

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL IŞIK KONİSİ ÜZERİNDEKİ EĞRİLERİN GEOMETRİSİ

DOKTORA TEZİ

Arş. Gör. Pınar BALKI OKULLU

Anabilim Dalı : MATEMATİK

Programı : GEOMETRİ

MANİSA 2014

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL IŞIK KONİSİ ÜZERİNDEKİ EĞRİLERİN GEOMETRİSİ

DOKTORA TEZİ

Arş. Gör. Pınar BALKI OKULLU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Ekim 2014

Tezin Savunulduğu Tarih : 10 Kasım 2014

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN

Prof. Dr. Mehmet SEZER

Doç. Dr. Mustafa KAZAZ

Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

MANİSA 2014

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ	ii
ŞEKİL LİSTESİ	iii
TEŞEKKÜR	iv
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
 1. Giriş	 1
 2. IR_1^3 MINKOWSKI UZAYININ TEMEL KAVRAMLARI	 3
 3. ID^3 DUAL UZAYIN VE ID_1^3 DUAL LORENTZİYEN UZAYIN TEMEL KAVRAMLARI	 6
3.1. ID^3 Dual Uzayının Temel Kavramları	6
3.2. ID_1^3 Dual Lorentz Uzayının Temel Kavramları	11
 4. $\tilde{Q}^2$ DUAL IŞIK KONİSİ ÜZERİNDEKİ BİR EĞRİNİN DUAL ASİMPOTİK ÇATISI	 19
 5. $\tilde{Q}^2$ DUAL IŞIK KONİSİ ÜZERİNDEKİ EĞRİLERİN DUAL TEMSİL FORMÜLLERİ	 27
5.1. Reel Yay Parametresine Göre Verilen Dual Spacelike Eğri	27
5.2. Dual Yay Parametresine Göre Verilen Dual Spacelike Eğri	33
 6. $\tilde{Q}^2$ DUAL IŞIK KONİSİ ÜZERİNDEKİ EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI	 41
 REFERANSLAR	 95
ÖZGEÇMİŞ	98

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^3$	: 3-boyutlu reel uzay
$\mathbb{D}$	: Dual sayılar kümesi
$\mathbb{D}^3$	: 3-boyutlu dual uzay
$\mathbb{R}_1^3$	: 3-boyutlu Lorentziyen uzay
$\mathbb{D}_1^3$	: 3-boyutlu dual Lorentziyen uzay
$\langle, \rangle$	: Lorentziyen iç çarpım
$\times$	: Lorentziyen vektörel çarpım
$\{\tilde{x}, \tilde{\alpha}, \tilde{y}\}$	: Dual asimptotik çatı
s	: Reel gösterge eğrisinin yay uzunluğu parametresi
$\bar{s}$	: Dual yay uzunluğu parametresi
$\bar{\kappa}$	: Dual koni eğrilik fonksiyonu
$\bar{v}$	: Dual eğrinin hızı
$\bar{f}$	: Dual yapı fonksiyonu
$\tilde{x}$	: Dual konisel eğri
$\tilde{y}$	: Dual bağlantı eğrisi
$\tilde{w}$	: Dual frenet ani dönme vektörü
$\tilde{S}^2$	: Dual birim küre
S_1^2	: Birim Lorentziyen küre
H_0^2	: Birim Hiperbolik küre
Q^2	: Işık konisi
$\tilde{S}_1^2$	: Birim dual Lorentziyen küre
$\tilde{H}_0^2$	: Birim dual Hiperbolik küre
$\tilde{Q}^2$	: Dual ışık konisi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1.1 Regle yüzeyin E. Study dönüşümü.....	10
Şekil 3.2.1 Yönlü paralel timelike doğrular ve bu doğruların moment vektörleri.....	14
Şekil 3.2.2 Yönlü paralel spacelike doğrular ve bu doğruların moment vektörleri.....	16
Şekil 3.2.4 Yönlü lightlike(null) doğrular ve bu doğruların moment vektörleri.....	17
Şekil 6.1 Işık konisi üzerindeki (6.68) denklemi ile verilen elips.....	63
Şekil 6.2 Işık konisi üzerindeki (6.69) denklemi ile verilen hiperbol.....	63
Şekil 6.3 Işık konisi üzerindeki (6.70) denklemi ile verilen parabol	64
Şekil 6.4 $x(s, v) = (v \cos s, v \sin s + 1, v)$ denklemi ile verilen koni.....	65
Şekil 6.5 $\tilde{x}(s) = (\cos s, \sin s, 1) + \varepsilon(-1, 0, -\cos s)$ denklemiyle verilen dual konisel eğrinin reel gösterge eğrisi $x(s) = (\cos s, \sin s, 1)$ (--) ve bu eğrinin dual bağlantı eğrisi $y(s) = \frac{1}{2}(\cos s, \sin s, -1)$ (--).....	67
Şekil 6.6 $x(s, v) = (\cos s - v \sin s, \sin s + v \cos s, v)$ denklemiyle verilen tek kanatlı hiperboloid.....	69
Şekil 6.7 $\tilde{x}(s) = (-\sin s, \cos s, 1) + \varepsilon(-\sin s, \cos s, 1)$ denklemiyle verilen dual konisel eğrisinin reel gösterge eğrisi $x(s) = (-\sin s, \cos s, 1)$ (--) ve bu eğrinin dual bağlantı eğrisi $y(s) = \frac{1}{2}(-\sin s, \cos s, -1)$ (--).....	71
Şekil 6.8 (6.81) denklemiyle verilen B-scroll	74
Şekil 6.9 (6.82) denklemiyle verilen dual konisel eğrisinin reel gösterge eğrisi	

$$\mathbf{x}(s) = \left(\frac{s}{c^2}, \frac{1}{2} \frac{s(s^c - s^{-c})}{c^2}, \frac{1}{2} \frac{s(s^c + s^{-c})}{c^2} \right) \quad (--) \text{ ve bu eğrinin dual bağlantı eğrisi}$$

$$\mathbf{y}(s) = \left(\frac{1}{2} \frac{c^2 - 1}{s}, -\frac{1}{4} \frac{(s^c + s^{-c}) + (s^c - s^{-c})(c^2 + 1)}{s}, -\frac{1}{4} \frac{(s^c - s^{-c}) + (s^c + s^{-c})(c^2 + 1)}{s} \right) \quad (--).....77$$

Şekil 6.10 (6.86) denklemiyle verilen B-scroll.....80

Şekil 6.11 (6.87) denklemiyle verilen dual konisel eğrisinin reel gösterge eğrisi

$$\mathbf{x}(s) = \left(\frac{1}{2} \frac{s(c^2 - \ln^2 s)}{c^2}, \frac{s \ln s}{c}, \frac{1}{2} \frac{s(c^2 + \ln^2 s)}{c^2} \right) \quad (--) \text{ ve bu eğrinin dual bağlantı eğrisi}$$

$$\mathbf{y}(s) = \left(\frac{1}{4} \frac{\ln^2 s + 4 \ln s - c^2 + 4}{s}, -\frac{1}{2} \frac{c(2 + \ln s)}{s}, -\frac{1}{4} \frac{\ln^2 s + 4 \ln s + c^2 + 4}{s} \right) \quad (--).....83$$

Şekil 6.12 (6.91) denklemiyle verilen ana doğruları lightlike olan regle yüzey.....85

Şekil 6.13 $\tilde{\mathbf{x}}(s) = (1, \sinh s, \cosh s) + \varepsilon(0, s \cosh s, s \sinh s)$ denklemiyle verilen dual konisel eğrisinin reel gösterge eğrisi $\mathbf{x}(s) = (1, \sinh s, \cosh s)$ (--) ve bu eğrinin dual bağlantı eğrisi

$$\mathbf{y}(s) = \frac{1}{2}(1, -\sinh s, -\cosh s) \quad (--).....88$$

Şekil 6.14 (6.97) denklemiyle verilen ana doğruları lightlike olan regle yüzey.....90

Şekil 6.15 $\tilde{\mathbf{x}}(s) = (\sin s, \cos s, 1) + \varepsilon(-(s+1)\cos s, (s+1)\sin s, 0)$ denklemiyle verilen dual konisel eğrisinin reel gösterge eğrisi $\mathbf{x}(s) = (\sin s, \cos s, 1)$ (--) ve bu eğrinin dual bağlantı

$$\text{eğrisi } \mathbf{y}(s) = \frac{1}{2}(\sin s, \cos s, -1) \quad (--).....92$$

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında yardımlarını esirgemeyen, bilgisinden ve tecrübesinden yararlandığım danışman hocam sayın Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU' ya teşekkürlerimi sunarım.

Değerli fikirlerini benimle paylaşan sayın hocam Doç. Dr. Mustafa KAZAZ 'a ve sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT 'e ve ihtiyaç duyduğumda her türlü yardımını esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÖNDER'e çok teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan canım aileme ve anlayışını hiç esirgemeyen sevgili eşim Levent OKULLU' ya sonsuz teşekkürler ederim.

ÖZET

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmuştur.

Birinci Bölüm tezin giriş kısmıdır. Bu bölümde, konisel eğriler, ışık konisi ile ilgili literatür bilgisi ve bu tezde yapılanlar hakkında kısaca bilgi verilir.

İkinci bölümde, IR_1^3 Minkowski Uzayının temel kavramları verilir.

Üçüncü bölümde, dual ve dual Lorentziyen uzayın temel kavramları verilir.

Dördüncü bölümde, dual ışık konisi üzerinde ki bir eğrinin dual asimptotik ortonormal çatısı reel parametre ve dual yay parametresine göre incelenir. Dual koni eğrilikleri bulunur. Dual konisel eğrinin dual bağlantı eğrileri bulunur.

Beşinci bölümde, Yapı fonksiyonları tanımlanır. Yapı fonksiyonları yardımıyla dual ışık konisi üzerinde ki bir eğrinin ve bu eğrinin bağlantı eğrisinin dual temsil formülleri verilir.

Altıncı bölümde, dual ışık konisi üzerinde ki bir eğrinin karakterizasyonunu eğrinin dual yapı fonksiyonu ve dual koni eğrilik fonksiyonu yardımıyla verilir.

ABSTRACT

This thesis consists of six chapters.

First section is introduction. In this section, literature review about conical curves, lightlike cone and some information about this thesis is given.

In section two, preliminaries of Minkowski space IR_1^3 is given.

In section three, preliminaries of dual space and dual Lorentzian space are given.

In section four, Asymptotic ortonormal frame of dual cone curve according to real parameter and dual arc lenght parameter are examined. Dual cone curvatures are found. Dual associated curves of the dual cone curve are found.

In section five, Structure functions are defined. Dual representation formulas of dual cone curve and dual associated curve are determined by using dual structure functions.

In section six, we have given the caharacterization of the curve lying on dual lightlike cone by using dual structure functions and dual cone curvature function.

1. GİRİŞ

Eğriler hayatın her alanında kullanılan geometrik yapılardır. Farklı disiplinler de, eğrileri kendi alanlarında kullanmaktadırlar. Örneğin; Mimaride köprülerde, kartografyada haritalarda, askeri teknolojide füze roket fırlatmada, klasik fizikte kütle çekim teorisinde, astronomide uzaydaki bazı cisimlerin hareketlerinde vb. Bu nedenle birçok eğri türü ve kullanım alanı ortaya çıkmıştır. Geometride de konikler dışında bazı özel eğriler vardır. Örneğin; Bezier eğriler, B-spline eğriler, küresel eğriler ve associated eğriler vb. Associated eğriler bir çok eğri grubunu içinde bulundurur. Bunlar bertrand eğrileri, Mannheim eğrileri, Smarandache eğrileri vb. dir. Bu eğriler ile ilgili çalışmalar Öklid uzayında olduğu gibi Lorentz uzayında da mevcuttur.

Öklidyen uzayda yada Minkowski uzayında diferansiyel geometrinin eğriler teorisi çalışmasında, genellikle Frenet hareketli çatısı kullanılır. Bununla birlikte, bazı özel eğriler ile çalışıldığında, Frenet hareketli çatı daha az elverişli olur. Örneğin, Frenet hareketli çatısını kullanarak, öklidyen uzayda birim küre üzerindeki eğriler, Frenet formülleri, eğrilik ve burulma yardımıyla tanımlanır. Ama eğer küresel Frenet çatısı kullanılırsa, bu koşullar küresel Frenet formülleri ve küresel eğrilik fonksiyonu olarak değişir. Bu nedenle, özel küresel eğriler ile ilgili çalışmalarda hareketli çatının ve araştırma metodunun seçimi önemlidir. Liu [15] çalışmasında üç boyutlu Minkowski uzayında bir null eğri üzerindeki asimptotik ortonormal çatı tanımını vermiştir. Bu çatı Ferrández, Giménez, ve Lucas [7] tarafından verilen cartan çatıdır. Kılıç, Karadağ ve Karadağ [10] tarafından bir null eğri boyunca eğrinin yarı darboux vektörü tanımlanmıştır. Liu [12] çalışmasında ışık konisi üzerindeki eğrileri incelemiştir. $(n+1)$ boyutlu ışık konisi üzerindeki konformal invaryant yay uzunluğunu tanımladıktan sonra iki boyutlu ve üç boyutlu ışık konisi üzerindeki eğrileri karakterize etmiştir. Liu [13,14], üç boyutlu minkowski uzayında koni eğriler teorisinin bazı uygulamalarını vermiştir. Liu [16], iki boyutlu ışık konisi ve üç boyutlu ışık konisi üzerindeki spacelike eğriler için temsil formüllerini vermiş ve bu formülleri kullanarak, iki boyutlu ve üç boyutlu ışık konisi üzerindeki eğrilerin özelliklerini ve yapılarını incelemiştir.

Dual sayılar ilk defa W. K. Clifford (1845-1879) [4] tarafından tanımlanmıştır ve dual sayıların bir cebir yapısı oluşturduğunu fakat bir cisim olmadığı gösterilmiştir. Dual sayıların katı cisim kinematiğine uygulamaları daha sonra Kotelnikov [11] ve Study [21] tarafından

geliştirilmiştir. 3-boyutlu Öklid uzayındaki yönlü bir doğru ile 3-boyutlu dual uzaydaki dual birim küre yüzeyi üzerindeki bir dual nokta arasında bire-bir bir eşleme mevcuttur. Bu karşılık gelme Kotelnikov [11] tarafından transfer prensibi ve daha sonra Study [21] tarafından E. Study dönüşümü olarak isimlendirilmiştir. Bu teoriye dayanarak, E^3 Öklid uzayındaki bir doğrunun hareketinin geometrik yeri, ID^3 dual uzaydaki birim dual küre yüzeyi üzerindeki bir noktanın geometrik yeri ile tanımlanır. Dolayısıyla E^3 uzayındaki bir regle yüzey, ID^3 uzayında dual birim küre yüzeyi üzerindeki bir dual eğriye karşılık gelir. Yani regle yüzeylerin geometrisi ile birim dual küre üzerindeki dual eğrilerin geometrisi çakışır. Veldkamp [27], dual birim vektörler ve dual vektör çiftleri yardımıyla dual birim küreyi ifade etmiş ve dual küresel hareketleri vermiştir. Ayrıca dual hareket ve reel uzay hareketi arasındaki bağıntıyı göstermiştir. E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayı yerine 3-boyutlu Minkowski uzayını göz önüne alarak, bu uzaydaki yönlü spacelike (timelike) doğruların, ID_1^3 dual Lorentz uzayının $S_1^2(H_0^2)$ dual Lorentziyen (Hiperbolik) birim küresinin noktaları ile birebir eşlenebileceği Yaylı, Uğurlu ve Çalışkan [28] tarafından gösterilmiştir. Ayrıca Minkowski uzayının yönlü lightlike doğrularının, ID_1^3 dual Lorentz uzayının $\tilde{Q}^2$ dual ışık konisinin noktaları ile birebir eşlenebileceği Uğurlu [25] tarafından gösterilmiştir.

Bu çalışmada, Dual Işık Konisi üzerindeki bir dual spacelike eğrinin dual asimptotik ortonormal çatısı, dual koni Frenet türev formülleri ve dual koni eğrilik fonksiyonu verilmiştir. Bu eğrinin dual bağlantı eğrisi tanımlanmıştır. Ayrıca bu eğrinin dual yapı fonksiyonu ve dual yapı fonksiyonun cinsinden temsili verilmiştir. Dual koni eğrilik fonksiyonunun yapı fonksiyonları cinsinden ifadesini veren denklemin dual riccati denklemi olduğu gösterilmiştir ve bu denklemin çözümü koni eğrilik fonksiyonuna bağlı olarak verilmiştir. Koni eğrilik fonksiyonunun sabit olduğu durumlarda dikkate alınarak eğri incelenmiştir. Liu [16] nun reel ışık konisi üzerinde yaptığı irdeleme, bunu kapsayan dual ışık konisi üzerinde yapılmıştır. Dolayısıyla elde edilenler Liu [16] tarafından elde edilenleri kapsamaktadır.

2. IR_1^3 MINKOWSKI UZAYININ TEMEL KAVRAMLARI

Tanım 2.1. IR^3 reel vektör uzayı üzerinde

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3$$

ile verilen Lorentziyen iç çarpım tanımlanırsa, IR^3 afin uzayı, Minkowski 3-uzay veya 3 boyutlu Minkowski uzayı olarak isimlendirilir ve IR_1^3 ile gösterilir [18].

Burada $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in IR^3$ dır. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerinin iç çarpımı için $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ gösterimi de kullanılabilir.

Lorentziyen iç çarpımı pozitif tanımlı olmadığından IR_1^3 deki vektörler aşağıdaki gibi üç farklı karaktere sahip olabilirler.

Tanım 2.2. $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, IR_1^3 de keyfi bir vektör olsun.

i) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ ya da $\mathbf{v} = 0$ ise $\mathbf{v}$ ye bir spacelike vektör,

ii) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$ ise $\mathbf{v}$ ye bir timelike vektör,

iii) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ ve $\mathbf{v} \neq 0$ ise $\mathbf{v}$ ye bir lightlike (null) vektör

denir [17,18].

Tanım 2.3. $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, IR_1^3 vektörünün normu

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle|}$$

olarak tanımlanır. Normu 1'e eşit olan vektöre birim vektör denir [18].

Tanım 2.4. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in IR_1^3$ iki vektör olsun. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerinin Lorentziyen vektörel çarpımı

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_3 v_2 - u_2 v_3, u_1 v_3 - u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

biçiminde tanımlanır [22,24].

Teorem 2.1. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in IR_1^3$ olsun. Bu durumda,

- i) $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$
- ii) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{u}$
- iii) $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$
- iv) $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2$

eşitlikleri sağlanır [24].

Tanım 2.5. IR_1^3 uzayındaki bütün spacelike birim vektörlerin kümesine Lorentziyen birim küre denir ve S_1^2 ile gösterilir. Buna göre

$$S_1^2 = \{ \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in IR_1^3 \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 1 \},$$

şeklindedir [24].

Tanım 2.6. IR_1^3 uzayındaki bütün timelike birim vektörlerin kümesine hiperbolik birim küre denir ve H_0^2 ile gösterilir. Buna göre

$$H_0^2 = \{ \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in IR_1^3 \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = -1 \},$$

dir [24].

Tanım 2.7. IR_1^3 uzayındaki bütün null (lightlike) vektörlerin kümesi de ışık konisi olarak adlandırılır ve Q^2 ile gösterilir. Buna göre

$$Q^2 = \{ \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in IR_1^3 \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \},$$

dır [16].

Tanım 2.8. IR_1^3 Minkowski 3-uzayında bir $\alpha = \alpha(s)$ bir diferansiyellenebilir eğri olsun. $\forall s \in I \subset IR$ için

- i. $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle > 0$ ise $\alpha(s)$ e bir spacelike eğri,
- ii. $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle < 0$ ise $\alpha(s)$ e bir timelike eğri,
- iii. $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ ise $\alpha(s)$ e bir null(lightlike) eğri

denir [18].

Tanım 2.9. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$, IR_1^3 uzayında iki vektör olsun.

i. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ timelike ise

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cosh \theta$$

olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ reel sayısına $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir [2,19,23].

ii. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ spacelike vektörler ve bu vektörlerin gerdiği düzlem timelike olsun.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cosh \theta$$

olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ reel sayısına $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki merkez açı denir [19,23].

iii. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ spacelike vektörler ve bu vektörlerin gerdiği düzlem spacelike olsun.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ reel sayısına $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki spacelike açı denir [19,23].

iv. $\mathbf{u}$, bir spacelike vektör ve $\mathbf{v}$, bir timelike vektör olsun.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sinh \theta$$

olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ reel sayısına $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açı denir [19,23].

3. ID^3 DUAL UZAYIN VE ID_I^3 DUAL LORENTZİYEN UZAYIN TEMEL KAVRAMLARI

3.1. ID^3 Dual Uzayın Temel Kavramları

W. Clifford tarafından tanıtılan dual sayılar, [20] çalışmasında, bileşenleri reel sayılar olan (a, a^*) sıralı ikilileri olarak tanımlanırlar. a ve a^* sayılarına sırasıyla dual sayının reel ve dual kısmı denir. a ve a^* reel sayılarının her ikisi de sıfırdan farklı ise dual sayıya has dual sayı sadece reel kısmı sıfır ise sırf dual sayı denir. Sadece dual kısmı sıfır ise dual sayıya bir reel sayı olarak bakılabilir [29].

Tanım 3.1.1. Dual sayıların kümesi

$$ID = \{ \bar{a} = (a, a^*) : a, a^* \in \mathbb{R} \}$$

ile gösterilir. ID üzerinde iki iç işlem ve eşitlik aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\bar{a} = (a, a^*), \bar{b} = (b, b^*) \text{ olmak üzere}$$

$$\text{Toplama} \quad : \quad \bar{a} + \bar{b} = (a + b, a^* + b^*)$$

$$\text{Çarpma} \quad : \quad \bar{a} \bar{b} = (ab, ab^* + a^*b).$$

$$\text{Eşitlik} \quad : \quad \bar{a} = \bar{b} \text{ olması için gerek ve yeter şart } a = b, a^* = b^* \text{ olmasıdır.}$$

Teorem 3.1.1. ID kümesi yukarıda tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre bir değişmeli halkadır [8].

Sırf dual sayılar ile bölme işlemi tanımlı olmadığından ID , verilen işlemlere göre bir cisim değildir.

Teorem 3.1.2. ID dual sayılar halkası, IR reel sayılar cümlesine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar. Dolayısıyla $(a, 0)$ dual sayısı izomorf olduğu a reel sayısı ile gösterilebilir. Yani, $(a, 0) = a$ alınabilir.

Tanım 3.1.2: $\varepsilon = (0, 1) \in ID$ dual sayısına dual birim denir ve

$$\varepsilon \neq 0, \quad \varepsilon^2 = 0, \quad \varepsilon 1 = 1\varepsilon = \varepsilon$$

olduğu açıktır [30].

Teorem 3.1.3. Her $\bar{a} = (a, a^*) \in ID$ dual sayısı,

$$\bar{a} = (a, a^*) = a + \varepsilon a^*$$

biçiminde yazılabilir [8].

Tanım 3.1.3. Bir $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$ dual sayısının, $b \neq 0$ olan bir $\bar{b} = b + \varepsilon b^*$ dual sayısına bölümü

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{a}{b} + \varepsilon \frac{a^* b - ab^*}{b^2}$$

biçiminde tanımlanır [8].

Tanım 3.1.4. $|a| \neq 0$ olmak üzere bir $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$ dual sayısının mutlak değeri

$$|\bar{a}| = |a| + \varepsilon \frac{a}{|a|} a^*$$

biçiminde tanımlanır [27].

Tanım 3.1.5. Bir $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$ dual sayısının eşleniği $a - \varepsilon a^*$ dual sayısıdır [8].

Tanım 3.1.6. Bir dual sayıya bağlı bir $f(\bar{a})$ fonksiyonunun ε değişkenine göre Maclaurin serisine açılımı, $n > 1$ tam sayısı için $\varepsilon^n = 0$ olduğundan,

$$f(\bar{a}) = f(a + \varepsilon a^*) = f(a) + \varepsilon a^* f'(a)$$

dır. Burada $f'(a)$, $f(a)$ fonksiyonunun a değişkenine göre türevidir [5].

Tanım 3.1.7. Bir dual $\bar{x}$ değişkenine bağlı $\bar{F}(\bar{x})$ dual fonksiyonu

$$\begin{aligned}\bar{F}(\bar{x}) &= f(\bar{x}) + \varepsilon f^*(\bar{x}) \\ &= f(x) + \varepsilon x^* f'(x) + \varepsilon (f^*(x) + \varepsilon f^{**}(x)) \\ &= f(x) + \varepsilon (x^* f'(x) + f^*(x))\end{aligned}\quad (3.1.1)$$

eşitliğini sağlar. Eğer $\bar{x}$ bir reel sayı yani $x^* = 0$ ise (3.1.1) eşitliği ile verilen fonksiyon

$$\bar{F}(x) = f(x) + \varepsilon f'(x) \quad (3.1.2)$$

eşitliği ile ifade edilir. (3.1.1) eşitliğinin dual değişken $\bar{x}$ ye göre türevi

$$\frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} = \frac{f(x)}{dx} + \varepsilon \left(x^* \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{df^*(x)}{dx} \right) \quad (3.1.3)$$

eşitliği ile verilir. (3.1.3) eşitliğinden görülüyor ki dual değişken $\bar{x}$ ya göre türev reel değişken x e göre türeve indirgenir [5].

Tanım 3.1.8. Bir sıralı dual sayı üçlüsüne dual vektör denir ve

$$\tilde{\mathbf{a}} = (a_1 + \varepsilon a_1^* a_2 + \varepsilon a_2^*, a_3 + \varepsilon a_3^*)$$

ile gösterilir. Dual vektörlerin kümesi ID^3 ile gösterilir ve

$$ID^3 = \{ \tilde{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) : \bar{a}_i \in ID, i = 1, 2, 3 \}$$

biçimindedir. [8].

Tanım 3.1.9. $\tilde{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$, $\tilde{\mathbf{b}} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$ ve $\bar{\lambda} \in ID$ olsun. İki dual vektörün eşitliği, iki dual vektörün toplamı ve bir dual vektör ile bir skalerin çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır [8].

Eşitlik	:	$\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \bar{a}_i = \bar{b}_i, (i = 1, 2, 3)$
Toplama	:	$\tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{b}} = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1, \bar{a}_2 + \bar{b}_2, \bar{a}_3 + \bar{b}_3)$
Skaler ile çarpma	:	$\bar{\lambda} \tilde{\mathbf{a}} = (\bar{\lambda} \bar{a}_1, \bar{\lambda} \bar{a}_2, \bar{\lambda} \bar{a}_3).$

Teorem 3.1.4. ID^3 kümesi, yukarıda tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemleri ile birlikte ID halkası üzerinde bir modül yapısı oluşturur. Buna, kısaca, ID – Modül denir [8].

Teorem 3.1.5. $a, a^* \in IR^3$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere bir dual vektör $\tilde{a} = a + \varepsilon a^*$ biçiminde ifade edilebilir [20].

Tanım 3.1.10. ID^3 deki herhangi iki $\tilde{a} = a + \varepsilon a^*$ ve $\tilde{b} = b + \varepsilon b^*$ dual vektörün iç çarpımı ve vektörel çarpımları sırasıyla,

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \langle a, b \rangle + \varepsilon (\langle a, b^* \rangle + \langle a^*, b \rangle),$$

ve

$$\tilde{a} \times \tilde{b} = a \times b + \varepsilon (a \times b^* + a^* \times b),$$

ile tanımlanır. Burada $\langle a, b \rangle$ ve $a \times b$, sırasıyla, a ve b vektörlerinin IR^3 uzayındaki iç ve vektörel çarpımlarıdır [8].

Tanım 3.1.11. $\|a\| \neq 0$ olmak üzere bir $\tilde{a}$ dual vektörünün normu

$$\|\tilde{a}\| = \|a\| + \varepsilon \frac{\langle a, a^* \rangle}{\|a\|}, \quad (a \neq 0),$$

ile tanımlanır [8].

Tanım 3.1.12. Normu 1 olan bir $\tilde{a}$ dual vektörüne dual birim vektör denir. Dual birim vektörlerin kümesi

$$\tilde{S}^2 = \{ \tilde{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \in ID^3 : \langle \tilde{a}, \tilde{a} \rangle = 1 + \varepsilon 0 \},$$

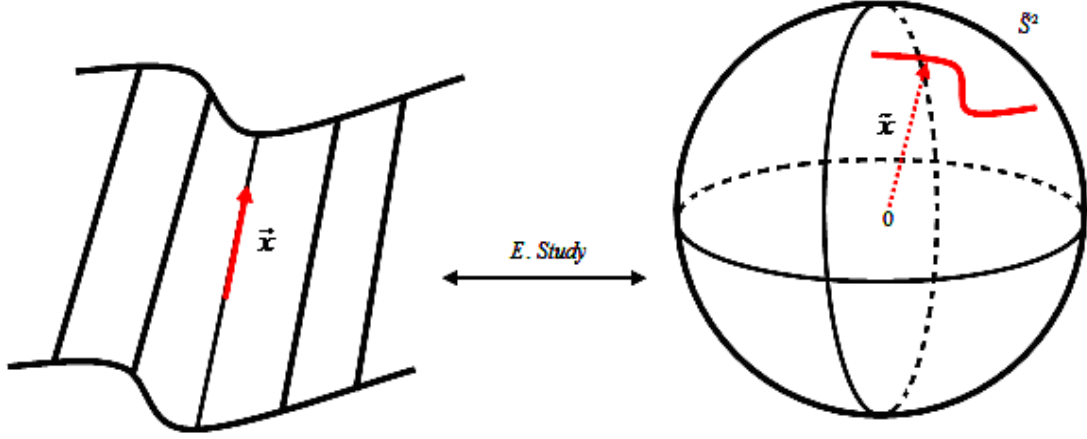
ile verilir ve *birim dual küre* olarak isimlendirilir [3,8].

Teorem 3.1.6. (E.Study Dönüşümü) Dual birim kürenin noktaları, IR^3 deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir.

Yani, $\tilde{x} = x(s) + \varepsilon x^*(s)$ birim dual vektörünü reel bir s parametresine bağlı olarak düşünelim.

Bu taktirde, $\tilde{x}$ dual birim vektörü $\tilde{S}^2$ dual birim küresi üzerinde bir dual eğri çizer. E.Study

dönüşümünden bu eğriye çizgiler uzayında bir regle yüzey karşılık gelir (Şekil 3.1.). $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual küresel eğrisine, çizgiler uzayındaki $\tilde{\mathbf{x}}$ regle yüzeyinin dual küresel resmi denir.



Şekil 3.1 Regle yüzeyin E. Study dönüşümü

Tanım 3.1.13. $\tilde{\mathbf{a}}$ ve $\tilde{\mathbf{b}}$ iki birim dual vektör olsun.

$$\langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}} \rangle = \cos \bar{\theta}$$

eşitliğini sağlayan $\bar{\theta}$ dual sayısına, $\tilde{\mathbf{a}}$ ve $\tilde{\mathbf{b}}$ arasındaki dual açı denir. Burada θ ve θ^* , sırasıyla, birim dual vektörlere karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki açı ve en kısa uzaklıktır [8,20].

Tanım 3.1.14 ID^3 dual uzayında $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t) + \varepsilon \boldsymbol{\alpha}^*(t)$ ifadesine bir dual uzay eğrisi denir.

Burada $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ ve $\boldsymbol{\alpha}^*(t) = (\alpha_1^*(t), \alpha_2^*(t), \alpha_3^*(t))$, $\mathbb{R}^3$ de reel değerli eğrilerdir. Eğer $\alpha_i(t)$ and $\alpha_i^*(t)$, ($1 \leq i \leq 3$) fonksiyonları diferansiyellenebilir ise

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\alpha}} : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow ID^3 \\ t &\rightarrow \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(t) = (\alpha_1(t) + \varepsilon \alpha_1^*(t), \alpha_2(t) + \varepsilon \alpha_2^*(t), \alpha_3(t) + \varepsilon \alpha_3^*(t)) \\ &= \boldsymbol{\alpha}(t) + \varepsilon \boldsymbol{\alpha}^*(t) \end{aligned}$$

dual uzay eğrisi de diferansiyellenebilirdir. $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ dual eğrisinin $\boldsymbol{\alpha}(t)$ reel kısmına gösterge eğrisi denir [1].

3.2. ID_1^3 Dual Lorentz Uzayının Temel Kavramları

ID^3 dual uzayı üzerinde Lorentziyen iç çarpım tanımlanırsa, ID^3 dual uzayına dual Lorentziyen uzay denir. ID_1^3 ile gösterilen bu uzay

$$ID_1^3 = \{\tilde{a} = a + \varepsilon a^* : a, a^* \in IR_1^3\}$$

biçiminde gösterilebilir [9,26].

Tanım 3.2.1. ID^3 deki herhangi iki $\tilde{a} = a + \varepsilon a^*$, $\tilde{b} = b + \varepsilon b^*$ dual vektörün dual Lorentziyen iç çarpımı ve dual Lorentziyen vektörel çarpımı, sırasıyla,

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \langle a, b \rangle + \varepsilon (\langle a, b^* \rangle + \langle a^*, b \rangle),$$

ve

$$\tilde{a} \times \tilde{b} = a \times b + \varepsilon (a \times b^* + a^* \times b),$$

biçiminde tanımlanır. Burada " $\langle , \rangle$ " Lorentziyen iç çarpımı ve " $\times$ " Lorentziyen vektörel çarpımı gösterir [6,19].

Tanım 3.2.2. $\tilde{a} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ olsun.

$a \in IR_1^3$ bir spacelike vektör ise, $\tilde{a} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ vektörüne dual spacelike vektör,

$a \in IR_1^3$ bir timelike vektör ise, $\tilde{a} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ vektörüne dual timelike vektör,

$a \in IR_1^3$ bir lightlike vektör ise, $\tilde{a} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ vektörüne dual lightlike vektör

denir [26].

Tanım 3.2.3. $\|a\| \neq 0$ olmak üzere bir $\tilde{a} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ dual vektörünün normu

$$\|\tilde{a}\| = \|a\| + \varepsilon \frac{\langle a, a^* \rangle}{\|a\|}$$

ile tanımlanır [8].

Tanım 3.2.4. ID_1^3 uzayındaki bütün dual spacelike birim vektörlerin kümesine birim dual Lorentziyen küre denir ve

$$\begin{aligned}\tilde{S}_1^2 &= \left\{ \tilde{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \in ID_1^3 \mid \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle = 1 \right\} \\ &= \left\{ \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}^* \mid \|\tilde{\mathbf{a}}\| = (1, 0), \mathbf{a}, \mathbf{a}^* \in IR_1^3 \text{ ve } \mathbf{a} \text{ spacelike vektör} \right\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [28].

Tanım 3.2.5 IR_1^3 uzayındaki bütün dual timelike birim vektörlerin kümesine birim dual hiperbolik küre denir ve

$$\begin{aligned}\tilde{H}_0^2 &= \left\{ \tilde{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \in ID_1^3 \mid \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle = -1 \right\} \\ &= \left\{ \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}^* \mid \|\tilde{\mathbf{a}}\| = (-1, 0), \mathbf{a}, \mathbf{a}^* \in IR_1^3 \text{ ve } \mathbf{a} \text{ timelike vektör} \right\}\end{aligned}$$

ile gösterilir [28].

Tanım 3.2.6. IR_1^3 uzayındaki bütün dual null (lightlike) vektörlerin kümesi de dual ışık konisi olarak adlandırılır ve

$$\tilde{Q}^2 = \left\{ \tilde{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \in ID_1^3 \mid \langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle = 0 \right\},$$

şeklinde gösterilir [25].

Teorem 3.2.1. ID_1^3 Dual Lorentziyen uzayının $\tilde{H}_0^2$ birim dual hiperbolik küresinin noktaları Lorentziyen çizgiler uzayının yönlü timelike doğrularına birebir karşılık gelirler.

İspat: $(\Rightarrow)$: $\tilde{H}_0^2$ de $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}^*$ dual timelike birim vektörü verilsin. Tanımdan

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = -1 \quad , \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^* \rangle = 0$$

olduğunu biliyoruz. Burada $\mathbf{a}$, aradığımız yönlü timelike doğrunun birim doğrultman vektörüdür. Bu timelike doğru üzerinde bir X noktası alırsak

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{x} \times \mathbf{a} \tag{3.2.1}$$

olur. Burada $\mathbf{x}$, X noktasının konum vektörüdür. (3.2.1) den $\mathbf{x}$ vektörü parametreye bağlı olarak bulunur. Parametrenin herhangi bir değeri için, doğrunun geçtiği bir X noktası bulunmuş olur. Dolayısıyla, $\tilde{\mathbf{a}}$ ya karşılık gelen yönlü timelike doğru tek olarak bulunmuş olur.

($\Leftarrow$): Bir yönlü l timelike doğrusu verilsin. Eğer l üzerinde iki nokta X ve M , doğrunun birim doğrultman vektörü $\mathbf{a}$ ise bu timelike doğrunun vektörel denklemi

$$(\mathbf{x} - \mathbf{m}) \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.2.2)$$

olur. Burada $\mathbf{m}$, M noktasının konum vektörüdür. Eğer, bu timelike doğru üzerinde başka bir nokta Z ise

$$(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.2.3)$$

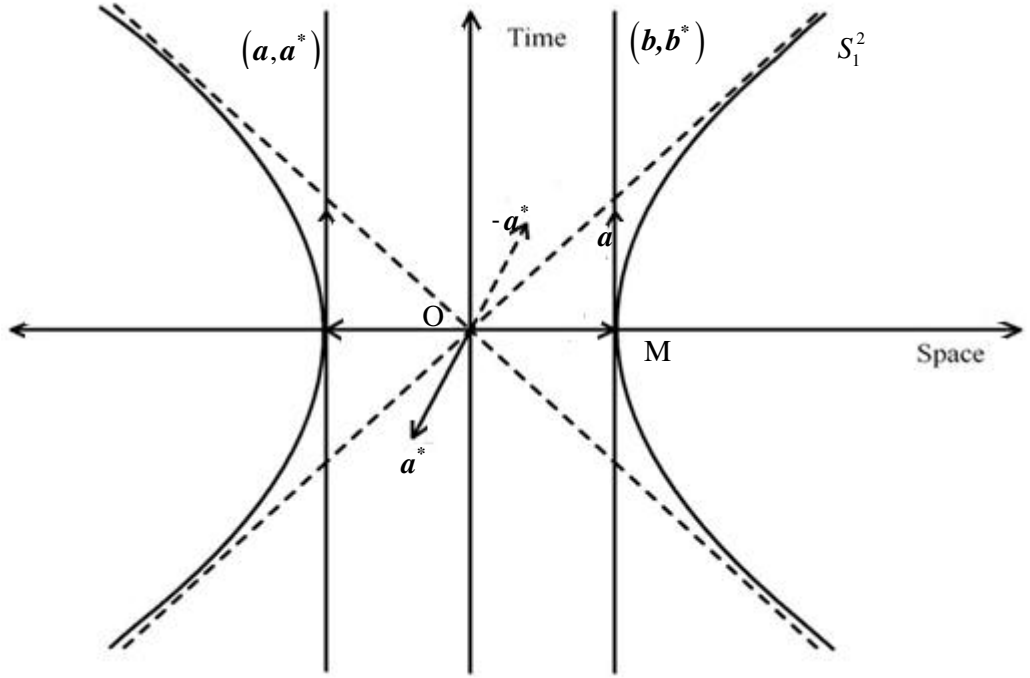
yazılabilir. Burada $\mathbf{z}$, Z noktasının konum vektörüdür. (3.2.2) ve (3.2.3) den

$$\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{z} \times \mathbf{a} = \mathbf{a}^* \quad (3.2.4)$$

olduğu görülür. Burada $\mathbf{a}^*$, yönlü timelike doğrunun moment vektörüdür. Biliyoruz ki $\mathbf{a}^*$ moment vektörü, timelike doğru üzerindeki noktaların seçilişinden bağımsızdır. Sonuç olarak, yönlü l timelike doğrusuna karşılık gelen birim dual timelike vektör $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}^*$ biçiminde yazılır.

Şimdi bu yönlü timelike doğrunun tek olduğunu gösterelim: Timelike düzlemde O başlangıç noktasından geçen ve $\mathbf{a}^*$ moment vektörüne dik olan O merkezli ve r yarıçaplı S_1^1 (timelike eğri) Lorentz çemberini göz önüne alalım. O başlangıç noktasından $\mathbf{a}$ vektörüne çizdiğimiz dikey doğru S_1^1 Lorentz çemberi ile iki noktada kesişir. Bu noktalardan S_1^1 Lorentz çemberine çizilen teğet doğruları $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*)$ ve $(\mathbf{a}, -\mathbf{a}^*)$ vektör çiftleriyle verilir. Bu, $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*)$ vektör çiftine karşılık gelen yönlü timelike doğrunun tek olması demektir [25].

$$|\mathbf{a}^*| = |\mathbf{z} \times \mathbf{a}| = |\mathbf{z}| |\mathbf{a}| \cos \theta$$



Şekil 3.2 Yönlü paralel timelike doğrular ve bu doğruların moment vektörleri

Teorem 3.2.2. ID_1^3 Dual Lorentziyen uzayının $\tilde{S}_1^2$ birim dual Lorentziyen küresinin noktaları ile IR_1^3 Lorentziyen çizgiler uzayının yönlü spacelike doğruları birebir karşılık gelirler.

İspat: $(\Rightarrow)$: $\tilde{S}_1^2$ de $\tilde{a} = a + \varepsilon a^*$ birim dual spacelike vektörü verilsin. Tanımdan

$$\langle a, a \rangle = 1, \quad \langle a, a^* \rangle = 0$$

olduğunu biliyoruz. Burada a aradığımız yönlü spacelike doğrunun birim doğrultman vektörüdür. Bu spacelike doğru üzerinde bir X noktası alırsak

$$a^* = x \times a \quad (3.2.5)$$

olur. Burada x , X noktasının konum vektörüdür. (3.2.5) dan x vektörü parametreye bağlı olarak bulunur. Parametrenin herhangi bir değeri için, doğrunun geçtiği bir X noktası bulunmuş olur. Dolayısıyla, $\tilde{a}$ ya karşılık gelen yönlü spacelike doğru tek olarak bulunmuş olur.

$(\Leftarrow)$: Bir yönlü l spacelike doğrusu verilsin. Eğer l üzerinde iki nokta X ve M , doğrunun birim doğrultman vektörü a ise bu spacelike doğrunun vektörel denklemi

$$(\mathbf{x} - \mathbf{m}) \times \mathbf{a} = 0 \quad (3.2.6)$$

olur. Burada $\mathbf{m}$, $\mathbf{M}$ noktasının konum vektörüdür. Eğer, bu spacelike doğru üzerinde başka bir nokta $\mathbf{Z}$ ise

$$(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \times \mathbf{a} = 0 \quad (3.2.7)$$

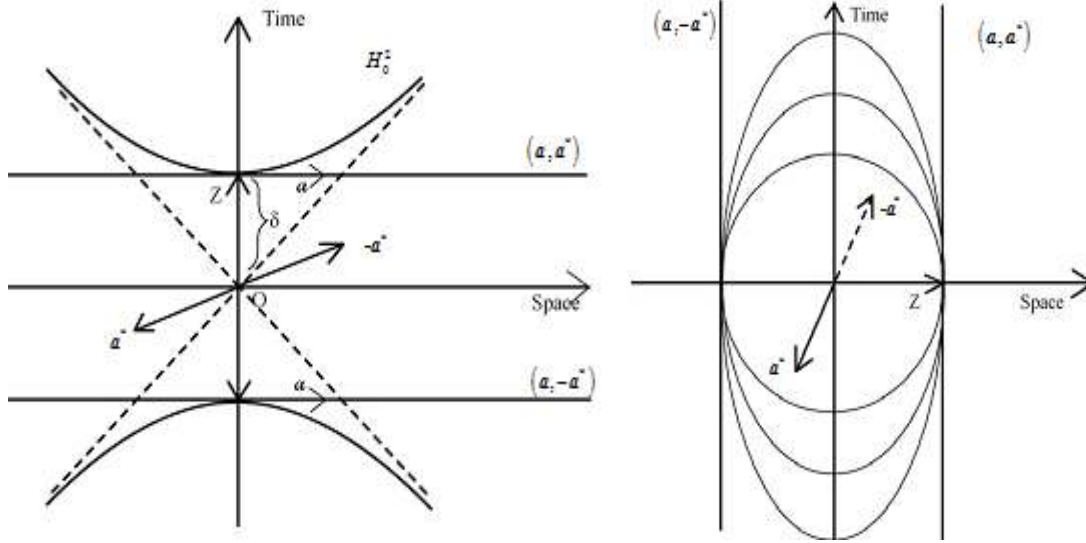
yazılabilir. Burada $\mathbf{z}$, $\mathbf{Z}$ noktasının konum vektörüdür. (3.2.6) ve (3.2.7) den

$$\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{z} \times \mathbf{a} = \mathbf{a}^* \quad (3.2.8)$$

olduğu görülür. Burada $\mathbf{a}^*$, yönlü spacelike doğrunun moment vektörüdür. Biliyoruz ki $\mathbf{a}^*$ moment vektörü, spacelike doğru üzerindeki noktaların seçilişinden bağımsızdır. Sonuç olarak, yönlü l spacelike doğrusuna karşılık gelen birim dual spacelike vektör $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}^*$ biçiminde yazılır. Şimdi bu yönlü timelike doğrunun tek olduğunu gösterelim:

Durum 1 : $\mathbf{z}$ bir timelike vektör olsun. Timelike düzlemde O başlangıç noktasından geçen ve $\mathbf{a}^*$ spacelike vektörüne dik olan O merkezli ve r yarıçaplı H_0^1 hiperbolik çemberini (spacelike eğri) göz önüne alalım. Bu noktalardan H_0^1 hiperbolik çemberine çizilen teğet doğruları $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*)$ ve $(\mathbf{a}, -\mathbf{a}^*)$ vektör çiftleriyle verilir. Bu, $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*)$ vektör çiftine karşılık gelen yönlü spacelike doğrunun tek olması anlamına gelir.

Durum 2 : $\mathbf{z}$ bir spacelike vektör olsun. Bu durumda $\mathbf{a}^*$ timelike vektörüne dik ve O başlangıç noktasından geçen spacelike düzlemde O merkezli ve r yarıçaplı bir E spacelike çemberini (Öklidyen elips) göz önüne alalım. Başlangıç noktasından E çemberine çizilen dik doğru E çemberini iki noktada keser. Bu noktalardan E çemberine çizilen teğetler $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*)$ ve $(\mathbf{a}, -\mathbf{a}^*)$ vektör çiftlerine karşılık gelen yönlü spacelike doğrulardır (Şekil 4 b)). Böylece, moment vektörü pozitif yönde seçilirse, $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*)$ vektör çiftine karşılık gelen yönlü spacelike doğru tektir. Sonuç olarak, R_1^3 deki bir yönlü spacelike doğru $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*)$ vektör çiftiyle birebir karşılık gelir [25].



Şekil 3.3 Yönlü paralel spacelike doğrular ve bunların moment vektörleri

Teorem 3.2.3. ID_1^3 dual Lorentziyen uzayının $\tilde{Q}^2$ dual ışık konisinin noktaları ile R_1^3 Lorentziyen çizgiler uzayının yönlü lightlike(null) doğruları birebir karşılık gelirler.

İspat: $(\Rightarrow)$: $\tilde{Q}^2$ de bir dual lightlike(null) vektör $\tilde{a} = a + \varepsilon a^*$ olsun. Tanımdan

$$\langle a, a \rangle = 0, \langle a, a^* \rangle = 0 \quad (3.2.9)$$

olduğunu biliyoruz. Burada a , aradığımız yönlü lightlike doğrunun doğrultman vektörüdür. X , doğru üzerinde bir nokta olmak üzere

$$a^* = x \times a \quad (3.2.10)$$

olur. Burada x , X noktasının konum vektörüdür. (3.2.10) eşitliğinden x parametreye bağlı bulunur. Parametrenin özel bir değeri için doğrunun geçtiği X noktası bulunur. Dolayısıyla, $\tilde{a}$ dual lightlike vektörüne karşılık gelen yönlü lightlike doğru yazılabilir.

$(\Leftarrow)$: Bir yönlü lightlike l doğrusu verilsin. Eğer, l üzerinde X ve doğrunun birim doğrultman vektörü a ise bu doğrunun moment vektörü

$$a^* = x \times a$$

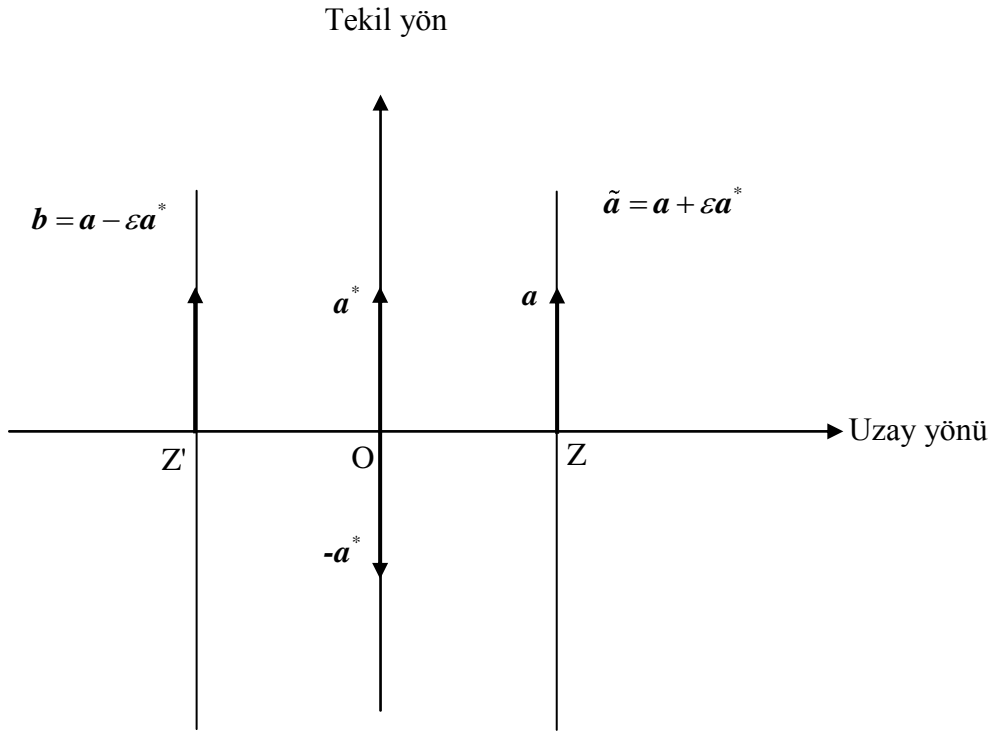
dır. Sonuç olarak, yönlü l doğrusuna karşılık gelen dual lightlike vektör $\tilde{a} = a + \varepsilon a^*$ olur.

Şimdi, bu yönlü lightlike doğrunun tek olduğunu gösterelim:

Kabul edelim ki, $\tilde{a} = a + \varepsilon a^*$ dual lightlike vektörü, O orijinine göre simetrik ve paralel l ve l' doğrularına karşılık gelsin. l' nün yön vektörü a ve geçtiği nokta $-X$ olduğundan

$$a^* = -x \times a \quad (3.2.11)$$

olur. Bu (3.2.10) eşitliği ile çelişir. Yani; l ye karşılık gelen dual lightlike vektör $\tilde{a} = a + \varepsilon a^*$ iken, l' ye karşılık gelen vektör $\tilde{b} = a - \varepsilon a^*$ dır [25].



Şekil 3.4 Yönlü lightlike (null) doğrular ve bunların moment vektörleri

Tanım 3.2.7. $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$, ID_1^3 uzayında iki birim dual vektör olsun.

i. $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ timelike iseler

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = -\cosh \bar{\theta}$$

olacak şekilde $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual sayısına $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual vektörleri arasındaki dual hiperbolik açı denir.

Burada θ ve θ^* , sırasıyla, birim dual vektörlere karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki reel hiperbolik açı ve en kısa Lorentziyen uzaklıktır.

ii. $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$, iki birim dual spacelike vektör ve bu vektörlerin gerdiği dual düzlem timelike olsun.

$$\left| \langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle \right| = \cosh \bar{\theta}$$

olacak şekilde $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual sayısına $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual vektörleri arasındaki dual merkez açı denir.

Burada θ ve θ^* , sırasıyla, birim dual vektörlere karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki reel merkez açı ve en kısa uzaklıktır.

iii. $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$, birim dual spacelike vektörler ve bu vektörlerin gerdiği dual düzlem spacelike olsun.

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \cos \bar{\theta}$$

olacak şekilde $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual sayısına $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual vektörleri arasındaki dual spacelike açı denir.

Burada θ ve θ^* sırasıyla birim dual vektörlere karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki spacelike açı ve en kısa uzaklıktır.

iv. $\tilde{a}$ birim dual spacelike vektör ve $\tilde{b}$, bir birim dual timelike vektör olsun.

$$\left| \langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle \right| = \sinh \bar{\theta}$$

olacak şekilde $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual sayısına $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual vektörleri arasındaki dual Lorentziyen timelike açı denir.

Burada θ ve θ^* sırasıyla birim dual vektörlere karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki Lorentziyen timelike açı ve en kısa uzaklıktır [25].

4. $\tilde{Q}^2$ DUAL IŞIK KONİSİ ÜZERİNDEKİ BİR EĞRİNİN DUAL ASİMPOTİK ÇATISI

Bu bölümde, ID_1^3 uzayının dual ışık konisi üzerinde yatan bir eğri boyunca dual asimptotik ortonormal çatı ve bu eğrinin bağlantı eğrisi tanımlanacaktır. Eğrinin sırasıyla reel gösterge eğrisinin yay parametresine ve dual yay parametresine göre dual koni Frenet türev formülleri ve koni eğrilik fonksiyonu verilecektir.

$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{x}^*$ bir lightlike vektör olsun. Bu vektör bir $t \in IR$ parametresine bağlandığında dual ışık konisi üzerinde bir $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \varepsilon \mathbf{x}^*(t)$ eğri çizer. Reel gösterge eğrisi $\mathbf{x}(t)$ nin yay parametresi s olsun. Bu durumda,

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}(s) + \varepsilon \mathbf{x}^*(s) \quad (4.1)$$

eğrisini elde ederiz.

$$\tilde{\alpha}(s) = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}(s)}{ds} \bigg/ \left\| \frac{d\tilde{\mathbf{x}}(s)}{ds} \right\| \quad (4.2)$$

eşitliği kullanılarak, $\tilde{\mathbf{x}}$ eğrisi boyunca aşağıdaki eşitlikleri sağlayan $\{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\alpha}, \tilde{\mathbf{y}}\}$ dual asimptotik ortonormal çatı oluşturulur:

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle = \left\langle \tilde{\mathbf{y}}, \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{ds} \right\rangle = 0, \langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle = 1. \quad (4.3)$$

$\tilde{\mathbf{x}}$ nin s parametresine göre türevlerini

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \tilde{\mathbf{x}}_s = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{ds}, \quad \tilde{\mathbf{x}}'' = \tilde{\mathbf{x}}_{ss} = \frac{d^2\tilde{\mathbf{x}}}{ds^2}, \dots$$

ve $\tilde{x}$ eğrisinin teğet vektörünün normunu

$$\left\| \frac{d\tilde{x}}{ds} \right\| = \bar{v}$$

ile gösterelim.

Dual asimptotik ortonormal çatının üçüncü elemanı olan $\tilde{y}$ dual vektörü; $\tilde{x}$, $\tilde{x}'$ ve $\tilde{x}''$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak

$$\tilde{y} = \bar{a}\tilde{x}'' + \bar{b}\tilde{x}' + \bar{c}\tilde{x}, \quad \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in ID \quad (4.4)$$

biçiminde yazılabilir. (4.4) eşitliği $\tilde{x}$ ile çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle = \bar{a} \langle \tilde{x}, \tilde{x}'' \rangle + \bar{b} \langle \tilde{x}, \tilde{x}' \rangle + \bar{c} \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle$$

$$1 = -\bar{a} \langle \tilde{x}', \tilde{x}' \rangle$$

ve

$$\bar{a} = -\frac{1}{\bar{v}^2} \quad (4.5)$$

bulunur. (4.4) eşitliği $\tilde{\alpha}$ ile iç çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\langle \tilde{\alpha}, \tilde{y} \rangle = \bar{a} \langle \tilde{\alpha}, \tilde{x}'' \rangle + \bar{b} \langle \tilde{\alpha}, \tilde{x}' \rangle + \bar{c} \langle \tilde{\alpha}, \tilde{x} \rangle$$

$$0 = \bar{a} \left\langle \frac{\tilde{x}'}{\bar{v}}, \tilde{x}'' \right\rangle + \bar{b} \left\langle \frac{\tilde{x}'}{\bar{v}}, \tilde{x}' \right\rangle + \bar{c} \left\langle \frac{\tilde{x}'}{\bar{v}}, \tilde{x} \right\rangle$$

$$0 = -\frac{1}{\bar{v}^3} \langle \tilde{x}', \tilde{x}'' \rangle + \bar{b} \bar{v}$$

elde edilir. Buradan

$$\bar{b} = \frac{\langle \tilde{x}', \tilde{x}'' \rangle}{\bar{v}^4} \quad (4.6)$$

bulunur. (4.4) eşitliğinin kendisiyle iç çarpımı alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\langle \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle = \langle \bar{a} \tilde{\mathbf{x}}'' + \bar{b} \tilde{\mathbf{x}}' + \bar{c} \tilde{\mathbf{x}}, \bar{a} \tilde{\mathbf{x}}'' + \bar{b} \tilde{\mathbf{x}}' + \bar{c} \tilde{\mathbf{x}} \rangle$$

$$0 = \bar{a}^2 \langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle + \bar{b}^2 \langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}' \rangle + \bar{c}^2 \langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + 2\bar{a}\bar{b} \langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}}' \rangle + 2\bar{a}\bar{c} \langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}} \rangle + 2\bar{b}\bar{c} \langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}} \rangle$$

$$0 = \frac{1}{\bar{v}^4} \langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle + \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle^2}{\bar{v}^8} \bar{v}^2 - 2 \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle^2}{\bar{v}^6} + 2\bar{c}$$

elde edilir. Buradan

$$\bar{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle^2}{\bar{v}^6} - \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle}{\bar{v}^4} \right) \quad (4.7)$$

bulunur. (4.5), (4.6) ve (4.7) eşitliklerinde elde edilen değerler (4.4) de yerine yazılırsa,

$$\tilde{\mathbf{y}}(s) = -\frac{1}{\bar{v}^2} \tilde{\mathbf{x}}'' + \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle}{\bar{v}^4} \tilde{\mathbf{x}}' + \frac{1}{2} \left(\frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle^2}{\bar{v}^6} - \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle}{\bar{v}^4} \right) \tilde{\mathbf{x}} \quad (4.8)$$

elde edilir.

Tanım 4.1: $\tilde{\mathbf{x}} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \tilde{Q}^2 \subset \mathbb{D}_1^3$ eğrisi verilsin. (4.8) eşitliği ile tanımlanan $\tilde{\mathbf{y}}(s)$ eğrisi de $\tilde{Q}^2$ üzerindedir ve $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin *dual bağlantı eğrisi* olarak adlandırılır.

Şimdi, $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual eğrisinin dual koni Frenet formüllerini elde edelim:

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \bar{v} \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \quad (4.9)$$

olduğunu biliyoruz. $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1 \in \mathbb{D}$ dual fonksiyonlar olmak üzere

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}' = \bar{a}_1 \tilde{\mathbf{x}} + \bar{b}_1 \tilde{\boldsymbol{\alpha}} + \bar{c}_1 \tilde{\mathbf{y}} \quad (4.10)$$

olarak yazılabilir. (4.10) eşitliğinin her iki tarafı, sırasıyla, $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ ve $\tilde{\mathbf{y}}$ ile iç çarpılırsa,

$$\bar{c}_1 = -\|\tilde{\mathbf{x}}'\| = -\bar{v}, \quad \bar{b}_1 = 0, \quad \bar{a}_1 = \langle \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}' \rangle = \bar{\kappa}_1$$

elde edilir. Böylece

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}' = \bar{\kappa}_1 \tilde{\mathbf{x}} - \bar{v} \tilde{\mathbf{y}} \quad (4.11)$$

bulunur. Benzer şekilde; $\bar{a}_2, \bar{b}_2, \bar{c}_2 \in ID$ dual fonksiyonlar olmak üzere,

$$\tilde{\mathbf{y}}' = \bar{a}_2 \tilde{\mathbf{x}} + \bar{b}_2 \tilde{\alpha} + \bar{c}_2 \tilde{\mathbf{y}} \quad (4.12)$$

yazılabilir. (4.12) eşitliğinin her iki tarafı, sırasıyla, $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\alpha}$ ve $\tilde{\mathbf{y}}$ ile iç çarpılırsa,

$$\bar{c}_2 = 0, \bar{b}_2 = \langle \tilde{\alpha}, \tilde{\mathbf{y}}' \rangle = -\bar{\kappa}_1, \bar{a}_2 = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\tilde{\mathbf{y}}' = -\bar{\kappa}_1 \tilde{\alpha} \quad (4.13)$$

olur. Dolayısıyla Dual ışık konisi üzerindeki bir eğrinin dual koni Frenet formülleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}'(s) \\ \tilde{\alpha}'(s) \\ \tilde{\mathbf{y}}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\nu}(s) & 0 \\ \bar{\kappa}_1(s) & 0 & -\bar{\nu}(s) \\ 0 & -\bar{\kappa}_1(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(s) \\ \tilde{\alpha}(s) \\ \tilde{\mathbf{y}}(s) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

şeklinde elde edilir. (4.11) ve (4.8) eşitliklerinin iç çarpımından, reel gösterge eğrisinin yay parametresine göre verilen bir dual konisel eğrinin koni eğrilik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_1(s) &= \langle \tilde{\mathbf{y}}(s), \tilde{\alpha}'(s) \rangle \\ &= -\frac{1}{\bar{\nu}^2} \langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\alpha}' \rangle + \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle}{\bar{\nu}^4} \langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\alpha}' \rangle + \frac{1}{2} \left(\frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle^2}{\bar{\nu}^6} - \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle}{\bar{\nu}^4} \right) \langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\alpha}' \rangle \\ &= -\frac{1}{\bar{\nu}^2} \left\langle \tilde{\mathbf{x}}'', \frac{\tilde{\mathbf{x}}''}{\bar{\nu}} - \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle}{\bar{\nu}^3} \tilde{\mathbf{x}}' \right\rangle + \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle}{\bar{\nu}^4} \left\langle \tilde{\mathbf{x}}', \frac{\tilde{\mathbf{x}}''}{\bar{\nu}} - \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle}{\bar{\nu}^3} \tilde{\mathbf{x}}' \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle^2}{\bar{\nu}^6} - \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle}{\bar{\nu}^4} \right) \left\langle \tilde{\mathbf{x}}, \frac{\tilde{\mathbf{x}}''}{\bar{\nu}} - \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle}{\bar{\nu}^3} \tilde{\mathbf{x}}' \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\bar{\nu}^3} \langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle + \frac{1}{\bar{\nu}^5} \langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}}' \rangle^2 + \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle^2}{\bar{\nu}^5} - \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle^2}{\bar{\nu}^7} \bar{\nu}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle^2}{\bar{\nu}^7} - \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle}{\bar{\nu}^5} \right) \langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}' \rangle \\ &= -\frac{1}{\bar{\nu}^3} \langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle + \frac{1}{\bar{\nu}^5} \langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}}' \rangle^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle^2}{\bar{\nu}^5} - \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle}{\bar{\nu}^3} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\bar{\kappa}_1(s) = \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle^2 - \langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle \bar{v}^2}{2\bar{v}^5} \quad (4.15)$$

bulunur.

Önerme 4.1. $\tilde{\mathbf{x}} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \tilde{Q}^2 \subset ID_1^3$ reel gösterge eğrisinin yay parametresine göre verilen bir dual spacelike bir eğri ve bu eğri üzerinde $\{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\mathbf{y}}\}$ dual asimptotik ortonormal çatısı verilsin. Bu taktirde $\tilde{\mathbf{x}}$ eğrisi boyunca

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{ds} = \tilde{\mathbf{w}} \times \tilde{\mathbf{x}}, \quad \frac{d\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}{ds} = \tilde{\mathbf{w}} \times \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \frac{d\tilde{\mathbf{y}}}{ds} = \tilde{\mathbf{w}} \times \tilde{\mathbf{y}} \quad (4.16)$$

koşullarını sağlayan bir $\tilde{\mathbf{w}}$ dual frenet ani dönme vektörü vardır. Bu vektör

$$\tilde{\mathbf{w}}(s) = \bar{\kappa}_1 \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{y}} \quad (4.17)$$

eşitliği ile verilir. Ayrıca, dual frenet ani dönme vektörünün karakteri koni eğrilik fonksiyonuna bağlıdır.

İspat: $\{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\mathbf{y}}\}$ dual asimptotik ortonormal çatıya göre

$$\tilde{\mathbf{w}}(s) = \bar{\lambda}_1 \tilde{\mathbf{x}} + \bar{\lambda}_2 \tilde{\boldsymbol{\alpha}} + \bar{\lambda}_3 \tilde{\mathbf{y}}$$

Yazılabilir. Burada $\bar{\lambda}_i$ ler $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ boyunca dual katsayılarıdır. Böylece

$$\tilde{\mathbf{w}} \times \tilde{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}_1 \tilde{\mathbf{x}} \times \tilde{\mathbf{x}} + \bar{\lambda}_2 \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \times \tilde{\mathbf{x}} + \bar{\lambda}_3 \tilde{\mathbf{y}} \times \tilde{\mathbf{x}}$$

$$= -\bar{\lambda}_2 \tilde{\mathbf{x}} + \bar{\lambda}_3 \tilde{\boldsymbol{\alpha}}$$

ve

$$\tilde{\mathbf{w}} \times \tilde{\mathbf{y}} = \bar{\lambda}_1 \tilde{\mathbf{x}} \times \tilde{\mathbf{y}} + \bar{\lambda}_2 \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \times \tilde{\mathbf{y}} + \bar{\lambda}_3 \tilde{\mathbf{y}} \times \tilde{\mathbf{y}}$$

$$= -\bar{\lambda}_1 \tilde{\boldsymbol{\alpha}} + \bar{\lambda}_2 \tilde{\mathbf{y}}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.9), (4.11) ve (4.13) eşitliklerinden $\bar{\lambda}_1 = \bar{\kappa}_1$, $\bar{\lambda}_2 = 0$ ve $\bar{\lambda}_3 = 1$ dir. Yani

(4.17) sağlanır. Üstelik, $\frac{d\tilde{\alpha}}{ds} = \tilde{\mathbf{w}} \times \tilde{\alpha}$ olduğunu görmek kolaydır.

$\tilde{\mathbf{w}}(s)$ vektörünü reel ve dual kısımlarına ayıralım:

$$\tilde{\mathbf{w}}(s) = \mathbf{w}(s) + \varepsilon \mathbf{w}^*(s)$$

diyelim.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}(s) &= \bar{\kappa}_1 \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{y}} \\ &= (\kappa_1(s) + \varepsilon \kappa_1^*(s))(\mathbf{x}(s) + \varepsilon \mathbf{x}^*(s)) + \mathbf{y}(s) + \varepsilon \mathbf{y}^*(s) \\ &= \kappa_1(s) \mathbf{x}(s) + \mathbf{y}(s) + \varepsilon (\kappa_1^*(s) \mathbf{x}(s) + \mathbf{y}^*(s)) \end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(s) &= \kappa_1(s) \mathbf{x}(s) + \mathbf{y}(s), \\ \mathbf{w}^*(s) &= \kappa_1^*(s) \mathbf{x}(s) + \mathbf{y}^*(s) \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi,

$$\langle \mathbf{w}(s), \mathbf{w}(s) \rangle = 2\kappa_1(s)$$

olduğundan, $\tilde{\mathbf{w}}(s)$ ani dönme vektörünün karakteri κ_1 koni eğrilik fonksiyonuna bağlıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Verilen dual eğrinin dual yay uzunluğu, reel gösterge eğrisinin yay uzunluğuna bağlı olarak

$$\bar{s} = \int_0^s \|\tilde{\mathbf{x}}'\| d\sigma = \int_0^s \bar{v} d\sigma \quad (4.18)$$

biçiminde tanımlanır. $\tilde{\mathbf{x}}$ nin $\bar{s}$ dual yay parametresine göre türevlerini

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{x}}_{\bar{s}} = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\bar{s}}, \quad \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{x}}_{\bar{s}\bar{s}} = \frac{d^2\tilde{\mathbf{x}}}{d\bar{s}^2}, \dots$$

ile gösterelim. (4.18) eşitliğinden,

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = \|\tilde{\mathbf{x}}'\| = \bar{v} \quad (4.19)$$

elde edilir. Bu durumda, $\tilde{\mathbf{x}}$ eğrisinin dual yay parametresine göre türevi

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \frac{\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{ds}}{\frac{d\bar{s}}{ds}} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}'}{\bar{v}} = \frac{\tilde{\alpha}\bar{v}}{\bar{v}} = \tilde{\alpha} \quad (4.20)$$

olur. $\bar{s}$, $\tilde{\mathbf{x}}$ dual spacelike eğrisi için yay parametresi olduğundan

$$\langle \tilde{\alpha}(\bar{s}), \tilde{\alpha}(\bar{s}) \rangle = 1$$

olur. $\tilde{\alpha}$ nın $\bar{s}$ ye göre türevi,

$$\dot{\tilde{\alpha}} = \frac{\frac{d\tilde{\alpha}}{d\bar{s}}}{\frac{d\bar{s}}{ds}} = \tilde{\alpha}' \frac{1}{\bar{v}} = (\bar{\kappa}_1 \tilde{\mathbf{x}} - \bar{v} \tilde{\mathbf{y}}) \frac{1}{\bar{v}} = \frac{\bar{\kappa}_1}{\bar{v}} \tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}} = \bar{\kappa} \tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}} \quad (4.21)$$

olur. Burada $\bar{\kappa} = \frac{\bar{\kappa}_1}{\bar{v}}$ dır.

$\tilde{\mathbf{x}}(\bar{s})$ eğrisinin s parametresine göre birinci ve ikinci türevleri, sırasıyla,

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} = \tilde{\alpha}\bar{v} = \bar{v}\tilde{\alpha}, \quad (4.22)$$

ve

$$\tilde{\mathbf{x}}'' = \frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} \right) \frac{d\bar{s}}{ds} = \left(\dot{\tilde{\alpha}}\bar{v} + \tilde{\alpha} \frac{d\bar{v}}{d\bar{s}} \right) \bar{v} \quad (4.23)$$

dir. (4.2) ve (4.23) eşitliklerinden

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}' \rangle = \bar{v}^2, \quad (4.24)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle = \bar{v}^2 \frac{d\bar{v}}{d\bar{s}}, \quad (4.25)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle = \bar{v}^4 \left\langle \frac{d\tilde{\alpha}}{d\bar{s}}, \frac{d\tilde{\alpha}}{d\bar{s}} \right\rangle + \left(\frac{d\bar{v}}{d\bar{s}} \right)^2 \bar{v}^2 \quad (4.26)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.22), (4.23), (4.24), (4.25) ve (4.26) eşitliklerinin (4.8) eşitliğinde yerine yazılmasıyla, $\tilde{\mathbf{y}}$ dual bağlantı eğrisinin $\bar{s}$ parametresine göre ifadesi

$$\tilde{\mathbf{y}}(\bar{s}) = -\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}(\bar{s}) - \frac{1}{2} \left(\langle \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}(\bar{s}), \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}(\bar{s}) \rangle \right) \tilde{\mathbf{x}}(\bar{s}) \quad (4.27)$$

olur. $\tilde{\mathbf{y}}(\bar{s})$ de dual ışık konisi üzerindedir. Yani $\langle \tilde{\mathbf{y}}(\bar{s}), \tilde{\mathbf{y}}(\bar{s}) \rangle = 0$ dır. Ayrıca

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}(\bar{s}), \tilde{\mathbf{y}}(\bar{s}) \rangle = 1 \text{ ve } \langle \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\bar{s}), \tilde{\mathbf{y}}(\bar{s}) \rangle = 0$$

şartları da sağlanır.

$\tilde{\mathbf{y}}(\bar{s})$ nın $\bar{s}$ dual yay parametresine göre türevi

$$\dot{\tilde{\mathbf{y}}}(\bar{s}) = \frac{d\tilde{\mathbf{y}}}{d\bar{s}} \bigg/ \frac{d\bar{s}}{ds} = (-\bar{\kappa}_1 \tilde{\alpha}) \frac{1}{\bar{v}} = -\frac{\bar{\kappa}_1}{\bar{v}} \tilde{\alpha} = \bar{\kappa} \tilde{\alpha} \quad (4.28)$$

olur. Bu durumda dual ışık konisi üzerindeki bir $\tilde{\mathbf{x}}$ dual eğrisinin $\bar{s}$ dual yay parametresine göre türev formülleri matris formunda aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\bar{s}) \\ \dot{\tilde{\alpha}}(\bar{s}) \\ \dot{\tilde{\mathbf{y}}}(\bar{s}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \bar{\kappa}(\bar{s}) & 0 & -1 \\ 0 & -\bar{\kappa}(\bar{s}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(\bar{s}) \\ \tilde{\alpha}(\bar{s}) \\ \tilde{\mathbf{y}}(\bar{s}) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

(4.24), (4.25) ve (4.26) eşitliklerinin (4.15) eşitliğinde yerine yazılmasıyla dual yay parametresine göre verilen bir eğri için koni eğrilik fonksiyonu

$$\bar{\kappa}(\bar{s}) = -\frac{1}{2} \langle \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}, \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} \rangle \quad (4.30)$$

ile verilir.

5. $\tilde{Q}^2$ DUAL IŞIK KONİSİ ÜZERİNDEKİ EĞRİLERİN DUAL TEMSİL FORMÜLLERİ

5.1. Reel Yay Parametresine Göre Verilen Dual Spacelike Eğri

Bu bölümde dual ışık konisi üzerinde reel gösterge eğrisinin yay parametresine göre verilen bir dual spacelike eğrinin dual yapı fonksiyonu ve dual temsil formülleri ve dual bağlantı eğrisi tanımlanır.

Dual ışık konisi üzerinde

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}(s) + \varepsilon \mathbf{x}^*(s) \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} &= (x_1(s), x_2(s), x_3(s)) + \varepsilon (x_1^*(s), x_2^*(s), x_3^*(s)) \\ &= (x_1(s) + \varepsilon x_1^*(s), x_2(s) + \varepsilon x_2^*(s), x_3(s) + \varepsilon x_3^*(s)) \\ &= (\bar{x}_1(s), \bar{x}_2(s), \bar{x}_3(s)) \end{aligned}$$

eğrisi verilsin. Bu takdirde

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle = 0 \quad (5.2)$$

veya

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 = 0 \quad (5.3)$$

dır. (5.3) eşitliğini reel ve dual kısımlarına ayıralım:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 &= (x_1 + \varepsilon x_1^*)^2 + (x_2 + \varepsilon x_2^*)^2 - (x_3 + \varepsilon x_3^*)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2\varepsilon (x_1 x_1^* + x_2 x_2^* - x_3 x_3^*) = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

elde edilir. (5.4) eşitliğinin reel kısmı olan

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

eşitliği, $\mathbf{x}(s)$ reel gösterge eğrisinin ışık konisi üzerinde olma şartıdır. Şimdi, $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisi ışık konisi üzerinde olduğundan $\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 = 0$ dir. Buradan

$$\bar{x}_1^2 - \bar{x}_3^2 = -\bar{x}_2^2 \quad (5.5)$$

yazılabilir. (5.5) eşitliği çarpanlarına ayrılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_3}{\bar{x}_2} = \frac{-\bar{x}_2}{\bar{x}_1 - \bar{x}_3} \quad \text{veya} \quad \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_3}{-\bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1 - \bar{x}_3}$$

yazabiliriz. Böylece, $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisi için

$$\frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_3}{\bar{x}_2} = \frac{-\bar{x}_2}{\bar{x}_1 - \bar{x}_3} = \bar{f}(s) \quad (5.6)$$

ve

$$\bar{x}_2 = 2\bar{\rho}(s) \quad (5.7)$$

kabul edebiliriz. Burada $\bar{f}(s)$ sabit olmayan bir dual fonksiyondur. (5.6) ve (5.7) den

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 + \bar{x}_3 &= 2\bar{\rho}(s)\bar{f}(s) \\ \bar{x}_2 &= 2\bar{\rho}(s) \\ \bar{x}_1 - \bar{x}_3 &= -2\bar{\rho}(s)\bar{f}^{-1}(s) \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

elde edilir. Burada $\bar{f}^{-1}(s)$ ifadesi $\frac{1}{\bar{f}(s)}$ anlamındadır. (5.8) denklemlerinden $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin koordinat bileşenleri

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 &= \bar{\rho}(s)(\bar{f}(s) - \bar{f}^{-1}(s)) \\ \bar{x}_2 &= 2\bar{\rho}(s) \\ \bar{x}_3 &= \bar{\rho}(s)(\bar{f}(s) + \bar{f}^{-1}(s)) \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

bulunur. O halde, $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual spacelike eğrisini aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(s) = (\bar{\rho}(s)(\bar{f}(s) - \bar{f}^{-1}(s)), 2\bar{\rho}(s), \bar{\rho}(s)(\bar{f}(s) + \bar{f}^{-1}(s))) \quad (5.10)$$

(5.10) eşitliği ile $\bar{\rho}$ ve $\bar{f}$ fonksiyonları cinsinden verilen dual konisel eğri reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(s) &= (\bar{\rho}(s)(\bar{f}(s) - \bar{f}^{-1}(s)), 2\bar{\rho}(s), \bar{\rho}(s)(\bar{f}(s) + \bar{f}^{-1}(s))) \\ &= \left((\rho + \varepsilon\rho^*) \left(f + \varepsilon f^* - \frac{f - \varepsilon f^*}{f^2} \right), 2\rho + 2\varepsilon\rho^*, (\rho + \varepsilon\rho^*) \left(f + \varepsilon f^* + \frac{f - \varepsilon f^*}{f^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

elde edilir. (5.11) de gerekli düzenlemeler yapılırsa, eşitliğin reel kısmı

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) = (\rho(s)(f(s) - f^{-1}(s)), 2\rho(s), \rho(s)(f(s) + f^{-1}(s))) \quad (5.12)$$

konisel eğrisi ve dual kısmı

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(s) = (\rho^*(f - f^{-1}) + f^*\rho(1 + f^{-2}), 2\rho^*, \rho^*(f + f^{-1}) + f^*\rho(1 - f^{-2})) \quad (5.13)$$

eğrisidir.

(5.12) eşitliği Liu [16] tarafından elde edilen, ışık konisi üzerindeki bir eğrinin f ve ρ fonksiyonlarına bağlı temsilidir.

$\tilde{\mathbf{x}}$ eğrisinin reel gösterge eğrisinin s yay parametresine göre türevi, (5.10) eşitliğinden,

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{ds} = \frac{d\bar{\rho}}{ds}(\bar{f} - \bar{f}^{-1}, 2, \bar{f} + \bar{f}^{-1}) + \bar{\rho} \frac{d\bar{f}}{ds}(1 + \bar{f}^{-2}, 0, 1 - \bar{f}^{-2}) \quad (5.14)$$

eşitliği ile verilir. (5.10) eşitliği ile verilen $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin teğetinin normu, (5.14) eşitliğinden,

$$\bar{v} = \sqrt{\left\langle \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{ds}, \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{ds} \right\rangle} = 2\bar{\rho}\bar{f}_s\bar{f}^{-1} \quad (5.15)$$

elde edilir. Burada $\bar{f}_s = \frac{d\bar{f}}{ds}$ dir. O halde (5.15) eşi

$$\bar{\rho}(s) = \bar{v} \frac{\bar{f}(s)}{2\bar{f}_s(s)} \quad (5.16)$$

olduğu görülür.

(5.15) eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$v + \varepsilon v^* = 2 \frac{(\rho + \varepsilon \rho^*)(f_s + \varepsilon f_s^*)}{(f + \varepsilon f^*)}$$

$$v + \varepsilon v^* = 2 \frac{(\rho + \varepsilon \rho^*)(f_s + \varepsilon f_s^*)(f - \varepsilon f^*)}{f^2}$$

$$v + \varepsilon v^* = 2\rho f^{-1} f_s + \varepsilon (2\rho^* f^{-1} f_s + 2\rho f^{-1} f_s^* - 2\rho f_s \rho^* f^{-2})$$

elde edilir. Eşitliğin reel kısmı

$$v = 2\rho f f^{-1} = 1 \quad (5.17)$$

ve dual kısmı

$$v^* = 2\rho^* f^{-1} f_s + 2\rho f^{-1} f_s^* - 2\rho f_s \rho^* f^{-2} \quad (5.18)$$

dir.

(5.17) eşitliğinden $\bar{\rho}(s)$ fonksiyonunun reel kısmı

$$\rho = \frac{f}{2f_s} \quad (5.19)$$

elde edilir. (5.18) eşitliğinden de $\bar{\rho}(s)$ fonksiyonunun dual kısmı

$$\rho^* = \frac{f_s f^* + f f_s^* + v^* f f_s}{2f_s^2} + v^* \frac{f}{2f_s}$$

elde edilir. (5.16) eşitliği bir dual konisel eğrinin teğet vektörünün normunun $\bar{f}$ ve $\bar{\rho}$ fonksiyonlarına bağlı ifadesidir. (5.17) eşitliği de, $\bar{\rho}$ fonksiyonun $\bar{f}$ fonksiyonuna bağlı ifadesidir. Yukarıda yapılan işlemlerin sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.1.1: $\tilde{\mathbf{x}}(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \tilde{Q}^2 \subset D_1^3$, reel gösterge eğrisinin yay parametresi s olan bir dual konisel eğri olsun. O zaman $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(s) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, sabit olmayan bir $\bar{f}(s)$ fonksiyonu için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = \bar{v} \frac{\bar{f}}{2\bar{f}_s} (\bar{f} - \bar{f}^{-1}, 2, \bar{f} + \bar{f}^{-1}) = \frac{1}{2} \bar{v} \bar{f}_s^{-1} (\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) \quad (5.20)$$

Tanım 5.1.1. $\bar{f}(s)$ fonksiyonu, dual konisel $\tilde{\mathbf{x}}(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \tilde{Q}^2 \subset D_1^3$ eğrisinin dual yapı fonksiyonu olarak adlandırılır.

(5.20) eşitliğinin s parametresine göre birinci ve ikinci türevleri

$$\begin{aligned} 2\tilde{\mathbf{x}}' &= \left(\frac{2\bar{v}\bar{f}\bar{f}_s^2 - \bar{v}(\bar{f}^2 - 1)\bar{f}_{ss}}{\bar{f}_s^2}, \frac{2\bar{v}\bar{f}_s^2 - 2\bar{v}\bar{f}\bar{f}_{ss}}{\bar{f}_s^2}, \frac{2\bar{v}\bar{f}\bar{f}_s^2 - \bar{v}(\bar{f}^2 + 1)\bar{f}_{ss}}{\bar{f}_s^2} \right) \\ &\quad + \bar{v}_s \frac{1}{\bar{f}_s} (\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) \\ &= (\bar{v}_s \bar{f}_s^{-1} - \bar{v} \bar{f}_s^{-2} \bar{f}_{ss}) (\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) + 2\bar{v} (\bar{f}, 1, \bar{f}) \end{aligned} \quad (5.21)$$

ve

$$\begin{aligned} 2\tilde{\mathbf{x}}'' &= \left(\frac{\bar{v}_{ss} \bar{f}_s - \bar{v}_s \bar{f}_{ss}}{\bar{f}_s^2} - \frac{(\bar{v}_s \bar{f}_{ss} + \bar{v} \bar{f}_{sss}) \bar{f}_s^2 - 2\bar{v} \bar{f}_s \bar{f}_{ss}^2}{\bar{f}_s^4} \right) (\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) \\ &\quad + (\bar{v}_s \bar{f}_s^{-1} - \bar{v} \bar{f}_s^{-2} \bar{f}_{ss}) (2\bar{f} \bar{f}_s, 2\bar{f}_s, 2\bar{f} \bar{f}_s) + 2\bar{v}_s (\bar{f}, 0, \bar{f}) + 2\bar{v} \bar{f}_s (1, 0, 1) \\ &= (\bar{v}_{ss} \bar{f}_s^{-1} - 2\bar{v}_s \bar{f}_s^{-2} \bar{f}_{ss} - \bar{v} \bar{f}_s^{-2} \bar{f}_{sss} + 2\bar{v} \bar{f}_s^{-3} \bar{f}_{ss}^2) (\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) \\ &\quad + (4\bar{v}_s - 2\bar{v} \bar{f}_s^{-1} \bar{f}_{ss}) (\bar{f}, 1, \bar{f}) + 2\bar{v} \bar{f}_s (1, 0, 1) \end{aligned} \quad (5.22)$$

olur. (5.22) eşitliğinin kendisi ile iç çarpımından,

$$\langle 2\tilde{\mathbf{x}}'', 2\tilde{\mathbf{x}}'' \rangle = 16\bar{v}_s^2 - 8\bar{v}\bar{v}_{ss} - 12\bar{v}^2 \bar{f}_s^{-2} \bar{f}_{ss}^2 + 8\bar{v}^2 \bar{f}_s^{-1} \bar{f}_{sss}$$

elde edilir. Buradan

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}'', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle = 4\bar{v}_s^2 - 2\bar{v}\bar{v}_{ss} - 3\bar{v}^2 \bar{f}_s^{-2} \bar{f}_{ss}^2 + 2\bar{v}^2 \bar{f}_s^{-1} \bar{f}_{sss} \quad (5.23)$$

bulunur. (5.21) ve (5.22) eşitliklerinin iç çarpımından

$$\langle 2\tilde{\mathbf{x}}', 2\tilde{\mathbf{x}}'' \rangle = 4\bar{\nu} \bar{\nu}_s$$

elde edilir. Buradan

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}'' \rangle = \bar{\nu} \bar{\nu}_s \quad (5.24)$$

elde edilir. (5.21) eşitliğinin kendisiyle iç çarpımından,

$$\langle 2\tilde{\mathbf{x}}', 2\tilde{\mathbf{x}}' \rangle = 4\bar{\nu}^2$$

ve buradan

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{x}}' \rangle = \bar{\nu}^2 \quad (5.25)$$

bulunur. (5.23), (5.24) ve (5.25) eşitlikleri (4.8) eşitliğinde yerlerine yazılırsa,

$$\tilde{\mathbf{y}}(s) = -\frac{1}{\bar{\nu}^2} \tilde{\mathbf{x}}'' + \frac{\bar{\nu} \bar{\nu}_s}{\bar{\nu}^4} \tilde{\mathbf{x}}'' + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\nu} \bar{\nu}_s}{\bar{\nu}^6} - \frac{4\bar{\nu}_s^2 - 2\bar{\nu}\bar{\nu}_{ss} - 3\bar{\nu}^2 \bar{f}_s^{-2} \bar{f}_{ss}^2 + 2\bar{\nu}^2 \bar{f}_s^{-1} \bar{f}_{sss}}{\bar{\nu}^4} \right) \tilde{\mathbf{x}}$$

elde edilir. Burada $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{x}}'$ ve $\tilde{\mathbf{x}}''$ vektörleri yazılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}(s) = & -\frac{1}{2\bar{\nu}^2} \left[\left(\bar{\nu}_{ss} \bar{f}_s^{-1} - 2\bar{\nu}_s \bar{f}_s^{-2} \bar{f}_{ss} - \bar{\nu} \bar{f}_s^{-2} \bar{f}_{sss} + 2\bar{\nu} \bar{f}_s^{-3} \bar{f}_{ss}^2 \right) (\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) \right] \\ & + \left(4\bar{\nu}_s - 2\bar{\nu} \bar{f}_s^{-1} \bar{f}_{ss} \right) (\bar{f}, 1, \bar{f}) + 2\bar{\nu} \bar{f}_s (1, 0, 1) \\ & + \frac{\bar{\nu} \bar{\nu}_s}{2\bar{\nu}^4} \left[\left(\bar{\nu}_{ss} \bar{f}_s^{-1} - \bar{\nu} \bar{f}_s^{-2} \bar{f}_{ss} \right) (\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) + 2\bar{\nu} (\bar{f}, 1, \bar{f}) \right] \\ & + \frac{1}{4} \left(\frac{\bar{\nu} \bar{\nu}_s}{\bar{\nu}^6} - \frac{4\bar{\nu}_s^2 - 2\bar{\nu}\bar{\nu}_{ss} - 3\bar{\nu}^2 \bar{f}_s^{-2} \bar{f}_{ss}^2 + 2\bar{\nu}^2 \bar{f}_s^{-1} \bar{f}_{sss}}{\bar{\nu}^4} \right) \left[\bar{\nu} \bar{f}_s^{-1} (\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) \right] \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}(s) = & \left[\bar{\nu}^{-2} \bar{f}_s^{-2} \bar{f}_{ss} \left(\bar{\nu}_s - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(+2\bar{\nu}^{-1} \bar{f}_s^{-3} \bar{f}_{ss}^2 \right) \right] (\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) \\ & - \frac{1}{2} \left(\bar{\nu}^{-3} \bar{\nu}_s^2 \bar{f}_s^{-1} - \right) + \frac{1}{4} \left(\bar{\nu}^{-4} \bar{\nu}_s \bar{f}_s^{-1} \right) \\ & - \frac{1}{2} \left(4\bar{\nu}^{-2} \bar{\nu}_s - 2\bar{\nu}^{-1} \bar{f}_s^{-1} \bar{f}_{ss} - \bar{\nu}^{-2} \right) (\bar{f}, 1, \bar{f}) - \bar{\nu}^{-1} \bar{f}_s (1, 0, 1) \end{aligned} \quad (5.26)$$

olduğu görülür. (5.26) denklemi, $\tilde{\mathbf{y}}$ dual bağlantı eğrisinin, $\tilde{\mathbf{x}}$ eğrisinin yapı fonksiyonu ve teğet vektörünün normuna bağlı bir ifadesidir.

5.2. Dual Yay Parametresine Göre Verilen Dual Spacelike Eğri

Bu bölümde, dual ışık konisi üzerindeki dual yay parametresine göre verilen bir dual spacelike eğrinin dual yapı fonksiyonu ve dual temsil formülleri ve dual bağlantı eğrisi ifade edilir.

$\tilde{\mathbf{x}} : I \subset ID \rightarrow \tilde{Q}^2 \subset ID_1^3$, reel gösterge eğrisinin yay parametresi s olan bir dual konisel eğri olsun. Her eğri kendi yay parametresine göre ifade edilebileceğinden; $\bar{s}$, $\tilde{\mathbf{x}}$ eğrisi için dual yay parametresi olmak üzere

$$\tilde{\mathbf{x}}(\bar{s}) = \mathbf{x}(\bar{s}) + \varepsilon \mathbf{x}^*(\bar{s}) \quad (5.27)$$

yazılabilir. (5.27) eşitliği ile verilen eğri reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(\bar{s}) &= (\bar{x}_1(\bar{s}), \bar{x}_2(\bar{s}), \bar{x}_3(\bar{s})) \\ &= (x_1(\bar{s}) + \varepsilon x_1^*(\bar{s}), x_2(\bar{s}) + \varepsilon x_2^*(\bar{s}), x_3(\bar{s}) + \varepsilon x_3^*(\bar{s})) \\ &= (x_1(s), x_2(s), x_3(s)) + \varepsilon (s^* (x_1'(s), x_2'(s), x_3'(s)) + (x_1^*(s), x_2^*(s), x_3^*(s))) \end{aligned} \quad (5.28)$$

elde edilir. (5.28) eşitliğinin reel kısmı

$$\mathbf{x}(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \quad (5.29)$$

eğrisi ve dual kısmı

$$\mathbf{x}^*(s) = (s^* x_1'(s) + x_1^*(s), s^* x_2'(s) + x_2^*(s), s^* x_3'(s) + x_3^*(s))$$

eğrisidir.

$\tilde{\mathbf{x}}(\bar{s})$ eğrisi dual ışık konisi üzerinde olduğundan,

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle = 0 \quad (5.30)$$

dır. Yani,

$$\bar{x}_1^2(\bar{s}) + \bar{x}_2^2(\bar{s}) - \bar{x}_3^2(\bar{s}) = 0 \quad (5.31)$$

dır.

(5.34) eşitliğini reel ve dual kısımlarına ayıralım:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^2(\bar{s}) + \bar{x}_2^2(\bar{s}) - \bar{x}_3^2(\bar{s}) &= \left(x_1(s) + \varepsilon s^* x_1'(s) + \varepsilon x_1^*(s) \right)^2 + \left(x_2(s) + \varepsilon s^* x_2'(s) + \varepsilon x_2^*(s) \right)^2 \\ &\quad - \left(x_3(s) + \varepsilon s^* x_3'(s) + \varepsilon x_3^*(s) \right)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2\varepsilon \left(x_1 x_1^* + x_1 x_1' + x_2 x_2^* + x_2 x_2' - x_3 x_3^* - x_3 x_3' \right) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (5.31) eşitliğinin reel kısmı olan

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

eşitliği $x(s)$ reel gösterge eğrisinin ışık konisi üzerinde olma şartıdır. Şimdi, (5.31) eşitliğini

$$\bar{x}_1^2 - \bar{x}_3^2 = -\bar{x}_2^2 \quad (5.32)$$

biçiminde yazalım. (5.32) eşitliği çarpanlarına ayrılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_3}{\bar{x}_2} = \frac{-\bar{x}_2}{\bar{x}_1 - \bar{x}_3} \quad \text{veya} \quad \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_3}{-\bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1 - \bar{x}_3}$$

olur. Böylece, $\tilde{x}$ eğrisi için

$$\frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_3}{\bar{x}_2} = \frac{-\bar{x}_2}{\bar{x}_1 - \bar{x}_3} = \bar{f}(\bar{s}) \quad (5.33)$$

ve

$$\bar{x}_2 = 2\bar{\rho}(\bar{s}) \quad (5.34)$$

kabul edebiliriz. Burada $\bar{f}(\bar{s})$ sabit olmayan dual değişkenli dual fonksiyondur. (5.33) ve (5.34) den

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 + \bar{x}_3 &= 2\bar{\rho}(\bar{s})\bar{f}(\bar{s}) \\ \bar{x}_2 &= 2\bar{\rho}(\bar{s}) \\ \bar{x}_1 - \bar{x}_3 &= -2\bar{\rho}(\bar{s})\bar{f}^{-1}(\bar{s}) \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

elde edilir. (5.35) denklemlerinden $\tilde{\mathbf{x}}(\bar{s})$ eğrisinin koordinat bileşenleri

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 &= \bar{\rho}(\bar{s})(\bar{f}(\bar{s}) - \bar{f}^{-1}(\bar{s})) \\ \bar{x}_2 &= 2\bar{\rho}(\bar{s}) \\ \bar{x}_3 &= \bar{\rho}(\bar{s})(\bar{f}(\bar{s}) + \bar{f}^{-1}(\bar{s})) \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

bulunur. $\bar{f}^{-1}(\bar{s})$ ifadesi $\frac{1}{\bar{f}(\bar{s})}$ anlamındadır. O halde, $\tilde{\mathbf{x}}(\bar{s})$ dual spacelike eğrisini aşağıdaki

biçimde yazabiliriz:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\bar{s}) = (\bar{\rho}(\bar{s})(\bar{f}(\bar{s}) - \bar{f}^{-1}(\bar{s})), 2\bar{\rho}(\bar{s}), \bar{\rho}(\bar{s})(\bar{f}(\bar{s}) + \bar{f}^{-1}(\bar{s}))). \quad (5.37)$$

Önce, (5.36) nın birinci denklemini reel ve dual kısımlarına ayıralım:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(\bar{s}) &= (\rho(\bar{s}) + \varepsilon \rho^*(\bar{s})) \left(f(\bar{s}) + \varepsilon f^*(\bar{s}) - \frac{1}{f(\bar{s}) + \varepsilon f^*(\bar{s})} \right) \\ &= (\rho(s) + \varepsilon (s^* \rho'(s) + \rho^*(s))) (f(s) + \varepsilon (s^* f'(s) + f^*(s))) \\ &\quad - (\rho(s) + \varepsilon (s^* \rho'(s) + \rho^*(s))) \frac{1}{f(s) + \varepsilon (s^* f'(s) + f^*(s))} \\ &= (\rho(s) + \varepsilon (s^* \rho'(s) + \rho^*(s))) (f(s) - f^{-1}(s) + \varepsilon (1 + f^{-2}(s)) (s^* f'(s) + f^*(s))). \end{aligned}$$

Buna göre,

$$\left\{ \begin{aligned} x_1(s) &= \rho(s)(f(s) - f^{-1}(s)) \\ x_1^*(s) &= \rho(s)((1 + f^{-2}(s))(s^* f'(s) + f^*(s))) + (f(s) - f^{-1}(s))(s^* \rho'(s) + \rho^*(s)) \end{aligned} \right.$$

elde edilir. Şimdi, (5.36) ın ikinci denklemini reel ve dual kısımlarına ayıralım:

$$\bar{x}_2(\bar{s}) = 2(\rho(\bar{s}) + \varepsilon \rho^*(\bar{s}))$$

$$= 2\rho(s) + \varepsilon(2\rho^*(s) + s^* \rho'(s)).$$

Buna göre,

$$\begin{cases} x_2(s) = 2\rho(s) \\ x_2^*(s) = 2s^* \rho'(s) + 2\rho^*(s) \end{cases}$$

elde edilir. Son olarak, (5.36) ın üçüncü denklemini reel ve dual kısımlarına aryalım:

$$\begin{aligned} \bar{x}_3(\bar{s}) &= (\rho(\bar{s}) + \varepsilon \rho^*(\bar{s})) \left(f(\bar{s}) + \varepsilon f^*(\bar{s}) + \frac{1}{f(\bar{s}) + \varepsilon f^*(\bar{s})} \right) \\ &= (\rho(s) + \varepsilon(s^* \rho'(s) + \rho^*(s))) (f(s) + \varepsilon(s^* f'(s) + f^*(s))) + \\ &\quad + (\rho(s) + \varepsilon(s^* \rho'(s) + \rho^*(s))) \frac{1}{f(s) + \varepsilon(s^* f'(s) + f^*(s))} \\ &= (\rho(s) + \varepsilon(s^* \rho'(s) + \rho^*(s))) (f(s) + f^{-1}(s) - \varepsilon(1 + f^{-2}(s))(s^* f'(s) + f^*(s))) \end{aligned}$$

Buna göre,

$$\begin{cases} x_3(s) = \rho(s)(f(s) + f^{-1}(s)) \\ x_3^*(s) = (f(s) + f^{-1}(s))(s^* \rho'(s) + \rho^*(s)) - \rho(s)((1 - f^{-2}(s))(s^* f'(s) + f^*(s))) \end{cases}$$

elde edilir. Yani, (5.37) eşitliğinin reel kısmı

$$\mathbf{x}(s) = (\rho(s)(f(s) - f^{-1}(s)), 2\rho(s), \rho(f(s) + f^{-1}(s))) \quad (5.38)$$

eğrisi ve dual kısmının koordinat bileşenleri

$$\left. \begin{aligned} x_1^*(s) &= \rho(s)((1 + f^{-2}(s))(s^* f'(s) + f^*(s))) + (f(s) - f^{-1}(s))(s^* \rho'(s) + \rho^*(s)) \\ x_2^*(s) &= 2\rho^* + 2s^* \rho'(s) \\ x_3^*(s) &= (f(s) + f^{-1}(s))(s^* \rho'(s) + \rho^*(s)) - \rho(s)((1 - f^{-2}(s))(s^* f'(s) + f^*(s))) \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

olan bir eğridir. (5.38) eşitliği Liu [16] tarafından elde edilen, ışık konisi üzerindeki bir eğrinin f ve ρ fonksiyonlarına bağlı temsildir.

$\tilde{\mathbf{x}}$ eğrisinin dual yay parametresine göre türevi, (5.37) eşitliğinden,

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\bar{s}} = \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{s}} (\bar{f} - \bar{f}^{-1}, 2, \bar{f} + \bar{f}^{-1}) + \bar{\rho} \frac{d\bar{f}}{d\bar{s}} (1 + \bar{f}^{-2}, 0, 1 - \bar{f}^{-2}) \quad (5.40)$$

elde edilir. (5.40) eşitliğinden,

$$\left\langle \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\bar{s}}, \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\bar{s}} \right\rangle = 4\bar{\rho}^2 \bar{f}_s^2 \bar{f}^{-2}$$

bulunur. $\tilde{\mathbf{x}}$ eğrisinin teğet vektörünün normu

$$\sqrt{\left\langle \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\bar{s}}, \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\bar{s}} \right\rangle} = 2\bar{\rho} \bar{f}_s \bar{f}^{-1} \quad (5.41)$$

bulunur. $\bar{s}$, $\tilde{\mathbf{x}}$ dual eğrisi için yay parametresi olduğundan

$$\sqrt{\left\langle \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\bar{s}}, \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\bar{s}} \right\rangle} = 1 \quad (5.42)$$

dir. Böylece (5.41) ve (5.42) eşitliklerinden

$$\bar{\rho}(\bar{s}) = \frac{\bar{f}(\bar{s})}{2\bar{f}_s(\bar{s})} \quad (5.43)$$

olduğu görülür.

(5.41) eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\begin{aligned} 2\bar{\rho}\bar{f}_s\bar{f}^{-1} &= 2 \frac{(\rho + \varepsilon \rho^*)(f_s + \varepsilon f_s^*)}{(f + \varepsilon f^*)} \\ &= \frac{2\rho f f_s + \varepsilon (2\rho^* f f_s + 2\rho f f_s^* - 2\rho f_s \rho^*)}{f^2} \\ &= 2\rho f^{-1} f_s + \varepsilon (2\rho^* f^{-1} f_s + 2\rho f^{-1} f_s^* - 2\rho f_s \rho^* f^{-2}) \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin reel kısmı

$$\|\mathbf{x}'(s)\| = 2\rho f f^{-1} \quad (5.44)$$

ve dual kısmı

$$\|\mathbf{x}^{*'}(s)\| = 2\rho^* f^{-1} f_s + 2\rho f^{-1} f_s^* - 2\rho f_s \rho^* f^{-2} = 0$$

dir.

(5.43) eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\rho + \varepsilon \rho^* = \frac{f + \varepsilon f^*}{2(f_{\bar{s}} + \varepsilon f_{\bar{s}}^*)} = \frac{f f_{\bar{s}} + \varepsilon (f_{\bar{s}} f^* + f f_{\bar{s}}^*)}{2f_{\bar{s}}^2}$$

elde edilir. Buradan eşitliğinin reel kısmı

$$\rho = \frac{f}{2f_{\bar{s}}} \quad (5.45)$$

ve dual kısmı

$$\rho^* = \frac{(f_{\bar{s}} f^* - f f_{\bar{s}}^*)}{2f_{\bar{s}}^2}$$

dir. (5.41) eşitliği dual yay parametresine göre verilen bir eğrinin teğet vektörünün normunun $\bar{f}$ ve $\bar{\rho}$ fonksiyonlarına bağlı bir ifadesidir. (5.43) eşitliği de $\bar{\rho}$ fonksiyonun $\bar{f}$ fonksiyonuna bağlı olarak verilen bir ifadesidir. Yukarıda yapılan işlemlerin sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.2.1. $\tilde{\mathbf{x}} : I \subset D \rightarrow \tilde{Q}^2 \subset D_1^3$, dual yay parametresi $\bar{s}$ olan bir dual konisel eğri olsun. O zaman $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\bar{s}) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, sabit olmayan bir $\bar{f}(\bar{s})$ fonksiyonu için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\tilde{\mathbf{x}}(\bar{s}) = \frac{\bar{f}}{2\bar{f}_{\bar{s}}} (\bar{f} - \bar{f}^{-1}, 2, \bar{f} + \bar{f}^{-1}) = \frac{1}{2} \bar{f}_{\bar{s}}^{-1} (\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) \quad (5.46)$$

Tanım 5.2.1. $\bar{f}(\bar{s})$ fonksiyonu, dual konisel $\tilde{\mathbf{x}}(\bar{s})$ eğrisinin dual yapı fonksiyonu olarak adlandırılır.

(5.46) eşitliğinin $\bar{s}$ parametresine göre birinci ve ikinci türevleri alınırsa,

$$2\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \left(\frac{2\bar{f}\bar{f}_{\bar{s}}^2 - (\bar{f}^2 - 1)\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}}{\bar{f}_{\bar{s}}^2}, \frac{2\bar{f}_{\bar{s}}^2 - 2\bar{f}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}}{\bar{f}_{\bar{s}}^2}, \frac{2\bar{f}\bar{f}_{\bar{s}}^2 - (\bar{f}^2 + 1)\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}}{\bar{f}_{\bar{s}}^2} \right)$$

$$= -\bar{f}_{\bar{s}}^{-2}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}(\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) + 2(\bar{f}, 1, \bar{f}) \quad (5.47)$$

ve

$$2\ddot{\bar{\mathbf{x}}} = \left(-\frac{\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}}}{\bar{f}_{\bar{s}}^2} + 2\frac{\bar{f}_{\bar{s}}^2}{\bar{f}_{\bar{s}}^3} \right) (\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) - \bar{f}_{\bar{s}}^{-2}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}(2\bar{f}\bar{f}_{\bar{s}}, 2\bar{f}_{\bar{s}}, 2\bar{f}\bar{f}_{\bar{s}}) + 2(\bar{f}_{\bar{s}}, 0, \bar{f}_{\bar{s}})$$

$$= -\bar{f}_{\bar{s}}^{-2}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}}(\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) + 2\bar{f}_{\bar{s}}^{-3}\bar{f}_{\bar{s}}^2(\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) - 2\bar{f}_{\bar{s}}^{-1}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}(\bar{f}, 1, \bar{f})$$

$$+ 2\bar{f}_{\bar{s}}(1, 0, 1)$$

$$= (2\bar{f}_{\bar{s}}^{-3}\bar{f}_{\bar{s}}^2 - \bar{f}_{\bar{s}}^{-2}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}})(\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) - 2\bar{f}_{\bar{s}}^{-1}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}(\bar{f}, 1, \bar{f}) + 2\bar{f}_{\bar{s}}(1, 0, 1) \quad (5.48)$$

eşitlikleri elde edilir. (5.48) eşitliğinin kendisi ile iç çarpımından,

$$\langle \ddot{\bar{\mathbf{x}}}, \ddot{\bar{\mathbf{x}}} \rangle = \bar{f}_{\bar{s}}^{-2}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}^2 - 2\bar{f}_{\bar{s}}(2\bar{f}_{\bar{s}}^{-3}\bar{f}_{\bar{s}}^2 - \bar{f}_{\bar{s}}^{-2}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}})$$

$$= -3\bar{f}_{\bar{s}}^{-2}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}^2 + 2\bar{f}_{\bar{s}}^{-1}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}} \quad (5.49)$$

bulunur.

(5.46), (5.48) ve (5.49) eşitlikleri (4.25) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\tilde{\mathbf{y}}(\bar{s}) = - \left[\left(\bar{f}_{\bar{s}}^{-3}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}^2 - \frac{1}{2}\bar{f}_{\bar{s}}^{-2}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}} \right) (\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) - \bar{f}_{\bar{s}}^{-1}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}(\bar{f}, 1, \bar{f}) + \bar{f}_{\bar{s}}(1, 0, 1) \right]$$

$$+ \left(\frac{3}{4}\bar{f}_{\bar{s}}^{-3}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}^2 - \frac{1}{2}\bar{f}_{\bar{s}}^{-2}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}} \right) (\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1)$$

$$= -\frac{1}{4}(\bar{f}_{\bar{s}}^{-3}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}^2)(\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) + \bar{f}_{\bar{s}}^{-1}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}(\bar{f}, 1, \bar{f}) - \bar{f}_{\bar{s}}(1, 0, 1)$$

$$= -\frac{1}{2}\bar{f}_{\bar{s}}^{-2}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}^2 \frac{1}{2}\bar{f}_{\bar{s}}^{-1}(\bar{f}^2 - 1, 2\bar{f}, \bar{f}^2 + 1) + \bar{f}_{\bar{s}}^{-1}\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}(\bar{f}, 1, \bar{f}) - \bar{f}_{\bar{s}}(1, 0, 1)$$

$$= -\frac{1}{2} \bar{f}_{\bar{s}}^{-2} \bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}^2 \tilde{\mathbf{x}}(\bar{s}) + \bar{f}_{\bar{s}}^{-1} \bar{f}_{\bar{s}\bar{s}} (\bar{f}, 1, \bar{f}) - \bar{f}_{\bar{s}} (1, 0, 1) \quad (5.50)$$

elde edilir.

6. $\tilde{Q}^2$ DUAL IŞIK KONİSİ ÜZERİNDEKİ EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde, dual temsil formülleri kullanılarak dual ışık konisi üzerindeki dual eğrilerin diferansiyel denklem karakterizasyonları verilecektir.

Reel gösterge eğrisinin yay parametresine göre verilen $\tilde{x}(s)$ eğrisi için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 6.1. $\tilde{x}(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \tilde{Q}^2 \subset ID_1^3$, reel gösterge eğrisinin yay parametresi s olan bir dual eğri olsun. Bu eğrinin dual yapı fonksiyonu $\bar{f}(s)$ ve dual koni eğrilik fonksiyonu $\bar{\kappa}(s)$ olmak üzere $\tilde{x}$ eğrisini karakterize eden denklem

$$\bar{\kappa}_1(s) = -\nu^{-1} \left(\frac{1}{2} (\log \bar{\nu}_s)^2 - (\log \bar{\nu}_s)_s \right) + \nu^{-1} \left(\frac{1}{2} (\log f_s)^2 - (\log f_s)_s \right)$$

eşitliği ile verilen diferansiyel denklemdir.

İspat: (5.23), (5.24) ve (5.25) eşitlikleri (4.15) eşitliğinde yerine yazılır gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_1(s) &= \frac{\bar{\nu}^2 \bar{\nu}_s^2 - \left[4\bar{\nu}_s^2 - 2\bar{\nu} \bar{\nu}_{ss} - 3\bar{\nu}^{-2} \bar{f}_s^{-2} \bar{f}_{ss}^2 + 2\bar{\nu}^{-2} \bar{f}_s^{-1} \bar{f}_{sss} \right] \bar{\nu}^2}{2\bar{\nu}^5} \\ &= \frac{-3\bar{\nu}^{-3} \bar{\nu}_s^2 + 2\bar{\nu}^{-2} \bar{\nu}_{ss} + 3\bar{\nu}^{-1} \bar{f}_s^{-2} \bar{f}_{ss}^2 - \bar{\nu}^{-1} \bar{f}_s^{-1} \bar{f}_{sss}}{2} \\ &= -\bar{\nu}^{-1} \left(\frac{3}{2} \bar{\nu}^{-2} \bar{\nu}_s^2 - \bar{\nu}^{-1} \bar{\nu}_{ss} \right) + \bar{\nu}^{-1} \left(\frac{3}{2} \bar{f}_s^{-2} \bar{f}_{ss}^2 - \bar{f}_s^{-1} \bar{f}_{sss} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\bar{v}^{-1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{v}_s} \bar{v}_{ss} \right)^2 - \left(\frac{1}{\bar{v}_s} \bar{v}_{ss} \right)_s \right) + \bar{v}^{-1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_s} f_{ss} \right)^2 - \left(\frac{1}{f_s} f_{ss} \right)_s \right) \\
&= -\bar{v}^{-1} \left(\frac{1}{2} (\log \bar{v}_s)^2 - (\log \bar{v}_s)_s \right) + \bar{v}^{-1} \left(\frac{1}{2} (\log f_s)^2 - (\log f_s)_s \right) \quad (6.1)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Yani, Koni eğrilik fonksiyonu $\bar{\kappa}_1(s); \bar{f}(s)$ ve $\bar{v}$ cinsinden ifade edilir. (6.1) diferansiyel denklemi dual ışık konisi üzerinde reel gösterge eğrisinin yay parametresine göre verilen, bir konisel eğrinin koni eğrilik fonksiyonuna bağlı karakterizasyonunu veren denklemdir.

Her eğri kendi yay parametresine göre ifade edilebilir. (6.1) eşitliği ile, reel gösterge eğrisinin yay parametresine göre verilen bir dual konisel eğrinin diferansiyel denklem karakterizasyonunu verdik. Şimdi, verilen bu $\tilde{x}$ eğrisinin dual yay parametresi olan $\bar{s}$ ye göre diferansiyel denklem karakterizasyonunu verelim:

Teorem 6.2. $\tilde{x}(\bar{s}): I \subset ID \rightarrow \tilde{Q}^2 \subset ID_1^3$, dual ışık konisi üzerinde yay uzunluğu parametresi $\bar{s}$, dual yapı fonksiyonu $\bar{f}(\bar{s})$ ve dual koni eğrilik fonksiyonu $\bar{\kappa}(\bar{s})$ olan bir eğri olsun. Bu durumda $\tilde{x}$ eğrisini karakterize eden denklem

$$\bar{\kappa}(\bar{s}) = \frac{1}{2} \left[\left(\log \bar{f}_{\bar{s}} \right)_{\bar{s}} \right]^2 - \left[\left(\log \bar{f}_{\bar{s}} \right)_{\bar{s}} \right]_{\bar{s}}$$

eşitliği ile verilen dual riccati denklemdir.

İspat: (4.27) eşitliğinin her iki tarafının $\ddot{\tilde{x}}(\bar{s})$ ile iç çarpımı alınırsa,

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{y}(\bar{s}), \ddot{\tilde{x}}(\bar{s}) \rangle &= -\langle \ddot{\tilde{x}}(\bar{s}), \ddot{\tilde{x}}(\bar{s}) \rangle - \frac{1}{2} \langle \ddot{\tilde{x}}(\bar{s}), \ddot{\tilde{x}}(\bar{s}) \rangle \langle \tilde{x}(\bar{s}), \ddot{\tilde{x}}(\bar{s}) \rangle \\
\langle \tilde{y}(\bar{s}), \ddot{\tilde{x}}(\bar{s}) \rangle &= -\langle \ddot{\tilde{x}}(\bar{s}), \ddot{\tilde{x}}(\bar{s}) \rangle \left(1 - \frac{1}{2} \langle \tilde{x}(\bar{s}), \ddot{\tilde{x}}(\bar{s}) \rangle \right) \\
\langle \ddot{\tilde{x}}(\bar{s}), \tilde{y}(\bar{s}) \rangle &= -\frac{1}{2} \langle \ddot{\tilde{x}}(\bar{s}), \ddot{\tilde{x}}(\bar{s}) \rangle \quad (6.2)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (4.21) eşitliğinin her iki tarafını $\tilde{y}(\bar{s})$ ile çarpalım:

$$\begin{aligned}\langle \dot{\tilde{\alpha}}(\bar{s}), \tilde{y}(\bar{s}) \rangle &= \langle \ddot{\tilde{x}}(\bar{s}), \tilde{y}(\bar{s}) \rangle = \bar{\kappa}(\bar{s}) \langle \tilde{x}(\bar{s}), \tilde{y}(\bar{s}) \rangle - \langle \tilde{y}(\bar{s}), \tilde{y}(\bar{s}) \rangle \\ \langle \ddot{\tilde{x}}(\bar{s}), \tilde{y}(\bar{s}) \rangle &= \bar{\kappa}(\bar{s}).\end{aligned}\tag{6.3}$$

(6.2) ve (6.3) eşitliklerinden

$$\bar{\kappa}(\bar{s}) = -\frac{1}{2} \langle \ddot{\tilde{x}}(\bar{s}), \ddot{\tilde{x}}(\bar{s}) \rangle\tag{6.4}$$

olduğu görülür. (5.49) eşitliği (6.4) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\bar{\kappa}(\bar{s})$ koni eğrilik fonksiyonu, $\bar{f}(\bar{s})$ yapı fonksiyonu cinsinden elde edilir:

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}(\bar{s}) &= \frac{3}{2} \bar{f}_{\bar{s}}^{-2} \bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}^2 - \bar{f}_{\bar{s}}^{-1} \bar{f}_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}} \\ &= \frac{1}{2} \bar{f}_{\bar{s}}^{-2} \bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}^2 + \bar{f}_{\bar{s}}^{-2} \bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}^2 - \bar{f}_{\bar{s}}^{-1} \bar{f}_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}} \\ &= \frac{1}{2} \bar{f}_{\bar{s}}^{-2} \bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}^2 - \frac{\bar{f}_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}} \bar{f}_{\bar{s}} - \bar{f}_{\bar{s}\bar{s}}^2}{\bar{f}_{\bar{s}}^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{f}_{\bar{s}}} \bar{f}_{\bar{s}\bar{s}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\bar{f}_{\bar{s}}} \bar{f}_{\bar{s}\bar{s}} \right)_{\bar{s}}.\end{aligned}$$

Buradan, logaritmik fonksiyonların türevi göz önüne alınırsa,

$$\bar{\kappa}(\bar{s}) = \frac{1}{2} \left[\left(\log \bar{f}_{\bar{s}} \right)_{\bar{s}} \right]^2 - \left[\left(\log \bar{f}_{\bar{s}} \right)_{\bar{s}} \right]_{\bar{s}}.\tag{6.5}$$

elde edilir.

(6.5) denklemi lineer terimi sıfır olan bir Dual Riccati denklemdir.

Bir Dual Riccati denkleminin genel ifadesi

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = P(\bar{x}) \bar{y}^2 + Q(\bar{x}) \bar{y} + R(\bar{x})$$

biçimindedir. Burada, $P(\bar{x}), Q(\bar{x})$ ve $R(\bar{x})$ fonksiyonları ID üzerinde tanımlanmış sürekli fonksiyonlardır. Eğer $P(\bar{x}) = 0$ ise Dual Riccati denklemi lineer diferansiyel denkleme, ve eğer $R(\bar{x}) = 0$ ise Dual Bernoulli diferansiyel denklemine dönüşür.

(6.5) eşitliği ile verilen dual riccati denkleminin çözümü için, (6.5) denkleminde,

$$\bar{\xi}(s) = \left(\log \bar{f}_s \right)_s$$

alınırsa,

$$\bar{\kappa}(\bar{s}) = \frac{1}{2} \bar{\xi}^2(\bar{s}) - \dot{\bar{\xi}}(\bar{s})$$

elde edilir. Buradan

$$\dot{\bar{\xi}}(\bar{s}) = \frac{1}{2} \bar{\xi}^2(\bar{s}) - \bar{\kappa}(\bar{s}) \quad (6.6)$$

(6.6) eşitliğini reel ve dual kısımlarına ayırılım:

$$\xi' + \varepsilon \xi^{*'} = \frac{1}{2} (\xi + \varepsilon \xi^*)^2 - (\kappa + \varepsilon \kappa^*)$$

$$\xi' + \varepsilon \xi^{*'} = \frac{1}{2} \xi^2 - \kappa + \varepsilon (\xi \xi^* - \kappa^*)$$

elde edilir. Eşitliğin reel kısmı

$$\xi' = \frac{1}{2} \xi^2 - \kappa \quad (6.7)$$

ve dual kısmı

$$\xi^{*'} - \xi \xi^* = -\kappa^* \quad (6.8)$$

dır. Reel kısımda elde ettiğimiz (6.7) denklemi, Liu [16] tarafından bulunan ve lineer terimi sıfır olan bir riccati denklemi, (6.9) denklemi de birinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklemdir.

(6.6) denkleminin çözümü için

$$\bar{\eta}(\bar{s}) = e^{\left(-\int \frac{1}{2} \bar{\xi}(\bar{s}) d\bar{s}\right)} \quad (6.9)$$

dönüşümünü uygulayalım. (6.9) denkleminin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\eta}}(\bar{s}) &= -\frac{1}{2} \bar{\xi}(\bar{s}) \exp\left(-\int \frac{1}{2} \bar{\xi}(\bar{s}) d\bar{s}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \bar{\xi}(\bar{s}) \bar{\eta}(\bar{s}) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\bar{\xi}(\bar{s}) = -2 \frac{\dot{\bar{\eta}}(\bar{s})}{\bar{\eta}(\bar{s})} \quad (6.10)$$

olur. (6.10) eşitliği (6.6) eşitliğinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{-2\ddot{\bar{\eta}}(\bar{s})\bar{\eta}(\bar{s}) + 2\dot{\bar{\eta}}(\bar{s})\dot{\bar{\eta}}(\bar{s})}{(\bar{\eta}(\bar{s}))^2} &= \frac{1}{2} \left(-2 \frac{\dot{\bar{\eta}}(\bar{s})}{\bar{\eta}(\bar{s})} \right)^2 - \bar{\kappa}(\bar{s}) \\ \frac{-2\ddot{\bar{\eta}}(\bar{s})\bar{\eta}(\bar{s})}{(\bar{\eta}(\bar{s}))^2} + \frac{2(\dot{\bar{\eta}}(\bar{s}))^2}{(\bar{\eta}(\bar{s}))^2} &= \frac{2(\dot{\bar{\eta}}(\bar{s}))^2}{(\bar{\eta}(\bar{s}))^2} - \bar{\kappa}(\bar{s}) \\ \frac{-2\ddot{\bar{\eta}}(\bar{s})\bar{\eta}(\bar{s})}{(\bar{\eta}(\bar{s}))^2} &= -\bar{\kappa}(\bar{s}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik $\bar{\eta}(\bar{s})$ nin ikinci mertebeden bir dual lineer denklemdir:

$$\ddot{\bar{\eta}}(\bar{s}) - \frac{1}{2} \bar{\kappa}(\bar{s}) \bar{\eta}(\bar{s}) = 0 \quad (6.11)$$

(6.11) denklemini $\kappa(s)$ değerinin pozitif ve negatif olma durumlarına göre ayrı ayrı inceleyelim:

i. Eğer $\kappa(s) < 0$ ise , kutupsal koordinatları kullanarak,

$$\bar{\rho} \sin \bar{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\eta} \sqrt{|\bar{\kappa}|} \quad (6.12)$$

$$\bar{\rho} \cos \bar{\theta} = \dot{\bar{\eta}} \quad (6.13)$$

dönüşümlerini uygulayalım. Buradan (6.12) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\rho}} \sin \bar{\theta} + \bar{\rho} \cos \bar{\theta} \dot{\bar{\theta}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\bar{\eta}} \sqrt{|\bar{\kappa}|} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\eta} \frac{(-\dot{\bar{\kappa}})}{2\sqrt{|\bar{\kappa}|}} \\ \dot{\bar{\rho}} \sin \bar{\theta} + \bar{\rho} \cos \bar{\theta} \dot{\bar{\theta}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\bar{\kappa}|} \bar{\rho} \cos \bar{\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2} \bar{\rho} \sin \bar{\theta}}{\sqrt{|\bar{\kappa}|}} \frac{(-\dot{\bar{\kappa}})}{2\sqrt{|\bar{\kappa}|}} \end{aligned} \quad (6.14)$$

elde edilir. (6.13) denkleminin türevi alınırsa,

$$\dot{\bar{\rho}} \cos \bar{\theta} - \bar{\rho} \sin \bar{\theta} \dot{\bar{\theta}} = -\bar{\kappa} \frac{\bar{\rho} \sin \bar{\theta}}{\sqrt{2} \sqrt{|\bar{\kappa}|}}. \quad (6.15)$$

elde edilir. (6.14) eşitliğinin her iki tarafı $\cos \bar{\theta}$ ile çarpılırsa,

$$\dot{\bar{\rho}} \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} + \bar{\rho} \cos^2 \bar{\theta} \dot{\bar{\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\bar{\kappa}|} \bar{\rho} \cos^2 \bar{\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2} \bar{\rho} \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta}}{\sqrt{|\bar{\kappa}|}} \frac{(-\dot{\bar{\kappa}})}{2\sqrt{|\bar{\kappa}|}} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (6.16)$$

elde edilir. (6.15) eşitliğinin her iki tarafı $-\sin \bar{\theta}$ ile çarpılırsa,

$$-\dot{\bar{\rho}} \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} + \bar{\rho}^2 \sin^2 \bar{\theta} = \bar{\kappa} \frac{\bar{\rho} \sin^2 \bar{\theta}}{\sqrt{2} \sqrt{|\bar{\kappa}|}}. \quad (6.17)$$

elde edilir. Buradan (6.16) ve (6.17) eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \cos^2 \bar{\theta} \dot{\bar{\theta}} + \bar{\rho} \sin^2 \bar{\theta} \dot{\bar{\theta}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\bar{\kappa}|} \bar{\rho} \cos^2 \bar{\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(-\dot{\bar{\kappa}})}{2\sqrt{|\bar{\kappa}|}} \frac{\bar{\rho} \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta}}{\sqrt{|\bar{\kappa}|}} + \bar{\kappa} \frac{\bar{\rho} \sin^2 \bar{\theta}}{\sqrt{2} \sqrt{|\bar{\kappa}|}} \\ \bar{\rho} \dot{\bar{\theta}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\bar{\kappa}|} \bar{\rho} \cos^2 \bar{\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(-\dot{\bar{\kappa}})}{2\sqrt{|\bar{\kappa}|}} \frac{\bar{\rho} \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta}}{\sqrt{|\bar{\kappa}|}} + \bar{\kappa} \frac{\bar{\rho} \sin^2 \bar{\theta}}{\sqrt{2} \sqrt{|\bar{\kappa}|}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\theta}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\bar{\kappa}|} \cos^2 \bar{\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(-\dot{\bar{\kappa}})}{2\sqrt{|\bar{\kappa}|}} \frac{\sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta}}{\sqrt{|\bar{\kappa}|}} + \bar{\kappa} \frac{\sin^2 \bar{\theta}}{\sqrt{2}\sqrt{|\bar{\kappa}|}} \\
\dot{\bar{\theta}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{|\bar{\kappa}|} \cos^2 \bar{\theta} + \sqrt{|\bar{\kappa}|} \sin^2 \bar{\theta} \right) + \frac{(-\dot{\bar{\kappa}})}{2\bar{\kappa}} \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} \\
\dot{\bar{\theta}} &= \frac{\sqrt{-\bar{\kappa}}}{\sqrt{2}} + \frac{\dot{\bar{\kappa}}}{2\bar{\kappa}} \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta}.
\end{aligned} \tag{6.18}$$

elde edilir.

(6.18) eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\theta}} &= \frac{\sqrt{|\kappa| + \varepsilon \frac{\kappa}{|\kappa|} \kappa^*}}{2} + \frac{\kappa' \kappa}{2\kappa^2} + \varepsilon \frac{\kappa^{*'} \kappa - \kappa' \kappa^*}{2\kappa^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \varepsilon \theta^* \cos 2\theta \right) \\
\theta' + \varepsilon \theta^{*'} &= \frac{\sqrt{|\kappa|}}{2} - \varepsilon \frac{\kappa^*}{4\sqrt{|\kappa|}} + \left(\frac{\kappa'}{2\kappa} + \varepsilon \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa^*}{\kappa} \right)' \right) \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \varepsilon \theta^* \cos 2\theta \right) \\
\theta' + \varepsilon \theta^{*'} &= \frac{\sqrt{-\kappa}}{2} - \varepsilon \frac{\kappa^*}{4\sqrt{-\kappa}} + \left(\frac{\kappa'}{2\kappa} + \varepsilon \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa^*}{\kappa} \right)' \right) \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \varepsilon \theta^* \cos 2\theta \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin reel kısmı

$$\theta' = \frac{\sqrt{-\kappa}}{2} + \frac{\kappa'}{2\kappa} \sin \theta \cos \theta \tag{6.19}$$

ve dual kısmı

$$\theta^{*'} = -\frac{\kappa^*}{4\sqrt{-\kappa}} + \frac{\kappa'}{2\kappa} \theta^* \cos 2\theta + \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa^*}{\kappa} \right)' \sin 2\theta \tag{6.20}$$

dır. (6.12) ve (6.13) denklemleri oranlanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{\bar{\rho} \cos \bar{\theta}}{\bar{\rho} \sin \bar{\theta}} = \frac{\dot{\bar{\eta}}}{\bar{\eta} \sqrt{|\bar{\kappa}|}} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{|\bar{\kappa}|}}{\sqrt{2}} \frac{\cos \bar{\theta}}{\sin \bar{\theta}} = \frac{\dot{\bar{\eta}}}{\bar{\eta}}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa,

$$\int \frac{\bar{\eta}'}{\bar{\eta}} d\bar{s} = \int \frac{\sqrt{|\bar{\kappa}|}}{\sqrt{2}} \frac{\cos \bar{\theta}}{\sin \bar{\theta}} d\bar{s}$$

$$\ln \bar{\eta} = \int \frac{\sqrt{|\bar{\kappa}|}}{\sqrt{2}} \frac{\cos \bar{\theta}}{\sin \bar{\theta}} d\bar{s}$$

olarak bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı e tabanında yazılırsa,

$$e^{\ln \bar{\eta}} = e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{|\bar{\kappa}|} \frac{\cos \bar{\theta}}{\sin \bar{\theta}} d\bar{s}}$$

$$\bar{\eta} = \bar{a}_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{-\bar{\kappa}} \frac{\cos \bar{\theta}}{\sin \bar{\theta}} d\bar{s}}$$

(6.21)

elde edilir. (6.9) ve (6.21) denklemlerinden

$$\bar{\eta} = e^{\left(-\int \frac{1}{2} \bar{\xi}(s) ds \right)} = \bar{a}_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{-\bar{\kappa}} \frac{\cos \bar{\theta}}{\sin \bar{\theta}} d\bar{s}}$$

$$e^{\left(-\int \frac{1}{2} \bar{\xi}(s) ds \right)} = e^{\ln \bar{a}_1 + \int \frac{\sqrt{-\bar{\kappa}}}{\sqrt{2}} \frac{\cos \bar{\theta}}{\sin \bar{\theta}} d\bar{s}}$$

$$-\int \frac{1}{2} \bar{\xi}(\bar{s}) d\bar{s} = \int \frac{\sqrt{-\bar{\kappa}}}{\sqrt{2}} \frac{\cos \bar{\theta}}{\sin \bar{\theta}} d\bar{s} + \ln \bar{a}_1$$

$$-\frac{1}{2} \bar{\xi}(\bar{s}) = \frac{\sqrt{-\bar{\kappa}}}{\sqrt{2}} \frac{\cos \bar{\theta}}{\sin \bar{\theta}}$$

$$\bar{\xi}(\bar{s}) = -\sqrt{-2\bar{\kappa}} \cot \bar{\theta}$$

(6.22)

olarak bulunur. (6.22) denklemi reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{\xi} &= \xi + \varepsilon \xi^* = -\sqrt{2\left(|\kappa| + \varepsilon \frac{\kappa}{|\kappa|} \kappa^*\right)} \cot(\theta + \varepsilon \theta^*) \\
&= -\sqrt{2(|\kappa| - \varepsilon \kappa^*)} (\cot \theta - \varepsilon \theta^* (\cos ec \theta)^2) \\
&= -\sqrt{2} \left(\sqrt{-\kappa} - \varepsilon \frac{\kappa^*}{2\sqrt{-\kappa}} \right) (\cot \theta - \varepsilon \theta^* (\cos ec \theta)^2) \\
&= -\sqrt{-2\kappa} \cot \theta + \varepsilon \left(\sqrt{-2\kappa} \theta^* (\cos ec \theta)^2 + \frac{\kappa^*}{\sqrt{-2\kappa}} \cot \theta \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin reel kısmı

$$\xi = -\sqrt{-2\kappa} \cot \theta \quad (6.23)$$

ve dual kısmı

$$\xi^* = \sqrt{-2\kappa} \theta^* (\cos ec \theta)^2 + \frac{\kappa^*}{\sqrt{-2\kappa}} \cot \theta$$

olarak bulunur. (6.23) eşitliği Liu [16] tarafından elde edilen, (6.6) eşitliğiyle verilen dual riccati denkleminin, $\kappa < 0$ için bir çözümüdür.

ii. Eğer $\kappa(s) > 0$ ise, $\left| \frac{\bar{\eta} \sqrt{\kappa}}{\bar{\eta}'} \right| < 1$ durumunda,

$$\bar{\rho} \sinh \bar{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\eta} \sqrt{\kappa} \quad (6.24)$$

$$\bar{\rho} \cosh \bar{\theta} = \dot{\bar{\eta}} \quad (6.25)$$

dönüşümlerini uygulayalım. Burada (6.24) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\dot{\bar{\rho}} \sinh \bar{\theta} + \bar{\rho} \cosh \bar{\theta} \dot{\bar{\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\bar{\eta}} \sqrt{\kappa} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\eta} \frac{(\dot{\kappa})}{2\sqrt{\kappa}} \quad (6.26)$$

elde edilir. (6.25) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\rho}} \sinh \bar{\theta} + \bar{\rho} \cosh \bar{\theta} \dot{\bar{\theta}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\bar{\kappa}} \bar{\rho} \cosh \bar{\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2} \bar{\rho} \sinh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\kappa}}} \frac{(\dot{\bar{\kappa}})}{2\sqrt{\bar{\kappa}}} \\ \dot{\bar{\rho}} \cosh \bar{\theta} + \bar{\rho} \sinh \bar{\theta} \dot{\bar{\theta}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\kappa} \frac{\bar{\rho} \sinh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\kappa}}}.\end{aligned}\quad (6.27)$$

(6.25) eşitliğinin her iki tarafı $\cosh \bar{\theta}$ ile çarpılırsa,

$$\dot{\bar{\rho}} \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\theta} + \bar{\rho} \cosh^2 \bar{\theta} \dot{\bar{\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\bar{\kappa}} \bar{\rho} \cosh^2 \bar{\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2} \bar{\rho} \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\kappa}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\dot{\bar{\kappa}})}{2\sqrt{\bar{\kappa}}} \quad (6.28)$$

ve (6.27) eşitliğinin her iki tarafı $\sinh \bar{\theta}$ ile çarpılırsa,

$$-\dot{\bar{\rho}} \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\theta} - \bar{\rho} \sinh^2 \bar{\theta} \dot{\bar{\theta}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\kappa} \frac{\bar{\rho} \sinh^2 \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\kappa}}}.\quad (6.29)$$

elde edilir. (6.28) ve (6.29) eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}\bar{\rho} \cosh^2 \bar{\theta} \dot{\bar{\theta}} - \bar{\rho} \sinh^2 \bar{\theta} \dot{\bar{\theta}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\bar{\kappa}} \bar{\rho} \cosh^2 \bar{\theta} + \frac{(\dot{\bar{\kappa}})}{2\sqrt{\bar{\kappa}}} \frac{\bar{\rho} \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\kappa}}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\kappa} \frac{\bar{\rho} \sinh^2 \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\kappa}}} \\ \bar{\rho} \dot{\bar{\theta}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\bar{\kappa}} \bar{\rho} \cosh^2 \bar{\theta} + \frac{(\dot{\bar{\kappa}})}{2\sqrt{\bar{\kappa}}} \frac{\bar{\rho} \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\kappa}}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\kappa} \frac{\bar{\rho} \sinh^2 \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\kappa}}} \\ \dot{\bar{\theta}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\bar{\kappa}} \cosh^2 \bar{\theta} + \frac{(\dot{\bar{\kappa}})}{2\sqrt{\bar{\kappa}}} \frac{\sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\kappa}}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\kappa} \frac{\sinh^2 \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\kappa}}} \\ \dot{\bar{\theta}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\bar{\kappa}} \cosh^2 \bar{\theta} - \sqrt{\bar{\kappa}} \sinh^2 \bar{\theta} \right) + \frac{(\dot{\bar{\kappa}})}{2\bar{\kappa}} \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\theta} \\ \dot{\bar{\theta}} &= \frac{\sqrt{\bar{\kappa}}}{\sqrt{2}} + \frac{\dot{\bar{\kappa}}}{2\bar{\kappa}} \sinh \bar{\theta} \cosh \bar{\theta}.\end{aligned}\quad (6.30)$$

bulunur.

(6.30) denklemi reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\theta}} &= \frac{\left(\sqrt{\kappa} + \varepsilon \frac{\kappa^*}{2\sqrt{\kappa}}\right)}{2} + \left(\frac{\kappa' \kappa}{2\kappa^2} + \varepsilon \frac{\kappa^* \kappa - \kappa' \kappa^*}{2\kappa^2}\right) \left(\sinh \theta \cosh \theta + \varepsilon \theta^* (\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta)\right) \\ \theta' + \varepsilon \theta^{*'} &= \left(\frac{\sqrt{\kappa}}{2} + \varepsilon \frac{\kappa^*}{4\sqrt{\kappa}}\right) + \left(\frac{\kappa'}{2\kappa} + \varepsilon \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa^*}{\kappa}\right)'\right) \left(\sinh \theta \cosh \theta + \varepsilon \theta^* (\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan eşitliğin reel kısmı

$$\theta' = \frac{\sqrt{\kappa}}{2} + \frac{\kappa'}{2\kappa} \sinh \theta \cosh \theta \quad (6.31)$$

ve dual kısmı

$$\begin{aligned}\theta^{*'} &= \frac{\kappa^*}{4\sqrt{\kappa}} + \frac{\kappa'}{2\kappa} \theta^* (\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta) + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa^*}{\kappa}\right)' \sinh \theta \cosh \theta \\ \theta^{*'} &= \frac{\kappa^*}{4\sqrt{\kappa}} + \frac{\kappa'}{2\kappa} \theta^* \cos 2\theta + \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa^*}{\kappa}\right)' \sin 2\theta\end{aligned} \quad (6.32)$$

olur. (6.24) ve (6.25) denklemleri oranlanır,

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\rho} \cosh \bar{\theta}}{\bar{\rho} \sinh \bar{\theta}} &= \frac{\sqrt{2} \dot{\bar{\eta}}}{\bar{\eta} \sqrt{\kappa}} \\ \frac{\sqrt{\kappa} \cosh \bar{\theta}}{\sqrt{2} \sinh \bar{\theta}} &= \frac{\dot{\bar{\eta}}}{\bar{\eta}}\end{aligned}$$

ve her iki tarafının integrali alınır,

$$\begin{aligned}\int \frac{\dot{\bar{\eta}}}{\bar{\eta}} d\bar{s} &= \int \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2}} \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sinh \bar{\theta}} d\bar{s} \\ \ln \bar{\eta} &= \int \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2}} \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sinh \bar{\theta}} d\bar{s}\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı e tabanında yazılırsa,

$$e^{\ln \bar{\eta}} = e^{\int \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2}} \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sinh \bar{\theta}} d\bar{s}}$$

$$\bar{\eta} = \bar{a}_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\kappa} \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sinh \bar{\theta}} d\bar{s}} \quad (6.33)$$

elde edilir. (6.9) ve (6.33) denklemlerinden

$$\bar{\eta} = \exp\left(-\int \frac{1}{2} \bar{\xi}(\bar{s}) d\bar{s}\right) = \bar{a}_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\kappa} \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sinh \bar{\theta}} d\bar{s}}$$

$$e^{\left(-\int \frac{1}{2} \bar{\xi}(\bar{s}) d\bar{s}\right)} = e^{\ln \bar{a}_1 + \int \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2}} \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sinh \bar{\theta}} d\bar{s}}$$

$$-\int \frac{1}{2} \bar{\xi}(\bar{s}) d\bar{s} = \int \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2}} \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sinh \bar{\theta}} d\bar{s} + \ln \bar{a}_1$$

$$-\frac{1}{2} \bar{\xi}(\bar{s}) = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2}} \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sinh \bar{\theta}}$$

$$\bar{\xi}(\bar{s}) = -\sqrt{2\kappa} \coth \bar{\theta} \quad (6.34)$$

olduğu görülür. (6.34) denkleminin reel ve dual kısımları,

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \xi + \varepsilon \xi^* = -\sqrt{2(\kappa + \varepsilon \kappa^*)} \cot(\theta + \varepsilon \theta^*) \\ &= -\sqrt{2\left(\kappa + \varepsilon \kappa^* + \varepsilon^2 \frac{\kappa^{*2}}{4\kappa}\right)} \left(\coth \theta - \varepsilon \theta^* (\operatorname{sech} \theta)^2\right) \\ &= -\sqrt{2\left(\sqrt{\kappa} + \varepsilon \frac{\kappa^*}{2\sqrt{\kappa}}\right)^2} \left(\coth \theta - \varepsilon \theta^* (\operatorname{sech} \theta)^2\right) \\ &= -\sqrt{2\kappa} \coth \theta + \varepsilon \left(\sqrt{2\kappa} \theta^* (\operatorname{sech} \theta)^2 + \frac{\kappa^*}{2\sqrt{\kappa}} \coth \theta\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin reel kısmı

$$\xi = -\sqrt{2\kappa} \coth \theta \quad (6.35)$$

ve dual kısmı

$$\xi^* = \sqrt{2\kappa} \theta^* (\cosh \theta)^2 + \frac{\kappa^*}{2\sqrt{\kappa}} \coth \theta \quad (6.36)$$

biçiminde bulunur. (6.36) Liu [16] tarafından elde edilen, (6.6) eşitliğiyle verilen dual riccati denkleminin, $\kappa > 0$ için bir çözümüdür.

Teorem 6.3. $\tilde{x}(\bar{s}): I \rightarrow \tilde{Q}^2 \subset ID_1^3$, $\tilde{Q}^2$ yay uzunluğu parametresi $\bar{s}$ ve dual yapı fonksiyonu $\bar{f}(\bar{s})$ olan bir eğri olsun. $\tilde{x}$ eğrisi için koni eğrilik fonksiyonu $\bar{\kappa}(\bar{s})$ sabit ise $\bar{f}(\bar{s})$ yapı fonksiyonu

$$\left[\left(\log \bar{f}_{\bar{s}} \right)_{\bar{s}} \right]^2 - 2 \left(\log \bar{f}_{\bar{s}} \right)_{\bar{s}\bar{s}} = 2\bar{\kappa}(\bar{s}) = \bar{c} = c + \varepsilon c^* = \text{sabit} \quad (6.37)$$

eşitliğini sağlar ve

- i. $-a^2 = c < 0$ ve $-\bar{a}^2 = \bar{c}$ ise $\bar{f}(\bar{s}) = \frac{2}{a} \tan \frac{\bar{a}\bar{s}}{2}$ ve $\tilde{x}(\bar{s})$ dual ışık konisi üzerinde bir dual elips,
- ii. $-a^2 = c > 0$ ve $-\bar{a}^2 = \bar{c}$ ise $\bar{f}(\bar{s}) = \frac{2}{a} \tanh \frac{\bar{a}\bar{s}}{2}$ ve $\tilde{x}(\bar{s})$ dual ışık konisi üzerinde bir dual hiperbol,
- iii. $c = 0$ ve $-\bar{a}^2 = \bar{c}$ ise $\bar{f}(\bar{s}) = \frac{\bar{a}}{\bar{s}}$ ve $\tilde{x}(\bar{s})$ dual ışık konisi üzerinde bir dual parabol

belirtir.

İspat: (6.37) eşitliği ile verilen dual riccati denkleminde $2\bar{\kappa}(\bar{s}) = \text{sabit}$ olursa bu denklem değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözülebilir:

$$-\bar{a}^2 = \bar{c}$$

olmak üzere,

- i. $-a^2 = c < 0$ ise

$$\left(\log \bar{f}_{\bar{s}}\right)_{\bar{s}} = \bar{y} \quad (6.38)$$

dönüşümü uygulanır ve (6.38) eşitliği (6.37) eşitliğinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\bar{y}^2 - 2\dot{\bar{y}} = -\bar{a}^2$$

$$\bar{y}^2 + \bar{a}^2 = 2 \frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}$$

$$\frac{d\bar{y}}{\bar{y}^2 + \bar{a}^2} = \frac{d\bar{s}}{2}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının integrali alınır,

$$\int \frac{d\bar{y}}{\bar{y}^2 + \bar{a}^2} = \int \frac{d\bar{s}}{2} = \frac{1}{2} \bar{s} \quad (6.39)$$

ve

$$\bar{y} = \bar{a} \tan \bar{\theta} , \quad d\bar{y} = \bar{a} \sec^2 \bar{\theta} d\bar{\theta} \quad (6.40)$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}}{\bar{a}} = \tan \bar{\theta} \\ \bar{\theta} = \arctan \frac{\bar{y}}{\bar{a}} \end{cases} \quad (6.41)$$

olur. (6.41) eşitlikleri (6.40) eşitliğinde yerine yazılır, gerekli düzenlemeler yapılır ve integrasyon sabitleri ihmal edilirse,

$$\int \frac{\bar{a} \sec^2 \bar{\theta}}{\bar{a}^2 \tan^2 \bar{\theta} + \bar{a}^2} d\bar{\theta} = \int \frac{\bar{a} \sec^2 \bar{\theta}}{\bar{a}^2 (\tan^2 \bar{\theta} + 1)} d\bar{\theta} = \int \frac{\sec^2 \bar{\theta}}{\bar{a} \sec^2 \bar{\theta}} d\bar{\theta} = \int \frac{1}{\bar{a}} d\bar{\theta} = \frac{\bar{\theta}}{\bar{a}} = \frac{1}{2} \bar{s}$$

$$\frac{1}{\bar{a}} \arctan \frac{\bar{y}}{\bar{a}} = \frac{1}{2} \bar{s}$$

$$\arctan \frac{\bar{y}}{\bar{a}} = \frac{\bar{a}}{2} \bar{s}$$

$$\frac{\bar{y}}{\bar{a}} = \tan \left(\frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \right)$$

$$\bar{y} = \bar{a} \tan \left(\frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \right) \quad (6.42)$$

olarak bulunur. (6.38) eşitliği (6.42) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\left(\log \bar{f}_{\bar{s}} \right)_{\bar{s}} = \bar{a} \tan \left(\frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \right)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının integrali alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \int \left(\log \bar{f}_{\bar{s}} \right)_{\bar{s}} d\bar{s} &= \int \bar{a} \tan \left(\frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \right) d\bar{s} \\ \log \bar{f}_{\bar{s}} &= \bar{a} \int \frac{\sin \left(\frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \right)}{\cos \left(\frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \right)} d\bar{s} \end{aligned} \quad (6.43)$$

olur. Bu denklemde

$$\cos \left(\frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \right) = \bar{u}, \quad -\frac{\bar{a}}{2} \sin \left(\frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \right) d\bar{s} = d\bar{u}$$

dönüşümleri uygulanır ve integrasyon sabitleri ihmal edilerek gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\log \bar{f}_{\bar{s}} = \bar{a} \int \frac{\sin \left(\frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \right)}{\cos \left(\frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \right)} ds$$

$$\log \bar{f}_{\bar{s}} = -2 \int \frac{d\bar{u}}{\bar{u}}$$

$$\log \bar{f}_{\bar{s}} = -2 \ln \bar{u}$$

$$\log \bar{f}_{\bar{s}} = \ln \bar{u}^{-2}$$

$$\bar{f}_{\bar{s}} = \bar{u}^{-2} \quad (6.44)$$

elde edilir. $\bar{u}$ değeri yerine yazılır, (6.44) eşitliğinin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\int \bar{f}_{\bar{s}} d\bar{s} = \int \frac{1}{\left(\cos \frac{\bar{a}}{2} \bar{s}\right)^2} ds \quad (6.45)$$

elde edilir. (6.45) denklemine

$$\frac{\bar{a} \bar{s}}{2} = \bar{v}, \quad \frac{\bar{a}}{2} d\bar{s} = d\bar{v}$$

dönüşümü uygulanır ve integrasyon sabiti ihmal edilirse

$$\bar{f} = \frac{2}{\bar{a}} \tan \frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \quad (6.46)$$

bulunur.

(6.46) denklemi reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\bar{f} = \frac{2}{\bar{a}} \tan \frac{\bar{a}}{2} \bar{s}$$

$$\begin{aligned} f + \varepsilon f^* &= \frac{2}{a + \varepsilon a^*} \tan \left(\frac{as + \varepsilon (as^* + a^*s)}{2} \right) \\ &= \frac{2(a - \varepsilon a^*)}{a^2} \left[\tan \left(\frac{a}{2} s \right) + \varepsilon \frac{as^* + a^*s}{2} \sec^2 \left(\frac{a}{2} s \right) \right] \\ &= \frac{2}{a} \tan \left(\frac{a}{2} s \right) + \varepsilon \left[\frac{-2a^*}{a^2} \tan \left(\frac{a}{2} s \right) + \left(s^* + \frac{a^*s}{a} \right) \sec^2 \left(\frac{as}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin reel kısmı

$$f = \frac{2}{a} \tan\left(\frac{a}{2}s\right) \quad (6.47)$$

ve dual kısmı

$$f^* = \frac{-2a^*}{a^2} \tan\left(\frac{a}{2}s\right) + \left(s^* + \frac{a^*s}{a}\right) \sec^2\left(\frac{as}{2}\right) \quad (6.48)$$

dır.

$$\text{ii. } a^2 = c > 0$$

$$\left(\log \bar{f}_{\bar{s}}\right)_{\bar{s}} = \bar{y} \quad (6.49)$$

dönüşümü uygulanır ve (6.49) eşitliği (6.37) eşitliğinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\bar{y}^2 - 2\bar{y}' = \bar{a}^2$$

$$\bar{y}^2 - \bar{a}^2 = 2 \frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}$$

$$\frac{d\bar{y}}{\bar{y}^2 - \bar{a}^2} = \frac{d\bar{s}}{-2}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının integrali alınır,

$$\int \frac{d\bar{y}}{\bar{y}^2 - \bar{a}^2} = \int \frac{d\bar{s}}{2} = -\frac{1}{2} \bar{s} \quad (6.50)$$

ve

$$\bar{y} = \bar{a} \tanh \bar{\theta} \ , \ d\bar{y} = -\bar{a} \operatorname{sech}^2 \bar{\theta} d\bar{\theta} \quad (6.51)$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}}{\bar{a}} = \tanh \bar{\theta} \\ \bar{\theta} = \operatorname{arctan} h \frac{\bar{y}}{\bar{a}} \end{cases} \quad (6.52)$$

olur. (6.52) eşitlikleri (6.50) eşitliğinde yerlerine yazılır, integrasyon sabiti ihmal edilerek gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\int \frac{-\bar{a} \sec^2 \bar{\theta}}{\bar{a}^2 \tanh^2 \bar{\theta} - \bar{a}^2} d\bar{\theta} = \int \frac{-\bar{a} \sec^2 \bar{\theta}}{\bar{a}^2 (\tan^2 \bar{\theta} + 1)} d\bar{\theta} = \int \frac{-\sec^2 \bar{\theta}}{-\bar{a} \sec^2 \bar{\theta}} d\bar{\theta} = \int \frac{1}{\bar{a}} d\bar{\theta} = \frac{\bar{\theta}}{\bar{a}} = -\frac{1}{2} \bar{s}$$

$$\frac{1}{\bar{a}} \operatorname{arctanh} \frac{\bar{y}}{\bar{a}} = -\frac{1}{2} \bar{s}$$

$$\frac{\bar{y}}{\bar{a}} = \tanh \left(-\frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \right)$$

$$\bar{y} = \bar{a} \tanh \left(-\frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \right) \quad (6.53)$$

bulunur. (6.53) eşitliği (6.49) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\left(\log \bar{f}_s \right)_s = \bar{a} \tanh \left(-\frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \right)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının integrali alınır ve integrasyon sabiti ihmal edilerek gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\int \left(\log \bar{f}_s \right)_s d\bar{s} = \int \bar{a} \tanh \left(-\frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \right) d\bar{s}$$

$$\log \bar{f}_s = \bar{a} \int \frac{\sinh \left(-\frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \right)}{\cosh \left(-\frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \right)} d\bar{s}$$

ve

$$\cosh\left(-\frac{\bar{a}}{2}\bar{s}\right)=\bar{u}, \quad -\frac{\bar{a}}{2}\sinh\left(-\frac{\bar{a}}{2}\bar{s}\right)d\bar{s}=d\bar{u}$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\log \bar{f}_{\bar{s}} = -2 \int \frac{d\bar{u}}{\bar{u}} d\bar{u}$$

$$\log \bar{f}_{\bar{s}} = -2 \ln \bar{u}$$

$$\log \bar{f}_{\bar{s}} = \ln \bar{u}^{-2}$$

$$\bar{f}_{\bar{s}} = \bar{u}^{-2} \quad (6.54)$$

elde edilir. (6.54) eşitliğinin her iki tarafının integrali alınır ve integrasyon sabiti ihmal edilerek $\bar{u}$ değeri yerine yazılırsa,

$$\int \bar{f}_{\bar{s}} d\bar{s} = \int \frac{1}{\cosh\left(-\frac{\bar{a}}{2}\bar{s}\right)^2} d\bar{s} \quad (6.55)$$

ve

$$-\frac{\bar{a}}{2}\bar{s} = \bar{v}, \quad -\frac{\bar{a}}{2}d\bar{s} = d\bar{v}$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\bar{f} = \frac{2}{\bar{a}} \tanh \frac{\bar{a}}{2} \bar{s} \quad (6.56)$$

elde edilir.

(6.56) denklemini reel ve dual kısımlarına ayırırsa,

$$\bar{f} = \frac{2}{\bar{a}} \tanh \frac{\bar{a}}{2} \bar{s}$$

$$f + \varepsilon f^* = \frac{2}{a + \varepsilon a^*} \tanh \left(\frac{a + \varepsilon a^*}{2} (s + \varepsilon s^*) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(a - \varepsilon a^*)}{a^2} \left[\tanh\left(\frac{a}{2}s\right) + \varepsilon \frac{sa^* + s^*a}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{a}{2}s\right) \right] \\
&= \frac{2}{a} \tanh\left(\frac{a}{2}s\right) + \varepsilon \left[\frac{-2a^*}{a^2} \tanh\left(\frac{a}{2}s\right) + \left(\frac{a^*}{a}s + s^*\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{as}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin reel kısmı

$$f = \frac{2}{a} \tanh\left(\frac{a}{2}s\right) \quad (6.57)$$

ve dual kısmı

$$f^* = \frac{-2a^*}{a^2} \tanh\left(\frac{a}{2}s\right) + \left(\frac{a^*}{a}s + s^*\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{as}{2}\right) \quad (6.58)$$

dır.

iii. $c = 0$

$$\left(\log \bar{f}_s\right)_s = \bar{y} \quad (6.59)$$

dönüşümü uygulanır, (6.59) eşitliği (6.37) eşitliğinde yerine yazılır ve integrasyon sabiti ihmal edilerek gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\bar{y}^2 - 2\dot{\bar{y}} = 0$$

$$\bar{y}^2 = 2\dot{\bar{y}}$$

$$\bar{y}^2 = 2 \frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}$$

$$\frac{d\bar{y}}{\bar{y}^2} = \frac{d\bar{s}}{2}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının integrali alınır ve integrasyon sabiti ihmal edilirse,

$$\int \frac{d\bar{y}}{\bar{y}^2} = \int \frac{d\bar{s}}{2} = \frac{1}{2} \bar{s}$$

$$-\bar{y}^{-1} = \frac{1}{2} \bar{s}$$

$$\bar{y} = \frac{-2}{\bar{s}} \quad (6.60)$$

bulunur. (6.60) eşitliği (6.59) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\left(\log \bar{f}_{\bar{s}} \right)_{\bar{s}} = \frac{-2}{\bar{s}} \quad (6.61)$$

ve her iki tarafının integrasyon sabiti ihmal edilerek integrali alınır,

$$\int \left(\log \bar{f}_{\bar{s}} \right)_{\bar{s}} d\bar{s} = \int \frac{-2}{\bar{s}} d\bar{s}$$

$$\log \bar{f}_{\bar{s}} = -2 \ln \bar{s}$$

$$\bar{f}_{\bar{s}} = \bar{s}^{-2}$$

elde edilir. Elde edilen eşitliğin her iki tarafının integrali integrasyon sabiti ihmal edilerek alınır,

$$\int \bar{f}_{\bar{s}} d\bar{s} = \int \bar{s}^{-2} d\bar{s}$$

$$\bar{f} = -\frac{\bar{a}}{\bar{s}} \quad (6.62)$$

bulunur.

(6.62) denklemi reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\bar{f} = -\frac{\bar{a}}{\bar{s}}$$

$$f + \varepsilon f^* = -\frac{(a + \varepsilon a^*)}{s^2} (s - \varepsilon s^*)$$

elde edilir. Bu eşitliğin reel kısmı

$$f = -\frac{a}{s} \quad (6.63)$$

ve dual kısmı

$$f^* = -\frac{a^*}{s} + \frac{as^*}{s^2} \quad (6.64)$$

dır.

Sırasıyla (6.46), (6.56) ve (6.62) eşitlikleri (5.46) eşitliğinde yerine yazıldığında, aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 6.7. $\tilde{x} = \tilde{x}(\bar{s}) : I \subset ID \rightarrow Q^2 \subset ID_1^3$ yay parametresi $\bar{s}$ olan bir spacelike eğri olsun.

1. $\tilde{x}(\bar{s})$ bir dual elips ise,

$$\tilde{x}(\bar{s}) = \left(\frac{2}{\bar{a}^2} \sin^2 \left(\frac{\bar{a} \bar{s}}{2} \right) - \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{\bar{a} \bar{s}}{2} \right), \frac{1}{\bar{a}} \sin \left(\frac{\bar{a} \bar{s}}{2} \right), \frac{2}{\bar{a}^2} \sin^2 \left(\frac{\bar{a} \bar{s}}{2} \right) + \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{\bar{a} \bar{s}}{2} \right) \right) \quad (6.65)$$

eşitliği ile verilir.

2. $\tilde{x}(\bar{s})$ bir dual hiperbol ise,

$$\tilde{x}(\bar{s}) = \left(\frac{2}{\bar{a}^2} \sinh^2 \left(\frac{\bar{a} \bar{s}}{2} \right) - \frac{1}{2} \cosh^2 \left(\frac{\bar{a} \bar{s}}{2} \right), \frac{1}{\bar{a}} \sinh \left(\frac{\bar{a} \bar{s}}{2} \right), \frac{2}{\bar{a}^2} \sinh^2 \left(\frac{\bar{a} \bar{s}}{2} \right) + \frac{1}{2} \cosh^2 \left(\frac{\bar{a} \bar{s}}{2} \right) \right) \quad (6.66)$$

eşitliği ile verilir.

3. $\tilde{x}(\bar{s})$ bir dual parabol ise,

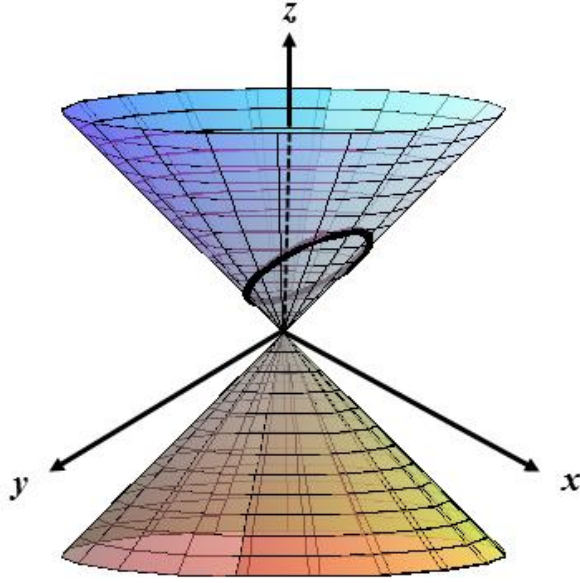
$$\tilde{x}(\bar{s}) = \left(\frac{\bar{a}}{2} - \frac{\bar{s}^2}{2\bar{a}}, -\bar{s}, \frac{\bar{a}}{2} + \frac{\bar{s}^2}{2\bar{a}} \right) \quad (6.67)$$

eşitliği ile verilir.

(6.65) eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$x(s) = \left(\frac{2}{a^2} \sin^2 \left(\frac{as}{2} \right) - \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{as}{2} \right), \frac{1}{a} \sin \left(\frac{as}{2} \right), \frac{2}{a^2} \sin^2 \left(\frac{as}{2} \right) + \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{as}{2} \right) \right) \quad (6.68)$$

ile verilen reel kısım ışık konisi üzerinde bir elipstir.

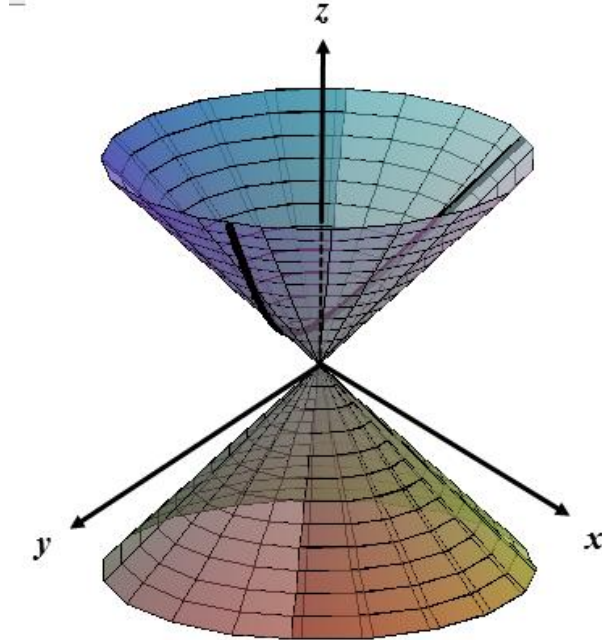


Şekil 6.1 Işık Konisi üzerindeki (6.68) denklemini ile verilen elips

(6.66) eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\mathbf{x}(s) = \left(\frac{2}{a^2} \sinh^2\left(\frac{as}{2}\right) - \frac{1}{2} \cosh^2\left(\frac{as}{2}\right), \frac{1}{a} \sinh\left(\frac{as}{2}\right), \frac{2}{a^2} \sinh^2\left(\frac{as}{2}\right) + \frac{1}{2} \cosh^2\left(\frac{as}{2}\right) \right) \quad (6.69)$$

ile verilen reel kısım ışık konisi üzerinde bir hiperboldür.

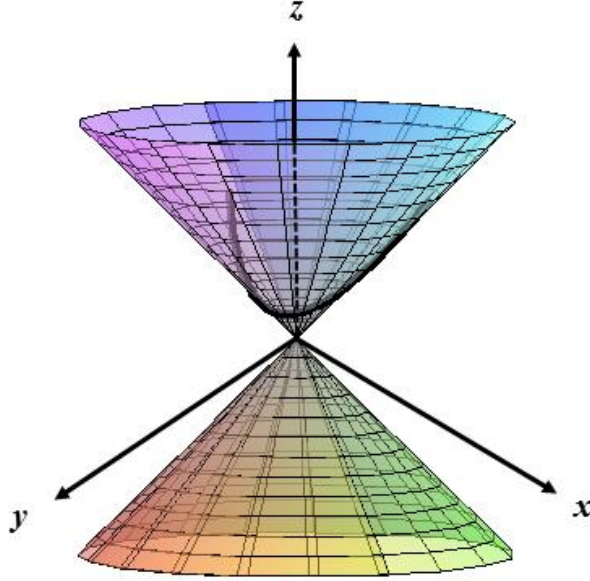


Şekil 6.2 Işık konisi üzerindeki (6.69) denklemini ile verilen hiperbol

(6.67) eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\mathbf{x}(s) = \left(\frac{a}{2} - \frac{s^2}{2a}, -s, \frac{a}{2} + \frac{s^2}{2a} \right) \quad (6.70)$$

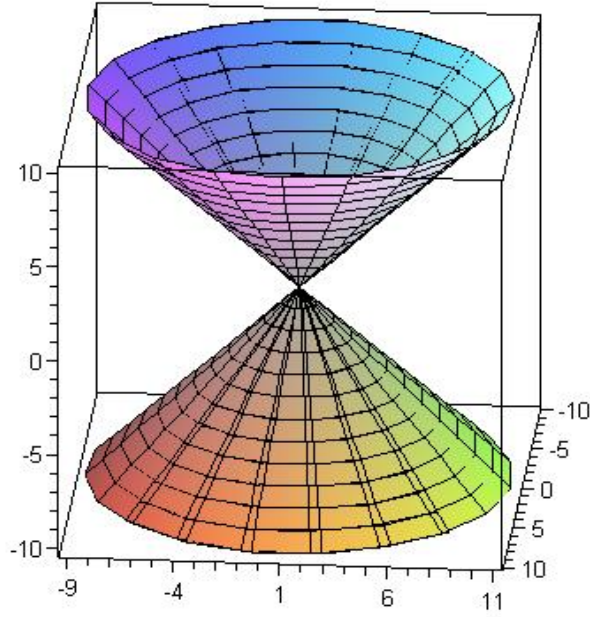
ile verilen reel kısım ışık konisi üzerinde bir paraboldür.



Şekil 6.3 Işık konisi üzerindeki (6.70) denklemini ile verilen parabol

Örnek 1. $\mathbf{x}(s, v) = (v \cos s, v \sin s + 1, v)$ (6.71)

yüzeyini ele alalım. Bu yüzey dayanak eğrisi $\mathbf{a}(s) = (0, 1, 0)$, ve ana doğrularının doğrultman vektörü $\mathbf{d}(s) = (\cos s, \sin s, 1)$ dir.



Şekil 6.4 $\mathbf{x}(s, v) = (v \cos s, v \sin s + 1, v)$ denklemi ile verilen koni.

Şimdi, bu regle yüzeye karşılık gelen dual konisel eğriyi bulalım. Burada $\mathbf{x}(s) = \mathbf{d}(s)$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(s) &= \mathbf{a}(s) \times \mathbf{x}(s) = \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos s & \sin s & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1, 0, -\cos s) \end{aligned}$$

olur. Buna göre dual konisel eğri

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = (\cos s, \sin s, 1) + \varepsilon(-1, 0, -\cos s)$$

biçiminde yazılır. Bu eğrinin dual yapı fonksiyonu

$$\bar{f}(s) = \frac{\cos s + 1}{\sin s} - \varepsilon \frac{\cos s + 1}{\sin s}$$

bulunur. Bu eğri için,

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s) \rangle = \cos^2 s + \sin^2 s - 1 + 2\varepsilon(-\cos s + \cos s)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s) \rangle = 0$$

dır. O halde $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisi dual ışık konisi üzerinde olduğundan, bir dual konisel eğridir. $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual eğrisinin reel kısmı

$$\mathbf{x}(s) = (\cos s, \sin s, 1)$$

koni üzerinde bir çemberdir.

$\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin türevi alınırsa,

$$\tilde{\mathbf{x}}'(s) = (-\sin s, \cos s, 0) + \varepsilon(0, 0, \sin s)$$

elde edilir.

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}'(s), \tilde{\mathbf{x}}'(s) \rangle = \sin^2 s + \cos^2 s + 2\varepsilon 0 = 1$$

oldüğundan, $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual konisel eğrisi bir dual spacelike eğridir. $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual spacelike eğrisinin dual yay uzunluğu,

$$\bar{s} = \int_0^s \|\tilde{\mathbf{x}}'\| d\sigma = \int_0^s 1 d\sigma = s$$

olarak bulunur. Buradan, s reel gösterge eğrisinin yay parametresi dual yay parametresine eşit olduğundan,

$$\tilde{\mathbf{x}}(\bar{s}) = (\cos \bar{s}, \sin \bar{s}, 1) + \varepsilon(-1, 0, -\cos \bar{s}) \quad (6.72)$$

yazılabilir. (4.15) eşitliğinden

$$\tilde{\alpha}(\bar{s}) = \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\bar{s}) = (-\sin \bar{s}, \cos \bar{s}, 0) + \varepsilon(0, 0, \sin \bar{s})$$

dır. $\tilde{\mathbf{x}}(\bar{s})$ eğrisinin ikinci türevi alınırsa,

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}(\bar{s}) = (-\cos \bar{s}, -\sin \bar{s}, 0) + \varepsilon(0, 0, \cos \bar{s}) \quad (6.73)$$

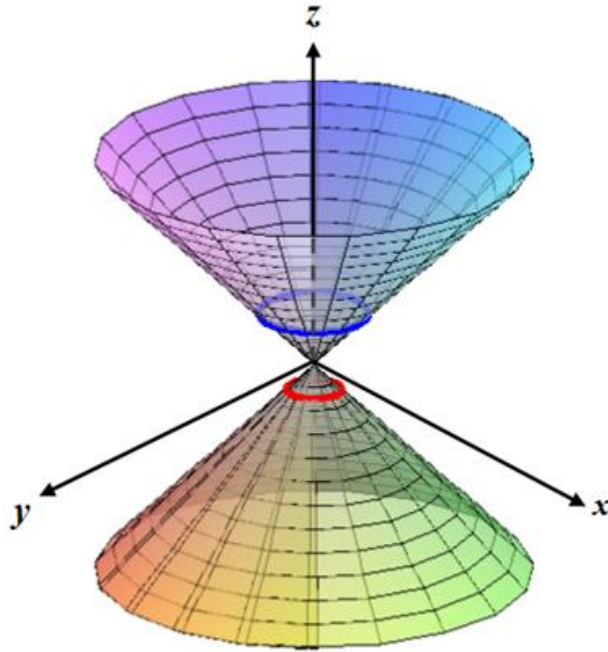
elde edilir. Buradan

$$\langle \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}(\bar{s}), \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}(\bar{s}) \rangle = 1 \quad (6.74)$$

dır. (6.72), (6.73) ve (6.74) eşitlikleri (4.19) eşitliğinde yerlerine yazılırsa, $\tilde{\mathbf{x}}(\bar{s})$ eğrisinin dual bağlantı eğrisi

$$\tilde{\mathbf{y}}(\bar{s}) = \frac{1}{2}(\cos \bar{s}, \sin \bar{s}, -1) + \frac{\varepsilon}{2}(1, 0, 3\cos \bar{s})$$

olur.



Şekil 6.5 $\tilde{\mathbf{x}}(s) = (\cos s, \sin s, 1) + \varepsilon(-1, 0, -\cos s)$ denklemleriyle verilen dual konisel eğrinin reel gösterge eğrisi $\mathbf{x}(s) = (\cos s, \sin s, 1)$ (--) ve bu eğrinin dual bağlantı eğrisi $\mathbf{y}(s) = \frac{1}{2}(\cos s, \sin s, -1)$ (--) .

Böylece $\{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\mathbf{y}}\}$ dual asimptotik ortonormal çatısı elde edilir. $\tilde{\mathbf{x}}(\bar{s})$ dual spacelike eğrisinin dual koni Frenet türev formülleri

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\bar{s}) = (-\sin \bar{s}, \cos \bar{s}, 0) + \varepsilon(0, 0, \sin \bar{s})$$

$$\dot{\tilde{\alpha}}(\bar{s}) = (-\cos \bar{s}, -\sin \bar{s}, 0) + \varepsilon(0, 0, \cos \bar{s})$$

$$\dot{\tilde{y}}(\bar{s}) = \frac{1}{2}(-\sin s, \cos s, 0) + \frac{\varepsilon}{2}(0, 0, \sin s)$$

dır. $\bar{\kappa}(\bar{s})$ koni eğrilik fonksiyonu (5.30) denkleminde

$$\bar{\kappa}(\bar{s}) = -\frac{1}{2}$$

olarak bulunur. Bu durumda $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ in dual koni Frenet formülleri matris formunda aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}'(\bar{s}) \\ \tilde{\alpha}'(\bar{s}) \\ \tilde{\mathbf{y}}'(\bar{s}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(\bar{s}) \\ \tilde{\alpha}(\bar{s}) \\ \tilde{\mathbf{y}}(\bar{s}) \end{bmatrix}.$$

Ani dönme vektörü

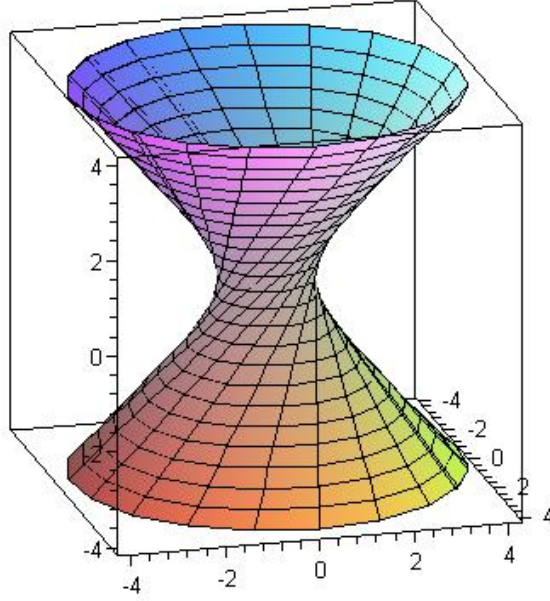
$$\tilde{\mathbf{w}}(s) = (0, 0, -1) + \varepsilon(1, 0, 2 \cos s)$$

olarak bulunur.

Örnek 2. Parametrik ifadesi

$$\mathbf{x}(s, v) = (\cos s - v \sin s, \sin s + v \cos s, v), \quad s \in \mathbb{R} \quad (6.75)$$

olan regle yüzeyi ele alalım. Bu yüzeyin dayanak eğrisi $\mathbf{a}(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ ve ana doğrularının doğrultman vektörü $\mathbf{d}(s) = (-\sin s, \cos s, 1)$ dir.



Şekil 6.6 $\mathbf{x}(s, v) = (\cos s - v \sin s, \sin s + v \cos s, v)$ denklemiyle verilen tek kanatlı hiperboloid.

Şimdi, regle yüzeye karşılık gelen dual konisel eğriyi bulalım:

$\mathbf{x}(s) = \mathbf{d}(s)$ ve moment

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(s) &= \mathbf{a}(s) \times \mathbf{x}(s) = \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-\sin s, \cos s, 1) \end{aligned}$$

olur. Buna göre dual konisel eğri

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = (-\sin s, \cos s, 1) + \varepsilon(-\sin s, \cos s, 1) \quad (6.76)$$

olarak bulunur. Bu eğrinin dual yapı fonksiyonu

$$\bar{f}(s) = \frac{-\sin s + 1}{\cos s}$$

biçimindedir. Bu eğri için,

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s) \rangle = \sin^2 s + \cos^2 s - 1 + 2\varepsilon(\sin^2 s + \cos^2 s - 1)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s) \rangle = 0$$

dır. O halde $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisi dual ışık konisi üzerinde olduğundan, bir dual konisel eğridir. $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual eğrisinin reel kısmı

$$\mathbf{x}(s) = (-\sin s, \cos s, 1)$$

koni üzerinde bir çemberdir.

$\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin türevi alınır,

$$\tilde{\mathbf{x}}'(s) = (-\cos s, -\sin s, 0) + \varepsilon(-\cos s, -\sin s, 0)$$

elde edilir.

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}'(s), \tilde{\mathbf{x}}'(s) \rangle = \cos^2 s + \sin^2 s + 2\varepsilon(\cos^2 s + \sin^2 s)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}'(s), \tilde{\mathbf{x}}'(s) \rangle = 1 + 2\varepsilon \quad (6.77)$$

$$\|\tilde{\mathbf{x}}'(s)\| = 1 + \varepsilon$$

olduğundan $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual konisel eğrisi bir dual spacelike eğridir. (4.2) eşitliğinden

$$\tilde{\alpha}(s) = (-\cos s, -\sin s, 0)$$

dir. $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin ikinci türevi alınır,

$$\tilde{\mathbf{x}}''(s) = (\sin s, -\cos s, 0) + \varepsilon(\sin s, -\cos s, 0) \quad (6.78)$$

elde edilir. Buradan

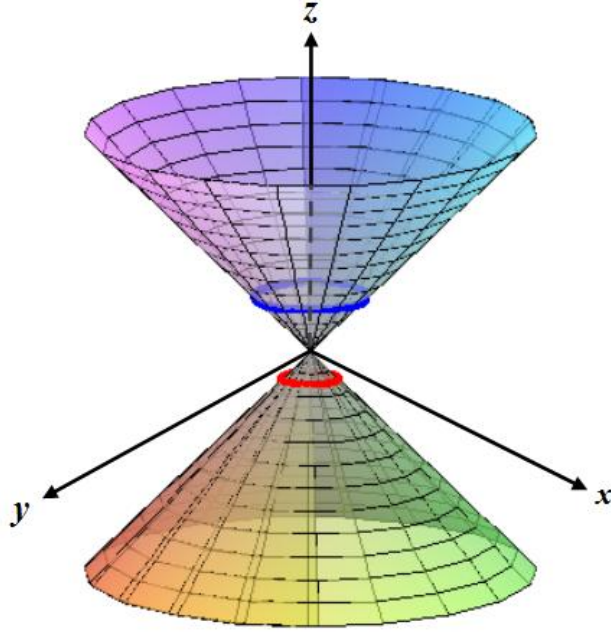
$$\langle \tilde{\mathbf{x}}''(s), \tilde{\mathbf{x}}''(s) \rangle = 1 + 2\varepsilon \quad (6.79)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}'(s), \tilde{\mathbf{x}}''(s) \rangle = 0$$

dır.(6.76), (6.77), (6.78) ve (6.79) ve eşitlikleri (4.8) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin dual bağlantı eğrisi

$$\tilde{\mathbf{y}}(s) = \frac{1}{2}(-\sin s, \cos s, -1) + \frac{\varepsilon}{2}(\sin s, -\cos s, 1)$$

bulunur.



Şekil 6.7 $\tilde{\mathbf{x}}(s) = (-\sin s, \cos s, 1) + \varepsilon(-\sin s, \cos s, 1)$ denklemiyle verilen dual konisel eğrinin reel gösterge eğrisi $\mathbf{x}(s) = (-\sin s, \cos s, 1)$ (--) ve bu eğrinin dual bağlantı eğrisi

$$\mathbf{y}(s) = \frac{1}{2}(-\sin s, \cos s, -1) \text{ (--)}. \quad \text{--}$$

Böylece $\{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\mathbf{y}}\}$ dual asimptotik ortonormal çatısı elde edilir. $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual spacelike eğrisinin dual koni Frenet türev formülleri

$$\tilde{\mathbf{x}}'(s) = (-\cos s, -\sin s, 0) + \varepsilon(-\cos s, -\sin s, 0)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}'(s) = (\sin s, -\cos s, 0)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}'(s) = \frac{1}{2}(-\cos s, -\sin s, 0) + \frac{\varepsilon}{2}(\cos s, \sin s, 0)$$

dır. $\bar{\kappa}_1(s)$ koni eğrilik fonksiyonu (4.15) denkleminde

$$\bar{\kappa}_1(s) = \frac{-1 + \varepsilon}{2}$$

olarak bulunur. Bu durumda $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ in dual koni Frenet formülleri matris formunda aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}'(s) \\ \tilde{\mathbf{a}}'(s) \\ \tilde{\mathbf{y}}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \varepsilon & 0 \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) & 0 & -(1 + \varepsilon) \\ 0 & -\left(-\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(s) \\ \tilde{\mathbf{a}}(s) \\ \tilde{\mathbf{y}}(s) \end{bmatrix}.$$

Ani dönme vektörü

$$\tilde{\mathbf{w}}(s) = (0, 0, -1) + \varepsilon \left(\frac{1}{2} \sin s, -\frac{1}{2} \cos s, \frac{1}{2} \right)$$

olarak bulunur.

$\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual spacelike eğrisinin dual yay uzunluğu,

$$\bar{s} = \int_0^s \|\tilde{\mathbf{x}}'\| d\sigma = \int_0^s (1 + \varepsilon) d\sigma = (1 + \varepsilon)s \quad (6.80)$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = (1 + \varepsilon)s$$

dır. $\tilde{\mathbf{x}}$ eğrisinin dual yay parametresine göre dual koni Frenet türev formülleri

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} = ((-\cos s, -\sin s, 0) + \varepsilon(-\cos s, -\sin s, 0))(1 - \varepsilon)$$

$$= (-\cos s, -\sin s, 0),$$

$$\dot{\tilde{\alpha}}(s) = \frac{d\tilde{\alpha}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} = (\sin s, -\cos s, 0)(1-\varepsilon)$$

$$= (\sin s, -\cos s, 0) + \varepsilon(-\sin s, \cos s, 0)$$

ve

$$\dot{\tilde{y}}(s) = \frac{d\tilde{y}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} = \left(\frac{1}{2}(-\sin s, \cos s, -1) + \frac{\varepsilon}{2}(\sin s, -\cos s, 1) \right)(1-\varepsilon)$$

$$= \frac{1}{2}(-\sin s, \cos s, -1) + \frac{3}{2}\varepsilon(\sin s, -\cos s, 1).$$

$\bar{\kappa}(\bar{s})$ koni eğrilik fonksiyonu (5.30) denkleminde

$$\bar{\kappa} = -\frac{1}{2} + \varepsilon$$

dir. Bu durumda $\tilde{x}$ eğrisin dual yay parametresine göre dual koni Frenet formülleri matris formunda aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{\alpha}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon\right) & 0 & -1 \\ 0 & -\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}.$$

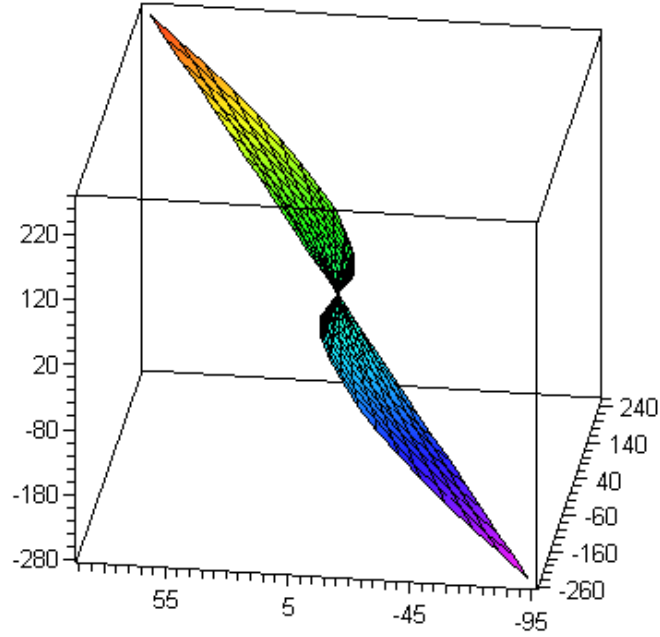
Örnek 3. Parametrik ifadesi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s, v) = & \left(\frac{1}{2}(c^2 - 1)\ln s, -\frac{1}{4} \frac{(1+c)^2 s^c}{c} - \frac{1}{4} \frac{(1-c)^2 s^{-c}}{c}, -\frac{1}{4} \frac{(1+c)^2 s^c}{c} + \frac{1}{4} \frac{(1-c)^2 s^{-c}}{c} \right) \\ & + v \left(\frac{s}{c^2}, \frac{1}{2} \frac{s(s^c - s^{-c})}{c^2}, \frac{1}{2} \frac{s(s^c + s^{-c})}{c^2} \right), \quad s \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (6.81)$$

olan regle yüzeyi ele alalım. Bu yüzeyin dayanak eğrisi

$$\mathbf{a}(s) = \left(\frac{1}{2}(c^2 - 1) \ln s, -\frac{1}{4} \frac{(1+c)^2 s^c}{c} - \frac{1}{4} \frac{(1-c)^2 s^{-c}}{c}, -\frac{1}{4} \frac{(1+c)^2 s^c}{c} + \frac{1}{4} \frac{(1-c)^2 s^{-c}}{c} \right) \quad \text{ve}$$

$$\text{ana doğrularının doğrultman vektörü } \mathbf{d}(s) = \left(\frac{s}{c^2}, \frac{1}{2} \frac{s(s^c - s^{-c})}{c^2}, \frac{1}{2} \frac{s(s^c + s^{-c})}{c^2} \right) \text{ dir.}$$



Şekil 6.8 (6.81) denklemiyle verilen B-scroll .

Şimdi, bu regle yüzeye karşılık gelen dual konisel eğriyi bulalım:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{d}(s) \text{ ve moment vektörü}$$

$$\mathbf{x}^*(s) = \mathbf{a}(s) \times \mathbf{x}(s)$$

$$= \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ \frac{1}{2}(c^2 - 1) \ln s & -\frac{1}{4} \frac{(1+c)^2 s^c}{c} - \frac{1}{4} \frac{(1-c)^2 s^{-c}}{c} & -\frac{1}{4} \frac{(1+c)^2 s^c}{c} + \frac{1}{4} \frac{(1-c)^2 s^{-c}}{c} \\ \frac{s}{c^2} & \frac{1}{2} \frac{s(s^c - s^{-c})}{c^2} & \frac{1}{2} \frac{s(s^c + s^{-c})}{c^2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \frac{s(1+c^2)}{c^3}, \frac{1}{4} \frac{s((s^c + s^{-c})(c^3 \ln s - \ln s + 2c) + (s^c - s^{-c})(c^2 + 1))}{c^3}, \right. \\ \left. \frac{1}{4} \frac{s((s^c - s^{-c})(c^3 \ln s - \ln s + 2c) + (s^c + s^{-c})(c^2 + 1))}{c^3} \right)$$

olur. Buna göre dual konisel eğri

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = \left(\frac{s}{c^2}, \frac{1}{2} \frac{s(s^c - s^{-c})}{c^2}, \frac{1}{2} \frac{s(s^c + s^{-c})}{c^2} \right) \\ + \varepsilon \left(\frac{1}{2} \frac{s(1+c^2)}{c^3}, \frac{1}{4} \frac{s((s^c + s^{-c})(c^3 \ln s - \ln s + 2c) + (s^c - s^{-c})(c^2 + 1))}{c^3}, \right. \\ \left. \frac{1}{4} \frac{s((s^c - s^{-c})(c^3 \ln s - \ln s + 2c) + (s^c + s^{-c})(c^2 + 1))}{c^3} \right) \quad (6.82)$$

olarak bulunur. Bu eğrinin dual yapı fonksiyonu

$$\bar{f}(s) = \frac{s^c + 1}{s^c - 1} - \varepsilon \frac{(s^{3c} + 2s^{2c} + s^c)(c^2 \ln s - \ln s + 2)}{s^{2c} - 1}$$

olarak bulunur.

Bu eğri için

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s) \rangle = \sin^2 s + \cos^2 s - 1 + 2\varepsilon(\sin^2 s + \cos^2 s - 1)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s) \rangle = 0$$

dır. O halde $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisi dual ışık konisi üzerinde olduğundan, bir dual konisel eğridir.

$\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual eğrisinin reel kısmı

$$\mathbf{x}(s) = \left(\frac{s}{c^2}, \frac{1}{2} \frac{s(s^c - s^{-c})}{c^2}, \frac{1}{2} \frac{s(s^c + s^{-c})}{c^2} \right)$$

koni üzerinde bir eğridir.

$\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin türevi alınırsa,

$$\tilde{\mathbf{x}}'(s) = \left(\frac{1}{c^2}, \frac{1}{2} \frac{s^c - s^{-c} + cs^c + cs^{-c}}{c^2}, \frac{1}{2} \frac{s^c + s^{-c} + cs^c - cs^{-c}}{c^2} \right) + \varepsilon \left(\frac{1}{2} \frac{(1+c^2)}{c^3}, \right. \\ \left. \frac{1}{4} \frac{(s^c + s^{-c})(c^3 \ln s - c \ln s + 3c + c^3) + (s^c - s^{-c})(1 + 3c^2 - c^2 \ln s + c^4 \ln s)}{c^3}, \right. \\ \left. \frac{1}{4} \frac{(s^c - s^{-c})(c^3 \ln s - c \ln s + 3c + c^3) + (s^c + s^{-c})(1 + 3c^2 - c^2 \ln s + c^4 \ln s)}{c^3} \right)$$

elde edilir.

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}'(s), \tilde{\mathbf{x}}'(s) \rangle = \frac{1}{c^2} + \varepsilon \frac{1+c^2}{c^3}$$

$$\|\tilde{\mathbf{x}}'(s)\| = \frac{1}{c} + \varepsilon \frac{1+c^2}{2c^2} \quad (6.83)$$

olduğundan $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual konisel eğrisi bir dual spacelike eğridir. (4.2) eşitliğinden

$$\tilde{\alpha}(s) = \left(\frac{1}{c}, \frac{1}{2} \frac{s^c - s^{-c} + cs^c + cs^{-c}}{c}, \frac{1}{2} \frac{s^c + s^{-c} + cs^c - cs^{-c}}{c} \right) \\ + \varepsilon \left(0, \frac{1}{4} \frac{(s^c + s^{-c})(c^2 \ln s - \ln s + 2) + (s^c - s^{-c})(c^3 \ln s - c \ln s + 2c)}{c}, \right. \\ \left. \frac{1}{4} \frac{(s^c - s^{-c})(c^2 \ln s - \ln s + 2) + (s^c + s^{-c})(c^3 \ln s - c \ln s + 2c)}{c} \right)$$

dir. $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin ikinci türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}''(s), \tilde{\mathbf{x}}''(s) \rangle = -\frac{c^2-1}{c^2 s^2} - \varepsilon \frac{-1+c^4}{c^3 s^2} \quad (6.84)$$

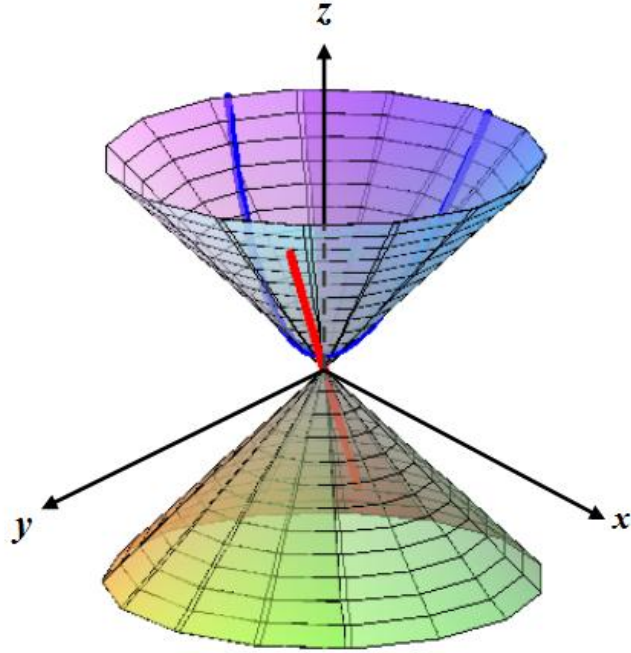
$$\langle \tilde{\mathbf{x}}'(s), \tilde{\mathbf{x}}''(s) \rangle = 0$$

dır. (6.83) ve (6.84) eşitlikleri ile $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ ve $\tilde{\mathbf{x}}''(s)$ değerleri (4.8) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin dual bağlantı eğrisi

$$\tilde{\mathbf{y}}(s) = \left(\frac{1}{2} \frac{c^2 - 1}{s}, -\frac{1}{4} \frac{(s^c + s^{-c}) + (s^c - s^{-c})(c^2 + 1)}{s}, -\frac{1}{4} \frac{(s^c - s^{-c}) + (s^c + s^{-c})(c^2 + 1)}{s} \right) \\ + \varepsilon \left(-\frac{1}{4} \frac{-1 + c^4}{cs}, -\frac{1}{8} \frac{(s^c - s^{-c})(-1 - 2c^2 \ln s - 2c^4 \ln s + 2c^2 - c^4) + (s^c + s^{-c})(c^5 \ln s - c \ln s)}{c}, \right. \\ \left. -\frac{1}{8} \frac{(s^c + s^{-c})(-1 - 2c^2 \ln s - 2c^4 \ln s + 2c^2 - c^4) + (s^c - s^{-c})(c^5 \ln s - c \ln s)}{c} \right)$$

bulunur.



Şekil 6.9 (6.82) denklemiyle verilen dual konisel eğrinin reel gösterge eğrisi

$\mathbf{x}(s) = \left(\frac{s}{c^2}, \frac{1}{2} \frac{s(s^c - s^{-c})}{c^2}, \frac{1}{2} \frac{s(s^c + s^{-c})}{c^2} \right)$ (--) ve bu eğrinin dual bağlantı eğrisi

$$\mathbf{y}(s) = \left(\frac{1}{2} \frac{c^2 - 1}{s}, -\frac{1}{4} \frac{(s^c + s^{-c}) + (s^c - s^{-c})(c^2 + 1)}{s}, -\frac{1}{4} \frac{(s^c - s^{-c}) + (s^c + s^{-c})(c^2 + 1)}{s} \right) \text{ (--)}. \quad (---)$$

Böylece $\{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\mathbf{y}}\}$ dual asimptotik ortonormal çatısı elde edilir. $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual spacelike eğrisinin dual koni Frenet türev formülleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}'(s) \\ \tilde{\mathbf{a}}'(s) \\ \tilde{\mathbf{y}}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} + \varepsilon \frac{1+c^2}{2c^2} & 0 \\ \frac{(c^3-c)}{2s^2} + \varepsilon \left(\frac{(1-c^4)}{4s^2} \right) & 0 & -\left(\frac{1}{c} + \varepsilon \frac{1+c^2}{2c^2} \right) \\ 0 & -\left(\frac{(c^3-c)}{2s^2} + \varepsilon \left(\frac{(1-c^4)}{4s^2} \right) \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(s) \\ \tilde{\mathbf{a}}(s) \\ \tilde{\mathbf{y}}(s) \end{bmatrix}$$

dır. $\bar{\kappa}_1(s)$ koni eğrilik fonksiyonu (4.16) denkleminde

$$\bar{\kappa}_1(s) = \frac{1}{2} \frac{(c^2-1)c}{s^2} + \varepsilon \left(-\frac{1}{4} \frac{(-1+c^4)}{s^2} \right)$$

olarak bulunur.

Ani dönme vektörü

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}(s) = & \left(\frac{c^3 + c^2 - c - 1}{cs}, -\frac{1}{4} \frac{s^c (c^3 + c^2 + c + 1) + s^{-c} (-c^3 + 3c^2 + c + 1)}{cs}, \right. \\ & \left. -\frac{1}{4} \frac{s^c (c^3 + c^2 + c + 1) + s^{-c} (c^3 - 3c^2 + c + 1)}{cs} \right) + \varepsilon \left(-\frac{1}{4} \frac{c^4 - 1}{cs}, \right. \\ & \left. -\frac{1}{8} \frac{s^c (\ln s (c^5 + c^4 - c - 1) + 1 - c^4)}{cs} - \frac{1}{8} \frac{s^{-c} ((c^5 - 3c^4 + 4c^2 - c - 1) \ln s - 4c^2 + c^4 + 3)}{cs}, \right. \\ & \left. \frac{1}{8} \frac{s^c ((-c^5 - c^4 + c + 1) \ln s + c^4 - 1)}{cs} + \frac{1}{8} \frac{s^{-c} ((c^5 - 3c^4 + 4c^2 - c - 1) \ln s - 4c^2 + c^4 + 3)}{cs} \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual spacelike eğrisinin dual yay uzunluğu,

$$\bar{s} = \int_0^s \|\tilde{\mathbf{x}}'\| d\sigma = \int_0^s \left(\frac{1}{c} + \varepsilon \frac{1+c^2}{2c^2} \right) d\sigma = \left(\frac{1}{c} + \varepsilon \frac{1+c^2}{2c^2} \right) s \quad (6.85)$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{1}{c} + \varepsilon \frac{1+c^2}{2c^2}$$

dir. $\tilde{x}$ eğrisinin dual yay parametresine göre dual koni Frenet türev formülleri matris formunda:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{\alpha}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{(c^2-1)}{s^2} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{(c^4-1)}{cs^2} & 0 & -1 \\ 0 & -\left(\frac{1}{2} \frac{(c^2-1)}{s^2} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{(c^4-1)}{cs^2} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}.$$

$\tilde{x}$ eğrisinin dual yay parametresine göre koni eğrilik fonksiyonu

$$\bar{\kappa}(\bar{s}) = \frac{1}{2} \frac{(c^2-1)}{s^2} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{(c^4-1)}{cs^2}$$

olarak bulunur.

Örnek 4. Parametrik ifadesi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s, v) = & \left(\frac{1}{12}(2 + \ln s)^3 - \frac{1}{4}c^2 \ln s, -\frac{1}{4}c(2 + \ln s)^2, -\frac{1}{12}(2 + \ln s)^3 - \frac{1}{4}c^2 \ln s \right) \\ & + v \left(\frac{1}{2} \frac{s(c^2 - \ln^2 s)}{c^2}, \frac{s \ln s}{c}, \frac{1}{2} \frac{s(c^2 + \ln^2 s)}{c^2} \right), s \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (6.86)$$

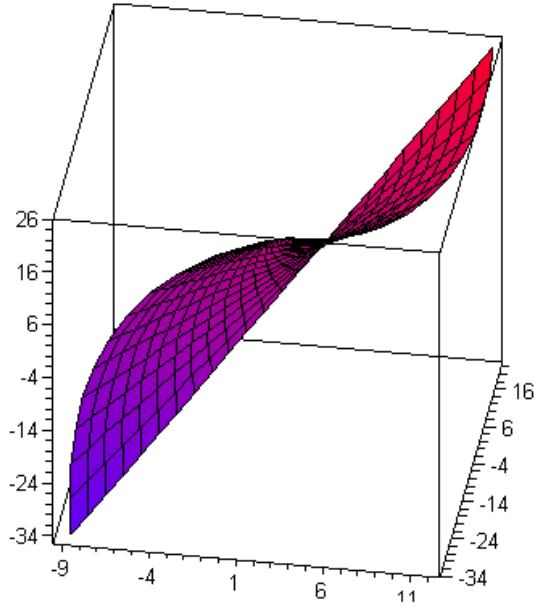
olan regle yüzeyi ele alalım. Bu yüzeyin dayanak eğrisi

$$\mathbf{a}(s) = \left(\frac{1}{12}(2 + \ln s)^3 - \frac{1}{4}c^2 \ln s, -\frac{1}{4}c(2 + \ln s)^2, -\frac{1}{12}(2 + \ln s)^3 - \frac{1}{4}c^2 \ln s \right),$$

ve ana doğrularının doğrultman vektörü

$$\mathbf{d}(s) = \left(\frac{1}{2} \frac{s(c^2 - \ln^2 s)}{c^2}, \frac{s \ln s}{c}, \frac{1}{2} \frac{s(c^2 + \ln^2 s)}{c^2} \right)$$

dir.



Şekil 6.10 (6.86) denklemleriyle verilen B-scroll.

Şimdi, bu regle yüzeye karşılık gelen dual konisel eğriyi bulalım:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{d}(s) \text{ ve moment}$$

$$\mathbf{x}^*(s) = \mathbf{d}(s) \times \mathbf{x}(s)$$

$$= \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ \frac{1}{12}(2 + \ln s)^3 - \frac{1}{4}c^2 \ln s & -\frac{1}{4}c(2 + \ln s)^2 & -\frac{1}{12}(2 + \ln s)^3 - \frac{1}{4}c^2 \ln s \\ \frac{1}{2} \frac{s(c^2 - \ln^2 s)}{c^2} & \frac{s \ln s}{c} & \frac{1}{2} \frac{s(c^2 + \ln^2 s)}{c^2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{24} \frac{s(-16 \ln s - 12 \ln^2 s + \ln^4 s - 3c^2 \ln^2 s + 12c^2 + 12c^2 \ln s)}{c}, -\frac{1}{6} s(-4 - 6 \ln s - 3 \ln^2 s + \ln^3 s), \right. \\ \left. -\frac{1}{24} \frac{s(-16 \ln s - 12 \ln^2 s + \ln^4 s + 3c^2 \ln^2 s - 12c^2 - 12c^2 \ln s)}{c} \right)$$

olur. Buna göre dual konisel eğri

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(s) = & \left(\frac{1}{2} \frac{s(c^2 - \ln^2 s)}{c^2}, \frac{s \ln s}{c}, \frac{1}{2} \frac{s(c^2 + \ln^2 s)}{c^2} \right) \\ & + \varepsilon \left(\frac{1}{24} \frac{s(-16 \ln s - 12 \ln^2 s + \ln^4 s - 3c^2 \ln^2 s + 12c^2 + 12c^2 \ln s)}{c}, \right. \\ & \left. - \frac{1}{6} s(-4 - 6 \ln s - 3 \ln^2 s + \ln^3 s), - \frac{1}{24} \frac{s(-16 \ln s - 12 \ln^2 s + \ln^4 s + 3c^2 \ln^2 s - 12c^2 - 12c^2 \ln s)}{c} \right) \end{aligned} \quad (6.87)$$

olarak bulunur. Bu eğrinin dual yapı fonksiyonu

$$\bar{f}(s) = \frac{c}{\ln s} - \varepsilon \frac{1}{12} \frac{c^2 (\ln^3 s - 6 \ln^2 s + 8)}{\ln^2 s}$$

bulunur. Bu eğri için

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s) \rangle = 0$$

dır. O halde $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisi dual ışık konisi üzerinde olduğundan, bir dual konisel eğridir. $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual eğrisinin reel kısmı

$$\mathbf{x}(s) = \left(\frac{1}{2} \frac{s(c^2 - \ln^2 s)}{c^2}, \frac{s \ln s}{c}, \frac{1}{2} \frac{s(c^2 + \ln^2 s)}{c^2} \right)$$

koni üzerinde bir eğridir.

$\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin teğetinin normu

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}'(s), \tilde{\mathbf{x}}'(s) \rangle = \frac{1}{c^2} + \varepsilon \frac{2}{c}$$

$$\|\tilde{\mathbf{x}}'(s)\| = \frac{1}{c} + \varepsilon \quad (6.88)$$

olduğundan $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual konisel eğrisi bir dual spacelike eğridir. (4.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(s) = & \left(-\frac{1}{2} \frac{\ln^2 s + 2 \ln s - c^2}{c}, \ln s + 1, \frac{1}{2} \frac{\ln^2 s + 2 \ln s + c^2}{c} \right) \\ & + \varepsilon \left(\frac{1}{24} \ln^4 s + \frac{1}{6} \ln^3 s - \frac{1}{8} c^2 \ln^2 s + \left(\frac{1}{4} c^2 - \frac{2}{3} \right) \ln s + \frac{1}{2} c^2 - \frac{2}{3}, -\frac{1}{6} c (\ln^3 s - 6 \ln s - 4) \right. \\ & \left. - \frac{1}{24} \ln^4 s - \frac{1}{6} \ln^3 s - \frac{1}{8} c^2 \ln^2 s + \left(\frac{1}{4} c^2 + \frac{2}{3} \right) \ln s + \frac{1}{2} c^2 + \frac{2}{3} \right)\end{aligned}$$

dir. $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin ikinci türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}''(s), \tilde{\mathbf{x}}''(s) \rangle = \frac{1}{c^2 s^2} + \varepsilon \frac{3}{c s^2} \quad (6.89)$$

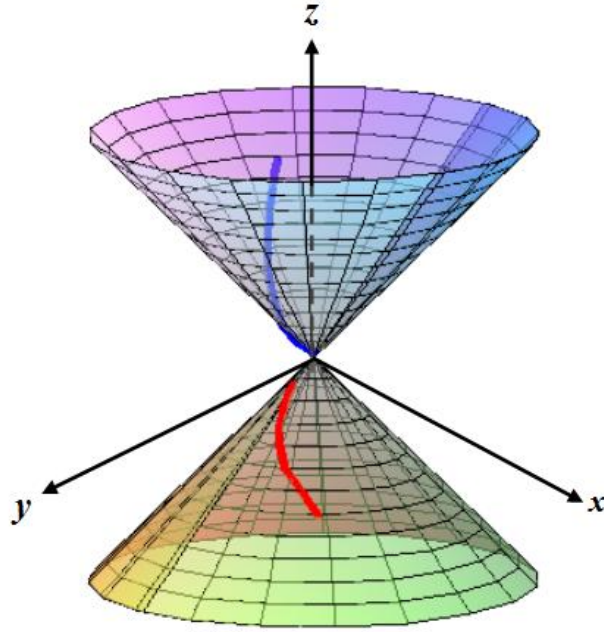
$$\langle \tilde{\mathbf{x}}'(s), \tilde{\mathbf{x}}''(s) \rangle = 0$$

dır. (6.88) ve (6.89) eşitlikleri ile $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ ve $\tilde{\mathbf{x}}''(s)$ değerleri (4.8) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin dual bağlantı eğrisi

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}}(s) = & \left(\frac{1}{4} \frac{\ln^2 s + 4 \ln s - c^2 + 4}{s}, -\frac{1}{2} \frac{c(2 + \ln s)}{s}, -\frac{1}{4} \frac{\ln^2 s + 4 \ln s + c^2 + 4}{s} \right) \\ & + \varepsilon \left(-\frac{1}{48} \frac{c(\ln^4 s + 8 \ln^3 s + (24 - 3c^2) \ln^2 s + 32 \ln s + 12c^2 + 16)}{s}, \right. \\ & \left. \frac{1}{12} \frac{c^2(\ln^3 s + 3 \ln^2 s - 4)}{s}, \frac{1}{48} \frac{c(\ln^4 s + 8 \ln^3 s + (24 + 3c^2) \ln^2 s + 32 \ln s - 12c^2 + 16)}{s} \right)\end{aligned}$$

bulunur.



Şekil 6.11 (6.87) denklemiyle verilen dual konisel eğrinin reel gösterge eğrisi

$$\mathbf{x}(s) = \left(\frac{1}{2} \frac{s(c^2 - \ln^2 s)}{c^2}, \frac{s \ln s}{c}, \frac{1}{2} \frac{s(c^2 + \ln^2 s)}{c^2} \right) \text{ (---)} \text{ ve bu eğrinin dual bağlantı eğrisi}$$

$$\mathbf{y}(s) = \left(\frac{1}{4} \frac{\ln^2 s + 4 \ln s - c^2 + 4}{s}, -\frac{1}{2} \frac{c(2 + \ln s)}{s}, -\frac{1}{4} \frac{\ln^2 s + 4 \ln s + c^2 + 4}{s} \right) \text{ (- - -)}.$$

Böylece $\{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\mathbf{y}}\}$ dual asimptotik ortonormal çatısı elde edilir. $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual spacelike eğrisinin dual koni Frenet türev formüllerinin matris formu

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}'(s) \\ \tilde{\boldsymbol{\alpha}}'(s) \\ \tilde{\mathbf{y}}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} + \varepsilon & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{c}{s^2} & 0 & -\left(\frac{1}{c} + \varepsilon\right) \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{c}{s^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(s) \\ \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(s) \\ \tilde{\mathbf{y}}(s) \end{bmatrix}$$

ile verilir.

$\bar{\kappa}_1(s)$ koni eğrilik fonksiyonu (4.16) denkleminde

$$\bar{\kappa}_1(s) = -\frac{1}{2} \frac{c}{s^2}$$

olarak bulunur. Ani dönme vektörü

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}(s) = & \left(\frac{1}{4} \frac{-c^2 + \ln^2 s + 4c \ln s + 4c - c^3 + c \ln^2 s}{cs}, -\frac{1}{2} \frac{\ln s + 2c + c \ln s}{s}, \right. \\ & \left. -\frac{1}{4} \frac{c^2 + \ln^2 s + 4c \ln s + 4c + c^3 + c \ln^2 s}{cs} \right) \\ & + \varepsilon \left(-\frac{1}{48} \frac{\ln^4 s(1+c) + \ln^3 s(8c) + \ln^2 s(-3c^3 - 3c^2 + 24c - 12) + \ln s(12c^2 + 32c - 16)}{s}, \right. \\ & \frac{1}{2} \frac{\ln^3 s(c^2 + c) + \ln^2 s(3c^2 - 3c) - \ln s(6c) - 4c^2 - 4c}{s}, \\ & \left. \frac{1}{48} \frac{\ln^4 s(1+c) + \ln^3 s(8c) + \ln^2 s(3c^3 + 3c^2 + 24c - 12) + \ln s(-12c^2 + 32c - 16)}{s} \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual spacelike eğrisinin dual yay uzunluğu,

$$\bar{s} = \int_0^s \|\tilde{\mathbf{x}}\| d\sigma = \int_0^s \left(\frac{1}{c} + \varepsilon \right) d\sigma = \left(\frac{1}{c} + \varepsilon \right) s \quad (6.90)$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{1}{c} + \varepsilon$$

dır. $\tilde{\mathbf{x}}$ eğrisinin dual yay parametresine göre dual koni Frenet türev formülleri matris formunda:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ \dot{\tilde{\alpha}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{y}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{c^2}{s^2} + \varepsilon \frac{c^3}{s^2} & 0 & -1 \\ 0 & -\left(-\frac{1}{2} \frac{c^2}{s^2} + \varepsilon \frac{c^3}{s^2} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\mathbf{y}} \end{bmatrix}.$$

$\tilde{x}$ eğrisinin dual yay parametresine göre koni eğrilik fonksiyonu

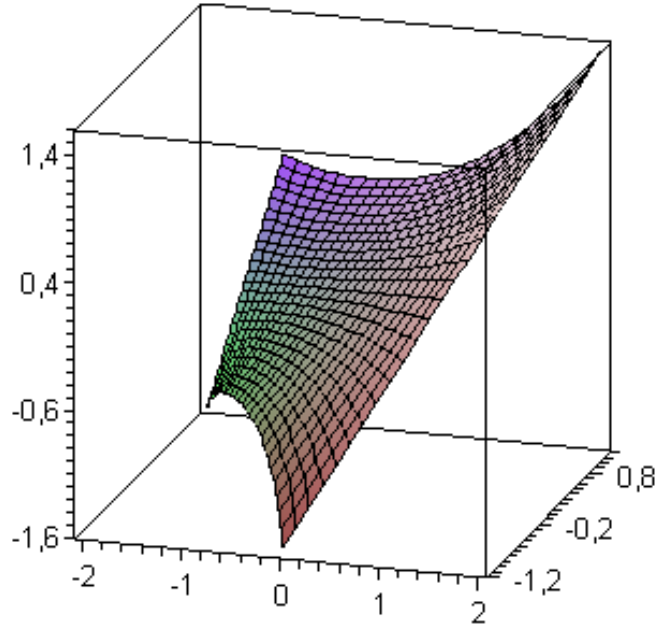
$$\bar{K}(\bar{s}) = -\frac{1}{2} \frac{c^2}{s^2} + \varepsilon \frac{c^3}{s^2}$$

olarak bulunur.

Örnek 5. Parametrik ifadesi

$$\mathbf{x}(s, v) = (s + v, v \sinh s, v \cosh s), \quad s \in \mathbb{R} \quad (6.91)$$

olan regle yüzeyi ele alalım. Bu yüzeyin dayanak eğrisi $\mathbf{a}(s) = (1, 0, 0)$ ve ana doğrularının doğrultman vektörü $\mathbf{d}(s) = (1, \sinh s, \cosh s)$ dir.



Şekil 6.12 (6.91) denklemiyle verilen ana doğruları lightlike olan regle yüzey

Şimdi, regle yüzeye karşılık gelen dual konisel eğriyi bulalım:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{d}(s) \text{ ve moment}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^*(s) &= \mathbf{a}(s) \times \mathbf{x}(s) = \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sinh s & \cosh s \end{vmatrix} \\ &= (0, s \cosh s, s \sinh s)\end{aligned}$$

olur. Buna göre dual konisel eğri

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = (1, \sinh s, \cosh s) + \varepsilon (0, s \cosh s, s \sinh s) \quad (6.92)$$

olarak bulunur.

Bu eğrinin dual yapı fonksiyonu

$$\bar{f}(s) = \frac{1 + \cosh s}{\sinh s} + \varepsilon \frac{1 + \cosh s}{\sinh s}$$

bulunur. Bu eğri için

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s) \rangle = 1 + \sinh^2 s - \cosh^2 s - 1 + 2\varepsilon (s \cosh s \sinh s - s \sinh s \cosh s)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s) \rangle = 0$$

dır. O halde $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisi dual ışık konisi üzerinde olduğundan, bir dual konisel eğridir. $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual eğrisinin reel kısmı

$$\mathbf{x}(s) = (1, \sinh s, \cosh s)$$

koni üzerinde bir eğridir.

$\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin türevi alınırsa,

$$\tilde{\mathbf{x}}'(s) = (0, \cosh s, \sinh s) + \varepsilon (0, \cosh s + s \sinh s, \sinh s + s \cosh s)$$

elde edilir.

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}'(s), \tilde{\mathbf{x}}'(s) \rangle = \cosh^2 s - \sinh^2 s + 2\varepsilon (\cosh^2 s + s \sinh s \cosh s - \sinh^2 s - s \cosh s \sinh s)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}'(s), \tilde{\mathbf{x}}'(s) \rangle = 1 + 2\varepsilon \quad (6.93)$$

$$\|\tilde{\mathbf{x}}'(s)\| = 1 + \varepsilon$$

olduğundan $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual konisel eğrisi bir dual spacelike eğridir. (4.2) eşitliğinden

$$\tilde{\alpha}(s) = (0, \cosh s, \sinh s) + \varepsilon(0, s \sinh s, s \cosh s)$$

dir. $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin ikinci türevi alınır,

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) = (0, \sinh s, \cosh s) + \varepsilon(0, 2 \sinh s + s \cosh s, 2 \cosh s + s \sinh s) \quad (6.94)$$

elde edilir. Buradan

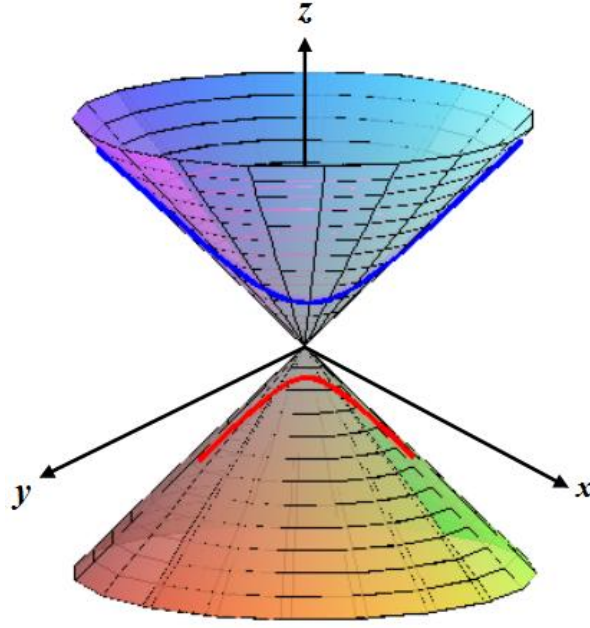
$$\langle \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}(s), \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) \rangle = -1 - 4\varepsilon \quad (6.95)$$

$$\langle \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s), \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) \rangle = 0$$

dır. (6.92), (6.93), (6.94) ve (6.95) eşitlikleri (4.8) eşitliğinde yerlerine yazılırsa, $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin dual bağlantı eğrisi

$$\tilde{\mathbf{y}}(s) = \frac{1}{2}(1, -\sinh s, -\cosh s) + \frac{\varepsilon}{2}(0, -s \cosh s, -s \sinh s)$$

bulunur.



Şekil 6.13 $\tilde{\mathbf{x}}(s) = (1, \sinh s, \cosh s) + \varepsilon(0, s \cosh s, s \sinh s)$ denklemiyle verilen dual konisel eğrisinin reel gösterge eğrisi $\mathbf{x}(s) = (1, \sinh s, \cosh s)$ (--) ve bu eğrinin dual bağlantı eğrisi $\mathbf{y}(s) = \frac{1}{2}(1, -\sinh s, -\cosh s)$ (--).

Böylece $\{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\mathbf{y}}\}$ dual asimptotik ortonormal çatısı elde edilir. $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual spacelike eğrisinin dual koni Frenet türev formülleri

$$\tilde{\mathbf{x}}'(s) = (0, \cosh s, \sinh s) + \varepsilon(0, \cosh s + s \sinh s, \sinh s + s \cosh s)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}'(s) = (0, \sinh s, \cosh s, 0) + \varepsilon(0, \sinh s + s \cosh s, \cosh s + s \sinh s)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}'(s) = \frac{1}{2}(0, -\cosh s, -\sinh s) + \frac{\varepsilon}{2}(0, -\cosh s - s \sinh s, -\sinh s - s \cosh s)$$

dır. $\bar{\kappa}_1(s)$ koni eğrilik fonksiyonu (4.15) denklemden

$$\bar{\kappa}_1(s) = \frac{1}{2} + \varepsilon$$

olarak bulunur. Bu durumda $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ in dual koni Frenet formülleri matris formunda aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}'(s) \\ \tilde{\mathbf{a}}'(s) \\ \tilde{\mathbf{y}}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1+\varepsilon & 0 \\ \frac{1}{2}+\varepsilon & 0 & -(1+\varepsilon) \\ 0 & -\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(s) \\ \tilde{\mathbf{a}}(s) \\ \tilde{\mathbf{y}}(s) \end{bmatrix}.$$

Ani dönme vektörü

$$\tilde{\mathbf{w}}(s) = (1, 0, 0) + \varepsilon \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \sinh s, \frac{1}{2} \cosh s \right)$$

olarak bulunur.

$\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual spacelike eğrisinin dual yay uzunluğu,

$$\bar{s} = \int_0^s \|\tilde{\mathbf{x}}'\| d\sigma = \int_0^s (1+\varepsilon) d\sigma = (1+\varepsilon)s \quad (6.96)$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = (1+\varepsilon)s$$

dır. $\tilde{\mathbf{x}}$ eğrisinin dual yay parametresine göre dual koni Frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{a}}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{y}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}+\varepsilon & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{a}} \\ \tilde{\mathbf{y}} \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. $\bar{\kappa}(\bar{s})$ koni eğrilik fonksiyonu (5.30) denklemden

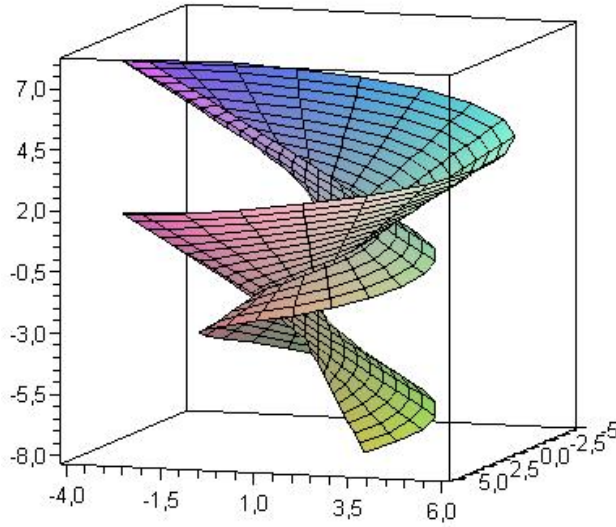
$$\bar{\kappa} = \frac{1}{2} + \varepsilon \frac{1}{2}$$

dır.

Örnek 6. Parametrik ifadesi

$$\mathbf{x}(s, v) = (\sin s + v \sin s, \cos s + v \cos s, -s + v), \quad s \in \mathbb{R} \quad (6.97)$$

olan regle yüzeyi ele alalım. Bu yüzeyin dayanak eğrisi $\mathbf{a}(s) = (\sin s, \cos s, -s)$ ve ana doğrularının doğrultman vektörü $\mathbf{d}(s) = (\sin s, \cos s, 1)$ dir.



Şekil 6.14 (6.97) denklemleriyle verilen ana doğruları lightlike olan regle yüzeyi.

Şimdi, regle yüzeye karşılık gelen dual konisel eğriyi bulalım:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{d}(s) \text{ ve moment}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(s) &= \mathbf{a}(s) \times \mathbf{x}(s) = \begin{vmatrix} -i & -j & k \\ \sin s & \cos s & -s \\ \sin s & \cos s & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-(s+1)\cos s, (s+1)\sin s, 0) \end{aligned}$$

olur. Buna göre dual konisel eğri

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = (\sin s, \cos s, 1) + \varepsilon (-(s+1)\cos s, (s+1)\sin s, 0) \quad (6.98)$$

ve dual yapı fonksiyonu

$$\bar{f}(s) = \frac{\sin s + 1}{\cos s} + \varepsilon \frac{s + 1}{\sin s - 1}$$

olur. Bu eğri için

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s) \rangle = \sin^2 s + \cos^2 s - 1 + 2\varepsilon(-(s+1)\sin s \cos s + (s+1)\sin s \cos s)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s) \rangle = 0$$

dır. O halde $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisi dual ışık konisi üzerinde olduğundan, bir dual konisel eğridir. $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual eğrisinin reel kısmı

$$\mathbf{x}(s) = (\sin s, \cos s, 1)$$

koni üzerinde bir çemberdir.

$\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin türevi alınır,

$$\tilde{\mathbf{x}}'(s) = (\cos s, -\sin s, 0) + \varepsilon((s+1)\sin s - \cos s, (s+1)\cos s + \sin s, 0)$$

elde edilir.

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}'(s), \tilde{\mathbf{x}}'(s) \rangle = \cos^2 s + \sin^2 s + 2\varepsilon((s+1)\sin s \cos s - \cos^2 s - (s+1)\cos s \sin s - \sin^2 s)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{x}}'(s), \tilde{\mathbf{x}}'(s) \rangle = 1 - 2\varepsilon \quad (6.99)$$

$$\|\tilde{\mathbf{x}}'(s)\| = 1 - \varepsilon$$

olduğundan $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual konisel eğrisi bir dual spacelike eğridir. (4.2) eşitliğinden

$$\tilde{\alpha}(s) = (\cos s, -\sin s, 0) + \varepsilon((s+1)\sin s, (s+1)\cos s, 0)$$

dir. $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin ikinci türevi alınır,

$$\tilde{\mathbf{x}}''(s) = (-\sin s, -\cos s, 0) + \varepsilon((s+1)\cos s + 2\sin s, -(s+1)\sin s + 2\cos s, 0) \quad (6.100)$$

elde edilir. Buradan

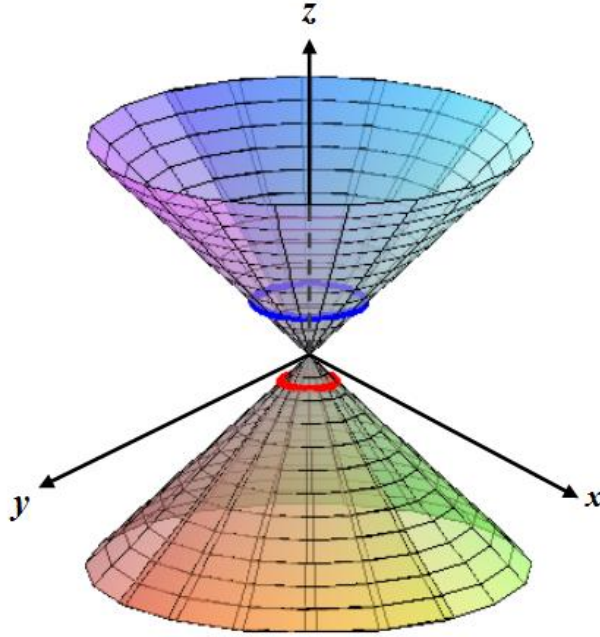
$$\langle \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}(s), \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) \rangle = -1 - 4\varepsilon \quad (6.101)$$

$$\langle \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s), \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) \rangle = 0$$

dır. (6.79), (6.80), (6.81) ve (6.82) eşitlikleri (4.8) eşitliğinde yerlerine yazılırsa, $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ eğrisinin dual bağlantı eğrisi olarak

$$\tilde{\mathbf{y}}(s) = \frac{1}{2}(\sin s, \cos s, -1) + \frac{\varepsilon}{2}(-(s+1)\cos s, (s+1)\sin s, 0)$$

bulunur.



Şekil 6.15 $\tilde{\mathbf{x}}(s) = (\sin s, \cos s, 1) + \varepsilon(-(s+1)\cos s, (s+1)\sin s, 0)$ denklemleriyle verilen dual konisel eğrinin reel gösterge eğrisi $\mathbf{x}(s) = (\sin s, \cos s, 1)$ (---) ve bu eğrinin dual bağlantı eğrisi

$\mathbf{y}(s) = \frac{1}{2}(\sin s, \cos s, -1)$ (---). Böylece $\{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\alpha}, \tilde{\mathbf{y}}\}$ dual asimptotik ortonormal çatısı elde edilir.

$\tilde{\mathbf{x}}(s)$ dual spacelike eğrisinin dual koni Frenet türev formülleri

$$\tilde{\mathbf{x}}'(s) = (\cos s, -\sin s, 0) + \varepsilon((s+1)\sin s - \cos s, (s+1)\cos s + \sin s, 0)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}'(s) &= (-\sin s, -\cos s, 0) + \varepsilon (\sin s + (s+1)\cos s, \cos s - (s+1)\sin s) \\ \tilde{\gamma}'(s) &= \frac{1}{2}(\cos s, -\sin s, 0) + \frac{\varepsilon}{2}((s+1)\sin s - \cos s, (s+1)\cos s + \sin s, 0)\end{aligned}$$

dır. $\bar{\kappa}_1(s)$ koni eğrilik fonksiyonu (4.15) denkleminde

$$\bar{\kappa}_1(s) = -\frac{1}{2} + \varepsilon \frac{1}{2}$$

olarak bulunur. Bu durumda $\tilde{x}(s)$ in dual koni Frenet formülleri matris formunda aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}'(s) \\ \tilde{\alpha}'(s) \\ \tilde{\gamma}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1-\varepsilon & 0 \\ -\frac{1}{2} + \varepsilon \frac{1}{2} & 0 & -(1-\varepsilon) \\ 0 & -\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon \frac{1}{2}\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(s) \\ \tilde{\alpha}(s) \\ \tilde{\gamma}(s) \end{bmatrix}.$$

Ani dönme vektörü

$$\tilde{w}(s) = (0, 0, -1) + \varepsilon \left(\frac{1}{2} \sin s, \frac{1}{2} \cos s, \frac{1}{2} \right)$$

olarak bulunur.

$\tilde{x}(s)$ dual spacelike eğrisinin dual yay uzunluğu,

$$\bar{s} = \int_0^s \|\tilde{x}'\| d\sigma = \int_0^s (1 + \varepsilon) d\sigma = (1 + \varepsilon)s \quad (6.102)$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = (1 + \varepsilon)s$$

dır. $\tilde{x}$ eğrisinin dual yay parametresine göre dual koni Frenet türev formülleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{\alpha}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}.$$

$\bar{\kappa}(\bar{s})$ koni eğrilik fonksiyonu (5.30) denkleminde

$$\bar{\kappa}(\bar{s}) = -\frac{1}{2}$$

dir.

Referanslar

- [1] Abdel-All, N. H., Abdel-Baky, R. A., Hamdoon, F. M., "Ruled surfaces with timelike rulings", App. Math. and Comp., 147, pp. 241-256, (2004).
- [2] Birman, G. S., Nomizu, K., "*Trigonometry in Lorentzian Geometry*", Ann. Math. Month., 91, 543-549, (1984)
- [3] Blaschke, W., "*Differential Geometrie and Geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie* Dover", New York, (1945).
- [4] Clifford, W.K., "*Preliminary sketch of bi-quaternions*", Proceedings of London Mathematical Society, 4, nos.64, 65, 361-395, 1873.
- [5] Dimentberg, F. M., "*The Screw Calculus and its Applications in Mechanics*", (Izdat. Nauka, Moscow, USSR, 1965) English translation: AD680993, Clearinghouse for Federal and Scientific Technical Information.
- [6] DoCarmo, M.P., "*Differential Geometry of Curves and Surfaces*", Prentice-Hall, New jersey, (1976)
- [7] Ferrández, A., Giménez, A., Lucas, P., "*Null helices in Lorentzian space forms*", International Journal of Modern Physics A 16 (2001), 4845–4863
- [8] Hacısalıhoğlu. H. H., "*Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*", Gazi Üniversitesi Fen-Edb. Fakültesi, (1983).
- [9] Kazaz, M., Özdemir, A., Uğurlu, H. H., "*Elliptic motion on dual hyperbolic unit sphere, Mechanism and Machine Theory*", 44, 1450-1459, (2009).
- [10] Kılıç, E., Karadağ, H.B., Karadağ, M., "*Special Null Curves On the Ruled Surfaces in Minkowski 3-Space*", Indian Journal of Mathematics Special Memorial Volume, 51(2009) 49-61.
- [11] Kotelnikow, A.P., "*Screw Calculus and Some Applications to Geometry and Mechanics*", Anals of the Imperial of Kazan
- [12] Liu, H., "*Curves in the lightlike cone*". Contrib. Algebr. Geom. 45, 291–303 (2004)

- [13] Liu, H., “*Ruled surfaces with lightlike ruling in 3-Minkowski space*”. J. Geom. Phys. 59, 74–78 (2009)
- [14] Liu, H., “*Characterizations of ruled surfaces with lightlike ruling in Minkowski 3-space*”, Result. Math. 56, 357–368 (2009)
- [15] Liu, H., Yang Y., “*Pitch functions of ruled surfaces and B-scrolls in Minkowski 3-space*”, J. Geom. Phys. 62; 47-52 (2012).
- [16] Liu, H., “*Representation Formulas of Curves in a Two- and Three-Dimensional Lightlike Cone*”, Results. Math. 59, 437–451 (2011)
- [17] Lopez, R., “*Differential Geometry of Curves and Surfaces in Minkowski 3-space*” , Mini-Course taught at the IME-USP, Brazil, 2008.
- [18] O'Neill, B., “*Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*”, Academic Press, London, (1983).
- [19] Ratchlife, J. G., Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer, New York, (2006).
- [20] Schaaf, J. A., “*Curvature theory of line trajectories in spatial kinematics*”, Doctoral dissertation, University of California, Davis, 11pp., (1988)
- [21] STUDY, E., “*Geometrie der Dynamen Leipzig*”, Verlag Teubner, 603 p.,(1903).
- [22] Turgut, A., “*3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler*”, A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, (1995).
- [23] Uğurlu H. H., Önder M., “*On Frenet Frames and Frenet Invariants of Skew Spacelike Ruled Surfaces in Minkowski 3-space*”, VII. Geometry Symposium, Kırşehir, Turkey, 7-10 July [2009]
- [24] Uğurlu, H., H., Çalışkan, A., “*Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi*”, Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, Manisa, (2012).
- [25] Uğurlu, H., H., Çalışkan, A., “*Öklid ve Lorentz Uzaylarında Doğrular Geometrisi* ”, Ders Notları”, Basım aşamasında.

- [26] Uğurlu, H., H., Çalışkan, A., “ *The Study Mapping for Directed Spacelike and Timelike Lines in Minkowski 3-space*”, Mathematical and Computational Applications, 142-148, (1996]
- [27] Veldkamp, G.R., “*On the use of dual numbers, vectors and matrices in instantaneous spatial kinematics*”, Mechanism and Machine Theory, II (1976) 141-156.
- [28] Yaylı, Y., Çalışkan, A., Uğurlu, H.H., “*The E. Study Maps of Circle on Dual Hyperbolic and Lorentzian Unit Spheres $\tilde{H}_0^2$ and $\tilde{S}_1^2$* ”, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy, 102A (1) (2002) 37–47.
- [29] Yang, A. T., “*Application of Quaternion Algebra and Numbers to the Analysis of Spatial Mechanisms*”, Doctoral dissertation Columbia University, (1963).

ÖZGEÇMİŞ

ADI SOYADI : Pınar BALKI OKULLU
UNVANI : Araştırma Görevlisi
DOĞUM TARİHİ : 30.10.1986
DOĞUM YERİ : İZMİR

Lise öğrenimini 2003 yılında İzmir Özel Türk Koleji'nde tamamlayan Pınar BALKI OKULLU, 2004 yılında başladığı Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nün Teorik Matematik Ağırlıklı lisans öğretim programından 2008 yılında mezun oldu 2010 yılında Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda yüksek lisansını tamamladı. Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda, 2011 yılında doktora öğrenimine başladı. 2011 yılından bu yana Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.