' \rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow \tilde{U} = \mp \tilde{B}, \quad \langle \tilde{U}, (\kappa' \tilde{N} + \kappa \tilde{N}') \rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow \tilde{U} = \mp \tilde{B}, \quad \langle \tilde{U}, (\kappa' \tilde{N} + \kappa(-\kappa \tilde{T} + \tau \tilde{B})) \rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow \tilde{U} = \mp \tilde{B}, \quad \mp \kappa \tilde{T} = 0 \Leftrightarrow \tilde{U} = \mp \tilde{B}, \quad \tau = 0 \quad (\kappa \neq 0) \end{aligned}$$

bulunur. Lorentziyen uzayda transfer prensibini uygularsak aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 3.2.8. Σ_3 / Σ_2 1-parametrel Lorentziyen küresel hareketi için $\tilde{X}$ yönlü spacelike doğrusu ve bunun $\tilde{U}$ Disteli eksenini arasındaki spacelike açı ve en kısa uzaklığının birinci, ikinci ve üçüncü türevinin sıfır olması burulma doğru kongüransının doğrularını karakterize eder burada $\tilde{U}$, $\tilde{X}$ spacelike regle yüzeyinin Disteli eksenidir.

$\tau = 0$ olduğundan, Disteli eksenini ikinci mertebeden sabitlenir ve spacelike $\tilde{X}$ regle yüzeyinin üreteç doğrusu sabit adımla hareket eder.

3.2.10. Örnek

Bu kesimde, ilk olarak Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketinin ani vida eksenini için dual Lorentziyen vektörler kullanıldı. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketi analitik olarak

$$\tilde{\mathbf{x}}_f(t) = A(t)\tilde{\mathbf{x}}_m(t) + \tilde{\mathbf{m}}_f(t) \quad , \quad \tilde{\mathbf{x}}_m(t) = A^{-1}(t)\tilde{\mathbf{x}}_f(t) + \tilde{\mathbf{m}}_m(t) \quad (3.2.181)$$

tanımlanabilir. Burada $\tilde{\mathbf{x}}_f$, $\tilde{\mathbf{x}}_m$, sırasıyla, sabit çatı ve hareketli çatıda bir noktanın vektörleri ve $\tilde{\mathbf{m}}_f$, $\tilde{\mathbf{m}}_m$ öteleme vektörleri olup, bunlar $\bar{t} = t + \varepsilon t^*$ dual parametresine göre diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. Bir parametrelili hareket söz konusu olduğu için $t^* = 0$ alınacaktır. Ayrıca,

$$\tilde{\mathbf{m}}_f = -A\tilde{\mathbf{m}}_m \quad , \quad \tilde{\mathbf{m}}_m = -A^{-1}\tilde{\mathbf{m}}_f \quad (3.2.182)$$

bağıntıları mevcuttur ve burada A dual Lorentziyen ortogonal matris olup

$$A^{-1} = \varepsilon A' \varepsilon; \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.183)$$

şartı sağlanır.

$\tilde{\mathbf{x}}_f$ ve $\tilde{\mathbf{x}}_m$, sırasıyla, sabit Σ_2 ve hareketli Σ_3 Lorentz uzayının ortonormal çatılarına göre aynı $\tilde{X}$ noktasının konum vektörünü gösterirler.

$$\tilde{\mathbf{x}}_m \in \Sigma_3 \quad (\tilde{\mathbf{x}}_m' = 0) \quad \text{noktasının hızı sabit iken}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_f' = A'\tilde{\mathbf{x}}_m + A\tilde{\mathbf{x}}_m' + \tilde{\mathbf{m}}_f' = A'\tilde{\mathbf{x}}_m + \tilde{\mathbf{m}}_f' \quad (3.2.184)$$

burada (3.2.181) ve (3.2.182) denklemleri, (3.2.184) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}'_f &= A'(A^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_f + \tilde{\mathbf{m}}_m) + \tilde{\mathbf{m}}'_f \\
&= A'(A^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_f - A^{-1}\tilde{\mathbf{m}}_f) + \tilde{\mathbf{m}}'_f \\
\tilde{\mathbf{x}}'_f &= A'A^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_f + (\tilde{\mathbf{m}}'_f - A'A^{-1}\tilde{\mathbf{m}}_f)
\end{aligned} \tag{3.2.185}$$

bulunur. $A'A^{-1}$ Lorentziyen anlamda anti-simetrik matris olup,

$$A'A^{-1} + A(A^{-1})' = 0. \tag{3.2.186}$$

$\omega = A'A^{-1}$ alınırsa (3.2.186) denklemi

$$\omega + \omega' = 0 \tag{3.2.187}$$

şeklinde kısıtlanabilir. Böylece (3.2.185) denklemi

$$\tilde{\mathbf{x}}'_f = \omega\tilde{\mathbf{x}}_f + (\tilde{\mathbf{m}}'_f - \omega\tilde{\mathbf{m}}_f) \tag{3.2.188}$$

formunda yeniden yazılabilir. Bu denklemin bir sonucu olarak,

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t) = \omega(t) + \omega^*(t) \tag{3.2.189}$$

dual vektörü vardır burada,

$$\omega\mathbf{x}_f = \omega \times \mathbf{x}_f; \quad \omega^* = (\mathbf{m}' - \omega \times \mathbf{m}). \tag{3.2.190}$$

Şimdi basit bir örnek ile yukarıdaki durumları açıklayalım. Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketini incelemek için

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cosh \bar{\theta} & -\sinh \bar{\theta} & 0 \\ -\sinh \bar{\theta} & \cosh \bar{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \cosh \bar{\varphi} & 0 & -\sinh \bar{\varphi} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \bar{\varphi} & 0 & \cosh \bar{\varphi} \end{pmatrix} \tag{3.2.191}$$

ve $\bar{\theta} = \bar{\varphi}$, $\theta^* = \varphi^* = 0$ olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} \cosh^2 \varphi & -\sinh \varphi & -\cosh \varphi \sinh \varphi \\ -\sinh \varphi \cosh \varphi & \cosh \varphi & \sinh^2 \varphi \\ -\sinh \varphi & 0 & \cosh \varphi \end{pmatrix} \quad (3.2.192)$$

Lorentziyen anlamda ortogonal matrisini ele alalım. Lorentziyen anlamda anti-simetrik matris olarak $\mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$m(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \sinh \varphi \\ 0 & 0 & -\mu \cosh \varphi \\ \mu \sinh \varphi & \mu \cosh \varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.193)$$

matrisini alalım. $\tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{h}}_m, \tilde{\mathbf{h}}_f$ timelike vektörler olduğundan

$$\mathbf{m}(\varphi) = \begin{pmatrix} -\mu \cosh \varphi \\ \mu \sinh \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.194)$$

vektörü alınabilir. $\omega = A' A^{-1}$ olduğundan

$$\omega(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \cosh \varphi \sinh \varphi & -\cosh \varphi & -\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi \\ -\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi & \sinh \varphi & 2 \cosh \varphi \sinh \varphi \\ -\cosh \varphi & 0 & \sinh \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh^2 \varphi & \sinh \varphi \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 \\ \sinh \varphi \cosh \varphi & \sinh^2 \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}$$

$$\omega(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\cosh \varphi \\ -1 & 0 & \sinh \varphi \\ -\cosh \varphi & -\sinh \varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.195)$$

Lorentziyen anlamda anti-simetrik matrisi elde edilir. Böylece dönme hareketinin vektörü

$$\omega(\varphi) = \begin{pmatrix} \sinh \varphi \\ -\cosh \varphi \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.2.196)$$

olarak bulunur. (3.2.190) denkleminde öteleme hareketinin vektörü

$$\begin{aligned}\omega^*(\varphi) &= (\mathbf{m}' - \omega \times \mathbf{m}) = \begin{pmatrix} -\mu \sinh \varphi \\ \mu \cosh \varphi \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \sinh \varphi \\ -\mu \cosh \varphi \\ \mu \end{pmatrix} \\ \omega^*(\varphi) &= \begin{pmatrix} -2\mu \sinh \varphi \\ 2\mu \cosh \varphi \\ -\mu \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.2.197)$$

olarak bulunur. Böylece, her φ anında, Σ_3 / Σ_2 1-parametrelili Lorentziyen küresel hareketinin Pfaff vektörü,

$$\tilde{\Omega}(\varphi) = \omega(\varphi) + \varepsilon \omega^*(\varphi) = \begin{pmatrix} \sinh \varphi - 2\varepsilon\mu \sinh \varphi \\ -\cosh \varphi + 2\varepsilon\mu \cosh \varphi \\ -1 - \varepsilon\mu \end{pmatrix}\quad (3.2.198)$$

olarak bulunur. Teo. 3.1.1 den sabit eksen yüzeyi

$$\tilde{q}_f(\varphi) = \frac{\tilde{\Omega}}{\|\tilde{\Omega}\|} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\varepsilon\mu}} \begin{pmatrix} \sinh \varphi - 2\varepsilon\mu \sinh \varphi \\ -\cosh \varphi + 2\varepsilon\mu \cosh \varphi \\ -1 - \varepsilon\mu \end{pmatrix}\quad (3.2.199)$$

olarak bulunur.

Böylece, Σ_3 hareketli birim dual Lorentziyen küresinde hareketli pol eğrisi

$$\Omega_m = \frac{dM^{-1}}{d\varphi} \cdot M; \quad M = (A + \varepsilon mA)\quad (3.2.200)$$

ile tanımlanır. Burada

$$M = \begin{pmatrix} \cosh^2 \varphi + \varepsilon\mu(-\sinh^2 \varphi) & -\sinh \varphi & -\sinh \varphi \cosh \varphi + \varepsilon\mu(\sinh \varphi \cosh \varphi) \\ -\sinh \varphi \cosh \varphi + \varepsilon\mu(\sinh \varphi \cosh \varphi) & \cosh \varphi & \sinh^2 \varphi - \varepsilon\mu(\cosh^2 \varphi) \\ -\sinh \varphi & \varepsilon\mu & \cosh \varphi \end{pmatrix}$$

olup

$$\Omega_m = \begin{pmatrix} 0 & \cosh \varphi & 1 - \varepsilon\mu \\ \cosh \varphi & 0 & -\sinh \varphi \\ 1 - \varepsilon\mu & \sinh \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece

$$\tilde{\Omega}_m(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sinh \varphi \\ 1 - \varepsilon\mu \\ \cosh \varphi \end{pmatrix} \quad (3.2.201)$$

olur. Hareketli eksen yüzeyi de

$$\tilde{q}_m(\varphi) = \frac{\tilde{\Omega}_m}{\|\tilde{\Omega}_m\|} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\varepsilon\mu}} \begin{pmatrix} -\sinh \varphi \\ 1 - \varepsilon\mu \\ \cosh \varphi \end{pmatrix} \quad (3.2.202)$$

biçiminde elde edilir.

Şimdi, $\tilde{q} = \tilde{q}_f(\varphi)$ sabit eksen yüzeyinin Blaschke invaryantlarını hesaplayalım.

Σ_3 / Σ_2 1-parametrel Lorentziyen küresel hareketi için (3.2.199) denkleminde,

$$\tilde{\Omega}_f(\varphi) = \bar{\Omega} \tilde{q}(\varphi); \quad \bar{\Omega} = \sqrt{2 - 2\varepsilon\mu}. \quad (3.2.203)$$

(3.2.203) denkleminin her iki tarafının φ ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\Omega}_f}{d\varphi} &= \tilde{\Omega}_f' = \bar{\Omega}' \tilde{q} + \bar{\Omega} \tilde{q}' \\ \tilde{\Omega}_f' &= \bar{\Omega}' \tilde{q} + \bar{k}_1 \bar{\Omega} \tilde{h} \end{aligned} \quad (3.2.204)$$

ve bu ifadenin türevini alıp (3.2.128) eşitliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_f'' &= \bar{\Omega}''\tilde{q} + \bar{\Omega}'\tilde{q}' + \bar{k}_1'\bar{\Omega}\tilde{h} + \bar{k}_1\bar{\Omega}'\tilde{h} + \bar{k}_1\bar{\Omega}\tilde{h}' \\
&= \bar{\Omega}''\tilde{q} + \bar{\Omega}'(\bar{k}_1\tilde{h}) + \bar{k}_1'\bar{\Omega}\tilde{h} + \bar{k}_1\bar{\Omega}'\tilde{h} + \bar{k}_1\bar{\Omega}(\bar{k}_1\tilde{q} + \bar{k}_{2f}\tilde{a}) \\
\tilde{\Omega}_f'' &= (\bar{\Omega}'' + \bar{k}_1^2\bar{\Omega})\tilde{q} + (2\bar{k}_1\bar{\Omega}' + \bar{k}_1'\bar{\Omega})\tilde{h} + (\bar{k}_1\bar{\Omega}\bar{k}_{2f})\tilde{a}
\end{aligned} \tag{3.2.205}$$

bulunur. (3.2.203) ve (3.2.204) denklemlerinin Lorentziyen vektörel çarpımları alınır

$$\tilde{\Omega}_f(\varphi) \times \tilde{\Omega}_f'(\varphi) = (\bar{\Omega}\tilde{q}) \times (\bar{\Omega}'\tilde{q} + \bar{k}_1\bar{\Omega}\tilde{h}) = -\bar{k}_1\bar{\Omega}^2\tilde{a} \tag{3.2.206}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\left\| \tilde{\Omega}_f(\varphi) \times \tilde{\Omega}_f'(\varphi) \right\|^2 = -\left\langle \tilde{\Omega}_f(\varphi), \tilde{\Omega}_f(\varphi) \right\rangle \left\langle \tilde{\Omega}_f'(\varphi), \tilde{\Omega}_f'(\varphi) \right\rangle + \left(\left\langle \tilde{\Omega}_f(\varphi), \tilde{\Omega}_f'(\varphi) \right\rangle \right)^2 \tag{3.2.207}$$

ve

$$\left\| \tilde{\Omega}_f(\varphi) \times \tilde{\Omega}_f'(\varphi) \right\|^2 = -\left\langle \bar{\Omega}\tilde{q}, \bar{\Omega}\tilde{q} \right\rangle \left\langle \bar{\Omega}'\tilde{q} + \bar{k}_1\bar{\Omega}\tilde{h}, \bar{\Omega}'\tilde{q} + \bar{k}_1\bar{\Omega}\tilde{h} \right\rangle + \left(\left\langle \bar{\Omega}\tilde{q}, \bar{\Omega}'\tilde{q} + \bar{k}_1\bar{\Omega}\tilde{h} \right\rangle \right)^2 = \bar{k}_1^2\bar{\Omega}^4 \tag{3.2.208}$$

den

$$\det(\tilde{\Omega}_f, \tilde{\Omega}_f', \tilde{\Omega}_f'') = -\left\langle \tilde{\Omega}_f \times \tilde{\Omega}_f', \tilde{\Omega}_f'' \right\rangle \tag{3.2.209}$$

$$\det(\tilde{\Omega}_f, \tilde{\Omega}_f', \tilde{\Omega}_f'') = \bar{k}_1^2\bar{\Omega}^3\bar{k}_{2f} \tag{3.2.210}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.2.198) denkleminde,

$$\tilde{\Omega}_f'(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh \varphi - 2\varepsilon\mu \cosh \varphi \\ -\sinh \varphi + 2\varepsilon\mu \sinh \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.211}$$

ve

$$\tilde{\mathbf{Q}}_f''(\varphi) = \begin{pmatrix} \sinh \varphi - 2\varepsilon\mu \sinh \varphi \\ -\cosh \varphi + 2\varepsilon\mu \cosh \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.212)$$

bulunur. (3.2.198) ve (3.2.211) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\mathbf{Q}}_f(\varphi), \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi) \right\rangle = & (-\sinh \varphi \cosh \varphi + \sinh \varphi \cosh \varphi) + \varepsilon\mu(2 \sinh \varphi \cosh \varphi + 2 \sinh \varphi \cosh \varphi \\ & - 2 \sinh \varphi \cosh \varphi - 2 \sinh \varphi \cosh \varphi) \end{aligned}$$

veya

$$\left\langle \tilde{\mathbf{Q}}_f(\varphi), \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi) \right\rangle = 0 \quad (3.2.213)$$

bulunur. (3.2.213) nin her iki tarafının karesi alınırsa

$$\left(\left\langle \tilde{\mathbf{Q}}_f(\varphi), \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi) \right\rangle \right)^2 = 0 \quad (3.2.214)$$

bulunur. Ayrıca,

$$\left\langle \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi), \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi) \right\rangle = -\cosh^2 \varphi + \sinh^2 \varphi + 2\varepsilon\mu(2 \cosh^2 \varphi - 2 \sinh^2 \varphi)$$

dan

$$\left\langle \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi), \tilde{\mathbf{Q}}_f'(\varphi) \right\rangle = -1 + 4\varepsilon\mu \quad (3.2.215)$$

bulunur. (3.2.198), (3.2.214) ve (3.2.215) denklemleri, (3.2.207) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -(2 - 2\varepsilon\mu)(-1 + 4\varepsilon\mu) &= \bar{k}_1^2 \bar{\Omega}^4 \\ -(-2 + 10\varepsilon\mu) &= \bar{k}_1^2 (4 - 8\varepsilon\mu) \\ \Rightarrow \bar{k}_1^2 &= \frac{2 - 10\varepsilon\mu}{4 - 8\varepsilon\mu} = \frac{1 - 5\varepsilon\mu}{2 - 4\varepsilon\mu} \\ &\quad (2 + 4\varepsilon\mu) \end{aligned}$$

$$(k_1 + \varepsilon k_1^*)^2 = \frac{2 - 6\varepsilon\mu}{4}$$

$$k_1^2 + 2\varepsilon k_1 k_1^* = \frac{1 - 3\varepsilon\mu}{2}$$

elde edilir. Son eşitlik reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$k_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad k_1^* = \pm \frac{3\sqrt{2}\mu}{4} \quad (3.2.216)$$

bulunur. (3.2.127) denkleminde $\lambda := \lambda_m = \lambda_f = \frac{k_1^*}{k_1}$ olduğundan eksen yüzeyinin dağılma parametresi

$$\lambda = \pm \frac{3\mu}{2} \quad (3.2.217)$$

bulunur. (3.2.198), (3.2.211) ve (3.2.212) denklemleri, (3.2.210) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{\mathbf{Q}}_f \times \tilde{\mathbf{Q}}_f' = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & -\vec{e}_2 & -\vec{e}_3 \\ \sinh \varphi - 2\varepsilon\mu \sinh \varphi & -\cosh \varphi + 2\varepsilon\mu \cosh \varphi & -1 - \varepsilon\mu \\ \cosh \varphi - 2\varepsilon\mu \cosh \varphi & -\sinh \varphi + 2\varepsilon\mu \sinh \varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_f \times \tilde{\mathbf{Q}}_f' = [(-\sinh \varphi + \varepsilon\mu(-\sinh \varphi + 2 \sinh \varphi)), (\cosh \varphi + \varepsilon\mu(-2 \cosh \varphi + \cosh \varphi), (-1 - 4\varepsilon\mu)]$$

$$\langle \tilde{\mathbf{Q}}_f \times \tilde{\mathbf{Q}}_f', \tilde{\mathbf{Q}}_f'' \rangle = -1 + 3\varepsilon\mu \quad (3.2.218)$$

bulunur. Böylece (3.2.210) ve (3.2.218) denklemlerinden

$$\det(\tilde{\mathbf{Q}}_f, \tilde{\mathbf{Q}}_f', \tilde{\mathbf{Q}}_f'') = 1 - 3\varepsilon\mu = \bar{k}_1^2 \bar{\Omega}^3 \bar{k}_{2f} \quad (3.2.219)$$

bulunur.

$$1 - 3\varepsilon\mu = \frac{1 - 3\varepsilon\mu}{2} \cdot (2 - 2\varepsilon\mu) \cdot \sqrt{2 - 2\varepsilon\mu} \cdot \bar{k}_{2f}$$

ve

$$\bar{k}_{2f} = \frac{1}{(1 - \varepsilon\mu)(\sqrt{2} - \varepsilon\mu \frac{\sqrt{2}}{2})}$$

bulunur. Böylece,

$$\bar{k}_{2f} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon\mu \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad (3.2.220)$$

elde edilir. (3.2.220) denklemi reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$k_{2f} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad k_{2f}^* = \mu \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad (3.2.221)$$

bulunur. (3.2.126) denkleminde $\bar{k}_{2f} - \bar{k}_{2m} = \tilde{\Omega}_f$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \bar{k}_{2m} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon\mu \frac{3\sqrt{2}}{4} \right) - \left(\sqrt{2} - \varepsilon\mu \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon\mu \frac{5\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

olup reel ve dual kısımları

$$k_{2m} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad k_{2m}^* = \mu \frac{5\sqrt{2}}{4} \quad (3.2.222)$$

elde edilir.

Böylece eksen yüzeylerinin integral invariantlarının reel ve dual kısımları elde edilir.

IV. BÖLÜM

DUAL LORENTZİYEN UZAYDA DİSTELİ DİYAGRAMI

Bu bölümde, dual Lorentziyen uzayda hiperbolik ve Lorentziyen hareketler için Disteli diyagramı incelenecektir. Bu diyagramlar, birim dual timelike vektör ile verilen dual hiperbolik hareketin ani vida eksenini için timelike Disteli diyagramı, birim dual spacelike vektör ile verilen dual Lorentziyen hareketin ani vida eksenini için spacelike Disteli diyagramı olarak adlandırıldı. Diyagramlar, Lorentziyen uzayda vida dişlilerinin bir parçasının açısal hızı, konumu ve vida hareketinin adımı aralarındaki bağıntıları verir.

4.1. Dual Hiperbolik Küresel Hareketin Disteli Diyagramı

$\{O; \vec{q}_m, \vec{h}_m, \vec{a}_m\}$, L_3 hareketli uzayda Lorentziyen anlamda ortonormal koordinat sistemi ve $\{O'; \vec{q}_f, \vec{h}_f, \vec{a}_f\}$, L_2 sabit uzayda Lorentziyen anlamda ortonormal koordinat sistemleri olsunlar, burada $\vec{q}_m$ ve $\vec{q}_f$ vektörlerini timelike vektörler olarak kabul edelim. L_3 / L_2 hareketini incelemek için L_1 izafi uzayın çatısı olan $\{Q; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ortonormal izafi koordinat sistemini alalım. Lorentziyen uzaylarda transfer prensibine göre, Σ_1, Σ_2 and Σ_3 aynı O merkezli birim dual hiperbolik kürelerin noktaları $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $\{O; \vec{q}_f, \vec{h}_f, \vec{a}_f\}$ ve $\{O; \vec{q}_m, \vec{h}_m, \vec{a}_m\}$ dual ortonormal sistemleri ile ifade edilebilir. Böylece L_1 / L_2 , L_1 / L_3 ve L_3 / L_2 hareketleri sırasıyla Σ_1 / Σ_2 , Σ_1 / Σ_3 ve Σ_3 / Σ_2 birim dual hiperbolik küresel hareketler olarak göz önüne alınabilir.

Σ_3 hareketli birim dual hiperbolik küresi,

$$\left\{ \vec{q}_m(\text{timelike}), \vec{h}_m = \frac{d\vec{q}_m}{\|d\vec{q}_m\|}, \vec{a}_m = \vec{q}_m \times \vec{h}_m \right\}, \vec{q}_m = \vec{q}_m + \varepsilon \vec{q}_m^*, \vec{h}_m = \vec{h}_m + \varepsilon \vec{h}_m^*, \vec{a}_m = \vec{a}_m + \varepsilon \vec{a}_m^*$$

dual ortonormal sistemi ile ve Σ_2 sabit birim dual hiperbolik küresi de

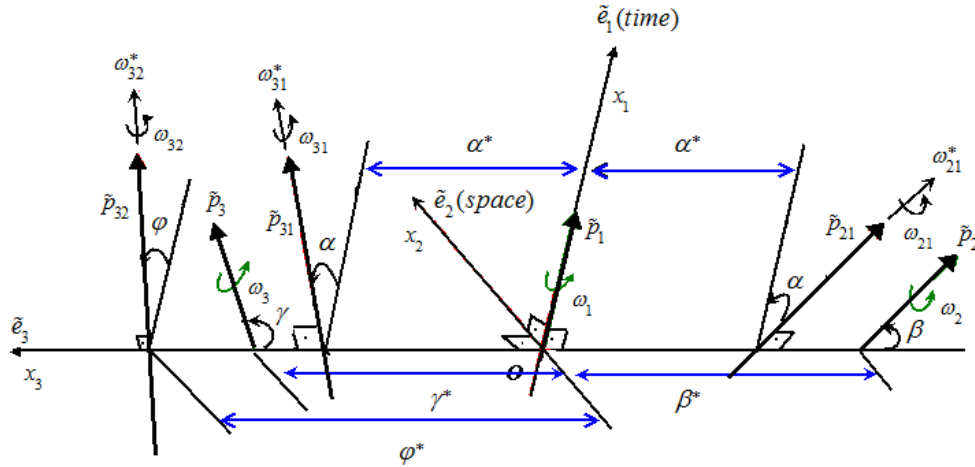
$$\left\{ \vec{q}_f(\text{timelike}), \vec{h}_f = \frac{d\vec{q}_f}{\|d\vec{q}_f\|}, \vec{a}_f = \vec{q}_f \times \vec{h}_f \right\}, \vec{q}_f = \vec{q}_f + \varepsilon \vec{q}_f^*, \vec{h}_f = \vec{h}_f + \varepsilon \vec{h}_f^*, \vec{a}_f = \vec{a}_f + \varepsilon \vec{a}_f^*$$

dual ortonormal sistemi ile üretilsin. Bu taktirde, Σ_3 dual küresel hareketin Σ_2 ye göre türev denklemleri

$$\begin{cases} d\tilde{q} = \bar{\kappa}\tilde{h} \\ d\tilde{h} = \bar{\kappa}\tilde{q} + \bar{\tau}\tilde{a} \\ d\tilde{a} = -\bar{\tau}\tilde{h}, \end{cases}$$

ile verilir burada $\bar{\kappa}(s) = \kappa(s) + \varepsilon\kappa^*(s)$, $\bar{\tau}(s) = \tau(s) + \varepsilon\tau^*(s)$, ($s \in IR$) sırasıyla dual eğrilik ve dual burulmadır. Lorentziyen uzayda transfer prensibinden, Σ_3 ün Σ_2 ye göre küresel hareketi boyunca Σ_3 dual birim hiperbolik küre üzerinde $\tilde{q}$ birim dual timelike vektörü bir eğri çizer ve bu dual eğri, $\mathbb{R}_1^3$ Lorentziyen çizgiler uzayında ana doğruları timelike olan bir timelike regle yüzeye karşılık [26].

Şekil 4.1.1 de verildiği gibi, Σ_1 dişli kutusunun $F(O; x_1, x_2, x_3)$ sabit çatısının x_1 eksenine ile çakışan $\tilde{p}_1$ eksenini etrafında döndüğünü, Σ_2 küçük dişlisinin x_1 ekseninden β^* uzaklığında ve x_1 eksenine ile β açısı yapan $\tilde{p}_2$ eksenini etrafında döndüğünü ve Σ_3 büyük dişlisinin x_1 ekseninden γ^* uzaklığında ve x_1 eksenine ile γ açısı yapan $\tilde{p}_3$ eksenini etrafında döndüğünü kabul edelim.

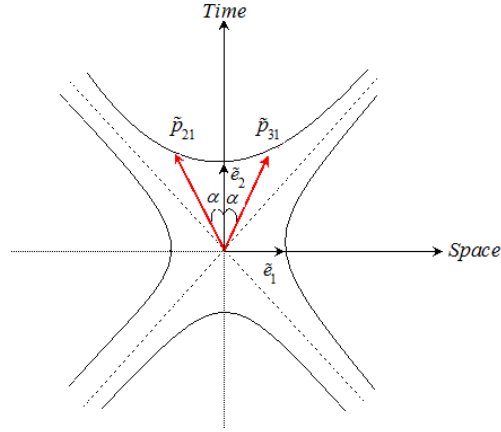


Şekil 4.1.1. Küçük ve büyük dişlinin $\tilde{p}_{21}, \tilde{p}_{31}$ timelike eksenleri ve $\tilde{p}_{32}$ izafi timelike eksen

$F(O; x_1, x_2, x_3)$ kartezyen koordinat sistemi için, $\tilde{e}_1$ birim dual timelike ve $\tilde{e}_2$ birim dual spacelike vektörlerine, sırasıyla, x_1 ve x_2 eksenleri karşılık gelir. $\tilde{p}_{21}$ ve $\tilde{p}_{31}$ sırasıyla Σ_1/Σ_2 ve Σ_1/Σ_3 dual hiperbolik hareketlerin ani vida eksenlerinin birim dual timelike vektörleridir ve bunların x_1 and x_2 eksenlerine göre simetrik olarak yerleştirildiğini kabul edelim. Böylece

$$\begin{cases} \tilde{p}_{21} = \tilde{e}_1 \cosh \bar{\alpha} - \tilde{e}_2 \sinh \bar{\alpha} \\ \tilde{p}_{31} = \tilde{e}_1 \cosh \bar{\alpha} + \tilde{e}_2 \sinh \bar{\alpha} \end{cases} \quad (4.1.1)$$

yazılabilir.



Şekil 4.1.2. Küçük dişlinin timelike ekseni $\tilde{p}_{21}$ ve büyük dişlinin timelike ekseni $\tilde{p}_{31}$

Vida durumunda $\alpha, \alpha^* \in \mathbb{R}$, $\alpha^* \neq 0$ olduğunu kabul edelim ve $\omega_{21}, \omega_{31} \in \mathbb{R}$, sırasıyla, Σ_1 dişli kutusuna göre Σ_2 küçük dişlisinin ve Σ_3 büyük dişlisinin açısal hızları olsun. Verilen Σ_1 , Σ_2 ve Σ_3 sistemleri için Σ_2/Σ_1 ve Σ_3/Σ_1 hareketlerinin ani vida eksenleri sırasıyla, $\tilde{q}_{21}$, $\tilde{q}_{31}$ dual vektörleri olsun. Σ_2 birim dual hiperbolik küresine göre Σ_3 birim dual hiperbolik kürenin hareketi Σ_3/Σ_2 ile verilir. Σ_3/Σ_2 hareketi, Σ_1/Σ_2 hareketi Σ_2/Σ_1 hareketinin tersi olmak üzere, Σ_1/Σ_2 ve Σ_3/Σ_1 hareketlerinin birleşiminden oluşur [28]. $\tilde{q}_{32}$, Σ_3/Σ_2 hareketinin ani vida ekseni olsun. Bu takdirde hareketlerin vidaları arasındaki bağıntı

$$\tilde{q}_{32} = \bar{\omega}_{32} \tilde{p}_{32} = \bar{\omega}_{31} \tilde{p}_{31} - \bar{\omega}_{21} \tilde{p}_{21}$$

ile verilir [28]. Dönme durumunu göz önüne aldığımızda, yani $\omega_{21}^* = \omega_{31}^* = 0$ ise $\tilde{\mathbf{q}}_{32} = \bar{\omega}_{32} \tilde{\mathbf{p}}_{32} = \omega_{31} \tilde{\mathbf{p}}_{31} - \omega_{21} \tilde{\mathbf{p}}_{21}$ olur ve aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.1. $\omega_{21}^* = \omega_{31}^* = 0$ koşulu altında Σ_3 / Σ_2 dual hiperbolik küresel hareketinin ani vida eksenini,

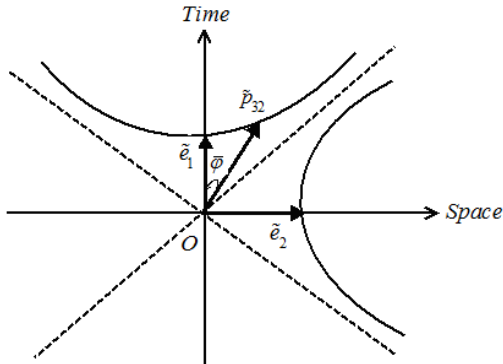
$$\tilde{\mathbf{q}}_{32} = (\omega_{31} - \omega_{21}) \cosh \bar{\alpha} \tilde{\mathbf{e}}_1 + (\omega_{31} + \omega_{21}) \sinh \bar{\alpha} \tilde{\mathbf{e}}_2, \quad (4.1.2)$$

ile verilir.

İspat. Ani vida ekseninin birim dual timelike vektörü $\tilde{\mathbf{p}}_{32}$

$$\tilde{\mathbf{p}}_{32} = \tilde{\mathbf{e}}_1 \cosh \bar{\varphi} + \tilde{\mathbf{e}}_2 \sinh \bar{\varphi},$$

ile verilir.



Şekil 4.1.3. Ani vida ekseninin birim dual timelike vektörü $\tilde{\mathbf{p}}_{32}$

Burada $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$, $\tilde{\mathbf{e}}_1$ ve $\tilde{\mathbf{p}}_{32}$ arasındaki dual hiperbolik açıdır. Aynı zamanda, Σ_3 / Σ_2 relatif hareketin vidası $\tilde{\mathbf{q}}_{32}$, ani vida ekseninin birim dual timelike vektörü $\tilde{\mathbf{p}}_{32}$ ve ω_{32} açısal hız ve ω_{32}^* öteleme hızı olacak şekilde dual açısal hız olan $\bar{\omega}_{32} = \omega_{32} + \varepsilon \omega_{32}^*$ nin çarpımından oluşur. Böylece,

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_{32} &= \bar{\omega}_{32} \tilde{p}_{32} = \bar{\omega}_{32} (\tilde{e}_1 \cosh \bar{\varphi} + \tilde{e}_2 \sinh \bar{\varphi}) = \omega_{31} \tilde{p}_{31} - \omega_{21} \tilde{p}_{21} \\
&= \bar{\omega}_{32} \tilde{e}_1 \cosh \bar{\varphi} + \bar{\omega}_{32} \tilde{e}_2 \sinh \bar{\varphi} = \omega_{31} (\cosh \bar{\alpha} \tilde{e}_1 + \sinh \bar{\alpha} \tilde{e}_2) - \omega_{21} (\cosh \bar{\alpha} \tilde{e}_1 - \sinh \bar{\alpha} \tilde{e}_2) \\
&= \omega_{31} \cosh \bar{\alpha} \tilde{e}_1 + \omega_{31} \sinh \bar{\alpha} \tilde{e}_2 - \omega_{21} \cosh \bar{\alpha} \tilde{e}_1 + \omega_{21} \sinh \bar{\alpha} \tilde{e}_2 \\
&= (\omega_{31} - \omega_{21}) \cosh \bar{\alpha} \tilde{e}_1 + (\omega_{31} + \omega_{21}) \sinh \bar{\alpha} \tilde{e}_2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.2. Σ_3/Σ_2 dual hiperbolik izafi hareketin $\tilde{p}_{32}$ ani vida ekseninin x_1 eksenine uzaklığı φ açısı cinsinden

$$\varphi^* = \frac{\alpha^*}{\sinh 2\alpha} \sinh 2\varphi = R \sinh 2\varphi = 2R \sinh \varphi \cosh \varphi \quad (4.1.3)$$

ile verilir.

İspat. Denklem (4.1.2) de verilen $\tilde{e}_1$ ve $\tilde{e}_2$ katsayıları karşılaştırıldığında

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{32} \cosh \bar{\varphi} = (\omega_{31} - \omega_{21}) \cosh \bar{\alpha}, \\ \bar{\omega}_{32} \sinh \bar{\varphi} = (\omega_{31} + \omega_{21}) \sinh \bar{\alpha}. \end{cases} \quad (4.1.4)$$

eşitliği bulunur. $\bar{\omega}_{32}$ yi yok etmek için ilk denklem $(-\sinh \bar{\varphi})$ ile ikinci denklem $(\cosh \bar{\varphi})$ ile çarpıldığında

$$\begin{aligned}
(\omega_{31} + \omega_{21}) \sinh \bar{\alpha} \cosh \bar{\varphi} - (\omega_{31} - \omega_{21}) \sinh \bar{\varphi} \cosh \bar{\alpha} &= 0 \\
\omega_{21} (\sinh \bar{\alpha} \cosh \bar{\varphi} + \sinh \bar{\varphi} \cosh \bar{\alpha}) + \omega_{31} (\sinh \bar{\alpha} \cosh \bar{\varphi} - \sinh \bar{\varphi} \cosh \bar{\alpha}) &= 0
\end{aligned}$$

ve bu denklem düzenlendiğinde

$$\omega_{21} \sinh(\bar{\alpha} + \bar{\varphi}) + \omega_{31} \sinh(\bar{\alpha} - \bar{\varphi}) = 0 \quad (4.1.5)$$

bulunur. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ sabiti için

$$\omega_{21} = -\lambda \sinh(\alpha - \varphi), \quad \omega_{31} = \lambda \sinh(\alpha + \varphi) \quad (4.1.6)$$

reel katsayıları alalım. (4.1.5) denklemi reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\begin{aligned}\omega_{21} \sinh((\alpha + \varphi) + \varepsilon(\alpha^* + \varphi^*)) + \omega_{31} \sinh((\alpha - \varphi) + \varepsilon(\alpha^* - \varphi^*)) &= 0, \\ \omega_{21} [\sinh(\alpha + \varphi) + \varepsilon(\alpha^* + \varphi^*) \cosh(\alpha + \varphi)] + \omega_{31} [\sinh(\alpha - \varphi) + \varepsilon(\alpha^* - \varphi^*) \cosh(\alpha - \varphi)] &= 0, \\ \omega_{21} \sinh(\alpha + \varphi) + \omega_{31} \sinh(\alpha - \varphi) + \varepsilon[\omega_{21}(\alpha^* + \varphi^*) \cosh(\alpha + \varphi) + \omega_{31}(\alpha^* - \varphi^*) \cosh(\alpha - \varphi)] &= 0,\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Dual kısım,

$$\omega_{21}(\alpha^* + \varphi^*) \cosh(\alpha + \varphi) + \omega_{31}(\alpha^* - \varphi^*) \cosh(\alpha - \varphi) = 0$$

olup bu eşitlikte (4.1.6) denklemi yazılırsa

$$-(\alpha^* + \varphi^*) \sinh(\alpha - \varphi) \cosh(\alpha + \varphi) + (\alpha^* - \varphi^*) \sinh(\alpha + \varphi) \cosh(\alpha - \varphi) = 0$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}&-(\alpha^* + \varphi^*) \sinh(\alpha - \varphi) \cosh(\alpha + \varphi) + (\alpha^* - \varphi^*) \sinh(\alpha + \varphi) \cosh(\alpha - \varphi) = 0, \\ &\alpha_0 (\sinh(\alpha + \varphi) \cosh(\alpha - \varphi) - \sinh(\alpha - \varphi) \cosh(\alpha + \varphi)) \\ &-\varphi_0 (\sinh(\alpha - \varphi) \cosh(\alpha + \varphi) + \sinh(\alpha + \varphi) \cosh(\alpha - \varphi)) = 0\end{aligned}$$

veya

$$\alpha^* \sinh 2\varphi - \varphi^* \sinh 2\alpha = 0$$

bulunur. Burada,

$$R = \frac{\alpha^*}{\sinh 2\alpha} \tag{4.1.7}$$

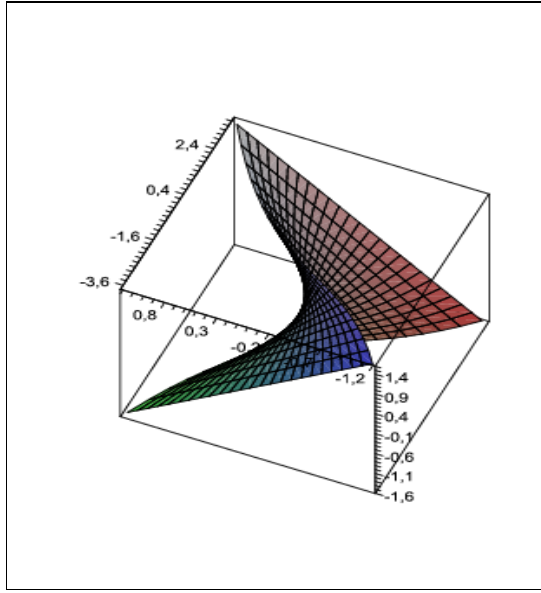
olduğundan

$$\varphi^* = \frac{\alpha^*}{\sinh 2\alpha} \sinh 2\varphi = R \sinh 2\varphi = 2R \sinh \varphi \cosh \varphi$$

bulunur. $\tilde{p}_{32}$ relatif ekseninin x_3 koordinatı φ^* a eşittir. Bütün izafi eksenlerin geometrik yeri

$$x_3 = 2R \cosh \varphi \sinh \varphi = 2R \frac{x_1 x_2}{x_2^2 - x_1^2} \quad (4.1.8)$$

denklemleri ile verilir ve bunu timelike Plücker konoidi olarak isimlendiririz. $\varphi \cong \pm 0,785$ ile bulunan, iki ana doğru arasındaki $2R$ uzaklığı, Ψ timelike Plücker konoidinin çapı olarak adlandırılır.



Şekil 4.1.4. Timelike Plücker konoidi

Teorem 4.1.3. Σ_3/Σ_2 dual hiperbolik izafi hareketin adımı

$$h_{32} = \frac{\omega_{32}^*}{\omega_{32}} = R(\cosh 2\alpha - \cosh 2\varphi) \quad (4.1.9)$$

ile verilir.

İspat. (4.1.4) denklemi, sırasıyla, $(\cosh \bar{\varphi})$ ve $(-\sinh \bar{\varphi})$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{32} &= (\omega_{31} - \omega_{21}) \cosh \bar{\alpha} \cosh \bar{\varphi} - (\omega_{31} + \omega_{21}) \sinh \bar{\alpha} \sinh \bar{\varphi} \\ &= \omega_{31} (\cosh \bar{\alpha} \cosh \bar{\varphi} - \sinh \bar{\alpha} \sinh \bar{\varphi}) - \omega_{21} (\cosh \bar{\alpha} \cosh \bar{\varphi} + \sinh \bar{\alpha} \sinh \bar{\varphi}) \end{aligned}$$

$$\bar{\omega}_{32} = \omega_{31} \cosh(\bar{\alpha} - \bar{\varphi}) - \omega_{21} \cosh(\bar{\alpha} + \bar{\varphi}) \quad (4.1.10)$$

bulunur. (4.1.10) denklemi reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{32} &= \omega_{31} [\cosh((\alpha - \varphi) + \varepsilon(\alpha^* - \varphi^*))] - \omega_{21} [\cosh((\alpha + \varphi) + \varepsilon(\alpha^* + \varphi^*))] \\ &= \omega_{31} [\cosh(\alpha - \varphi) + \varepsilon(\alpha^* - \varphi^*) \sinh(\alpha - \varphi)] - \omega_{21} [\cosh(\alpha + \varphi) + \varepsilon(\alpha^* + \varphi^*) \sinh(\alpha + \varphi)] \\ &= \omega_{31} \cosh(\alpha - \varphi) - \omega_{21} \cosh(\alpha + \varphi) + \varepsilon[\omega_{31}(\alpha^* - \varphi^*) \sinh(\alpha - \varphi) - \omega_{21}(\alpha^* + \varphi^*) \sinh(\alpha + \varphi)] \end{aligned}$$

olup, denklemin reel kısmında (4.1.6) denklemi yerine yazılırsa

$$\omega_{32} = \lambda [\sinh(\alpha + \varphi) \cosh(\alpha - \varphi) + \sinh(\alpha - \varphi) \cosh(\alpha + \varphi)] = \lambda \sinh 2\alpha, \quad (4.1.11)$$

bulunur. (4.1.10) denkleminin dual kısmı,

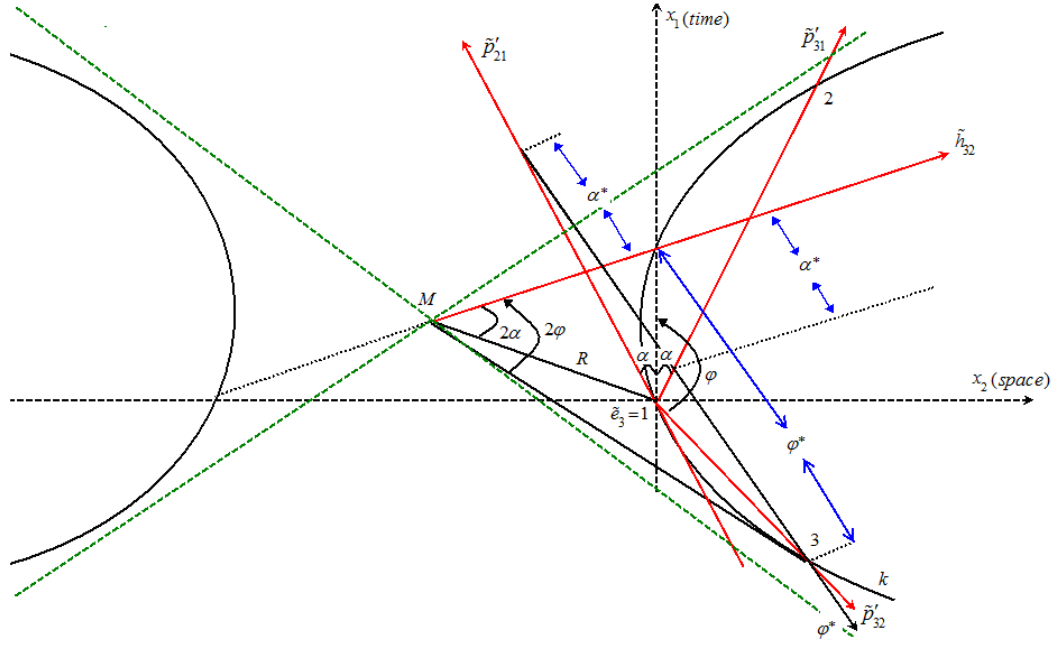
$$\begin{aligned} \omega_{32}^* &= \omega_{31}(\alpha^* - \varphi^*) \sinh(\alpha - \varphi) - \omega_{21}(\alpha^* + \varphi^*) \sinh(\alpha + \varphi) \\ &= \lambda[(\alpha^* - \varphi^*) \sinh(\alpha + \varphi) \sinh(\alpha - \varphi) + (\alpha^* + \varphi^*) \sinh(\alpha - \varphi) \sinh(\alpha + \varphi)] \\ &= 2\lambda\alpha^* \sinh(\alpha + \varphi) \sinh(\alpha - \varphi) = \lambda\alpha^* (\cosh 2\alpha - \cosh 2\varphi) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Son olarak h_{32} adımı

$$h_{32} = \frac{\omega_{32}^*}{\omega_{32}} = \frac{\lambda\alpha_0 (\cosh 2\alpha - \cosh 2\varphi)}{\lambda \sinh 2\alpha} = R(\cosh 2\alpha - \cosh 2\varphi) \quad (4.1.12)$$

eşitliği ile verilir. Denklem (4.1.3) ve (4.1.9) Lorentziyen uzaysal harekette pure dönmelerin Disteli diyagramının temelini oluşturur.

Lorentziyen uzaysal harekette pure dönmelerin Disteli diyagramı h_{32} adımı, φ açısı ve φ^* uzaklığı ile ω_{21} ve ω_{31} açısal hızlar arasındaki bağıntıyı açıklar. (Şekil. 4.1.5)



Şekil 4.1.5. Dual hiperbolik küresel hareketin Disteli diyagramı

Bu diyagram, $\tilde{p}_{21}$ ve $\tilde{p}_{31}$ arasındaki ortak normal olan $\tilde{e}_3$ nın doğrultusundaki izdüşüme dayanır. $\tilde{p}'_{21}$, $\tilde{p}'_{31}$ doğrularının kesiştiği $\tilde{e}_3 = 1$ noktasında aralarındaki açı 2α dır. İzafi eksenin $\tilde{p}'_{32}$ izdüşümü, $p_{32} = \omega_{31}p_{31} - \omega_{21}p_{21}$ fark vektörünün doğrultusuna sahiptir. Hareketin özelliklerini vermek için $\tilde{e}_3$ dan geçen Lorentz k çemberi kullanılacaktır. $\tilde{p}'_{21}$, $\tilde{p}'_{31}$ bu çemberi, sırasıyla, 1 ve 2 noktasında kessin ve $2\alpha^*$ uzaklığında bulunsunlar. Böylece k ve $\tilde{p}'_{32}$, 3 noktasında kesişirler ve bu nokta, $\tilde{h}_{32}$ vektörüne φ^* uzaklığındadır. Bu diyagram, (4.1.3) ve (4.1.9) denklemlerinin ve Lorentziyen trigonometride merkez açı teoreminin bir sonucudur.

4.1.1. Dual Hiperbolik Küresel Harekette Disteli Diyagramının Genel Durumu

Bu kesimde daha genel durum olarak Σ_2 ve Σ_3 ün Σ_1 dual hiperbolik küresine göre hareketlerini helisel kabul edelim. Bu hareketlerin dual açısal hızları, sırasıyla, $\bar{\omega}_{21}$ ve $\bar{\omega}_{31}$ olsun. Böylece, ω_{21}/ω_{31} oranı değişirken adımlar

$$h_{21} = \omega_{21}^*/\omega_{21}, \quad h_{31} = \omega_{31}^*/\omega_{31} \quad (4.1.13)$$

olacak şekilde sabittir. Σ_3/Σ_2 izafi hareketin $\tilde{p}_{32}$ timelike eksenini timelike regle yüzeyi tarar.

Burada dual hiperbolik küresel hareketin bir Disteli diyagramı vardır.

(4.1.5) denkleminin dual benzeri olan

$$\bar{\omega}_{21} \sinh(\bar{\alpha} + \bar{\varphi}) + \bar{\omega}_{31} \sinh(\bar{\alpha} - \bar{\varphi}) = 0 \quad (4.1.14)$$

denklemini alınsın. (4.1.14) denklemini reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\begin{aligned} &(\omega_{21} + \varepsilon \omega_{21}^*) [\sinh(\alpha + \varphi) + \varepsilon(\alpha^* + \varphi^*) \cosh(\alpha + \varphi)] \\ &+ (\omega_{31} + \varepsilon \omega_{31}^*) [\sinh(\alpha - \varphi) + \varepsilon(\alpha^* - \varphi^*) \cosh(\alpha - \varphi)] = 0 \end{aligned}$$

olup, reel kısım

$$\omega_{21} \sinh(\alpha + \varphi) + \omega_{31} \sinh(\alpha - \varphi) = 0$$

ve dual kısım

$$\begin{aligned} &\omega_{021} \sinh(\alpha + \varphi) + \omega_{21}(\alpha^* + \varphi^*) \cosh(\alpha + \varphi) \\ &+ \omega_{031} \sinh(\alpha - \varphi) + \omega_{31}(\alpha^* - \varphi^*) \cosh(\alpha - \varphi) = 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. (4.1.13) eşitlikleri bu denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &\omega_{21} [h_{21} \sinh(\alpha + \varphi) + (\alpha^* + \varphi^*) \cosh(\alpha + \varphi)] \\ &+ \omega_{31} [h_{31} \sinh(\alpha - \varphi) + (\alpha^* - \varphi^*) \cosh(\alpha - \varphi)] = 0 \end{aligned}$$

bulunur. (4.1.6) denklemindeki ω_{21} ve ω_{31} açısal hızları göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} &\lambda [-h_{21} \sinh(\alpha - \varphi) \sinh(\alpha + \varphi) + h_{31} \sinh(\alpha - \varphi) \sinh(\alpha + \varphi) \\ &- (\alpha^* + \varphi^*) \sinh(\alpha - \varphi) \cosh(\alpha + \varphi) + (\alpha^* - \varphi^*) \sinh(\alpha + \varphi) \cosh(\alpha - \varphi)] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\frac{1}{2} (h_{21} - h_{31}) (\cosh 2\alpha - \cosh 2\varphi) + \alpha^* \sinh 2\varphi - \varphi^* \sinh 2\alpha = 0$$

elde edilir. Bu denklem düzenirse

$$\varphi^* = \frac{\alpha^* \sinh 2\varphi}{\sinh 2\alpha} + \frac{h_{31} - h_{21}}{2 \sinh 2\alpha} (\cosh 2\alpha - \cosh 2\varphi),$$

bulunur ve (4.1.7) denklemi bu denklemde yerine yazılırsa (4.1.3) denkleminin genelleştirilmiş olan

$$\varphi^* = R \sinh 2\varphi + \frac{h_{31} - h_{21}}{2 \sinh 2\alpha} (\cosh 2\alpha - \cosh 2\varphi) \quad (4.1.15)$$

denklemi elde edilir. Diğer taraftan, (4.1.10) denkleminin dual benzeri olan

$$\bar{\omega}_{32} = \bar{\omega}_{31} \cosh(\bar{\alpha} - \bar{\varphi}) - \bar{\omega}_{21} \cosh(\bar{\alpha} + \bar{\varphi}) \quad (4.1.16)$$

denklemi alınsın. (4.1.16) denklemi reel ve dual kısımlara ayrılırsa,

$$\begin{aligned} \omega_{32} + \varepsilon \omega_{32}^* &= (\omega_{31} + \varepsilon \omega_{31}^*) (\cosh(\alpha - \varphi) + \varepsilon(\alpha^* - \varphi^*) \sinh(\alpha - \varphi)) \\ &\quad - (\omega_{21} + \varepsilon \omega_{21}^*) (\cosh(\alpha + \varphi) + \varepsilon(\alpha^* + \varphi^*) \sinh(\alpha + \varphi)) \end{aligned}$$

olup, reel kısım

$$\omega_{32} = \omega_{31} \cosh(\alpha - \varphi) - \omega_{21} \cosh(\alpha + \varphi)$$

bulunur. (4.1.6) denklemi bu denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \omega_{32} &= \lambda [\sinh(\alpha + \varphi) \cosh(\alpha - \varphi) + \sinh(\alpha - \varphi) \cosh(\alpha + \varphi)] \\ &= \lambda \left[\frac{1}{2} (\sinh 2\alpha + \sinh 2\varphi) + (\sinh 2\alpha - \sinh 2\varphi) \right] \\ &= \lambda \sinh 2\alpha \end{aligned}$$

bulunur. (4.1.6) denklemi dual kısımda yazılırsa

$$\begin{aligned}
\omega_{32}^* &= \omega_{31}^* \cosh(\alpha - \varphi) + \omega_{31}(\alpha^* - \varphi^*) \sinh(\alpha - \varphi) \\
&\quad - \omega_{21}^* \cosh(\alpha + \varphi) + \omega_{21}(\alpha^* + \varphi^*) \sinh(\alpha + \varphi) \\
&= \lambda [\sinh(\alpha + \varphi) [h_{31} \cosh(\alpha - \varphi) + (\alpha^* - \varphi^*) \sinh(\alpha - \varphi)] \\
&\quad + \sinh(\alpha - \varphi) [h_{21} \cosh(\alpha + \varphi) + (\alpha^* + \varphi^*) \sinh(\alpha + \varphi)] \\
&= \lambda \left[\frac{1}{2} h_{31} (\sinh 2\alpha + \sinh 2\varphi) + \frac{1}{2} h_{21} (\sinh 2\alpha - \sinh 2\varphi) + \alpha_0 (\cosh 2\alpha - \cosh 2\varphi) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, (4.1.9) denkleminin genel hali olan

$$h_{32} = \frac{\omega_{32}^*}{\omega_{32}} = \frac{1}{2} (h_{21} + h_{31}) + \frac{h_{31} - h_{21}}{2 \sinh 2\alpha} \sinh 2\varphi + R (\cosh 2\alpha - \cosh 2\varphi) \quad (4.1.17)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$S = \frac{h_{31} - h_{21}}{2 \sinh 2\alpha}$$

alınırsa, (4.1.15) ve (4.1.17) denklemleri

$$\begin{cases} \varphi^* = -S \cosh 2\varphi + R \sinh 2\varphi + S \cosh 2\alpha \\ h_{32} = S \sinh 2\varphi - R \cosh 2\varphi + R \cosh 2\alpha + \frac{1}{2} (h_{31} + h_{21}) \end{cases} \quad (4.1.18)$$

biçiminde yazılabilir. Daha sonra, R ve S yerine, T ve ψ cinsinden

$$S = -T \sinh \psi, \quad R = T \cosh \psi \quad (4.1.19)$$

değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\varphi^* &= T \cosh \psi \sinh 2\varphi - T \sinh \psi \cosh 2\alpha + T \sinh \psi \cosh 2\varphi \\
&= T \left(\frac{1}{2} (\sinh(\psi + 2\varphi) - \sinh(\psi - 2\varphi)) - T \sinh \psi \cosh 2\alpha \right. \\
&\quad \left. + T \left(\frac{1}{2} (\sinh(\psi + 2\varphi) - \sinh(\psi - 2\varphi)) \right), \right.
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h_{32} &= -T \sin \psi \sinh 2\varphi - T \cosh \psi \cosh 2\varphi + T \cosh \psi \cosh 2\alpha + \frac{1}{2}(h_{31} + h_{21}) \\ &= -T \left(\frac{1}{2} (\cosh(\psi + 2\varphi) - \cosh(\psi - 2\varphi)) \right) - T \left(\frac{1}{2} (\cosh(\psi + 2\varphi) - \cosh(\psi - 2\varphi)) \right) \\ &\quad + T \cosh \psi \cosh 2\alpha + \frac{1}{2}(h_{31} + h_{21}) \end{aligned}$$

olur. Böylece (4.1.18) denklemi

$$\begin{cases} \varphi^* = T \sinh(2\varphi + \psi) - T \cosh 2\alpha \sinh \psi \\ h_{32} = -T \cosh(2\varphi + \psi) + T \cosh 2\alpha \cosh \psi + \frac{1}{2}(h_{31} + h_{21}) \end{cases} \quad (4.1.20)$$

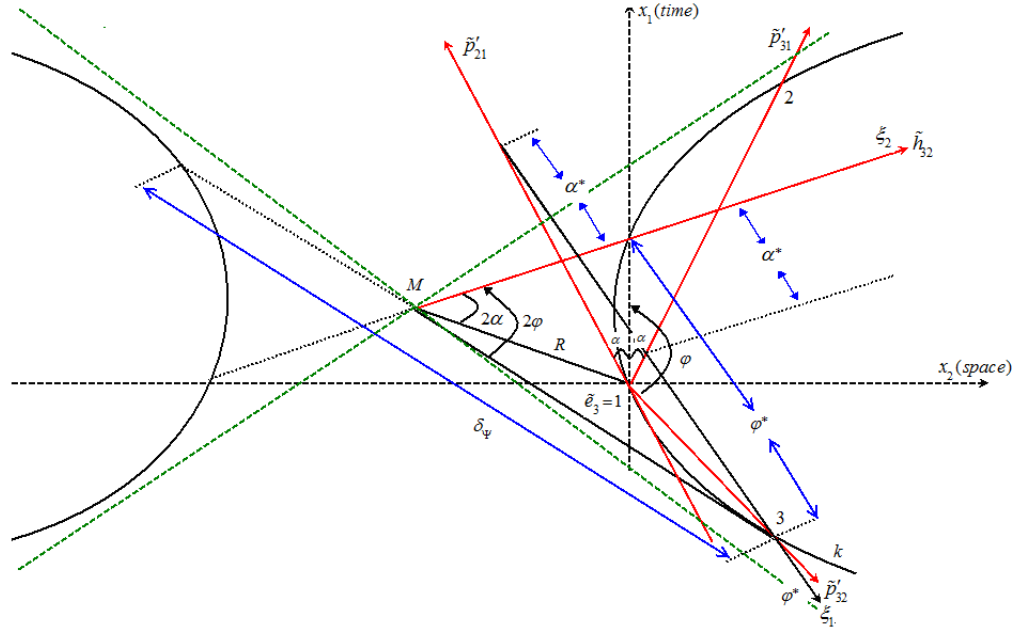
Şekil 4.1.6 teki diagramı çizmek için ilk olarak bağımsız $\mathcal{F}(U; \xi_1, \xi_2)$ çatısı seçilsin. Bunlar, sırasıyla, φ^* ve h_{32} nin eksenleri olsun. $\widehat{12}$ yayı için merkez açı 4α olacak şekilde 1 ve 2 noktasından geçen k Lorentziyen çemberi belirlensin. $\tilde{e}_3$ ortak dikmesinin en üst noktası olarak $1 \in k$ noktası seçilsin. Böylece verilen her φ açısı için $\tilde{p}'_{32}$ ve k Lorentziyen çemberi 3 noktasında kesişir ve bu φ^* ve h_{32} adımına karşılık gelir.

4.1.2 Timelike Disteli Diyagramında Dağılma Parametresi

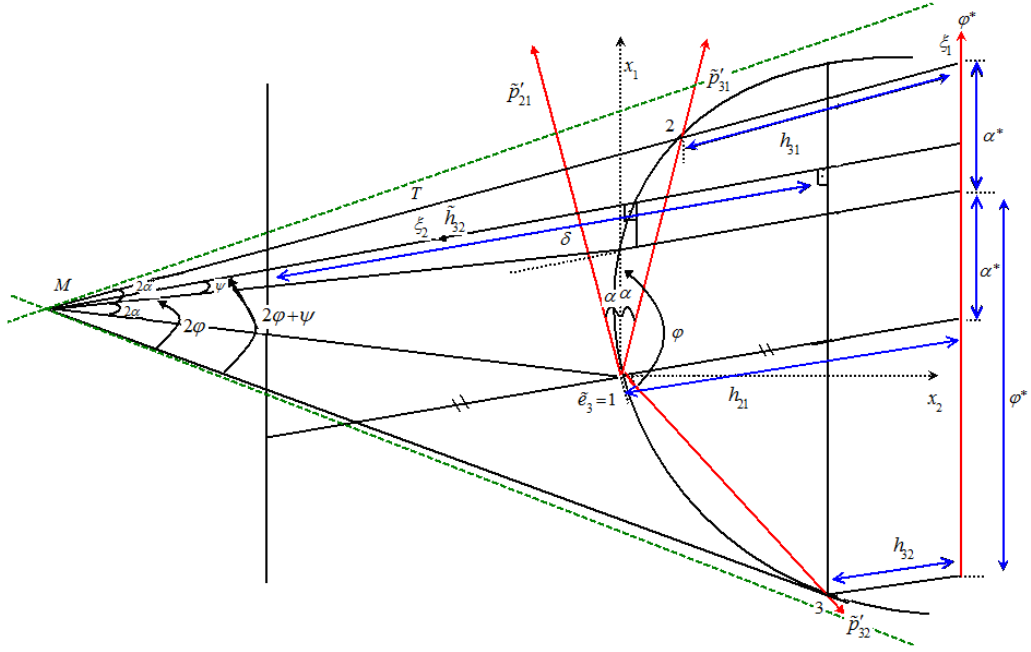
$\tilde{g}(t) = g(t) + \mathcal{E}g^*(t)$ timelike Plücker konoidinin $\delta(t)$ dağılma parametresi

$$\delta = \frac{\langle \dot{g}, \dot{g}^* \rangle}{\langle \dot{g}, \dot{g} \rangle} \quad (4.1.21)$$

ile verilir. δ parametresi herhangi bir üreteç boyunca teğet düzlemlerin dağılımını verir.



Şekil 4.1.7. Ψ timelike Plücker konoidinin δ_Ψ dağılma parametresi



Şekil 4.1.8. Σ_3/Σ_2 eksen yüzeylerinin δ dağılma parametresi

Ψ timelike Plücker konoidinin herhangi bir $\tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\mathbf{p}}_{32}$ üreticinin δ_Ψ dağılma parametresini hesaplamak için (4.1.2) ve (4.1.3) denklemleri kullanılırsa,

$$\varphi^* = R \sinh 2\varphi$$

$$\tilde{\mathbf{g}} = (\cosh \varphi + \varepsilon \varphi^* \sinh \varphi) \tilde{\mathbf{e}}_1 + (\sinh \varphi + \varepsilon \varphi^* \cosh \varphi) \tilde{\mathbf{e}}_2.$$

φ parametresine göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{g}}} &= (\sinh \varphi + \varepsilon \varphi^* \cosh \varphi + 2\varepsilon R \sinh \varphi \cosh 2\varphi) \tilde{\mathbf{e}}_1 \\ &\quad + (\cosh \varphi + \varepsilon \varphi^* \sinh \varphi + 2\varepsilon R \cosh \varphi \cosh 2\varphi) \tilde{\mathbf{e}}_2. \end{aligned}$$

ve burada $\langle \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_1 \rangle = -1$, $\langle \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_2 \rangle = 1$ ve $\langle \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2 \rangle = 0$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\langle \dot{\tilde{\mathbf{g}}}, \dot{\tilde{\mathbf{g}}} \rangle &= -(\sinh \varphi + 2\varepsilon R \sinh \varphi \cosh 2\varphi + \varepsilon \varphi^* \cosh \varphi)^2 \\
&\quad + (\cosh \varphi + 2\varepsilon R \cosh \varphi \cosh 2\varphi + \varepsilon \varphi^* \sinh \varphi)^2 \\
&= -\sinh^2 \varphi - 4\varepsilon R \sinh^2 \varphi \cosh 2\varphi - 2\varepsilon \sinh \varphi \varphi^* \cosh \varphi \\
&\quad + \cosh^2 \varphi + 4\varepsilon R \cosh^2 \varphi \cosh 2\varphi + 2\varepsilon \sinh \varphi \varphi^* \cosh \varphi \\
&= 1 + 4\varepsilon R \cos 2\varphi = \langle \dot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}} \rangle + 2\varepsilon \langle \dot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}}^* \rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.21) denkleminde, $\langle \dot{\tilde{\mathbf{g}}}, \dot{\tilde{\mathbf{g}}} \rangle$ çarpımının dual ve reel kısmı kullanılırsa

$$\delta_\psi = 2R \cosh 2\varphi \quad (4.1.22)$$

bulunur. Şekil 4.1.6, özel durumda dual hiperbolik küresel hareketin dağılma parametresi δ_ψ yi gösteren Disteli diyagramıdır. Şimdi, kesim 4.1.2 deki daha genel durumu inceleyelim: $\tilde{\mathbf{p}}_{32}$, Σ_2 ve Σ_3 iki çatı arasındaki izafi hareketin ani vida eksenini olsun. Ayrıca, $\tilde{\mathbf{p}}_{2I}$ ve $\tilde{\mathbf{p}}_{3I}$ timelike eksenlerinin Σ_1 dişli kutusuna sabitlendiğini kabul edelim. Böylece, $\bar{\omega}_{21}$ and $\bar{\omega}_{31}$ sabitleri için $\tilde{\mathbf{p}}_{32}$ relatif timelike eksen Σ_1 dişli kutusunda sabit kalır. $\tilde{\mathbf{p}}_{32}$, Σ_3/Σ_2 izafi hareketin eksen yüzeylerinin izidir. Her bir eksen yüzeyi için dağılma parametresi δ nın sabit kaldığını göstermek istiyoruz. Bunun için Disteli diyagramından yararlanılabilir:

Σ_2 eksen yüzeyi $\bar{\omega}_{21}\tilde{\mathbf{p}}_{2I}$ ani vida eksenini ile Σ_1/Σ_2 helisel hareketi altında $\tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\mathbf{p}}_{32}$ nin izidir. Teorem 4.1.1. in ispatındaki denklemin dual benzeri alınır,

$$\bar{\omega}_{32}\tilde{\mathbf{g}} = \bar{\omega}_{31}\tilde{\mathbf{p}}_{3I} - \bar{\omega}_{21}\tilde{\mathbf{p}}_{2I}$$

burada $\dot{\tilde{\mathbf{g}}} = -\bar{\omega}_{21}\tilde{\mathbf{p}}_{2I} \times \tilde{\mathbf{g}}$ türev ifadesi ve (4.1.1) denklemini ele alınırsa

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_{32}\dot{\tilde{\mathbf{g}}} &= -\bar{\omega}_{21}\tilde{\mathbf{p}}_{2I} \times (\bar{\omega}_{31}\tilde{\mathbf{p}}_{3I} - \bar{\omega}_{21}\tilde{\mathbf{p}}_{2I}) \\
&= -\bar{\omega}_{21}\bar{\omega}_{31}(\tilde{\mathbf{p}}_{2I} \times \tilde{\mathbf{p}}_{3I}) \\
&= -\bar{\omega}_{21}\bar{\omega}_{31}(\tilde{\mathbf{e}}_I \cosh \bar{\alpha} - \tilde{\mathbf{e}}_2 \sinh \bar{\alpha}) \times (\tilde{\mathbf{e}}_I \cosh \bar{\alpha} + \tilde{\mathbf{e}}_2 \sinh \bar{\alpha}) \\
&= -\bar{\omega}_{21}\bar{\omega}_{31} \sinh 2\bar{\alpha} \tilde{\mathbf{e}}_3
\end{aligned}$$

bulunur. Dağılma parametresini hesaplamak için

$$\bar{\omega}_{32}^2 \langle \dot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}} \rangle = \bar{\omega}_{21}^2 \bar{\omega}_{31}^2 \sinh^2 2\bar{\alpha}$$

denkleminin reel ve dual kısmına ihtiyaç duyulur. $\omega_{32} \neq 0$ şartı altında $\bar{\omega}_{32}^2$ nin tersi vardır ve (4.1.13) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (\omega_{32} + \varepsilon \omega_{32}^*)^2 \cdot \langle \dot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}} \rangle &= (\omega_{21} + \varepsilon \omega_{21}^*)^2 (\omega_{31} + \varepsilon \omega_{31}^*)^2 (\sinh 2\alpha + 2\varepsilon \alpha^* \cosh 2\alpha)^2 \\ (\omega_{32}^2 + 2\varepsilon \omega_{32} \omega_{32}^*) \cdot \langle \dot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}} \rangle &= (\omega_{21}^2 + 2\varepsilon \omega_{21} \omega_{21}^*) (\omega_{31}^2 + 2\varepsilon \omega_{31} \omega_{31}^*) (\sinh^2 2\alpha + 4\varepsilon \alpha^* \sinh 2\alpha \cosh 2\alpha) \\ \omega_{32}^2 (1 + 2\varepsilon \frac{\omega_{32}^*}{\omega_{32}}) \cdot \langle \dot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}} \rangle &= \omega_{21}^2 (1 + 2\varepsilon \frac{\omega_{21}^*}{\omega_{21}}) \omega_{31}^2 (1 + 2\varepsilon \frac{\omega_{31}^*}{\omega_{31}}) \sinh 2\alpha (\sinh 2\alpha + 4\varepsilon \alpha^* \cosh 2\alpha) \\ \langle \dot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}} \rangle &= \frac{\omega_{21}^2 \omega_{31}^2 \sinh 2\alpha}{\omega_{32}^2} (1 + 2\varepsilon h_{21})(1 + 2\varepsilon h_{31})(1 - 2\varepsilon h_{32})(\sinh 2\alpha + 4\varepsilon \alpha^* \cosh 2\alpha) \\ &= \frac{\lambda^2 \sinh^2(\alpha - \varphi) \cdot \lambda^2 \sinh^2(\alpha + \varphi)}{\lambda^2 \sinh^2 2\alpha} \cdot \sinh^2 2\alpha \cdot (1 + 2\varepsilon(h_{21} + h_{31} - h_{32} + 2R \cosh 2\alpha)) \\ &= \lambda^2 \sinh^2(\alpha - \varphi) \cdot \sinh^2(\alpha + \varphi) \\ &\quad + 2\varepsilon \lambda^2 [\sinh^2(\alpha - \varphi) \cdot \sinh^2(\alpha + \varphi)(h_{21} + h_{31} - h_{32} + 2R \cosh 2\alpha)] \end{aligned}$$

bulunur. Böylece eksen yüzeylerinin dağılma parametresi, (4.1.21) denkleminde

$$\delta = h_{21} + h_{31} - h_{32} + 2R \cosh 2\alpha$$

şeklinde bulunur. Son denklemde (4.1.18) denklemi ve daha sonra (4.1.19) eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \delta &= h_{31} + h_{21} - (S \sinh 2\varphi - R \cosh 2\varphi + R \cosh 2\alpha + \frac{1}{2}(h_{31} + h_{21})) + 2R \cosh 2\alpha \\ \delta &= R \cosh 2\varphi + \frac{1}{2}(h_{31} + h_{21}) - S \sinh 2\varphi + R \cosh 2\alpha \end{aligned}$$

ve son olarak

$$\begin{aligned}
\delta &= T \cosh \psi \cosh 2\varphi + \frac{1}{2}(h_{31} + h_{21}) + T \sinh \psi \sinh 2\varphi + T \cosh \psi \cosh 2\alpha \\
&= T \left(\frac{1}{2} (\cosh(\psi + 2\varphi) + \cosh(\psi - 2\varphi)) \right) + T \left(\frac{1}{2} (\cosh(\psi + 2\varphi) - \cosh(\psi - 2\varphi)) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(h_{31} + h_{21}) + T \cosh \psi \cosh 2\alpha \\
\delta &= T \cosh(2\varphi + \psi) + T \cosh 2\alpha \cosh \psi + \frac{1}{2}(h_{31} + h_{21}) \tag{4.1.23}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu, Σ_3/Σ_2 izafi hareketin eksen yüzeylerinin dağılma parametresidir. Şekil 4.1.8, şekil 4.1.6 te verilen diyagramın benzeri ile δ nın nasıl bulunacağını gösterir.

4.2. Dual Lorentziyen Küresel Hareketin Disteli Diyagramı

$\{O; \vec{q}_m, \vec{h}_m(time), \vec{a}_m\}$, L_3 hareketli uzayında ve $\{O'; \vec{q}_f, \vec{h}_f(time), \vec{a}_f\}$, L_2 sabit uzayında Lorentziyen anlamda ortonormal koordinat sistemleri olsunlar. Burada $\vec{q}_m$ ve $\vec{q}_f$ vektörlerini spacelike vektörler olarak kabul edelim. L_3 / L_2 hareketini incelemek için, L_1 izafi uzayın çatısı olan $\{Q; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ortonormal izafi koordinat sistemini alalım. Transfer prensibine göre, Σ_1, Σ_2 and Σ_3 , aynı O merkezli birim dual Lorentziyen kürelerin noktaları, $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $\{O; \vec{q}_f, \vec{h}_f, \vec{a}_f\}$ ve $\{O; \vec{q}_m, \vec{h}_m, \vec{a}_m\}$ dual ortogonal sistemleri ile ifade edilebilir. Böylece, L_1 / L_2 , L_1 / L_3 ve L_3 / L_2 hareketleri, sırasıyla, Σ_1 / Σ_2 , Σ_1 / Σ_3 ve Σ_3 / Σ_2 dual Lorentziyen küresel hareketler olarak göz önüne alınabilir.

Σ_3 hareketli birim dual Lorentziyen küresi,

$$\left\{ \vec{q}_m, \vec{h}_m = \frac{d\vec{q}_m}{\|d\vec{q}_m\|} (timelike), \vec{a}_m = -\vec{q}_m \times \vec{h}_m \right\}, \vec{q}_m = \vec{q}_m + \varepsilon \vec{q}_m^*, \vec{h}_m = \vec{h}_m + \varepsilon \vec{h}_m^*, \vec{a}_m = \vec{a}_m + \varepsilon \vec{a}_m^*$$

dual Lorentziyen ortonormal sistemi ile ve Σ_2 sabit birim dual Lorentziyen küresi,

$$\left\{ \vec{q}_f, \vec{h}_f = \frac{d\vec{q}_f}{\|d\vec{q}_f\|} (timelike), \vec{a}_f = -\vec{q}_f \times \vec{h}_f \right\}, \vec{q}_f = \vec{q}_f + \varepsilon \vec{q}_f^*, \vec{h}_f = \vec{h}_f + \varepsilon \vec{h}_f^*, \vec{a}_f = \vec{a}_f + \varepsilon \vec{a}_f^*$$

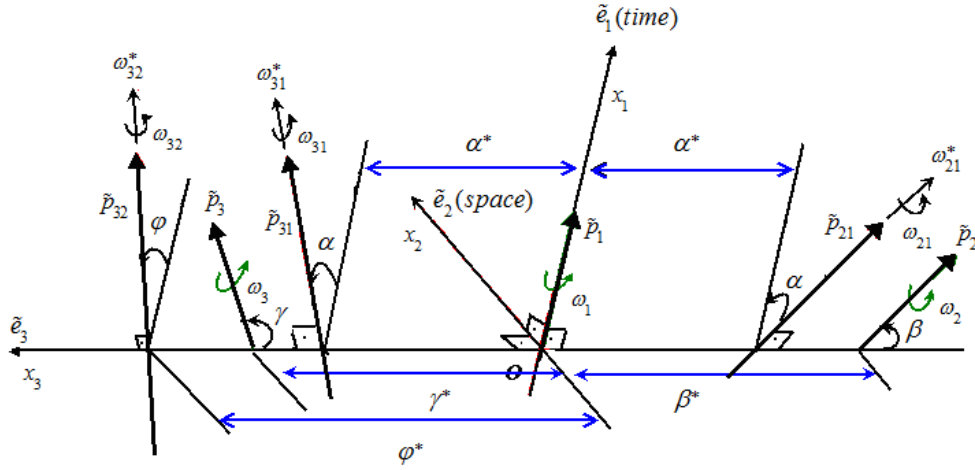
dual ortonormal sistemi ile üretilsin. Bu taktirde, Σ_3 dual Lorentziyen küresel hareketin Σ_2 ye göre türev denklemleri,

$$\begin{cases} d\vec{q} = \bar{\kappa} \vec{h} \\ d\vec{h} = \bar{\kappa} \vec{q} + \bar{\tau} \vec{a} \\ d\vec{a} = \bar{\tau} \vec{h} \end{cases}$$

ile verilir. Burada $\bar{\kappa}(s) = \kappa(s) + \varepsilon \kappa^*(s)$, $\bar{\tau}(s) = \tau(s) + \varepsilon \tau^*(s)$, ($s \in IR$) , sırasıyla, dual eğrilik ve dual burulmadır. Lorentziyen uzaylarda transfer pensibinden, Σ_3 ün Σ_2 ye göre küresel

hareketi boyunca Σ_3 birim dual Lorentziyen küre üzerinde $\tilde{q}$ birim dual spacelike vektörü bir eğri çizer ve bu dual eğri, $\mathbb{R}_1^3$ Lorentziyen çizgiler uzayında ana doğruları spacelike olan bir spacelike regle yüzeye karşılık gelir [24].

Şekil 4.2.1 de verildiği gibi, Σ_1 dişli kutusunun $F(O; x_1, x_2, x_3)$ sabit çatısının x_1 eksenine ile çakışan $\tilde{p}_1$ eksenini etrafında döndüğünü, Σ_2 küçük dişlisinin x_1 ekseninden β^* uzaklığında ve x_1 eksenine ile dual hiperbolik β açısı yapan $\tilde{p}_2$ timelike eksenini etrafında döndüğünü ve Σ_3 büyük dişlisinin x_1 ekseninden γ^* uzaklığında ve x_1 eksenine ile dual hiperbolik γ açısı yapan $\tilde{p}_3$ timelike eksenini etrafında döndüğünü kabul edelim.

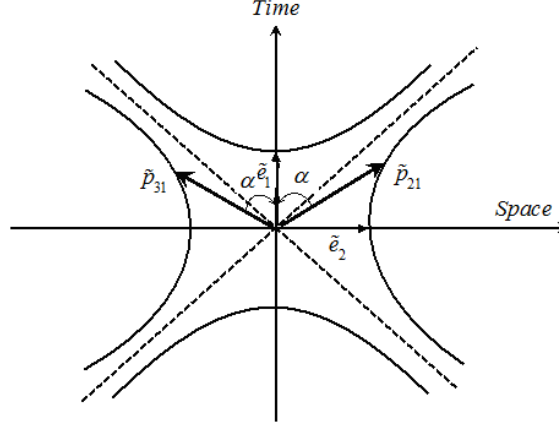


Şekil 4.2.1. Küçük ve büyük dişlinin $\tilde{p}_{2I}, \tilde{p}_{3I}$ spacelike eksenleri ve $\tilde{p}_{32}$ izafi spacelike eksenini

$F(O; x_1, x_2, x_3)$ kartezyen koordinat sistemi için, $\tilde{e}_1$ birim dual timelike ve $\tilde{e}_2$ birim dual spacelike vektörlerine, sırasıyla, x_1 ve x_2 eksenleri karşılık gelir. $\tilde{p}_{2I}$ ve $\tilde{p}_{3I}$ sırasıyla Σ_1 / Σ_2 ve Σ_1 / Σ_3 dual lorentziyen hareketlerin ani vida eksenlerinin birim dual spacelike vektörleridir ve bunların x_1 and x_2 eksenlerine göre simetrik olarak yerleştirildiğini kabul edelim. Böylece

$$\begin{cases} \tilde{p}_{2I} = \tilde{e}_1 \sinh \bar{\alpha} - \tilde{e}_2 \cosh \bar{\alpha} \\ \tilde{p}_{3I} = \tilde{e}_1 \sinh \bar{\alpha} + \tilde{e}_2 \cosh \bar{\alpha} \end{cases} \quad (4.2.1)$$

yazılabilir.



Şekil 4.2.2. Küçük dişlinin spacelike eksen $\tilde{p}_{21}$ ve büyük dişlinin spacelike eksen $\tilde{p}_{31}$

Vida durumunda $\alpha, \alpha^* \in \mathbb{R}$, $\alpha^* \neq 0$ olduğunu kabul edelim ve $\omega_{21}, \omega_{31} \in \mathbb{R}$, sırasıyla, Σ_1 dişli kutusuna göre Σ_2 küçük dişlisinin ve Σ_3 büyük dişlisinin açısal hızları olsun. Verilen Σ_1 , Σ_2 ve Σ_3 sistemleri için Σ_2/Σ_1 ve Σ_3/Σ_1 hareketlerinin ani vida eksenleri sırasıyla $\tilde{q}_{21}$, $\tilde{q}_{31}$ dual vektörleri olsun. Σ_2 birim küresine göre Σ_3 birim küresinin hareketi Σ_3/Σ_2 ile verilir. Σ_3/Σ_2 hareketi, Σ_1/Σ_2 hareketi Σ_2/Σ_1 hareketinin tersi olmak üzere, Σ_1/Σ_2 ve Σ_3/Σ_1 hareketlerinin birleşiminden oluşur [28]. $\tilde{q}_{32}$, Σ_3/Σ_2 hareketinin ani vida eksenini olsun. Bu takdirde, hareketlerin vidaları arasındaki bağıntı

$$\tilde{q}_{32} = \bar{\omega}_{32} \tilde{p}_{32} = \bar{\omega}_{31} \tilde{p}_{31} - \bar{\omega}_{21} \tilde{p}_{21}$$

ile verilir [28]. Dönme durumunu göz önüne aldığımızda, yani $\omega_{21}^* = \omega_{31}^* = 0$ ise $\tilde{q}_{32} = \bar{\omega}_{32} \tilde{p}_{32} = \omega_{31} \tilde{p}_{31} - \omega_{21} \tilde{p}_{21}$ olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.1. $\omega_{21}^* = \omega_{31}^* = 0$ koşulu altında Σ_3/Σ_2 dual Lorentziyen küresel hareketin ani vida eksenini,

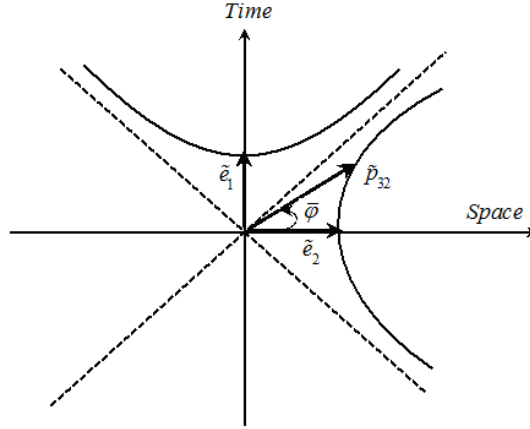
$$\tilde{q}_{32} = (\omega_{31} - \omega_{21}) \sinh \bar{\alpha} \tilde{e}_1 + (\omega_{31} + \omega_{21}) \cosh \bar{\alpha} \tilde{e}_2, \quad (4.2.2)$$

ile verilir.

İspat. Ani vida ekseninin birim dual spacelike vektörü $\tilde{\mathbf{p}}_{32}$

$$\tilde{\mathbf{p}}_{32} = \tilde{\mathbf{e}}_1 \sinh \bar{\varphi} + \tilde{\mathbf{e}}_2 \cosh \bar{\varphi},$$

ile verilir.



Şekil 4.2.3. Ani vida ekseninin birim dual spacelike vektörü $\tilde{\mathbf{p}}_{32}$

Burada $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$, $\tilde{\mathbf{e}}_1$ ve $\tilde{\mathbf{p}}_{32}$ arasındaki dual timelike açıdır. Aynı zamanda, Σ_3/Σ_2 izafi hareketin vidası $\tilde{\mathbf{q}}_{32}$, ani vida ekseninin birim dual spacelike vektörü $\tilde{\mathbf{p}}_{32}$ ile ω_{32} açısal hız ve ω_{32}^* öteleme hızı olmak üzere dual açısal hız olan $\bar{\omega}_{32} = \omega_{32} + \varepsilon \omega_{32}^*$ nin çarpımından oluşur. Böylece,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_{32} &= \bar{\omega}_{32} \tilde{\mathbf{p}}_{32} = \bar{\omega}_{32} (\tilde{\mathbf{e}}_1 \sinh \bar{\varphi} + \tilde{\mathbf{e}}_2 \cosh \bar{\varphi}) = \omega_{31} \tilde{\mathbf{p}}_{31} - \omega_{21} \tilde{\mathbf{q}}_{21} \\ &= \bar{\omega}_{32} \tilde{\mathbf{e}}_1 \sinh \bar{\varphi} + \bar{\omega}_{32} \tilde{\mathbf{e}}_2 \cosh \bar{\varphi} \\ &= \omega_{31} \sinh \bar{\alpha} \tilde{\mathbf{e}}_1 + \omega_{31} \cosh \bar{\alpha} \tilde{\mathbf{e}}_2 - \omega_{21} \sinh \bar{\alpha} \tilde{\mathbf{e}}_1 + \omega_{21} \cosh \bar{\alpha} \tilde{\mathbf{e}}_2 \\ &= (\omega_{31} - \omega_{21}) \sinh \bar{\alpha} \tilde{\mathbf{e}}_1 + (\omega_{31} + \omega_{21}) \cosh \bar{\alpha} \tilde{\mathbf{e}}_2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2. Σ_3/Σ_2 dual Lorentziyen izafi hareketin $\tilde{\mathbf{p}}_{32}$ ani vida ekseninin x_1 eksenine uzaklığı, φ açısı cinsinden

$$\varphi_0 = \frac{\alpha^*}{\sinh 2\alpha} \sinh 2\varphi = R \sinh 2\varphi = 2R \sinh \varphi \cosh \varphi \quad (4.2.3)$$

ile verilir.

İspat. (4.2.2) denkleminde verilen $\tilde{e}_1$ ve $\tilde{e}_2$ katsayıları karşılaştırıldığında

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{32} \sinh \bar{\varphi} = (\omega_{31} - \omega_{21}) \sinh \bar{\alpha} \\ \bar{\omega}_{32} \cosh \bar{\varphi} = (\omega_{31} + \omega_{21}) \cosh \bar{\alpha} \end{cases} \quad (4.2.4)$$

eşitliği bulunur. $\bar{\omega}_{32}$ yi yok etmek için, ilk denklem $(-\sinh \bar{\varphi})$ ile ikinci denklem $(\cosh \bar{\varphi})$ ile çarpıldığında

$$\begin{aligned} (\omega_{31} + \omega_{21}) \cosh \bar{\alpha} \sinh \bar{\varphi} - (\omega_{31} - \omega_{21}) \cosh \bar{\varphi} \sinh \bar{\alpha} &= 0 \\ \omega_{21} (\cosh \bar{\alpha} \sinh \bar{\varphi} + \cosh \bar{\varphi} \sinh \bar{\alpha}) + \omega_{31} (\cosh \bar{\alpha} \sinh \bar{\varphi} - \cosh \bar{\varphi} \sinh \bar{\alpha}) &= 0 \end{aligned}$$

ve bu denklem düzenlendiğinde

$$\omega_{21} \sinh(\bar{\varphi} + \bar{\alpha}) + \omega_{31} \sinh(\bar{\varphi} - \bar{\alpha}) = 0, \quad (4.2.5)$$

bulunur. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ sabiti için

$$\omega_{21} = -\lambda \sinh(\varphi - \alpha), \quad \omega_{31} = \lambda \sinh(\varphi + \alpha) \quad (4.2.6)$$

reel katsayıları alalım. (4.2.5) denklemini reel ve dual kısımlara ayrılırsa

$$\begin{aligned} \omega_{21} \sinh((\alpha + \varphi) + \varepsilon(\alpha^* + \varphi^*)) + \omega_{31} \sinh((\varphi - \alpha) + \varepsilon(\varphi^* - \alpha^*)) &= 0, \\ \omega_{21} [\sinh(\alpha + \varphi) + \varepsilon(\alpha^* + \varphi^*) \cosh(\alpha + \varphi)] + \omega_{31} [\sinh(\varphi - \alpha) + \varepsilon(\varphi^* - \alpha^*) \cosh(\varphi - \alpha)] &= 0, \\ \omega_{21} \sinh(\alpha + \varphi) + \omega_{31} \sinh(\varphi - \alpha) + \varepsilon[\omega_{21}(\alpha^* + \varphi^*) \cosh(\alpha + \varphi) + \omega_{31}(\varphi^* - \alpha^*) \cosh(\varphi - \alpha)] &= 0, \end{aligned}$$

elde edilir. Dual kısım,

$$\omega_{21}(\varphi^* + \alpha^*) \cosh(\alpha + \varphi) + \omega_{31}(\varphi^* - \alpha^*) \cosh(\varphi - \alpha) = 0$$

olup, (4.2.6) denklemi yerine yazılırsa

$$-(\varphi^* + \alpha^*) \sinh(\varphi - \alpha) \cosh(\varphi + \alpha) + (\varphi^* - \alpha^*) \sinh(\varphi + \alpha) \cosh(\varphi - \alpha) = 0$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} &-(\varphi^* + \alpha^*) \sinh(\varphi - \alpha) \cosh(\alpha + \varphi) + (\varphi^* - \alpha^*) \sinh(\alpha + \varphi) \cosh(\varphi - \alpha) = 0, \\ &-\alpha^* (\sinh(\varphi - \alpha) \cosh(\alpha + \varphi) + \sinh(\alpha + \varphi) \cosh(\varphi - \alpha)) \\ &+\varphi^* (\sinh(\alpha + \varphi) \cosh(\varphi - \alpha) - \sinh(\varphi - \alpha) \cosh(\alpha + \varphi)) = 0 \end{aligned}$$

buradan

$$-\alpha^* \sinh 2\varphi + \varphi^* \sinh 2\alpha = 0.$$

Burada,

$$R = \frac{\alpha^*}{\sinh 2\alpha} \quad (4.2.7)$$

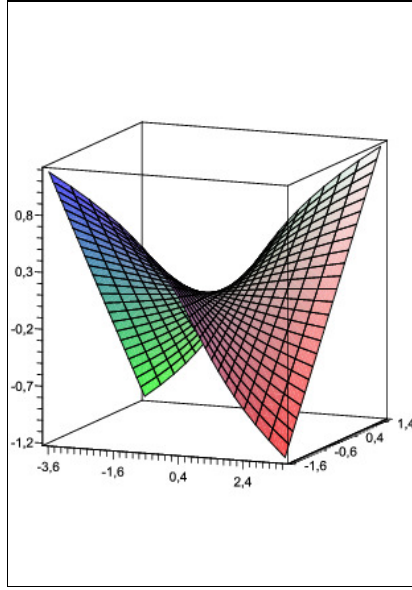
alınırsa

$$\varphi^* = \frac{\alpha^*}{\sinh 2\alpha} \sinh 2\varphi = R \sinh 2\varphi = 2R \sinh \varphi \cosh \varphi$$

bulunur. $\tilde{p}_{32}$ relatif ekseninin x_3 koordinatı φ^* a eşittir. Bütün izafi eksenlerin geometrik yeri

$$x_3 = 2R \cosh \varphi \sinh \varphi = 2R \frac{x_1 x_2}{x_1^2 - x_2^2} \quad (4.2.8)$$

denklemi ile verilir. Bunu spacelike Plücker konoidi olarak isimlendiririz. $\varphi \cong \pm 0,785$ ile bulunan, iki ana doğru arasındaki $2R$ uzaklığı Ψ spacelike Plücker konoidinin çapı olarak adlandırılır.



Şekil 4.2.4. Spacelike Plücker konoidi

Teorem 4.2.3. Σ_3/Σ_2 dual Lorentziyen izafi hareketin adımı,

$$h_{32} = \frac{\omega_{32}^*}{\omega_{32}} = R(\cosh 2\alpha - \cosh 2\varphi) \quad (4.2.9)$$

ile verilir.

İspat. (4.2.4) denklemini sırasıyla $(-\sinh \bar{\varphi})$ ve $(\cosh \bar{\varphi})$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{32} &= (\omega_{31} + \omega_{21}) \cosh \bar{\alpha} \cosh \bar{\varphi} - (\omega_{31} - \omega_{21}) \sinh \bar{\alpha} \sinh \bar{\varphi} \\ &= \omega_{31} (\cosh \bar{\alpha} \cosh \bar{\varphi} - \sinh \bar{\alpha} \sinh \bar{\varphi}) + \omega_{21} (\cosh \bar{\alpha} \cosh \bar{\varphi} + \sinh \bar{\alpha} \sinh \bar{\varphi}) \\ \bar{\omega}_{32} &= \omega_{31} \cosh(\bar{\varphi} - \bar{\alpha}) + \omega_{21} \cosh(\bar{\varphi} + \bar{\alpha}) \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

bulunur. (4.2.10) denklemi reel ve dual kısımlara ayrılırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_{32} &= \omega_{31} [\cosh((\varphi - \alpha) + \varepsilon(\varphi^* - \alpha^*)) + \omega_{21} [\cosh((\alpha + \varphi) + \varepsilon(\varphi^* + \alpha^*))] \\
&= \omega_{31} [\cosh(\varphi - \alpha) + \varepsilon(\varphi^* - \alpha^*) \sinh(\varphi - \alpha)] + \omega_{21} [\cosh(\alpha + \varphi) + \varepsilon(\varphi^* + \alpha^*) \sinh(\alpha + \varphi)] \\
&= \omega_{31} \cosh(\varphi - \alpha) + \omega_{21} \cosh(\alpha + \varphi) + \varepsilon [\omega_{31} (\varphi^* - \alpha^*) \sinh(\varphi - \alpha) + \omega_{21} (\varphi^* + \alpha^*) \sinh(\alpha + \varphi)]
\end{aligned}$$

olup, denklemin reel kısmında (4.2.6) denklemini yerine yazılırsa

$$\omega_{32} = \lambda [\sinh(\varphi + \alpha) \cosh(\varphi - \alpha) - \sinh(\varphi - \alpha) \cosh(\varphi + \alpha)] = \lambda \sinh 2\alpha, \quad (4.2.11)$$

bulunur. (4.2.10) denkleminin dual kısmı,

$$\begin{aligned}
\omega_{32}^* &= \omega_{31} (\varphi^* - \alpha^*) \sinh(\varphi - \alpha) + \omega_{21} (\varphi^* + \alpha^*) \sinh(\varphi + \alpha) \\
&= \lambda [(\varphi^* - \alpha^*) \sinh(\varphi + \alpha) \sinh(\varphi - \alpha) - (\varphi^* + \alpha^*) \sinh(\varphi - \alpha) \sinh(\varphi + \alpha)] \\
&= -2\lambda \alpha^* \sinh(\varphi + \alpha) \sinh(\varphi - \alpha) \\
&= -2\lambda \alpha^* \frac{1}{2} (\cosh 2\varphi - \cosh 2\alpha) \\
&= \lambda \alpha^* (\cosh 2\alpha - \cosh 2\varphi)
\end{aligned}$$

denkleminde oluşur. Son olarak h_{32} adımı

$$h_{32} = \frac{\omega_{32}^*}{\omega_{32}} = \frac{\lambda \alpha^* (\cosh 2\alpha - \cosh 2\varphi)}{\lambda \sinh 2\alpha} = R(\cosh 2\alpha - \cosh 2\varphi) \quad (4.2.12)$$

olarak bulunur. (4.2.3) ve (4.2.9) denklemleri, Lorentziyen uzay hareketinde pure dönmelerin spacelike Disteli diyagramının temelini oluşturur.

Lorentziyen uzaysal harekette pure dönmelerin spacelike Disteli diyagramı; h_{32} adımı, φ açısı ve φ^* uzaklığı ile ω_{21} ve ω_{31} açısal hızlar arasındaki bağıntıyı açıklar. (Şekil. 4.2.5)

özelliklerini vermek için, $\tilde{e}_3$ dan geçen Lorentziyen k çemberi kullanılacaktır. $\tilde{p}'_{21}, \tilde{p}'_{31}$ bu çemberi, sırasıyla, 1 ve 2 noktasında kessin ve $2\alpha^*$ uzaklığında bulunsunlar. Böylece, k ve $\tilde{p}'_{32}$ 3 noktasında kesişirler bu nokta $\tilde{h}_{32}$ eksenine φ^* uzaklığındadır. Bu diyagram, denklem (4.2.3) , (4.2.9) ve Lorentziyen trigonometride merkez açı teoreminin bir sonucudur.

4.2.1. Dual Lorentziyen Küresel Harekette Disteli Diyagramının Genel Durumu

Bu kesimde daha genel durum olarak Σ_2 ve Σ_3 ün Σ_1 dual Lorentziyen küresine göre hareketlerini helisel kabul edelim. Bu hareketlerin dual açısal hızları, sırasıyla, $\bar{\omega}_{21}$ ve $\bar{\omega}_{31}$ olsun. Böylece, ω_{21}/ω_{31} oranı değişirken adımlar

$$h_{21} = \omega_{21}^*/\omega_{21}, \quad h_{31} = \omega_{31}^*/\omega_{31} \quad (4.2.13)$$

olacak şekilde sabittir. Σ_3/Σ_2 izafi hareketin $\tilde{p}_{32}$ spacelike eksenine spacelike regle yüzeyi tarar. Burada dual Lorentziyen küresel hareketin bir Disteli diyagramı vardır.

(4.2.5) denkleminin dual benzeri olan

$$\bar{\omega}_{21} \sinh(\bar{\alpha} + \bar{\varphi}) + \bar{\omega}_{31} \sinh(\bar{\varphi} - \bar{\alpha}) = 0 \quad (4.2.14)$$

denklemini alınsın. (4.2.14) denklemini reel ve dual kısımlarına ayrılırsa:

$$\begin{aligned} &(\omega_{21} + \varepsilon \omega_{21}^*) [\sinh(\alpha + \varphi) + \varepsilon(\alpha^* + \varphi^*) \cosh(\alpha + \varphi)] \\ &+ (\omega_{31} + \varepsilon \omega_{31}^*) [\sinh(\varphi - \alpha) + \varepsilon(\varphi^* - \alpha^*) \cosh(\varphi - \alpha)] = 0. \end{aligned}$$

Reel kısım

$$\omega_{21} \sinh(\alpha + \varphi) + \omega_{31} \sinh(\varphi - \alpha) = 0$$

ve dual kısım

$$\begin{aligned} &\omega_{21}^* \sinh(\alpha + \varphi) + \omega_{21}(\alpha^* + \varphi^*) \cosh(\alpha + \varphi) \\ &+ \omega_{31}^* \sinh(\varphi - \alpha) + \omega_{31}(\varphi^* - \alpha^*) \cosh(\varphi - \alpha) = 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. (4.2.13) eşitlikleri bu denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &\omega_{21}[h_{21} \sinh(\alpha + \varphi) + (\alpha^* + \varphi^*) \cosh(\alpha + \varphi)] \\ &+ \omega_{31}[h_{31} \sinh(\varphi - \alpha) + (\varphi^* - \alpha^*) \cosh(\varphi - \alpha)] = 0 \end{aligned}$$

bulunur. (4.2.6) denklemdeki ω_{21} ve ω_{31} açısal hızları göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} &\lambda[-h_{21} \sinh(\varphi - \alpha) \sinh(\alpha + \varphi) + h_{31} \sinh(\varphi - \alpha) \sinh(\alpha + \varphi) \\ &- (\alpha^* + \varphi^*) \sinh(\varphi - \alpha) \cosh(\alpha + \varphi) + (\varphi^* - \alpha^*) \sinh(\alpha + \varphi) \cosh(\varphi - \alpha)] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$\frac{1}{2}(h_{31} - h_{21})(\cosh 2\varphi - \cosh 2\alpha) - \alpha^* \sinh 2\varphi + \varphi^* \sinh 2\alpha = 0$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse,

$$\varphi^* = \frac{\alpha^* \sinh 2\varphi}{\sinh 2\alpha} + \frac{h_{31} - h_{21}}{2 \sinh 2\alpha} (\cosh 2\alpha - \cosh 2\varphi),$$

bulunur ve (4.2.7) denklemi bu denklemde yerine yazılırsa (4.2.3) denkleminin genelleştirilmiş olan

$$\varphi^* = R \sinh 2\varphi + \frac{h_{31} - h_{21}}{2 \sinh 2\alpha} (\cosh 2\alpha - \cosh 2\varphi) \quad (4.2.15)$$

denklemini elde edilir. Diğer taraftan, (4.2.10) denkleminin dual benzeri olan

$$\bar{\omega}_{32} = \bar{\omega}_{31} \cosh(\bar{\varphi} - \bar{\alpha}) + \bar{\omega}_{21} \cosh(\bar{\varphi} + \bar{\alpha}) \quad (4.2.16)$$

denklemini alalım ve bu denklemi reel ve dual kısımlara ayıralım:

$$\begin{aligned} \omega_{32} + \varepsilon \omega_{32}^* &= (\omega_{31} + \varepsilon \omega_{31}^*)(\cosh(\varphi - \alpha) + \varepsilon(\varphi^* - \alpha^*) \sinh(\varphi - \alpha)) \\ &+ (\omega_{21} + \varepsilon \omega_{21}^*)(\cosh(\alpha + \varphi) + \varepsilon(\alpha^* + \varphi^*) \sinh(\alpha + \varphi)) \end{aligned}$$

reel kısım

$$\omega_{32} = \omega_{31} \cosh(\varphi - \alpha) - \omega_{21} \cosh(\alpha + \varphi)$$

olur. (4.2.6) denklemini bu denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\omega_{32} &= \lambda [\sinh(\alpha + \varphi) \cosh(\varphi - \alpha) - \sinh(\varphi - \alpha) \cosh(\alpha + \varphi)] \\ &= \lambda \left[\frac{1}{2} (\sinh 2\alpha + \sinh 2\varphi) + (\sinh 2\alpha - \sinh 2\varphi) \right] \\ &= \lambda \sinh 2\alpha\end{aligned}$$

bulunur. (4.2.6) denklemini dual kısımda yazılırsa,

$$\begin{aligned}\omega_{32}^* &= \omega_{31}^* \cosh(\varphi - \alpha) + \omega_{31} (\varphi^* - \alpha^*) \sinh(\varphi - \alpha) \\ &\quad - \omega_{21}^* \cosh(\alpha + \varphi) + \omega_{21} (\varphi^* + \alpha^*) \sinh(\alpha + \varphi) \\ &= \lambda [\sinh(\alpha + \varphi) [h_{31} \cosh(\varphi - \alpha) + (\varphi^* - \alpha^*) \sinh(\varphi - \alpha)] \\ &\quad + \sinh(\varphi - \alpha) [h_{21} \cosh(\alpha + \varphi) + (\varphi^* + \alpha^*) \sinh(\alpha + \varphi)]] \\ &= \lambda \left[\frac{1}{2} h_{31} (\sinh 2\alpha + \sinh 2\varphi) - \frac{1}{2} h_{21} (\sinh 2\varphi - \sinh 2\alpha) - \alpha^* (\cosh 2\varphi - \cosh 2\alpha) \right]\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, (4.2.9) denkleminin genel hali olan

$$h_{32} = \frac{\omega_{032}}{\omega_{32}} = \frac{1}{2} (h_{21} + h_{31}) + \frac{h_{31} - h_{21}}{2 \sinh 2\alpha} \sinh 2\varphi + R (\cosh 2\alpha - \cosh 2\varphi) \quad (4.2.17)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$S = \frac{h_{31} - h_{21}}{2 \sinh 2\alpha}$$

alınırsa, (4.2.15) ve (4.2.17) denklemleri

$$\begin{cases} \varphi^* = -S \cosh 2\varphi + R \sinh 2\varphi + S \cosh 2\alpha \\ h_{32} = S \sinh 2\varphi - R \cosh 2\varphi + R \cosh 2\alpha + \frac{1}{2} (h_{31} + h_{21}) \end{cases} \quad (4.2.18)$$

şeklinde bulunur. Daha sonra,

$$S = -T \sinh \psi, \quad R = T \cosh \psi \quad (4.2.19)$$

değerleri (4.2.18) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \varphi^* &= T \cosh \psi \sinh 2\varphi - T \sinh \psi \cosh 2\alpha + T \sinh \psi \cosh 2\varphi \\ &= T \left(\frac{1}{2} (\sinh(\psi + 2\varphi) - \sinh(\psi - 2\varphi)) \right) - T \sinh \psi \cosh 2\alpha \\ &\quad + T \left(\frac{1}{2} (\sinh(\psi + 2\varphi) - \sinh(\psi - 2\varphi)) \right), \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h_{32} &= -T \sin \psi \sinh 2\varphi - T \cosh \psi \cosh 2\varphi + T \cosh \psi \cosh 2\alpha + \frac{1}{2} (h_{31} + h_{21}) \\ &= -T \left(\frac{1}{2} (\cosh(\psi + 2\varphi) - \cosh(\psi - 2\varphi)) \right) - T \left(\frac{1}{2} (\cosh(\psi + 2\varphi) - \cosh(\psi - 2\varphi)) \right) \\ &\quad + T \cosh \psi \cosh 2\alpha + \frac{1}{2} (h_{31} + h_{21}) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (4.2.18) denklemi

$$\begin{cases} \varphi^* = T \sinh(2\varphi + \psi) - T \cosh 2\alpha \sinh \psi \\ h_{32} = -T \cosh(2\varphi + \psi) + T \cosh 2\alpha \cosh \psi + \frac{1}{2} (h_{31} + h_{21}) \end{cases} \quad (4.2.20)$$

formunda elde edilir. Burada, $\tilde{p}_{32}$ relatif eksenin taradığı Ψ spacelike Plücker konoidinin çapı

$$2T = 2\sqrt{R^2 - S^2} \text{ dir.}$$

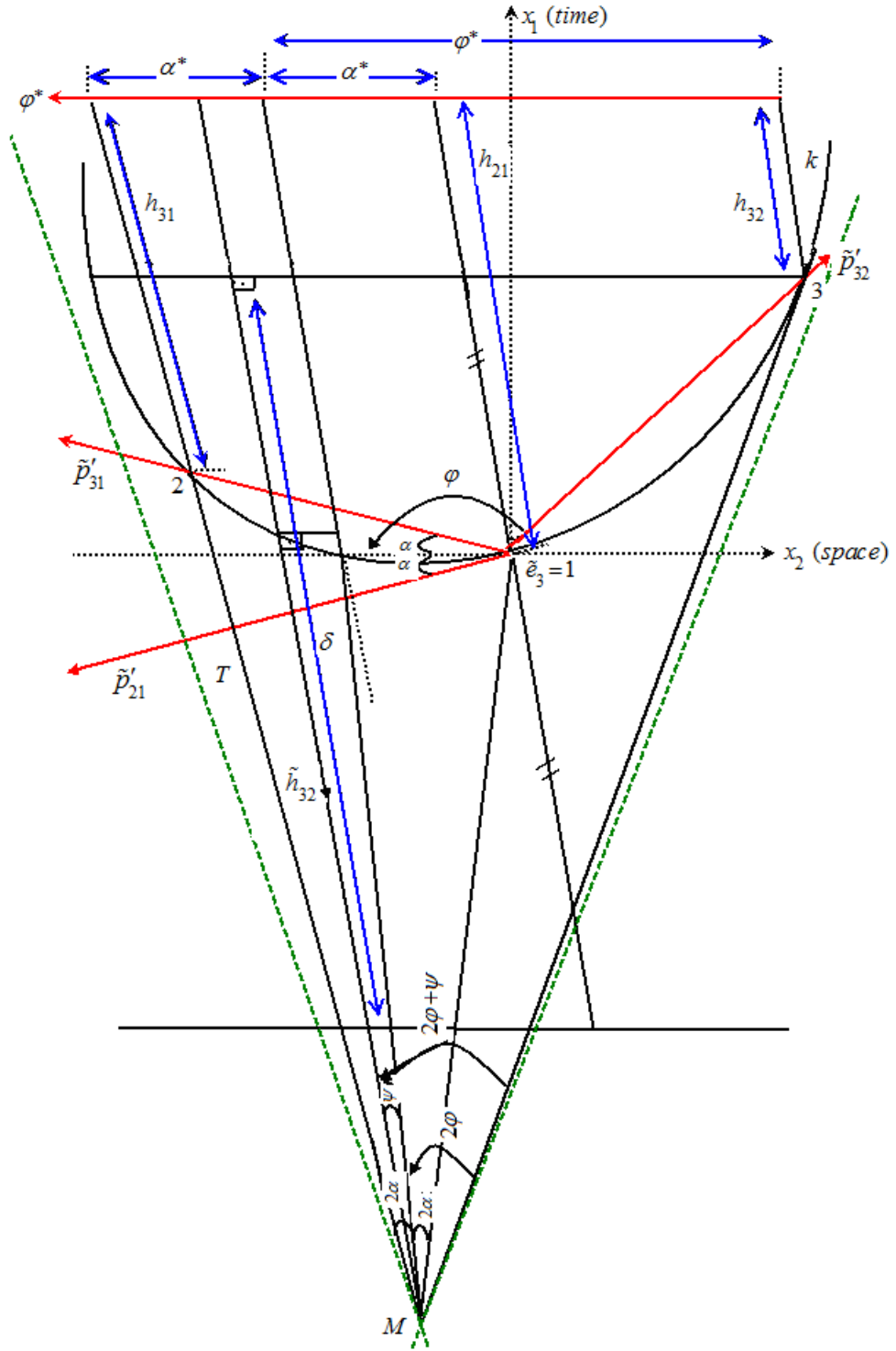
4.2.6 şeklindeki diagramı çizmek için ilk olarak bağımsız $\mathcal{F}(U; \xi_1, \xi_2)$ çatısını seçelim. Bunlar, sırasıyla, φ^* ve h_{32} nin eksenleri olsun. $\widehat{12}$ yayı için merkez açı 4α olacak şekilde, 1 ve 2 noktasından geçen k Lorentzian çemberini belirleyelim. $\tilde{e}_3$ ortak dikmesinin en üst noktası olarak $1 \in k$ noktasını seçelim. Böylece, verilen her φ açısı için $\tilde{p}'_{32}$ ve k Lorentzian çemberi 3 noktasında kesişir ve bu φ^* ve h_{32} adımına karşılık gelir.

4.2.2. Spacelike Disteli Diyagramında Dağılma Parametresi

$\tilde{g}(t) = g(t) + \varepsilon g^*(t)$ spacelike Plücker konoidinin $\delta(t)$ dağılma parametresi

$$\delta = \frac{\langle \dot{g}, \dot{g}^* \rangle}{\langle \dot{g}, \dot{g} \rangle} \quad (4.2.21)$$

ile verilir. δ parametresi herhangi bir üreteç boyunca teğet düzlemlerin dağılımını verir.



Şekil 4.2.8. Σ_3/Σ_2 eksen yüzeylerinin δ dağılıma parametresi

Ψ spacelike Plücker konoidinin herhangi bir $\tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\mathbf{p}}_{32}$ üreticinin δ_Ψ dağılma parametresini hesaplamak için (4.2.2) ve (4.2.5) denklemleri göz önüne alınsın:

$$\varphi^* = R \sinh 2\varphi$$

$$\tilde{\mathbf{g}} = (\sinh \varphi + \varepsilon \varphi^* \cosh \varphi) \tilde{\mathbf{e}}_1 + (\cosh \varphi + \varepsilon \varphi^* \sinh \varphi) \tilde{\mathbf{e}}_2.$$

φ parametresine göre türev alır ve $\langle \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_1 \rangle = -1$, $\langle \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_2 \rangle = 1$, $\langle \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2 \rangle = 0$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{g}}} &= (\cosh \varphi + \varepsilon \varphi^* \sinh \varphi + 2\varepsilon R \cosh \varphi \cosh 2\varphi) \tilde{\mathbf{e}}_1 \\ &\quad + (\sinh \varphi + \varepsilon \varphi^* \cosh \varphi + 2\varepsilon R \sinh \varphi \cosh 2\varphi) \tilde{\mathbf{e}}_2. \end{aligned}$$

Böylece

$$\begin{aligned} \langle \dot{\tilde{\mathbf{g}}}, \dot{\tilde{\mathbf{g}}} \rangle &= -(\cosh \varphi + \varepsilon \varphi^* \sinh \varphi + 2\varepsilon R \cosh \varphi \cosh 2\varphi)^2 \\ &\quad + (\sinh \varphi + \varepsilon \varphi^* \cosh \varphi + 2\varepsilon R \sinh \varphi \cosh 2\varphi)^2 \\ &= -\cosh^2 \varphi - 4\varepsilon R \cosh^2 \varphi \cosh 2\varphi - 2\varepsilon \sinh \varphi \varphi^* \cosh \varphi \\ &\quad + \sinh^2 \varphi + 4\varepsilon R \sinh^2 \varphi \cosh 2\varphi + 2\varepsilon \sinh \varphi \varphi^* \cosh \varphi \\ &= -1 - 4\varepsilon R \cos 2\varphi = \langle \dot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}} \rangle + 2\varepsilon \langle \dot{\mathbf{g}}, \dot{\mathbf{g}}^* \rangle \end{aligned}$$

bulunur. (4.2.21) denklemden, $\langle \dot{\tilde{\mathbf{g}}}, \dot{\tilde{\mathbf{g}}} \rangle$ çarpımının reel ve dual kısmı kullanılırsa

$$\delta_\Psi = 2R \cosh 2\varphi \tag{4.2.22}$$

bulunur. Şekil 4.2.7, özel durumda dual Lorentziyen küresel hareketin dağılma parametresi δ_Ψ yi gösteren Disteli diyagramıdır. Şimdi, kesim 4.2.2 deki daha genel durumu inceleyelim: $\tilde{\mathbf{p}}_{32}$, Σ_2 ve Σ_3 iki çatı arasındaki izafi hareketin ani vida eksenini olsun. Ayrıca, $\tilde{\mathbf{p}}_{21}$ ve $\tilde{\mathbf{p}}_{31}$ spacelike eksenlerinin Σ_1 dışı kutusuna sabitlendiğini kabul edelim. Böylece, $\bar{\omega}_{21}$ and $\bar{\omega}_{31}$ sabitleri için $\tilde{\mathbf{p}}_{32}$ izafi spacelike eksen Σ_1 dışı kutusunda sabit kalır. $\tilde{\mathbf{p}}_{32}$, Σ_3/Σ_2 izafi hareketin eksen yüzeylerinin izidir. Her bir eksen yüzeyi için, dağılma parametresi δ nın sabit kaldığını göstermek istiyoruz. Bunun için Disteli diyagramından yararlanılabilir:

Σ_2 eksen yüzeyi $\bar{\omega}_{21}\tilde{\mathbf{p}}_{2I}$ ani vida eksenini ile Σ_1/Σ_2 helisel hareketi altında $\tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\mathbf{p}}_{32}$ nin izidir. Teorem 4.2.1. in ispatındaki denklemin dual benzeri olan

$$\bar{\omega}_{32}\tilde{\mathbf{g}} = \bar{\omega}_{31}\tilde{\mathbf{p}}_{3I} - \bar{\omega}_{21}\tilde{\mathbf{p}}_{2I},$$

eşitliği, $\dot{\tilde{\mathbf{g}}} = -\bar{\omega}_{21}\tilde{\mathbf{p}}_{2I} \times \tilde{\mathbf{g}}$ ve (4.2.1) denklemini alınırsa

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_{32}\dot{\tilde{\mathbf{g}}} &= -\bar{\omega}_{21}\tilde{\mathbf{p}}_{2I} \times (\bar{\omega}_{31}\tilde{\mathbf{p}}_{3I} - \bar{\omega}_{21}\tilde{\mathbf{p}}_{2I}) \\ &= -\bar{\omega}_{21}\bar{\omega}_{31}(\tilde{\mathbf{p}}_{2I} \times \tilde{\mathbf{p}}_{3I}) \\ &= -\bar{\omega}_{21}\bar{\omega}_{31}(\tilde{\mathbf{e}}_I \sinh \bar{\alpha} - \tilde{\mathbf{e}}_2 \cosh \bar{\alpha}) \times (\tilde{\mathbf{e}}_I \sinh \bar{\alpha} + \tilde{\mathbf{e}}_2 \cosh \bar{\alpha}) \\ &= \bar{\omega}_{21}\bar{\omega}_{31} \sinh 2\bar{\alpha} \tilde{\mathbf{e}}_3\end{aligned}$$

bulunur. Dağılıma parametresini hesaplamak için

$$\bar{\omega}_{32}^2 \langle \dot{\tilde{\mathbf{g}}}, \dot{\tilde{\mathbf{g}}} \rangle = \bar{\omega}_{21}^2 \bar{\omega}_{31}^2 \sinh^2 2\bar{\alpha}$$

denkleminin reel ve dual kısmına ihtiyaç duyulur. $\omega_{32} \neq 0$ şartı altında $\bar{\omega}_{32}^2$ nin tersi vardır ve (4.2.13) denklemini kullanılırsa,

$$\begin{aligned}(\omega_{32} + \varepsilon \omega_{32}^*)^2 \cdot \langle \dot{\tilde{\mathbf{g}}}, \dot{\tilde{\mathbf{g}}} \rangle &= (\omega_{21} + \varepsilon \omega_{21}^*)^2 (\omega_{31} + \varepsilon \omega_{31}^*)^2 (\sinh 2\alpha + 2\varepsilon \alpha^* \cosh 2\alpha)^2 \\ (\omega_{32}^2 + 2\varepsilon \omega_{32} \omega_{32}^*) \cdot \langle \dot{\tilde{\mathbf{g}}}, \dot{\tilde{\mathbf{g}}} \rangle &= (\omega_{21}^2 + 2\varepsilon \omega_{21} \omega_{21}^*) (\omega_{31}^2 + 2\varepsilon \omega_{31} \omega_{31}^*) (\sinh^2 2\alpha + 4\varepsilon \alpha^* \sinh 2\alpha \cosh 2\alpha) \\ \omega_{32}^2 (1 + 2\varepsilon \frac{\omega_{32}^*}{\omega_{32}}) \cdot \langle \dot{\tilde{\mathbf{g}}}, \dot{\tilde{\mathbf{g}}} \rangle &= \omega_{21}^2 (1 + 2\varepsilon \frac{\omega_{21}^*}{\omega_{21}}) \omega_{31}^2 (1 + 2\varepsilon \frac{\omega_{31}^*}{\omega_{31}}) \sinh 2\alpha (\sinh 2\alpha + 4\varepsilon \alpha^* \cosh 2\alpha) \\ \langle \dot{\tilde{\mathbf{g}}}, \dot{\tilde{\mathbf{g}}} \rangle &= \frac{\omega_{21}^2 \omega_{31}^2 \sinh 2\alpha}{\omega_{32}^2} (1 + 2\varepsilon h_{21})(1 + 2\varepsilon h_{31})(1 - 2\varepsilon h_{32})(\sinh 2\alpha + 4\varepsilon \alpha^* \cosh 2\alpha) \\ &= \frac{\lambda^2 \sinh^2(\alpha - \varphi) \cdot \lambda^2 \sinh^2(\alpha + \varphi)}{\lambda^2 \sinh^2 2\alpha} \cdot \sinh^2 2\alpha \cdot (1 + 2\varepsilon(h_{21} + h_{31} - h_{32} + 2R \cosh 2\alpha)) \\ &= \lambda^2 \sinh^2(\alpha - \varphi) \cdot \sinh^2(\alpha + \varphi) \\ &\quad + 2\varepsilon \lambda^2 [\sinh^2(\alpha - \varphi) \cdot \sinh^2(\alpha + \varphi)(h_{21} + h_{31} - h_{32} + 2R \cosh 2\alpha)]\end{aligned}$$

bulunur. Böylece eksen yüzeylerinin dağılıma parametresi (4.2.21) denkleminde

$$\delta = h_{21} + h_{31} - h_{32} + 2R \cosh 2\alpha$$

ve (4.2.18) denklemi son denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\delta &= h_{31} + h_{21} - (S \sinh 2\varphi - R \cosh 2\varphi + R \cosh 2\alpha + \frac{1}{2}(h_{31} + h_{21})) + 2R \cosh 2\alpha \\ \delta &= R \cosh 2\varphi + \frac{1}{2}(h_{31} + h_{21}) - S \sinh 2\varphi + R \cosh 2\alpha\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak , (4.2.19) eşitlikleri son denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\delta &= T \cosh \psi \cosh 2\varphi + \frac{1}{2}(h_{31} + h_{21}) + T \sinh \psi \sinh 2\varphi + T \cosh \psi \cosh 2\alpha \\ &= T \left(\frac{1}{2} (\cosh(\psi + 2\varphi) + \cosh(\psi - 2\varphi)) \right) + T \left(\frac{1}{2} (\cosh(\psi + 2\varphi) - \cosh(\psi - 2\varphi)) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(h_{31} + h_{21}) + T \cosh \psi \cosh 2\alpha \\ \delta &= T \cosh(2\varphi + \psi) + T \cosh 2\alpha \cosh \psi + \frac{1}{2}(h_{31} + h_{21})\end{aligned}\tag{4.2.23}$$

bulunur. Bu, Σ_3/Σ_2 relatif hareketin eksen yüzeylerinin dağılma parametresidir. Şekil 4.2.7, şekil 4.2.5 da verilen diyagramın benzeri ile δ nın nasıl bulunacağını gösterir.

EK1. LORENTZİYEN UZAYDA TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu ekte, Lorentziyen geometride temel olan ve kullanılacak olan bazı kavramlar verilecektir.

$\mathbb{R}_1^2$ Lorentziyen 2-Uzayı

Tanım E.1. $\mathbb{R}^2$ vektör uzayı üzerinde, Öklid iç çarpımı yerine

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{a}, \vec{b}) &\rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -a_1b_1 + a_2b_2; \vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2) \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

biçiminde tanımlı Lorentziyen iç çarpım alınırsa, $\mathbb{R}^2$ afin uzayı, Minkowski 2-uzayı veya Lorentziyen 2-uzay olarak isimlendirilir ve $\mathbb{R}_1^2$ ile gösterilir.

Lorentziyen iç çarpım pozitif tanımlı olmadığından, bu uzaydaki vektörler üç sınıfa ayrılırlar.

Tanım E.2. $\mathbb{R}_1^2$ uzayında herhangi bir vektör $\vec{a} = (a_1, a_2)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle &> 0 \text{ veya } \vec{a} = 0 \text{ ise } \vec{a} \text{ ya spacelike vektör,} \\ \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle &< 0 \text{ ise } \vec{a} \text{ ya timelike vektör,} \\ \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle &= 0, \vec{a} \neq 0 \text{ ise } \vec{a} \text{ ya lightlike(veya null) vektör} \end{aligned}$$

denir [20].

Tanım E.3. Bir $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^2$ vektörünün normu

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{|\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle|} \quad (\text{E.2})$$

biçiminde tanımlanır [6].

Tanım E.4. $\mathbb{R}_1^2$ uzayında iki vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun.

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

ise $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerine Lorentziyen anlamda diktirler denir [32,33].

Bu tanıma göre. 1. veya 2. açıortaya göre simetrik olan vektörler Lorentziyen anlamda diktirler.

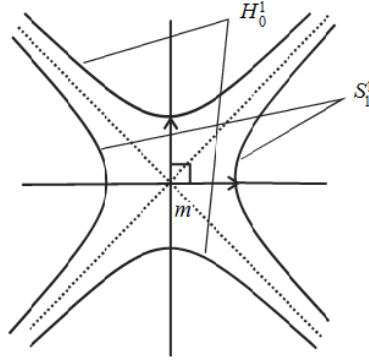
Tanım E.5. $\mathbb{R}_1^2$ düzleminde *Lorentziyen birim çember*

$$S_1^1 = \{ \vec{a} \in \mathbb{R}_1^2 \mid \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1 \}$$

biçiminde tanımlanır. Bu çemberin teğetleri daima timelike vektörlerdir. Benzer olarak, *hiperbolik birim çember* de

$$H_0^1 = \{ \vec{a} \in \mathbb{R}_1^2 \mid \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = -1 \}$$

biçiminde tanımlı olup, bu eğrinin teğetleri de spacelike vektörlerdir [32,34].



Şekil E.1. Lorentziyen ve hiperbolik birim çemberler

Teorem E.1. $\mathbb{R}_1^2$ uzayında iki spacelike (veya timelike) vektör dik olamaz [32,33].

Tanım E.6. $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^2$, bir timelike vektör olsun. $\vec{e} = (0,1)$ olmak üzere,

i) $\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle < 0$ ise $\vec{a}$ 'ya *future pointing timelike* vektör,

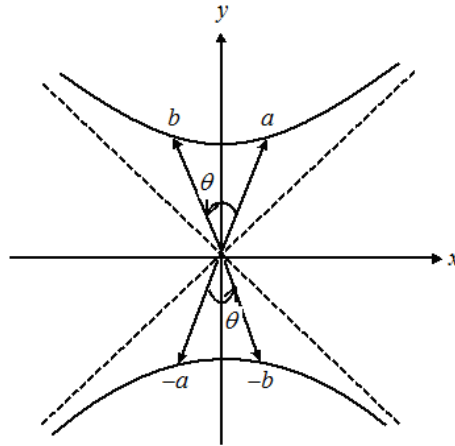
ii) $\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle > 0$ ise $\vec{a}$ 'ya *past pointing timelike* vektör

denir [32,33].

Tanım E.7. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$, $\mathbb{R}_1^2$ uzayında futura pointing (veya past pointing) timelike iki birim vektör olsun.

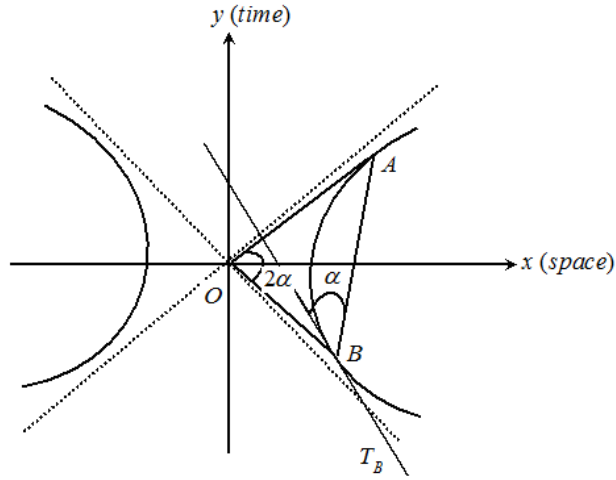
$$\begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

eşitliğini sağlayan $\theta \in \mathbb{R}$ sayısına, $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ ye (yönlendirilmiş) hiperbolik açı denir [6].



Şekil E.2. Hiperbolik açı

Teorem E.2. A ve B , $x^2 - y^2 = r^2$, $x > 0$ Lorentziyen çemberde iki nokta olsun. Böylece T_B teğet doğrusu ve AB yayı arasındaki açı AB yayını gören merkez açının yarısıdır [6].



Şekil E.3. Lorentziyen düzlemde merkez açı teoremi

$\mathbb{R}_1^3$ Lorentziyen 3-Uzayı

Tanım E.8. $\mathbb{R}^3$ standart reel vektör uzayı üzerinde

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (\text{E.4})$$

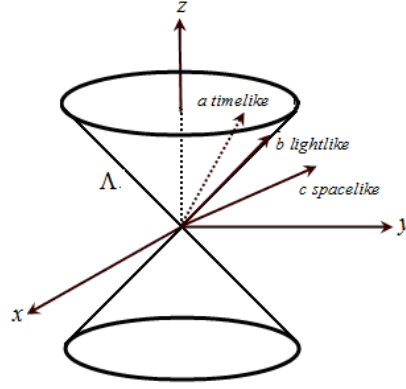
ile verilen Lorentziyen iç çarpımı tanımlanırsa, $\mathbb{R}^3$ afin uzayı, *Minkowski 3-uzayı* veya *Lorentziyen 3-uzay* olarak isimlendirilir ve $\mathbb{R}_1^3$ ile gösterilir [20].

Tanım E.9. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında herhangi bir vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere,

- i) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$ veya $\vec{a} = 0$ ise, $\vec{a}$ ya spacelike vektör,
- ii) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle < 0$ ise, $\vec{a}$ ya timelike vektör,
- iii) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ ve $\vec{a} \neq 0$ ise, $\vec{a}$ ya lightlike (null) vektör

denir [20].

Timelike vektörler, ışık konisinin içinde, lightlike (vaya null) vektörler ışık konisinin üzerinde ve spacelike vektörler de ışık konisinin dışında bulunurlar.



Şekil E.4. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında vektörler

Tanım E.10. $\mathbb{R}_1^3$ uzayındaki bir $\vec{\alpha}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisi için $\vec{\alpha}'(t)$ türevi timelike vektör ise eğriye timelike eğri, $\vec{\alpha}'(t)$ türevi spacelike vektör ise eğriye spacelike eğri ve $\vec{\alpha}'(t)$ türevi bir null vektör ise eğriye null eğri denir [20].

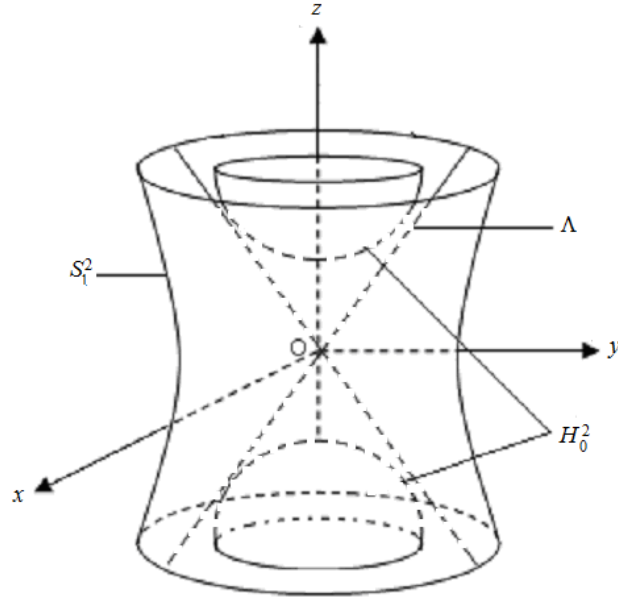
Tanım E.11. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında Lorentziyen birim küre

$$S_1^2 = \{\vec{a} \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1\}$$

biçiminde tanımlanır. Benzer olarak, *hiperbolik birim küre* de

$$H_0^2 = \{\vec{a} \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = -1\}$$

şeklinde tanımlanır [30,31].



Şekil E.5. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında birim küreler

Tanım E.12. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $A^{-1} = \varepsilon A^T \varepsilon$ eşitliğini sağlayan A matrisine *Lorentziyen anlamda ortogonal matris* denir [20].

Tanım E.13. $S^T = -\varepsilon S \varepsilon$ eşitliğini sağlayan S matrisine *Lorentziyen anlamda anti-simetrik matris* denir [20].

Tanım E.14. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ iki vektör olsun. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olmak üzere,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_1 b_3 - a_3 b_1, a_2 b_1 - a_1 b_2) \quad (\text{E.5})$$

vektörüne, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ nin *Lorentziyen vektörel çarpımı* denir [29,33].

Teorem E.2. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında üç vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ve $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ olsun. Bu durumda,

$$i) \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \quad (E.6)$$

$$ii) (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a} \quad (E.7)$$

$$iii) \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = 0 \text{ ve } \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0 \quad (E.8)$$

$$iv) \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = -\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle + (\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle)^2 \quad (E.9)$$

[32,33].

Tanım E.15. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3-uzayında bir yüzey M ile gösterilsin. M yüzeyinin her noktasındaki yüzey normal vektörü timelike ise bu yüzeye *spacelike yüzey*, yüzey normal vektörü spacelike ise de yüzeye *timelike yüzey* denir [1].

Tanım E.16. i) Hiperbolik Açı: $\vec{a}$ ve $\vec{b}$, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında future pointing (veya past pointing) timelike vektörler olsunlar. Bu taktirde, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cosh \bar{\theta}$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta \geq 0$ reel sayısına $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir [6].

ii) Merkez Açı: $\vec{a}$ ve $\vec{b}$, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında iki spacelike vektör olsun ve bu vektörler timelike alt vektör uzayını gersinler. Bu taktirde, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cosh \bar{\theta}$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta \geq 0$ reel sayısına $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki *merkez açı* denir [5,23,29,35].

iii) Spacelike Açı: $\vec{a}$ ve $\vec{b}$, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında iki spacelike vektör olsun ve bu vektörler spacelike alt vektör uzayını gersinler. Bu taktirde, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \bar{\theta}$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta \geq 0$ reel sayısına $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki *spacelike açı* denir [5,23,29,35].

iv) Lorentziyen Timelike Açı: $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\vec{a}$ bir spacelike vektör ve $\vec{b}$ bir timelike vektör olsun. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sinh \bar{\theta}$ olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta \geq 0$ reel sayısına $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki *Lorentziyen timelike açı* denir [5,23,29,35].

E.1.1. Lorentziyen 3-Uzayında Eğrilerin Frenet Formülleri

Bu kesimde Lorentziyen 3-uzayında verilen eğrinin karakteri göz önünde tutularak Frenet türev denklemleri hatırlatılacaktır [16].

a) Timelike Durumu

$\alpha'(s) = T(s)$, s anında *teğet vektör* olarak adlandırılır. $\alpha(s)$ timelike eğri olsun. Bu takdirde $T'(s) \neq 0$, $T(s)$ den bağımsız bir spacelike vektördür. s anında α nın *eğriliği* $\kappa(s) = |T'(s)|$ olarak tanımlanır. $N(s)$ *normal vektörü* ise

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$. $B(s)$ *binormal vektörü*

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

olarak tanımlanır. $B(s)$ birim ve spacelike vektördür. Her bir s için, $\{T, N, B\}$ $\mathbb{R}_1^3$ ün bir ortonormal bazı olup α nın *Frenet üçyüzlüsü* olarak adlandırılır. s anında α nın *burulması*

$$\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle$$

olarak tanımlanır. Frenet üçyüzlüsünün vektör fonksiyonlarının her birinin türevinin alınmasıyla

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (E.10)$$

Frenet türev denklemleri elde edilir [16].

b) Spacelike Durumu

α spacelike bir eğri olsun. $T'(s)$ nin karakterine bağlı olarak üç durum söz konusudur.

i) $T'(s)$ spacelike vektör olsun. $\kappa(s) = |T'(s)|$, $N(s) = T'(s)/\kappa(s)$ ve $B(s) = T(s) \times N(s)$ dir. $N(s)$ ve $B(s)$ vektörleri, sırasıyla, *normal vektör* ve *binormal vektör* olarak adlandırılır. α nın *eğriliği* κ ile tanımlıdır. α nın *burulması* $\tau = -\langle N', B \rangle$ ile tanımlıdır. Frenet türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (\text{E.11})$$

şeklindedir [16].

ii) $T'(s)$ timelike vektör olsun. $N = T'/\kappa$ normal vektördür burada $\kappa(s) = \sqrt{-\langle T'(s), T'(s) \rangle}$ α nın *eğriliği*dir. $B = T \times N$ binormal vektör olup spacelike vektördür. α nın *burulması* $\tau = \langle N', B \rangle$ ile tanımlıdır. Frenet türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (\text{E.12})$$

şeklindedir [16].

iii) $T'(s)$ lightlike vektör olsun. Normal vektör $N(s) = T'(s)$ ile tanımlıdır. B binormal vektörü $\langle N, B \rangle = 1$ olacak şekilde tektir ve T ye diktir. τ , α nın *burulması*dır. α nın *eğriliği* tanımlı değildir. Frenet türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -1 & 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (\text{E.13})$$

şeklindedir [16].

E.1.2. Lorentziyen 3-Uzayında Regle Yüzeylerin Diferansiyel Geometrisi

Bu kesimde Lorentziyen 3-uzayında regle yüzeylerin diferansiyel geometrisini hatırlatalım [22,26].

I , reel sayılarda bir açık aralık olsun. $\mathbf{k} = \mathbf{k}(s)$ eğrisinin $\mathbb{R}_1^3$ uzayında I üzerinde tanımlanmış olduğunu ve $\mathbf{q} = \mathbf{q}(s)$ vektörünün de $\mathbb{R}_1^3$ uzayında bir birim vektör doğrultusunda verilmiş bir yönlü doğru olduğunu kabul edelim. Bu taktirde bir M regle yüzeyinin parametrik ifadesi

$$\varphi(s, v) = \mathbf{k}(s) + v\mathbf{q}(s) \quad (\text{E.14})$$

ile verilir.

Öklit uzayında verilen tüm tanımların Lorentziyen 3-uzayında da karşılıkları mevcuttur. Bir M regle yüzeyinin boğaz noktası, iki komşu ana doğrunun ortak dikme ayaklarının uç noktalarıdır. Boğaz noktalarının cümlesi yüzey üzerinde bir $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ eğrisi meydana getirir. Bu eğriye *boğaz çizgisi* denir. Bu regle yüzey üzerindeki $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ boğaz çizgisinin parametrik ifadesi

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{k}(s) - \frac{\langle d\mathbf{q}/ds, d\mathbf{k}/ds \rangle}{\langle d\mathbf{q}/ds, d\mathbf{q}/ds \rangle} \mathbf{q}(s) \quad (\text{E.15})$$

ile verilir. Böylece, regle yüzeyin dayanak eğrisinin boğaz çizgisine eşit olması için gerek ve yeter şart $\langle d\mathbf{q}/ds, d\mathbf{k}/ds \rangle = 0$ olmasıdır.

(E.14) ile verilen regle yüzeyin dağılma parametresinin (dralinin) ifadesi

$$\delta_\varphi = \frac{|d\mathbf{k}/ds, \mathbf{q}, d\mathbf{q}/ds|}{\langle d\mathbf{q}/ds, d\mathbf{q}/ds \rangle} \quad (\text{E.16})$$

olarak verilir [1]. Eğer $|d\mathbf{k}/ds, \mathbf{q}, d\mathbf{q}/ds| = 0$ ise, bu takdirde, aynı ana doğrunun bütün noktalarında normal vektörler lineer bağımlıdır ve M yüzeyinin singüler olmayan noktalarında teğet düzlemler aynı kalır. Bu durumda teğet düzlemin yüzeyle bir doğru boyunca temasta olduğunu söyleriz. Böyle bir ana doğruya *torsal ana doğru* denir. Eğer $|d\mathbf{k}/ds, \mathbf{q}, d\mathbf{q}/ds| \neq 0$

ise, bu takdirde M yüzeyinin teğet düzlemleri aynı ana doğru üzerindeki tüm noktalarda birbirinden farklıdır. Böyle bir ana doğruya da *torsal olmayan ana doğru* denir [30,31].

Tanım E.17. Minkowski 3-uzayında bütün ana doğruları torsal olan bir regle yüzeye *açılabilir regle yüzey* denir. Diğer regle yüzeyler de *aykırı (açılabilir olmayan) regle yüzeyler* olarak adlandırılırlar [30,31].

Teorem E.3. Minkowski 3-uzayında bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart her noktasında dağılma parametresinin $\delta = 0$ olmasıdır [1,26,27,30,31].

$$\mathbf{h} = \frac{d\mathbf{q}/ds}{\|d\mathbf{q}/ds\|} \text{ ve } \mathbf{a} = \frac{(d\mathbf{q}/ds) \times \mathbf{q}}{\|d\mathbf{q}/ds\|} \text{ vektörleri, sırasıyla, } M \text{ regle yüzeyinin merkez}$$

normali ve *asimptotik normali* olarak adlandırılırlar. Boğaz noktası C ile gösterilmek üzere $\{C; \mathbf{q}, \mathbf{h}, \mathbf{a}\}$ ortonormal sistemine regle yüzeyin *Frenet çatısı* denir. M regle yüzeyinin bir s_1 ana doğrusundan geçen ve $\mathbf{a}$ vektörüne dik olan düzleme *asimptotik düzlem* denir ve α ile gösterilir. s_1 ana doğrusundan geçen ve α asimptotik düzlemine dik olan γ teğet düzlemine de *merkez düzlem* denir [30,31].

Şimdi, Frenet vektörleri ve türevleri null olmayan bir M regle yüzeyini ele alalım. Ana doğruların ve merkez normalin Lorentziyen karakterine göre M regle yüzeyi için aşağıdaki sınıflandırmalar verilebilir:

i) Eğer $\mathbf{h}$ merkez normal vektörü spacelike ve $\mathbf{q}$ ana doğrusu timelike ise, bu takdirde M regle yüzeyine M_-^1 tipindendir denir.

ii) Eğer hem $\mathbf{h}$ merkez normal vektörü hem de $\mathbf{q}$ ana doğrusu spacelike ise, bu takdirde M regle yüzeyine M_+^1 tipindendir denir.

iii) Eğer hem $\mathbf{h}$ merkez normal vektörü timelike, $\mathbf{q}$ ana doğrusu spacelike ise, bu takdirde M regle yüzeyine M_+^2 tipindendir denir [15,22,30,31].

Bu sınıflandırmada gösterim yaparken alt indis olarak ana doğruların karakteri dikkate alınmış, üst indis olarak da regle yüzeyin timelike veya spacelike olması durumu düşünülmüş, timelike regle yüzeyler için 1, spacelike regle yüzeyler için de 2 üst indisi kullanılmıştır. Buna göre M_+^1 ve M_-^1 tipinden olan regle yüzeyler timelike, M_+^2 tipinden olan regle yüzeyler de spacelike regle yüzeylerdir.

Bu sınıflandırmaya göre M regle yüzeyinin parametrik ifadesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\bar{\varphi}(s, v) = \mathbf{k}(s) + v\mathbf{q}(s). \quad (\text{E.17})$$

Burada $\langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = \varepsilon_1 (= \pm 1)$, $\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \varepsilon_2 (= \pm 1)$ dır.

$\mathbf{q}(s)$ birim vektörleri bir O başlangıç noktasına bağlanırsa bir koni oluştururlar. Bu koniye M regle yüzeyinin *yönlü konisi* denir. Eğer $\varepsilon_2 = -1$ ($\varepsilon_2 = 1$) ise $\mathbf{q}(s)$ vektörlerinin uç noktaları H_0^2 hiperbolik birim küresi (S_1^2 Lorentziyen birim küresi) üzerinde bir eğri çizerler. Bu eğriye, M regle yüzeyinin *hiperbolik (Lorentziyen) küresel resmi* denir [22,30,31].

a) Timelike Regle Yüzeylerin Frenet Denklemleri ve Frenet İnvaryantları

$\{C; \mathbf{q}, \mathbf{h}, \mathbf{a}\}$ üçlüsü, bir M timelike regle yüzeyinin Frenet çatısı olsun. Burada C , M timelike regle yüzeyinin boğaz noktası ve $\mathbf{q}, \mathbf{h}, \mathbf{a}$ vektörleri de, sırasıyla, ana doğrunun birim doğrultmanı, merkez normal ve merkez teğetidir. Bu çatı, M_+^1 veya M_-^1 tipinden olan M timelike regle yüzeyinin *Frenet çatısı* olarak adlandırılır ve bu çatı için

$$\mathbf{q} \times \mathbf{h} = \varepsilon_2 \mathbf{a}, \quad \mathbf{h} \times \mathbf{a} = -\varepsilon_2 \mathbf{q}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{q} = -\mathbf{h}, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = -\varepsilon_2 \quad (\text{E.18})$$

eşitlikleri geçerlidir.

M timelike regle yüzeyinin bütün birim doğrultman vektörleri, yani $\mathbf{q}(s)$ vektörleri, bir O başlangıç noktasına bağlanırsa bir koni oluştururlar. Bu koniye timelike regle yüzeyin *yönlü konisi* denir. $\varepsilon_2 = -1$ (veya $\varepsilon_2 = 1$) ise $\mathbf{q}(s)$ vektörlerinin uç noktaları H_0^2 hiperbolik birim küresi (S_1^2 Lorentziyen birim küresi) üzerinde bir küresel spacelike eğri çizerler. Bu eğri M timelike regle yüzeyinin hiperbolik (Lorentziyen) *küresel göstergesi* olarak adlandırılır ve yay parametresi s_1 ile gösterilir [22,26,30].

Teorem E.4. M_+^1 veya M_-^1 tipindeki bir M timelike regle yüzeyinin ve bu yüzeyin yönlü konisinin $\{O; \mathbf{q}, \mathbf{h}, \mathbf{a}\}$ Frenet çatısının vektörlerinin α_1 küresel eğrisinin s_1 yayına göre türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} dq/ds_1 \\ dh/ds_1 \\ da/ds_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon_2 & 0 & \kappa \\ 0 & \varepsilon_2 \kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \\ a \end{bmatrix} \quad (\text{E.19})$$

şeklinde [22,26,30]. (E.19) eşitliği yardımıyla $\{O; q, h, a\}$ Frenet çatısının Darboux vektörü

$w_1 = \varepsilon_2 \kappa q - a$ olarak verilebilir. (E.19) denklemlerinin $\frac{ds_1}{ds} = k_1$ birinci eğriliği ile çarpılmasıyla

aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem E.5. M_+^1 veya M_-^1 tipindeki bir M timelike regle yüzeyinin ve bu yüzeyin yönlü konisinin $\{O; q, h, a\}$ Frenet çatısının vektörlerinin boğaz çizgisinin s yayına göre türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} dq/ds \\ dh/ds \\ da/ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -\varepsilon_2 k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & \varepsilon_2 k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \\ a \end{bmatrix} \quad (\text{E.20})$$

ile verilir. Burada $k_1 = \frac{ds_1}{ds}$, $k_2 = \frac{ds_3}{ds}$ olup, s_1 ve s_3 ifadeleri de sırasıyla q ve a vektörleri ile

çizilen α_1 ve α_3 küresel eğrilerinin yay parametreleridirler [22,26,30].

$\{O; q, h, a\}$ Frenet çatısının vektörlerinin yüzeyin boğaz çizgisinin yayına göre türevleri için Darboux vektörü $w_2 = \varepsilon_2 k_2 q - k_1 a$ olarak verilebilir.

Şimdi c boğaz çizgisinin timelike veya spacelike olması durumlarını ayrı ayrı ele alalım.

1. Durum: c Boğaz Çizgisinin Timelike Olması Durumu

c boğaz çizgisinin timelike ve regle yüzey M_-^1 tipinden olsun. Bu taktirde boğaz çizgisinin t teğet vektörü ile timelike ana doğru arasındaki θ açısı hiperbolik açıdır. Buradan,

$$t = \frac{dc}{ds} = (\cosh \theta)q + (\sinh \theta)a \quad (\text{E.21})$$

yazılabilir. Böylece timelike regle yüzeyin denklemi

$$\varphi(s, v) = c(s) + vq(s) \quad (\text{E.22})$$

iken boğaz çizgisinin denklemi

$$c(s) = \int ((\cosh \theta)q + (\sinh \theta)a) ds \quad (\text{E.23})$$

dir. (E.16) ve (E.20) ifadeleri yardımıyla dağılma parametresi için

$$\delta_q = \frac{\left| \frac{dc}{ds}, q, \frac{dq}{ds} \right|}{\left\langle \frac{dq}{ds}, \frac{dq}{ds} \right\rangle} = \frac{|t, q, \vec{h}|}{k_1} \quad (\text{E.24})$$

yazılabilir. (E.17) ve (E.20) eşitliklerinden de

$$\sinh \theta = \langle a, t \rangle = \langle -q \times h, t \rangle = |t, q, h| = k_1 \delta_q \quad (\text{E.25})$$

elde edilir.

M_-^1 tipinden timelike regle yüzeyin yönlü konisinin $\vec{\alpha}_t$ hiperbolik küresel eğrisinin yay parametresi s_1 olsun. (E.25) ile, (E.21) denklemi ve timelike regle yüzeyin Frenet formülleri

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dc}{ds_1} = \frac{\cosh \theta}{k_1} q + \frac{\sinh \theta}{k_1} a = fq + \delta_q a \\ \frac{dq}{ds_1} = h \\ \frac{dh}{ds_1} = q + \kappa a \\ \frac{da}{ds_1} = -\kappa h \end{array} \right. \quad (\text{E.26})$$

şeklini alır. $f(s_1)$, $\delta_q(s_1)$, $\kappa(s_1)$ fonksiyonları M_-^1 tipinden timelike regle yüzeyin invariantları olarak adlandırılırlar. Bu invariantlar, timelike regle yüzeyi, uzaydaki konuma göre tek olarak belirlerler [22,26,30].

1. Durum: c Boğaz Çizgisinin Spacelike Olması Durumu

c boğaz çizgisi spacelike ve regle yüzey M_+^1 tipinden olsun. Bu takdirde boğaz çizgisinin t teğet vektörü ile spacelike anadoğrusu arasındaki θ açısı merkez açıdır. Buradan,

$$t = \frac{dc}{ds} = (\cosh \theta)q + (\sinh \theta)a \quad (\text{E.27})$$

yazılabilir. M_+^1 tipinden timelike regle yüzeyin yönlü konisinin α_l Lorentziyen küresel eğrisinin yay parametresi s_1 olsun. Bu taktirde yukarıda verildiği gibi timelike regle yüzeyin Frenet türev formülleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dc}{ds_1} = \frac{\cosh \theta}{k_1} q + \frac{\sinh \theta}{k_1} a = f q + \delta_q a \\ \frac{dq}{ds_1} = h \\ \frac{dh}{ds_1} = -q + \kappa a \\ \frac{da}{ds_1} = \kappa h \end{array} \right. \quad (\text{E.28})$$

$f(s_1)$, $\delta_q(s_1)$, $\kappa(s_1)$ fonksiyonları M_+^1 tipinden timelike regle yüzeyin invaryantları olarak adlandırılırlar. Bu invaryantlar, timelike regle yüzeyi, uzaydaki konuma göre tek olarak belirlerler [22,26,30].

b) Spacelike Regle Yüzeylerin Frenet Denklemleri ve Frenet İnvaryantları

M regle yüzeyi, M_+^2 tipinden spacelike regle yüzey olsun. Yüzeyin Frenet çatısı da $\{C; q, h, a\}$ üçlüsü ile verilsin. Burada C , M timelike regle yüzeyinin boğaz noktası ve q, h, a vektörleri de, sırasıyla, ana doğrunun birim doğrultmanı, merkez normal ve merkez teğetidir. Bu vektörler arasında

$$q \times h = -a, \quad h \times a = -q, \quad a \times q = h \quad (\text{E.29})$$

eşitlikleri sağlanır.

M spacelike regle yüzeyinin bütün birim doğrultman vektörleri, yani $\mathbf{q}(s)$ vektörleri, bir O başlangıç noktasına bağlanırsa bir koni oluştururlar. Bu koniye spacelike regle yüzeyin *yönlü konisi* denir. $\mathbf{q}(s)$ vektörlerinin uç noktaları S_1^2 Lorentziyen birim küresi üzerinde bir küresel timelike eğri çizerler. Bu eğri, M spacelike regle yüzeyinin Lorentziyen küresel göstergesi olarak adlandırılır ve yay parametresi s_1 ile gösterilir [22,26,30].

Teorem E.6. Bir M timelike regle yüzeyinin ve bu yüzeyin yönlü konisinin $\{O; \mathbf{q}, \mathbf{h}, \mathbf{a}\}$ Frenet çatısının vektörlerinin α_1 küresel eğrisinin s_1 yayına göre türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{q}/ds_1 \\ d\mathbf{h}/ds_1 \\ d\mathbf{a}/ds_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa \\ 0 & \kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (\text{E.30})$$

şeklindedir [22,26,31].

$\{O; \mathbf{q}, \mathbf{h}, \mathbf{a}\}$ Frenet çatısının vektörlerinin yüzeyin boğaz çizgisinin yayına göre türevleri için Darboux vektörü $\mathbf{w}_1 = -\kappa \mathbf{q} + \mathbf{a}$ olarak verilebilir. (E.30) denklemlerinin $\frac{ds_1}{ds} = k_1$ birinci eğriliği ile çarpılmasıyla aşağıdaki teorem verilir.

Teorem E.7. Bir M spacelike regle yüzeyinin ve bu yüzeyin yönlü konisinin $\{O; \mathbf{q}, \mathbf{h}, \mathbf{a}\}$ Frenet çatısının vektörlerinin boğaz çizgisinin s yayına göre türev denklemleri ile verilir.

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{q}/ds \\ d\mathbf{h}/ds \\ d\mathbf{a}/ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (\text{E.31})$$

Burada $k_1 = \frac{ds_1}{ds}$, $k_2 = \frac{ds_3}{ds}$ olup s_1 ve s_3 ifadeleri de sırasıyla $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{a}$ vektörleri ile çizilen α_1 ve α_3 küresel eğrilerinin yay parametreleridirler [22,26,31].

$\{O; \mathbf{q}, \mathbf{h}, \mathbf{a}\}$ Frenet çatısının vektörlerinin yüzeyin boğaz çizgisinin yayına göre türevleri için Darboux vektörü $\mathbf{w}_2 = -k_2 \mathbf{q} + k_1 \mathbf{a}$ olarak verilebilir.

$\mathbf{c}$ spacelike eğrisi, spacelike regle yüzeyin boğaz çizgisi olsun. Bu taktirde boğaz çizgisinin $\mathbf{t}$ teğet vektörü ile spacelike ana doğru arasındaki θ açısı merkez açıdır. Buradan,

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{c}}{ds} = (\cos \theta)\mathbf{q} + (\sin \theta)\mathbf{a} \quad (\text{E.32})$$

yazılabilir. Böylece spacelike regle yüzeyin denklemi

$$\varphi(s, v) = \mathbf{c}(s) + v\mathbf{q}(s) \quad (\text{E.33})$$

iken boğaz çizgisinin denklemi

$$\mathbf{c}(s) = \int ((\cos \theta)\mathbf{q} + (\sin \theta)\mathbf{a}) ds \quad (\text{E.34})$$

dir. Buradan dağılma parameresinin ifadesi ve (E.31) ifadeleri yardımıyla dağılma parametresi için

$$\delta_q = \frac{\left| \frac{d\mathbf{c}}{ds}, \mathbf{q}, \frac{d\mathbf{q}}{ds} \right|}{\left\langle \frac{d\mathbf{q}}{ds}, \frac{d\mathbf{q}}{ds} \right\rangle} = \frac{|\mathbf{t}, \mathbf{q}, \mathbf{h}|}{k_1} \quad (\text{E.35})$$

yazılabilir. (E.32) ve (E.35) eşitliklerinden de

$$\sin \theta = \langle \mathbf{a}, \mathbf{t} \rangle = \langle -\mathbf{q} \times \mathbf{h}, \mathbf{t} \rangle = |\mathbf{t}, \mathbf{q}, \mathbf{h}| = k_1 \delta_q \quad (\text{E.36})$$

elde edilir.

M_+^2 tipinden spacelike regle yüzeyin yönlü konisinin α_l Lorentziyen küresel eğrisinin yay parametresi s_1 olsun. (E.36) ile, (E.32) denklemi ve spacelike regle yüzeyin Frenet formülleri

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dc}{ds_1} = \frac{\cos \theta}{k_1} \mathbf{q} + \frac{\sin \theta}{k_1} \mathbf{a} = f\mathbf{q} + \delta_q \mathbf{a} \\ \frac{d\mathbf{q}}{ds_1} = \mathbf{h} \\ \frac{d\mathbf{h}}{ds_1} = \mathbf{q} + \kappa \mathbf{a} \\ \frac{d\mathbf{a}}{ds_1} = \kappa \mathbf{h} \end{array} \right. \quad (\text{E.37})$$

şeklini alır. $f(s_1)$, $\delta_q(s_1)$, $\kappa(s_1)$ fonksiyonları spacelike regle yüzeyin invariantları olarak adlandırılırlar. Bu invariantlar, spacelike regle yüzeyi, uzaydaki konuma göre tek olarak belirlerler [22,26,31].

REFERANSLAR

- [1] Abdel-All N.H., Abdel-Baky R. A., Hamdoon F. M., “*Ruled Surfaces with Timelike Rulings*”, App. Math. And Comp., 147:241-253, 2004.
- [2] Abdel-Baky, R.A., Al-Solamy, F. R., “*A New Geometrical Approach to One-Parameter Spatial Motion*”, J. Eng. Math., 60:149-172, 2008.
- [3] Angeles, J., “*The Application of Dual Algebra to Kinematic Analysis*”, In J. Angeles, E. Zakhariev (eds): Computational Methods in Mechanical Systems, volume 161, pages 3-31, Heidelberg, Springer- Verlag, 1998.
- [4] Aydoğmuş, Ö. H., “*Lorentz Uzay Hareketleri ve Lie Grupları*”, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 2007.
- [5] Aydoğmuş, Ö., Kula, L., Yaylı, Y., “*On Point-line Displacement in Minkowski 3-space*”, Differ. Geom, Syst., 10:32-43, 2008.
- [6] Birman, G.S., Nomizu, K., “*Trigonometry in Lorentzian geometry*,” Amer. Math. Montly, 91(9), 543-549, 1984.
- [7] Blaschke, W., “*Differential Geometrie and Geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie*”, New York, 1945.
- [8] Disteli, M., “*Über instantane Schraubengeschwindigkeiten und die Verzahnung der Hyperboloidräder*”, Z. Math. Phys., 51: 51-88, 1904.
- [9] Disteli, M., “*Über die Verzahnung der Hyperboloidräder mit geradlinigem Eingriff*”, Z. Math. Phys., 59: 244-298, 1911.
- [10] Disteli, M., “*Über das Analogon der Savaryschen Formel und Konstruktion in der Kinematischen Geometrie des Raumes*”, Z. Math. Phys., 62: 261-309, 1914.
- [11] Figliolini, G., Angeles, J., “*On the Geometry of the Kinematic Synthesis of the Spatial Gears with Skew Axes*”, XIV. Congresso Nazionale dell'Associazione Italiana di Meccanica Teorica ed Applicata, Como, Meccanica delle Macchine-Paper No. 31., 1999.

- [12] Figliolini, G., Stachel, H., Angeles, J., "On *Martin Disteli's Main Achievements in Spatial Gearing: Disteli Diagram*", European Conf. on Mech. Sci., Austria, 2006.
- [13] Güngör, M.A., "*Lorentz Uzayında Bir Prametreli Dual Hareketler*", Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 2006.
- [14] Hacısalihoğlu, H.H., "*Hareket Gometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*", Gazi Üniversitesi Fen-Edb. Fakültesi, 1983.
- [15] Kim, Y. H., Yoon, W. D., "*Classification of Ruled Surfaces in Minkowski 3-space*", J. of Geom. and Physics, 49:89-100, 2004.
- [16] Lopez, R., "*Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space*", Mini-Course taught at the IME-USP, Brazil, 2008.
- [17] McCarthy, J.M., "*Geometric Design of Linkages*", Springer-Verlag, New York, 2000.
- [18] Kotelnikov, A.P., "*Screw Calculus and Some Applications to Geometry and Mechanics*" Annals of the Imperial of Kazan, 1895.
- [19] Müller, H.R., "*Kinematik Dersleri*" (çeviri), Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları 27, 1963.
- [20] O'Neill, B., "*Semi Riemannian Geometry*", Academic Press, New York-London, 1983.
- [21] Önder, M., Uğurlu, H.H., Çalışkan, A., "*The Euler-Savary Analogue Equations of a Point Trajectory in Lorentzian Spatial Motion*", Proc. Natl. Acad. Sci., India, Sect. APhys. Sci. DOI 10.1007/s40010-012-0050-8.
- [22] Önder, M., "*Reel ve Dual Uzaylarda Regle Yüzeylerin Mannheim Ofsetleri*", Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 2012.
- [23] Ratcliffe, J.G., "*Foundations of Hyperbolic Manifolds*", Springer, New York, 2006.
- [24] Schaaf, J.A., "*Curvature Theory of Line Trajectories in Spatial Kinematics*", University of California, PhD Thesis, Davis, 1988

- [25] Study, E., “*Geometrie der Dynamen*”, Verlag Teubner, Leipzig, 1903.
- [25] Şenol, A., “*Dual Küresel Timelike ve Spacelike Eğrilerin Geometrisi ve Özel Regle Yüzeyler*”, Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 2000.
- [27] Turgut, A., “*3-Boyutlu Mikowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler*”, A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 1995.
- [28] Uğurlu, H.H., Çalışkan, A., Kılıç, O., “*Instantaneous Lorentzian Spatial Kinematics and the Invariants of the axodes*”, IV. International Geometry Symposium 17-21 July 2006, Zonguldak.
- [29] Uğurlu, H.H., Çalışkan, A., “*The Study Mapping for Directed Spacelike and Timelike Lines in Minkowski 3-Space IR_1^3* ”, Mathematical&Computational Applications, 1996,1(2), 142-148.
- [30] Uğurlu H.H., Önder M., “*Instantaneous Rotation vectors of Skew Timelike Ruled Surfaces in Minkowski 3-space*”, VI. Geometry Symposium, 01-04 July 2008, Bursa, Turkey.
- [31] Uğurlu H. H., Önder M., “*On Frenet Frames and Frenet Invariants of Skew Spacelike Ruled Surfaces in Minkowski 3-space*”, VII. Geometry Symposium, 7-10 July 2009, Kırşehir, Turkey.
- [32] Uğurlu, H.H., Çalışkan, A., “*Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi*”, Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, Yayın No: 0006, 2012.
- [33] Uğurlu, H.H., Çalışkan, A., Kılıç, O., “*Öklid ve Lorentz Uzaylarında Doğrular Geometrisi*”, Ders Notları, Basım aşamasında.
- [34] Veldkamp, G.R., “*On the use of dual numbers, vectors, and matrices in instantaneous spatial kinematics*”, Mech. and Mach. Theory, 11: 141-156, 1976.
- [35] Yaylı, Y., Çalışkan, A., Uğurlu, H.H., “*The E. Study Maps of Circle on Dual Hyperbolic and Lorentzian Unit Spheres $\tilde{H}_0^2$ and $\tilde{S}_1^2$* ”, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy, 102A (1), 37–47 ,2002.

ÖZGEÇMİŞ**ADI SOYADI:** Zehra EKİNCİ**ÜNVANI:** Araştırma Görevlisi**DOĞUM TARİHİ:** 01.01.1987**DOĞUM YERİ:** İZMİR

İlk okulu, Hüseyin AKDAĞ İlkokulu'nda 1997 yılında tamamladı. Ortaokulu, Atatürk İlköğretim Okulu'nda 2000 yılında tamamladı. Aynı yıl Özel Malhun Hatun Lisesi'nde öğrenime başladı ve 2003 yılında mezun oldu. 2003 yılında Celal Bayar Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2007 yılında mezun oldu. Aynı yıl Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Cebir ve Sayılar Teorisi Programında eğitime başladı ve 2010 yüksek lisans derecesi aldı. Aynı yıl Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Geometri Programına Doktora öğrenimine başladı. 2009 yılından bu yana Celal Bayar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.