

**T.C.  
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
GEOMETRİ BİLİM DALI**

**DUAL ÖKLİD UZAYINDA  
SABİT GENİŞLİKLİ DUAL EĞRİLER**

**Nihal ERTEN**

**Danışman  
Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT**



**MANİSA-2016**

## TEZ ONAYI

**Nihal ERTEN** tarafından hazırlanan "**Dual vektör uzayında Sabit Genişlikli Eğriler**" adlı tez çalışması .../.../..... tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuş ve oyçokluğu / oybirliği başarılı olarak kabul edilmiştir.

**Danışman**

**Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT**

.....

Celal Bayar Üniversitesi

**Jüri Üyesi**

**Doç. Dr. Mustafa KAZAZ**

.....

Celal Bayar Üniversitesi

**Jüri Üyesi**

**Doç. Dr. Emin ÖZYILMAZ**

.....

Ege Üniversitesi

## **TAAHHÜTNAME**

Bu tezin Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

**Nihal ERTEN**



## İÇİNDEKİLER

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| İÇİNDEKİLER.....                                        | I   |
| SEMBOLLER DİZİNİ.....                                   | II  |
| ŞEKİLLER DİZİNİ.....                                    | III |
| TEŞEKKÜR .....                                          | IV  |
| ÖZET.....                                               | V   |
| ABSTRACT.....                                           | VI  |
| 1.GİRİŞ.....                                            | 1   |
| 2. TEMEL KAVRAMLAR .....                                | 2   |
| 3. DUAL GEOMETRİNİN TEMEL TANIM VE TEOREMLERİ.....      | 7   |
| 3.1. Dual Vektörlerin Uzayı ( $D$ -Modül ).....         | 9   |
| 4. DUAL ÖKLİD UZAYINDA SABİT GENİŞLİKLİ DUAL EĞRİLER .. | 15  |
| 5.SONUÇ VE ÖNERİLER.....                                | 34  |
| KAYNAKLAR.....                                          | 35  |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                           | 36  |

## SEMBOLLER DİZİNİ

|                    |                                                 |
|--------------------|-------------------------------------------------|
| $\mathbb{R}$       | Reel sayılar cümlesi                            |
| $\mathbb{R}^3$     | 3-boyutlu Öklid uzayı                           |
| $\mathbb{D}$       | Dual sayılar cümlesi                            |
| $\mathbb{D}^3$     | Dual Öklid uzayı                                |
| $\kappa$           | Frenet çatıya göre eğrilik                      |
| $\tau$             | Frenet çatıya göre burulma                      |
| $\alpha$           | Birim hızlı eğri                                |
| $\bar{\kappa}$     | $\tilde{\varphi}$ dual eğrisinin dual eğriliği  |
| $\bar{\tau}$       | $\tilde{\varphi}$ dual eğrisinin dual burulması |
| $\wedge$           | Vektörel çarpım                                 |
| $\langle, \rangle$ | İç çarpım                                       |
| $\  \cdot \ $      | Norm                                            |
| $\bar{\theta}$     | Dual açı                                        |
| $\theta$           | Yönlü doğrular arasındaki açı                   |
| $\theta^\bullet$   | Yönlü doğrular arasındaki uzaklık               |
| $\tilde{\gamma}$   | Dual sabit genişlikli eğri                      |
| $\tilde{\varphi}$  | Dual eğri                                       |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|                               | Sayfa |
|-------------------------------|-------|
| Şekil 3.1.1. Dual Açısı ..... | 13    |



## TEŐEKKÖR

Bu çalışmanın oluşmasında ve planlanmasında ve dŸzenli bir şekilde yŸrŸtŸlmesinde olumlu ve yapıcı eleştirileriyle bana yol gŸsteren Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. HŸseyin KOCAYİĞİT'e ve Değerli Hocam Doç. Dr. Mustafa KAZAZ'a teőekkŸrlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışma boyunca manevi desteklerini her zaman hissettiğim, bugŸnlere gelmeme yardımcı olan ve beni destekleyen aileme en içten teőekkŸrlerimi sunarım.

Nihal ERTEN

Manisa, 2016

## ÖZET

### Yüksek Lisans Tezi

### Dual Vektör Uzayında Sabit Genişlikli Dual Eğriler

Nihal ERTEN

Celal Bayar Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

Dual Öklid uzayında sabit genişlikli dual eğriler ile ilgili olan bu çalışma beş bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde sabit genişlikli eğriler üzerine daha önce yapılmış olan çalışmalar belirtilmiştir.

İkinci bölümde, bu çalışmada sözü geçen kavramlara ait temel tanımlar, sağlanması gereken şartlar verilmiştir. Ayrıca Öklid 3-uzayı tanımlanmış ve bu uzaydaki eğrilerin çatısı hakkında bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Dual geometri ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde Dual Öklid uzayında sabit genişlikli Dual eğrilerle ilgili diferensiyel karakterizasyonlar verilmiştir.

Beşinci bölümde de sonuç ve önerilerden bahsedilmiştir.

**Anahtar Kelimeler :** Eğri, sabit genişlikli eğriler, Dual çatı.

2016, 46 sayfa

## **ABSTRACT**

**M. Sc. Thesis**

### **The Dual Curves of Constant Breadth in Dual Euclidean space**

**Nihal ERTEN**

**Celal Bayar University  
Graduate School of Geometry  
Department of Mathematics**

**Supervisor: Assist. Prof. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT**

This study which is related to the Dual curves of constant breadth in Dual Euclidean space consists of five sections.

In the first section the studies which were done about the curves of constant breadth are mentained.

In the second section, the some basic definitions and conditions mentioned in the study are given. Furthermore, Euclidean 3-Space is defined and informations about the curves 3-space and their frames are given.

In the third section, the basic definitions and theorems about Dual geometry are given.

In the fourth section, the differential equations characterizing the Dual curves of constant breadth in Dual geometry are given.

In the fifth section, the results and suggestions are given.

**Keywords:** The curve, the curves of constant breadth, Dual frame

**2016, 46 pages**

## 1. GİRİŞ

Sabit genişlikli eğriler üzerine ilk çalışmanın 1778'de Euler tarafından yayınlandığı görülmektedir [1]. Euler düzlemdeki sabit genişlikli eğrileri vermiştir. Ball [2], Barbier [3], Blaschke [4] ve Mellish [5] düzlemdeki sabit genişlikli eğrilerin özellikleri üzerine çalışmıştır. Fujiwara 1914'deki çalışmasında 3 boyutlu Öklid uzayında sabit genişlikli uzay eğrisi kavramını tanımlamıştır [6]. Daha sonra Hammer düzlemsel sabit genişlikli eğrilerin analitik gösterimini vermiştir [7]. F. Reuleaux ise bu tür eğrileri bulmak için bir metot ile kinematik ve mühendislikte uygulamalarını vermiştir [8]. Smakal da sabit genişlikli eğriler üzerine çalışmıştır [9]. 1984'te Köse, Minkowski fonksiyonu tarafından verilen bir ovalde sabit genişlik koşulunun giderildiğini göstermiştir [10]. Daha sonra Köse, bir uzay eğrisi (C) verildiğinde, bir uzay eğrisinin ( $C^*$ ) ters yönlerde karşılıklı noktalarında aralarındaki uzaklığı sabit paralel teğetlerin belirlenebileceğini göstermiştir [11]. Daha sonra Sezer çalışmasında ele aldığı kavramları kullanarak, bu tür eğrileri karakterize eden diferansiyel denklemleri kurmuş ve bir uzay eğrisinin sabit genişlikli eğri olması için bir kriter vermiştir [12]. Daha sonra  $E^3$  de incelenen bu tür eğriler  $E^4$ 'e taşınmış ve bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir [13]. Bu çalışmaların ardından Akdoğan  $E^n$  de bu tür eğriler için oluşturulan diferansiyel denklemin çözümünü vermiştir [14]. 2013 yılında Minkowski 3-uzayında sabit genişlikli uzay eğrilerini H. Kocayiğit ve M. Önder çalışmışlardır. S. Yılmaz, 2008 yılında Dual Lorentz uzayında sabit genişlikli timelike dual eğriler ile ilgili bir çalışma yapmıştır. 2013 yılında  $D_1^3$  Dual Lorentz uzayında sabit genişlikli dual eğrileri farklı bir açıdan ele alıp incelemişlerdir [15]. Ayrıca onlar  $E_1^3$  de timelike veya spacelike eğrinin sabit genişlikli olması için gereken kriteri vermişlerdir. Kocayiğit ve Önder de, bazı özel durumlarda normal eğriler, helisler ve küresel eğrilerin  $E_1^3$ 'de spacelike ve timelike sabit genişlikli eğriler olabileceğini göstermişlerdir.

Biz bu çalışmada, Dual Öklid uzayında sabit genişlikli dual eğrilerle ilgili bazı karakterizasyonlar vereceğiz.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin ana konusuna temel teşkil edecek tanım ve kavramlar verilmiştir.

**Tanım 2.1. (Öklid Uzayı):**  $R$  reel sayılar cismini göstermek üzere,  $R^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) : x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$  vektör uzayında, iki vektör  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  ve  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$  olmak üzere,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

eşitliği ile tanımlanan,

$$R^n \times R^n \rightarrow R \quad (\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

fonksiyonu  $R^n$  uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma **Öklid iç çarpımı** denir [16].

**Tanım 2.2:**  $E^3$  Öklid 3-uzayında standart bir g metriği

$$g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

ile verilir. Burada  $(x_1, x_2, x_3)$   $E^3$  ün bir dik koordinat sistemidir [16].

**Tanım 2.3.**  $E^3$  de  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  ve  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$  vektörleri için vektörel çarpım

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

ile tanımlanır. Burada

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \quad e_1 = (\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}) \quad \text{ve} \quad e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1, \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

olarak verilir [16].

**Tanım 2.4. (Norm):**  $p \in R^n$  olmak üzere,

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

diyelim.  $R^n \rightarrow R$ ,  $p \rightarrow \|p\|$  fonksiyonu  $R^n$  uzayında bir normdur. Buna göre  $R^n$  vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır.  $d(p, q) = \|p - q\|$  biçiminde tanımlanan  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$  fonksiyonu,  $R^n$  uzayında bir metriktir. Dolayısıyla  $R^n$  bir metrik uzayıdır. Bu metrikle birlikte  $R^n$  uzayına **Öklid uzayı** denir ve kimi zaman  $E^n$  ile gösterilir [16].

**Tanım 2.5.**  $f$ ,  $R^n$  uzayından  $R$ ye giden bir fonksiyon olsun.  $f$  sürekli ise  $f$  fonksiyonu  $C^0$  sınıfından bir fonksiyondur.  $R^n$ den  $R$ ye giden  $C^0$  sınıfından bütün fonksiyonların kümesi  $C^0(R^n, R)$  biçiminde gösterilir.

$R^n$ nin her noktasında  $f$  fonksiyonunun kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise  $f$  fonksiyonu  $C^1$  sınıfındandır denir.

$f$  fonksiyonunun  $R^n$ nin her bir noktasında  $k$  ıncı basamaktan kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise  $f$  fonksiyonu  $C^k$  sınıfındandır.

$R^n$ den  $R$ ye giden  $C^k$  sınıfından bütün fonksiyonların kümesi  $C^k(R^n, R)$  biçiminde gösterilir.

$R^n$ nin her bir  $p$  noktasında  $f$  fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri varsa  $f$  fonksiyonu  $C^\infty$  sınıfındandır veya düzgün (pürüzsüz) fonksiyondur, denir.  $R^n$ den  $R$ ye giden  $C^\infty$  sınıfından bütün fonksiyonların kümesi  $C^\infty(R^n, R)$  biçiminde gösterilir.

$p \in R^n$  için  $f$  fonksiyonu  $p$  noktasının en az bir açık komşuluğunda düzgün ise  $f$  fonksiyonu,  $p$  noktasında  $C^\infty$  sınıfındandır veya düzgün (pürüzsüz) fonksiyondur [16].

**Tanım 2.6.**  $I$ ,  $R$  reel sayılar cisminin bir açık aralığı olmak üzere,  $\alpha : I \subset R \rightarrow E^n$  biçiminde diferensiyellenebilir  $\alpha$  dönüşümüne,  $E^n$  uzayı içinde bir **eğri** denir [16].

**Tanım 2.7.**  $I$ ,  $R$  reel sayılar cisminin bir açık aralığı olmak üzere,  $\alpha : I \subset R \rightarrow E^n$  bir diferensiyellenebilir bir eğri olsun.  $\alpha'(t)$  vektörüne  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(t)$  noktasındaki **hız vektörü** denir [16].

**Tanım 2.8.**  $\alpha: I \rightarrow R^n$  eğrisi verilsin. Her  $t \in I$  için  $\alpha'(t) \neq 0$  ise  $\alpha$  eğrisine **düzenli eğri** (regüler eğri) denir [16].

**Tanım 2.9.**  $E^n$  uzayında,  $\alpha: I \subset R \rightarrow E^n$  eğrisi için  $\forall s \in I, \|\alpha'(s)\|=1$  ise  $\alpha$  eğrisine **birim hızlı eğri** denir [16].

**Tanım 2.10.** 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı  $\alpha: I \subset R \rightarrow E^3$  eğrisi için  $\vec{t}(s) = \alpha'(s)$  eşitliğiyle belirli  $\vec{t}(s)$  vektörüne  $\alpha$  eğrisinin  $s$  noktasındaki **birim teğet vektörü** denir [16].

**Tanım 2.11.** 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı  $\alpha: I \subset R \rightarrow E^3$  eğrisi için,

$$\kappa: I \rightarrow R$$

$$s \rightarrow \kappa(s) = \|\vec{t}'(s)\|$$

fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir.  $\kappa(s)$  sayısına eğrinin  $s$  noktasındaki **eğriliği** denir [16].

**Tanım 2.12.** 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı  $\alpha: I \subset R \rightarrow E^3$  eğrisi için,  $\vec{n}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \vec{t}'(s)$  eşitliği ile belirli  $\vec{n}(s)$  vektörüne, eğrinin  $s$  noktasındaki **asli normal** denir [16].

**Tanım 2.13.** 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı  $\alpha: I \subset R \rightarrow E^3$  eğrisi için,  $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$  eşitliği ile tanımlı  $\vec{b}(s)$  vektörüne, eğrinin  $s$  noktasındaki **binormal** denir [16].

**Tanım 2.14.**  $\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)$  vektörlerine  $\alpha: I \rightarrow R^3$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet vektörleri denir.

$$\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$$

kümesine,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki **Frenet** çatısı denir.

$\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  vektör alanlarına,  $\alpha$  eğrisi üstünde **Frenet vektör alanları** denir [16].

**Tanım 2.15.**  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  birim hızlı eğrisinin Frenet vektörleri  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  olmak üzere,

$$\tau: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(s) = -\langle \vec{b}'(s), \vec{n}(s) \rangle$$

fonksiyonuna,  $\alpha$  eğrisinin **burulma fonksiyonu** denir.  $\tau(s)$  sayısına eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki **burulması** denir [16].

**Teorem 2.1.** Birim hızlı  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  ise

$$\vec{t}' = \kappa \vec{n}$$

$$\vec{n}' = -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b}$$

$$\vec{b}' = -\tau \vec{n}$$

dir [16].

**Teorem 2.2.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları,  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  olduğuna göre

$$\vec{n} \times \vec{b} = \vec{t}$$

$$\vec{b} \times \vec{t} = \vec{n}$$

$$\vec{t} \times \vec{n} = \vec{b}$$

dir [16].

**Tanım 2.16.**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin eğrilik fonksiyonu  $\kappa$  olmak üzere  $\frac{1}{\kappa}$  fonksiyonuna,  $\alpha$  eğrisinin **eğrilik yarıçapı fonksiyonu** denir ve  $\rho$  ile gösterilir.

$t \in I$  için  $\rho(t)$  sayısına  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin,  $\alpha(t)$  noktasındaki **eğrilik yarıçapı** denir [16].

**Tanım 2.17.**  $C$  ve  $C^*$ ,  $E^3$  de  $C^1$  sınıfından iki eğri olsun. Eğer bu eğriler karşılıklı noktalarında zıt yönlü paralel teğetlere sahip ve bu noktalar arasındaki uzaklık sabit oluyorsa

$C$  eğrisine  $E^3$  de **sabit genişlikli eğri** denir. Bu durumda  $C$  ve  $C^*$  eğrilerine  $E^3$  de **sabit genişlikli eğri çifti** denir [6,10,11].



### 3. DUAL GEOMETRİNİN TEMEL TANIM VE TEOREMLERİ

Dual geometri, uzay mekaniğinin kinematik analizinde büyük avantaj sağlamaktadır. Dual geometri, özellikle katı bir cismin kinematik dönüşüm yoluyla yer değiştirmesinde kullanılmaktadır. Ayrıca bu kullanımın kinematik, dinamik, robot hareketleri ve mühendislik için önemli uygulamaları bulunmaktadır[17]. Dual geometrinin avantajlarından yararlandığımız çalışmamızın bu bölümünde dual geometrinin temelini teşkil eden bazı kavramlar verilecektir.

$\forall a, a^* \in \mathbb{R}$  için  $\bar{a} = (a, a^*)$  sıralı ikililerinin cümlesi olan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  kartezyen çarpımı

$$D = \{(a, a^*) \mid a, a^* \in \mathbb{R}\}$$

ile gösterilsin. Bu cümle üzerinde aşağıdaki biçiminde tanımlanan işlemleri göz önüne alalım.  $\forall (a, a^*), (b, b^*) \in D$  için,

Toplama :

$$+ : D \times D \rightarrow D$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \bar{a} + \bar{b},$$

$$\bar{a} + \bar{b} = (a, a^*) + (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$$

Çarpma :

$$\cdot : D \times D \rightarrow D$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = (ab, ab^* + a^*b)$$

$$\text{Eşitlik} \quad : (a, a^*) = (b, b^*) \Leftrightarrow a = b \text{ ve } a^* = b^*$$

dır [17,18].

**Tanım 3.1.**  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  cümlesine “dual sayılar sistemi” ve  $\forall (a, a^*) \in D$  elemanına da bir *dual sayı* denir [18].

**Teorem 3.1.**  $(D, +, \cdot)$  üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır [18].

**Teorem 3.2.**  $(D, +, \cdot)$  üçlüsü bir cisim değildir [18].

**Teorem 3.3**  $D$  dual sayılar halkası,  $\mathbb{F}$  reel sayılar cismine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar [18].

**Tanım 3.2.** Bir  $\bar{a} = (a, a^*) \in D$  dual sayısındaki " $a$ " ya  $\bar{a}$  nin *reel kısmı* " $a^*$ " a da  $\bar{a}$  nin *dual kısmı* denir. Böylece  $\text{Re}(\bar{a}) = a$  ve  $\text{Du}(\bar{a}) = a^*$  yazılır [18].

**Tanım 3.3.**  $(0,1) \in D$  dual sayısına *dual birim* denir ve

$$\varepsilon = (0,1)$$

notasyonu ile gösterilir.

Buna göre

$$\varepsilon^2 = \varepsilon \cdot \varepsilon = (0,1) \cdot (0,1) = (0,0) = 0$$

olur [18].

**Teorem 3.4.** Bir  $\bar{a} = (a, a^*) \in D$  dual sayısı

$$\bar{a} = a + \varepsilon a^*$$

formunda yazılabilir [18].

**Tanım 3.4.** Bir  $\bar{a} = (a, a^*) \in D$  dual sayısının bir  $\lambda \in \mathbb{F}$  skaları ile çarpımı

$$\lambda \bar{a} = \lambda(a, a^*) = (\lambda a, \lambda a^*)$$

eşitliği ile verilir [18].

**Teorem 3.5.**  $a, a^* \in \mathbb{F}$  olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} a & a^* \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

formundaki matrislerin cümlesi  $D$  ye izomorftur [18].

**Tanım 3.5.**  $\bar{a} = (a, a^*)$  dual sayılarının bütününe **dual düzlem** denir ve "D" ile gösterilir. Her bir  $(a, a^*)$  ikilisine de **dual düzlemin bir dual noktası** denir [18].

**Tanım 3.6.** Bir  $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$  dual sayısının mutlak değeri

$$|\bar{a}| = |a| + \varepsilon \frac{a}{|a|} a^* \quad (a \neq 0)$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanım D de bir metrik vermez [17,18].

**Tanım 3.7.**  $f$ ,  $\bar{x} = x + \varepsilon x^*$  dual değerli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde  $f$  nin Maclaurin seri açılımı

$$f(\bar{x}) = f(x + \varepsilon x^*) = f(x) + \varepsilon x^* f'(x)$$

ile tanımlanır. Burada  $f'(x)$ ,  $f$  nin  $x$  e göre türevidir [17,18].

### 3.1. Dual Vektörlerin Uzayı (D -Modül )

Dual sayılar halkasının kendisiyle üç defa Kartezyen çarpımı olan

$$D^3 = D \times D \times D = \{ \tilde{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \mid \bar{a}_i \in D, 1 \leq i \leq 3 \}$$

cümlesini göz önüne alalım. Elemanları sıralı dual sayı üçlülerinden oluşan bu cümle üzerinde, toplama ve skaler ile çarpma işlemleri aşağıdaki biçimde tanımlansın:

Toplama:

$$+ : D^3 \times D^3 \rightarrow D^3$$

$$(\tilde{a}, \tilde{b}) \rightarrow \tilde{a} + \tilde{b}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a} + \tilde{b} &= (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) + (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) \\ &= (\bar{a}_1 + \bar{b}_1, \bar{a}_2 + \bar{b}_2, \bar{a}_3 + \bar{b}_3) \end{aligned}$$

Skaler ile çarpma:

$$\begin{aligned} \cdot : D \times D^3 &\rightarrow D^3 \\ (\bar{\lambda}, \tilde{\mathbf{a}}) &\rightarrow \bar{\lambda} \cdot \tilde{\mathbf{a}} \\ \bar{\lambda} \cdot \tilde{\mathbf{a}} &\rightarrow \bar{\lambda}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = (\bar{\lambda}\bar{a}_1, \bar{\lambda}\bar{a}_2, \bar{\lambda}\bar{a}_3) \end{aligned}$$

**Teorem 3.6.**  $(D^3, +, \cdot)$  üçlüsü bir  $D$ -modüldür [18].

**Tanım 3.8.**  $D$ -Modül'ün elemanları olan sıralı dual sayı üçlülerine **dual vektörler** denir [18].

**Teorem 3.7.**  $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}}^* \in \square^3$  olmak üzere,  $D$ -Modül'ün her bir  $\tilde{\mathbf{a}}$  dual vektörü

$$\tilde{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}} + \varepsilon \vec{\mathbf{a}}^*, \quad \varepsilon = (0, 1) \in D, \quad \tilde{\mathbf{a}} = (\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}}^*)$$

biçiminde yazılabilir [18].

**Tanım 3.9.** Bir  $\tilde{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}} + \varepsilon \vec{\mathbf{a}}^*$  dual vektörünün  $\bar{\lambda} \in D$  skaleri ile çarpımı

$$\bar{\lambda} \tilde{\mathbf{a}} = \bar{\lambda}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = \bar{\lambda}(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}}^*) = (\bar{\lambda}\vec{\mathbf{a}}, \bar{\lambda}\vec{\mathbf{a}}^*)$$

biçiminde tanımlanır [17,18].

**Teorem 3.8.**  $\square^3$  vektör uzayı,  $D$ -Modül'ün  $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{0}})$  biçimindeki elemanların cümlesine izomorftur [18].

**Tanım 3.10.**  $(\vec{\mathbf{0}}, \vec{\mathbf{0}}) \in D$ -Modül elemanına, **sıfır dual vektörü** denir ve  $f$  izomorfizminde karşılık geldiği  $\vec{\mathbf{0}}$  reel vektörü ile gösterilir [18].

**Tanım 3.11.**  $\tilde{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}} + \varepsilon \vec{\mathbf{a}}^*, \tilde{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \varepsilon \vec{\mathbf{b}}^* \in D$ -Modül dual vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle, \rangle: D^3 \times D^3 \rightarrow D$$

$$(\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}) \rightarrow \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}} \rangle,$$

$$\langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{a}} + \varepsilon \tilde{\mathbf{a}}^*, \tilde{\mathbf{b}} + \varepsilon \tilde{\mathbf{b}}^* \rangle = \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}} \rangle + \varepsilon (\langle \tilde{\mathbf{a}}^*, \tilde{\mathbf{b}} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}^* \rangle)$$

biçiminde tanımlanır.

Reel vektör uzayları üzerinde tanımlanan iç çarpımın sağladığı bütün aksiyomlar,  $D^3$  uzayında da gerçekleşir.

$\forall \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}} \in D$  Modül ve  $\bar{\lambda} \in D$  için,

$$\text{i) } \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle$$

$$\text{ii) } \langle \bar{\lambda} \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}} \rangle = \bar{\lambda} \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{a}}, \bar{\lambda} \tilde{\mathbf{b}} \rangle$$

$$\text{iii) } \langle \tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{c}} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}} \rangle, \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}} + \tilde{\mathbf{c}} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{c}} \rangle$$

$$\text{iv) } \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$$

şartları sağlanır [17,18].

**Tanım 3.12.**  $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}}^* \in R^3$  .  $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}} \in D^3$  için vektörel çarpım

$$\tilde{\mathbf{a}} \wedge \tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{a}} \wedge \tilde{\mathbf{b}} + \varepsilon (\tilde{\mathbf{a}} \wedge \tilde{\mathbf{b}}^* + \tilde{\mathbf{a}}^* \wedge \tilde{\mathbf{b}})$$

şeklinde tanımlanır [18].

**Tanım 3.13.** Bir dual vektörünün normu

$$\|\tilde{\mathbf{a}}\| = (\langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle)^{1/2} = \left( \|\tilde{\mathbf{a}}\|, \frac{\langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}}^* \rangle}{\|\tilde{\mathbf{a}}\|} \right), \tilde{\mathbf{a}} \neq \mathbf{0}$$

biçiminde tanımlanır [17,18].

**Tanım 3.14.** Bir  $\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}} + \varepsilon \tilde{\mathbf{a}}^*$  dual vektörü için

$$\|\vec{a}\| = (1, 0)$$

ise  $\tilde{a}$  ya bir **birim dual vektör** denir [18].

**Sonuç 3.1.**  $\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$  bir birim dual vektör ise

$$\|\tilde{a}\| = 1 \text{ ve } \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$$

olur [18].

**Teorem 3.9.**  $\tilde{a} = (\vec{a}, \vec{a}^*) \in D$ -Modül olmak üzere

$$\tilde{a}_0 = \frac{\tilde{a}}{\|\tilde{a}\|}$$

bir **birim dual vektördür** [18].

**Tanım 3.15.**  $\tilde{S}^2 = \left\{ \tilde{x} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \mid \|\tilde{x}\| = (1, 0); \vec{x}, \vec{x}^* \in \square^3 \right\}$  cümlesine  $D$ -Modül'de **birim dual küre** denir [17,18].

**Teorem 3.10. (E. Study)**  $\tilde{x} \neq (0, \vec{x}) \in D$  olmak üzere  $D$ -Modül'de denklemi

$$\|\tilde{x}\| = (1, 0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları,  $\square^3$  deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir [17,18].

**Tanım 3.16.**  $\tilde{x} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \in D$ -Modül olmak üzere,

$$\tilde{U} = \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}$$

birim dual vektörüne  $\tilde{x}$  vektörünün **ekseni** denir [18].

**Tanım 3.17.**  $k = \frac{\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle}{\|\vec{x}\|^2}$  reel sayısına

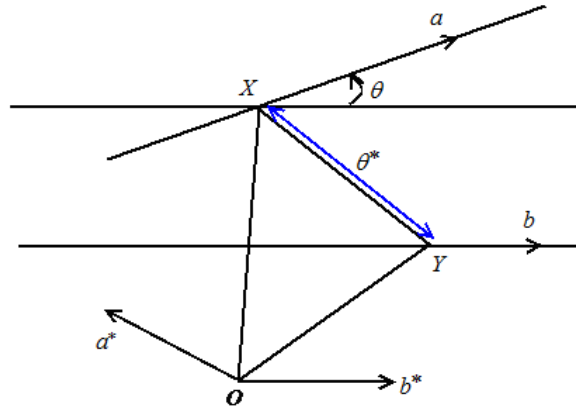
$\tilde{x} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$  dual vektörünün *adımı* veya *yükselişi* denir [18].

**Tanım 3.18.**  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$  birim dual vektörleri verildiğinde bunların iç çarpımı

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \cos \bar{\theta}$$

ile verilir. Bu eşitlikteki  $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$  dual sayısına  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$  birim dual vektörleri arasındaki *dual açı* denir [18].

$\bar{\theta}$  dual açısı,  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$  birim dual vektörlerinin  $\square^3$  deki temsil ettikleri yönlü doğrular arasındaki  $\theta$  açısı ile bu iki doğru arasındaki en kısa uzaklık olan  $\theta^*$  dan oluşmaktadır.



**Şekil 3.1.1.** Dual açı

$$\tilde{\varphi}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow D^3$$

s yay uzunluğu parametresi ile verilmiş bir dual eğri olsun. Birim teğet vektör

$$\dot{\tilde{\varphi}} = \frac{d\varphi}{d\bar{s}} = \tilde{t} \text{ ve asli normal vektör } \tilde{n} = \frac{\dot{\tilde{t}}}{\bar{\kappa}}, \bar{\kappa} \neq 0 \text{ ve } \dots \bar{s} \text{ ye göre türevi gösterir.}$$

$$\bar{\kappa}(\bar{s}) = \|\dot{\tilde{t}}\| = \kappa(s) + \varepsilon \kappa^*(s) \text{ dual eğrisinin dual eğriliğidir. } \tilde{\varphi} \text{ nın binormal}$$

vektörü

$$\tilde{b} = \tilde{t} \wedge \tilde{n}$$

olarak tanımlanır.

Böylece  $\{\tilde{t}, \tilde{n}, \tilde{b}\}$  üçlüsüne  $\tilde{\varphi}$  nın **Dual-Frenet çatısı** denir ve Frenet türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{t}} \\ \dot{\tilde{n}} \\ \dot{\tilde{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\kappa} & 0 \\ -\bar{\kappa} & 0 & \bar{\tau} \\ 0 & -\bar{\tau} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{n} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} \quad (1)$$

ile verilir. Burada

$$\langle \tilde{t}, \tilde{t} \rangle = \langle \tilde{n}, \tilde{n} \rangle = \langle \tilde{b}, \tilde{b} \rangle = 1, \langle \tilde{t}, \tilde{n} \rangle = \langle \tilde{n}, \tilde{b} \rangle = \langle \tilde{t}, \tilde{b} \rangle = 0$$

ve

$$\tilde{t} \wedge \tilde{n} = \tilde{b}, \tilde{n} \wedge \tilde{b} = \tilde{t}, \tilde{b} \wedge \tilde{t} = \tilde{n}$$

dir.

$$\bar{\tau}(\bar{s}) = \tau(s) + \tau^*(s), \tilde{\varphi} \text{ dual eğrisinin } \mathbf{dual \text{ burulması}} \text{ denir ve } \bar{\tau} \neq 0 \text{ dır [19].}$$

#### 4. DUAL ÖKLİD UZAYINDA SABİT GENİŞLİKLİ DUAL EĞRİLER

**Tanım 4.1.**  $C$  ve  $C_{\tilde{\gamma}}$ ,  $D^3$  de konum vektörleri sırasıyla,  $\tilde{\varphi}(\bar{s})$  ve  $\tilde{\gamma}(\bar{s}_{\tilde{\gamma}})$  olan birim hızlı iki dual eğri olsun.  $C$  ve  $C_{\tilde{\gamma}}$  eğrilerinin karşılıklı noktalarda zıt yönlü paralel teğetlere sahip ve bu noktalar arasındaki uzaklık daima sabit kalıyorsa  $C$  dual eğrisine  $D^3$  de **sabit genişlikli dual eğri** denir. Bu durumda  $C$  ve  $C_{\tilde{\gamma}}$  eğrileri sabit genişlikli bir dual eğri çifti olarak adlandırılır.

$C$  konum vektörü  $\tilde{\varphi}(\bar{s})$  olan,  $D^3$  de bir dual eğri olsun. Bu dual vektörler karşılıklı noktalarda zıt yönde paralel teğetlere sahiptir.

$\{\tilde{t}, \tilde{n}, \tilde{b}\}$  üçlüsüne  $\tilde{\varphi}$  nin Dual-Frenet çatısı denir ve Frenet türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{t}} \\ \dot{\tilde{n}} \\ \dot{\tilde{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\kappa} & 0 \\ -\bar{\kappa} & 0 & \bar{\tau} \\ 0 & -\bar{\tau} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{n} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

ile verilir. Burada  $\langle \tilde{t}, \tilde{t} \rangle = \langle \tilde{n}, \tilde{n} \rangle = \langle \tilde{b}, \tilde{b} \rangle = 1$ ,  $\langle \tilde{t}, \tilde{n} \rangle = \langle \tilde{n}, \tilde{b} \rangle = \langle \tilde{t}, \tilde{b} \rangle = 0$  ve

$$\tilde{t} \wedge \tilde{n} = \tilde{b}, \tilde{n} \wedge \tilde{b} = \tilde{t}, \tilde{b} \wedge \tilde{t} = \tilde{n} \text{ dir.}$$

$\bar{\tau}(\bar{s}) = \tau(s) + \tau^*(s)$ ,  $\tilde{\varphi}$  dual eğrisinin **dual burulması** denir ve  $\bar{\tau} \neq 0$  dır [19].

$C$  ve  $C_{\tilde{\gamma}}$ ,  $D^3$  de konum vektörleri sırasıyla,  $\tilde{\varphi}(\bar{s})$  ve  $\tilde{\gamma}(\bar{s}_{\tilde{\gamma}})$  olan sabit genişlikli eğri çifti olsun.

Bu durumda  $C_{\tilde{\gamma}}$  dual eğrisinin konum vektörü,

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\varphi} + \bar{\lambda}_1 \tilde{t} + \bar{\lambda}_2 \tilde{n} + \bar{\lambda}_3 \tilde{b} \quad , \quad (4.2)$$

dır, burada  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$  ( $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 + \varepsilon \cdot \lambda_1^*$ ,  $\bar{\lambda}_2 = \lambda_2 + \varepsilon \cdot \lambda_2^*$ ,  $\bar{\lambda}_3 = \lambda_3 + \varepsilon \cdot \lambda_3^*$ ) ler

$\bar{s}$  nin keyfi fonksiyonlarıdır. (4.2) nin  $\bar{s}$  ye göre türevi alınarak,

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{d\bar{s}} = \frac{d\tilde{\gamma}}{ds_{\tilde{\gamma}}} \frac{ds_{\tilde{\gamma}}}{d\bar{s}} = \frac{d\tilde{\varphi}}{d\bar{s}} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} \tilde{t}(\bar{s}) + \bar{\lambda}_1(\bar{s}) \frac{d\tilde{t}}{d\bar{s}} + \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} \tilde{n}(\bar{s}) + \bar{\lambda}_2(\bar{s}) \frac{d\tilde{n}}{d\bar{s}} + \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} \tilde{b}(\bar{s}) + \bar{\lambda}_3(\bar{s}) \frac{d\tilde{b}}{d\bar{s}}$$

olur. Burada,

$$\frac{d\tilde{n}}{d\bar{s}} = -\bar{\kappa}\tilde{t}(\bar{s}) + \bar{\tau}\tilde{b}(\bar{s}) \quad , \quad \frac{d\tilde{b}}{d\bar{s}} = -\bar{\tau}\tilde{n}(\bar{s}) \quad , \quad \frac{d\tilde{\gamma}}{ds_{\tilde{\gamma}}} = \tilde{t}_{\tilde{\gamma}} = -\tilde{t}$$

$$-\tilde{t} \frac{ds_{\tilde{\gamma}}}{d\bar{s}} = \tilde{t} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} \tilde{t} + \bar{\lambda}_1 \bar{\kappa} \tilde{n} + \bar{\lambda}_2 (-\bar{\kappa}\tilde{t} + \bar{\tau}\tilde{b}) + \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} \tilde{b} + \bar{\lambda}_3 (-\bar{\tau}\tilde{n}),$$

yazılır.  $\tilde{t}$ ,  $\tilde{n}$ ,  $\tilde{b}$  parantezlerine alındığında,

$$0 = \left(1 + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} - \bar{\kappa}\bar{\lambda}_2 + \frac{ds_{\tilde{\gamma}}}{d\bar{s}}\right) \tilde{t} + \left(\bar{\lambda}_1\bar{\kappa} + \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} - \bar{\lambda}_3\bar{\tau}\right) \tilde{n} + \left(\bar{\lambda}_2\bar{\tau} + \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}}\right) \tilde{b}$$

ve  $\tilde{t} \neq 0$ ,  $\tilde{n} \neq 0$ ,  $\tilde{b} \neq 0$  olduğundan,

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} - \bar{\kappa}\bar{\lambda}_2 + \frac{ds_{\tilde{\gamma}}}{d\bar{s}} = 0 &\Rightarrow \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} = \bar{\kappa}\bar{\lambda}_2 - \frac{ds_{\tilde{\gamma}}}{d\bar{s}} - 1, \\ \bar{\lambda}_1\bar{\kappa} + \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} - \bar{\lambda}_3\bar{\tau} = 0 &\Rightarrow \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} = -\bar{\lambda}_1\bar{\kappa} + \bar{\lambda}_3\bar{\tau}, \\ \bar{\lambda}_2\bar{\tau} + \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} = 0 &\Rightarrow \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} = -\bar{\lambda}_2\bar{\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

elde edilir.  $\bar{\alpha}$ ,  $\tilde{\varphi}$  eğrisinin teğeti ile arasındaki açı olmak üzere

$$\frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{s}} = \bar{\kappa} = \frac{1}{\bar{\rho}} \quad \text{ve} \quad \frac{d\bar{\alpha}}{ds_{\tilde{\gamma}}} = \bar{\kappa}_{\tilde{\gamma}} = \frac{1}{\bar{\rho}_{\tilde{\gamma}}}$$

olur.  $\bar{\alpha} = \alpha + \varepsilon.\alpha^*$  olduğundan (4.3) denklem sistemindeki birinci denklem olan

$$\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} = \bar{\kappa}\bar{\lambda}_2 - \frac{ds_{\tilde{\gamma}}}{d\bar{s}} - 1$$

ifadesi  $\frac{d\bar{s}}{d\bar{\alpha}}$  ile genişletilirse,

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{s}}{d\bar{\alpha}} \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{s}} &= \bar{\kappa} \bar{\lambda}_2 \frac{d\bar{s}}{d\bar{\alpha}} - \frac{ds_{\tilde{\gamma}}}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{d\bar{\alpha}} - \frac{d\bar{s}}{d\bar{\alpha}}, \\ \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} &= \bar{\kappa} \bar{\lambda}_2 \frac{1}{\bar{\kappa}} - \frac{ds_{\tilde{\gamma}}}{d\bar{\alpha}} - \frac{1}{\bar{\kappa}}, \\ &= \bar{\lambda}_2 - \bar{\rho}_{\tilde{\gamma}} - \bar{\rho}, \\ &= \bar{\lambda}_2 - (\bar{\rho}_{\tilde{\gamma}} + \bar{\rho}),\end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $f(\bar{\alpha}) = \bar{\rho} + \bar{\rho}_{\tilde{\gamma}}$  olarak alınırsa

$$= \bar{\lambda}_2 - f(\bar{\alpha})$$

olup, burada

$$\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} = \bar{\lambda}_2 - f(\bar{\alpha}) \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.3) sisteminin ikinci denklemi olan

$$\frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} = -\bar{\lambda}_1 \bar{\kappa} + \bar{\lambda}_3 \bar{\tau}$$

eşitliği  $\frac{d\bar{s}}{d\bar{\alpha}}$  ile genişletildiğinde,

$$\frac{d\bar{s}}{d\bar{\alpha}} \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{s}} = -\bar{\lambda}_1 \bar{\kappa} \frac{d\bar{s}}{d\bar{\alpha}} + \bar{\lambda}_3 \bar{\tau} \frac{d\bar{s}}{d\bar{\alpha}}$$

elde edilir.  $\frac{d\bar{s}}{d\bar{\alpha}} = \frac{1}{\bar{\kappa}}$  ifadesi yerine yazılırsa,

$$\frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} = -\bar{\lambda}_1 \bar{\kappa} \frac{1}{\bar{\kappa}} + \bar{\lambda}_3 \bar{\tau} \frac{1}{\bar{\kappa}}$$

bulunur ve  $\frac{1}{\bar{\kappa}} = \bar{\rho}$  ifadesi yerine yazıldığında,

$$\frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} = -\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3\bar{\rho}\bar{\tau} \quad (4.5)$$

elde edilmiş olur. (4.3) denklem sisteminin üçüncü denklemi olan

$$\frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} = -\bar{\lambda}_2\bar{\tau}$$

eşitliğini  $\frac{d\bar{s}}{d\bar{\alpha}}$  ile genişletip aynı eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{s}}{d\bar{\alpha}} \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{s}} &= -\bar{\lambda}_2\bar{\tau} \frac{d\bar{s}}{d\bar{\alpha}} \\ \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{\alpha}} &= -\bar{\lambda}_2\bar{\tau} \end{aligned} \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.4) , (4.5) , (4.6) dan ;

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} &= \bar{\lambda}_2 - f(\bar{\alpha}), \\ \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} &= -\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3\bar{\rho}\bar{\tau}, \\ \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{\alpha}} &= -\bar{\lambda}_2\bar{\rho}\bar{\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

elde edilir. Bu denklem sistemi matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} \\ \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} \\ \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{\alpha}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \bar{\rho}\bar{\tau} \\ 0 & -\bar{\rho}\bar{\tau} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \\ \bar{\lambda}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f(\bar{\alpha}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

olur. (4.4) denkleminde  $\bar{\lambda}_2$  çekilirse:

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} + f(\bar{\alpha})$$

olur. Burada  $\bar{\alpha}$  ya göre türev alalım.

$$\frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} = \frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2} + \frac{df(\bar{\alpha})}{d\bar{\alpha}}$$

bulunur.  $\frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}}$  yerine (4.5) denklemindeki eşiti yerleştirilirse

$$-\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 \bar{\rho} \bar{\tau} = \frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2} + \frac{df(\bar{\alpha})}{d\bar{\alpha}}$$

elde edilir. Buradan  $\bar{\lambda}_3$  ifadesini çekildiğinde,

$$\bar{\lambda}_3 = \frac{1}{\bar{\rho} \bar{\tau}} \left[ \bar{\lambda}_1 + \frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2} + \frac{df(\bar{\alpha})}{d\bar{\alpha}} \right]$$

olur. Bu denklemi  $\bar{\alpha}$  ya göre türev aldığımızda,

$$\frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{\alpha}} = \frac{d}{d\bar{\alpha}} \left( \frac{1}{\bar{\rho} \bar{\tau}} \right) \left[ \bar{\lambda}_1 + \frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2} + \frac{df(\bar{\alpha})}{d\bar{\alpha}} \right] + \frac{1}{\bar{\rho} \bar{\tau}} \left[ \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} + \frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + \frac{d^2f(\bar{\alpha})}{d\bar{\alpha}^2} \right]$$

elde edilir. Burada

$$\frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{\alpha}} = -\bar{\lambda}_2 \bar{\rho} \bar{\tau} \quad \text{ve} \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} + f(\bar{\alpha}) \quad \text{ifadelerinin eşitleri yerlerine yazıldığında}$$

$$-\bar{\tau} \bar{\delta} \left( \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} + f(\bar{\alpha}) \right) = \frac{d}{d\bar{\alpha}} \left( \frac{1}{\bar{\rho} \bar{\tau}} \right) \left[ \frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2} + \bar{\lambda}_1 \right] + \frac{d}{d\bar{\alpha}} \left( \frac{1}{\bar{\rho} \bar{\tau}} \right) \frac{df}{d\bar{\alpha}} + \frac{1}{\bar{\rho} \bar{\tau}} \frac{d^2f(\bar{\alpha})}{d\bar{\alpha}^2} + \frac{1}{\bar{\rho} \bar{\tau}} \left[ \frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} \right],$$

$$-\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} \left( \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} + f(\bar{\alpha}) \right) = \frac{d}{d\bar{\alpha}} \left( \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \right) \left[ \frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2} + \bar{\lambda}_1 \right] + \frac{d}{d\bar{\alpha}} \left( \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \right) \frac{df}{d\bar{\alpha}} + \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \frac{d^2f(\bar{\alpha})}{d\bar{\alpha}^2} + \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left[ \frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} \right],$$

$$\frac{d}{d\bar{\alpha}}\left(\frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}}\right)\left[\frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2}+\bar{\lambda}_1\right]+\frac{d}{d\bar{\alpha}}\left(\frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}}\right)\frac{df(\bar{\alpha})}{d\bar{\alpha}}+\left(\frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}}\right)\frac{df^2(\bar{\alpha})}{d\bar{\alpha}^2}+\left(\frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}}\right)\left[\frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3}+\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}\right]+\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}}\left(\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}+f(\bar{\alpha})\right)=0,$$

$$\frac{d}{d\bar{\alpha}}\left(\frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}}\right)\left[\frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2}+\bar{\lambda}_1+\frac{df(\bar{\alpha})}{d\bar{\alpha}}\right]+\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}}\left(\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}+f(\bar{\alpha})\right)+\left(\frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}}\right)\left[\frac{df^2(\bar{\alpha})}{d\bar{\alpha}^2}+\frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3}+\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}\right]=0 \quad (4.9)$$

elde edilir. Burada  $K_{\tilde{\varphi}}, K_{\tilde{\varphi}}^*, \tau_{\tilde{\varphi}}, \tau_{\tilde{\varphi}}^*, K_{\tilde{\gamma}}, K_{\tilde{\gamma}}^*, \tau_{\tilde{\gamma}}, \tau_{\tilde{\gamma}}^*$  sabit kabul edilirse,

$$\left(\frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}}\right)\frac{d}{d\bar{\alpha}}\left[\frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2}+\bar{\lambda}_1+\frac{df(\bar{\alpha})}{d\bar{\alpha}}\right]+\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}}\left(\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}+f(\bar{\alpha})\right)+\left(\frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}}\right)\left[\frac{df^2(\bar{\alpha})}{d\bar{\alpha}^2}+\frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3}+\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}\right]=0$$

olur. Bu denklem  $\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}}$  ile genişletilirse,

$$\frac{d}{d\bar{\alpha}}\left[\frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2}+\bar{\lambda}_1+\frac{df(\bar{\alpha})}{d\bar{\alpha}}\right]+\frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}\left(\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}+f(\bar{\alpha})\right)+\left[\frac{df^2(\bar{\alpha})}{d\bar{\alpha}^2}+\frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3}+\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}\right]=0,$$

$$\frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3}+\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}+\frac{d^2f}{d\bar{\alpha}^2}+\left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}}\right)^2\left(\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}+f(\bar{\alpha})\right)+\left(\frac{d^2f}{d\bar{\alpha}^2}+\frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3}+\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}\right)=0,$$

$$2\left(\frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3}+\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}+\frac{d^2f}{d\bar{\alpha}^2}\right)+\left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}}\right)^2\left(\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}+f(\bar{\alpha})\right)=0,$$

$$2\frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3}+2\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}+2\frac{d^2f}{d\bar{\alpha}^2}+\left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}}\right)^2\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}+\left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}}\right)^2f(\bar{\alpha})=0,$$

$$2\frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3}+\left(2+\left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}}\right)^2\right)\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}+2\frac{d^2f}{d\bar{\alpha}^2}+\left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}}\right)^2f(\bar{\alpha})=0,$$

elde edilir. Bu denklemde  $2\frac{d^2f}{d\bar{\alpha}^2}+\left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}}\right)^2f(\bar{\alpha})=g(\bar{\alpha})$  olarak yazıldığında;

$$2 \frac{d^3 \bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + \left( 2 + \left( \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} \right)^2 \right) \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} + g(\bar{\alpha}) = 0 \quad (4.10)$$

olur. Burada,

$$\frac{d^3 \bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} = y''' \quad \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} = y' \quad \text{ve} \quad 2 + \left( \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} \right)^2 = m \quad \text{olarak yazıldığında,}$$

$$2y''' + my' + g(\tilde{\alpha}) = 0$$

$$2y''' + my' = -g(\tilde{\alpha})$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü  $y=u+v$  şeklindedir. Bunun için

$$(2D^3 + mD)y = 0$$

olup çözümü aşağıdaki gibidir:

$y=u$  olsun.

$$(2D^3 + mD)u = 0,$$

$$2a^3 + ma = 0,$$

$$a(2a^2 + m) = 0,$$

denkleminin çözümünden

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \sqrt{\frac{m}{2}}i \quad \text{ve ya} \quad a_3 = -\sqrt{\frac{m}{2}}i$$

bulunur. Buradan,

$$u = c_1 e^{0\tilde{\alpha}} + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\tilde{\alpha}\right) + c_3 \sin\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\tilde{\alpha}\right) \quad (4.11)$$

yazılabilir. Şimdi  $y=v$  olsun. Buradan,

$$v = \frac{1}{D} \frac{1}{(2D^2 + m)} (-g(\bar{\alpha})),$$

$$v = \frac{1}{D} \frac{1}{m \left( 1 + \frac{2}{m} D^2 \right)} (-g(\bar{\alpha})),$$

$$v = \frac{1}{D} \frac{1}{m \left( 1 + \frac{D^2}{\frac{m}{2}} \right)} (-g(\bar{\alpha})) = \frac{1}{m} \frac{1}{D} \left( 1 - \frac{D^2}{\frac{m}{2}} + \frac{D^4}{\left( \frac{m}{2} \right)^2} - \dots \right) (-g(\bar{\alpha})),$$

olur. Burada  $g(\bar{\alpha})$  ifadesi sabit olduğu için eşitliğin sağ tarafındaki ifade

$$\frac{1}{m} \frac{1}{D} \left( 1 - \frac{D^2}{\frac{m}{2}} + \frac{D^4}{\left( \frac{m}{2} \right)^2} - \dots \right) (-g(\bar{\alpha})) = \frac{1}{m} \frac{1}{D} (-g(\bar{\alpha}))$$

olur. Böylece,

$$v = \frac{1}{D} \frac{1}{m \left( 1 + \frac{D^2}{\frac{m}{2}} \right)} (-g(\bar{\alpha})) = \frac{1}{m} \frac{1}{D} (-g(\bar{\alpha})),$$

$$v = \frac{1}{m} \bar{\alpha} (-g(\bar{\alpha})) \quad (4.12)$$

elde edilir. Bu durumda  $y=u+v$  denklemi (4.11) ve (4.12) eşitliklerinden,

$$y(\bar{\alpha}) = c_1 e^{0\bar{\alpha}} + c_2 \cos \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) + c_3 \sin \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) + \frac{1}{m} \bar{\alpha} (-g(\bar{\alpha})) \quad (4.13)$$

olarak elde edilir. (4.13) eşitliğinde  $c_2 = A$  ve  $c_3 = B$  yazıldığında,

$$\bar{\lambda}_1(\bar{\alpha}) = A \cos \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) + \frac{\bar{\alpha}}{m} (-g(\bar{\alpha})) + c_1 \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.14) eşitliğinin  $\bar{\alpha}$  ya göre türevi alındığında,

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} &= -\sqrt{\frac{m}{2}}A\sin\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\bar{\alpha}\right) + \sqrt{\frac{m}{2}}B\cos\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\bar{\alpha}\right) - \frac{1}{m}\left(\frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{\alpha}}g(\bar{\alpha}) + \bar{\alpha}\frac{dg(\bar{\alpha})}{d\bar{\alpha}}\right), \\ \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} &= -\sqrt{\frac{m}{2}}A\sin\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\bar{\alpha}\right) + \sqrt{\frac{m}{2}}B\cos\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\bar{\alpha}\right) - \frac{1}{m}g(\bar{\alpha}),\end{aligned}\quad (4.15)$$

bulunur. (4.4) eşitliğinden,

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} + f(\bar{\alpha}) \quad (4.16)$$

yazılabilir. (4.16) eşitliğinde, (4.15) eşitliği yerine yazıldığında,

$$\bar{\lambda}_2 = \sqrt{\frac{m}{2}}\left[-A\sin\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\bar{\alpha}\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\bar{\alpha}\right)\right] - \frac{1}{m}g(\bar{\alpha}) + f(\bar{\alpha}) \quad (4.17)$$

elde edilmiş olur. Burada  $f(\bar{\alpha})$  ve  $g(\bar{\alpha})$  sabit olduğundan

$$-\frac{1}{m}g(\bar{\alpha}) + f(\bar{\alpha}) = h(\bar{\alpha})$$

şeklinde sabit bir  $h(\bar{\alpha})$  fonksiyonu yazılabilir. Bu durumda,

$$\bar{\lambda}_2 = \sqrt{\frac{m}{2}}\left[-A\sin\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\bar{\alpha}\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\bar{\alpha}\right)\right] + h(\bar{\alpha}) \quad (4.18) \quad \text{olur.}$$

(4.5) eşitliğinde  $\bar{\lambda}_3$  ifadesi çekildiğinde,

$$\bar{\lambda}_3\bar{\rho}\bar{\tau} = \bar{\lambda}_1 + \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} \quad (4.19)$$

bulunur. (4.19) eşitliğinin her iki tarafı  $\bar{\tau}\bar{\rho}$  ile bölünürse,

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_3 &= \frac{1}{\bar{\rho}\bar{\tau}}\left(\bar{\lambda}_1 + \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}}\right) \\ \bar{\lambda}_3 &= \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}}\left(\bar{\lambda}_1 + \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}}\right)\end{aligned}\quad (4.20)$$

olarak bulunur. (4.18) eşitliğinin  $\bar{\alpha}$  ya göre türevi alındığında,

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} &= \frac{m}{2} \left[ -A \cos \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) - B \sin \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) \right] + \frac{dh(\bar{\alpha})}{d\bar{\alpha}}, \\ \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} &= \frac{m}{2} \left[ -A \cos \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) - B \sin \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) \right],\end{aligned}\quad (4.21)$$

elde edilir. (4.20) eşitliğinde, (4.14) ve (4.21) eşitlikleri yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_3 &= \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left[ \frac{m}{2} \left( -A \cos \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) - B \sin \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) \right) + A \cos \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) + \frac{\bar{\alpha}}{m} (-g(\bar{\alpha})) + c_1 \right], \\ \bar{\lambda}_3 &= \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left[ -\frac{m}{2} A \cos \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) - \frac{m}{2} B \sin \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) + A \cos \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) + \frac{\bar{\alpha}}{m} (-g(\bar{\alpha})) + c_1 \right], \\ \bar{\lambda}_3 &= \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left[ \left( 1 - \frac{m}{2} \right) A \cos \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) + \left( 1 - \frac{m}{2} \right) B \sin \left( \sqrt{\frac{m}{2}} \bar{\alpha} \right) - \frac{\bar{\alpha}}{m} (g(\bar{\alpha})) + c_1 \right]\end{aligned}\quad (4.22)$$

elde edilir.  $2 + \left( \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} \right)^2 = m$  nin değeri (4.14), (4.18) ve (4.22) de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_1(\bar{\alpha}) &= A \cos \left( \sqrt{\frac{2 + \left( \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} \right)^2}{2}} \bar{\alpha} \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{2 + \left( \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} \right)^2}{2}} \bar{\alpha} \right) + \frac{\bar{\alpha}}{2 + \left( \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} \right)^2} (-g(\bar{\alpha})) + c_1, \\ \bar{\lambda}_2(\bar{\alpha}) &= \sqrt{\frac{2 + \left( \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} \right)^2}{2}} \left[ -A \sin \left( \sqrt{\frac{2 + \left( \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} \right)^2}{2}} \bar{\alpha} \right) + B \cos \left( \sqrt{\frac{2 + \left( \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} \right)^2}{2}} \bar{\alpha} \right) \right] + h(\bar{\alpha}), \\ \bar{\lambda}_3(\bar{\alpha}) &= \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left[ \left( 1 - \frac{2 + \left( \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} \right)^2}{2} \right) A \cos \left( \sqrt{\frac{2 + \left( \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} \right)^2}{2}} \bar{\alpha} \right) + \left( 1 - \frac{2 + \left( \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} \right)^2}{2} \right) B \sin \left( \sqrt{\frac{2 + \left( \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} \right)^2}{2}} \bar{\alpha} \right) - \frac{\bar{\alpha}}{2 + \left( \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} \right)^2} (g(\bar{\alpha})) + c_1 \right]\end{aligned}\quad (4.23)$$

sistemi elde edilir. Böylelikle aşağıdaki teoremi elde ederiz:

**Teorem 4.1.**  $C$  ve  $C_{\tilde{\gamma}}$ ,  $D^3$  de konum vektörleri sırasıyla,  $\tilde{\varphi}(\bar{s})$  ve  $\tilde{\gamma}(\bar{s}_{\tilde{\gamma}})$  olan sabit genişlikli eğri çifti olsun. Bu takdirde

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\varphi} + \bar{\lambda}_1 \tilde{t} + \bar{\lambda}_2 \tilde{n} + \bar{\lambda}_3 \tilde{b}$$

dır. Burada,

$$\|\tilde{\gamma} - \tilde{\varphi}\| = \sqrt{\langle \bar{\lambda}_1 \tilde{t} + \bar{\lambda}_2 \tilde{n} + \bar{\lambda}_3 \tilde{b}, \bar{\lambda}_1 \tilde{t} + \bar{\lambda}_2 \tilde{n} + \bar{\lambda}_3 \tilde{b} \rangle} = \sqrt{\bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2 + \bar{\lambda}_3^2} = sbt,$$

ve  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$  değerleri (4.23) denklemi ile verilir.

**Teorem 4.2.**  $C$  ve  $C_{\tilde{\gamma}}$ ,  $D^3$  de konum vektörleri sırasıyla,  $\tilde{\varphi}(\bar{s})$  ve  $\tilde{\gamma}(\bar{s}_{\tilde{\gamma}})$  olan sabit genişlikli eğri çifti olsun. Bu takdirde,

$$0 = \bar{\lambda}_1 \left( \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} - \bar{\lambda}_2 \right)$$

dir.

**İspat:** Bu dual eğri için,

$$\|\tilde{\gamma} - \tilde{\varphi}\| = \sqrt{\langle \bar{\lambda}_1 \tilde{t} + \bar{\lambda}_2 \tilde{n} + \bar{\lambda}_3 \tilde{b}, \bar{\lambda}_1 \tilde{t} + \bar{\lambda}_2 \tilde{n} + \bar{\lambda}_3 \tilde{b} \rangle} = \sqrt{\bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2 + \bar{\lambda}_3^2} = sbt,$$

olduğunu biliyoruz. Buradan  $\bar{\alpha}$  ye göre türevi alınırsa,

$$2\bar{\lambda}_1 \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} + 2\bar{\lambda}_2 \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} + 2\bar{\lambda}_3 \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{\alpha}} = 0$$

$$\bar{\lambda}_1 \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} + \bar{\lambda}_2 \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} + \bar{\lambda}_3 \frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{\alpha}} = 0 \quad (4.24)$$

olur. (4.24) eşitliğinde (4.4) sistemi yerine yazılırsa,

$$\bar{\lambda}_1 \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} + \bar{\lambda}_2 (-\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 \bar{\rho} \bar{\tau}) + \bar{\lambda}_3 (-\bar{\lambda}_2 \bar{\rho} \bar{\tau}) = 0,$$

$$\bar{\lambda}_1 \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} - \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 + \cancel{\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 \bar{\rho} \bar{\tau}} - \cancel{\bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_2 \bar{\rho} \bar{\tau}} = 0,$$

$$\bar{\lambda}_1 \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} - \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 = 0,$$

$$\bar{\lambda}_1 \left( \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} - \bar{\lambda}_2 \right) = 0, \quad (4.25)$$

elde edilir.

**Sonuç 4.1.** (4.25) eşitliğinde,  $\bar{\lambda}_1 = 0$  ise dual sabit genişlikli eğri

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\varphi} + f(\bar{\alpha})\tilde{n} + \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} \tilde{b}$$

olur.

**İspat:** (4.4) sisteminden

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_2 &= f(\bar{\alpha}), \\ \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} &= \bar{\lambda}_3 \bar{\rho} \bar{\tau}, \\ \bar{\lambda}_3 &= \frac{1}{\bar{\rho} \bar{\tau}} \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}}, \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu son eşitlikler (4.2) de yerine yazılırsa ;

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\varphi} + 0\tilde{t} + f(\bar{\alpha})\tilde{n} + \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} \tilde{b},$$

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\varphi} + f(\bar{\alpha})\tilde{n} + \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} \tilde{b}, \quad (4.26)$$

olarak bulunur.

**Sonuç 4.2.** (4.25) eşitliğinde  $\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} - \bar{\lambda}_2 = 0$  ise dual sabit genişlikli eğriyi karakterize eden diferensiyel denklem,

$$\frac{d^3 \bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + \left( \frac{\bar{\kappa}^2 + \bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2} \right) \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} = 0,$$

şeklindedir.

**İspat:** (4.4) sisteminde  $\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} = \bar{\lambda}_2 - f(\bar{\alpha})$  olduğundan,

$$(\bar{\lambda}_2 - f(\bar{\alpha})) - \bar{\lambda}_2 = 0 \Rightarrow f(\bar{\alpha}) = 0$$

olur.  $\bar{\lambda}_2 = \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}$  olduğundan  $\bar{\alpha}$  ya göre türev alındığında,  $\frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} = \frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2}$  olur. Bu değer

(4.20) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\bar{\lambda}_3 = \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left( \frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2} + \bar{\lambda}_1 \right)$$

elde edilir. Tekrar (4.4) sisteminin üçüncü denkleminin  $\frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{\alpha}} = -\bar{\lambda}_2 \bar{\rho} \bar{\tau}$  olduğunu biliyoruz.

Yukarıdaki

$$\bar{\lambda}_3 = \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left( \frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2} + \bar{\lambda}_1 \right)$$

denkleminin  $\bar{\alpha}$  ya göre türevi alındığında

$$\frac{d\bar{\lambda}_3}{d\bar{\alpha}} = \frac{d}{d\bar{\alpha}} \left( \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \right) \left( \frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2} + \bar{\lambda}_1 \right) + \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left( \frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} \right), \quad (4.27)$$

$$-\bar{\lambda}_2 \bar{\rho} \bar{\tau} = \frac{d}{d\bar{\alpha}} \left( \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \right) \left( \frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2} + \bar{\lambda}_1 \right) + \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left( \frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} \right),$$

olur.  $\bar{\rho} = \frac{1}{\bar{\kappa}}$  değeri yerine yazıldığında

$$-\bar{\lambda}_2 \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = \frac{d}{d\bar{\alpha}} \left( \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \right) \left( \frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2} + \bar{\lambda}_1 \right) + \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left( \frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} \right),$$

ve  $\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} - \bar{\lambda}_2 = 0$  olduğundan  $\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} = \bar{\lambda}_2$

olarak denklemde yerine yazıldığında,

$$-\frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = \frac{d}{d\bar{\alpha}} \left( \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \right) \left( \frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2} + \bar{\lambda}_1 \right) + \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left( \frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} \right)$$

ve buradan,

$$\frac{d}{d\bar{\alpha}} \left( \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \right) \left( \frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2} + \bar{\lambda}_1 \right) + \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left( \frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} \right) + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = 0$$

elde edilir. Burada  $\bar{\kappa}, \bar{\tau}$  sabit olarak alınırsa,

$$\underbrace{\frac{d}{d\bar{\alpha}} \left( \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \right) \left( \frac{d^2\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^2} + \bar{\lambda}_1 \right) + \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left( \frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} \right)}_0 + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = 0,$$

$$\frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left( \frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} \right) + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = 0,$$

$$\frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} + \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = 0,$$

$$\frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + \left( \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} + \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} \right) \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} = 0 \quad (4.28)$$

olur. Son denklemi  $\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}}$  ile genişlettiğimizde

$$\frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + \left( 1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2} \right) \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} = 0,$$

$$\frac{d^3\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + \left( \frac{\bar{\kappa}^2 + \bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2} \right) \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} = 0 \quad (4.29)$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir:

**Sonuç 4.3.**  $\bar{\kappa} = \bar{\tau}$  ,  $\bar{\kappa}^* = \bar{\tau}^*$  olsun. Bu durumda,

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\varphi} + \bar{\lambda}_1 \tilde{t} + \bar{\lambda}_2 \tilde{n} + \bar{\lambda}_3 \tilde{b} ,$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= A \cos(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + B \sin(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + c_1 \\ \bar{\lambda}_2 &= -\sqrt{2}A \sin(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + \sqrt{2}B \cos(\sqrt{2}\bar{\alpha}) \\ \bar{\lambda}_3 &= -A \cos(\sqrt{2}\bar{\alpha}) - B \sin(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + c_1 \end{aligned} \right\}$$

dır.

**İspat:**  $\bar{\kappa} = \bar{\tau}$  ,  $\bar{\kappa}^* = \bar{\tau}^*$  olduğundan (4.29) denkleminde,

$$\frac{d^3 \bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + 2 \frac{d \bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} = 0$$

bulunur. Bu diferensiyel denklemi çözelim:

$$y''' + 2y' = 0,$$

$$(D^3 + 2D)y = 0,$$

$$a^3 + 2a = 0,$$

$$a(a^2 + 2) = 0,$$

$$a_1 = 0 , a_2 = -\sqrt{2}i , a_3 = \sqrt{2}i$$

ve

$$y = c_1 e^{0\bar{\alpha}} + c_2 \cos(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + c_3 \sin(\sqrt{2}\bar{\alpha}) \quad (4.30)$$

elde edilir. (4.30) eşitliğinde  $c_2 = A$  ve  $c_3 = B$  alınırsa,

$$\bar{\lambda}_1 = A \cos(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + B \sin(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + c_1 \quad (4.31)$$

elde edilir. (4.4) sisteminden,

$$\frac{d \bar{\lambda}_1}{d \bar{\alpha}} = \bar{\lambda}_2 - f(\bar{\alpha}) \quad \text{ve} \quad f(\bar{\alpha}) = 0 \quad \text{olduğundan} \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{d \bar{\lambda}_1}{d \bar{\alpha}} \quad \text{olur.}$$

Öyleyse  $\bar{\lambda}_1$  in  $\bar{\alpha}$  ya göre türevini alınırsa,

$$\frac{d \bar{\lambda}_1}{d \bar{\alpha}} = -\sqrt{2}A \sin(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + \sqrt{2}B \cos(\sqrt{2}\bar{\alpha}),$$

$$\bar{\lambda}_2 = -\sqrt{2}A\sin(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + \sqrt{2}B\cos(\sqrt{2}\bar{\alpha}) \quad (4.32)$$

bulunur.  $\bar{\lambda}_3 = \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left( \bar{\lambda}_1 + \frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} \right)$  olduğunu biliyoruz.

$\frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}}$  ifadesini bulmak için (4.32) deki  $\bar{\lambda}_2$  nin  $\bar{\alpha}$  ya göre türevi alınır,

$$\frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} = -2A\cos(\sqrt{2}\bar{\alpha}) - 2B\sin(\sqrt{2}\bar{\alpha})$$

olur. Bu eşitlik  $\bar{\lambda}_3$  te yerine yazılırsa,

$$\bar{\lambda}_3 = \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left( A\cos(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + B\sin(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + c_1 - 2A\cos(\sqrt{2}\bar{\alpha}) - 2B\sin(\sqrt{2}\bar{\alpha}) \right),$$

$$\bar{\lambda}_3 = \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left( -A\cos(\sqrt{2}\bar{\alpha}) - B\sin(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + c_1 \right),$$

ve  $\bar{\kappa} = \bar{\tau}$  olduğundan,

$$\bar{\lambda}_3 = -A\cos(\sqrt{2}\bar{\alpha}) - B\sin(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + c_1 \quad (4.33)$$

elde edilir. (4.31), (4.32), (4.33) ifadeleri bir arada yazılırsa,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= A\cos(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + B\sin(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + c_1 \\ \bar{\lambda}_2 &= -\sqrt{2}A\sin(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + \sqrt{2}B\cos(\sqrt{2}\bar{\alpha}) \\ \bar{\lambda}_3 &= -A\cos(\sqrt{2}\bar{\alpha}) - B\sin(\sqrt{2}\bar{\alpha}) + c_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

olur. Bu değerler (4.2) denkleminde yerine yazılırsa Dual Öklid uzayda sabit genişlikli Dual eğrinin genel denklemi elde edilmiş olur.

**Sonuç 4.4.**  $\frac{\bar{\kappa}}{\bar{\kappa}^*} = \frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}^*}$  olsun. Bu durumda,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= a_1 + A \cos \left( \sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha} \right) + B \sin \left( \sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha} \right), \\ \bar{\lambda}_2 &= -\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} A \sin \left( \sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha} \right) + \sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} B \cos \left( \sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha} \right), \\ \bar{\lambda}_3 &= \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left( a_1 - \left( \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2} \right) A \cos \left( \sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha} \right) - \left( \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2} \right) B \sin \left( \sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha} \right) \right), \end{aligned} \right\}$$

olur.

**İspat:**  $\frac{\bar{\kappa}}{\bar{\kappa}^*} = \frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}^*}$  olduğundan (4.29) diferensiyel denkleminde,

$$\frac{d^3 \bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}^3} + \left( 1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2} \right) \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}} = 0,$$

olur. Son denklemde  $1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2} = m$  olsun. Bu durumda,

$$y''' + my' = 0,$$

$$(D^3 + mD)y = 0,$$

$$a^3 + ma = 0,$$

$$a(a^2 + m) = 0,$$

$$a_1 = 0, a_2 = \sqrt{mi}, a_3 = \sqrt{mi} \text{ olup,}$$

$$y = a_1 e^{0\bar{\alpha}} + a_2 \cos(\sqrt{m}\bar{\alpha}) + a_3 \sin(\sqrt{m}\bar{\alpha}),$$

$$\bar{\lambda}_1 = a_1 + a_2 \cos(\sqrt{m}\bar{\alpha}) + a_3 \sin(\sqrt{m}\bar{\alpha}), \quad (4.35)$$

olur. (4.35) eşitliğinde  $m = 1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}$  yazıldığında,

$$\bar{\lambda}_1 = a_1 + a_2 \cos\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) + a_3 \sin\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) \quad (4.36)$$

(4.36) eşitliğinde  $a_2 = A$  ve  $a_3 = B$  olarak alınırsa,

$$\bar{\lambda}_1 = a_1 + A \cos\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) + B \sin\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) \quad (4.37)$$

elde edilir. Benzer şekilde  $\bar{\lambda}_2 = \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\bar{\alpha}}$  olduğundan,

$$\bar{\lambda}_2 = -\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} a_2 \sin\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) + \sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} a_3 \cos\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) \quad (4.38)$$

bulunur ve (4.38) eşitliğinde  $a_2 = A$  ,  $a_3 = B$  olarak alınırsa,

$$\bar{\lambda}_2 = -\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} A \sin\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) + \sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} B \cos\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) \quad (4.39)$$

elde edilir. (4.39) eşitliğinin  $\bar{\alpha}$  ya göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\bar{\lambda}_2}{d\bar{\alpha}} = -\left(1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}\right) A \cos\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) - \left(1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}\right) B \sin\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) \quad (4.40)$$

elde edilir. (4.37) ve (4.40) eşitlikleri (4.20) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_3 &= \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left( a_1 + A \cos\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) + B \sin\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) - \left(1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}\right) A \cos\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) - \left(1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}\right) B \sin\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) \right) \\ \bar{\lambda}_3 &= \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left( a_1 + \left(1 - 1 - \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}\right) A \cos\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) + \left(1 - 1 - \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}\right) B \sin\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) \right) \\ \bar{\lambda}_3 &= \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left( a_1 - \left(\frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}\right) A \cos\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) - \left(\frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}\right) B \sin\left(\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha}\right) \right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

elde edilir. (4.37), (4.39), (4.41) bir arada yazılırsa,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= a_1 + A \cos \left( \sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha} \right) + B \sin \left( \sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha} \right) \\ \bar{\lambda}_2 &= -\sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} A \sin \left( \sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha} \right) + \sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} B \cos \left( \sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha} \right) \\ \bar{\lambda}_3 &= \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\tau}} \left( a_1 - \left( \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2} \right) A \cos \left( \sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha} \right) - \left( \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2} \right) B \sin \left( \sqrt{1 + \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\kappa}^2}} \bar{\alpha} \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

elde edilir.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Dual Öklid uzayında sabit genişlikli dual eğrilerin (4.2) de belirtilen konum vektörünü yazarak buradaki  $\bar{\lambda}_1$  ,  $\bar{\lambda}_2$  ve  $\bar{\lambda}_3$  nin değerlerini her birisi için üçüncü mertebeden diferensiyel denklem yardımıyla çözerek değerleri bulunup yerlerine yazılmıştır. Böylece Dual Öklid uzayında sabit genişlikli dual eğrilerin yapısı incelenmiştir. Bu eğrileri karakterize eden diferensiyel denklemler bulunup, bunlara ait yorumlar yapılmıştır.

Bu dual eğriyi ifade eden diferensiyel denklemlerin farklı metotlarla yaklaşık çözümü yapıldığında bu sabit genişlikli dual eğrilerin yapısı ve özelliği daha farklı bir açıdan incelenmiş olacaktır.



## KAYNAKLAR

1. Euler, L., *De Curvis Triangularibus*, Acta Acad. Petropol., 1778 (1780), 3-30.
2. Ball, N.H., *On ovals*, American Mathematical Monthly, 1930, 37(7), 348-353.
3. Barbier, E., *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 1860, 2(5), 273-286.
4. Blaschke, W., *Leibziger Berichte*, 1917, 67, 290.
5. Mellish, A.P., *Notes on Differential Geometry*, Annals of Mathematics, 1931, 32(1), 181-190.
6. Fujiwara, M., *On Space Curves of Constant Breadth*, Tohoku Mathematical Journal, 1914, 5, 180-184.
7. Hammer, P.C., *Constant Breadth Curves in the Plane*, Proceedings of the American Mathematical Society, 1955, 6(2), 333-334.
8. Reuleaux, F., *The Kinematics of Machinery* (Translated by A. B. W. Kennedy), Dover Pub., New York, 1963, 653 p.
9. Smakal, S., *Curves of Constant Breadth*, Czechoslovak Mathematical Journal, 1973, 23(1), 86-94.
10. Köse, Ö., *Düzlemde Ovalar ve Sabit Genişlikli Eğrilerin Bazı Özellikleri*, Doğa Bilim Dergisi, Seri B, 1984, 8(2), 119-126.
11. Köse, Ö., *On Space Curves of Constant Breadth*, Doğa Tr. J. Math, 1986, 10(1), 11-14.
12. Sezer, M., *Differential Equations Characterizing Space Curves of Constant Breadth and a Criterion for These Curves*, Turkish J. of Math, 1989, 13(2), 70-78.
13. Mağden, A., and Köse, Ö., *On the Curves of Constant Breadth in  $E^4$  Space*, Tr. J. of Mathematics, 1997, 21 : 277-284.
14. Akdoğan, Z., Mağden, A., *Some Characterization of Curves of Constant Breadth in  $E^n$  Space*, Turk J Math, 2001, 25, 433-444.
15. Önder, M., Kocayiğit, H., Candan, E., *Differential Equations Characterizing Timelike and Spacelike Curves of Constant Breadth in Minkowski 3-Space  $E_1^3$* , J. Korean Math. Soc., 2011, 48(4), 849-866.
16. Sabuncuoğlu, A., *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayıncılık, Ankara, 2006, 440 s.
17. Veldkamp, G.R., *“On the use of dual numbers, vectors, and matrices in instantaneous spatial kinematics”*, Mech. and Mach. Theory, 11: 141-156, 1976.
18. Hacısalihoğlu, H.H., *“Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi”*, Gazi Üniversitesi Fen-Edb. Fakültesi, 1983.
19. Ayyıldız, N., Çöken, A.C., Yücesan, A., *A Characterization of Dual Lorentzian Spherical Curves in the Dual Lorentzian Space*, Mathematics Subject Classification, 53C50, 1-16 (1991).

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Nihal ERTEN  
Doğum Yeri ve Yılı : İstanbul, 1979  
Medeni Hali : Evli  
Yabancı Dili : İngilizce  
E-posta : i\_erten@hotmail.com

### Eğitim Durumu

Lise : Üsküdar Kandilli Kız Lisesi, 1995  
Lisans : Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü ,2002

### Mesleki Deneyim :

|                                   |                    |
|-----------------------------------|--------------------|
| Mardin İMKB Lisesi                | 2004-2007          |
| Turgutlu Senem Aka Anadolu Lisesi | 2007-2016          |
| Turgutlu İnci Üzmez MTAL          | 2016-..... (halen) |