



SİNOP ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FERİDE CEYLAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DUAL SONLU δ_{ss} -TÜMLENİMİŞ MODÜLLER

DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ ESRA ÖZTÜRK SÖZEN

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



DUAL SONLU δ_{ss} -TÜMLENİMİŞ MODÜLLER

FERİDE CEYLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

DR. ÖĞR. ÜYESİ ESRA ÖZTÜRK SÖZEN

SİNOP - 2023

TEZ KABUL

Feride CEYLAN tarafından hazırlanan “**DUAL SONLU δ_{ss} –TÜMLENMIŞ MODÜLLER** ” başlıklı bu çalışma, **15.02.2023** tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

Başkan Prof. Dr. Şenol EREN
Ondokuz Mayıs Üniversitesi / Fen – Edebiyat Fakültesi

Üye Dr. Öğr. Üyesi Esra ÖZTÜRK SÖZEN
(Danışman) Sinop Üniversitesi / Fen – Edebiyat Fakültesi

Üye Dr. Öğr. Üyesi Melek YAĞCI
Sinop Üniversitesi / Fen – Edebiyat Fakültesi

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Fadime DİRİK

.....

ETİK BEYANI

Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Feride CEYLAN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DUAL SONLU δ_{ss} -TÜMLENİMİŞ MODÜLLER

FERİDE CEYLAN

SİNOP ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: DR. ÖĞR. ÜYESİ ESRA ÖZTÜRK SÖZEN

Bu çalışmanın birinci kısmında δ_{ss} -tümlenmiş modüllerin bir genelleştirmesi olarak dual sonlu δ_{ss} -tümlenmiş modüller tanımlandı. Bir M modülünün dual sonlu δ_{ss} -tümlenmişliğinin bölüm modülleri, direkt toplam terimleri ve M -üretilmiş modüller altında korunduğu gösterildi. Herhangi sayıda dual sonlu δ_{ss} -tümlenmiş modülün keyfi direkt toplamının da dual sonlu δ_{ss} -tümlenmiş olduğu gösterildi. Bir modülün dual sonlu δ_{ss} -tümlenmiş olmasına eşdeğer koşul olarak her maksimal alt modülünün δ_{ss} -tümlenmeye sahip olması elde edildi. Çalışmanın ikinci kısmında bol dual sonlu δ_{ss} -tümlenmiş modüller tanımlanarak birinci kısma paralel olacak şekilde temel cebirsel özellikler irdelenmiştir. Son olarak da bol dual sonlu ss -tümlenmiş modüller ile bol dual sonlu δ -tümlenmiş modüller arasında bir ara yapının teşkil edildiği bu tezde kapsamaların öz olduğunu somutlayan örneklerle yer verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Dual sonlu δ_{ss} -tümlenmiş modül, bol dual sonlu δ_{ss} -tümlenmiş modül, δ_{ss} -mükemmel halka.

Şubat 2023, 40 Sayfa

ABSTRACT

MSC THESIS

COFINITELY δ_{ss} -SUPPLEMENTED MODULES

FERİDE CEYLAN

SINOP UNIVERSITY INSTITUTE OF GRADUATE PROGRAMS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: ASST. PROF. DR. ESRA ÖZTÜRK SÖZEN

In the first part of this study cofinitely δ_{ss} –supplemented modules are introduced as a generalization of δ_{ss} – supplemented modules. It is shown that the case of being cofinitely δ_{ss} –supplemented for a module M is preserved under factor modules, direct summands and M –generated modules. An arbitrary sum of cofinitely δ_{ss} –supplemented modules is also cofinitely δ_{ss} –supplemented. A module is cofinitely δ_{ss} –supplemented if and only if each maximal submodule has a δ_{ss} –supplement. In the second part of the study amply cofinitely δ_{ss} –supplemented modules are defined and basic algebraic properties are investigated similar to first part. At the end some examples are given showing that mentioned module inclusions are proper.

KEYWORDS: Cofinitely δ_{ss} –supplemented module, amply cofinitely δ_{ss} –supplemented module, δ_{ss} –perfect ring.

February 2023, 40 Page

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenen, çalışmalarım boyunca her türlü yardım ve desteğini esirgemeyen saygı değer hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Esra ÖZTÜRK SÖZEN'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca derslerini aldığım Sinop Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm öğretim üyelerine saygılarımı arz ederim.

Çalışmam boyunca her türlü maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen başta eşim Dr. Tahir CEYLAN olmak üzere aileme minnet ve şükranlarımı sunarım.



Feride CEYLAN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ETİK BEYANI.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER.....	2
2.1. Halkalar	2
2.2. Modüller.....	2
2.3. Modül Homomorfizmaları ve İzomorfizma Teoremleri	4
2.4. Direkt Çarpımlar ve Direkt Toplamlar	6
2.5. Yarı Basit Modüller.....	8
2.6. δ –Küçük Alt Modüller.....	9
3. MATERYAL METOD	11
3.1. Tümlenmiş Modüller.....	11
3.2. δ –Tümlenmiş Modüller	11
3.3. ss –Tümlenmiş Modüller	12
3.4. δ_{ss} –Tümlenmiş Modüller.....	13
4. BULGULAR.....	15
4.1. Dual Sonlu δ_{ss} –Tümlenmiş Modüller.....	15
4.2. Bol Dual Sonlu δ_{ss} –Tümlenmiş Modüller	20
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	27
KAYNAKLAR	28
ÖZGEÇMİŞ	30

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

R	: Birimli halka
1_R	: Birimli R halkasının birimi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar halkası
$\mathbb{Q}$	: Tamsayılar halkasının kesirler cismi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\emptyset$	: Boş küme
$\subseteq$	: Alt küme
$\leq$	: Alt modül
$\leqslant$	: Öz alt modül
$Rx = \langle x \rangle$	: Bir M modülünde x elemanı tarafından üretilen devirli alt modül
$\bigoplus_{i \in I} M_i$	: Bir M modülünün $\{M_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin iç direkt toplamı
$\bigoplus_{i \in I}^t M_i$	: Bir M modülünün $\{M_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin dış direkt toplamı
$\prod_{i \in I} M_i$	: $\{M_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin dış direkt çarpımı
$Gör(f)$	: f homomorfizmasının görüntü kümesi
$Çek(f)$	: f homomorfizmasının çekirdeği
$A \cong C$	: A ile C modülleri izomorftur.
i	: İçerme monomorfizması
π	: Doğal homomorfizma
I_M	: M modülünün birim homomorfizması
M/N	: M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü

$M^{(I)}$	: M modülünün I indis kümesine göre kopyalarının direkt toplamı
$Ann(M)$	: M modülünün sıfırlayanı
$Soc(M)$	: M modülünün tüm basit alt modüllerinin toplamı
$Soc_s(M)$	: M modülünün tüm küçük ve basit alt modüllerinin toplamı
$Soc_\delta(M)$	: M modülünün tüm δ -küçük ve basit alt modüllerinin toplamı
$\ll$	: Küçük alt modül
$\leq$	: Büyük alt modül
$\ll_\delta$	: δ –küçük alt modül
$Rad(M)$	: M modülünün radikali
$\delta(M)$	: M modülünün δ –radikali
${}_Z\mathbb{Z}$	: $\mathbb{Z}$ sol $\mathbb{Z}$ modülü
${}_Z\mathbb{Q}$	: $\mathbb{Q}$ sol $\mathbb{Z}$ modülü

1. GİRİŞ

R bir halka ve $(M, +)$ bir Abel grup olsun. $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere, rm şeklinde tanımlı Modül Teori Hilbert (1890) tarafından ortaya konmuştur. Bilinen en temel cebirsel yapılar olan grup, halka ve cisim kavramları göz önüne alındığında, her abel grup bir modül, her halka kendi üzerine bir modül, her cisim kendisi üzerine bir vektör uzayı ve her vektör uzayı bir modül yapısı teşkil ettiğinden Modül Teori oldukça geniş araştırma ve uygulama alanına sahiptir. Bir vektör uzayının her alt uzayı bir direkt toplam terimi iken bu durumun modül üzerine genellenemeyeceği açıktır. Buradan yola çıkarak bir modülün alt modüllerinin direkt toplam terimi şeklinde yazılması veya alt modüllerinin tümleyene sahip olması temel araştırma problemlerinden biri olmuştur.

Tümlemiş modüllerin karakterizasyonunda önemli rol oynayan küçük alt modül kavramı Zhou (2000) tarafından geliştirilerek δ -küçük alt modül kavramı verilmiştir. Bundan hareketle Koşan (2007) tarafından δ -tümlemiş ve δ -lifting modüller çalışılmıştır. Böylece bilinen tümleyen kavramından daha genel olan δ -tümleyen kavramına geçilmiştir. Koşan (2007) aynı çalışmasında bu tanımlarını Zhou (2000) nun δ -mükemmel ve δ -yarı mükemmel halkalarıyla ilişkilendirerek çeşitli karakterizasyonlar elde etmiştir.

Kaynar vd., (2020) ss -tümlemiş modülleri yarı basit modüllerin uygun bir genellemesi olarak tanımlamıştır. Eğer M nin her alt U modülü $U \cap V$ yarı basit olacak şekilde M modülünde bir V tümleyenine sahip ise M modülü ss -tümlemiş olarak adlandırılır. Aynı zamanda güçlü lokal modüllerin uygun bir genellemesi olarak bol ss -tümlemiş modüller tanımlanmış ve karakterizasyonları yapılmıştır.

Daha sonra Nişancı Türkmen ve Türkmen (2020) δ_{ss} -tümlemiş modüller ve halkalar üzerine çalışmış ve bu modüllere ait çeşitli özellikler elde etmiştir.

Nişancı Türkmen ve Kılıç (2022) (bol) dual sonlu ss -tümlemiş modül kavramını tanıtmışlar ve bu modülün özelliklerini (bol) ss -tümlemiş modüllerin uygun bir genellemesi olarak çalışmışlardır.

Bu tez çalışmasında dual sonlu δ_{ss} -tümlemiş ve bol dual sonlu δ_{ss} -tümlemiş modüllerin tanımları ve bu modüllerin özellikleri çalışılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, üzerinde çalışılan konu ile ilgili temel kavramlara yer verilecektir.

2.1. Halkalar

Tanım 2.1.1: Aşağıdaki koşullar sağlandığı takdirde $(R, +, \cdot)$ üçlüsüne halka adı verilir.

- (i) $(R, +)$ abel gruptur.
- (ii) Her $x, y, z \in R$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ dir.
- (iii) Her $x, y, z \in R$ için $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ve $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ dir (Hungerford, 1973).

Bu tez çalışmasında R ile $(R, +, \cdot)$ halkası kastedilecektir.

Tanım 2.1.2: R bir halka olsun. Her $x, y \in R$ elemanı $x \cdot y = y \cdot x$ şartını gerçekliyorsaa halkaya değişmeli halka, her $x \in R$ elemanı için $1_R \cdot x = x \cdot 1_R = x$ koşulunu gerçekleyen $1_R \in R$ mevcut ise halkaya birimli halka adı verilir (Hungerford, 1973).

Bu çalışmada birimli halka üzerinde çalışılacaktır.

Tanım 2.1.3: R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. I, R halkasının bir alt grubu ve her $a, b \in I$ keyfi elemanları için $a \cdot b \in I$ ise, I alt grubuna R halkasının bir alt halkası ve her $r \in R$, her $a \in I$ için $r \cdot a \in I$ ($a \cdot r \in I$) ise I alt halkasına R halkasının sol (sağ) ideali denir. I, R halkasının hem sol hem de sağ ideali ise, I alt halkasına R halkasının bir ideali denir (Hungerford, 1973).

2.2. Modüller

Tanım 2.2.1: R bir halka ve $(M, +)$ bir abel grup olsun. $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere, rm ile tanımlı $\bullet: R \times M \rightarrow M$ fonksiyonu $r, s \in R$ ve $m, n \in M$ keyfi elemanları için

- (i) $r(m + n) = rm + rn$
- (ii) $(r + s)m = rm + sm$
- (iii) $(rs)m = r(sm)$

koşullarını gerçekliyorsaa M abel grubuna " $\bullet$ " dış işlemine göre bir sol R –modül denir. R birimli olmak üzere eğer her $m \in M$ için $1_R m = m$ oluyorsa M sol R –modülüne üniter sol R –modül denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.2.2: M bir modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun. N, M modülünün bir alt grubu olmak üzere $r \in R$ ve $n \in N$ keyfi elemanlar için $rn \in N$ oluyorsa N ye M modülünün alt modülü denir ve $N \leq M$ ile gösterilir. $\{0\}$ ve M modülünün kendisi M nin alt modülleridir. Bu alt modüllere M modülünün aşikar alt modülleri denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.2.3: M modülünün kendisinden farklı bir alt modülü N olsun. Bu durumda N alt modülüne M modülünün bir öz alt modülü denir ve $N \leq M$ şeklinde gösterilir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.2.4: R bir halka, M bir R –modül ve $A \subseteq M$ alt küme olsun. Bu taktirde

$$\{r \in R \mid rm = 0, \forall m \in A\}$$

kümesi R halkasının sol idealidir. Bu sol ideale A kümesinin sıfırlayıcısı denir ve $Ann(A)$ şeklinde gösterilir. Eğer A, M nin bir alt modülü ise $Ann(A), R$ halkasının bir idealidir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Tanım 2.2.5: Aşikar alt modüllerinden başka alt modülü bulunmayan sıfırdan farklı bir M modülüne basit modül denir (Kasch, 1982).

Önerme 2.2.6: M bir basit modül olsun. $\{0\}$ alt modülü M nin maksimal alt modülüdür. Her $0 \neq a \in M$ elemanı için $Ra = M$ olup M devirlidir (Kasch, 1982).

Lemma 2.2.7: (Zorn Lemması) Kısmi sıralı bir A kümesinin her zinciri bir üst sınıra sahip ise, A bir maksimal elemana sahiptir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Teorem 2.2.8: Bir M modülünün herhangi sayıda alt modüllerinin arakesiti M nin bir alt modülüdür (Hungerford, 1973).

Tanım 2.2.9: M bir modül ve $X \subseteq M$ olsun. M modülünün X kümesini kapsayan tüm alt modüllerinin kesişimine M modülünün X tarafından üretilen alt modülü denir ve $\langle X \rangle$ şeklinde gösterilir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.2.10: M bir modül olsun. M modülünün üreteç kümesi $A = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ şeklinde sonlu elemanlı ise, M modülüne sonlu üretilmiş modül denir ve $M = \langle m_1, m_2, \dots, m_n \rangle = Rm_1 + Rm_2 + \dots + Rm_n$ şeklinde gösterilir. M modülünün üreteç kümesi $A = \{m\}$ tek elemanlı ise M modülüne devirli modül denir ve $M = Rm = \langle m \rangle$ ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Önerme 2.2.11: M bir modül ve H, K, N da M modülünün alt modülleri olmak üzere $H \leq N$ olsun. Bu taktirde $(H + K) \cap N = H + (K \cap N)$ dir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Tanım 2.2.12: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. M / N bölüm grubu, $r \in R$ ve $m + N \in M / N$ keyfi elemanlar olmak üzere, $r(m + N) = rm + N$ ile tanımlı ikili işlemine göre bir sol R –modüldür. Bu modül M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü olarak adlandırılır.(Hungerford, 1973).

Tanım 2.2.13: M bir modül ve $U \leq M$ olsun. $\frac{M}{U}$ bölüm sonlu üretilmiş ise $U \leq M$ alt modülüne dual sonlu alt modül denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.2.14: M modül ve $K \leq M$ öz alt modül olsun. $K + L = M$ koşulunu sağlayan M nin bir L öz alt modülü yoksa K ya M nin bir küçük alt modülü denir ve $K \ll M$ şeklinde gösterilir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.2.15: Herhangi bir M modülü için

$$\sum_{A \ll M} A = Rad(M)$$

dir (Kasch, 1982).

Tanım 2.2.16: M modül ve K, M nin bir alt modülü olsun. K modülünün M nin sıfırdan farklı her alt modülü ile arakesiti sıfırdan farklı ise, K ya M modülünün büyük alt modülü denir ve $K \trianglelefteq M$ şeklinde gösterilir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.2.17: M bir sol R –modül olsun.

$Z(M) = \{m \in M : Ann(m) \trianglelefteq {}_R R\}$ alt modülüne M nin singüler alt modülü adı verilir. Eğer $Z(M) = M$ ise M ye singüler, $Z(M) = 0$ ise M ye singüler olmayan modül adı verilir (Goodearl, 1976).

2.3. Modül Homomorfizmaları ve İzomorfizma Teoremleri

Tanım 2.3.1: M ve N birer modül ve $f: M \rightarrow N$ bir fonksiyon olsun. $\forall x_1, x_2 \in M$ ve $\forall r \in R$ için $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ ve $f(rx_1) = rf(x_1)$ koşulları sağlanıyorsa f fonksiyonuna R –modül homomorfizması veya kısaca homomorfizma denir (Hungerford, 1973).

Bir homomorfizma bire bir ise monomorfizma; örten ise epimorfizma; hem bire bir hem örten ise izomorfizma olur.

Tanım 2.3.2: M bir modül ve $f: M \rightarrow M$ bir homomorfizma olsun. Bu taktirde f homomorfizmasına M modülünün endomorfizması denir ve tüm endomorfizmaların kümesi $\text{End}(M)$ şeklinde gösterilir (Hungerford, 1973).

Teorem 2.3.3: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Her $a \in M$ için $\Pi(a) = a + N$ ile tanımlı $\Pi: M \rightarrow M / N$ dönüşümü epimorfizmadır. Bu Π epimorfizması doğal homomorfizma olarak adlandırılır (Hungerford, 1973).

Teorem 2.3.4: M ve N birer modül olmak üzere, $f: M \rightarrow N$ homomorfizması verilsin. Bu takdirde,

- (i) $C \leq M$ ise, $f(C) \leq N$ dir.
- (ii) $U \leq N$ ise, $f^{-1}(U) \leq M$ dir.

Özel olarak $U = \{0\} \leq N$ alınırsa $f^{-1}(\{0\}) = \{a \in M \mid f(a) = 0\}$ alt modüldür. Bu $f^{-1}(\{0\}) \leq M$ alt modülüne f 'nin çekirdeği denir. $\text{Çek}(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{a \in M \mid f(a) = 0\}$ şeklinde gösterilir. $\Pi: M \rightarrow M / N$ doğal homomorfizması için $\text{Çek}(\Pi) = N$ olduğu açıktır.

- (iii) $C \leq M$ ise, $f^{-1}(f(C)) = C + \text{Çek}(f)$ dir.
- (iv) $C \leq M$ ve $U \leq N$ ise, $f^{-1}(f(C) + U) = C + f^{-1}(U)$ ve $f(f^{-1}(U) \cap C) = U \cap f(C)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.3.5: M ve N birer modül ve $f: M \rightarrow N$ homomorfizma olsun. $\Pi: M \rightarrow M / \text{Çek}(f)$ doğal homomorfizma olmak üzere; $f = g\Pi$ olacak şekilde bir tek $g: M / \text{Çek}(f) \rightarrow N$ monomorfizması vardır ve $M / \text{Çek}(f) \cong f(M)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.3.6: M bir modül ve $N, U \leq M$ olsun. Bu durumda, $(N + U) / U \cong N / (N \cap U)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.3.7: M bir modül ve $N \leq U \leq M$ olsun. Bu durumda, $M / U \cong (M / N) / (U / N)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.3.8: M bir modül ve $N < M$ olsun. M nin N alt modülünü kapsayan N den başka öz alt modülü yoksa, N ye M nin maksimal alt modülü denir (Kasch, 1982; Wisbauer, 1991).

Önerme 2.3.9: M bir R –modül ve $N < M$ öz alt modül olsun. N nin M modülünün maksimal alt modül olması için gerekli ve yeterli koşul her $a \in M - N$ için $N + Ra = M$ olmasıdır (Kasch, 1982).

Teorem 2.3.10: M bir modül olsun. M nin alt modülü olan N modülünün maksimal alt modül olması için gerek ve yeter koşul M/N nin basit modül olmasıdır (Wisbauer, 1991).

Lemma 2.3.11: M sonlu üretilmiş bir modül ve θ de M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Her $A \in \theta$ için $M \neq N + A$ olacak şekilde M nin bir N alt modülünün olduğu kabul edilsin. O halde U

$$\Omega = \{L \leq M \mid N \subseteq L \text{ ve her } A \in \theta \text{ için } M \neq L + A\}$$

alt modüllerinin kümesinde maksimal olacak şekilde M nin bir U alt modülü vardır (Tribak, 2013).

Tanım 2.3.12: M bir modül olsun. Eğer M modülünün tüm öz alt modüllerinin toplamı yine M nin bir öz alt modülü ise, M modülüne lokal modül denir (Wisbauer, 1991)

Tanım 2.3.13: R bir halka ve M bir modül olmak üzere M modülünün tüm maksimal alt modüllerinin kesişimi M nin radikali olarak adlandırılır ve $Rad(M)$ şeklinde gösterilir. Eğer M nin maksimal alt modülü yoksa $Rad(M) = M$ şeklinde tanımlanır. Bu taktirde M modülüne radikal modül denir (Kash, 1982; Wisbauar ,1991).

Tanım 2.3.14: R herhangi bir halka olmak üzere sıfırdan farklı her sol R –modül maksimal alt modüle sahip ise R ye sol maksimal halka denir (Faith, 1995).

2.4. Direkt Çarpımlar ve Direkt Toplamlar

Tanım 2.4.1: M bir modül ve $\{M_i\}_{i \in I}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $M = \sum_{i \in I} M_i$ ve her $v \in I$ için $M_v \cap (\sum_{i \neq v} M_i) = 0$ ise, M ye bu alt modüller ailesinin iç direkt toplamı denir ve her bir M_i alt modülüne de M nin direkt toplam terimi denir ve $\oplus_{i \in I} M_i$ ile gösterilir. Özel olarak $I = \{1,2\}$ ise, $M = M_1 \oplus M_2$ olması için gerekli ve yeterli koşul $M = M_1 + M_2$ ve $M_1 \cap M_2 = 0$ olmasıdır (Hungerford, 1973).

Eğer M modülünün $\{0\}$ ve kendisinden başka direkt toplam terimi bulunmuyorsa M modülüne parçalanamaz modül denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Tanım 2.4.2: R bir halka ve $I \neq \emptyset$ indis kümesi olmak üzere, $\{M_i\}_{i \in I}$, R –modüllerin bir ailesi olsun. $\{\alpha \mid \alpha: I \rightarrow \cup_{i \in I} M_i, \forall i \in I \text{ için } \alpha(i) \in M_i\}$ dönüşümlerin kümesine $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesinin çarpımı denir ve bu küme $\prod_{i \in I} M_i$ şeklinde gösterilir. Her $i \in I$ için $\alpha(i) = \alpha_i$ ve $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$ ile gösterilirse α_i ye α dönüşümünün i . bileşeni denir. Eğer I sayılabilir ise, $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots)$ şeklindedir. $\alpha, \beta \in \prod_{i \in I} M_i$ olmak üzere

- (i) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \text{her } i \in I \text{ için } \alpha_i = \beta_i,$
- (ii) $\alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i \in I},$
- (iii) $-\alpha = (-\alpha_i)_{i \in I},$
- (iv) $r \in R \text{ olmak üzere } r\alpha = (r\alpha_i)_{i \in I}$

ile tanımlı cebirsel işlemlerine göre $\prod_{i \in I} M_i$ bir sol R –modül yapısına sahiptir. Bu modüle $\{M_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin dış direkt çarpımı denir.

$\bigoplus_{i \in I}^t M_i = \{(\alpha_i)_{i \in I} \mid \text{sonlu sayıda } i \in I \text{ için } \alpha_i \neq 0\}$ kümesi $\prod_{i \in I} M_i$ modülünün bir alt modülüdür. $\bigoplus_{i \in I}^t M_i$ alt modülüne $\{M_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin dış direkt toplamı denir. I indis kümesi sonlu ise, $\prod_{i \in I} M_i = \bigoplus_{i \in I}^t M_i$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.4.3: M bir modül olsun. $I \neq \emptyset$ indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $M_i = M$ alınırsa, $\bigoplus_{i \in I}^t M_i$ dış direkt toplamına M nin kopyalarının toplamı denir ve $M^{(I)}$ ile ifade edilir (Kasch, 1982).

Tanım 2.4.4: M ve N birer modül ve $I \neq \emptyset$ bir indis kümesi olsun. Eğer $f: M^{(I)} \rightarrow N$ epimorfizması mevcut ise, N ye M –üretilmiş modül denir. Eğer I indis kümesi sonlu elemanlı ise, N ye sonlu M –üretilmiş modül denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.4.5: Dış direkt toplam tanımından eğer $M = R$ halkası alınırsa $F = R^{(I)}$ modülü oluşur ve bu modüle serbest modül adı verilir (Kasch, 1982).

Tanım 2.4.6: Her modül bir serbest modülün homomorfik görüntüsüdür (Sharpe ve Vamos, 1972).

Teorem 2.4.7:

- (i) M ve N birer modül olsun. Her $g: M \rightarrow K$ epimorfizması ve her $f: N \rightarrow K$ homomorfizması için aşağıdaki diyagram değişmeli ise, N ye M –projektiftir denir.

$$\begin{array}{ccccc} & & N & & \\ & h \swarrow & & \searrow f & \\ M & \xrightarrow[g]{} & K & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Yani yukarıdaki diagramda g epimorfizma ve her f, g homomorfizmaları için N $f = gh$ olacak şekilde bir $h: N \rightarrow M$ homomorfizması varsa N modülüne M –projektiftir denir.

- (ii) N bir modül olsun. Her $g: M \rightarrow K$ epimorfizması ve her $f: N \rightarrow K$ homomorfizması için aşağıdaki diyagram değişmeli ise, N ye projektiftir denir.

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ h \swarrow & \downarrow f & \\ M & \xrightarrow[g]{} & K \rightarrow 0 \end{array}$$

Yani yukarıdaki diagramda g epimorfizma ve her f, g homomorfizmaları için N $f = gh$ olacak şekilde bir $h: N \rightarrow M$ homomorfizması varsa N modülüne projektiftir denir. N , N –projektif ise, N ye kendi kendine projektiftir denir (Wisbauer, 1991).

Önerme 2.4.8: Her serbest R –modül projektiftir (Kasch, 1982; Wisbauer, 1991).

Tanım 2.4.9: R bir halka ve M bir R –modül olsun. $M = U + V$ koşulunu gerçekleyen her U, V alt modülü için $Gör(f) \leq U$ ve $Gör(I_M - f)(M) \leq V$ olacak şekilde bir $f \in End(M)$ var ise, M modülüne π –projektif modül denir (Wisbauer, 1991).

2.5. Yarı Basit Modüller

Tanım 2.5.1: M bir modül olsun. M nin her alt modülü direkt toplam terimi ise, M modülüne yarı basit modül denir (Kasch, 1982).

Önerme 2.5.2: R bir halka olmak üzere, R nin sol R –modül olarak yarı basit olması için gerek ve yeter koşul R nin sağ R –modül olarak yarı basit olmasıdır (Kasch, 1982).

Sonuç 2.5.3: R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) R yarı basit halkadır.
- (ii) Her sol R –modül yarı basittir.
- (iii) Her sağ R –modül yarı basittir (Kasch, 1982).

Teorem 2.5.4: Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) M nin her alt modülü basit alt modüllerin toplamıdır.
- (ii) M basit alt modüllerin toplamıdır.
- (iii) M basit alt modüllerin direkt toplamıdır.
- (iv) M yarı basittir (Kasch, 1982).

Tanım 2.5.5: M bir modül olsun. M nin basit alt modüllerinin toplamına M nin desteği denir ve $Soc(M)$ şeklinde gösterilir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Teorem 2.5.6: Bir M modülü için $\cap_{(N \triangle M)} N = Soc(M)$ dır (Kasch, 1982).

Sonuç 2.5.7: Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) M modülünün her N alt modülü için $N = Soc(N)$ dır.
- (ii) $M = Soc(M)$ dır.
- (iii) M basit alt modüllerin direkt toplamıdır.
- (iv) M yarı basittir (Kasch, 1982).

Sonuç 2.5.8:

- (i) Yarı basit modüllerin her alt modülü de yarı basittir.
- (ii) Yarı basit bir modülün homomorfik görüntüsü de yarı basit modüldür.
- (iii) Yarı basit modüllerin herhangi sayıdaki toplamı da yarı basittir (Kasch, 1982).

2.6. δ –Küçük Alt Modüller

Tanım 2.6.1: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer M nin M/X singüler olacak şekilde her X alt modülü için $N + X = M$ olması $X = M$ olmasını gerektiriyorsa N ye M modülünde δ –küçük alt modül denir ve $N \ll_{\delta} M$ ile gösterilir (Zhou, 2000).

Lemma 2.6.2: Bir M modülü için aşağıdakiler denktir:

- (i) $M \ll_{\delta} N$ dir.
- (ii) M nin her E genişlemesi için $M \ll_{\delta} E$ dir.
- (iii) M projektif yarı basittir (Tribak, 2013).

Lemma 2.6.3: $N \leq M$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir:

- (i) $N \ll_{\delta} M$ dir.
- (ii) Bir $X \ll_{\delta} M$ için $N + X = M$ ise bu taktirde projektif yarı basit bir $Z \leq N$ alt modülü için $M = Z \oplus X$ dir (Zhou, 2000).

Lemma 2.6.4: M bir R –modül olsun.

- (i) $C \leq N$ olmak üzere M nin C, N ve U alt modülleri için
 - a) $N \ll_{\delta} M \Leftrightarrow C \ll_{\delta} M$ ve $N/C \ll_{\delta} M/C$ dir.
 - b) $N + U \ll_{\delta} M \Leftrightarrow N \ll_{\delta} M$ ve $U \ll_{\delta} M$ dir.
- (ii) $C \ll_{\delta} M$ ve $f: M \rightarrow N$ bir homomorfizma ise $f(C) \ll_{\delta} N$ dir. Özel olarak, $C \ll_{\delta} M \subseteq N$ ise $C \ll_{\delta} N$.

- (iii) $C_1 \leq M_1 \leq M, C_2 \leq M_2 \leq M$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. $C_1 \oplus C_2 \ll_\delta M \Leftrightarrow C_1 \ll_\delta M_1$ ve $C_2 \ll_\delta M_2$ dir.
- (iv) $C \leq N \leq M$ ve N, M nin direkt toplam terimi olsun. $C \ll_\delta M$ ise $C \ll_\delta N$ (Zhou, 2000; Al-Takhman, 2007).

Tanım 2.6.5: φ tüm singüler basit modüllerin bir ailesi olmak üzere bir M modülü için $\delta(M) = \cap \{N \leq M \mid M/N \in \varphi\}$ şeklinde tanımlanır (Zhou, 2000).

Lemma 2.6.6: M ve N modülleri verilsin.

- (i) $\delta(M) = \sum \{C \leq M \mid C \ll_\delta M\}$ dir.
- (ii) M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Her $f: M \rightarrow M$ homomorfizması için $f(N) \leq N$ ise N 'ye tam değişmez alt modül denir (Wisbauer, 1991).
- (iii) $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise bu taktirde $\delta(M) = \bigoplus_{i \in I} \delta(M_i)$ dir.
- (iv) Eğer M modülünün her öz alt modülü M nin bir maksimal alt modülünde içeriliyorsa bu taktirde $\delta(M)$, M modülünün en büyük δ –küçük alt modülüdür (Zhou, 2000).

Not 2.6.7: M sonlu üretilmiş bir modül ise $\delta(M) \ll_\delta M$ dir (Nematollahi, 2009).

Tanım 2.6.8: M bir modül olsun. $\delta(M) \ll_\delta M$ ve $\delta(M)$, M nin maksimal alt modülü ise M modülüne δ –lokal modül denir (Tribak, 2012; Tribak, 2013).

Tanım 2.6.9: M bir modül, P bir projektif modül ve $f: P \rightarrow M$ homomorfizması $\text{Çek}(f) \ll_\delta P$ şartını gerçekleyen bir epimorfizma ise (P, f) ikilisine M nin projektif δ –örtüsü denir (Zhou, 2000).

Bir M modülünün her projektif örtüsü aynı zamanda projektif δ –örtüdür.

Tanım 2.6.10: R bir halka olsun. Her R –modül projektif δ –örtüye sahipse R ye δ –mükemmel halka denir. Eğer her basit R –modül projektif δ –örtüye sahipse R ye δ –yarı mükemmel halka denir (Zhou, 2000).

3. MATERYAL METOD

3.1. Tümlenmiş Modüller

Tümleyen alt modül kavramı Zöschinger (1974a) tarafından ilk kez direkt toplam terimlerinin bir genelleştirilmesi olarak tanımlanmıştır. Bir modülün her alt modülünün tümleyene sahip olması mümkün olmadığından, her alt modülü tümleyene sahip olan modülleri yani tümlenmiş modülleri çalışmak önemli bir çalışma alanı olmuştur.

Tanım 3.1.1: M bir modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ şeklinde bir $V \leq M$ var ve V bu şarta göre minimal ise, yani $M = U + L$ koşulunu gerçekleyen her $L \leq V$ için $L = V$ ise, V ye M de U nun tümleyeni ve U ya M de tümleyene sahiptir denir. Eğer $M = U + V$ koşulunu sağlayan her V alt modülü için M de U nun V tarafından kapsanan bir tümleyeni mevcutsa, U ya M de bol tümleyene sahiptir denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 3.1.2: M modül olsun. M modülünün her alt modülü tümleyene sahipse M ye tümlenmiş modül denir. M nin her alt modülü bol tümleyene sahip ise, M modülüne bol tümlenmiş modül denir. Her yarı basit modül tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

Tanım 3.1.3: M modülünün her dual sonlu alt modülü tümleyene sahip ise M ye dual sonlu tümlenmiş modül denir (Alizade vd., 2001).

Tanım 3.1.4: M modülünün her dual sonlu alt modülü bol tümleyene sahip ise, M modülüne bol dual sonlu tümlenmiş modül denir (Alizade vd., 2001).

3.2. δ –Tümlenmiş Modüller

Tanım 3.2.1: M bir sol R – modül ve $N, L \leq M$ olsun. Eğer $M = N + L$ ve $N \cap L \ll_{\delta} L$ ise L ye N nin M de bir δ – tümleyeni adı verilir. Eğer M modülünün her alt modülü M de bir δ –tümleyene sahip ise M ye δ – tümlenmiş modül adı verilir (Koşan, 2007).

Tanım 3.2.2: M bir modül olsun. Eğer M modülünün her alt modülü M de bol δ –tümleyene sahip ise M bol δ –tümlenmiş modül olarak adlandırılır (Tribak, 2012).

Tanım 3.2.3: M bir modül olsun. M modülünün dual sonlu her alt modülü M de bir δ –tümleyene sahip ise M modülüne dual sonlu δ –tümlenmiş modül denir (Al-Takhman, 2007).

$\text{Tümlenmiş} \Rightarrow \text{Dual Sonlu Tümlenmiş}$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$\delta - \text{Tümlenmiş} \Rightarrow \text{Dual Sonlu } \delta - \text{Tümlenmiş}$

Tanım 3.2.4: Eğer M nin her dual sonlu alt modülü M de bol δ –tümleyene sahipse M ye bol dual sonlu δ –tümlenmiş modül denir (Al-Takhman, 2007).

Teorem 3.2.5: Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

- i) R δ –yarı mükemmeldir.
- ii) Her sol R –modül bol dual sonlu δ –tümlenmiştir.
- iii) Her sol R –modül dual sonlu δ –tümlenmiştir.
- iv) Her projektif sol R –modül dual sonlu δ –tümlenmiştir.
- v) R nin her sol ideali ${}_R R$ de bir δ –tümleyene sahiptir (Al-Takhman, 2007).

3.3. ss –Tümlenmiş Modüller

Tanım 3.3.1: M bir modül olsun. Eğer M lokal ve $Rad(M)$ yarı basit ise M ye güçlü lokal modül adı verilir (Kaynar vd., 2020).

Tanım 3.3.2: M bir modül ve $U, V \leq M$ olsun. Eğer $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq Soc_S(V)$ ise V ye U nun M de ss –tümleyeni denir (Kaynar vd., 2020).

Tanım 3.3.3: M bir modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ koşulunu sağlayan her $V \leq M$ için U nun $V' \leq V$ olacak şekilde bir V' ss –tümleyeni varsa U , M de bol ss –tümleyene sahiptir denir (Kaynar vd., 2020).

Tanım 3.3.4: M bir modül olsun. Eğer M nin her alt modülü bol ss –tümleyene sahipse, M ye bol ss –tümlenmiş modül denir (Kaynar vd., 2020).

Tanım 3.3.5: M bir modül ve $\forall U \leq M$ dual sonlu alt modülü için $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yarı basit olacak şekilde M nin bir V alt modülü varsa M ye dual sonlu ss –tümlenmiş modül denir (Nişancı Türkmen ve Kılıç, 2022).

Tanım 3.3.6: M bir modül olsun. Eğer M nin her dual sonlu alt modülü M de bol ss –tümleyene sahip ise M ye bol dual sonlu ss –tümlenmiş modül denir (Nişancı Türkmen ve Kılıç, 2022).

3.4. δ_{ss} –Tümlenmiş Modüller

Tanım 3.4.1: Bir M modülü δ –lokal ve $\delta(M) \subseteq Soc(M)$ ise güçlü δ –lokaldır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020).

Tanım 3.4.2: M bir modül ve $\forall U \leq M$ için $M = U + V$, $U \cap V \leq Soc_\delta(V)$ olacak şekilde bir $V \leq M$ var ise V ye M de U nun δ_{ss} –tümleyeni denir. Burada $Soc_\delta(V) = Soc(V) \cap \delta(V)$ dir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020).

Önerme 3.4.3: M bir modül ve U da M nin bir maksimal alt modülü olsun. Eğer U, M modülünde bir V δ_{ss} –tümleyenine sahip ise V güçlü δ –lokal veya projektif yarı basittir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020).

Lemma 3.4.4: Her güçlü δ –lokal modül δ_{ss} –tümlenmiştir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020).

Lemma 3.4.5: M bir modül ve $U \leq M$ olsun. M nin bir M_1 alt modülü δ_{ss} –tümlenmiş olsun. Eğer $M_1 + U$, M modülünde δ_{ss} –tümleyene sahip ise U da M modülünde bir δ_{ss} –tümleyene sahiptir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020).

Tanım 3.4.6: M bir modül olsun. M modülünün her alt modülü bir maksimal alt modül tarafından içerilirse M modülüne eş-atomik modül denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020).

Önerme 3.4.7: M bir modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

- (i) M güçlü δ –lokal veya projektif yarı basit alt modüllerin toplamıdır.
- (ii) M eş-atomiktir ve M nin her dual sonlu alt modülü M de bir δ_{ss} –tümleyene sahiptir.
- (iii) M eş-atomiktir ve M nin her maksimal alt modülü M de bir δ_{ss} –tümleyene sahiptir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020).

Sonuç 3.4.8: M sonlu üretilmiş bir modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) Her M_i güçlü δ –lokal ve projektif yarı basit olmak üzere $M = \sum_{i=1}^n M_i$ dir.
- (ii) M modülü δ_{ss} –tümlenmiştir.
- (iii) M nin her maksimal alt modülü M de bir δ_{ss} –tümleyene sahiptir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020).

Teorem 3.4.9: Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) ${}_R R, \delta_{ss}$ –tümlenmiştir.
- (ii) R, δ –yarı mükemmel bir halkadır ve $\delta(R) = Soc({}_R R)$ dir.
- (iii) $R / Soc(R)$ yarı basittir ve idempotentler $Soc({}_R R)$ ’ye yükseltgenir.
- (iv) Her projektif sol R –modül δ_{ss} –tümlenmiştir.
- (v) Her sol R –modül (bol) δ_{ss} –tümlenmiştir.
- (vi) M sol R –modülünün her maksimal alt modülü δ_{ss} –tümleyene sahiptir.
- (vii) R nin her maksimal ideali R de bir δ_{ss} –tümleyene sahiptir. (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020).

Önerme 3.4.10: R bir sol δ_{ss} –mükemmel halka olsun. Bu durumda R bir sol maksimal halkadır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020).

4. BULGULAR

4.1. Dual Sonlu δ_{ss} –Tümlenmiş Modüller

Tanım 4.1.1: M bir modül ve $A \leq M$ herhangi bir dual sonlu alt modülü olsun. Eğer $A + B = M$ ve $A \cap B \leq Soc_\delta(B)$ olacak şekilde bir $B \leq M$ varsa M ye dual sonlu δ_{ss} – tümlenmiş modül denir. Burada $Soc_\delta(B) = Soc(B) \cap \delta(B)$ şeklindedir.

Açıkça, M dual sonlu ss –tümlenmiş modül olduğunda $\forall A \leq M$ dual sonlu alt modülü için $A + B = M$ ve $A \cap B \leq Soc_\delta(B)$ olacak şekilde bir $B \leq M$ vardır.

Her δ_{ss} –tümleyen bir δ –tümleyen olduğundan dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş modüllerin dual sonlu δ –tümlenmiş olduğu da açıktır. Böylece bir M modülü için aşağıdaki ilişkinin varlığı görülebilir.

dual sonlu ss –tümlenmiş $\Rightarrow$ dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş $\Rightarrow$ dual sonlu δ –tümlenmiş

Önerme 4.1.2: Bir dual sonlu δ_{ss} – tümlenmiş modülün bölüm modülünde dual sonlu δ_{ss} – tümlenmiştir.

İspat: M dual sonlu δ_{ss} – tümlenmiş modül ve $A \leq M$ olsun. $\frac{M}{A}$ nın herhangi $\frac{K}{A}$ dual sonlu alt modülü için $\frac{M}{K} \cong \frac{\frac{M}{A}}{\frac{K}{A}}$ nın sonlu üretilmiş olduğu söylenebilir. O halde $K \leq M$ dual sonludur. Hipotez ile $K + T = M$ ve $K \cap T \leq Soc_\delta(T)$ olacak şekilde M modülünün bir T alt modülü vardır. Böylece $\frac{M}{A} = \frac{K+T+A}{A}$ ve $\frac{K}{A} \cap \frac{T+A}{A} = \frac{K \cap (T+A)}{A} = \frac{A+(T \cap K)}{A} \ll_\delta \frac{T+A}{A}$ olduğu Lemma 2.6.4 den görülebilir.

Ayrıca Sonuç 2.5.8 den $K \cap T$ yarı basit modül olduğundan bölüm modülü olan $\frac{K \cap T}{A \cap T} \cong \frac{(K \cap T)+A}{A}$ yarı basittir. Böylece Modüler kuraldan, $A \leq K$ olduğundan $\frac{(K \cap T)+A}{A} \leq Soc_\delta \frac{(T+A)}{A}$ olur. O halde $\frac{T+A}{A}$, $\frac{M}{A}$ da $\frac{K}{A}$ nın δ_{ss} –tümleyenidir. Sonuç olarak $\frac{M}{A}$ dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir. ■

Sonuç 4.1.3: Bir dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş modülün herhangi homomorfik görüntüsü de dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş modüldür.

Sonuç 4.1.4: Bir dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş modülün herhangi direkt toplam terimi de dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş modüldür.

Lemma 4.1.5: M bir modül ve $X \ll_{\delta} M$ olacak şekilde A , $X \leq M$ olsun. Eğer $A + X$, M de B δ_{ss} –tümleyenine sahip ise bu takdirde, $B + P$, M de A nın δ_{ss} –tümleyeni olacak şekilde M nin projektif, yarı basit bir P direkt toplam terimi vardır.

İspat: Hipotez gereği $(A + X) + B = M$, $(A + X) \cap B \leq Soc_{\delta}(B)$ olacak şekilde bir $B \leq M$ vardır. O halde $(A + X) \cap B \ll_{\delta} B$ ve $(A + X) \cap B$ yarı basittir. $M = X + (A + B)$ ve $X \ll_{\delta} M$ olduğu için $M = P \oplus (A + B)$ olacak şekilde projektif yarı basit bir $P \leq X$ vardır.

Ayrıca; $A \cap (B + P) \leq [B \cap (A + P)] + [P \cap (A + B)]$ olduğu göz önüne alınarak Lemma 2.6.4 ile $[B \cap (A + P)] \leq [B \cap (A + X)] \ll_{\delta} B$ ve $P \cap (B + A) \ll_{\delta} P$ dir. Yine Lemma 2.6.4 ile $A \cap (B + P) \ll_{\delta} B + P$ olduğu görülebilir. Benzer ilişki Sonuç 2.5.8 ile yarı basitlik için de sağlanır. Bu durumda $A \cap (B + P) \leq Soc_{\delta}(B + P)$ olup ispat tamamlanır. ■

Dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş modüllerin keyfi toplamalarının dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş olduğunu görmek için kullanışlı olan aşağıdaki lemma verilir.

Lemma 4.1.6: $A \leq M$ dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş ve $B \leq M$ dual sonlu olacak şekilde birer alt modül olsun. Eğer $A + B$, M de bir δ_{ss} –tümleyenine sahip ise B , M de δ_{ss} –tümleyene sahiptir.

İspat: M de $A + B$ nin δ_{ss} –tümleyeni S olsun. Bu takdirde $M = (A + B) + S$ ve $(A + B) \cap S \leq Soc_{\delta}(S)$ olacak şekilde bir $S \leq M$ vardır. Ayrıca $B \leq M$ dual sonlu olduğundan, $B \leq S + B \leq M$ ilişkisi göz önüne alınarak $\frac{\frac{M}{B}}{\frac{S+B}{B}} \cong \frac{M}{S+B} = \frac{(S+B)+A}{S+B} \cong$

$\frac{A}{A \cap (S+B)}$ sonlu üretilmiş olduğu görülebilir ve böylece $[A \cap (S + B)] \leq A$ dual sonludur.

Hipotezden $A = [A \cap (S + B)] + T$ ve $[A \cap (S + B)] \cap T = T \cap (S + B) \leq Soc_{\delta}(T)$ olacak şekilde A nın T alt modülü vardır. İspatın geri kalan kısmında M de B nin δ_{ss} –tümleyeninin $S + T$ olduğu gösterilecektir. Açıkça $M = A + (B + S) = \{[A \cap (S + B)] + T\} + (B + S) = B + (S + T)$ elde edilir. Ayrıca $B \cap (S + T) \leq [S \cap (B + T)] + [T \cap (B + S)] \leq [S \cap (B + A)] + [T \cap (B + S)] \ll_{\delta} S + T$ ve $[S \cap (B + A)] + [T \cap (B + S)]$ Sonuç 2.5.8 ile yarı basittir. Böylece $B \cap (S + T)$ de Lemma 2.6.4 ve Sonuç 2.5.8 ifadelerinden $[S \cap (B + A)] + [T \cap (B + S)]$ nin alt modülü olarak $S + T$ de yarı basit ve δ –küçüktür. ■

Önerme 4.1.7: Dual sonlu δ_{ss} –tümleyenmiş modüllerin keyfi toplamı da dual sonlu δ_{ss} –tümleyenmiştir.

İspat: $\{M_i\}_{i \in I}$ dual sonlu δ_{ss} –tümleyenmiş modüllerin bir ailesi ve $M = \sum_{i \in I} M_i$ olsun. Herhangi dual sonlu $K \leq M$ için $n \in \mathbb{N}$ ve $i_1, i_2, \dots, i_n$ olmak üzere $M = M_{i_1} + M_{i_2} + \dots + M_{i_n} + K$ vardır. Hipotez ile M_{i_1} dual sonlu δ_{ss} –tümleyenmiş ve 0, M nin aşikar δ_{ss} –tümleyenini olduğundan $M_{i_2} + M_{i_3} \dots + M_{i_n} + K$, Lemma 4.1.6 dan M de δ_{ss} –tümleyene sahip olur. Benzer şekilde Lemma 4.1.6 tekrar edildiğinde M de K nin bir δ_{ss} –tümleyene sahip olduğu görülür. ■

Sonuç 4.1.8: Dual sonlu δ_{ss} –tümleyenmiş modüllerin herhangi direkt toplamı da dual sonlu δ_{ss} –tümleyenmiştir.

Sonuç 4.1.9: M dual sonlu δ_{ss} –tümleyenmiş modül olsun. O halde herhangi M –üretilmiş modülde dual sonlu δ_{ss} –tümleyenmiştir.

İspat: G, M –üretilmiş bir modül olsun. O halde $f: M^{(I)} = \bigoplus M \rightarrow G$ epimorfizması vardır. Sonuç 4.1.8 den $M^{(I)}$ nin dual sonlu δ_{ss} –tümleyenmiş olduğu açıktır. Ayrıca Sonuç 4.1.3 ten G de dual sonlu δ_{ss} –tümleyenmiş olur. ■

Tanım 4.1.10: Eğer M nin her dual sonlu alt modülü M de direkt toplamı olan bir δ_{ss} –tümleyene sahip ise M modülü dual sonlu $\bigoplus -\delta_{ss}$ –tümleyenmiş olarak adlandırılır.

Önerme 4.1.11: M bir dual sonlu δ_{ss} –tümleyenmiş modül olsun. O halde $\frac{M}{Soc_{\delta}(M)}$ nin her dual sonlu alt modülü bir direkt toplam terimidir.

İspat: $\frac{K}{Soc_{\delta}(M)} \leq \frac{M}{Soc_{\delta}(M)}$ dual sonlu olsun. O halde $K \leq M$ dual sonlu alt modülüdür ve hipotez ile $K + T = M$ ve $K \cap T \leq Soc_{\delta}(T)$ olacak şekilde $T \leq M$ vardır. Açıkça, $\frac{K}{Soc_{\delta}(M)} + \frac{T+Soc_{\delta}(M)}{Soc_{\delta}(M)} = \frac{M}{Soc_{\delta}(M)}$ olur. Ayrıca $\frac{K}{Soc_{\delta}(M)} \cap \frac{T+Soc_{\delta}(M)}{Soc_{\delta}(M)} = \frac{(K \cap T)+Soc_{\delta}(M)}{Soc_{\delta}(M)} = \frac{Soc_{\delta}(M)}{Soc_{\delta}(M)} = 0$ dır. Buradan $\frac{K}{Soc_{\delta}(M)} \leq \bigoplus \frac{M}{Soc_{\delta}(M)}$ olduğu görülür. ■

Sonuç 4.1.12: M bir dual sonlu δ_{ss} –tümleyenmiş modül olsun. O halde $\frac{M}{Soc_{\delta}(M)} \bigoplus -$ dual sonlu δ_{ss} –tümleyenmiştir.

Sonuç 4.1.13: M bir dual sonlu δ_{ss} –tümleyenmiş modül olsun. Eğer $\frac{M}{Soc_{\delta}(M)}$ sonlu üretilmiş ise, $\frac{M}{Soc_{\delta}(M)} \delta_{ss}$ –tümleyenmiştir ve yarı basittir.

Aşağıda bir modülün dual sonlu δ_{ss} –tümlenmişliğinin maksimal alt modüller yardımıyla karakterizasyonunu sağlamaya yardımcı bir lemma verilmektedir.

Lemma 4.1.14: M bir modül, T , M nin bir maksimal alt modülünün δ_{ss} –tümleyeni ve $T + X$ de M de bir δ_{ss} –tümleyene sahip olsun. O halde X , M de bir δ_{ss} –tümleyene sahiptir.

İspat: T , M nin bir maksimal alt modülünün δ_{ss} –tümleyeni olduğundan T güçlü δ –lokal veya Önerme 3.4.3 ile projektif yarı basittir. Eğer T projektif yarı basit ise T nin δ_{ss} –tümlenmiş olduğu açıktır veya T güçlü δ –lokal ise Lemma 3.4.4 den T δ_{ss} –tümlenmiştir. Her iki durum da göz önüne alındığında X in Lemma 3.4.5 den M de bir δ_{ss} –tümleyene sahip olduğu görülür. ■

Şimdi bir M modülünün dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş olmasına eşdeğer olan koşulları oluşturulacaktır. Bu amaçla M nin tüm dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş alt modüllerinin toplamı $Cof_{\delta_{ss}}(M)$ ile gösterilecektir. Eğer böyle bir modül yoksa $Cof_{\delta_{ss}}(M) = 0$ kabul edilecektir. Aynı zamanda $\delta - Loc_S(M)$ ve $Soc_P(M)$ ile sırasıyla güçlü δ –lokal alt modüllerinin toplamı ve M nin projektif yarı basit modüllerinin toplamı olarak gösterilecektir. ■

Teorem 4.1.15: Aşağıdaki ifadeler bir M modülü için denktir:

- i) M dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir.
- ii) M modülünün her maksimal alt modülü M de bir δ_{ss} –tümleyene sahiptir.
- iii) $\frac{M}{\delta - Loc_S(M) + Soc_P(M)}$ maksimal alt modüle sahip değildir.
- iv) $\frac{M}{Cof_{\delta_{ss}}(M)}$ maksimal alt modüle sahip değildir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) $P \leq M$ maksimal alt modül olsun. O halde $\frac{M}{P}$ basit olduğundan $P \leq M$ dual sonlu olur. Böylece P , hipotez ile M de bir δ_{ss} –tümleyene sahiptir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\frac{P}{\delta - Loc_S(M) + Soc_P(M)} \leq \frac{M}{\delta - Loc_S(M) + Soc_P(M)}$ alt modülü maksimal olsun. O halde P , $\delta - Loc_S(M) + Soc_P(M)$ yi içeren M nin bir maksimal alt modülüdür.

Hipotez ile $P + T = M$ ve $P \cap T \leq Soc_\delta(T)$ olacak şekilde M nin bir T alt modülü vardır. Buradan Önerme 3.4.3 ile T güçlü lokal veya projektif yarı basittir. O halde $T \leq \delta - Loc_S(M) + Soc_P(M) \leq P$ ilişkisi vardır. Böylece $T + P = P = M$ çelişkisi elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Kabul edelim ki $\frac{P}{Cof_{\delta_{ss}}(M)} \leq \frac{M}{Cof_{\delta_{ss}}(M)}$ alt modülü maksimal olsun. O halde P, M nin $Cof_{\delta_{ss}}(M)$ yi içeren bir alt modüldür.

$\delta-Loc_s(M) \leq Cof_{\delta_{ss}}(M)$ ve $Soc_p(M) \leq Cof_{\delta_{ss}}(M)$ olduğundan $\delta-Loc_s(M) + Soc_p(M) \leq Cof_{\delta_{ss}}(M) \leq P$ gereği $\pi: M \rightarrow \frac{M}{\delta-Loc_s(M)+Soc_p(M)}$ doğal epimorfizması göz önüne alınırsa $\frac{P}{\delta-Loc_s(M)+Soc_p(M)} \leq \frac{M}{\delta-Loc_s(M)+Soc_p(M)}$ maksimaldir.

(iv) $\Rightarrow$ (i) M nin bir dual sonlu alt modülü K olsun. $\frac{M}{K}, K \leq K + Cof_{\delta_{ss}}(M) \leq M$ için sonlu üretilmiş olduğundan $\frac{\frac{M}{K}}{K+Cof_{\delta_{ss}}(M)} \cong \frac{M}{K+Cof_{\delta_{ss}}(M)}$ sonlu üretilmiştir. Böylece

$K + Cof_{\delta_{ss}}(M)$ dual sonludur. Dahası $K + Cof_{\delta_{ss}}(M), M$ de öz değildir. Aksi taktirde öz olsaydı, sonlu üretilmiş de olduğundan $\frac{M}{K+Cof_{\delta_{ss}}(M)}$ un her öz alt modülünü içeren bir

$\frac{P}{K+Cof_{\delta_{ss}}(M)} \leq \frac{M}{K+Cof_{\delta_{ss}}(M)}$ maksimal alt modülü var olurdu. Burada P, M de maksimal

olmak üzere $Cof_{\delta_{ss}}(M) \leq K + Cof_{\delta_{ss}}(M) \leq P \leq M$ olduğu açıktır. Bu durumda $P \leq M$ maksimal olduğundan $Cof_{\delta_{ss}}(M) \leq K + Cof_{\delta_{ss}}(M) \leq P \leq M$ ilişkisi göz

önüne alınarak $\frac{P}{Cof_{\delta_{ss}}(M)} \leq \frac{M}{Cof_{\delta_{ss}}(M)}$ maksimal alt modülü olur. Bu ise (iii) kabulü ile

çelişir. Bu çelişkiye $K + Cof_{\delta_{ss}}(M)$ öz alt modül olsun kabulü ile düşünüldüğünden

$K + Cof_{\delta_{ss}}(M) = M$ olmalıdır. $\frac{M}{K}$ sonlu üretilmiş olduğundan, $A_1, A_2, \dots, A_n$ ler M nin

dual sonlu δ_{ss} -tümlenmiş alt modülleri olmak üzere $M = K + A_1 + A_2 + \dots + A_n$

şeklinde yazılır. A_n, δ_{ss} -tümlenmiş ve M de 0 aşık δ_{ss} -tümleyenine sahip

oldüğünden $K + A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}$ M de bir δ_{ss} -tümleyenine sahiptir. Benzer

şekilde Lemma 3.4.5 den işlemleri tekrar edilerek sonunda M de K nin bir

δ_{ss} -tümleyene sahip olduğu gösterilir. Böylece M dual sonlu δ_{ss} -tümlenmiştir. ■

Yukarıda teorem aracılığıyla dual sonlu δ_{ss} -tümlenmiş bir modülün δ_{ss} -tümlenmiş olmayabileceğini doğrulayan aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 4.1.16: $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Q}$ hiçbir maksimal alt modüle sahip olmadığından $\frac{\mathbb{Q}}{Cof_{\delta_{ss}}(\mathbb{Q})}$

bölüm modülü de maksimale sahip değildir. Bu durumda Teorem 4.1.15 gereği ${}_Z\mathbb{Q}$ dual sonlu δ_{ss} -tümlenmiştir. Fakat, $\mathbb{Q}, \delta_{ss}$ -tümlenmiş modül değildir (Al-Takhman, 2007).

Şimdi daha önce bahsedilen kapsama bağıntılarının terslenebilirliğini sağlayan koşullar verilecektir.

Aşağıdaki önermeye bu bölümün bütünlüğü için yer verilmiştir.

Önerme 4.1.17: Aşağıdaki önermeler sonlu üretilmiş bir M modülü için denktir:

- i) M δ_{ss} –tümlenmiştir.
- ii) M dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir.
- iii) $M = M_1 + M_2 + \dots + M_n$ burada her bir M_i güçlü δ –lokal veya projektif yarı basittir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020, Sonuç 4.11).

Teorem 4.1.18: M , $\delta(M) \leq Soc(M)$ ile bir dual sonlu δ –tümlenmiş modül olsun. O halde M dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir.

İspat: $K \leq M$ dual sonlu alt modülü olsun. Hipotez ile $K + S = M$ ve $K \cap S \ll_{\delta} S$ olacak şekilde M nin bir S alt modülü vardır. Burada $K \cap S \leq \delta(S) \leq \delta(M)$ olduğu çıkarılır. $K \cap S$ hipotez ile yarı basittir. Böylece $K \cap S \leq Soc_{\delta}(S)$ olup S , M de K nin bir δ_{ss} –tümleyenidir. Böylece M dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir. ■

4.2. Bol Dual Sonlu δ_{ss} –Tümlenmiş Modüller

Tanım 4.2.1: M bir modül ve $A \leq M$ olsun. M nin $M = A + B$ koşulunu gerçekleyen her B alt modülü M de A nın bir δ_{ss} –tümleyenini içeriyorsa A ya M de bol δ_{ss} –tümleyene sahiptir denir.

Tanım 4.2.2: Eğer M modülünün her dual sonlu alt modülü M de bol δ_{ss} –tümleyene sahip ise M bol dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş modül olarak adlandırılır.

Önerme 4.2.3: Bir M modülünün her alt modülü dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş ise, M bol dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş modüldür.

İspat: $K \leq M$ dual sonlu ve bir $B \leq M$ için $M = K + B$ olsun. $\frac{M}{K} = \frac{K+B}{K} \cong \frac{B}{B \cap K}$ sonlu üretilmiş olduğundan $K \cap B \leq B$ dual sonludur. O halde $(K \cap B) + T = B$ ve $(K \cap B) \cap T \ll_{\delta} T$ ve $K \cap T$ yarı basit olacak şekilde bir $T \leq M$ alt modülü vardır. Ayrıca $M = K + B = K + [(K \cap B) + T] = K + T$ olur. Böylece T , B de kapsanan K nın bir δ_{ss} –tümleyenidir. Yani M , bol dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir. ■

Sonuç 4.2.4: Aşağıdaki ifadeler bir R halkası için denktir:

- i) Her R –modül dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir.
- ii) Her R –modül bol dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir.

Önerme 4.2.5 : R bir halka olsun. Her sol R – modülün bol dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her sol R –modülün güçlü δ –lokal alt modüllerinin veya projektif yarı basit alt modüllerinin toplamı olmasıdır.

İspat:($\Rightarrow$) M keyfi bir sol R –modül olsun. Hipotezden M bol dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir ve böylece Sonuç 4.2.4 den M dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir. Burada Önerme 3.4.10 gereği R , bir sol maksimal halkadır. Böylece M eş-atomiktir. Sonuç olarak Önerme 3.4.7 den M güçlü δ –lokal alt modüllerinin veya projektif yarı basit alt modüllerinin toplamıdır

($\Leftarrow$) Yeterlilik için M keyfi bir modül olsun. Hipotez ile M , güçlü δ –lokal alt modüllerinin veya projektif yarı basit alt modüllerinin toplamıdır. O halde M eş-atomiktir ve M , Önerme 3.4.7 gereği dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir. Böylece Sonuç 4.2.4 den M bol dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir. ■

Önerme 4.2.6: M bir π –projektif dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş modül olsun. O halde M bol dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir.

İspat: $K \leq M$ dual sonlu alt modülü ve B , $M = K + B$ olacak şekilde M nin bir alt modülü olsun. Hipotezden $f(M) \leq K$ ve $(I_M - f)(M) \leq B$ olacak şekilde bir $f: M \rightarrow M$ endomorfizması vardır. $(I_M - f)(K) \leq K$ olduğu kolaylıkla görülebilir. T , M de K nin bir δ_{ss} –tümleyenini olsun. O halde $K + T = M$, $K \cap T \ll_{\delta} T$ ve $K \cap T$ yarı basittir. Buna göre $M = f(M) + (I_M - f)(M) = f(M) + (I_M - f)(K + T) \leq K + (I_M - f)(K) + (I_M - f)(T) \leq K + (I_M - f)(T) \leq M$ elde edilir. O halde $K + (I_M - f)(T) = M$ olur. Ayrıca $(I_M - f)(T) \leq (I_M - f)(M) \leq B$ dir. Şimdi $K \cap (I_M - f)(T) = (I_M - f)(K \cap T)$ olduğu gösterilecektir. $y \in K \cap (I_M - f)(T)$ olsun. $y \in K$ ve $y = (I_M - f)(t) = t - f(t)$ olacak şekilde $\exists t \in T$ vardır. Buradan $y + f(t) = t \in K \cap T$ olup Lemma 2.6.4 gereği

$$K \cap (I_M - f)(T) = (I_M - f)(K \cap T) \ll_{\delta} (I_M - f)(T)$$

elde edilir ve aynı zamanda Sonuç 2.5.8 ile yarı basittir. ■

Lemma 4.2.7: $\{L_i\}_{i \in I}$ her bir $1 \leq i \leq n$ için M nin güçlü δ –lokal ya da projektif yarı basit alt modüllerinin bir ailesi ve $A \leq M$ alt modülü, $A + L_1 + \dots + L_n$, M de bir T δ_{ss} –tümleyenine sahip olacak şekilde M nin bir alt modülü olsun. O halde $X_i = L_i$ veya X_i, L_i nin bir projektif yarı basit direkt toplam terimi olmak üzere $T + \sum_{i \in I} X_i$, A nın M de bir δ_{ss} –tümleyeni olacak şekilde sonlu bir $\{1, 2, \dots, n\} \subseteq I$ alt indis ailesi vardır.

İspat: $n = 1$ olduğunu kabul edelim. Hipotezden $(A + L_1) + T = A + (L_1 + T) = M$, $(A + L_1) \cap T \ll_\delta T$ ve $(A + T_1) \cap T$ yarı basittir. Eğer $A \cap (L_1 + T) \leq Soc_\delta(L_1 + T)$ olduğu gösterilebilirse $X_1 = L_1$ olmak üzere M de A nın bir δ_{ss} –tümleyeninin $L_1 + T$ olduğu doğrulanacaktır.

$$A \cap (L_1 + T) \leq [L_1 \cap (A + T)] + [T \cap (A + L_1)]$$

olduğunu kullanarak $H = L_1 \cap (A + T)$ alt modülü göz önüne alındığında,

Durum 1: $H = L_1 \cap (A + T) \ll_\delta L_1$ olsun. $T \cap (A + L_1) \ll_\delta T$ olduğundan $A \cap (L_1 + T) \ll_\delta L_1 + T$ olur. Diğer taraftan $L_1 \cap (A + T) \ll_\delta \delta(L_1)$ olur ve böylece L_1 in güçlü δ –lokal veya projektif yarı basit olması durumunda H yarı basittir.

Durum 2: Kabul edelim ki H, L_1 de δ –küçük olmasın. O halde $L_1 \ll_\delta L_1$ olamayacağından L_1 , Lemma 2.6.2 gereği projektif yarı basit değildir. L_1 güçlü δ –lokal olduğu için $\delta(L_1) \ll_\delta L_1$ veya $\delta(L_1) \leq L_1$ maksimal alt modüldür. Böylece maksimalite gereği $H + \delta(L_1) = L_1$ olup $\delta(L_1) \ll_\delta L_1$ olduğundan $H \oplus X = L_1$ olacak şekilde projektif yarı basit bir $X \leq \delta(L_1)$ vardır. Buradan $H = L_1 \cap (A + T) \leq A + T$ olduğundan $A + (T + L_1) = A + (T + H + X) = A + (T + X)$ elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} A \cap (T + X) &= [T \cap (A + X)] + [X \cap (A + T)] \\ &\leq [T \cap (A + L_1)] + [X \cap (A + T)] \ll_\delta T + X \end{aligned}$$

sağlanır. Diğer yandan $T \cap (A + L_1)$ yarı basit olduğundan $T \cap (A + X) \leq T \cap (A + L_1)$ alt modülü ve X projektif yarı basit olduğundan $X \cap (A + T) \leq X$ alt modülü de yarı basittir. Sonuç olarak $A \cap (T + X)$ yarı basittir. Buna göre $T + X$, A nın M de bir δ_{ss} –tümleyenidir. Burada X, L_1 in bir projektif yarı basit direkt toplam terimidir. Böylece ispat $n = 1$ için tamamlanır. Şimdi $n > 1$ olduğunu kabul edelim. n üzerine tümevarım ile $\{2, \dots, n\}$ nin bir J alt indis ailesi ve $T + \sum_{j \in J} X_j$, $A + L_1$ in M de bir δ_{ss} –tümleyeni olacak şekilde $X_j \leq L_j$ alt modüller ailesi vardır. Ayrıca her bir $j \in J$ için $X_j = L_j$ veya X_j, L_j nin bir projektif yarı basit direkt toplamıdır. Bu taktirde $n = 1$

durumundan, $T + X_1 + \sum_{j \in J} X_j$, A nın M de bir δ_{ss} -tümleyeni olacak şekilde bir $X_1 \leq L_1$ alt modülü vardır ve burada $X_1 = L_1$ veya X_1, L_1 in bir projektif yarı basit direkt toplam terimidir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.2.8: Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

- i) M bol dual sonlu δ_{ss} -tümlenmiştir.
- ii) M nin her maksimal alt modülü M de bol δ_{ss} -tümleyene sahiptir.
- iii) M nin her K dual sonlu alt modülü ve $M = K + L$ olacak şekilde bir L alt modülü için, her bir $L_i \leq L$ güçlü δ -lokal ya da projektif yarı basit alt modüller olmak üzere $M = K + L_1 + L_2 + \dots + L_n$ koşulunu sağlayan en az bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $K \leq M$ dual sonlu ve bir $L \leq M$ alt modülü için $M = K + L$ olsun. $M = K + (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ koşulunu sağlayan sonlu sayıda $X_1, X_2, \dots, X_n \leq L$ güçlü δ -lokal ya da projektif yarı basit alt modüllerin varlığı gösterilecektir. $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ve her bir X_i güçlü δ -lokal veya projektif yarı basit olmak üzere L nin X alt modüllerinin ailesi φ olsun. Her $X \in \varphi$ için $M \neq K + X$ olduğu kabul edilsin. O halde $M \neq U + X$ olacak şekilde U alt modüllerinin bir kümesini bulmak mümkündür. Böylece Lemma 2.2.7 ile $M \neq V + X$ koşulunu sağlayan bu topluluğun bir V maksimal elemanı vardır ve böylece Lemma 2.3.11 gereği $K \leq V$ olur. $V \leq M$ alt modülünün dual sonlu olduğu açıktır. Bu durumda $\frac{M}{V}$ sonlu üretilmiştir ve V öz olduğu için, V yi içeren M nin bir P maksimal alt modülü vardır. O halde $V \leq P$ alt modülü $M \neq V + X$ koşulunu gerçekleyen maksimal eleman olduğundan $M = P + X$. Ayrıca $P \leq M$ dual sonlu alt modül olduğundan bir $T \leq M$ δ_{ss} -tümleyen alt modülü $T \in \varphi$ olacak şekilde vardır. Burada $V \neq V + T$ olduğuna dikkat edilmelidir. Eğer aksi olsaydı $T \leq V \leq P$ zinciri için $T + P = M$ ilişkisi göz önüne alındığında $M = P + T = T$ çelişkisi elde edilecektir.

$\forall X \in \varphi$ için $M \neq V + X$ koşulunu gerçekleyen maksimal eleman V olduğundan $V < V + T$ ve $M = (V + T) + S = V + (T + S)$ olacak şekilde en az bir $S \in \varphi$ vardır. Bu durumda $T + S \in \varphi$ olup $M = V + (T + S)$ elde edilir ve bu V nin maksimal olması ile çelişir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Lemma 4.2.7 den açıktır. ■

Teorem 4.2.9: K ve L , $M = K + L$ olacak şekilde M nin alt modülleri olsun. Eğer L , δ_{ss} –tümlenmiş ise L , M de K nin bir δ_{ss} –tümleyenini içerir.

İspat: Hipotezden $(K \cap L) + T = L$ ve $(K \cap L) \cap T = (K \cap T) \leq Soc_{\delta}(T)$ olacak şekilde L nin bir T alt modülü vardır. $M = K + (K \cap L) + T = K + T$ olduğundan T , K nin M de L tarafından içerilen bir δ_{ss} –tümleyenidir. ■

Önerme 4.2.10: M her devirli alt modülü δ_{ss} –tümlenmiş olan bir modül olsun. Bu taktirde M bol dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir.

İspat: $P \leq M$ bir maksimal ve bir $L \leq M$ için $M = P + L$ olsun. O halde P nin maksimalliği gereği en az bir $x \in L - P$ için $P + Rx = M$ dir. Hipotez ve Teorem 3.6.9 gereği $Rx \leq L$, M de P nin bir δ_{ss} –tümlenenini içerir. Böylece M , Teorem 3.4.9 dan bol dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir. ■

Teorem 4.2.11: Aşağıdaki ifadeler bir sonlu üretilmiş M modülü için denktir:

- i) M bol δ_{ss} –tümlenmiştir.
- ii) M nin her maksimal alt modülü M de bol δ_{ss} –tümleyenlere sahiptir.
- iii) $A, B \leq M$ için $M = A + B$ olsun. Bu durumda $M = A + (B_1 + \dots + B_n)$ olacak şekilde güçlü δ –lokal ya da projektif yarı basit $B_1, \dots, B_n \leq B$ alt modülleri vardır.

İspat: Teorem 4.2.8 gereği açıktır. ■

Sonuç 4.2.12: Eğer M her devirli alt modülü δ_{ss} –tümlenmiş olan devirli bir modül ise, M bol δ_{ss} –tümlenmiştir.

İspat: Teorem 4.2.11 den ve Önerme 4.2.10 dan elde edilir. ■

Teorem 4.2.13: Aşağıdaki ifadeler bir R halkası için denktir:

- i) R δ_{ss} –mükemmeldir.
- ii) ${}_R R$ bol dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir.
- iii) R δ –yarı mükemmel ve $\delta(R) = Soc(R)$ dir.
- iv) Her projektif sol R –modül (bol) dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir.
- v) Her sol R –modül (bol) dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir.
- vi) Her sol R –modül, güçlü δ –lokal veya projektif yarı basit alt modüllerinin toplamıdır.

- vii) ${}_R R$ güçlü δ –lokal alt modüllerin veya projektif yarı basit alt modüllerin toplamıdır.
- viii) R nin her sol maksimal ideali R de bol δ_{ss} tümleyenlere sahiptir.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii) R nin her I ideali için, I ideallerine de (alt) modüller gözüyle bakılırsa Teorem 3.4.9.(vii) gereği, I idealleri dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir. R nin her I alt modülü dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş olduğundan Önerme 4.2.3 gereği ${}_R R$ bol dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş olur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ${}_R R$ bol dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş olduğunda dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş olur. ${}_R R$ dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş olduğunda ise R nin her sol maksimal ideali R de δ_{ss} –tümleyene sahiptir Teorem 3.4.9.(ii) gereği R , δ –yarı mükemmel ve $\delta(R) = Soc({}_R R)$ dir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) (iii) sağlansın. Teorem 3.4.9 gereği R , δ_{ss} – mükemmeldir ve yine Teorem 3.4.9 gereği üzerindeki her modül dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir. Bu durumda Sonuç 4.2.4 gereği R üzerindeki her modül bol dual sonlu δ_{ss} – tümlenmiş olacaktır. Özel olarak herhangi bir projektif sol R modül de bol dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş olur. Dolayısıyla dual sonlu δ_{ss} – tümlenmiş olur

(iv) $\Rightarrow$ (v) Herhangi bir M modülünü alalım. Teorem 2.4.7 gereği her modül bir serbest modülün epimorfik görüntüsü olduğundan aynı zamanda bir projektif modülün de epimorfik görüntüsü denilebilir. Dolayısıyla P projektif olmak üzere en az bir $f: P \rightarrow M$ epimorfizması vardır. Kabul gereği P –projektif modülü (bol) dual sonlu δ_{ss} – tümlenmiş olur.

(v) $\Rightarrow$ (vi) Önerme 4.2.5 den açıktır.

(vi) $\Rightarrow$ (vii) (vi) gereği açıktır.

(vii) $\Rightarrow$ (viii) ${}_R R$ güçlü δ –lokal ve projektif yarı basit at modüllerinin toplamı şeklinde yazılsın. Sonuç 3.4.8 gereği R birimli olduğundan sonlu üretilmiş olup hipotez gereği ${}_R R$ dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir. R sonlu üretilmiş olduğundan her ideali dual sonlu olup ${}_R R$ δ_{ss} –tümlenmiş olur. Teorem 3.4.9 (v) gereği ${}_R R$ bol δ_{ss} –tümlenmiştir. R her ideali dual sonlu alt modül olduğundan ${}_R R$ bol dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir. Yani (viii) sağlanır.

(viii) $\Rightarrow$ (i) ${}_R R$ nin her maksimal ideali bol δ_{ss} –tümleyene sahip ise o zaman her sol maksimal ideali δ_{ss} –tümleyene sahip olur. Buna göre Teorem 3.4.9 (vii) den R , δ_{ss} –mükemmeldir. ■

Bir M modülü için aşağıdaki hiyerarşi verilir.

Bol Dual Sonlu ss – Tümlenmiş $\Rightarrow$ Bol Dual Sonlu δ_{ss} –Tümlenmiş $\Rightarrow$ Bol Dual Sonlu δ –Tümlenmiş

Aşağıda, yukarıda verilen ilişkinin tersinir olmadığı örneklerle doğrulanmaktadır.

Örnek 4.2.14: $\mathbb{Q} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ve R de $1_{\mathbb{Q}}$ ve $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ile üretilen $\mathbb{Q}$ 'nun bir alt halkası olsun. $R/\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ tek singüler (tekil) basit modül olduğundan, $\delta(R) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2 = Soc(R)$ olur. Aynı zamanda R yarı mükemmel olmayan bir δ –yarı mükemmel halkadır (Example 4.1, Zhou,2000). Böylece ${}_R R$ Teorem 4.2.13 ile δ_{ss} –mükemmel olduğu gibi bol dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiştir. Diğer taraftan, ${}_R R$ bol dual sonlu ss –tümlenmiş değildir (Nişancı Türkmen ve Kılıç, 2022).

Örnek 4.2.15: F bir cisim,

$$R = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n, x, x \dots) \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in M_2(F), x \in \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix} \right\}$$

olsun. Burada R ,

$$Soc(R) = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0 \dots) \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in M_2(F) \},$$

$$\delta(R) = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n, x, x \dots) \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in M_2(F), x \in \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix} = Rad(R) \right\}$$

olacak şekilde bileşen bileşene toplama ve çarpma işlemleri ile bir halkadır. R bir δ –yarı mükemmel halkadır (Example 4.3, Zhou, 2000). Fakat Teorem 3.4.9 gereği $\delta(R) \neq Soc(R)$ olduğundan δ_{ss} –mükemmel değildir. Böylece ${}_R R$ Teorem 3.2.5 gereği bol dual sonlu bir δ –tümlenmiş modüldür. Fakat Teorem 4.2.13 (ii) gereği bol dual sonlu δ_{ss} –tümlenmiş değildir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Dual sonlu ve bol dual sonlu δ_{ss} -tümlenmiş modüllerin tanımlanarak tanıtımının yapıldığı bu tezde, dual sonlu ss -tümlenmiş modüller ile dual sonlu δ -tümlenmiş modüller arasında yeni bir cebirsel yapı inşa edilmiştir. Aynı zamanda bu ara yapının üst ve alt cebirsel yapılarıyla olan kapsama ilişkisinin öz olduğunu gösteren örneklemelerle somutluk sağlanmıştır. Diğer taraftan, $\delta(M) \leq Soc(M)$ koşulunu gerçekleyen bir dual sonlu δ -tümlenmiş modülün, dual sonlu δ_{ss} -tümlenmiş olduğu gösterilmiştir. Tanımların her birinin eşdeğer karşıtları irdelenmiştir. Bununla birlikte üzerindeki her sol R -modülü dual sonlu δ_{ss} -tümlenmiş olan halkalar tespit edilmiştir. Elde edilen veriler ışığında dual sonlu zayıf δ_{ss} -tümlenmiş modülleri tanımlamak ve cebirsel özelliklerini ve halka karakterizasyonlarını ele almak mümkündür.

KAYNAKLAR

- Alizade, R., & Pancar, A. (1999). *Homoloji cebire giriş*. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, 176, Samsun.
- Alizade, R., Bilhan, G., & Smith, P. F. (2001). Modules whose maksimal submodules have supplements. *Communications in Algebra*, 29(6), 2389-2405.
- Al-Takhman, K. (2007). Cofinitely δ –supplemented and cofinitely δ –semiperfect modules, *Int. J. Algebra*, 1(12), 601-613.
- Faith, C. (1995). Rings whose modules have maximal submodules, *Publicacions Matematiques*, 39, 201–214.
- Goodearl, K.R. (1976). *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules*, Marcel Dekker, Inc., New York.
- Hilbert, D. (1980). Ueber die Theorie der algebraischen Formen. *Mathematische Annalen*, 36(4), 473-534.
- Hungerford, T. W. (1973). *Algebra* (Vol. 73). Springer Science & Business Media.
- Kasch, F. (1982). *Modules and Rings* (Vol. 17). Published for the London Mathematical Society by Academic Press.
- Kaynar, E., Türkmen, E. & Çalışıcı, H. (2020). ss –supplemented modules. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69(1), 473-485. <https://doi.org/10.31801/cfsuasmas.585727>
- Koşan, M. T. (2007). δ –lifting and δ –supplemented modules. *In Algebra colloquium* 14(1), 53-60. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, and Suzhou University. <https://doi.org/10.1142/S1005386707000065>
- Nişancı Türkmen, B., & Türkmen, E. (2020). δ_{ss} –supplemented modules and rings. *Analele Ştiinţifice Ale Universităţii "Ovidius" Constanţa. Seria Matematică*, 28(3), 193-216. <https://doi.org/10.2478/auom-2020-0041>
- Türkmen, B. N., & Kılıç, B. (2022). On Cofinitely ss –supplemented Modules. *Algebra and Discrete Mathematics* (Accepted).

- Sharpe, D. W., & Vámos, P. (1972). *Injective modules*. Lectures in Pure Mathematics University of Sheffield, 190.
- Tribak, R. (2012). Finitely generated δ –supplemented modules are amply δ –supplemented. *Bulletin of Australian Mathematical Society*, 86, 430-439.
- Tribak, R. (2013). On δ –lokal modules and amply δ –supplemented modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, 12(2), 1250144. <https://doi.org/10.1142/S0219498812501447>
- Wisbauer, R. (1991). *Foundations of module and ring theory*. Gordon and Breach, 600. <https://doi.org/10.1201/9780203755532>
- Zhou, Y. (2000). Generalizations of perfect, semiperfect and semiregular rings. *Algebra Colloq.*, 7(3), 305-318. <https://doi.org/10.1007/s10011-000-0305-9>
- Zöschinger, H. (1974a). Komplementierte moduln über dedekindringen. *Journal of Algebra*, 29, 42-56. <https://www.jstor.org/stable/24490705>

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Feride CEYLAN

Eğitim Durumu

Lise : SAMSUN ONDOKUZ MAYIS LİSESİ

Lisans : SAMSUN ONDOKUZMAYIS ÜNİVERSİTESİ

Mesleki Deneyim

Konya Kadınhanı İmam Hatip Lisesi- Öğretmen

Sinop Sarı Saltuk Anadolu Lisesi- Öğretmen

Sinop Sultan Hatun Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi-Öğretmen

Yayın Listesi :