

T.C
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DUAL UZAYDA BAZI ÖZEL EĞRİLER ÜZERİNE

Veysi CENGİZ

TEMMUZ 2021

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DUAL UZAYDA BAZI ÖZEL EĞRİLER ÜZERİNE

Hazırlayan
Veysi CENGİZ

Danışman
Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

Jüri Üyeleri
Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT
Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI
Dr. Öğr. Üyesi Fatma BULUT

TEMMUZ 2021

ONAY

Veysi CENGİZ tarafından hazırlanan “**Dual Uzayda Bazı Özel Eğriler Üzerine**” adlı tez çalışması .../.../... tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Ünvanı, Adı ve Soyadı

(Başkan)

Ünvanı, Adı ve Soyadı

(Danışman)

Ünvanı, Adı ve Soyadı

(Üye)

Ünvanı, Adı ve Soyadı

(Üye) (varsa)

Ünvanı, Adı ve Soyadı

(Üye) (varsa)

Bu tezin kabulü, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun .../.../...gün ve .../... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Zeki ARGUNHAN

Enstitü Müdürü

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre hazırlamış olduğum “**Dual Uzayda Bazı Özel Eğriler Üzerine**” adlı tezimin özgün bir çalışma olduğunu, tez hazırlanırken tüm aşamalarda bilimsel etik ilkelerine uygun davrandığımı, tez kapsamında sunulan tüm verileri bilimsel etik ilkelerine uygun elde ettiğimi, tezde faydalandığım tüm eserlere atıf yaptığımı ve kaynaklar kısmında bu eserleri gösterdiğimi beyan ederim. 28/06/2021

Veysi CENGİZ

ÖZET

DUAL UZAYDA BAZI ÖZEL EĞRİLER ÜZERİNE

Veysi CENGİZ

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

Temmuz 2021, 194 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde regle yüzeylerin tarihsel gelişimi hakkında bilgiler verildi. Materyal ve yöntem bölümünde Öklid uzayındaki temel kavramlar ve eğrilerle Serret-Frenet çatısı ve alternatif çatılar, regle yüzeyler, dual eğriler, dual uzayda Serret-Frenet çatısı ve alternatif çatılar, Blaschke çatısı ile ilgili temel tanım ve teoremlerle dual sayılar, dual vektörler, E-Study dönüşümü verilip çeşitli örneklendirmeler yapıldı. Bulgular bölümünde ilk olarak regle yüzeyler N-Bishop çatısına göre oluşturuldu ve karakterizasyonları hesaplandı. Modifiye çatıya göre regle yüzeyleri oluşturulup karakterizasyonları hesaplandı. Daha sonra dayanak eğrisi özel eğrilerden seçilen regle yüzeyler incelendi. Dördüncü bölümde ise bu oluşturulan yüzeyler ile ilgili örneklendirmeler yapıldı. Beşinci bölümde ise konu ile ilgili sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Dual vektör, E-Study dönüşümü, Dual eğri, Regle yüzey, Alternatif NCW çatısı, N-Bishop çatısı

ABSTRACT

ON SOME SPECIAL CURVES IN DUAL SPACE

Veysi CENGİZ

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate Education Institute

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

July 2021, 194 pages

This thesis consists of five chapters. In the introduction section, information was given about the historical development of ruled surfaces. In the material and method section, basic concepts and curves in Euclidean space, Serret-Frenet frame and alternative frames, ruled surfaces, dual curves, Serret-Frenet frame and alternative frames in dual space, dual numbers with basic definitions and theorems about Blaschke frame, dual vectors, E- Study mapping was given and various examples were made. In the findings section, the ruled surfaces were firstly created according to the N-Bishop frame and their characterizations were calculated. Ruled surfaces were created according to the modified frame and their characterizations were calculated. Then, ruled surfaces selected from special curves of based curves were examined. In the fourth chapter, examples of these created surfaces were made. In the fifth chapter, conclusions and suggestions related to the subject are given.

Keywords: Dual vector, E-Study mapping, Dual curves, Alternative frame, N-Bishop frame

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim sürecinde görüş ve önerileriyle beni yönlendiren bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım, bana her konuda fikirlerini ve desteğini esirgemeyen saygı değer hocam Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI'ya en samimi duygularıyla, saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Bu tezde emeği geçen Maşallah SALGIN, Ömer AYDOĞDU ve Gülay OSKAY ve manevi desteklerini esirgemeyen başta sevgili babam Kazım CENGİZ'e, sevgili eşim Berna CENGİZ'e ve aileme en içten sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
SİMGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM	4
2.1. Öklid Uzayı	4
2.2. Serret-Frenet ve Alternatif Çatılar.....	7
2.2.1. Serret-Frenet Çatısı	7
2.2.2. NCW Alternatif Çatısı	9
2.2.3. Tip 1 Bishop Çatısı	11
2.2.4. Tip 2 Bishop Çatısı	11
2.2.5. N-Bishop Çatısı.....	12
2.3. Smarandache Eğrileri	13
2.4. Regle Yüzeyler.....	16
2.5. Dual Uzay.....	19
2.5.1. Dual Sayılar ve $\mathbb{D}$ -modül	19
2.5.2. Dual Uzay Eğrisi ve Çatıları	24
2.5.2.1. Dual Uzay Eğrisi	24
2.5.2.2. Blaschke Çatısı	25
2.5.2.3. Dual Serret-Frenet Çatısı	26
2.5.3. Dual Regle Yüzeyler.....	28

3. BULGULAR	31
3.1. $\mathbb{E}^3$ Uzayında N-Bishop ve NCW Çatıları Arasındaki Geçiş Matrisi	31
3.2. Dual NCW Alternatif çatısı.....	35
3.3. Dual N-Bishop Çatısı	36
3.4. Dual N-Bishop Regle Yüzeyleri	36
3.5. Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Çatısına Göre Smarandache Eğrileri ve Karşılık Geldiği Regle Yüzeyleri	56
3.5.1. Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Çatısına Göre $\widehat{N}\widehat{N}_1$ Smarandache Eğrileri ve Karşılık Geldiği Regle Yüzeyler	57
3.5.2. Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Çatısına Göre $\widehat{N}\widehat{N}_2$ Smarandache Eğrileri ve Karşılık Geldiği Regle Yüzeyler	70
3.5.3. Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Çatısına Göre $\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Smarandache Eğrileri ve Karşılık Geldiği Regle Yüzeyler	83
3.5.4. Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Çatısına Göre $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Smarandache Eğrileri ve Karşılık Geldiği Regle Yüzeyler	95
3.6. Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}$ Çatısına Göre Dual Eğriler ve Karşılık Geldiği Regle Yüzeyler	108
3.6.1. Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}$ Çatısına Göre $\widehat{N}\widehat{C}$ Smarandache Eğrileri ve Regle Yüzeyler	108
3.6.2. Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}$ Çatısına Göre $\widehat{N}\widehat{W}$ Smarandache Eğrileri ve Regle Yüzeyler	122
3.6.3. Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}$ Çatısına Göre $\widehat{C}\widehat{W}$ Smarandache Eğrileri ve Regle Yüzeyler	134
3.6.4. Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}$ Çatısına Göre $\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}$ Smarandache Eğrileri ve Regle Yüzeyler	148

3.7. Sayısal Örnekler	163
3.7.1 Dual N-Bishop Çatısının Karşılık Geldiği Regle Yüzeyleri	164
3.7.2. Dual Smarandache Regle Yüzeyi	169
3.7.2.1. Dual $\widehat{N}\widehat{N}_1$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi	171
3.7.2.2. Dual $\widehat{N}\widehat{N}_2$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi.....	172
3.7.2.3. Dual $\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi.....	173
3.7.2.4. Dual $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi.....	175
3.7.2.5. Dual $\widehat{N}\widehat{C}$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi	176
3.7.2.6. Dual $\widehat{N}\widehat{W}$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi.....	180
3.7.2.7. Dual $\widehat{C}\widehat{W}$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi.....	182
3.7.2.8. Dual $\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi.....	185
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	189
5. KAYNAKLAR.....	193
ÖZGEÇMİŞ	194

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>ŞEKİL</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. Öklid uzayında eğri	6
2.2. Öklid uzayında hız vektörü.....	7
2.3. Öklid uzayında Serret-Frenet vektörleri	8
2.4. Öklid uzayında de bir regle yüzey	16
2.5. Regle yüzeyinin dağılma parametresi.....	18
2.6. Öklid uzayında $\vec{u}$ yönüyle verilen bir doğru	23
2.7. Geometrik olarak dual açı	24
2.8. Regle yüzeyin dual küresel resmi.....	29
2.9. Dual regle yüzey.....	31
4.1. $\vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s \right)$ dual eğrisine ait regle yüzeyin Maple çizimi	177
4.2. $\vec{\psi}_{\hat{C}}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + v \sin s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s \right)$ dual eğrisine ait regle yüzeyin Maple çizimi	178
4.3. $\vec{\psi}_{\hat{W}}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{26}}{4} \sin s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right)$ dual eğrisine ait regle yüzeyin Maple çizimi	179
4.4. $\vec{\psi}_{\hat{N}}(s, \varphi) = \left(-v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \sin s \right)$ dual eğrisine ait regle yüzeyin Maple çizimi.....	180
4.5. $\vec{\psi}_{\hat{C}}(s, v) = \left(-v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \sin s \right)$ dual eğrisine ait regle yüzeyin Maple çizimi	181
4.6. $\vec{\psi}_{\hat{W}}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right)$ dual eğrisine ait regle yüzeyin Maple çizimi	182
4.7. $\vec{\psi}_{\hat{N}}(s, \varphi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s \right)$ dual eğrisine ait regle yüzeyin Maple çizimi	183

4.8. $\vec{\psi}_{\hat{c}}(s, v) = \left(v \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \cos s \right)$ dual eğrisine ait regle yüzeyin Maple çizimi	184
4.9. $\vec{\psi}_{\hat{c}}(s, v) = \left(v \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \cos s \right)$ dual eğrisine ait regle yüzeyin Maple çizimi	185
4.10. $\vec{\psi}_{\hat{n}}(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s \right)$ dual eğrisine ait regle yüzeyin Maple çizimi	186
4.11. $\vec{\psi}_{\hat{c}}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + v \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s \right)$ dual eğrisine ait regle yüzeyin Maple çizimi	187
4.12. $\vec{\psi}_{\hat{w}}(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right)$ dual eğrisine ait regle yüzeyin Maple çizimi	188

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{E}^3$	3 boyutlu Öklid uzayı
$\langle, \rangle$	Öklid iç çarpım
$\wedge$	Öklid vektörel çarpım
$\ \cdot\ $	Norm
κ	Frenet çatısının eğrilik fonksiyonu
τ	Frenet çatısının burulma fonksiyonu
$\vec{T}$	Frenet çatısının birim teğet vektör alanı
$\vec{N}$	Frenet çatısının asli normal vektör alanı
$\vec{B}$	Frenet çatısının binormal vektör alanı
$\vec{W}$	Serret-Frenet çatılı Darboux vektör yönündeki birim vektör
$\hat{T}$	Frenet çatısının dual birim teğet vektör alanı
$\hat{N}$	Frenet çatısının dual asli normal vektör alanı
$\hat{B}$	Frenet çatısının dual binormal vektör alanı
$\hat{C}$	Ana türevin yönündeki dual birim normal vektör alanı
$\hat{W}$	Serret-Frenet çatılı dual Darboux vektör yönündeki dual birim vektör
$\hat{N}_1$	N-Bishop çatısında asli normale dik olan dual birim vektör
$\hat{N}_2$	N-Bishop çatısının diğer vektörlerine dik olan dual vektör
f	NCW çatısının eğrilik fonksiyonu
g	NCW çatısının burulma fonksiyonu
k_1	N-Bishop çatısının eğrilik fonksiyonu
k_2	N-Bishop çatısının burulma fonksiyonu
P	Regle yüzeyinin dağılma parametresi
$\vec{n}$	Regle yüzeyinin normal vektör alanı
P	Regle yüzeyinin dağılma parametresi (drali)
H	Ortalama eğrilik
K	Gauss eğriliği
I	I.Esas form

II	II.Esas form
$\mathbb{D}$	Dual sayılar cümlesi
$\mathbb{D}^3$	D-modül
$(\)'$	s parametresine göre yönlü türev
$\vec{\omega}$	Dual Darboux vektörü
$\vec{D}$	Dual Steiner vektörü
Λ	Dual açının eğimi



1. GİRİŞ

Mısır'da tahmini MÖ 3000 yılında Nil nehrinin taşması sonucu kaybolan sınırların tekrar belirlenmesi ve verginin daha düzgün olarak toplanmasını sağlayan alan ölçümüne bağlı olarak bulunması geometrinin tarihsel çıkış noktası kabul edilir. Günümüze ulaşmış ilk örneklerine de papirüs sayfalarında rastlanmıştır. Papirüs kağıtları ismini de aldığı bataklık ve dere kıyılarında yetişen 2-3 m boylarında kamışa benzeyen, çok yıllık otsu bitki olan papirüsten almaktadır. Bilinen en eski matematikçinin Baudhayana (-, MÖ 800) olduğu kabul edilse de bu matematikçi hakkında çok da bilgi sahibi değiliz. Hakkında daha çok bilgi sahibi olduğumuz ve geometrinin babası olarak da kabul edilen İskenderiyeli Yunan matematikçi Öklid'dir. Kendisine atfedilen matematiksel bir sistem olan Öklid geometrisi kendi kitabı olan Elemanlar adlı ders kitabında tarif edilmektedir. Bu kitap günümüz geometrisi için de sağlam bir kaynak teşkil etmektedir [1,2]. Matematik, zaman içerisinde gelişerek dallara ayrılmıştır. Bu dalların en önemlilerinden bir tanesi de geometridir. Aynı şekilde gelişen geometri de farklı dallara ayrılmıştır. Özellikle gelişen teknoloji ile beraber bu geometri dallarından biri olan diferansiyel geometriyi çok daha önemli hale getirmiştir. Diferansiyel geometri, geometrideki problemleri incelemek için diferansiyel hesap, integral hesap, doğrusal cebir ve çok çizgili cebir tekniklerini kullanan matematiksel bir disiplindir. Üç boyutlu Öklid uzayındaki düzlem ve uzay eğrileri ve yüzeyler teorisi, 18. yüzyıl ve 19. yüzyılda diferansiyel geometrinin gelişiminin temelini oluşturmuştur. Diferansiyel geometri ilk olarak 18. yüzyılda ortaya çıkmıştır ve ilk örneklerini de L. Euler ve G. Monge çalışmıştır. Yüzeyler teorisi üzerine ilk inceleme Monge (1795) tarafından yazılmıştır [3]. 1827'de eğri ve yüzeyler üzerine genel bir çalışma başlığı altında bir çalışma yapan C.F. Gauss; bu çalışma ile modern haliyle yüzeyler teorisinin temellerini atmıştır [4]. Bu çalışmayla birlikte diferansiyel geometri, analizin yalnızca bir uygulaması olmaktan çıkmıştır ve matematiğin bağımsız bir dalı haline gelmiştir. Süreç içerisinde diferansiyel geometri önem kazanmaya başlamıştır. Öyle ki Rusya'da F. Minding ve K.M. tarafından bir diferansiyel geometri okulu kurulmuştur. Matematikte eğri (eski metinlerde eğri çizgi olarak da adlandırılır), bir çizgiye benzetilmektedir fakat bu çizginin düz olmasına gerek yoktur [5]. Başka bir deyişle eğri, hareketli bir noktanın bıraktığı iz olarak düşünülebilir. Modern matematikte ise eğrinin tanımı şu şekilde verilmiştir: Eğri, sürekli bir fonksiyonla ile topolojik uzaya ait bir aralığın görüntüsüdür. Gelişen teknoloji ve artan çalışmalarla birlikte gelişen eğriler teorisi çok geniş bir çalışma alanı oluşturmaktadır. Eğrilerin başlıca kullanım alanları; mimaride köprülerin yapımında ve estetik olarak tasarımı, geometrik modelleme ve bilgisayar grafiklerinde, kartografyada haritaların çiziminde, askeri teknolojilerde füze ve roketlerin fırlatılmasında, klasik fizikte kütle çekim teorisinde, astronomide

uzaydaki bazı cisimlerin hareketlerinde vb. [6-9]. Eğrilerin yapısı ve uzaydaki konumu analitik olarak pek bilinmemektedir. Fakat sabit bir eğimi, yön ve doğrultusu olmayan eğriler ile ilgili daha çok bilgi sahibi olunmasını sağlayan Serret-Frenet vektörleri sayesinde eğrinin eğrilik ve burulması hesaplanabilmektedir. Frenet çatısının elemanları olan $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{T} \times \vec{N} = \vec{B}\}$ vektörleri sırasıyla bir α regüler eğrisinin teğet, normal ve bu iki vektörün vektörel çarpımı ile elde edilen binormal vektördür. Bu çatı ismini, çatıdaki formülleri birbirinden bağımsız olarak keşfeden ve tezlerinde de kullanan Jean Frédéric Frenet (1847) ve Joseph Alfred Serret (1851) den almaktadır [10-11]. Böylelikle eğrilik ve burulma yardımıyla eğriler hakkında daha fazla bilgi sahibi olabiliyoruz bu durum da yeni eğri türlerinin bulunup yeni çalışmaların yapılmasına imkan sağlamıştır. Fakat bu çatıda eğrinin en az üçüncü mertebeye kadar türev almak gerekmektedir. Bu durum beraberinde alternatif yeni çatıların oluşturulmasını sağlamıştır. 1975 yılında Richard L. Bishop tarafından tanımlanan Bishop çatısı da bu çatılardan birisidir [12]. Bu çatı eğrinin ikinci türevi olmadığı durumlarda tanımlanabildiğinden hemen hemen tüm eğriler hakkında bilgi edinmemizi sağlar. Bu çatının tanımlanmasıyla birlikte birçok çalışma yapılmıştır. Bükçü ve Karacan Minkowski uzayında Bishop çatısı üzerine çalışmalar yapmış, ayrıca slant helisleri de bu çatıya göre incelemiştir. Bu çatı üzerine daha birçok çalışma yapılmıştır [13-20]. Bishop çatısı oluşturulurken eğrinin sadece birinci türevi ile elde edilen teğetine paralel olarak eğri boyunca taşınır. 1995 yılında $\mathbb{E}^3$ de bir $\mu = \mu(s)$ eğrisi boyunca Scofield tarafından keşfedilen ve $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{N} \times \vec{C} = \vec{W}\}$ ile tanımlanan alternatif hareketli çatının sırasıyla birim asal normal vektör $\vec{N}$, asal birim vektörün türevi $\vec{C}$ ve Darboux vektörü $\vec{W}$ ile temsil edilmektedir [21]. Yaylı ve arkadaşları $\mathbb{E}^3$ de bir $\mu = \mu(s)$ eğrinin $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{N} \times \vec{C} = \vec{W}\}$ alternatif çatısının normal vektörünün sabit alınmasıyla bu çatının θ derecelik bir döndürme yapılmasıyla tanımladığı yeni çatıya hareketli alternatif N-Bishop çatısı denir [22]. Özel bir eğri çeşiti olan Smarandache eğrileri de farklı uzay ve çatılar üzerinde çalışma yapılan özel bir eğri çeşitidir. Konum vektörü başka bir düzgün eğri üzerindeki Serret-Frenet çatısı vektörlerinden oluşan düzenli bir eğriye Smarandache eğrisi denir [23]. A.T. Ali, Öklid uzayında bazı özel Smarandache eğrilerini incelemiştir [24]. Bektaş ve Yüce, üç boyutlu Öklid uzayında özel Smarandache eğrilerinin Darboux çatısını incelemiştir [25]. İki gerçel değişkenli ve gerçel değerli bir fonksiyonun üç boyutlu uzaydaki grafiği tipik yüzey örneğidir. Diferansiyel geometride daha çok doğruların oluşturduğu yüzey olarak tanımlayabildiğimiz regle yüzeyleri çalışılmaktadır. Özel bir yüzey türü olup üzerinde birçok çalışma yapılmıştır. Regle yüzeyleri ilk olarak Monge (1850) tarafından

tanımlansa da bunun üzerine çalışmalar Guggenheimer tarafından yapılmıştır [26]. Regle yüzeylerin açılabilir olması için Gauss eğriliğinin sıfır olması gerekmektedir. Bütün açılabilir yüzeyler regle yüzeydir. Regle yüzeyler bilgisayar destekli tasarım ve modelleme, mimari mekanik, kinematik ve birçok alanda kullanılmaktadır. Önder, rektifiyan regle yüzeyleri ilgili çalışma yapmıştır [27]. Regle yüzeyler geometrisi, kinematik ve uzaysal mekanik çalışmaları gibi birçok alanda da kullanılması ile önem kazanmıştır [28-30]. Ayrıca regle yüzeylerin farklı çatılarda incelenmesi üzerine çalışmalar yapılmıştır [31]. Karmaşık sayılarla Öklid uzayında sadece dönme işleminin tek yapılabilmesi öteleme hareketinin yapılamaması araştırmacıları bir arayışa koymuştur. Bu arayış sonuunda hem dönme hem de öteleme hareketlerini yapmamızı sağlayan dual sayıların keşfini sağlamıştır. Dual uzayın elemanları olan dual sayılar ilk kez 1873 yılında W.K. Clifford tarafından keşfedilmiştir [32]. Daha sonra E. Study dual sayıları dual vektörleri oluşturmak için kullanmış ve birim dual küre ile yönlü doğru arasındaki bağıntıyı açıklamıştır. Dual sayılar ve dual vektörler uygulamalı geometride robotik hareketleri kolay bir biçimde gerçekleştirebilmek için kullanılmaktadır. Birçok disiplinlerarası bilim dallarında uzaydaki hareketi temsil etmek için yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Dual uzayda E-study dönüşümüyle beraber $\mathbb{E}^3$ uzayı, Minkowski uzayı, Galile uzayı ve diğer birçok uzayda incelenmiş olan eğriler bu uzayda da tanımlanmış ve bu eğriler üzerine bu uzayda birçok çalışma yapılmıştır [33-37]. Baky (2002) dual küresel eğrilerin açık bir karakterizasyonu adlı çalışmasında dual uzayda Blaschke çatısını ve bir dual eğriyi Serret-Frenet çatısındaki vektörler yardımıyla tanımlamıştır [38]. E-Study teoremi ile birlikte dual eğrilerin Öklid uzayında bir regle yüzeye karşılık geldiği gösterilmiştir [39]. Uğurlu ve Kahraman dual Smarandache eğrilerini kullanarak E-Study dönüşümü yardımıyla Smarandache regle yüzeyleri oluşturulmuştur [40]. Çalışkan ve Şenyurt, eğriler ve yüzeylerin alternatif çatısını dual uzayda incelemişlerdir [41]. Öklid uzayında sıklıkla çalışılan Smarandache eğrileri ile dual eğriler üzerinde hala yeni çalışmalar yapılmaktadır [42-49].

Bu tez çalışmamızda N-Bishop ve NCW çatılarının dual uzayda oluşturduğu dual eğrilerle $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında karşılık geldiği regle yüzeyleri incelenmiştir. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayındaki bu regle yüzeyleri için dağılma parametresi I. ve II. esas form, normal vektör alanı, Gauss ile ortalama eğrilik, dual Darboux ve dual Steiner vektörü ile beraber dual açılım açıları hesaplanmıştır. Ayrıca elde edilen bu regle yüzeylere ait sayısal örnekler verildi. Son olarak, elde edilen regle yüzeylerin grafikleri çizilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde Öklid uzayındaki eğriler ve regle yüzeyler verilmiştir. Ayrıca bu eğrilere ait Serret-Frenet çatısı, alternatif çatılar, N-Bishop çatısı incelenmiş ve regle yüzeylerin bazı özellikleri, dual uzaydaki bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca dual vektör ve dual eğriler, Blaschke çatısı ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca bu konularla ilgili sayısal örnekler de verilecektir.

2.1 Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1 A boş olmayan bir cümle ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri sağlayan bir $f: A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa, A ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir.

i. $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$

ii. $\forall P \in A$ ve $\alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [9].

Tanım 2.1.2 A bir reel afin uzay ve V ise A ile birleşen bir vektör uzayı olsun. V de;

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \begin{cases} x_i = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ y_i = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \end{cases}$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanırsa, A afin uzayına Öklid uzayı denir. $A = \mathbb{R}^n$ noktalar cümlesi ve $V = \mathbb{R}^n$ n – boyutlu standart reel vektör uzayı olarak seçilirse, A standart reel Öklid uzayı adını alır ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir [9].

Tanım 2.1.3 $d: \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overline{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$ olarak tanımlanan

d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $(x, y) \in \mathbb{E}^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir [9].

Tanım 2.1.4 $d: \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overline{xy}\|$ biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ de Öklid metriği denir [9].

Tanım 2.1.5 n -boyutlu Öklid uzayında $\vec{x} \in \mathbb{E}^n$ için x vektörünün normu $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ biçiminde tanımlanır [5].

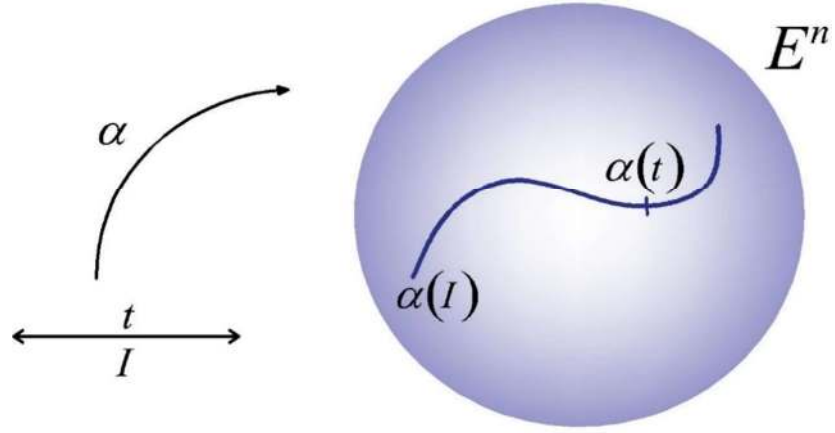
Tanım 2.1.6 $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyona $\mathbb{E}^n$ de bir eğri adı verilir. Burada $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı, $s \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir [6].

Tanım 2.1.7 $\mathbb{E}^n$ de bir M eğrisi (I, α) ve (J, β) gibi iki koordinat komşuluğu ile verilsin.

$h = \alpha^{-1} \circ \beta: J \rightarrow I$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna M eğrisinin I aralığındaki parametresinin J aralığındaki parametre ile değişimi denir [6].

Tanım 2.1.8 $f, \mathbb{R}^n$ uzayından $\mathbb{R}$ ye giden bir fonksiyon olsun. f sürekli ise f fonksiyonu C^0 sınıfından bir fonksiyondur. $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye giden C^0 sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$ nin her noktasında f fonksiyonunun kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonuna C^1 sınıfındandır denir. f fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ nin her bir noktasında k ıncı mertebeden kısmi türevleri var ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyona C^k sınıfındandır denir. $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye giden C^k sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ biçiminde gösterilir. $\mathbb{R}^n$ nin her bir p noktasında f fonksiyonunun her mertebeden kısmi türevleri varsa f fonksiyonuna C^∞ sınıfındandır veya düzgün fonksiyondur denir. $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye giden C^∞ sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ biçiminde gösterilir. $p \in \mathbb{R}^n$ için f fonksiyonu p noktasının en az bir açık komşuluğunda düzgün ise f fonksiyonu, p noktasında C^∞ sınıfındandır veya düzgün fonksiyondur denir [9].

Tanım 2.1.9 $I, \mathbb{R}$ reel sayılar cisminin bir açık aralığı olmak üzere, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ biçiminde diferensiyellenebilir Şekil 2.1'deki α dönüşümüne, $\mathbb{E}^n$ uzayında bir eğri denir [9].



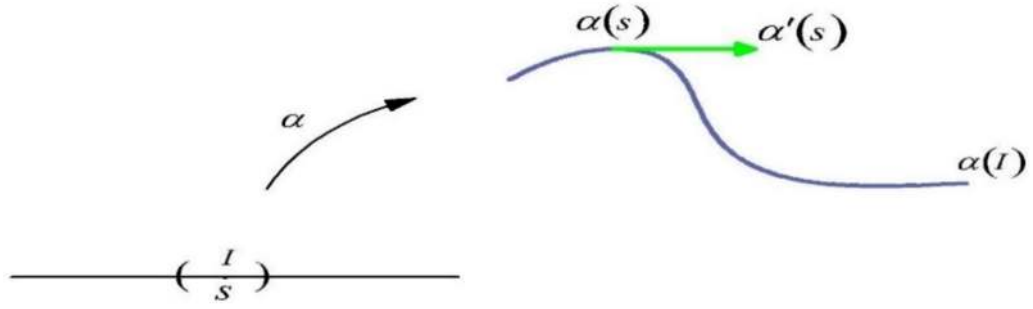
Şekil 2.1. Öklid Uzayında Eğri

Tanım 2.1.10 $I, \mathbb{R}$ reel sayılar cisminin bir açık aralığı olmak üzere, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ bir diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $\alpha'(t)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir [16].

Tanım 2.1.11 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri denir [9].

Tanım 2.1.12 α eğrisinin bir birim hızlı eğri olması için gerek ve yeterli şart $\|\alpha'\| = 1$ olmasıdır.

$\mathbb{E}^n$ uzayında birim hızlı regüler bir $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi için Şekil 2.2'de verilen α eğrisi için $\vec{T}(s) = \alpha'(s)$ ise verilen $\vec{T}(s)$ vektörüne, α' eğrisinin $\alpha'(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü veya hız vektörü denir.



Şekil 2.2 Öklid uzayında hız vektörü

2.2 Serret -Frenet ve Alternatif Çatılar

2.2.1 Serret -Frenet Çatısı

Tanım 2.2.1.1 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi için $\vec{T}(s) = \alpha'(s)$ eşitliğiyle belirli $\vec{T}(s)$ vektörüne α eğrisinin s noktasındaki birim teğet vektörü denir [9].

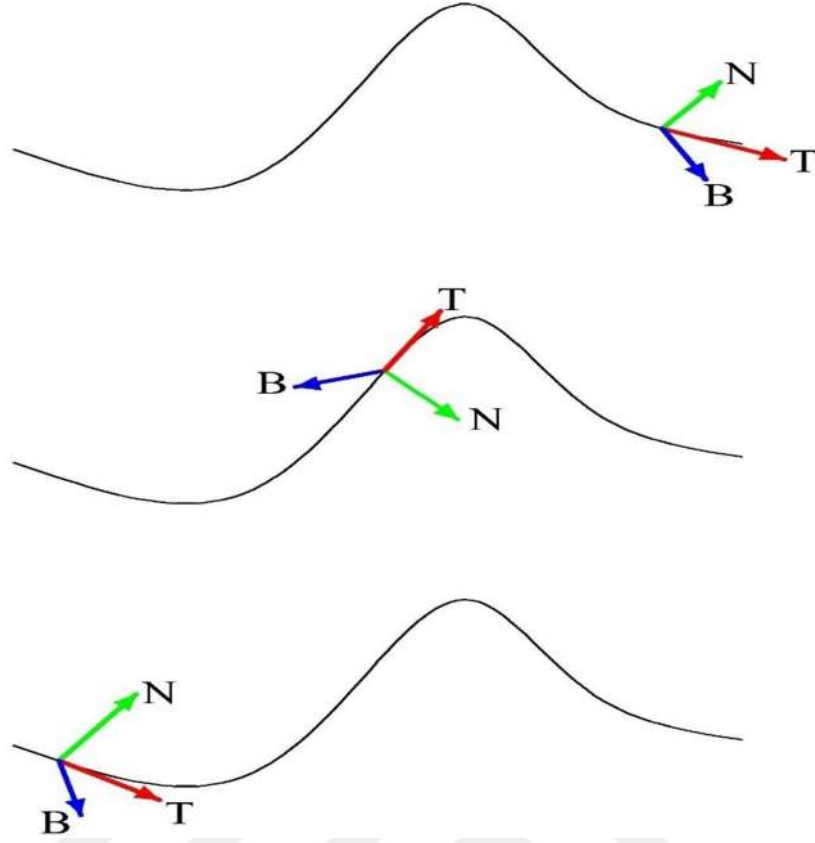
Tanım 2.2.1.2 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için,

$$\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$S \rightarrow \kappa(s) = \left\| \vec{T}'(s) \right\| \quad (2.1)$$

fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu ve $\kappa(s)$ sayısına eğrinin S noktasındaki eğriliği denir [9].

Tanım 2.2.1.3 $\mathbb{E}^n$ de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $S = \{\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(r)}(t)\}$ lineer bağımsız sistemi göz önüne alınsın. Bu sisteme Gram-Schmidth ortogonalleştirme ve ortonormalleştirme metodu uygulanırsa; elde edilen sisteme $\{V_1(t), V_2(t), \dots, V_r(t)\}$ $r \leq n$ Serret – Frenet r – ayaklısı veya r – ayaklı alanı, Şekil 2.3'teki her bir $V_i(t)$, $1 \leq i \leq r$ vektörlerine de Frenet vektörleri adı verilir.



Şekil 2.3 $\mathbb{E}^3$ te Serret-Frenet vektörleri

Tanım 2.2.1.4 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için, $\bar{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \bar{t}'(s)$ eşitliği ile belirli $\bar{N}(s)$ vektörüne, eğrinin s noktasındaki asli normali denir [6].

Tanım 2.2.1.5 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için, $\bar{B}(s) = \bar{T}(s) \times \bar{N}(s)$ eşitliği ile tanımlı $\bar{B}(s)$ vektörüne, eğrinin s noktasındaki binormali denir [16].

Tanım 2.2.1.6 $\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s)$ vektörlerine $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin $a(s)$ noktasındaki Serret-Frenet vektörleri denir. $\{\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s)\}$ kümesine, α eğrisinin $a(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. $\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s)$ vektör alanlarına, α eğrisi üstünde Serret-Frenet vektör alanları denir [16].

Tanım 2.2.1.7 $\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)$, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektörleri olmak üzere, $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau(s) = -\langle \vec{B}'(s), \vec{N}(s) \rangle$ fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir [9].

Teorem 2.2.1.8 Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olmak üzere; Frenet-Serret vektör alanlarının türev matrisini aşağıdaki şekilde verilir.

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

veya

$$\vec{T}' = \kappa \vec{N}$$

$$\vec{N}' = -\kappa \vec{T} + \tau \vec{B}$$

$$\vec{B}' = -\tau \vec{N}$$

olarak türev denklemleri verilir [9].

Teorem 2.2.1.9 $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$, $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları, olduğuna göre

$$\begin{aligned} \vec{N} \times \vec{B} &= \vec{T} \\ \vec{B} \times \vec{T} &= \vec{N} \\ \vec{T} \times \vec{N} &= \vec{B} \end{aligned} \tag{2.2}$$

dir [9].

2.2.2 {N,C,W} Alternatif Çatısı

Tanım 2.2.2.1 $\mathbb{E}^3$ de γ eğrisi boyunca $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ alternatif hareketli çatısı sırasıyla birim asal normal vektör, birim asal normal vektörün türevi ve Darboux vektörü

$$\vec{N}, \quad C = \frac{\vec{N}'}{\|\vec{N}'\|} \quad \text{ve} \quad \vec{W} = \frac{\tau \vec{T} + \kappa \vec{B}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \quad (2.3)$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Bu alternatif hareketli $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ çatısının türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \vec{N}' \\ \vec{C}' \\ \vec{W}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f(s) & 0 \\ -f(s) & 0 & g(s) \\ 0 & -g(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{C} \\ \vec{W} \end{bmatrix},$$

matris formu veya

$$\begin{aligned} \vec{N}' &= f(s)\vec{C} \\ \vec{C}' &= -f(s)\vec{N} + g(s)\vec{W} \\ \vec{W}' &= -g(s)\vec{C} \end{aligned}$$

denklemleri ile verilir. $\mathcal{V}$ eğrisinin alternatif hareketli çatıya göre eğrilikleri

$$\sigma = \frac{\kappa^2 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'}{\left(\kappa^2 + \tau^2 \right)^{3/2}} = sbt$$

$$\text{olmak üzere} \quad f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \quad \text{ve} \quad g = \sigma f = \frac{\kappa^2 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'}{\left(\kappa^2 + \tau^2 \right)} \quad \text{eşitlikleri ile hesaplanır [21]. Buradan}$$

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{g(s)} \quad \text{ve} \quad \bar{\tau} = \frac{\tau}{g(s)} \quad \text{dönüşümleri yardımıyla alternatif hareketli} \quad \{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\} \quad \text{çatısı} \quad \{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$$

Frenet-Serret çatısı arasında aşağıdaki geçişi trigonometrik fonksiyonları kullanmadan da yapabiliriz.

$$\begin{aligned} \vec{T} &= -\kappa \vec{C} + \tau \vec{W} \\ \vec{N} &= \vec{N} \\ \vec{B} &= \tau \vec{C} + \kappa \vec{W} \end{aligned}$$

geçiş denklemleri yardımıyla eğrilik ve burulma ile diğer karakterizasyonlar rahatlıkla yapılabilir.

2.2.3 Tip-1 Bishop Çatısı

Tanım 2.2.3.1 Tip-1 Bishop çatısı eğrinin hareketli bir ortonormal çatısının sadece teğetine paralel olarak eğri boyunca taşınmasını sağlar. Bu çatı eğrinin ikinci türevi olmadığı durumlarda bile iyi bir şekilde tanımlanabilir. k_1 ve k_2 Tip-1 Bishop eğrilikleri olmak üzere, γ eğrisinin

$\{\vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ Tip-1 Bishop çatısının türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}_1' \\ \vec{N}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix}$$

matris formu ile ifade edilir. Frenet çatısı ile Bishop çatısı arasındaki dönüşüm matrisi

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada $\varphi(s) = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$, $\tau(s) = \varphi'(s)$ ve $\kappa(s) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ eşitliklerinin

sağlandığı görülmektedir. Ayrıca Tip-1 Bishop eğrilikleri $k_1(s) = \kappa \cos \varphi(s)$ ve $k_2(s) = \kappa \sin \varphi(s)$ eşitlikleri ile hesaplanır [17].

2.2.4 Tip-2 Bishop Çatısı

Tanım 2.2.4.1 Tip-2 Bishop çatısı Öklid uzayında bir eğrinin ortonormal çatısının sadece binormal vektörüne paralel olarak bir eğri boyunca taşınmasını ifade eder. Bu çatı eğrinin ikinci türevi olmadığı durumlarda alternatif olarak kullanılabilir. $\mathbb{E}^3$ γ eğrisinin Tip-2 Bishop çatısı

$\{\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{B}\}$ olup türev denklemlerin

$$\begin{bmatrix} \vec{N}_1' \\ \vec{N}_2' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & -k_2 \\ k_1 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

matris formudur. Burada k_1 ve k_2 Tip-2 Bishop çatısının eğrilikleridir. Frenet çatısı ile Tip-2 Bishop çatısı arasındaki geçiş matris formu

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

ile ifade edilir. Tip-2 Bishop çatısının eğrilikleri $k_1(s) = -\tau \cos \theta(s)$ ve $k_2(s) = -\tau \sin \theta(s)$ eşitlikleri ile hesaplanır. Bu eğriliklerden faydalanarak

$$\varphi' = \kappa = \frac{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'}{1 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2} \quad \text{ve} \quad \varphi(s) = \int_0^s \kappa(s) ds$$

denklemleri yazılabilir [17].

2.2.5 N- Bishop Çatısı

Tanım 2.2.5.1. 3 boyutlu Öklid uzayında bir γ eğrisinin N-Bishop çatısı, ortonormal $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ alternatif çatısının sadece normal vektörüne paralel olarak bir γ eğrisi boyunca taşınmasını ifade eder. Bu çatı γ eğrisinin ikinci türevi olmadığı durumlarda alternatif olarak kullanılabilir. γ eğrisi $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri olsun. γ eğrinin N-Bishop çatısı $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ olup türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \vec{N}' \\ \vec{N}_1' \\ \vec{N}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \\ \vec{N} \end{bmatrix}$$

matris formudur. γ eğrinin ortonormal $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ alternatif çatısının normal vektörüne paralel keyfi bir φ açısı ile döndürerek N-Bishop çatısı $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ bulunur. Buradaki φ açısı $\vec{N}_1$ ve

$\vec{C}$ vektörleri arasındaki açıdır. $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ alternatif çatısı ile $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ N-Bishop çatısı arasındaki dönüşüm

$$\begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{C} \\ \vec{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \\ \vec{N} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

matris formu ile hesaplanır. Burada $k_1 = f \cos \varphi(s)$ ve $k_2 = f \sin \varphi(s)$ N-Bishop çatısının eğrilikleridir. $\vec{N}_1$ ve $\vec{C}$ vektörleri arasındaki φ açısı

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^s g(t) dt = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$$

eşitliği ile bulunur [22].

2.3 Smarandache Eğrileri

Tanım 2.3.1 Herhangi bir eğrinin Frenet vektörleri, konum vektörü olarak alındığında bu vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılan vektörün çizdiği regüler eğriye Smarandache eğrisi denir.

Tanım. 2.3.2 s yay parametresi ve $\mu = \mu(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\mu(s)$ eğrisinin Serret-Frenet vektörleri $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ olmak üzere,

$$V_{TN}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{T} + \vec{N})$$

şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\vec{T} \vec{N}$ Smarandache eğrisi denir.

Tanım 2.3.3 s yay parametresi ve $\mu = \mu(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\mu(s)$ eğrisinin Serret-Frenet vektörleri $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ olmak üzere,

$$V_{TB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{T} + \vec{B})$$

şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\vec{T} \vec{B}$ Smarandache eğrisi denir.

Tanım 2.3.4 s yay parametresi ve $\mu = \mu(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\mu(s)$ eğrisinin Serret-Frenet vektörleri $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ olmak üzere,

$$V_{NB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{N} + \vec{B})$$

şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\vec{N}\vec{B}$ Smarandache eğrisi denir.

Tanım 2.3.5 s yay parametresi ve $\mu = \mu(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\mu(s)$ eğrisinin Serret-Frenet vektörleri $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ olmak üzere,

$$V_{TNB}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{T} + \vec{N} + \vec{B})$$

şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\vec{T}\vec{N}\vec{B}$ Smarandache eğrisi denir.

Tanım. 2.3.6 s yay parametresi ve $\mu = \mu(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı regüler bir dual eğri olsun. $\mu(s)$ eğrisinin NCW çatısının vektörleri $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ olmak üzere,

$$V_{NC}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{N} + \vec{C})$$

şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\vec{N}\vec{C}$ Smarandache eğrisi denir.

Tanım 2.3.7 s yay parametresi ve $\mu = \mu(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\mu(s)$ eğrisinin NCW çatısının vektörleri $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ olmak üzere,

$$V_{NW}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{N} + \vec{W})$$

şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\vec{N}\vec{W}$ Smarandache eğrisi denir.

Tanım 2.3.8 s yay parametresi ve $\mu = \mu(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\mu(s)$ eğrisinin NCW çatısının vektörleri $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ olmak üzere,

$$V_{CW}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{C} + \vec{W})$$

şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\vec{C}\vec{W}$ Smarandache eğrisi denir.

Tanım 2.3.9 s yay parametresi ve $\mu = \mu(s)$ dual eğrisi $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\mu(s)$ eğrisinin NCW çatısının vektörleri $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ olmak üzere,

$$V_{NCW}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{N} + \vec{C} + \vec{W})$$

şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\vec{N}\vec{C}\vec{W}$ Smarandache eğrisi denir.

Tanım. 2.3.10 s yay parametresi ve $\mu = \mu(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\mu(s)$ eğrisinin N-Bishop çatısının vektörleri $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ olmak üzere,

$$V_{NN_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{N} + \vec{N}_1)$$

şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\vec{N}\vec{N}_1$ Smarandache eğrisi denir.

Tanım 2.3.11 s yay parametresi ve $\mu = \mu(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\mu(s)$ dual eğrisinin N-Bishop vektörleri $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ olmak üzere,

$$V_{NN_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{N} + \vec{N}_2)$$

şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\vec{N}\vec{N}_2$ Smarandache eğrisi denir..

Tanım 2.3.12 s yay parametresi ve $\mu = \mu(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\mu(s)$ dual eğrisinin N-Bishop vektörleri $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ olmak üzere,

$$V_{N_1N_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{N}_1 + \vec{N}_2)$$

şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\vec{N}_1\vec{N}_2$ Smarandache eğrisi denir.

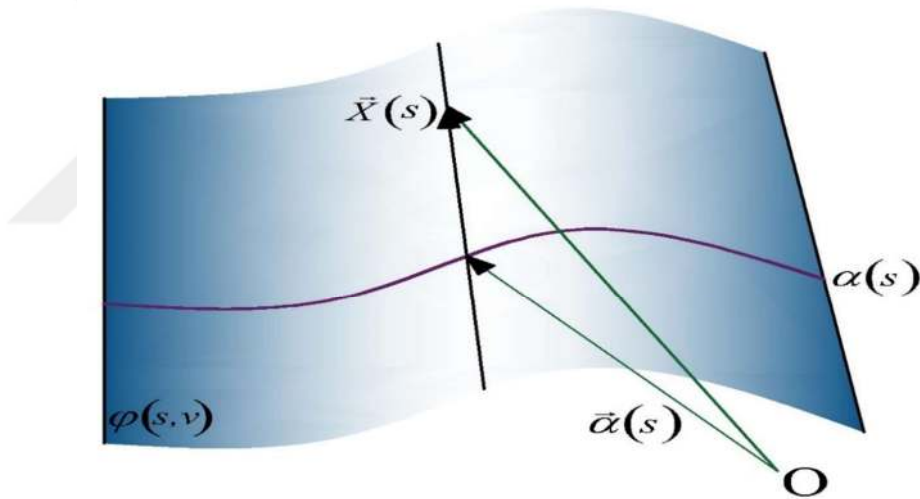
Tanım 2.3.13 s yay parametresi ve $\mu = \mu(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\mu(s)$ eğrisinin N-Bishop vektörleri $\{\overline{N}, \overline{N}_1, \overline{N}_2\}$ olmak üzere,

$$V_{NN_1N_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\overline{N} + \overline{N}_1 + \overline{N}_2)$$

şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\overline{NN_1N_2}$ Smarandache eğrisi denir.

2.4. Regle Yüzeyler

Tanım 2.4.1. Şekil 2.4’ deki gibi bir $M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında $\mathbb{E}^3$ ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir regle yüzey ve $P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin doğrultmanı denir.



Şekil 2.4. Öklid uzayında bir regle yüzey

Teorem 2.4.2 $M \subset \mathbb{E}^3$ bir regle yüzey olsun. M nin doğrultmanları, M de hem asimptotik ve hem de jeodezik çizgilerdir.

İspat. $\overline{X} \in X(M)$ M nin bir doğrultmanının teğet vektör alanı olsun. Her bir doğrultman, bir doğru olduğundan, $\mathbb{E}^3$ de jeodeziktir. Böylece,

$$D_{\overline{X}} \overline{X} = 0$$

elde edilir. Bu ise $D_{\vec{X}}\vec{X} = D_{\vec{X}}\vec{X} + \langle S(\vec{X}), \vec{X} \rangle \vec{N}$ Gauss denkleminde, $0 = \langle S(\vec{X}), \vec{X} \rangle \vec{N}$, $D_{\vec{X}}\vec{X} \in T_M$, $N \in T_M^\perp$, $T_M \cap T_M^\perp = \vec{0}$ olduğundan, $D_{\vec{X}}\vec{X} = 0$ ve $\langle S(\vec{X}), \vec{X} \rangle = 0$ olması gerekir. $D_{\vec{X}}\vec{X} = 0$ olduğundan M nin doğrultmanları, M nin jeodezik çizgileri olurlar. $\langle S(\vec{X}), \vec{X} \rangle = 0$ olması ise bu doğrultmanların asimptotik çizgiler olduğunu gösterir.

Teorem 2.4.3 $M \subset \mathbb{E}^3$ bir regle yüzey olsun. K ve H da sırasıyla M nin Gauss ve ortalama eğrilik fonksiyonu, sırasıyla E, F, G I. esas formun ve K, L, M de II. esas formun katsayıları olmak üzere

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (2.5)$$

$$H = \frac{EN - MF + GL}{2(EG - F^2)} \quad (2.6)$$

dir. Aynı zamanda $\forall P \in M$ için $K(P) \leq 0$ dır.

Tanım 2.4.4 Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi denir. Anadoğruların birim doğrultman vektörü $\vec{X}$ olan bir regle yüzeyinin dralini $P_{\vec{X}}$ ile gösterelim.

Komşu anadoğruların orta dikmesi doğrultusundaki birim vektör, vektörel çarpım ile $\vec{X} \wedge \vec{X}'$ olduğundan bu doğrultudaki birim vektör $\frac{\vec{X} \wedge \vec{X}'}{\|\vec{X}'\|}$ dir, burada $\vec{X}' = D_t \vec{X}$ dir. Dayanak eğrisinin

komşu iki noktası, $\vec{\alpha}(s)$ ve $\vec{\alpha}(s+ds) = \vec{\alpha}(s) + d\vec{\alpha}(s)$ olduğundan bu noktalardaki ana doğrular arasındaki en kısa uzaklık $d\vec{a}$ vektörünün $\frac{\vec{X} \wedge \vec{X}'}{\|\vec{X}'\|}$ vektörü üzerindeki izdüşümüdür. Böylece en

kısa uzaklık k ile gösterilse $k = \langle d\vec{a}, \frac{\vec{X} \wedge \vec{X}'}{\|\vec{X}'\|} \rangle$ ve $k = \frac{\det[d\vec{a}, \vec{X}, \vec{X}']}{\|\vec{X}'\|}$ olarak bulunur. Eğer

anadoğruların küresel göstergesini göz önüne alırsak bu gösterge yay elementi olan

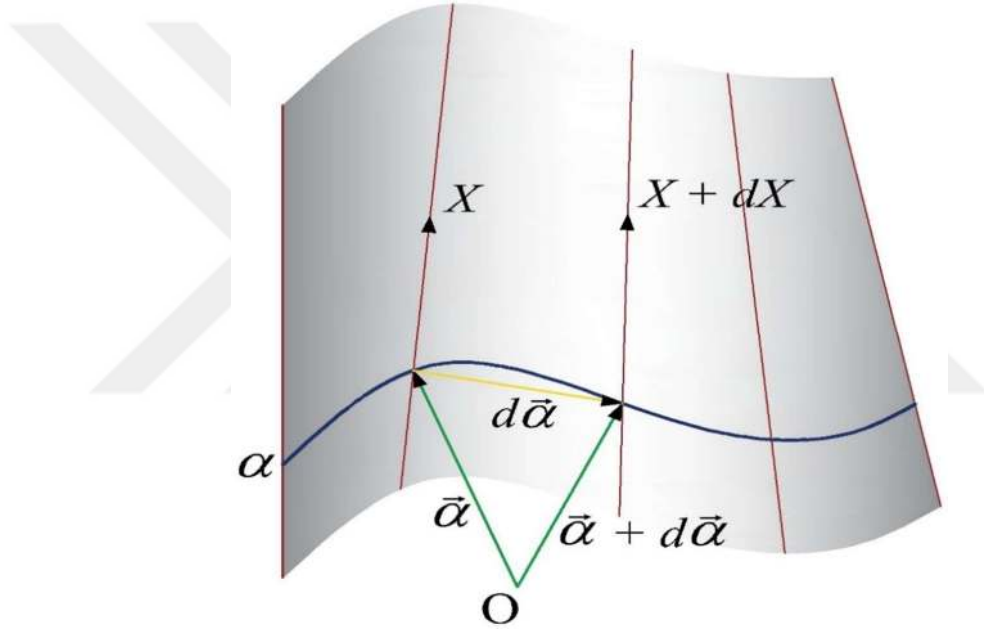
$d\vec{\omega} = \left\| \frac{d\vec{X}}{ds} \right\| ds = \|D_{\vec{T}} \vec{X}\| ds = \sqrt{a^2 + c^2} ds$ komşu iki ana doğru arasındaki açı olarak alınabilir.

Böylece regle yüzeyin drali için

$$P_{\vec{X}} = \frac{k}{d\vec{\omega}} = \frac{\det[\vec{d\vec{\alpha}}, \vec{X}, \vec{X'}]}{\|\vec{X'}\|^2} = \frac{c}{a^2 + c^2} \quad (2.7)$$

bulunur. Regle yüzeyler için dral koordinat değişimlerine göre en basit diferansiyel invaryanttır.

Şekil 2.5'te bir regle yüzeyine ait dağılma parametresi (drali) verilmiştir.



Şekil 2.5 Regle Yüzeyinin Dağılma Parametresi

Tanım 2.4.5 $\mathcal{G}: I \times R \rightarrow \mathbb{E}^3$, $\mathcal{G}(t, v) \rightarrow \mathcal{G}(t, v) = \vec{\alpha}(t) + v\vec{X}(t)$ regle yüzeyi $\forall t \in I$ için $\mathcal{G}(t + 2\pi, v) = \mathcal{G}(t, v)$ olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye kapalıdır denir. Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri ve anadoğrularının küresel göstergeleri kapalı eğrilerdir. Bir diğer ifade ile bir periyod sonra her anadoğru kendisi üzerine gelir.

Tanım 2.4.6 Bir $\mathcal{G}(t, v)$ regle yüzeyinin anadoğrularının herbirini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir.

Tanım 2.4.7 Bir $\mathcal{G}(t, \nu)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına boğaz(merkez veya striksiyon) noktası adı verilir.

Tanım 2.4.8 Bir $\mathcal{G}(t, \nu)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz çizgisi (eğrisi) adı verilir.

Tanım 2.4.9 $c \neq 0$ olmak üzere, kapalı M regle yüzeyi $\mathcal{G}(t, \nu) = \vec{\alpha}(t) + \nu \vec{X}(t)$ için atlas $\{(I \times \mathbb{R}, \mathcal{G})\}$ olarak verilsin. M nin her bir doğrultmanı üzerinde Şekil 2.5'teki değerine karşılık gelen noktaya o doğrultman üzerindeki merkez nokta (boğaz noktası) ve M nin merkez noktalarının geometrik yerine de M nin striksiyon çizgisi denir.

Teorem 2.4.10 M regle yüzeyi $\{(I \times \mathbb{R}, \mathcal{G})\}$ atlası ile verilmiş olsun. O zaman, $\alpha(t)$ noktasından geçen anadoğrultman üzerinde $\mathcal{G}(t, \nu_0)$ noktası merkez noktasıdır. $\Leftrightarrow \alpha$ nın teğet vektör alanı $\vec{T}$ ve doğrultmanın teğet vektör alanında $\vec{X}$ olmak üzere, $\mathcal{G}(t, \nu_0)$ noktasındaki teğet düzlemin bir normali $D_{\vec{T}} \vec{X}$ dir.

Sonuç 2.4.11 Bir regle yüzeyin dağılma parametresi yalnızca doğrultmanlara bağlıdır.

2.5 Dual Uzay

2.5.1 Dual Sayılar

W.K. Clifford 1873 yılında $a, a^* \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $\hat{A} = a + \varepsilon a^*$ sayısını dual sayı olarak tanımlamıştır. ε bir dual birim olarak kabul edilir. Dual sayılar halkası sıfır bölünli olmadığından yani $\varepsilon a^* \cdot \varepsilon b^* = 0$ olduğu için εa^* elemanlarının tersi yoktur. Bu nedenle dual sayılar bir cisim belirtmez sadece bir cebir belirtmektedir. Dual sayılar cümlesi

$$\mathbb{D} = \left\{ \hat{A} = a + \varepsilon a^* : a, a^* \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0 \right\}$$

ile tanımlanır [7].

Tanım 2.5.1.1 $a, a^*, b, b^* \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $\hat{A} = a + \varepsilon a^*$ ve $\hat{B} = b + \varepsilon b^*$ dual sayılarının $+: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ toplama işlemi

$$\hat{A} + \hat{B} = (a + b) + \varepsilon(a * + b *) \quad (2.8)$$

ile tanımlanır [7].

Örnek 2.5.1.2 $\hat{A} = 13 + \varepsilon 15$ ve $\hat{B} = 11 + \varepsilon 12$ dual sayıların toplamı işlemi (2.8) denkleminde

$$\hat{A} + \hat{B} = (13 + 11) + \varepsilon(15 + 12) = 24 + \varepsilon 27$$

olarak hesaplanır.

Tanım 2.5.1.3 $a, a*, b, b* \in R$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $\hat{A} = a + \varepsilon a*$ ve $\hat{B} = b + \varepsilon b*$ dual sayıların $-: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ çıkarma işlemi

$$\hat{A} - \hat{B} = (a - b) + \varepsilon(a * - b *) \quad (2.9)$$

ile tanımlanır [7].

Örnek 2.5.1.4 $\hat{A} = 199 + \varepsilon 19$ ve $\hat{B} = 72 + \varepsilon 35$ dual sayıların çıkarma işlemi (2.9) denkleminde

$$\hat{A} - \hat{B} = (199 - 72) + \varepsilon(19 - 35) = 127 - \varepsilon 16$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.5.1.5 $a, a*, b, b* \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $\hat{A} = a + \varepsilon a*$ ve $\hat{B} = b + \varepsilon b*$ dual sayıların $.: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ çarpma işlemi

$$\hat{A} \cdot \hat{B} = ab + \varepsilon(ab * + a * b) \quad (2.10)$$

olarak tanımlanır [7].

Örnek 2.5.1.6 $\hat{A} = 15 + \varepsilon 18$ ve $\hat{B} = 1 + \varepsilon 12$ dual sayıların çarpma işlemi (2.10) denkleminde $\hat{A} \cdot \hat{B} = 15 \cdot 1 + \varepsilon(15 \cdot 12 + 18 \cdot 1) = 15 + \varepsilon 198$ olarak bulunur.

Tanım 2.5.1.7 $a, a*, b, b* \in R$ $\varepsilon^2 = 0$ olsun. $\hat{A} = a + \varepsilon a*$, $\hat{B} = b + \varepsilon b*$ dual sayıların eşitlik bağıntısı

$$\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow a = b \text{ ve } \varepsilon a^* = \varepsilon b^*$$

ile verilir [7].

Böylece $\mathbb{D} = \{\hat{A} : \hat{A} = a + \varepsilon a^* \mid a, \varepsilon a^* \in R\}$ cümlesi yukarıdaki işlemler ile değişmeli bir halka oluşturur.

Tanım 2.5.1.8 $a, a^*, b, b^* \in \mathbb{R} \quad \varepsilon^2 = 0, b \neq 0$ olmak üzere $\hat{A} = a + \varepsilon a^*$ ve $\hat{B} = b + \varepsilon b^*$ dual sayılarının $\div : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ile tanımlı bölme işlemi

$$\frac{\hat{A}}{\hat{B}} = \frac{a}{b} + \varepsilon \frac{a^*b - ab^*}{b^2} \quad (2.11)$$

biçimindedir [7].

Örnek 2.5.1.9 $\hat{A} = 3 + \varepsilon 1$ ve $\hat{B} = 9 + \varepsilon 4$ dual sayıların bölme işlemi (2.11) denkleminden

$$\frac{\hat{A}}{\hat{B}} = \frac{3}{9} + \varepsilon \frac{1 \cdot 9 - 3 \cdot 4}{81} = \frac{1}{3} - \varepsilon \frac{1}{27}$$

olarak hesaplanır.

Tanım 2.5.1.10 $(\mathbb{D}^3, +)$ sistemi bir abel gruptur ve $\mathbb{D}$ üzerinde bir modüldür. $\mathbb{D}^3$ cümlesine $\mathbb{D} - \text{modül}$ de denir. $\mathbb{D} - \text{modül}$ 'ün elemanları olan sıralı dual üçlülere dual vektörler denir [7].

Tanım 2.5.1.11 $a, a^*, b, b^* \in \mathbb{R}^3$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $\hat{A} = a + \varepsilon a^*$ ve $\hat{B} = b + \varepsilon b^*$ dual vektörlerinin $+: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ toplama işlemi

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} &= (a + \varepsilon a^*) + (b + \varepsilon b^*) \\ &= (a + b) + \varepsilon (a^* + b^*) \end{aligned} \quad (2.12)$$

ile tanımlanır [7].

Örnek 2.5.1.12 $\hat{A} = (4, 5, 6) + \varepsilon(1, 2, 3)$ ve $\hat{B} = (1, 2, 3) + \varepsilon(4, 5, 6)$ verilen dual vektörlerin toplama işlemini (2.11) denkleminde

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{B} &= (4+1, 5+2, 6+3) + \varepsilon(1+4, 2+5, 3+6) \\ &= (5, 7, 9) + \varepsilon(5, 7, 9)\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.5.1.13 $a, a^*, b, b^* \in \mathbb{R}^3$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $\hat{A} = a + \varepsilon a^*$ ve $\hat{B} = b + \varepsilon b^*$ dual vektörlerinin iç çarpımı ve vektörel çarpımı

$$\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = \langle a, b \rangle + \varepsilon[\langle a^*, b \rangle + \langle a, b^* \rangle] \quad (2.13)$$

ve

$$\hat{A} \times \hat{B} = a \times b + \varepsilon(a \times b^* + a^* \times b) \quad (2.14)$$

ile tanımlıdır [7].

Örnek 2.5.1.14 $\hat{A} = (2, 5, 6) + \varepsilon(0, 2, 3)$ ve $\hat{B} = (2, 5, 4) + \varepsilon(5, 8, 7)$ dual vektörlerinin iç çarpımı (2.13) denkleminde

$$\begin{aligned}\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle &= \langle (2, 5, 6), (2, 5, 4) \rangle + \varepsilon[\langle (0, 2, 3), (2, 5, 4) \rangle + \langle (2, 5, 6), (5, 8, 7) \rangle] \\ &= 53 + \varepsilon 114\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Örnek 2.5.1.15 $\hat{A} = (1, 2, 3) + \varepsilon(1, 2, 3)$ ve $\hat{B} = (2, 3, 4) + \varepsilon(2, 3, 4)$ dual vektörlerinin vektörel çarpımı (2.14) denkleminde

$$\begin{aligned}\hat{A} \times \hat{B} &= (1, 2, 3) \times (2, 3, 4) + \varepsilon((1, 2, 3) \times (2, 3, 4) + (1, 2, 3) \times (2, 3, 4)) \\ &= (-1, 2, -1) + \varepsilon(-2, 4, -2)\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Tanım 2.5.1.16 $a, a^*, b, b^* \in \mathbb{R}^3$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $\hat{A} = a + \varepsilon a^*$ dual vektörünün normu

$$\|\hat{A}\| = \sqrt{\langle \hat{A}, \hat{A} \rangle} = \|a\| + \varepsilon \frac{\langle a, a^* \rangle}{\|a\|} \quad (2.15)$$

$\|\hat{\mathbf{A}}\| = 1$ ise $\hat{\mathbf{A}}$ ya birim dual vektör denir ve

$$S^2 = \left\{ \hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{D}^3 : \langle \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{A}} \rangle = (1, 0) \right\}$$

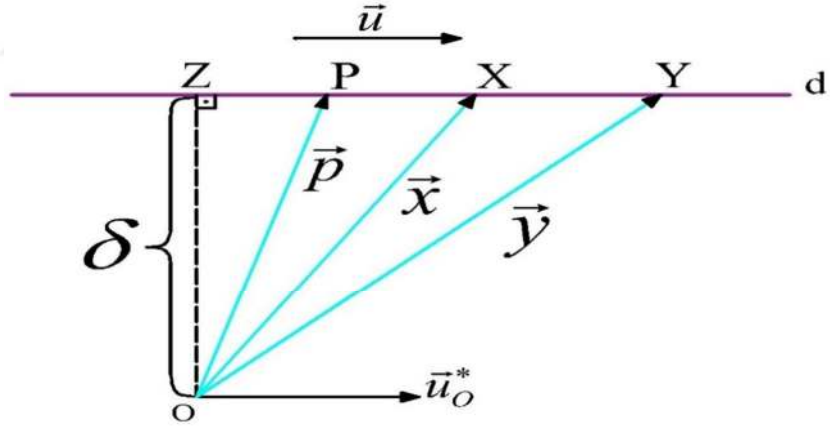
cümlesi birim dual küreyi temsil eder [7].

Örnek 2.5.1.17 $\hat{\mathbf{A}} = (4, 3, 0) + \varepsilon(5, 3, 6)$ dual vektörün normu (2.15) denkelminden

$$\|\hat{\mathbf{A}}\| = \|(4, 3, 0)\| + \varepsilon \frac{\langle (4, 3, 0), (5, 3, 6) \rangle}{\|(4, 3, 0)\|} = 5 + \varepsilon \frac{29}{5}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 2.5.1.18 (E. Study) $\hat{\mathbf{A}} \neq (0, a) \in \mathbb{D}$ olmak üzere $\|\hat{\mathbf{A}}\| = (1, 0)$ koşulunu sağlayan birim dual kürenin dual noktaları Şekil 2.6’ da verildiği gibi üç boyutlu Öklid uzayında yönlü doğrulara karşılık gelir [7].

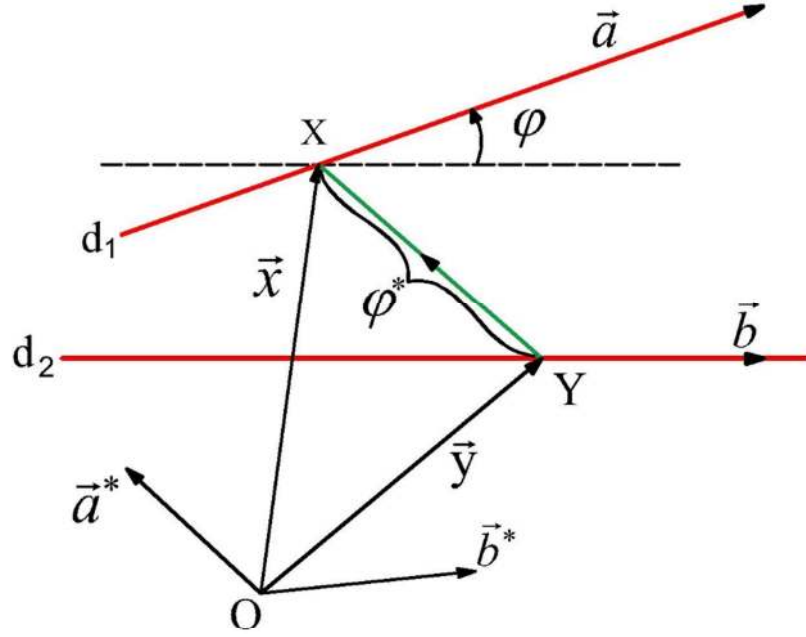


Şekil 2.6. Öklid uzayında $\vec{u}$ yönüyle verilen bir doğru

Tanım 2.5.1.19 $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{D}^3$ iki dual birim vektörlerine karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki açı θ ve en kısa uzaklık θ^* olmak üzere,

$$\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle = \cos \bar{\theta} = \cos(\theta + \varepsilon \theta^*)$$

eşitliği ile Şekil 2.7’ de verilen $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual sayısına $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ arasındaki dual açı denir [7].



Şekil 2.7. Geometrik olarak dual açı

2.5.2 Dual Uzay Eğrisi ve Çatıları

2.5.2.1 Dual Uzay Eğrileri

Tanım 2.5.2.1 $\mathbb{D}^3$ dual uzayında $\hat{\alpha}(t) = \alpha(t) + \varepsilon \alpha^*(t)$ ifadesine bir dual uzay eğrisi denir. Burada $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ ve $\alpha^*(t) = (\alpha_1^*(t), \alpha_2^*(t), \alpha_3^*(t))$, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında reel değerli eğridir. Eğer $\alpha_i(t)$ ve $\alpha_i^*(t)$, $1 \leq i \leq 3$ fonksiyonu diferansiyellenebilir ise

$$\hat{\alpha}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}^3, t \rightarrow \hat{\alpha}(t) = (\alpha_1(t) + \varepsilon \alpha_1^*(t), \dots) = \alpha(t) + \varepsilon \alpha^*(t)$$

dual uzay eğrisi de diferansiyellenebilirdir. $\hat{\alpha}(t)$ dual eğrisinin $\alpha(t)$ reel kısmına gösterge eğrisi denir. $\hat{\alpha}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}^3, t \rightarrow \hat{\alpha}(t) = \alpha(t) + \varepsilon \alpha^*(t)$ bir dual eğri olmak üzere; $\hat{\alpha}(t)$ dual uzay eğrisinin t_1 den t ye kadar olan dual yay uzunluğu

$$\bar{s} = \int_{t_1}^t \|\hat{\alpha}'(t)\| dt = \int_{t_1}^t \|\alpha'(t)\| dt + \varepsilon \int_{t_1}^t \langle \vec{T}, \alpha^{*'}(t) \rangle dt = s + \varepsilon s^*$$

olarak tanımlanır. Burada $\vec{T}$ vektörü, $\alpha(t)$ reel gösterge eğrisinin birim teğet vektörüdür.

2.5.2.2 Blaschke Çatısı

Tanım 2.5.2.2.1 $\widehat{X}(t) = x(t) + \varepsilon x^*(t)$ eğrisi dual birim küre üzerindeki bir dual eğri olmak üzere, $\widehat{X}(t)$ dual eğrisinin Blaschke çatısı

$$\begin{aligned}\widehat{A}_1 &= \widehat{X}(t), \\ \widehat{A}_2 &= \frac{\widehat{A}_1'}{\|\widehat{A}_1'\|}, \\ \widehat{A}_3 &= \widehat{A}_1 \times \widehat{A}_2\end{aligned}$$

ile tanımlanır. Blaschke çatısı için

$$\begin{aligned}\langle \widehat{A}_1, \widehat{A}_1 \rangle &= \langle \widehat{A}_2, \widehat{A}_2 \rangle = \langle \widehat{A}_3, \widehat{A}_3 \rangle = 1 \\ \langle \widehat{A}_1, \widehat{A}_2 \rangle &= \langle \widehat{A}_1, \widehat{A}_3 \rangle = \langle \widehat{A}_3, \widehat{A}_2 \rangle = 0\end{aligned}$$

iç çarpım özellikleri sağlandığı için $\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \widehat{A}_3$ doğruları üç boyutlu Öklid uzayında aynı anda karşılıklı olarak dik doğruları göstermektedir. Kesişme noktasının merkezi $\widehat{A}_1$ noktasıdır ve bu nokta dual eğrinin teğeti olarak adlandırılır. $\widehat{A}_2 = \widehat{A}(t)$ doğrusuna merkezi noktadaki $\widehat{A}(t)$ nin normal ortası denir. Blaschke çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \widehat{A}_1' \\ \widehat{A}_2' \\ \widehat{A}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P & 0 \\ -P & 0 & Q \\ 0 & -Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{A}_1 \\ \widehat{A}_2 \\ \widehat{A}_3 \end{pmatrix}$$

ile verilir. $\widehat{P} = p + \varepsilon p^* = \|\widehat{A}_1'\|$, $\widehat{Q} = q + \varepsilon q^* = \frac{\det(\widehat{A}, \widehat{A}', \widehat{A}'')}{p^2}$ ifadeleri ise Blaschke integral

invariantları olarak isimlendirilir. $\int P d(t)$ ve $\int Q d(t)$ integralleri sırasıyla $\widehat{A}_1(t)$ ve $\widehat{A}_3(t)$ dual eğrileri arasındaki dual yay uzunluğudur [38].

2.5.2.3 Dual Serret-Frenet Çatısı

$X = X(S)$ birim dual küre üzerindeki birim dual eğri olsun. Bu dual eğrinin dual Serret -Frenet çatısı dual birim vektörlerin ikili olarak vektörel çarpımıyla oluşan ortogonal çatıdır. $\vec{T}, \vec{N}$ ve $\vec{B}$ dual birim küre üzerindeki dual Frenet-Serret çatısının elemanları olmak üzere;

$$X' = \vec{T} \text{ ve } \|\vec{T}\| = 1,$$

dir. $\vec{T}$ teğet vektörün normal olmak üzere $\vec{N}$ dual vektörü $\vec{T}$ dual vektörünün normalidir ve

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'}{\|\vec{T}'\|} = \frac{-A_1 + \sum A_3}{\sqrt{1 + \sum^2}}$$

formülü ile verilir. Tanımlanan dual fonksiyonda $K = k + \varepsilon k^* = \|\vec{T}'\|$, $X = X(S)$ dual eğrisinin dual eğriligidir. Böylece dual eğrilik

$$K = \sqrt{1 + \sum^2}$$

olarak verilebilir. $\vec{B}$ dual Frenet-Serret çatısının binormali $\frac{d}{ds} \langle \vec{N}, \vec{T} \rangle = 0$, normal ve teğetin iç çarpımının sıfır olmasından $\langle \vec{N}', \vec{T} \rangle = -K$, olarak verilir. Burada $\vec{B}$ pozitif değerli olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle \vec{N}, \vec{B} \rangle &= 0 \\ \langle -K\vec{T} + \vec{T}\vec{B}, \vec{B} \rangle + \langle \vec{T}, \vec{B}' \rangle &= 0, \end{aligned}$$

olur ve dual Serret-Frenet çatısının burulması da

$$\vec{\tau} = \tau + \varepsilon \tau^* = -\langle \vec{N}, \vec{B}' \rangle.$$

olarak verilir. Ayrıca $\vec{B} = -\vec{T}\vec{N}$ dir. Dual Serret-Frenet çatısının türev formülleri matris formu

$$\begin{pmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\kappa} & 0 \\ -\hat{\kappa} & 0 & \hat{\tau} \\ 0 & -\hat{\tau} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix}$$

olarak verilir [38].

Sonuç 2.5.2.3.1 $\hat{\alpha}(s) = X$ birim hızlı bir dual eğri olmak üzere, bu eğriyi $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ çatısının elemanlarının lineer

$$-X = F(s)\vec{T} + G(s)\vec{N} + H(s)\vec{B} \quad (2.16)$$

(2.16) denkleminin her iki tarafında da türev alma işlemini uygularsak,

$$-\vec{T} = (F' - G\kappa)\vec{T} + (G' + F\kappa - H\tau)\vec{N} + (H' + G\tau)\vec{B}$$

verilen ifadeyi biraz düzenlersek,

$$\begin{aligned} 0 &= (F' - G\kappa)\vec{T} + \vec{T} + (G' + F\kappa - H\tau)\vec{N} + (H' + G\tau)\vec{B} \\ 0 &= (F' - G\kappa + 1)\vec{T} + (G' + F\kappa - H\tau)\vec{N} + (H' + G\tau)\vec{B} \end{aligned} \quad (2.17)$$

olur. (2.17) denklemini kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$F' - G\kappa + 1 = 0, G' + F\kappa - H\tau = 0, H' + G\tau = 0 \quad (2.18)$$

(2.18) deki denklemlerden $\{F', G', H'\}$ elemanlarını yalnız bırakacak olursak,

$$\begin{aligned} F' &= G\kappa - 1 \\ G' &= -F\kappa + H\tau \\ H' &= -G\tau \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. $\hat{\alpha}(s) = X$ eğrisi birim hızlı olduğundan iç çarpım aksiyomlarından

$$\langle -X, -X \rangle = \langle F(s)\vec{T} + G(s)\vec{N} + H(s)\vec{B}, F(s)\vec{T} + G(s)\vec{N} + H(s)\vec{B} \rangle = 1$$

denklemleri oluşturabiliriz, buradan,

$$F^2 + G^2 + H^2 = 1 \quad (2.19)$$

elde edilir. (2.19) denklemde taraf tarafa türev alma işlemini uygularsak aşağıdaki farklılaştırılmış denklemi verebiliriz.

$$2FF' + 2GG' + 2HH' = 0$$

$$FF' + GG' + HH' = 0$$

elde edilen bu denklemde $\{F', G', H'\}$ elemanları yerine yazılırsa,

$$F(G\kappa - 1) + G(-F\kappa + H\tau) + H(-G\tau) = 0 \quad (2.20)$$

elde edilir. (2.20) denklemde gerekli işlemler yapıldığında aşağıdaki denklem elde edilir.

$$F = 0, \quad G - \frac{1}{\kappa} = 0, \quad H - \frac{1}{\tau} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} \right) = 0$$

olur.

2.5.3 Dual Regle Yüzeyler

$\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* = X(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ doğrusunun $(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ normlanmış

homogen olmayan altı Plücker doğru koordinatları arasında

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad x_1 x_1^* + x_2 x_2^* + x_3 x_3^* = 0$$

bağıntılarından başka

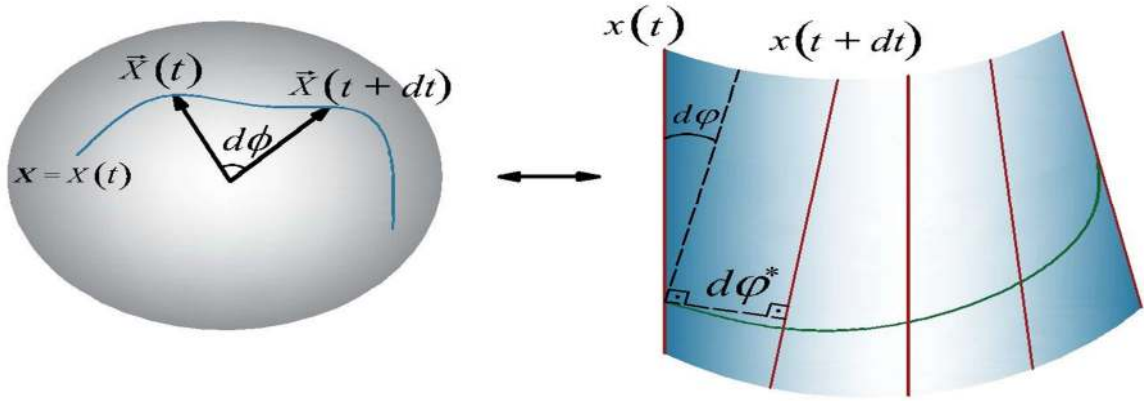
$$F(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0, \quad \phi(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0,$$

$$\psi(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$$

bağıntıları da varsa X doğrusunun bağımsız parametre sayısı bir tanedir. Bir regle yüzey bir t parametresine bağlı $\vec{X} = \vec{X}(t)$ birim dual vektörel fonksiyon olmak üzere; $\vec{X} = \vec{x}(t) + \varepsilon \vec{x}^*(t)$ şeklinde de yazılabilir. $\vec{X} = \vec{X}(t)$ fonksiyonun t ye göre istenildiği kadar türetilbildiği kabul ediliyor. $\vec{X} = \vec{x}(t) + \varepsilon \vec{x}^*(t)$ birim dual vektörüne $\|\vec{X}\| = \|\vec{OX}\| = (1, 0)$ birim dual küresi üzerinde bir dual X noktası karşılık gelir. Biliniyor ki bu noktaya da $\mathbb{R}^3$ de bir $\vec{X}$ doğrusu karşılık gelir. t parametresi değiştikçe

$$\overrightarrow{OX} = \vec{X}(t) = \vec{x}(t) + \varepsilon \vec{x}^*(t)$$

birim dual vektörü ,birim dual küre üzerinde bir $\widehat{X}$ dual eğrisi çizer. Bu eğriye de $\mathbb{R}^3$ de bir regle yüzey karşılık gelir. Şekil 2.8'deki $\widehat{X}$ dual eğrisine regle yüzeyin dual küresel resmi denir.



Şekil 2.8. Regle yüzeyin dual küresel resmi

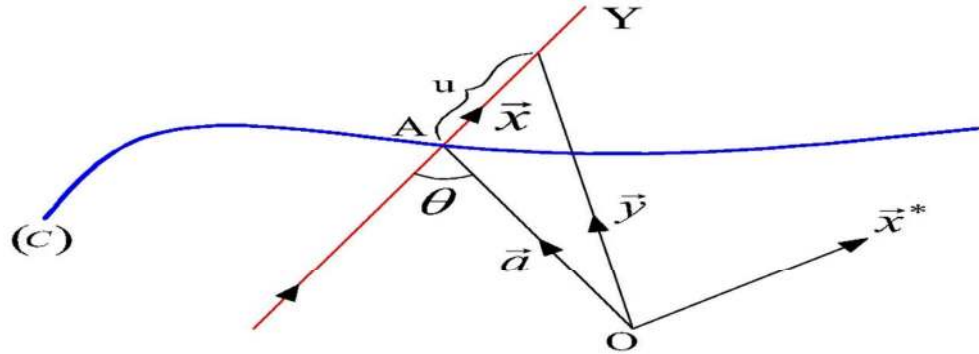
Tanım 2.5.3.1 Bir parametrelili K / K' dual küresel hareketinde K da tespit edilmiş bir X dual noktası K' sabit dual küresi üzerinde $t \in \mathbb{R}$ parametresine bağlı olarak bir $\vec{X} = \vec{X}(t)$, $\|\vec{X}(t)\| = 1$ eğrisini çizer. t - parametresine göre diferensiyallenebilen bu dual küresel eğriye $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir regle yüzey karşılık geldiğini E-Study nin dual birim küre üzerindeki bir noktanın $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yönlendirilmiş doğruya denk geldiğini gösteren teorem yardımıyla $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir regle yüzeye karşılık geldiğini söyleyebiliriz. Eğer dual küresel eğri kapalıysa bu dual küresel eğriye karşılık gelen regle yüzey de kapalıdır. $\vec{X} = \vec{X}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, dual küresel eğrisine $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında X regle yüzeyinin dual küresel resmi denir. $\vec{X} = \vec{X}(t)$, dual küresel eğrisinin $d\phi = d\phi + \varepsilon d\phi^*$ yay elementi için $d\phi^2 = \langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle$, $d\phi d\phi^* = \langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle$ elde edilir. Burada $d\phi$ ve $d\phi^*$ reel büyüklükleri ise sırasıylav $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayındaki regle yüzeyin $\vec{X}(t)$ ve $\vec{X}(t+dt)$ anadoğruları arasındaki açı ve en kısa uzaklığı temsil eder.

Tanım 2.5.3.2 $\frac{1}{d} = \frac{\langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle}{\langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle} = \frac{d\varphi d\varphi^*}{d\varphi d\varphi} = \frac{d\varphi^*}{d\varphi}$ ifadesindeki $\frac{1}{d}$ büyüklüğüne regle yüzeyin t parametresine ait olan $\vec{X}$ ana doğrusu boyunca dağılma parametresi veya drali denir.

Tanım 2.5.3.3 Komşu ana doğruları kesişen regle yüzeylere torslar veya açılabilir regle yüzeyler denir. Dral'in sıfır olması torslar için karakteristiktir. Çünkü dral sıfır ise $d\varphi^* = 0$ dır. Dral'in bu tanımı silindir için geçerli değildir. Dral'i sıfır olmayan bir regle yüzeyde komşu ana doğrular aykırıdır yani komşu iki ana doğru bir düzlem teşkil etmez. $\vec{X}(t)$ ana doğrusunun, $\vec{X}(t+dt)$ komşu ana doğrusundan en kısa uzaklıktaki X noktasına boğaz noktası veya merkez noktası veya sitriksiyon noktası denir. Bu noktanın $\vec{X}(t)$ geometrik yerine de boğaz çizgisi veya sitriksiyon çizgisi denir. Verilen bir regle yüzey üzerinde bütün ana doğruları kesen bir (C) eğrisi yüzeyin bir referans eğrisi olarak alınabilir ve bu eğriye direktris adı verilir.

Tanım 2.5.3.4 Dayanak eğrisi Şekil 2.9' da $\vec{a} = \vec{a}(t)$ denklemi ile belli olan (C) eğrisi ve ana doğruları $\vec{x} = \vec{x}(t)$ birim vektörü olan regle yüzeyin denklemi $\vec{y}(t, u) = \vec{a}(t) + u\vec{x}(t)$

dir. Burada $\vec{x}^* = \vec{a} \wedge \vec{x}$ ve $\vec{x} \wedge \vec{x}^* = \vec{a} - \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle \vec{x}$ olduklarından dolayı regle yüzeyin denklemi için $V = u + \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$ olmak üzere $\vec{y}(t, v) = \vec{x}(t) \wedge \vec{x}^*(t) + v\vec{x}(t)$ bulunur.



Şekil 2.9. Dual Regle Yüzey

3. BULGULAR

3.1 $\mathbb{E}^3$ Uzayında N-Bishop ve NCW Çatıları Arasındaki Geçiş Matrisi

Üç boyutlu Öklid uzayın da bir α birim eğrisinin N-Bishop çatısı, ortonormal $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ alternatif çatısının sadece normal vektörüne paralel olarak bir α eğrisi boyunca taşınmasını ifade eder. Bu çatı γ eğrisinin ikinci türevi olmadığı durumlarda alternatif olarak kullanılabilir. α eğrisi $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri olsun. α eğrinin N-Bishop çatısı $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ olup türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \vec{N}' \\ \vec{N}_1' \\ \vec{N}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \\ \vec{N} \end{bmatrix}$$

matris formudur. α eğrinin ortonormal $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ alternatif çatısının normal vektörüne paralel keyfi bir φ açısı ile döndürerek N-Bishop çatısı $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ bulunur. Buradaki φ açısı $\vec{N}_1$ ve $\vec{C}$ vektörleri arasındaki açıdır. $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ alternatif çatısı ile $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ N-Bishop çatısı arasındaki dönüşüm

$$\begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{C} \\ \vec{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \\ \vec{N} \end{bmatrix}$$

matris formu ile hesaplanır. Burada $k_1 = f \cos \varphi(s)$ ve $k_2 = f \sin \varphi(s)$ N-Bishop çatısının eğrilikleridir. $\vec{N}_1$ ve $\vec{C}$ vektörleri arasındaki φ açısı

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^s g(t) dt = \arctan \left(\frac{k_2}{k_1} \right)$$

eşitliği ile bulunur.

Teorem 3.1.1 α birim hızlı eğri ve $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ çatısı α eğrisinin N-Bishop çatısı olsun. s yay parametresi için N-Bishop çatısının eğrilikleri $k_1 = f \cos \varphi(s)$ ve $k_2 = f \sin \varphi(s)$ olmak üzere $\vec{N}$ ve $\vec{C}$ vektörleri arasındaki φ açısı

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^s g(t) dt = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$$

olmak üzere $\cos \varphi(s) = \frac{k_1}{f} = \bar{\kappa}$, $\sin \varphi(s) = \frac{k_2}{f} = \bar{\tau}$ değişkenleri alındığında $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ ve

$\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ çatıları arasındaki geçiş matrisi

$$\begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\tau} & \bar{\kappa} \\ 0 & \bar{\kappa} & -\bar{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{C} \\ \vec{W} \end{bmatrix}$$

dir.

İspat. $k_1 = f \cos \varphi(s)$ ve $k_2 = f \sin \varphi(s)$ eğriliklerinde $\cos \varphi(s)$ ve $\sin \varphi(s)$ ifadeleri yalnız bırakılıp değişken değiştirilmesi yapıldığında,

$$k_1 = f \cos \varphi(s) \Rightarrow \cos \varphi(s) = \frac{k_1}{f} = \bar{\kappa}$$

$$k_2 = f \sin \varphi(s) \Rightarrow \sin \varphi(s) = \frac{k_2}{f} = \bar{\tau}$$

elde edilir. $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ çatısı ile $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ çatısı arasında aşağıdaki geçiş matrisi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{C} \\ \vec{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \\ \vec{N} \end{bmatrix}$$

bu bilgiler düzenlenirse,

$$\vec{N} = \vec{N}$$

$$\vec{C} = \cos \varphi \vec{N}_1 + \sin \varphi \vec{N}_2$$

$$\vec{W} = -\sin \varphi \vec{N}_1 + \cos \varphi \vec{N}_2$$

elde edilir. Yukarıda elde ettiğimiz yeni değişkenleri getirip yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \vec{N} \\ \vec{C} &= \bar{\kappa}\vec{N}_1 + \bar{\tau}\vec{N}_2 \\ \vec{W} &= -\bar{\tau}\vec{N}_1 + \bar{\kappa}\vec{N}_2\end{aligned}$$

olur. Bu eşitliklerden $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ elemanlarını çekersek,

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \vec{N} \\ \vec{N}_1 &= \bar{\kappa}\vec{C} - \bar{\tau}\vec{W} \\ \vec{N}_2 &= \bar{\tau}\vec{C} + \bar{\kappa}\vec{W}\end{aligned}$$

bulunur. Elde ettiğimiz bu bulguları matris formunda yazarsak,

$$\begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\kappa} & -\bar{\tau} \\ 0 & \bar{\tau} & \bar{\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N} \\ \vec{C} \\ \vec{W} \end{bmatrix}$$

elde edilir ve böylelikle teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.2 Öklid 3-uzayında birim hızlı bir $\alpha(s) = \int N(s)ds$ integral eğrisinin N-Bishop çatısının bileşenlerinden oluşan

$$-\alpha(s) = \gamma_1(s)\vec{N} + \gamma_2(s)\vec{N}_1 + \gamma_3(s)\vec{N}_2$$

konum vektörünün diferansiyelinden $1 + \gamma_1'(s) - \gamma_3(s)k_1 - \gamma_3(s)k_2 = 0$, $\gamma_1(s)k_1 + \gamma_2'(s) = 0$, $\gamma_1(s)k_2 + \gamma_3'(s) = 0$ ve $\gamma_1 = 0$ eşitlikleri elde edilir.

İspat.

$$-\alpha(s) = \gamma_1(s)\vec{N} + \gamma_2(s)\vec{N}_1 + \gamma_3(s)\vec{N}_2$$

ifadesinin her iki tarafında da türev alma işlemini uygularsak,

$$-\alpha'(s) = \gamma_1'(s)\vec{N} + \gamma_1(s)\vec{N}' + \gamma_2'(s)\vec{N}_1 + \gamma_2(s)\vec{N}_1' + \gamma_3'(s)\vec{N}_2 + \gamma_3(s)\vec{N}_2'$$

elde edilir. $\{N', N_1', N_2'\}$ 'yi yerine yazarsak ve verilen ifadeyi biraz düzenlersek,

$$-\vec{N} = \gamma_1'(s)\vec{N} + (\gamma_1(s)[k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2] + \gamma_2'(s)\vec{N}_1 + \gamma_2(s)[-k_1\vec{N}] + \gamma_3'(s)\vec{N}_2 + \gamma_3(s)[-k_2\vec{N}])$$

$$0 = (1 + \gamma_1'(s) - \gamma_2(s)k_1 - \gamma_3(s)k_2)\vec{N} + (\gamma_1(s)k_1 + \gamma_2'(s))\vec{N}_1 + (\gamma_1(s)k_2 + \gamma_3'(s))\vec{N}_2$$

olur. Bu denklemi kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$1 + \gamma_1'(s) - \gamma_2(s)k_1 - \gamma_3(s)k_2 = 0,$$

$$\gamma_1(s)k_1 + \gamma_2'(s) = 0,$$

$$\gamma_1(s)k_2 + \gamma_3'(s) = 0$$

bu ifadede $\{\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'\}$ elemanlarını yalnız bırakacak olursak,

$$\gamma_1'(s) = \gamma_2(s)k_1 + \gamma_3(s)k_2 - 1,$$

$$\gamma_2'(s) = -\gamma_1(s)k_1,$$

$$\gamma_3'(s) = -\gamma_1(s)k_2$$

eşitlikleri elde edilir. $-\alpha(s)$ eğrisi birim dual küre üzerinde olduğu iç çarpım aksiyomlarından aşağıdaki denklemleri oluşturabiliriz.

$$\langle -\alpha(s), -\alpha(s) \rangle = \langle \gamma_1(s)\vec{N} + \gamma_2(s)\vec{N}_1 + \gamma_3(s)\vec{N}_2, \gamma_1(s)\vec{N} + \gamma_2(s)\vec{N}_1 + \gamma_3(s)\vec{N}_2 \rangle$$

buradan, $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ elde edilir. Bu denklemde taraf tarafa türev alma işlemini uygularsak aşağıdaki farklılaştırılmış denklemi verebiliriz.

$$2\gamma_1\gamma_1' + 2\gamma_2\gamma_2' + 2\gamma_3\gamma_3' = 0$$

ifadesinin her iki tarafı ikiye bölünürse,

$$\gamma_1\gamma_1' + \gamma_2\gamma_2' + \gamma_3\gamma_3' = 0$$

elde edilen bu denklemde $\{\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'\}$ elemanları yerine yazılırsa,

$$\gamma_1(\gamma_2(s)k_1 - \gamma_3(s)k_2 + 1) = 0$$

$$\gamma_2(-\gamma_1(s)k_1) = 0$$

$$\gamma_3(-\gamma_1(s)k_2) = 0$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında aşağıdaki denklem elde edilir. Buradan $\gamma_1 = 0$ olur.

3.2 Dual NCW Alternatif Çatısı

Üç boyutlu dual uzayda bir $\hat{\gamma}$ dual eğrisinin dual NCW çatısı, $\hat{\gamma}$ dual eğrisi $\mathbb{D}^3$ de birim hızlı regüler dual eğri ve $\left\{ \vec{\widehat{N}} = \vec{N} + \varepsilon \vec{N}^*, \vec{\widehat{C}} = \vec{C} + \varepsilon \vec{C}^*, \vec{\widehat{W}} = \vec{W} + \varepsilon \vec{W}^* \right\}$ olsun.

$\hat{\tau} = \tau + \varepsilon \tau^*$, $\hat{\kappa} = \kappa + \varepsilon \kappa^*$ olmak üzere, $\hat{\gamma}$ dual eğrisinin dual NCW alternatif hareketli çatısı sırasıyla birim dual asal normal vektör, birim asal dual normal vektörün türevi ve dual Darboux vektörü

$$\vec{\widehat{N}}, \quad \vec{\widehat{C}} = \frac{\vec{\widehat{N}}'}{\|\vec{\widehat{N}}'\|} \quad \text{ve} \quad \vec{\widehat{W}} = \frac{\hat{\tau} \vec{\widehat{T}} + \hat{\kappa} \vec{\widehat{B}}}{\sqrt{\hat{\kappa}^2 + \hat{\tau}^2}}$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Bu alternatif hareketli $\left\{ \vec{\widehat{N}}, \vec{\widehat{C}}, \vec{\widehat{W}} \right\}$ çatısının türev denklemleri

$$\begin{aligned} \vec{\widehat{N}}' &= \hat{f}(s) \vec{\widehat{C}} \\ \vec{\widehat{C}}' &= -\hat{f}(s) \vec{\widehat{N}} + g(s) \vec{\widehat{W}} \\ \vec{\widehat{W}}' &= -\hat{g}(s) \vec{\widehat{C}} \end{aligned}$$

ile verilir. $\hat{\gamma}$ dual eğrisinin alternatif hareketli çatıya göre eğrilikleri $\hat{f} = f + \varepsilon f^*$, $\hat{g} = g + \varepsilon g^*$

$$\text{olmak üzere} \quad \hat{f} = \sqrt{\hat{\kappa}^2 + \hat{\tau}^2} \quad \text{ve} \quad \hat{g} = \frac{\hat{\kappa}^2 \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} \right)'}{\left(\hat{\kappa}^2 + \hat{\tau}^2 \right)} \quad \text{eşitlikleri ile hesaplanır.}$$

3.3 Dual N-Bishop Çatısı

$\mathbb{D}^3$ dual uzayında birim hızlı regüler $\widehat{\gamma}$ dual eğrisinin, dual N-Bishop çatısı, $\{\widehat{\vec{N}} = \vec{N} + \varepsilon \vec{N}^*, \widehat{\vec{N}}_1 = \vec{N}_1 + \vec{N}_1^*, \widehat{\vec{N}}_2 = \vec{N}_2 + \vec{N}_2^*\}$ olsun. $\widehat{\gamma}$ dual eğrisinin dual N-Bishop çatısının türev denklemlerin

$$\begin{bmatrix} \widehat{\vec{N}}' \\ \widehat{\vec{N}}_1' \\ \widehat{\vec{N}}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{k}_1 & \hat{k}_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{k}_1 \\ 0 & 0 & -\hat{k}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\vec{N}}_1 \\ \widehat{\vec{N}}_2 \\ \widehat{\vec{N}} \end{bmatrix}$$

matris formudur. $\widehat{\gamma}$ dual eğrisinin ortonormal $\{\widehat{\vec{N}}, \widehat{\vec{C}}, \widehat{\vec{W}}\}$ alternatif çatısının normal

vektörüne paralel keyfi bir $\widehat{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ dual açı kadar döndürerek dual N-Bishop çatısı $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ bulunur. Buradaki $\widehat{\varphi}$ dual açısı $\widehat{\vec{N}}_1$ ve $\widehat{\vec{C}}$ dual vektörleri arasındaki açıdır. $\{\widehat{\vec{N}}, \widehat{\vec{C}}, \widehat{\vec{W}}\}$ alternatif dual çatısı ile $\{\widehat{\vec{N}}, \widehat{\vec{N}}_1, \widehat{\vec{N}}_2\}$ dual N-Bishop çatısı arasındaki dönüşüm

$$\begin{bmatrix} \widehat{\vec{N}} \\ \widehat{\vec{C}} \\ \widehat{\vec{W}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \widehat{\varphi} & \sin \widehat{\varphi} & 0 \\ -\sin \widehat{\varphi} & \cos \widehat{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\vec{N}}_1 \\ \widehat{\vec{N}}_2 \\ \widehat{\vec{N}} \end{bmatrix}$$

matrisi formu ile hesaplanır.

3.4 Dual N-Bishop Regle Yüzeyleri

E-Study dönüşümü yardımıyla dual birim küre üzerinde seçilen $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ alternatif hareketli çatısının elemanları ile dual uzayda çizilen kapalı eğriler $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir regle yüzey temsil etmektedir. Buradan seçilen dual eğriler $\widehat{\vec{N}} = \vec{N} + \varepsilon \vec{N}^*, \widehat{\vec{N}}_1 = \vec{N}_1 + \varepsilon \vec{N}_1^*, \widehat{\vec{N}}_2 = \vec{N}_2 + \varepsilon \vec{N}_2^*$ olmak üzere, $\{\widehat{\vec{N}}, \widehat{\vec{N}}_1, \widehat{\vec{N}}_2\}$ eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\varphi_{\vec{N}}(s, v) = \beta_{\vec{N}}(s) + v \vec{N}(s), \quad \beta_{\vec{N}}(s) = \vec{N} \wedge \vec{N}^*,$$

$$\varphi_{\vec{N}_1}(s, v) = \beta_{\vec{N}_1}(s) + v \vec{N}_1(s), \quad \beta_{\vec{N}_1}(s) = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_1^*,$$

$$\varphi_{\vec{N}_2}(s, v) = \beta_{\vec{N}_2}(s) + v \vec{N}_2(s) \quad , \quad \beta_{\vec{N}_2}(s) = \vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^*,$$

Bu denklemler bize $\alpha(s)$ birim hızlı eğrisini $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ vektörleri yardımıyla aşağıdaki formda verilebilir. $\alpha(s) = \lambda_1 \vec{N} + \lambda_2 \vec{C} + \lambda_3 \vec{W}$ eğrisinde $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ elemanları $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \lambda_1 \vec{N} + \lambda_2 (\vec{k}_1 \vec{N}_1 + \vec{k}_2 \vec{N}_2) + \lambda_3 (-\vec{k}_2 \vec{N}_1 + \vec{k}_1 \vec{N}_2) \\ &= \lambda_1 \vec{N} + (\lambda_2 \vec{k}_1 - \lambda_3 \vec{k}_2) \vec{N}_1 + (\lambda_2 \vec{k}_2 + \lambda_3 \vec{k}_1) \vec{N}_2 \\ &= \lambda_1 \vec{n} + \left(\lambda_2 \frac{k_1}{f} - \lambda_3 \frac{k_2}{f} \right) \vec{N}_1 + \left(\lambda_2 \frac{k_2}{f} + \lambda_3 \frac{k_1}{f} \right) \vec{N}_2 \\ &= \lambda_1 \vec{N} + \frac{1}{f} (\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2) \vec{N}_1 + \frac{1}{f} (\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1) \vec{N}_2 \end{aligned}$$

formunda verilmiştir. Bu denklemleri dikkate alıp $\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ vektörlerinin vektörel momentleri

$$\begin{aligned} \vec{N}^* &= \alpha \wedge \vec{N} \\ &= \left(\lambda_1 \vec{N} + \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \vec{N}_1 + \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \vec{N}_2 \right) \wedge \vec{N} \\ &= \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \overbrace{\vec{N}_1 \wedge \vec{N}}^{-\vec{N}_2} + \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \overbrace{\vec{N}_2 \wedge \vec{N}}^{\vec{N}_1} \\ &= \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \vec{N}_1 - \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \vec{N}_2 \end{aligned}$$

ile hesaplanır, aynı şekilde

$$\begin{aligned} \vec{N}_1^* &= \alpha \wedge \vec{N}_1 \\ &= \alpha \wedge (\kappa \vec{C} - \tau \vec{W}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\lambda_1 \vec{N} + \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \vec{N}_1 + \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \vec{N}_2 \right) \wedge \vec{N}_1 \\
&= \lambda_1 \overbrace{\vec{N} \wedge \vec{N}_1}^{\vec{N}_2} + \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \overbrace{\vec{N}_2 \wedge \vec{N}_1}^{\vec{N}} \\
&= \lambda_1 \vec{N}_2 - \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \vec{N}
\end{aligned}$$

ve

$$\vec{N}_2^* = \alpha \wedge \vec{N}_2$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\lambda_1 \vec{N} + \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \vec{N}_1 + \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \vec{N}_2 \right) \wedge \vec{N}_2 \\
&= \lambda_1 \overbrace{\vec{N} \wedge \vec{N}_2}^{\vec{N}_1} + \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \overbrace{\vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2}^{\vec{N}} \\
&= \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \vec{N} - \lambda_1 \vec{N}_1
\end{aligned}$$

olur. Bu denklemler kullanılarak $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ dual eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s, \varphi) &= \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v \vec{N} \\
&= \vec{N} \wedge \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \vec{N}_1 - \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \vec{N}_2 \right) + v \vec{N} \\
&= \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \vec{N}_2 + \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \vec{N}_1 + v \vec{N}
\end{aligned}$$

ile hesaplanır. Aynı şekilde $\vec{\psi}_{\widehat{N}_1}$ dual eğrisi,

$$\begin{aligned}
\vec{\psi}_{\widehat{N}_1}(s, v) &= \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_1^* + v \vec{N}_1 \\
&= \vec{N}_1 \wedge \left(\lambda_1 \vec{N}_2 - \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \vec{N} \right) + v \vec{N}_1 \\
&= \lambda_1 \vec{N} + \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \vec{N}_2 + v \vec{N}_1
\end{aligned}$$

ve $\vec{\psi}_{\widehat{N}_2}$ dual eğrisi de

$$\begin{aligned}\vec{\psi}_{\widehat{N}_2}(s, v) &= \vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^* + v \vec{N}_2 \\ &= \vec{N}_2 \wedge \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \vec{N} - \lambda_1 \vec{N}_1 \right) + v \vec{N}_2 \\ &= \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \vec{N}_1 + \lambda_1 \vec{N} + v \vec{N}_2\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.4.1 $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ dual eğrileri kapalı bir regle yüzeyini belirtmek üzere,

$$P_{\widehat{N}} = \frac{k_2 \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)'}{k_1^2 + k_2^2}, \quad P_{\widehat{N}_1} = - \frac{\lambda_1 k_2 + \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)'}{k_1} \quad \text{ve} \quad P_{\widehat{N}_2} = \frac{\lambda_1 k_1 + \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)'}{k_2}$$

olarak hesaplanır.

İspat. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin dağılma parametresini

$$P_{\widehat{N}} = \frac{\det \left(\frac{d\beta_N}{ds_t}, \vec{N}, \frac{d\vec{N}}{ds_t} \right)}{\left\| \frac{d\vec{N}}{ds_t} \right\|^2} = \frac{\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}')}{\left\| \vec{N}' \right\|^2},$$

determinantını hesaplayabilmek için öncelikle $(\vec{N} \wedge \vec{N}^*)'$ türevi

$$\begin{aligned}(\vec{N} \wedge \vec{N}^*)' &= \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \vec{N}_2 + \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \vec{N}_1 \right)' \\ &= \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' \vec{N}_2 - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right) k_2 \vec{N} + \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' \vec{N}_1 - \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right) k_1 \vec{N}\end{aligned}$$

dir. Determinant alma işlemi

$$\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}') = \begin{vmatrix} -\frac{\lambda_2 k_2^2 + \lambda_2 k_1^2}{f} & \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f}\right)' & \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f}\right)' \\ 1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & 0 \end{vmatrix}$$

olur. Verilen dual eğrinin dağılıma parametresi

$$P_{\hat{N}} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\lambda_2 k_2^2 + \lambda_2 k_1^2}{f} & \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f}\right)' & \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f}\right)' \\ 1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & 0 \end{vmatrix}}{k_1^2 + k_2^2} = \frac{k_2 \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f}\right)'}{k_1^2 + k_2^2}$$

olarak hesaplanır. Aynı şekilde $P_{\hat{N}_1} = \frac{\det((\vec{N}_1 \wedge \vec{N}_1^*)', \vec{N}_1, \vec{N}_1')}{\|\vec{N}_1'\|^2}$ bu determinanı hesaplayabilmek

için öncelikle $(\vec{N}_1 \wedge \vec{N}_1^*)'$ türevini hesaplayalım;

$$(\vec{N}_1 \wedge \vec{N}_1^*)' = \left(\lambda_1 \vec{N} + \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \vec{N}_2 \right)'$$

$$(\vec{N}_1 \wedge \vec{N}_1^*)' = \lambda_1' \vec{N} + \lambda_1 (k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2) + \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' \vec{N}_2 - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right) k_2 \vec{N}$$

denklemleri ile elde edilir. Böylece

$$\det((\vec{N}_1 \wedge \vec{N}_1^*)', \vec{N}_1, \vec{N}_1') = \begin{vmatrix} \lambda_1' - \frac{\lambda_2 k_2^2 + \lambda_3 k_1 k_2}{f} & \lambda_1 k_1 & \lambda_1 k_2 + \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f}\right)' \\ 0 & 1 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

determinantı hesaplandığında,

$$P_{\hat{N}_1} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1' - \frac{\lambda_2 k_2^2 + \lambda_3 k_1 k_2}{f} & \lambda_1 k_1 & \lambda_1 k_2 + \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' \\ 0 & 1 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{k_1^2}$$

ile verilen dual eğrinin dağılma parametresi

$$P_{\hat{N}_1} = - \frac{\lambda_1 k_2 + \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)'}{k_1}$$

olarak bulunur. Şimdi de benzer işlemleri $P_{\hat{N}_2}$ için yapalım.

$$P_{\hat{N}_2} = \frac{\det\left(\left(\overrightarrow{N_2} \wedge \overrightarrow{N_2^*}\right)', \overrightarrow{N_2}, \overrightarrow{N_2}'\right)}{\|\overrightarrow{N_2}'\|^2}$$

$$\left(\overrightarrow{N_2} \wedge \overrightarrow{N_2^*}\right)' = \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \overrightarrow{N_1} + \lambda_1 \overrightarrow{N}\right)'$$

$$\left(\overrightarrow{N_2} \wedge \overrightarrow{N_2^*}\right)' = \left[-\left(\frac{\lambda_2 k_1^2 - \lambda_3 k_1 k_2}{f}\right) + \lambda_1'\right] \overrightarrow{N} + \left[\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f}\right)' + \lambda_1 k_1\right] \overrightarrow{N_1} + \lambda_1 k_2 \overrightarrow{N_2}$$

bu determinanı hesaplayabilmek için öncelikle $\left(\overrightarrow{N_2} \wedge \overrightarrow{N_2^*}\right)'$ türevini hesaplayalım;

$$\det\left(\left(\overrightarrow{N_2} \wedge \overrightarrow{N_2^*}\right)', \overrightarrow{N_2}, \overrightarrow{N_2}'\right) = \begin{vmatrix} -\lambda_1' + \frac{\lambda_2 k_1^2 - \lambda_3 k_1 k_2}{f} & \lambda_1 k_1 + \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f}\right)' & \lambda_1 k_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

olur. Bulduğumuz bu sonuçları denklemde yerine yazalım.

$$P_{\widehat{N}_2} = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda_1' + \frac{\lambda_2 k_1^2 - \lambda_3 k_1 k_2}{f} & \lambda_1 k_1 + \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' & \lambda_1 k_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{k_2^2}$$

determinantı hesaplandığında, dual eğrinin dağılma parametresi

$$P_{\widehat{N}_2} = \frac{\lambda_1 k_1 + \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)'}{k_2^2}$$

olur ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.2 $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin ortalama eğrilikleri ;

$$K_{\widehat{N}} = 0, \quad K_{\widehat{N}_1} = - \frac{\left(k_1 \left[\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + \lambda_1 k_2 \right] \right)^2}{\sqrt{\left(\left(\lambda_1' - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right) k_2 + \nu k_1 \right)^2 + \left(\lambda_1 k_2 + \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' \right)^2 \right)^3}} \quad \text{ve}$$

$$K_{\widehat{N}_2} = \frac{- \left(k_2 \left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_1 k_1 \right) \right)^2}{\left(\left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_1 k_1 \right)^2 + \left(- \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} k_1 + \lambda_1' - \nu k_2 \right)^2 \right)^2}$$

ve Gauss eğrilikleri

$$H_{\hat{N}} = \frac{\left\{ \left(\left(\frac{\lambda_2 k_l - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \nu k_l \right) \left[\left(\left(\frac{\lambda_3 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \nu k_2 \right) + \frac{\lambda_2 (k_l^2 + k_2^2)}{f} k_2 + \nu k_l k_2 \right] \right.}{2 \sqrt{\left(\left(\left(\frac{\lambda_2 k_l - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \nu k_l \right)^2 + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \nu k_2 \right)^2 \right)^3}},$$

$$\left. - \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \nu k_2 \right) \left(\left(\frac{\lambda_2 k_l - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \nu k_l \right) \right\}$$

$$H_{\hat{N}_l} = - \frac{\left(\begin{aligned} & 2k_l \left[\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \lambda_l k_2 \right] \lambda_l k_l^2 \\ & + \left[\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \lambda_l k_2 \right] \left[\left(\lambda_l' - \nu k_l - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right) k_2 \right)' \right. \\ & \quad \left. - \lambda_l k_l^2 - \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + (\lambda_3 k_l k_2)}{f} \right)' + \lambda_l k_2 \right) k_2 \right] \\ & + \left[\lambda_l' k_2 - \nu k_l k_2 - \left(\frac{\lambda_2 k_2^3 + \lambda_3 k_l k_2^2}{f} \right) \right] \\ & \quad \left. + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \lambda_l k_2 \right)' \right] \left[\lambda_l' - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right) k_2 - \nu k_l \right] \end{aligned} \right)$$

$$2 \sqrt{\left(\left(\lambda_l' - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right) k_2 + \nu k_l \right)^2 + \left(\lambda_l k_2 + \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' \right)^2 \right)^3}$$

ve

$$H_{\hat{N}_2} = \frac{\left\{ \begin{aligned} & -2\lambda_1 k_2^2 \left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_1 k_1 \right) \\ & - \left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_1 k_1 \right) \left[\left(\frac{\lambda_2 k_1^2 - \lambda_3 k_1 k_2}{f} - \lambda_1' - \nu k_2 \right)' - \lambda_1 k_2^2 + \lambda_1 k_1^2 + \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' k_1 \right] \\ & + \left(-\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} k_1 + \lambda_1' - \nu k_2 \right) \left[\left(\frac{\lambda_2 k_1^3 - \lambda_3 k_1^2 k_2}{f} - \lambda_1' k_1 - \nu k_1 k_2 \right) + \left(\lambda_1 k_1 + \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' \right)' \right] \end{aligned} \right\}}{2 \sqrt{\left(\left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_1 k_1 \right)^2 + \left(-\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} k_1 + \lambda_1' - \nu k_2 \right)^2 \right)^3}}$$

olarak elde edilir.

İspat. $\hat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliğini bulmak için I. esas form ve II. esas form ile birlikte normal vektör alanını bulmamız gerekli. Öncelikle $\hat{N}$ eğrisinin sırasıyla s ve ν ye göre yönlü türevlerini almamız gereklidir.

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_s} = \left[\left(\frac{\lambda_2 (k_1^2 + k_2^2)}{f} + \nu k_1 \right) \vec{N} + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \nu k_1 \right) \vec{N}_1 + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + \nu k_2 \right) \vec{N}_2 \right]$$

ve $\vec{\psi}_{\hat{N}_\nu} = \vec{N}$ dir. Buradan yönlü türevlerin iç çarpımı yardımıyla I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_s}, \vec{\psi}_{\hat{N}_s} \rangle = \left(\frac{\lambda_2 (k_1^2 + k_2^2)}{f} + \nu k_1 \right)^2 + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \nu k_1 \right)^2 + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + \nu k_2 \right)^2$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_\nu}, \vec{\psi}_{\hat{N}_\nu} \rangle = -\frac{\lambda_2 (k_1^2 + k_2^2)}{f} - \nu k_1$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_s}, \vec{\psi}_{\hat{N}_\nu} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan da I. esas form

$$I = \left(\left(\frac{\lambda_2(k_1^2 + k_2^2)}{f} + vk_1 \right)^2 + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + vk_1 \right)^2 + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + vk_2 \right)^2 \right) ds^2 + 2 \left(\frac{\lambda_2(k_1^2 + k_2^2)}{f} + vk_1 \right) ds dv + I dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanını bulmalıyız. Normal vektör alanı $\vec{n} = \frac{\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_v}}{\|\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_v}\|}$ dir. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı için öncelikle aşağıdaki determinanı

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_v} = \begin{vmatrix} -\lambda_2 \frac{(k_1^2 + k_2^2)}{f} - vk_1 & \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + vk_1 & \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + vk_2 \\ I & 0 & 0 \\ \vec{N} & \vec{N}_1 & \vec{N}_2 \end{vmatrix}$$

dir. Bu determinant yerine yazıldığında $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{\left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + vk_1 \right) \vec{N}_2 - \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + vk_2 \right) \vec{N}_1}{\sqrt{\left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + vk_1 \right)^2 + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + vk_2 \right)^2}}$$

olarak elde edilir. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{\widehat{N}_{ss}} = & - \left(\frac{\lambda_2(k_1^2 + k_2^2)}{f} + vk_1 \right)' \vec{N} + \left(\frac{\lambda_2(k_1^2 + k_2^2)}{f} + vk_1 \right) (k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2) + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + vk_1 \right)' \vec{N}_1 \\ & - \left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + vk_1 \right) k_1 \vec{N} + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + vk_2 \right)' \vec{N}_2 - \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + vk_2 \right) k_2 \vec{N} \end{aligned}$$

ifadesi biraz daha düzenlenirse

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}} = \left\{ \begin{aligned} & \left[-\left(\frac{\lambda_2(k_1^2 + k_2^2)}{f} \right)' vk_1 - \left(\frac{\lambda_3 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right) k_1 - \left(\frac{\lambda_3 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' k_2 \right] \vec{N} \\ & + \left[\frac{\lambda_2(k_1^2 + k_2^2)}{f} k_1 + vk_1^2 + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + vk_1 \right)' \right] \vec{N}_1 \\ & + \left[\left(\left(\frac{\lambda_3 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + vk_2 \right)' + \frac{\lambda_2(k_1^2 + k_2^2)}{f} k_2 + vk_1 k_2 \right] \vec{N}_2 \end{aligned} \right\}$$

olarak verilir. Benzer işlemlerle $\psi_{\hat{N}_{sv}} = k_1 \vec{N}$ ve $\psi_{\hat{N}_{vv}} = 0$ olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\hat{N}$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}}, \vec{n} \rangle = \left\{ \begin{aligned} & \frac{\left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + vk_1 \right) \left[\left(\left(\frac{\lambda_3 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + vk_2 \right)' + \frac{\lambda_2(k_1^2 + k_2^2)}{f} k_2 + vk_1 k_2 \right]}{\sqrt{\left(\frac{(\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2)'}{f} \right)^2 + \left(\frac{(\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1)'}{f} \right)^2}} \\ & - \frac{\left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + vk_2 \right) \left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + vk_1 \right)'}{\sqrt{\left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + vk_1 \right)^2 + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + vk_2 \right)^2}} \end{aligned} \right\}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{sv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen $\vec{\psi}$ (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\hat{N}} = 0 \text{ ve}$$

$$H_{\hat{N}} = \frac{\left[\left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + v k_1 \right) \left[\left(\left(\frac{\lambda_3 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + v k_2 \right) + \frac{(\lambda_2 (k_1^2 + k_2^2))}{f} k_2 + v k_1 k_2 \right] \right]}{\sqrt{\left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' \right)^2 + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' \right)^2}} - \frac{\left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + v k_2 \right) \left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + v k_1 \right)}{\sqrt{\left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + v k_1 \right)^2 + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + v k_2 \right)^2}}$$

$$2 \left(\left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + v k_1 \right)^2 + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + v k_2 \right)^2 \right)$$

olarak bulunur. Şimdi de benzer işlemleri $\hat{N}_1$ ve $\hat{N}_2$ dual eğrileri için yapalım. I. Esas formun katsayıları sırasıyla;

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{1s}} = \lambda_1' \vec{N} + \lambda_1 k_1 \vec{N}_1 + \lambda_1 k_2 \vec{N}_2 + \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' \vec{N}_2$$

$$- \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right) k_2 \vec{N} - v k_1 \vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{1v}} = \vec{N}_1$$

olmak üzere

$$E = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{1s}}, \vec{\psi}_{\hat{N}_{1s}} \rangle = \left(\lambda_1' - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right) k_2 - v k_1 \right)^2 + \lambda_1^2 k_1^2 + \left(\lambda_1 k_2 + \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' \right)^2$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{1s}}, \vec{\psi}_{\hat{N}_{1v}} \rangle = \lambda_1 k_1$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{1v}}, \vec{\psi}_{\hat{N}_{1v}} \rangle = I$$

eşitlikleri ile bulunur. Buradan I. esas form

$$I = \left(\lambda_1' - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right) k_2 - v k_1 \right)^2 + \lambda_1^2 k_1^2 + \left[\lambda_1 k_2 + \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' \right]^2 ds^2 + 2 \lambda_1 k_1 ds dv + dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği

normal vektör alanı $\vec{n} = \frac{\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1v}}}{\|\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1v}}\|}$ dir. $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı için

öncelikle aşağıdaki determinanti hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1v}} = \begin{vmatrix} \lambda_1' - \frac{(\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1)}{f} k_2 - v k_1 & \lambda_1 k_1 & \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + \lambda_1 k_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vec{N} & \vec{N}_1 & \vec{N}_2 \end{vmatrix}$$

Bu determinant yerine yazıldığında $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı,

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1v}} = - \left[\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + \lambda_1 k_2 \right] \vec{N} + \left[\lambda_1' - \frac{(\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1)}{f} k_2 - v k_1 \right] \vec{N}_2$$

$$\vec{n} = \frac{- \left[\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + \lambda_1 k_2 \right] \vec{N} + \left[\lambda_1' - \frac{(\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1)}{f} k_2 - v k_1 \right] \vec{N}_2}{\sqrt{\left[\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \right)' + \lambda_1 k_2 \right]^2 + \left[\lambda_1' - \frac{(\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1)}{f} k_2 - v k_1 \right]^2}}$$

olarak elde edilir. $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{lss}} = \left\{ \begin{aligned} & \left[\lambda'_l - vk_l - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right) k_2 \right]' \bar{N} + \left[\lambda'_l + vk_l + \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right) k_2 \right] (k_l \bar{N}_l + k_2 \bar{N}_2) \\ & + (\lambda_l k_l)' \bar{N}_l + (\lambda_l k_l^2) \bar{N} + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \lambda_l k_l \right) \bar{N}_2 - \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \lambda_l k_l \right) k_2 \bar{N} \end{aligned} \right\}$$

ifadesi biraz düzenlenirse,

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{lss}} = \left\{ \begin{aligned} & \bar{N} \left[\left(\lambda'_l + vk_l + \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right) k_2 \right)' + \lambda_l k_l^2 - k_2 \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \lambda_l k_l \right)' \right] \\ & + \bar{N}_l \left[\left(\lambda'_l k_l - vk_l^2 - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right) k_l k_2 \right) + (\lambda_l k_l)' \right] \\ & + \bar{N}_2 \left[\lambda'_l k_2 - vk_l k_2 - \left(\frac{\lambda_2 k_2^3 + \lambda_3 k_l k_2^2}{f} \right) + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \lambda_l k_2 \right)' \right] \end{aligned} \right\}$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde $\psi_{\hat{N}_{lsv}} = k_l \bar{N}$ ve $\psi_{\hat{N}_{lvv}} = 0$ olmak üzere

$$L = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{lss}}, \vec{n} \rangle = - \frac{\left\{ \begin{aligned} & \left[\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \lambda_l k_2 \right] \left[\left(\lambda'_l - vk_l - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right) k_2 \right)' \right. \\ & \left. - \lambda_l k_l^2 - \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \lambda_l k_2 \right) k_2 \right] \\ & + \left[\lambda'_l k_2 - vk_l k_2 - \left(\frac{\lambda_2 k_2^3 + \lambda_3 k_l k_2^2}{f} \right) \right] \left[\lambda'_l - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right) k_2 - vk_l \right] \\ & + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \lambda_l k_2 \right)' \left[\lambda'_l - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right) k_2 - vk_l \right] \end{aligned} \right\}}{\sqrt{\left[\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \lambda_l k_2 \right]^2 + \left[\lambda'_l - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right) k_2 + vk_l \right]^2}}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{lsv}}, \vec{n} \rangle = \frac{k_l \left[\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \lambda_l k_2 \right]}{\sqrt{\left[\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \lambda_l k_2 \right]^2 + \left[\lambda'_l - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right) k_2 + vk_l \right]^2}}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{lv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Elde edilen bu bilgiler (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$K_{\hat{N}_l} = - \frac{\left(k_l \left[\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \lambda_l k_2 \right] \right)^2}{\sqrt{\left(\left(\lambda_l' - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right) k_2 + v k_l \right)^2 + \left(\lambda_l k_2 + \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' \right)^2 \right)^3}}$$

$$H_{\hat{N}_l} = - \frac{\left(\begin{aligned} & 2k_l \left[\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \lambda_l k_2 \right] \lambda_l k_l^2 \\ & + \left[\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \lambda_l k_2 \right] \left[\left(\lambda_l' - v k_l - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right) k_2 \right)' \right. \\ & \quad \left. - \lambda_l k_l^2 - \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l k_2}{f} \right)' + \lambda_l k_2 \right) k_2 \right] \\ & + \left[\lambda_l' k_2 - v k_l k_2 - \left(\frac{\lambda_2 k_2^3 + \lambda_3 k_l k_2^2}{f} \right) \right] \\ & \quad \left. + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' + \lambda_l k_2 \right)' \right] \left[\lambda_l' - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right) k_2 - v k_l \right] \end{aligned} \right)}{2 \sqrt{\left(\left(\lambda_l' - \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right) k_2 + v k_l \right)^2 + \left(\lambda_l k_2 + \left(\frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_l}{f} \right)' \right)^2 \right)^3}}$$

olarak elde edilir. Şimdi de $\psi_{\hat{N}_2}$ dual eğrisine bakalım.

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{2S}} = \left(\frac{\lambda_2 k_l - \lambda_3 k_2}{f} \right)' \vec{N}_l - \left(\frac{\lambda_2 k_l - \lambda_3 k_2}{f} \right) k_l \vec{N} + \lambda_l' \vec{N} + \lambda_l k_l \vec{N}_l + \lambda_l k_2 \vec{N}_2 - v k_2 \vec{N}$$

verilen ifade biraz daha düzenlenirse,

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{2s}} = \left(-\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} k_1 + \lambda_1' - \nu k_2 \right) \vec{N} + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_1 k_1 \right) \vec{N}_1 + \lambda_1 k_2 \vec{N}_2$$

elde edilir. $\vec{\psi}_{\hat{N}_{2v}} = \vec{N}_2$ olduğundan I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{2v}}, \vec{\psi}_{\hat{N}_{2v}} \rangle = \left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_1 k_1 \right)^2 + \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} k_1 + \lambda_1' + \nu k_2 \right)^2 + \lambda_1^2 k_2^2$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{2v}}, \vec{\psi}_{\hat{N}_{2v}} \rangle = \lambda_1 k_2$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{2v}}, \vec{\psi}_{\hat{N}_{2v}} \rangle = I$$

ile bulunur. Buradan I. esas form

$$I = \left[\left(-\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} k_1 + \lambda_1' - \nu k_2 \right)^2 + \left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_1 k_1 \right)^2 + \lambda_1^2 k_2^2 \right] ds^2 + 2\lambda_1 k_2 ds dv + dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin

belirttiği normal vektör alanı $\vec{n} = \frac{\vec{\psi}_{\hat{N}_{2s}} \wedge \vec{\psi}_{\hat{N}_{2v}}}{\|\vec{\psi}_{\hat{N}_{2s}} \wedge \vec{\psi}_{\hat{N}_{2v}}\|}$ dir. $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör

alanı için öncelikle aşağıdaki determinanı hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{2s}} \wedge \vec{\psi}_{\hat{N}_{2v}} = \begin{vmatrix} -\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} k_1 + \lambda_1' - \nu k_2 & \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_1 k_1 & \lambda_1 k_2 \\ 0 & 0 & I \\ \vec{N} & \vec{N}_1 & \vec{N}_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{2s}} \wedge \vec{\psi}_{\hat{N}_{2v}} = - \left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_1 k_1 \right) \vec{N} + \left(-\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} k_1 + \lambda_1' - \nu k_2 \right) \vec{N}_1$$

Bu determinant yerine yazıldığında $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{-\left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f}\right)' + \lambda_1 k_1\right) \vec{N} + \left(-\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} k_1 + \lambda_1' - \nu k_2\right) \vec{N}_1}{\sqrt{\left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f}\right)' + \lambda_1 k_1\right)^2 + \left(-\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} k_1 + \lambda_1' - \nu k_2\right)^2}}$$

olarak elde edilir. $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2ss}} &= +\left(\frac{\lambda_2 k_1^2 - \lambda_3 k_1 k_2}{f} - \lambda_1' - \nu k_2\right)' \vec{N} + \left(\frac{\lambda_2 k_1^2 - \lambda_3 k_1 k_2}{f} - \lambda_1' - \nu k_2\right) (k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2) \\ &\quad \left(\lambda_1 k_1 + \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f}\right)'\right)' \vec{N}_1 - \left(\lambda_1 k_1 + \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f}\right)'\right) k_1 \vec{N} \\ &\quad + (\lambda_1 k_2)' \vec{N}_2 - \lambda_1 k_2^2 \vec{N} \end{aligned}$$

ifadesi biraz daha düzenlenirse,

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2ss}} = \left\{ \begin{aligned} &\vec{N} \left[\left(\frac{\lambda_2 k_1^2 - \lambda_3 k_1 k_2}{f} - \lambda_1' - \nu k_2\right)' - \lambda_1 k_2^2 + \lambda_1 k_1^2 + \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f}\right)' k_1 \right] \\ &+ \vec{N}_1 \left[\left(\frac{\lambda_2 k_1^3 - \lambda_3 k_1^2 k_2}{f} - \lambda_1' k_1 - \nu k_1 k_2\right) + \left(\lambda_1 k_1 + \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f}\right)'\right)' \right] \\ &+ \vec{N}_2 \left[\left(\frac{\lambda_2 k_1^2 k_2 - \lambda_3 k_1 k_2^2}{f} - \lambda_1' k_2 - \nu k_2^2\right) + (\lambda_1 k_2)' \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2sv}} = -k_2 \vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2vv}} = 0$$

olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları,

$$L = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{2ss}}, \vec{n} \rangle = \frac{\left[-\left(\left(\frac{\lambda_2 k_l - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_l k_l \right) \left[\left(\frac{\lambda_2 k_l^2 - \lambda_3 k_l k_2}{f} - \lambda_l' - \nu k_2 \right)' - \lambda_l k_2^2 + \lambda_l k_l^2 + \left(\frac{\lambda_2 k_l - \lambda_3 k_2}{f} \right)' k_l \right] + \left(-\frac{\lambda_2 k_l - \lambda_3 k_2}{f} k_l + \lambda_l' - \nu k_2 \right) \left[\left(\frac{\lambda_2 k_l^3 - \lambda_3 k_l^2 k_2}{f} - \lambda_l' k_l - \nu k_l k_2 \right) + \left(\lambda_l k_l + \left(\frac{\lambda_2 k_l - \lambda_3 k_2}{f} \right)' \right) \right] \right]}{\sqrt{\left(\left(\frac{\lambda_2 k_l - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_l k_l \right)^2 + \left(-\frac{\lambda_2 k_l - \lambda_3 k_2}{f} k_l + \lambda_l' - \nu k_2 \right)^2}}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{2sv}}, \vec{n} \rangle = \frac{k_2 \left(\left(\frac{\lambda_2 k_l - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_l k_l \right)}{\sqrt{\left(\left(\frac{\lambda_2 k_l - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_l k_l \right)^2 + \left(-\frac{\lambda_2 k_l - \lambda_3 k_2}{f} k_l + \lambda_l' - \nu k_2 \right)^2}}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{2vw}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\hat{N}_2} = \frac{-\left(k_2 \left(\left(\frac{\lambda_2 k_l - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_l k_l \right) \right)^2}{\left(\left(\left(\frac{\lambda_2 k_l - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_l k_l \right)^2 + \left(-\frac{\lambda_2 k_l - \lambda_3 k_2}{f} k_l + \lambda_l' - \nu k_2 \right)^2 \right)^2} \text{ ve}$$

$$H_{\hat{N}_2} = \frac{\left\{ \begin{aligned} & -2\lambda_1 k_2^2 \left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_1 k_1 \right) \\ & - \left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_1 k_1 \right) \left[\left(\frac{\lambda_2 k_1^2 - \lambda_3 k_1 k_2}{f} - \lambda_1' - \nu k_2 \right)' - \lambda_1 k_2^2 + \lambda_1 k_1^2 + \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' k_1 \right] \\ & + \left(-\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} k_1 + \lambda_1' - \nu k_2 \right) \left[\left(\frac{\lambda_2 k_1^3 - \lambda_3 k_1^2 k_2}{f} - \lambda_1' k_1 - \nu k_1 k_2 \right) + \left(\lambda_1 k_1 + \left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' \right)' \right] \end{aligned} \right\}}{2 \sqrt{\left(\left(\left(\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \right)' + \lambda_1 k_1 \right)^2 + \left(-\frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} k_1 + \lambda_1' - \nu k_2 \right)^2 \right)^3}}$$

elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.3 Dual darbox ($\vec{\omega}$) ve dual Steiner ($\vec{D}$) vektörlerini aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\vec{\omega} = -k_2 \vec{N}_1 + k_1 \vec{N}_2 + \varepsilon \left((hk_2 + gk_1) \vec{N} - fk_1 \vec{N}_1 - fk_2 \vec{N}_2 \right) \quad \text{ve}$$

$$\vec{D} = \oint \hat{w} = -\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1 + \varepsilon \left(\vec{N} \oint (hk_2 + gk_1) - \vec{N}_1 \oint fk_1 - \vec{N}_2 \oint fk_2 \right) \text{ dir.}$$

İspat. Darbox vektörünün tanımından

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= w + \varepsilon w^* \\ \vec{w}^* &= \alpha \wedge \vec{w} \\ &= (fN + g\vec{N}_1 + h\vec{N}_2) \wedge (-k_2 \vec{N}_1 + k_1 \vec{N}_2) \\ &= -fk_2 \vec{N}_2 + hk_2 \vec{N} - fk_1 \vec{N}_1 + gk_1 \vec{N} \\ &= (hk_2 + gk_1) \vec{N} - fk_1 \vec{N}_1 - fk_2 \vec{N}_2 \end{aligned}$$

olur, burada.

$\vec{\omega} = -k_2 \vec{N}_1 + k_1 \vec{N}_2 + \varepsilon \left((hk_2 + gk_1) \vec{N} - fk_1 \vec{N}_1 - fk_2 \vec{N}_2 \right)$ olarak elde edilir. Dual Steiner vektörün tanımından .

$$\vec{D} = \oint \hat{w} = -\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1 + \varepsilon \left(\vec{N} \oint (hk_2 + gk_1) - \vec{N}_1 \oint fk_1 - \vec{N}_2 \oint fk_2 \right)$$

olarak elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.4 $\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2$ dual eğrilerinin oluşturmuş olduğu kapalı regle yüzeylere ait dual açılara ait eğimler sırasıyla

$$\Lambda_{\widehat{N}} = -\varepsilon \left((hk_2 + gk_1) - \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \wp k_2 - \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \wp k_1 \right)$$

$$\Lambda_{\widehat{N}_1} = -\wp k_2 - \varepsilon \left(-\wp fk_1 + \lambda_1 \wp k_1 \right)$$

$$\Lambda_{\widehat{N}_2} = -\wp k_1 + \varepsilon \left(\wp fk_2 + \lambda_1 \wp k_2 \right)$$

dir.

İspat. $\Lambda_{\widehat{N}} = -\langle \vec{D}, \vec{N} \rangle = -\langle \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^*, \vec{N} + \varepsilon \vec{N}^* \rangle$

ifadesi daha açık bir halde yazılırsa

$$\begin{aligned} &= -\langle -\vec{N}_1 \wp k_2 + \vec{N}_2 \wp k_1, \vec{N} \rangle \\ &\quad - \varepsilon \left(\langle \vec{N} \wp (hk_2 + gk_1) - \vec{N}_1 \wp fk_1 - \vec{N}_2 \wp fk_2, \vec{N} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \vec{N}_1 - \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \vec{N}_2, -\vec{N}_1 \wp k_2 + \vec{N}_2 \wp k_1 \right\rangle \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada iç çarpımlar yapılırsa,

$$= -\varepsilon \left((hk_2 + gk_1) - \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \wp k_2 - \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \wp k_1 \right)$$

olarak elde edilir. Benzer işlemler $\widehat{N}_1$ ve $\widehat{N}_2$ için yapılırsa,

$$\begin{aligned} \Lambda_{\widehat{N}_1} &= -\langle \vec{D}, \vec{N}_1 \rangle = -\langle \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^*, \vec{N}_1 + \varepsilon \vec{N}_1^* \rangle \\ &= -\langle -\vec{N}_1 \wp k_2 + \vec{N}_2 \wp k_1, \vec{N}_1 \rangle \\ &\quad - \varepsilon \left(\langle \vec{N} \wp (hk_2 + gk_1) - \vec{N}_1 \wp fk_1 - \vec{N}_2 \wp fk_2, \vec{N}_1 \rangle + \left\langle \lambda_1 \vec{N}_2 - \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \vec{N}, -\vec{N}_1 \wp k_2 + \vec{N}_2 \wp k_1 \right\rangle \right) \\ &= -\wp k_2 - \varepsilon \left(-\wp fk_1 + \lambda_1 \wp k_1 \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\widehat{N}_2} &= -\langle \overrightarrow{D}, \overrightarrow{N}_2 \rangle = -\langle \overrightarrow{d} + \varepsilon \overrightarrow{d}^*, \overrightarrow{N}_2 + \varepsilon \overrightarrow{N}_2^* \rangle \\
&= -\langle -\overrightarrow{N}_1 \wp k_2 + \overrightarrow{N}_2 \wp k_1, \overrightarrow{N}_2 \rangle - \varepsilon \left(\langle \overrightarrow{N} \wp (hk_2 + gk_1) - \overrightarrow{N}_1 \wp fk_1 - \overrightarrow{N}_2 \wp fk_2, \overrightarrow{N}_2 \rangle \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \overrightarrow{N} - \lambda_1 \overrightarrow{N}_1, -\overrightarrow{N}_1 \wp k_2 + \overrightarrow{N}_2 \wp k_1 \right\rangle \right) \\
&= -\wp k_1 + \varepsilon (\wp fk_2 + \lambda_1 \wp k_2)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

3.5 Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Çatısına Göre Smarandache Eğrileri ve Karşılık Geldiği Regle Yüzeyleri

Dual N-Bishop çatısının dual bileşenleri $\widehat{N} = \overrightarrow{N} + \varepsilon \overrightarrow{N}^*, \widehat{N}_1 = \overrightarrow{N}_1 + \varepsilon \overrightarrow{N}_1^*, \widehat{N}_2 = \overrightarrow{N}_2 + \varepsilon \overrightarrow{N}_2^*$ olsun.

Tanım 3.5.1 s yay parametresi ve $\mu = \mu(s)$ eğrisi $\mathbb{D}^3$ dual uzayında birim hızlı regüler bir dual eğri olsun. $\mu(s)$ eğrisinin vektörleri $\{\overrightarrow{N}, \overrightarrow{N}_1, \overrightarrow{N}_2\}$ olmak üzere,

$$V_{\widehat{N}\widehat{N}_1}(s) = \frac{I}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N}_1)$$

şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{D}^3$ dual uzayında $\widehat{N}\widehat{N}_1$ Smarandache eğrisi denir.

Tanım 3.5.2 s yay parametresi ve $\mu = \mu(s)$ eğrisi $\mathbb{D}^3$ dual uzayında birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\mu(s)$ dual eğrisinin dual vektörleri $\{\overrightarrow{N}, \overrightarrow{N}_1, \overrightarrow{N}_2\}$ olmak üzere,

$$V_{\widehat{N}\widehat{N}_2}(s) = \frac{I}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N}_2)$$

şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{D}^3$ dual uzayında $\widehat{N}\widehat{N}_2$ Smarandache eğrisi denir..

Tanım 3.5.3 s yay parametresi ve $\mu = \mu(s)$ dual eğrisi $\mathbb{D}^3$ dual uzayında birim hızlı regüler bir dual eğri olsun. $\mu(s)$ dual eğrisinin dual vektörleri $\{\overrightarrow{N}, \overrightarrow{N}_1, \overrightarrow{N}_2\}$ olmak üzere,

$$V_{\widehat{N}_1\widehat{N}_2}(s) = \frac{I}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{N}_1 + \overrightarrow{N}_2)$$

şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{D}^3$ dual uzayında $\widehat{N}_1 \widehat{N}_2$ Smarandache eğrisi denir.

Tanım 3.5.4 s yay parametresi ve $\mu = \mu(s)$ dual eğrisi $\mathbb{D}^3$ dual uzayında birim hızlı regüler bir dual eğri olsun. $\mu(s)$ dual eğrisinin dual vektörleri $\{\overrightarrow{N}, \overrightarrow{N}_1, \overrightarrow{N}_2\}$ olmak üzere,

$$V_{\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N}_1 + \overrightarrow{N}_2)$$

şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{D}^3$ dual uzayında $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Smarandache eğrisi denir.

E-Study dönüşümü yardımıyla dual birim küre üzerinde seçilen $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ alternatif hareketli çatısının elemanları ile dual uzayda çizilen kapalı eğriler $\mathbb{D}^3$ Öklid uzayında bir regle yüzey temsil etmektedir. $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ dual Smarandache eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.

3.5.1 Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Çatısına Göre $\widehat{N}\widehat{N}_1$ Smarandache Eğrileri ve Karşılık Geldiği Regle Yüzeyler

E-Study dönüşümü yardımıyla dual birim küre üzerinde seçilen $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ alternatif hareketli çatısının elemanları ile dual uzayda çizilen kapalı eğriler $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir regle yüzey temsil etmektedir. Buradan seçilen dual eğriler $\widehat{N} = \overrightarrow{N} + \varepsilon \overrightarrow{N}^*$, $\widehat{N}_1 = \overrightarrow{N}_1 + \varepsilon \overrightarrow{N}_1^*$, $\widehat{N}_2 = \overrightarrow{N}_2 + \varepsilon \overrightarrow{N}_2^*$ olmak üzere, $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\varphi_{\widehat{N}}(s, v) = \beta_N(s) + v \overrightarrow{N}(s) \quad , \quad \beta_N(s) = \overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{N}^*,$$

$$\varphi_{\widehat{N}_1}(s, v) = \beta_{N_1}(s) + v \overrightarrow{N}_1(s) \quad , \quad \beta_{N_1}(s) = \overrightarrow{N}_1 \wedge \overrightarrow{N}_1^*,$$

$$\varphi_{\widehat{N}_2}(s, v) = \beta_{N_2}(s) + v \overrightarrow{N}_2(s) \quad , \quad \beta_{N_2}(s) = \overrightarrow{N}_2 \wedge \overrightarrow{N}_2^*,$$

Bu denklemler bize $\alpha(s)$ eğrisine ait $\alpha_{N_1}(s)$ Smarandache eğrisini $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ vektörleri yardımıyla $\alpha_{N_1}(s) = \frac{\vec{N} + \vec{N}_1}{\sqrt{2}}$ olarak verilir. Bu eğriye bağlı olarak $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ vektörlerinin vektörel momentleri sırasıyla

$$\vec{N}^* = \alpha \wedge \vec{N} = \left(\frac{\vec{N} + \vec{N}_1}{\sqrt{2}} \right) \wedge \vec{N} = -\frac{\vec{N}_2}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{N}_1^* = \alpha \wedge \vec{N}_1 = \left(\frac{\vec{N} + \vec{N}_1}{\sqrt{2}} \right) \wedge \vec{N}_1 = \frac{\vec{N}_2}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{N}_2^* = \alpha \wedge \vec{N}_2 = \left(\frac{\vec{N} + \vec{N}_1}{\sqrt{2}} \right) \wedge \vec{N}_2 = \frac{\vec{N} - \vec{N}_1}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir. Bu denklemler kullanılarak $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ dual eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri sırasıyla

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s, v) = \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v\vec{N} = \vec{N} \wedge \left(-\frac{\vec{N}_2}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{N} = \frac{\vec{N}_1}{\sqrt{2}} + v\vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_1}(s, v) = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_1^* + v\vec{N}_1 = \vec{N}_1 \wedge \frac{\vec{N}_2}{\sqrt{2}} + v\vec{N}_1 = \frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{N}_1$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_2}(s, v) = \vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^* + v\vec{N}_2 = \vec{N}_2 \wedge \left(\frac{\vec{N} - \vec{N}_1}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{N}_2 = \frac{\vec{N} + \vec{N}_1}{\sqrt{2}} + v\vec{N}_2$$

biçiminde verilir.

Teorem 3.5.1.1 $(\widehat{N}), (\widehat{N}_1), (\widehat{N}_2)$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin dağılma parametreleri $P_{\widehat{N}} = 0$, $P_{\widehat{N}_1} = 0$ ve $P_{\widehat{N}_2} = \frac{k_1}{\sqrt{2}}$ olarak hesaplanır.

İspat. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin dağılma parametresini

$$P_{\hat{N}} = \frac{\det\left(\frac{d\beta_N}{ds_t}, \vec{N}, \frac{d\vec{N}}{ds_t}\right)}{\left\|\frac{d\vec{N}}{ds_t}\right\|^2} = \frac{\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}')}{\|\vec{N}'\|^2}$$

eşitliğinden hesaplayabilmek için öncelikle $(\vec{N} \wedge \vec{N}^*)'$ türevini hesaplayalım;

$$(\vec{N} \wedge \vec{N}^*)' = \left(\frac{\vec{N}_l}{\sqrt{2}}\right)' = -\frac{k_l \vec{N}}{\sqrt{2}}$$

determinant alma işlemi yapıldıktan sonra

$$\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}') = \begin{vmatrix} -\frac{k_1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 \end{vmatrix}$$

olur ve

$$P_{\hat{N}} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{k_1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

verilen dual eğrinin dağılma parametresi $P_{\hat{N}} = 0$ olarak hesaplanır. Benzer şekilde $P_{\hat{C}}$ ve $P_{\hat{W}}$ de

$$P_{\vec{N}_l} = \frac{\det\left((\vec{N}_l \wedge \vec{N}_l^*), \vec{N}_l, \vec{N}_l'\right)}{\|\vec{N}_l'\|^2}$$

determinantını hesaplayabilmek için öncelikle $(\vec{N}_l \wedge \vec{N}_l^*)'$ türevi

$$\left(\overrightarrow{N_l} \wedge \overrightarrow{N_l^*}\right)' = \left(\frac{\overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}}\right)' = -\frac{k_2 \overrightarrow{N}}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir.

$$\det((\overrightarrow{N_1} \wedge \overrightarrow{N_1^*})', \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_1}') = \begin{vmatrix} -\frac{k_2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

determinantı hesaplandığında,

$$P_{\hat{N}_1} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{k_2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{k_1^2}} = 0$$

olarak bulunur. Şimdi de benzer işlemleri $P_{\hat{N}_2}$ için yapalım.

$$P_{\hat{N}_2} = \frac{\det\left(\left(\overrightarrow{N_2} \wedge \overrightarrow{N_2^*}\right)', \overrightarrow{N_2}, \overrightarrow{N_2'}\right)}{\left\|\overrightarrow{N_2'}\right\|^2}$$

determinantı hesaplayabilmek için öncelikle $\left(\overrightarrow{N_2} \wedge \overrightarrow{N_2^*}\right)'$ türevini hesaplayalım;

$$\left(\overrightarrow{N_2} \wedge \overrightarrow{N_2^*}\right)' = \left(\frac{\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N_l}}{\sqrt{2}}\right)' = \frac{k_l \overrightarrow{N_l} + k_2 \overrightarrow{N_2} - k_l \overrightarrow{N}}{\sqrt{2}}$$

şimdi de dağılma parametresini hesaplayabilmek için determinatın sonucu

$$\det((\vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^*)', \vec{N}_2, \vec{N}_2') = \begin{vmatrix} -\frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ k_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

olur formülde yerine yazıldığında

$$P_{\widehat{N}_2} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ k_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{k_2} = \frac{k_1}{\sqrt{2}}$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5.1.2 $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin ortalama eğrilikleri

$$K_{\widehat{N}} = -\left(\frac{-vk_1k_2 + vk_2k_1}{v^2k_1^2 + v^2k_2^2}\right)^2, \quad K_{\widehat{N}_1} = -\frac{k_1^2k_2^2}{k_2^2 + 2v^2k_1^2} \quad \text{ve} \quad K_{\widehat{N}_2} = -\frac{k_1^2k_2^2}{2\left(\frac{k_1^2}{2} + \left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2}$$

ve Gauss eğrilikleri de

$$H_{\widehat{N}} = \frac{\sqrt{2}k_1 \frac{-vk_1k_2 + vk_2k_1}{\sqrt{v^2k_1^2 + v^2k_2^2}} + \frac{vk_2\left(\frac{k_1k_2}{\sqrt{2}} + vk_2'\right) - vk_1\left(\frac{k_1k_2}{\sqrt{2}} + vk_2'\right)}{v\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}}{2(v^2k_1^2 + v^2k_2^2)},$$

$$\frac{k_1^2k_2}{2} + \frac{k_2}{\sqrt{2}}\left(\frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + vk_1'\right) + vk_1(k_2' + vk_1k_2)$$

$$H_{\widehat{N}_1} = -\frac{\quad}{k_2^2 + 2v^2k_1^2} \quad \text{ve}$$

$$H_{\widehat{N}_2} = \frac{-2k_2^2 k_1 + \frac{k_1}{\sqrt{2}} \left(\left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right)' + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_1 k_2}{\sqrt{2}} \right) - \left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) \left(vk_2 k_1 + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_1'}{\sqrt{2}} \right)}{2 \sqrt{\left(\left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{k_1^2}{2} \right)^3}}$$

olarak elde edilir.

İspat. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliğini bulmak için I. esas form ve II. esas form ile birlikte normal vektör alanını bulmamız gerekli.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} = -\frac{k_1 \vec{N}}{\sqrt{2}} + v \left(k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2 \right) \text{ ve } \psi_{\widehat{N}_v} = \vec{N}$$

Buradan I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_s}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \rangle = \frac{k_1^2}{2} + v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_v}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \rangle = \frac{k_1}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_v}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_v} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{k_1^2}{2} + v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2 \right) ds^2 + \vec{N}_2 k_1 ds dv + dv^2 \\ &= \left(\frac{k_1^2}{2} + v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2 \right) ds^2 - \vec{N}_2 k_1 ds dv + dv^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Şimdi de II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanına ihtiyacımız var. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_v}}{\|\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_v}\|} = \frac{-vk_1 \vec{N}_2 + vk_2 \vec{N}_1}{\sqrt{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2}} \text{ olarak elde edilir. } \widehat{N} \text{ dual eğrisinin belirttiği}$$

normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriyemait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}} = \frac{-k'_l \vec{N} + k_l (k_l \vec{N}_l + k_2 \vec{N}_2)}{\sqrt{2}} + vk'_l \vec{N}_l + vk_l \vec{N} + vk'_2 \vec{N}_2 + vk_2 k_2 \vec{N}$$

ifadesi biraz daha düzenlenirse

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}} = \vec{N} \left(-\frac{k'_l}{\sqrt{2}} + vk_l^2 + k_2^2 \right) + \vec{N}_l \left(\frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + vk'_l \right) + \vec{N}_2 \left(\frac{k_l k_2}{\sqrt{2}} + vk'_2 \right)$$

olarak verilir. Aynı işlemlerle $\psi_{\hat{N}_{sv}} = k_l \vec{N}_l + k_2 \vec{N}_2$ ve $\psi_{\hat{N}_{vv}} = 0$ olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\hat{N}$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}}, \vec{n} \rangle = \left\{ \frac{vk_2 \left(\frac{k_l k_2}{\sqrt{2}} + vk'_2 \right) - vk_l \left(\frac{k_l k_2}{\sqrt{2}} + vk'_2 \right)}{v\sqrt{k_l^2 + k_2^2}} \right\}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{sv}}, \vec{n} \rangle = \frac{-vk_l k_2 + vk_2 k_l}{\sqrt{v^2 k_l^2 + v^2 k_2^2}}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\hat{N}} = -\frac{\left(\frac{-vk_l k_2 + vk_2 k_l}{\sqrt{v^2 k_l^2 + v^2 k_2^2}} \right)^2}{v^2 k_l^2 + v^2 k_2^2} = -\left(\frac{-vk_l k_2 + vk_2 k_l}{v^2 k_l^2 + v^2 k_2^2} \right)^2,$$

$$H_{\hat{N}} = \frac{\sqrt{2} k_l \frac{-vk_l k_2 + vk_2 k_l}{\sqrt{v^2 k_l^2 + v^2 k_2^2}} + \frac{vk_2 \left(\frac{k_l k_2}{\sqrt{2}} + vk'_2 \right) - vk_l \left(\frac{k_l k_2}{\sqrt{2}} + vk'_2 \right)}{v\sqrt{k_l^2 + k_2^2}}}{2(v^2 k_l^2 + v^2 k_2^2)}$$

Aynı şekilde şimdi de $\{\vec{\psi}_{\hat{N}_1}, \vec{\psi}_{\hat{N}_2}\}$ yüzeyleri için Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_s}} = \frac{k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2}{\sqrt{2}} + vk_1 \vec{N} = N_I$$

elde edilir. Buradan I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_s}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_s}} \rangle = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2} + v^2 k_1^2$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_s}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_v}} \rangle = \frac{k_1}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_v}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_v}} \rangle = I$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I = \left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{2} + v^2 k_1^2 \right) ds^2 + \sqrt{2} k_1 ds dv + dv^2$$

olarak elde edilir. II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin belirttiği normal

vektör alanı $\vec{n} = \frac{\vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_v}}}{\left\| \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_v}} \right\|}$ dir. $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı için öncelikle

aşağıdaki determinanı hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_v}} = \begin{vmatrix} vk_1 & \frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_1}{\sqrt{2}} \\ 0 & I & 0 \\ N & N_I & N_2 \end{vmatrix}$$

ve böylece

$$\vec{n} = \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_v}} = -\frac{k_2}{\sqrt{2}} N + vk_1 N_2$$

olarak elde edilir. $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye

ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{lss}} = \frac{k_l' \vec{N}_l + k_l^2 \vec{N} + k_2' \vec{N}_2 + k_2^2 \vec{N}}{\sqrt{2}} + vk_l' \vec{N} + vk_l^2 \vec{N}_l + vk_l k_2 \vec{N}_2$$

ifadesi biraz düzenlenirse,

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{lss}} = \vec{N} \left(\frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + vk_l' \right) + \vec{N}_l (k_l' + vk_l^2) + \vec{N}_2 (k_2' + vk_l k_2)$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{lsv}} = k_l \vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{lvy}} = 0$$

olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{lss}}, \vec{n} \rangle = -\frac{k_2}{\sqrt{2}} \left(\frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + vk_l' \right) + vk_l (k_2' + vk_l k_2)$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{lsv}}, \vec{n} \rangle = -\frac{k_l k_2}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{N} = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{lvy}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Böylece Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$K_{\widehat{N}_l} = \frac{-\frac{k_l^2 k_2^2}{2}}{\frac{k_2^2}{2} + v^2 k_l^2} = -\frac{k_l^2 k_2^2}{k_2^2 + 2v^2 k_l^2}$$

$$\frac{k_l^2 k_2}{2} + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \left(\frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + vk_l' \right) + vk_l (k_2' + vk_l k_2)$$

$$H_{\widehat{N}_l} = -\frac{\frac{k_l^2 k_2}{2} + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \left(\frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + vk_l' \right) + vk_l (k_2' + vk_l k_2)}{k_2^2 + 2v^2 k_l^2}$$

olarak elde edilir. Şimdi de $\vec{\psi}_{\widehat{N}_2}$ dual eğrisine bakalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}} = \frac{k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2 + k_1 \vec{N}}{\sqrt{2}} + vk_2 \vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}} = \vec{N}_2$$

dir. I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}} \rangle = \frac{k_1^2}{2} + \left(\left(vk_2 + \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 + \frac{k_2^2}{2}$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}} \rangle = \frac{k_2}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}} \rangle = 1$$

olarak bulunur. I. esas form

$$I = \left[\frac{k_1^2}{2} + \left(\left(vk_2 + \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 + \frac{k_2^2}{2} \right] ds^2 + \sqrt{2} k_2 ds dv + dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin

belirttiği normal vektör alanı $\vec{n} = \frac{\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}}}{\left\| \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}} \right\|}$ dir. $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör

alanı için öncelikle aşağıdaki determinanı hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}} = \begin{vmatrix} \left(vk_2 + \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) & \frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ \vec{N} & \vec{N}_1 & \vec{N}_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}} = \frac{k_1}{\sqrt{2}} \vec{N} - \left(vk_2 + \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) \vec{N}_1$$

Bu determinant yerine yazıldığında $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{\frac{k_l}{\sqrt{2}} \vec{N} - \left(vk_2 + \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right) \vec{N}_l}{\sqrt{\left(vk_2 + \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{k_l^2}{2}}}$$

olarak elde edilir. $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2ss}} = \left(vk_2 + \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right)' \vec{N} + \left(vk_2 + \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right) (k_l \vec{N}_l + k_2 \vec{N}_2) + \frac{k_l' \vec{N}_l}{\sqrt{2}} + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} \vec{N} + \frac{k_2' \vec{N}_2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l k_2 \vec{N}}{\sqrt{2}}$$

ifadesini biraz düzenlersek,

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2ss}} = \left(\left(vk_2 + \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right)' + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l k_2}{\sqrt{2}} \right) \vec{N} + \left(vk_2 k_l + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l'}{\sqrt{2}} \right) \vec{N}_l + \left(vk_2' + \frac{k_2'}{\sqrt{2}} \right) \vec{N}_2$$

olarak verilir. Benzer yolla $\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2sv}} = k_2 \vec{N}$ ve $\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2vv}} = 0$ olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2ss}}, \vec{n} \rangle = \frac{\frac{k_l}{\sqrt{2}} \left(\left(vk_2 + \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right)' + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l k_2}{\sqrt{2}} \right) - \left(vk_2 + \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right) \left(vk_2 k_l + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l'}{\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{\left(vk_2 + \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{k_l^2}{2}}}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2sv}}, \vec{n} \rangle = \frac{\frac{k_l k_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(vk_2 + \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{k_l^2}{2}}}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
K_{\widehat{N}_2} &= \frac{-\left(\frac{k_l k_2}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{k_l^2}{2} + \left(\left(vk_2 + \frac{k_l}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 + \frac{k_2^2}{2} - \frac{k_2^2}{2}} = -\frac{k_l^2 k_2^2}{2\left(\frac{k_l^2}{2} + \left(\left(vk_2 + \frac{k_l}{\sqrt{2}}\right)\right)^2\right)^2} \\
H_{\widehat{N}_2} &= \frac{-2\frac{k_2}{\sqrt{2}}\frac{k_l k_2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l}{\sqrt{2}}\left(\left(vk_2 + \frac{k_l}{\sqrt{2}}\right)' + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l k_2}{\sqrt{2}}\right) - \left(vk_2 + \frac{k_l}{\sqrt{2}}\right)\left(vk_2 k_l + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l'}{\sqrt{2}}\right)}{2\left(\frac{k_l^2}{2} + \left(\left(vk_2 + \frac{k_l}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 + \frac{k_2^2}{2} - \frac{k_2^2}{2}\right)} \\
&= \frac{-2k_2^2 k_l + \frac{k_l}{\sqrt{2}}\left(\left(vk_2 + \frac{k_l}{\sqrt{2}}\right)' + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l k_2}{\sqrt{2}}\right) - \left(vk_2 + \frac{k_l}{\sqrt{2}}\right)\left(vk_2 k_l + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l'}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{\left(\left(vk_2 + \frac{k_l}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{k_l^2}{2}\right)^3}}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5.1.3 Dual Darboux $(\vec{\omega})$ ve dual Steiner $(\vec{D})$ vektörlerinin ani dönüşü aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\vec{\omega} = -k_2 \vec{N}_l + k_l \vec{N}_2 + \varepsilon \left(\frac{k_l \vec{N} - k_2 \vec{N}_2 - k_l \vec{N}_l}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{ve}$$

$$\vec{D} = \oint \hat{w} = -\vec{N}_l \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_l + \varepsilon \left(N \oint \left(\frac{k_l}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N}_l \oint \left(\frac{k_l}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N}_2 \oint \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right) \text{dir.}$$

İspat. Darboux vektörünün tanımından

$$\vec{\omega} = \vec{\omega} + \varepsilon \vec{\omega}^*$$

$$\vec{\omega}^* = \alpha \wedge \vec{\omega} = \left(\frac{\vec{N} + \vec{N}_l}{\sqrt{2}} \right) \wedge (-k_2 \vec{N}_l + k_l \vec{N}_2) = \frac{k_l \vec{N} - k_2 \vec{N}_2 - k_l \vec{N}_l}{\sqrt{2}}$$

dir. Burada

$\vec{\omega} = -k_2 \vec{N}_1 + k_1 \vec{N}_2 + \varepsilon \left(\frac{k_1 \vec{N} - k_2 \vec{N}_2 - k_1 \vec{N}_1}{\sqrt{2}} \right)$ olarak elde edilir. Dual Steiner vektörün tanımından

$$\vec{D} = \oint \hat{w} = -\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1 + \varepsilon \left(\vec{N} \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N}_1 \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N}_2 \oint \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)$$

ile elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5.1.4 $\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2$ dual eğrilerinin oluşturmuş olduğu kapalı regle yüzeylere ait dual açılara ait eğimler sırasıyla $\Lambda_{\widehat{N}} = 0$, $\Lambda_{\widehat{N}_1} = -\oint k_2 + \varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \oint k_1 \right)$ ve $\Lambda_{\widehat{N}_2} = \oint k_1$ dir.

İspat. $\Lambda_{\widehat{N}} = -\langle \vec{D}, \vec{N} \rangle = -\langle \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^*, \vec{N} + \varepsilon \vec{N}^* \rangle$ ifadesi daha açık bir halde yazılırsa

$$\begin{aligned} \Lambda_{\widehat{N}} &= \left\langle -\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1, \vec{N} \right\rangle \\ &+ \varepsilon \left(\left\langle \left(-\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1, -\frac{\vec{N}_2}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle + \left\langle \left(\vec{N} \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N}_1 \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N}_2 \oint \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right), \vec{N} \right\rangle \right) \\ &= \varepsilon \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \oint k_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \oint k_1 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler $\widehat{N}_1$ ve $\widehat{N}_2$ için yapılırsa,

$$\begin{aligned} \Lambda_{\widehat{N}_1} &= \left\langle -\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1, \vec{N}_1 \right\rangle \\ &+ \varepsilon \left(\left\langle \left(-\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1, \frac{\vec{N}_2}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle + \left\langle \left(\vec{N} \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N}_1 \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N}_2 \oint \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right), \vec{N} \right\rangle \right) \\ &= -\oint k_2 + \varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \oint k_1 \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&= \left\langle -\overrightarrow{N_l} \oint k_2 + \overrightarrow{N_2} \oint k_l, \overrightarrow{N_2} \right\rangle \\
&\quad + \varepsilon \left(\left\langle \left(-\overrightarrow{N_l} \oint k_2 + \overrightarrow{N_2} \oint k_l, \frac{\overrightarrow{N} - \overrightarrow{N_l}}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle + \left\langle \left(\overrightarrow{N} \oint \left(\frac{k_l}{\sqrt{2}} \right) - \overrightarrow{N_l} \oint \left(\frac{k_l}{\sqrt{2}} \right) - \overrightarrow{N_2} \oint \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right), \overrightarrow{N_2} \right\rangle \right) \\
&= \oint k_l + \varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \oint k_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \oint k_2 \right) \\
&= \oint k_l
\end{aligned}$$

olur ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

3.5.2 Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{N_1}\widehat{N_2}$ Çatısına Göre $\widehat{N}\widehat{N_2}$ Smarandache Eğrileri ve Regle Yüzeyler

E-Study dönüşümü yardımıyla dual birim küre üzerinde seçilen $\{\widehat{N}, \widehat{N_1}, \widehat{N_2}\}$ alternatif hareketli çatısının elemanları ile dual uzayda çizilen kapalı eğriler E^3 Öklid uzayında bir regle yüzey temsil etmektedir. Buradan seçilen dual eğriler $\widehat{N} = \overrightarrow{N} + \varepsilon \overrightarrow{N^*}$, $\widehat{N_1} = \overrightarrow{N_1} + \varepsilon \overrightarrow{N_1^*}$, $\widehat{N_2} = \overrightarrow{N_2} + \varepsilon \overrightarrow{N_2^*}$ olmak üzere, $\{\widehat{N}, \widehat{N_1}, \widehat{N_2}\}$ eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\varphi_{\widehat{N}}(s, v) = \beta_N(s) + v \overrightarrow{N}(s) \quad , \quad \beta_N(s) = \overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{N^*},$$

$$\varphi_{\widehat{N_1}}(s, v) = \beta_{N_1}(s) + v \overrightarrow{N_1}(s) \quad , \quad \beta_{N_1}(s) = \overrightarrow{N_1} \wedge \overrightarrow{N_1^*},$$

$$\varphi_{\widehat{N_2}}(s, v) = \beta_{N_2}(s) + v \overrightarrow{N_2}(s) \quad , \quad \beta_{N_2}(s) = \overrightarrow{N_2} \wedge \overrightarrow{N_2^*},$$

dir. $\alpha(s)$ eğrisine ait $\alpha_{NN_1}(s)$ Smarandache eğrisini $\{\widehat{N}, \widehat{N_1}, \widehat{N_2}\}$ vektörleri yardımıyla

$\alpha_{\widehat{NN_2}}(s) = \frac{\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}}$ formunda verilebilir. Bu eğriye bağlı olarak $\{\widehat{N}, \widehat{N_1}, \widehat{N_2}\}$ vektörlerinin vektörel

momentleri sırasıyla

$$\overrightarrow{N^*} = \alpha \wedge \overrightarrow{N} = \left(\frac{\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{N_1^*} = \alpha \wedge \overrightarrow{N_1} = \left(\frac{\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \overrightarrow{N_1} = \frac{-\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{N}_2^* = \alpha \wedge \vec{N}_2 = \left(\frac{\vec{N} + \vec{N}_2}{\sqrt{2}} \right) \wedge \vec{N}_2 = \frac{-\vec{N}_1}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir. Bu denklemler kullanılarak $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ dual eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri sırasıyla aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s, v) = \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v \vec{N} = \vec{N} \wedge \left(\frac{\vec{N}_1}{\sqrt{2}} \right) + v \vec{N} = \frac{\vec{N}_2}{\sqrt{2}} + v \vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_1}(s, v) = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_1^* + v \vec{N}_1 = \vec{N}_1 \wedge \frac{-\vec{N} + \vec{N}_2}{\sqrt{2}} + v \vec{N}_1 = \frac{\vec{N} + \vec{N}_2}{\sqrt{2}} + v \vec{N}_1$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_2}(s, v) = \vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^* + v \vec{N}_2 = \vec{N}_2 \wedge \left(\frac{-\vec{N}_1}{\sqrt{2}} \right) + v \vec{N}_2 = \frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} + v \vec{N}_2$$

Teorem 3.5.2.1 $(\widehat{N}), (\widehat{N}_1), (\widehat{N}_2)$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin dağılma

parametreleri $P_{\widehat{N}} = 0$, $P_{\widehat{N}_1} = \frac{-k_2}{\sqrt{2}}$ ve $P_{\widehat{N}_2} = \frac{k_1}{\sqrt{2}}$ olarak hesaplanır.

İspat. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin dağılma parametresini

$$P_{\widehat{N}} = \frac{\det \left(\frac{d\beta_{\vec{N}}}{ds_t}, \vec{N}, \frac{d\vec{N}}{ds_t} \right)}{\left\| \frac{d\vec{N}}{ds_t} \right\|^2} = \frac{\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}')}{\left\| \vec{N}' \right\|^2}$$

determinantını hesaplayabilmek için öncelikle $(\vec{N} \wedge \vec{N}^*)' = \left(\frac{\vec{N}_2}{\sqrt{2}} \right)' = \frac{k_2 \vec{N}}{\sqrt{2}}$ türevi bulunur.

Sonra

$$\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}') = \begin{vmatrix} \frac{k_2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 \end{vmatrix}$$

determinantından

$$P_{\widehat{N}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{k_2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

verilen dual eğrinin dağılma parametresi $P_{\widehat{N}} = 0$ olarak hesaplanır. Benzer şekilde $P_{\widehat{N_1}}$ ve $P_{\widehat{N_2}}$ bulalım.

$$P_{\widehat{N_1}} = \frac{\det\left(\left(\overrightarrow{N_1} \wedge \overrightarrow{N_1^*}\right), \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_1^I}\right)}{\left\|\overrightarrow{N_1^I}\right\|^2}$$

determinantı hesaplayabilmek için öncelikle

$$\left(\overrightarrow{N_1} \wedge \overrightarrow{N_1^*}\right)' = \left(\frac{\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}}\right)' = \frac{k_1 \overrightarrow{N_1} + k_2 \overrightarrow{N_2} + k_2 \overrightarrow{N}}{\sqrt{2}}$$

türevi elde edilir. Böylece

$$\det\left(\left(\overrightarrow{N_1} \wedge \overrightarrow{N_1^*}\right)', \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_1^I}\right) = \begin{vmatrix} \frac{k_2}{\sqrt{2}} & \frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

determinantı hesaplandığında,

$$P_{\widehat{N_1}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{k_2}{\sqrt{2}} & \frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{k_1^2}} = \frac{-k_2}{\sqrt{2}}$$

olarak bulunur. Şimdi de benzer işlemleri $P_{\widehat{N_2}}$ için yapalım.

$$P_{\vec{N}_2} = \frac{\det((\vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^*)', \vec{N}_2, \vec{N}_2')}{\|\vec{N}_2'\|^2}$$

determinantı hesaplayabilmek için öncelikle $(\vec{N} \wedge \vec{N}_2^*)'$ türevini hesaplayalım.

$$(\vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^*)' = \left(\frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} \right)' = \frac{k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2}{\sqrt{2}}$$

ve böylece

$$\det((\vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^*)', \vec{N}_2, \vec{N}_2') = \begin{vmatrix} 0 & \frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ k_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

olur. Dağılma parametresi

$$P_{\vec{N}_2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ k_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{k_2} = \frac{k_1}{\sqrt{2}}$$

olur ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5.2.2 $\{\widehat{N}, \widehat{C}, \widehat{W}\}$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin ortalama eğrilikleri

$$K_{\widehat{N}} = - \left(\frac{-vk_1 k_2 \vec{N}_2 + vk_2 k_1 \vec{N}_1}{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2} \right)^2, \quad K_{\widehat{N}_1} = \frac{k_1^2 k_2^2}{2 \left(\frac{k_2^2}{2} + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^2},$$

$$K_{\widehat{N}_2} = - \frac{k_1^2 k_2^2}{2 \left(\frac{k_1^2}{2} + (vk_2)^2 \right)^2}$$

ve Gauss eğrilikleri

$$H_{\hat{N}} = \frac{\sqrt{2}k_1 \frac{-vk_1k_2\vec{N}_2 + vk_2k_1\vec{N}_1}{\sqrt{v^2k_1^2 + v^2k_2^2}} + \frac{vk_2\left(\frac{k_1k_2}{\sqrt{2}} + vk_1'\right) - vk_1\left(\frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + vk_2'\right)}{v\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}}{2(v^2k_1^2 + v^2k_2^2)}$$

$$H_{\hat{N}_1} = \frac{\frac{k_1^2k_2}{2\sqrt{\left(\frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)^2}} - \frac{\frac{k_2}{\sqrt{2}}\left(\frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + vk_1'\right) - \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + k_2' + vk_1k_2\right)}{\sqrt{\left(\frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)^2}}}{k_2^2 + 2\left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$H_{\hat{N}_2} = \frac{-2k_2^2k_1 + \frac{k_1}{\sqrt{2}}\left(\left(vk_2 + \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)' + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_1k_2}{\sqrt{2}}\right) - \left(vk_2 + \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)\left(vk_2k_1 + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_1'}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{\left(vk_2\right)^2 + \frac{k_1^2}{2}}^3}$$

olarak elde edilir.

İspat. $\hat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliğini bulmak için

I. ve II. esas formu bulalım. $\vec{\psi}_{\hat{N}_s} = \frac{k_2\vec{N}}{\sqrt{2}} + v(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2)$ ve $\vec{\psi}_{\hat{N}_v} = N$ eşitlikleriyle hesaplanır.

Buradan I. Esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_s}, \vec{\psi}_{\hat{N}_s} \rangle = \frac{k_2^2}{2} + v^2k_1^2 + v^2k_2^2$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_v}, \vec{\psi}_{\hat{N}_s} \rangle = \frac{k_2}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_v}, \vec{\psi}_{\hat{N}_v} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I = \left(\frac{k_2^2}{2} + v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2 \right) ds^2 + \sqrt{2} k_2 ds dv + dv^2$$

ile elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanına ihtiyacımız var. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$n = \frac{\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_v}}{\left\| \vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_v} \right\|} = \frac{-vk_1 N_2 + vk_2 N_1}{\sqrt{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2}}$$

olarak elde edilir. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{ss}} = \frac{k_2' \vec{N} + k_2 (k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2)}{\sqrt{2}} + vk_1' \vec{N}_1 + vk_1 \vec{N} + vk_2' \vec{N}_2 + vk_2 k_2 \vec{N}$$

ifadesi biraz daha düzenlenirse

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{ss}} = \vec{N} \left(\frac{k_2'}{\sqrt{2}} + vk_1^2 + k_2^2 \right) + \vec{N}_1 \left(\frac{k_1 k_2}{\sqrt{2}} + vk_1' \right) + \vec{N}_2 \left(\frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + vk_2' \right)$$

olarak verilir. Aynı şekilde

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{sv}} = k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{vv}} = 0$$

olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\widehat{N}$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{ss}}, n \rangle = \left\{ \frac{vk_2 \left(\frac{k_1 k_2}{\sqrt{2}} + vk_1' \right) - vk_1 \left(\frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + vk_2' \right)}{v \sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \right\}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{sv}}, n \rangle = \left(\vec{\psi}_n \right)_{s,v} = \frac{-vk_l k_2 \vec{N}_2 + vk_2 k_l \vec{N}_l}{\sqrt{v^2 k_l^2 + v^2 k_2^2}}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{vv}}, n \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\hat{N}} = - \frac{\left(\frac{-vk_l k_2 \vec{N}_2 + vk_2 k_l \vec{N}_l}{\sqrt{v^2 k_l^2 + v^2 k_2^2}} \right)^2}{v^2 k_l^2 + v^2 k_2^2} = - \left(\frac{-vk_l k_2 \vec{N}_2 + vk_2 k_l \vec{N}_l}{v^2 k_l^2 + v^2 k_2^2} \right)^2$$

$$H_{\hat{N}} = \frac{\sqrt{2} k_l \frac{-vk_l k_2 \vec{N}_2 + vk_2 k_l \vec{N}_l}{\sqrt{v^2 k_l^2 + v^2 k_2^2}} + \frac{vk_2 \left(\frac{k_l k_2}{\sqrt{2}} + vk'_l \right) - vk_l \left(\frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + vk'_2 \right)}{v \sqrt{k_l^2 + k_2^2}}}{2(v^2 k_l^2 + v^2 k_2^2)}$$

aynı yolla şimdi de $\{\vec{\psi}_{\hat{N}_l}, \vec{\psi}_{\hat{N}_2}\}$ yüzeyleri için Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplayalım.

Öcelikle yüzeylerin yönlü türevlerini bulalım.

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{ls}} = \frac{k_2 \vec{N}_2 + k_l \vec{N}_l + k_2 \vec{N}}{\sqrt{2}} + vk_l \vec{N} \text{ ve } \vec{\psi}_{\hat{N}_{lv}} = \vec{N}_l$$

olduğu için yüzeyin normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{\vec{\psi}_{\hat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\hat{N}_v}}{\|\vec{\psi}_{\hat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\hat{N}_v}\|} = \frac{-vk_l N_2 + vk_2 N_l}{\sqrt{v^2 k_l^2 + v^2 k_2^2}}$$

ile hesaplanır. Buradan I. Esas formun katsayıları yönlü türevlerin iç çarpımı yardımıyla sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{ls}}, \vec{\psi}_{\hat{N}_{ls}} \rangle = \frac{k_l^2 + k_2^2}{2} + \left(vk_l + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{ls}}, \vec{\psi}_{\hat{N}_{lv}} \rangle = \frac{k_l}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{lv}}, \vec{\psi}_{\hat{N}_{lv}} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I = \left(vk_l + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2 ds^2 + \sqrt{2} k_l ds dv + dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{C}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanına ihtiyacımız var. $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı için öncelikle aşağıdaki determinanı hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1v}} = \begin{vmatrix} vk_l + \frac{k_2}{\sqrt{2}} & \frac{k_l}{\sqrt{2}} & \frac{k_l}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \vec{N} & \vec{N}_l & \vec{N}_2 \end{vmatrix} = -\frac{k_2}{\sqrt{2}} \vec{N} + \left(vk_l + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right) \vec{N}_2$$

olduğu için $\widehat{C}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı,

$$\vec{n} = \frac{\vec{\psi}_{\widehat{C}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{C}_v}}{\|\vec{\psi}_{\widehat{C}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{C}_v}\|} = -\frac{-\frac{k_2}{\sqrt{2}} \vec{N} + \left(vk_l + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right) \vec{N}_2}{\sqrt{\left(\frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(vk_l + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2}}$$

ile elde edilir. $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II.

esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1ss}} = \frac{k_l' \vec{N}_l + k_l^2 \vec{N} + k_2' \vec{N}_2 + k_2^2 \vec{N} + k_l k_2 \vec{N}_l + k_2^2 \vec{N}_2}{\sqrt{2}} + vk_l' \vec{N} + vk_l^2 \vec{N}_l + vk_l k_2 \vec{N}_2$$

ifadesi biraz düzenlenirse,

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1ss}} = \vec{N} \left(\frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + vk_l' \right) + \vec{N}_l \left(k_l' + vk_l^2 + \frac{k_l k_2}{\sqrt{2}} \right) + \vec{N}_2 \left(\frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + k_2' + vk_l k_2 \right)$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1sv}} = k_l \vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1vv}} = 0$$

olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1ss}}, \vec{n} \rangle = \frac{\frac{k_2}{\sqrt{2}} \left(\frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + vk_1' \right) - \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + k_2' + vk_1 k_2 \right)}{\sqrt{\left(\frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2}}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1sV}}, \vec{n} \rangle = \frac{k_1 k_2}{\sqrt{2 \left(\frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + 2 \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2}}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\widehat{C}_{VV}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\widehat{N}_1} = \frac{\frac{k_1^2 k_2^2}{2 \left(\frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + 2 \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2}}{\frac{k_2^2}{2} + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2} = \frac{k_1^2 k_2^2}{2 \left(\frac{k_2^2}{2} + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^2}$$

$$H_{\widehat{N}_1} = \frac{\frac{k_1^2 k_2}{2 \sqrt{\left(\frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2}} - \frac{\frac{k_2}{\sqrt{2}} \left(\frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + vk_1' \right) - \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + k_2' + vk_1 k_2 \right)}{\sqrt{\left(\frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2}}}{k_2^2 + 2 \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2}$$

olarak elde edilir. Şimdi de $\vec{\psi}_{\widehat{N}_2}$ dual eğrisi için

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}} = \frac{k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2}{\sqrt{2}} + vk_2 \vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}} = N_2$$

kısmi türevlerinden yararlanarak I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}} \rangle = \frac{k_1^2}{2} + (vk_2)^2 + \frac{k_2^2}{2}$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}} \rangle = \frac{k_2}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I = \left[\frac{k_1^2}{2} + (vk_2)^2 + \frac{k_2^2}{2} \right] ds^2 + \sqrt{2}k_2 ds dv + dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin

belirttiği normal vektör alanı $\vec{n} = \frac{\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}}}{\|\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}}\|}$ dir. $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör

alanı için öncelikle determinantı

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}} = \begin{vmatrix} (vk_2) & \frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ \vec{N} & \vec{N}_1 & \vec{N}_2 \end{vmatrix} = \frac{k_1}{\sqrt{2}} \vec{N} - (vk_2) \vec{N}_1$$

olur. Bu determinant yerine yazıldığında $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{\frac{k_1}{\sqrt{2}} \vec{N} - (vk_2) \vec{N}_1}{\sqrt{(vk_2)^2 + \frac{k_1^2}{2}}}$$

ile elde edilir. $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait

II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2ss}} = vk_2' \vec{N} + vk_2 (k_l \vec{N}_l + k_2 \vec{N}_2) + \frac{k_l' \vec{N}_l}{\sqrt{2}} + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} \vec{N} + \frac{k_2' \vec{N}_2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l k_2 \vec{N}}{\sqrt{2}}$$

ifadesini biraz düzenlersek,

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2ss}} = \left(vk_2' + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l k_2}{\sqrt{2}} \right) \vec{N} + \left(vk_2 k_l + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l'}{\sqrt{2}} \right) \vec{N}_l + \left(vk_2^2 + \frac{k_2'}{\sqrt{2}} \right) \vec{N}_2$$

olarak verilir. Benzer yolla $\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2sv}} = k_2 \vec{N}$ ve $\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2vv}} = 0$ olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2ss}}, \vec{n} \rangle = \frac{\frac{k_l}{\sqrt{2}} \left((vk_2)' + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l k_2}{\sqrt{2}} \right) - (vk_2) \left(vk_2 k_l + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l'}{\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{(vk_2)^2 + \frac{k_l^2}{2}}}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2sv}}, \vec{n} \rangle = \frac{\frac{k_l k_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(vk_2)^2 + \frac{k_l^2}{2}}}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\widehat{N}_2} = \frac{- \left(\frac{\frac{k_l k_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(vk_2)^2 + \frac{k_l^2}{2}}} \right)^2}{\frac{k_l^2}{2} + (vk_2)^2 + \frac{k_2^2}{2} - \frac{k_2^2}{2}} = - \frac{k_l^2 k_2^2}{2 \left(\frac{k_l^2}{2} + (vk_2)^2 \right)^2}$$

$$\begin{aligned}
H_{\widehat{N}_2} &= \frac{-2\frac{k_2}{\sqrt{2}}\frac{\frac{k_1 k_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(vk_2 + \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{k_1^2}{2}}} + \frac{\frac{k_1}{\sqrt{2}}\left((vk_2)' + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_1 k_2}{\sqrt{2}}\right) - (vk_2)\left(vk_2 k_1 + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_1'}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{(vk_2)^2 + \frac{k_1^2}{2}}} \\
&= \frac{-2k_2^2 k_1 + \frac{k_1}{\sqrt{2}}\left(\left(vk_2 + \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)' + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_1 k_2}{\sqrt{2}}\right) - \left(vk_2 + \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)\left(vk_2 k_1 + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_1'}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{\left((vk_2)^2 + \frac{k_1^2}{2}\right)^3}}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5.2.3 Dual Darboux $(\overrightarrow{\omega})$ ve dual Steiner $(\overrightarrow{D})$ vektörlerinin ani dönüşü aşağıdaki şekilde verilebilir .

$$\overrightarrow{\omega} = -k_2 \overrightarrow{N_1} + k_1 \overrightarrow{N_2} + \varepsilon \left(\frac{k_1 \overrightarrow{N} - k_2 \overrightarrow{N_2} - k_1 \overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}} \right) \text{ ve}$$

$$\overrightarrow{D} = \oint \overrightarrow{\omega} = -\overrightarrow{N_1} \oint k_2 + \overrightarrow{N_2} \oint k_1 + \varepsilon \left(\overrightarrow{N} \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \overrightarrow{N_1} \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \overrightarrow{N_2} \oint \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right) \text{ dir.}$$

İspat. Darboux vektörü tanımından

$$\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega} + \varepsilon \overrightarrow{\omega}^*$$

$$\overrightarrow{\omega}^* = \alpha \wedge \overrightarrow{\omega} = \left(\frac{\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}} \right) \wedge (-k_2 \overrightarrow{N_1} + k_1 \overrightarrow{N_2}) = \frac{k_1 \overrightarrow{N} - k_2 \overrightarrow{N_2} - k_1 \overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}}$$

olur buradan da, $\overrightarrow{\omega} = -k_2 \overrightarrow{N_1} + k_1 \overrightarrow{N_2} + \varepsilon \left(\frac{k_1 \overrightarrow{N} - k_2 \overrightarrow{N_2} - k_1 \overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}} \right)$ olarak elde edilir. Dual Steiner

vektörün tanımından.

$$\overrightarrow{D} = \oint \overrightarrow{\omega} = -\overrightarrow{N_1} \oint k_2 + \overrightarrow{N_2} \oint k_1 + \varepsilon \left(\overrightarrow{N} \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \overrightarrow{N_1} \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \overrightarrow{N_2} \oint \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5.2.4 $\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2$ dual eğrilerinin oluşturmuş olduğu kapalı regle yüzeylere ait dual açılara ait eğimler sırasıyla

$$\Lambda_{\widehat{N}} = \varepsilon \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \wp k_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \wp k_1 \right), \Lambda_{\widehat{N}_1} = -\wp k_2 + \varepsilon \left(\sqrt{2} \wp k_1 \right), \Lambda_{\widehat{N}_2} = \wp k_1$$

dir.

İspat. $\Lambda_{\widehat{N}} = -\langle \overline{D}, \overline{N} \rangle = -\langle d + \varepsilon d^*, \overline{N} + \varepsilon \overline{N}^* \rangle$ ifadesi daha açık bir halde yazılırsa

$$\begin{aligned} \Lambda_{\widehat{N}} &= \left\langle -\overline{N}_1 \wp k_2 + \overline{N}_2 \wp k_1, \overline{N} \right\rangle \\ &+ \varepsilon \left(\left\langle -\overline{N}_1 \wp k_2 + \overline{N}_2 \wp k_1, \frac{\overline{N}_1}{\sqrt{2}} \right\rangle + \left\langle \overline{N} \wp \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \overline{N}_1 \wp \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \overline{N}_2 \wp \frac{k_2}{\sqrt{2}}, \overline{N} \right\rangle \right) \\ &= \varepsilon \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \wp k_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \wp k_1 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler $\widehat{N}_1$ ve $\widehat{N}_2$ için yapılırsa,

$$\begin{aligned} \Lambda_{\widehat{N}_1} &= \left\langle -\overline{N}_1 \wp k_2 + \overline{N}_2 \wp k_1, \overline{N}_1 \right\rangle \\ &+ \varepsilon \left(\left\langle -\overline{N}_1 \wp k_2 + \overline{N}_2 \wp k_1, \frac{-\overline{N} + \overline{N}_2}{\sqrt{2}} \right\rangle + \left\langle \overline{N} \wp \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \overline{N}_1 \wp \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \overline{N}_2 \wp \frac{k_2}{\sqrt{2}}, \overline{N} \right\rangle \right) \\ &= -\wp k_2 + \varepsilon \left(\sqrt{2} \wp k_1 \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \Lambda_{\widehat{N}_2} &= \left\langle -\overline{N}_1 \wp k_2 + \overline{N}_2 \wp k_1, \overline{N}_2 \right\rangle \\ &+ \varepsilon \left(\left\langle -\overline{N}_1 \wp k_2 + \overline{N}_2 \wp k_1, \frac{-\overline{N}_1}{\sqrt{2}} \right\rangle + \left\langle \overline{N} \wp \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \overline{N}_1 \wp \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \overline{N}_2 \wp \frac{k_2}{\sqrt{2}}, \overline{N}_2 \right\rangle \right) \\ &= \wp k_1 + \varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \wp k_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \wp k_2 \right) \\ &= \wp k_1 \end{aligned}$$

olarak elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

3.5.3 Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Çatısına Göre $\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Smarandache Eğrileri ve Regle Yüzeyler

E-Study dönüşümü yardımıyla dual birim küre üzerinde seçilen $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ alternatif hareketli çatısının elemanları ile dual uzayda çizilen kapalı eğriler E^3 Öklid uzayında bir regle yüzey temsil etmektedir. Buradan seçilen dual eğriler $\widehat{N} = \overrightarrow{N} + \varepsilon \overrightarrow{N}^*, \widehat{N}_1 = \overrightarrow{N}_1 + \varepsilon \overrightarrow{N}_1^*, \widehat{N}_2 = \overrightarrow{N}_2 + \varepsilon \overrightarrow{N}_2^*$ olmak üzere, $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\varphi_{\widehat{N}}(s, v) = \beta_{\overrightarrow{N}}(s) + v \overrightarrow{N}(s), \beta_{\overrightarrow{N}}(s) = \overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{N}^*,$$

$$\varphi_{\widehat{N}_1}(s, v) = \beta_{\overrightarrow{N}_1}(s) + v \overrightarrow{N}_1(s), \beta_{\overrightarrow{N}_1}(s) = \overrightarrow{N}_1 \wedge \overrightarrow{N}_1^*,$$

$$\varphi_{\widehat{N}_2}(s, v) = \beta_{\overrightarrow{N}_2}(s) + v \overrightarrow{N}_2(s), \beta_{\overrightarrow{N}_2}(s) = \overrightarrow{N}_2 \wedge \overrightarrow{N}_2^*,$$

Bu denklemler bize $\alpha(s)$ eğrisine ait $\alpha_{\overrightarrow{N}_1\overrightarrow{N}_2}(s)$ Smarandache eğrisini $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ vektörleri

yardımla $\alpha_{\overrightarrow{N}_1\overrightarrow{N}_2}(s) = \frac{\overrightarrow{N}_1 + \overrightarrow{N}_2}{\sqrt{2}}$ eşitliğiyle tanımlayabiliriz. Bu eğriye bağlı olarak $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$

vektörlerinin vektörel momentleri sırasıyla

$$\overrightarrow{N}^* = \alpha \wedge \overrightarrow{N} = \left(\frac{\overrightarrow{N}_1 + \overrightarrow{N}_2}{\sqrt{2}} \right) \wedge \overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{N}_1 - \overrightarrow{N}_2}{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{N}_1^* = \alpha \wedge \overrightarrow{N}_1 = \left(\frac{\overrightarrow{N}_1 + \overrightarrow{N}_2}{\sqrt{2}} \right) \wedge \overrightarrow{N}_1 = \frac{-\overrightarrow{N}}{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{N}_2^* = \alpha \wedge \overrightarrow{N}_2 = \left(\frac{\overrightarrow{N}_1 + \overrightarrow{N}_2}{\sqrt{2}} \right) \wedge \overrightarrow{N}_2 = \frac{\overrightarrow{N}}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir. Bu denklemler kullanılarak $\{\overrightarrow{N}, \overrightarrow{N}_1, \overrightarrow{N}_2\}$ dual eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri sırasıyla

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s, v) = \overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{N}^* + v \overrightarrow{N} = \overrightarrow{N} \wedge \left(\frac{\overrightarrow{N}_1 - \overrightarrow{N}_2}{\sqrt{2}} \right) + v \overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{N}_1 + \overrightarrow{N}_2}{\sqrt{2}} + v \overrightarrow{N}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_1}(s, v) = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_1^* + v \vec{N}_1 = \vec{N}_1 \wedge \frac{-\vec{N}}{\sqrt{2}} + v \vec{N}_1 = \frac{\vec{N}_2}{\sqrt{2}} + v \vec{N}_1$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_2}(s, v) = \vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^* + v \vec{N}_2 = \vec{N}_2 \wedge \left(\frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} \right) + v \vec{N}_2 = \frac{\vec{N}_1}{\sqrt{2}} + v \vec{N}_2$$

olarak bulunur.

Teorem 3.5.3.1 $(\widehat{N}), (\widehat{N}_1), (\widehat{N}_2)$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin dağılma parametreleri $P_{\widehat{N}} = 0$, $P_{\widehat{N}_1} = 0$ ve $P_{\widehat{N}_2} = 0$ olarak hesaplanır.

İspat. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin dağılma parametresini

$$P_{\widehat{N}} = \frac{\det\left(\frac{d\beta_{\widehat{N}}}{ds_t}, \vec{N}, \frac{d\vec{N}}{ds_t}\right)}{\left\|\frac{d\vec{N}}{ds_t}\right\|^2} = \frac{\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}')}{\|\vec{N}'\|^2}$$

determinantını hesaplayabilmek için öncelikle $(\vec{N} \wedge \vec{N}^*)'$ türevi

$$(\vec{N} \wedge \vec{N}^*)' = \left(\frac{\vec{N}_1 + \vec{N}_2}{\sqrt{2}} \right)' = \frac{(k_1 + k_2)\vec{N}}{\sqrt{2}}$$

olur. Determinant alma işlemi yapıldıktan sonra

$$\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}') = \begin{vmatrix} \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 \end{vmatrix}$$

ifadesi düzenlenirse,

$$P_{\widehat{N}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

verilen dual eğrinin dağılma parametresi $P_{\widehat{N}} = 0$ sonucu bulunur. Benzer şekilde $P_{\widehat{N_1}}$ ve $P_{\widehat{N_2}}$ dağılma parametrelerini hesaplayalım.

$$P_{\widehat{N_1}} = \frac{\det\left(\left(\overrightarrow{N_1} \wedge \overrightarrow{N_1^*}\right), \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_1'}\right)}{\left\|\overrightarrow{N_1'}\right\|^2}$$

determinantını hesaplayabilmek için öncelikle $\left(\overrightarrow{N_1} \wedge \overrightarrow{N_1^*}\right)' = \left(\frac{\overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}}\right)' = -\frac{k_2 \overrightarrow{N}}{\sqrt{2}}$ hesaplanır.

$$\det\left(\left(\overrightarrow{N_1} \wedge \overrightarrow{N_1^*}\right)', \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_1'}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{k_2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

determinantı hesaplandığında,

$$P_{\widehat{N_1}} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{k_2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{k_1^2}} = 0$$

olarak bulunur. Şimdi de benzer işlemleri $P_{\widehat{N_2}}$ için yapalım.

$$P_{\widehat{N_2}} = \frac{\det\left(\left(\overrightarrow{N_2} \wedge \overrightarrow{N_2^*}\right)', \overrightarrow{N_2}, \overrightarrow{N_2'}\right)}{\left\|\overrightarrow{N_2'}\right\|^2}$$

$$\text{hesaplamak için } (\vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^*)' = \left(\frac{\vec{N}_1}{\sqrt{2}} \right)' = -\frac{k_1 \vec{N}}{\sqrt{2}} \text{ ve } \det((\vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^*)', \vec{N}_2, \vec{N}_2') = \begin{vmatrix} -\frac{k_1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

olduğu için

$$P_{\vec{N}_2} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{k_1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{k_2} = 0$$

sonucu elde edilir.

Teorem 3.5.3.2 $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin ortalama eğrilikleri

$$K_{\widehat{N}} = -\left(\frac{-vk_1 k_2 \vec{N}_2 + vk_2 k_1 \vec{N}_1}{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2} \right)^2, \quad K_{\widehat{N}_1} = 0 \text{ ve } K_{\widehat{N}_2} = -\frac{k_1^2 k_2^2}{2\left(\frac{k_1^2}{2} + (vk_2)^2\right)^2}$$

ve Gaus eğrilikleri

$$H_{\widehat{N}} = \frac{\sqrt{2}k_1 \frac{-vk_1 k_2 \vec{N}_2 + vk_2 k_1 \vec{N}_1}{\sqrt{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2}} + \frac{vk_2 \left(\frac{k_1^2 + k_1 k_2}{\sqrt{2}} + vk_1' \right) - vk_1 \left(\frac{k_2^2 + k_1 k_2}{\sqrt{2}} + vk_2' \right)}{v\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}}{2(v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2)}$$

$$H_{\widehat{N}_1} = \frac{(k_2^2 + \sqrt{2}vk_1 k_2)}{\sqrt{2}(k_2 + \sqrt{2}vk_1)^2}$$

$$H_{\widehat{N}_2} = \frac{\frac{k_1}{\sqrt{2}} \left(vk_2' + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} \right) - (vk_2) \left(vk_2 k_1 + \frac{k_1'}{\sqrt{2}} \right)}{2 \sqrt{\left((vk_2)^2 + \frac{k_1^2}{2} \right)^3}}$$

olarak elde edilir.

İspat. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliğini bulmak için

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} = \frac{(k_1 + k_2) \vec{N}}{\sqrt{2}} - v(k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2) \text{ ve } \vec{\psi}_{\widehat{N}_v} = \vec{N}$$

kısmi türevlerinden I. Esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_s}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \rangle = \frac{(k_1 + k_2)^2}{2} + v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_v}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \rangle = \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_v}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_v} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I = \left(\frac{(k_1 + k_2)^2}{2} + v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2 \right) ds^2 + \sqrt{2} k_2 ds dv + dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. Esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_v}}{\|\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_v}\|} = \frac{-vk_1 \vec{N}_2 + vk_2 \vec{N}_1}{\sqrt{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2}}$$

olarak elde edilir. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}} = \frac{(k_1 + k_2)' \vec{N} + (k_1 + k_2)(k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2)}{\sqrt{2}} - vk_1' \vec{N}_1 + vk_1 \vec{N} - vk_2' \vec{N}_2 + vk_2 k_2 \vec{N}$$

ifadesi biraz daha düzenlenirse

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}} = \vec{N} \left(\frac{(k_1 + k_2)'}{\sqrt{2}} + vk_1' + k_2^2 \right) + \vec{N}_1 \left(\frac{k_1^2 + k_1 k_2}{\sqrt{2}} + vk_1' \right) + \vec{N}_2 \left(\frac{k_2^2 + k_1 k_2}{\sqrt{2}} + vk_2' \right)$$

denklemini verir. Aynı şekilde kısmi türevler $\psi_{\hat{N}_{sv}} = k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2$ ve $\psi_{\hat{N}_{vv}} = 0$ olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\hat{N}$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}}, \vec{n} \rangle = \left\{ \frac{vk_2 \left(\frac{k_1^2 + k_1 k_2}{\sqrt{2}} + vk_1' \right) - vk_1 \left(\frac{k_2^2 + k_1 k_2}{\sqrt{2}} + vk_2' \right)}{v\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \right\}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{sv}}, \vec{n} \rangle = \left(\vec{\psi}_n \right)_{s,v} = \frac{-vk_1 k_2 \vec{N}_2 + vk_2 k_1 \vec{N}_1}{\sqrt{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2}}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\hat{N}} = - \frac{\left(\frac{-vk_1 k_2 \vec{N}_2 + vk_2 k_1 \vec{N}_1}{\sqrt{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2}} \right)^2}{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2} = - \left(\frac{-vk_1 k_2 \vec{N}_2 + vk_2 k_1 \vec{N}_1}{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2} \right)^2$$

$$H_{\hat{N}} = \frac{\sqrt{2} k_1 \frac{-vk_1 k_2 \vec{N}_2 + vk_2 k_1 \vec{N}_1}{\sqrt{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2}} + \frac{vk_2 \left(\frac{k_1^2 + k_1 k_2}{\sqrt{2}} + vk_1' \right) - vk_1 \left(\frac{k_2^2 + k_1 k_2}{\sqrt{2}} + vk_2' \right)}{v\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}}{2(v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2)}$$

olur. Benzer şekilde şimdi de $\{\vec{\psi}_{\hat{N}_1}, \vec{\psi}_{\hat{N}_2}\}$ yüzeyleri için Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_s}} = \frac{k_2 + \vec{N}}{\sqrt{2}} + vk_l \vec{N} = \frac{(k_2 + \sqrt{2}vk_l)\vec{N}}{\sqrt{2}} \quad \text{ve} \quad \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_v}} = \vec{N}_l \quad \text{kısmi türevler yardımıyla I. esas}$$

formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_s}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_s}} \rangle = \frac{(k_2 + \sqrt{2}vk_l)^2}{2}$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_s}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_v}} \rangle = 0$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_v}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_v}} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I = \frac{(k_2 + \sqrt{2}vk_l)^2}{2} ds^2 + dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{C}$ dual eğrisinin

belirttiği normal vektör alanı $\vec{n} = \frac{\vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_v}}}{\|\vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_v}}\|}$ dir. $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör

alanı için öncelikle aşağıdaki determinanti hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_v}} = \begin{vmatrix} \frac{(k_2 + \sqrt{2}vk_l)}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vec{N} & \vec{N}_l & \vec{N}_2 \end{vmatrix} = \frac{(k_2 + \sqrt{2}vk_l)}{\sqrt{2}} \vec{N}_2$$

Bu determinant yerine yazıldığında $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{\vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_v}}}{\|\vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{I_v}}\|} = \frac{\frac{(k_2 + \sqrt{2}vk_l)}{\sqrt{2}} \vec{N}_2}{\frac{(k_2 + \sqrt{2}vk_l)}{\sqrt{2}}} = \vec{N}_2$$

olarak elde edilir. $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_1 ss} = \frac{(k_2 + \sqrt{2}vk_1)'}{\sqrt{2}} N + \frac{(k_2 + \sqrt{2}vk_1)}{\sqrt{2}} (k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2)$$

ifadesi biraz düzenlenirse,

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_1 ss} = \frac{(k_2 + \sqrt{2}vk_1)'}{\sqrt{2}} \vec{N} + \frac{(k_1 k_2 + \sqrt{2}vk_1^2)}{\sqrt{2}} \vec{N}_1 + \frac{(k_2^2 + \sqrt{2}vk_1 k_2)}{\sqrt{2}} \vec{N}_2$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_1 sv} = k_1 \vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_1 vv} = 0$$

olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_1 ss}, \vec{n} \rangle = \frac{(k_2^2 + \sqrt{2}vk_1 k_2)}{\sqrt{2}}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_1 sv}, \vec{n} \rangle = 0$$

$$\vec{N} = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_1 vv}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu formullerden,

$$K_{\widehat{N}_1} = 0 \text{ ve } H_{\widehat{N}_1} = \frac{(k_2^2 + \sqrt{2}vk_1 k_2)}{\sqrt{2}(k_2 + \sqrt{2}vk_1)^2}$$

Gauss ve ortalama eğrilikleri elde edilir. Şimdi de $\vec{\psi}_{\widehat{N}_2}$ dual eğrisine bakalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}} = \frac{k_l \vec{N}_l}{\sqrt{2}} + vk_2 \vec{N} \text{ ve } \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}} = \vec{N}_2$$

Kısmi türevlerden I. Esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}} \rangle = \frac{k_l^2}{2} + (vk_2)^2$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}} \rangle = 0$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I = \left(\frac{k_l^2}{2} + (vk_2)^2 \right) ds^2 + dv^2$$

sonucu elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin

belirttiği normal vektör alanı $\vec{n} = \frac{\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}}}{\|\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}}\|}$ dir. $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör

alanı için öncelikle aşağıdaki determinanı hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}} = \begin{vmatrix} (vk_2) & \frac{k_l}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vec{N} & \vec{N}_l & \vec{N}_2 \end{vmatrix}$$

determinatı hesaplandığında

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2v}} = \frac{k_l}{\sqrt{2}} \vec{N} - (vk_2) \vec{N}_l$$

olarak elde edilir. Bu determinant yerine yazıldığında $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$v = \frac{\frac{k_l}{\sqrt{2}} \vec{N} - (vk_2) \vec{N}_l}{\sqrt{(vk_2)^2 + \frac{k_l^2}{2}}}$$

olarak elde edilir. $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2ss}} = vk_2' \vec{N} + vk_2 (k_l \vec{N}_l + k_2 \vec{N}_2) + \frac{k_l' \vec{N}_l}{\sqrt{2}} + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} \vec{N}$$

ifadesini biraz düzenlersek,

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2ss}} = \left(vk_2' + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} \right) \vec{N} + \left(vk_2 k_l + \frac{k_l'}{\sqrt{2}} \right) \vec{N}_l + vk_2^2 \vec{N}_2$$

olarak verilir. Aynı yolla

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2sv}} = k_2 \vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{2vv}} = 0$$

olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2ss}}, \vec{n} \rangle = \frac{\frac{k_l}{\sqrt{2}} \left(vk_2' + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} \right) - (vk_2) \left(vk_2 k_l + \frac{k_l'}{\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{(vk_2)^2 + \frac{k_l^2}{2}}}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{2sv}}, \vec{n} \rangle = \frac{\frac{k_l k_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(vk_2)^2 + \frac{k_l^2}{2}}}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N_2}_{vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\widehat{N_2}} = \frac{-\left(\frac{k_1 k_2}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{k_1^2}{2} + (vk_2)^2} = -\frac{k_1^2 k_2^2}{2\left(\frac{k_1^2}{2} + (vk_2)^2\right)^2} \text{ ve}$$

$$H_{\widehat{N_2}} = \frac{\frac{k_1}{\sqrt{2}}\left(vk_2' + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}}\right) - (vk_2)\left(vk_2 k_1 + \frac{k_1'}{\sqrt{2}}\right)}{2\left(\frac{k_1^2}{2} + (vk_2)^2\right)} \\ = \frac{\frac{k_1}{\sqrt{2}}\left(vk_2' + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}}\right) - (vk_2)\left(vk_2 k_1 + \frac{k_1'}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{\left((vk_2)^2 + \frac{k_1^2}{2}\right)^3}}$$

elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5.3.3 Dual Darboux $(\vec{\omega})$ ve dual Steiner $(\vec{D})$ vektörlerinin ani dönüşü aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\vec{\omega} = -k_2 \vec{N_1} + k_1 \vec{N_2} + \varepsilon \frac{(k_1 + k_2)}{\sqrt{2}} \vec{N} \quad \text{ve}$$

$$\vec{D} = \oint \vec{\omega} = -\vec{N_1} \oint k_2 + \vec{N_2} \oint k_1 + \varepsilon \left(\vec{N} \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N_1} \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N_2} \oint \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right) \text{ dir.}$$

İspat.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega} + \varepsilon \vec{\omega}^*$$

$$\vec{\omega}^* = \alpha \wedge \vec{\omega} = \left(\frac{\vec{N}_1 + \vec{N}_2}{\sqrt{2}} \right) \wedge (-k_2 \vec{N}_1 + k_1 \vec{N}_2) = \frac{(k_1 + k_2) \vec{N}}{\sqrt{2}}$$

olur buradan da

$$\vec{\omega} = -k_2 \vec{N}_1 + k_1 \vec{N}_2 + \varepsilon \frac{(k_1 + k_2)}{\sqrt{2}} \vec{N}$$

olarak elde edilir. Dual Steiner vektörün tanımından

$$\vec{D} = \oint \vec{\omega} = -\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1 + \varepsilon \left(\vec{N} \oint \frac{(k_1 + k_2)}{\sqrt{2}} \right)$$

olarak elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5.3.4 $\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2$ dual eğrilerinin oluşturmuş olduğu kapalı regle yüzeylere ait dual açılara ait eğimler sırasıyla $\Lambda_{\widehat{N}} = 0$, $\Lambda_{\widehat{N}_1} = -\oint k_2 + \varepsilon \left(\oint \left(\frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}} \right) \right)$, $\Lambda_{\widehat{N}_2} = \oint k_1$ dir.

İspat. $\Lambda_{\widehat{N}} = -\langle \vec{D}, \vec{N} \rangle = -\langle \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^*, \vec{N} + \varepsilon \vec{N}^* \rangle$ ifadesi daha açık bir halde yazılırsa

$$\begin{aligned} \Lambda_{\widehat{N}} &= \langle -\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1, \vec{N} \rangle + \varepsilon \left(\left\langle -\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1, \frac{\vec{N}_1 - \vec{N}_2}{\sqrt{2}} \right\rangle + \left\langle \vec{N} \oint \left(\frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}} \right), \vec{N} \right\rangle \right) \\ &= \varepsilon \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \oint k_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \oint k_1 + \oint \left(\frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler $\widehat{N}_1$ ve $\widehat{N}_2$ için yapılırsa,

$$\begin{aligned} \Lambda_{\widehat{N}_1} &= \langle -\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1, \vec{N}_1 \rangle + \varepsilon \left(\left\langle -\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1, \frac{-\vec{N}}{\sqrt{2}} \right\rangle + \left\langle \vec{N} \oint \left(\frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}} \right), \vec{N} \right\rangle \right) \\ &= -\oint k_2 + \varepsilon \left(\oint \left(\frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}} \right) \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\Lambda_{\widehat{N}_2} &= \left\langle -\overrightarrow{N_1} \oslash k_2 + \overrightarrow{N_2} \oslash k_1, \overrightarrow{N_2} \right\rangle + \varepsilon \left\langle \left(-\overrightarrow{N_1} \oslash k_2 + \overrightarrow{N_2} \oslash k_1, \frac{\overrightarrow{N}}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{N} \oslash \left(\frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}} \right), \overrightarrow{N_2} \right\rangle \\ &= \oslash k_1\end{aligned}$$

olarak elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

3.5.4 Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Çatısına Göre $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Smarandache Eğrileri ve Regle Yüzeyler

E-Study dönüşümü yardımıyla dual birim küre üzerinde seçilen $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ alternatif hareketli çatısının elemanları ile dual uzayda çizilen kapalı eğriler E^3 Öklid uzayında bir regle yüzey temsil etmektedir. Buradan seçilen dual eğriler $\widehat{N} = N + \varepsilon N^*, \widehat{N}_1 = N_1 + \varepsilon N_1^*, \widehat{N}_2 = N_2 + \varepsilon N_2^*$ olmak üzere, $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri

$$\begin{aligned}\varphi_{\widehat{N}}(s, v) &= \beta_N(s) + vN(s) \quad , \quad \beta_N(s) = N \wedge N^*, \\ \varphi_{\widehat{N}_1}(s, v) &= \beta_{N_1}(s) + vN_1(s) \quad , \quad \beta_{N_1}(s) = N_1 \wedge N_1^*, \\ \varphi_{\widehat{N}_2}(s, v) &= \beta_{N_2}(s) + vN_2(s) \quad , \quad \beta_{N_2}(s) = N_2 \wedge N_2^*,\end{aligned}$$

ile verilir. Bu denklemler bize $\alpha(s)$ eğrisine ait $\alpha_{NN_1}(s)$ smarandache eğrisini $\overrightarrow{N}, \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}$ vektörleri yardımıyla $\alpha_{NN_1N_2}(s) = \frac{\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}}$ olarak tanımlanır. Bu eğriye bağlı olarak $\overrightarrow{N}, \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}$ vektörlerinin vektörel momentleri sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$N^* = \alpha \wedge \overrightarrow{N} = \left(\frac{\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{N_1} - \overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}}$$

olur. Benzer yolla

$$N_1^* = \alpha \wedge N_1 = \left(\frac{N + N_1 + N_2}{\sqrt{2}} \right) \wedge N_1 = \frac{-N + N_2}{\sqrt{2}}$$

ve

$$N_2^* = \alpha \wedge N_2 = \left(\frac{N + N_1 + N_2}{\sqrt{2}} \right) \wedge N_2 = \frac{N - N_1}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir. Bu denklemler kullanılarak $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ dual eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri sırasıyla aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\vec{\psi}_{\vec{N}}(s, v) = \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v\vec{N} = \vec{N} \wedge \left(\frac{\vec{N}_1 - \vec{N}_2}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{N} = \frac{\vec{N}_1 + \vec{N}_2}{\sqrt{2}} + v\vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\vec{N}_1}(s, v) = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_1^* + v\vec{N}_1 = \vec{N}_1 \wedge \left(\frac{-\vec{N} + \vec{N}_2}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{N}_1 = \frac{\vec{N} + \vec{N}_2}{\sqrt{2}} + v\vec{N}_1$$

$$\vec{\psi}_{\vec{N}_2}(s, v) = \vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^* + v\vec{N}_2 = \vec{N}_2 \wedge \left(\frac{\vec{N} - \vec{N}_1}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{N}_2 = \frac{\vec{N} + \vec{N}_1}{\sqrt{2}} + v\vec{N}_2$$

Teorem 3.5.4.1 $(\vec{N}), (\vec{N}_1), (\vec{N}_2)$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin dağılma

parametreleri $P_{\vec{N}} = 0$, $P_{\vec{N}_1} = -\frac{k_2}{\sqrt{2}}$ ve $P_{\vec{N}_2} = \frac{k_1}{\sqrt{2}}$ olarak hesaplanır.

İspat. $\vec{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin dağılma parametresini

$$P_{\vec{N}} = \frac{\det\left(\frac{d\beta_{\vec{N}}}{ds_t}, \vec{N}, \frac{d\vec{N}}{ds_t}\right)}{\left\|\frac{d\vec{N}}{ds_t}\right\|^2} = \frac{\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}')}{\|\vec{N}'\|^2}$$

determinantı ile hesaplayabilmek için öncelikle $(\vec{N} \wedge \vec{N}^*)'$ türevini hesaplayalım.

$$(\vec{N} \wedge \vec{N}^*)' = \left(\frac{\vec{N}_1}{\sqrt{2}} \right)' = \frac{(k_1 + k_2)\vec{N}}{\sqrt{2}}$$

determinant alma işlemi yapıldıktan sonra

$$\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}') = \begin{vmatrix} \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 \end{vmatrix}$$

ifadesi biraz düzenlenirse,

$$P_{\widehat{N}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

olur buradan da verilen dual eğrinin dağılma parametresi $P_{\widehat{N}} = 0$ olarak hesaplanır. Aynı şekilde

$P_{\widehat{N}_1}$ ve $P_{\widehat{N}_2}$ de

$$P_{\widehat{N}_1} = \frac{\det\left(\left(\vec{N}_1 \wedge \vec{N}_1^*\right)', \vec{N}_1, \vec{N}_1'\right)}{\left\|\vec{N}_1'\right\|^2}$$

bu determinanti hesaplayabilmek için

$$\left(\vec{N}_1 \wedge \vec{N}_1^*\right)' = \left(\frac{\vec{N} + \vec{N}_2}{\sqrt{2}}\right)' = \frac{k_2 \vec{N} + k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2}{\sqrt{2}}$$

türevinden

$$\det\left(\left(\vec{N}_1 \wedge \vec{N}_1^*\right)', \vec{N}_1, \vec{N}_1'\right) = \begin{vmatrix} \frac{k_2}{\sqrt{2}} & \frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

olur. Bu determinant hesaplandığında,

$$P_{\widehat{N}_1} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{k_2}{\sqrt{2}} & \frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{k_1^2}} = -\frac{k_2}{\sqrt{2}}$$

olarak bulunur. Şimdi de benzer işlemleri $P_{\widehat{N}_2}$ için yapalım.

$$P_{\widehat{N}_2} = \frac{\det\left(\left(\vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^*\right)', \vec{N}_2, \vec{N}_2'\right)}{\left\|\vec{N}_2'\right\|^2}$$

bu determinanti hesaplayabilmek için öncelikle $(\vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^*)'$ türevini hesaplayalım;

$$(\vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^*)' = \left(\frac{\vec{N} + \vec{N}_1}{\sqrt{2}} \right)' = \frac{k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2 + k_1 \vec{N}}{\sqrt{2}}$$

elde ettiğimiz bu türevi determinatta yerine koyduğumuzda

$$\det((\vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^*)', \vec{N}_2, \vec{N}_2') = \begin{vmatrix} \frac{k_2}{\sqrt{2}} & \frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ k_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ifadesi biraz düzenlendiğinde

$$P_{\hat{N}_2} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ k_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{k_2}$$

determinantı hesaplandığında verilen dual eğrinin dağılma parametresi $P_{\hat{N}_2} = \frac{k_1}{\sqrt{2}}$ olur ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5.4.2 $\{\hat{N}, \hat{C}, \hat{W}\}$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin ortalama eğrilikleri

$$K_{\hat{N}} = -\frac{v^2 k_1^2 k_2^2}{(v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2)^2}, \quad K_{\hat{N}_1} = -\frac{k_1^2 k_2^2}{2 \left(\frac{k_2^2}{2} + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^2}, \quad K_{\hat{N}_2} = -\frac{k_1^2 k_2^2}{2 \left(\frac{k_1^2}{2} + \left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^2}$$

ve Gauss eğrilikleri

$$H_{\hat{N}} = \frac{\sqrt{2} \frac{vk_1^2 k_2 + k_1 k_2^2}{v\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} + \frac{vk_2 \left(k_1 k_2 + k_2^2 + vk_2' \right) - vk_1 \left(k_1^2 + k_1 k_2 + vk_1' \right)}{v\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}}{2(v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2)}$$

$$-k_1^2 k_2 - \frac{k_2}{\sqrt{2}} \left(\frac{k_1^2 + k_2^2 + k_2'}{\sqrt{2}} + vk_1' \right) + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{k_2^2 + k_2'}{\sqrt{2}} + vk_1 k_2 \right)$$

$$H_{\widehat{N}_1} = \frac{-k_1^2 k_2 - \frac{k_2}{\sqrt{2}} \left(\frac{k_1^2 + k_2^2 + k_2'}{\sqrt{2}} + vk_1' \right) + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{k_2^2 + k_2'}{\sqrt{2}} + vk_1 k_2 \right)}{\sqrt{\left(k_2^2 + 2 \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^3}}$$

$$H_{\widehat{N}_2} = \frac{-2k_2^2 k_1 + \frac{k_1}{\sqrt{2}} \left(\left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right)' + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_1 k_2}{\sqrt{2}} \right) - \left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) \left(vk_2 k_1 + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_1'}{\sqrt{2}} \right)}{2 \sqrt{\left(\left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{k_1^2}{2} \right)^3}}$$

olarak elde edilir.

İspat. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliğini bulmak için I. Esas form ve II. esas form ile birlikte normal vektör alanını bulmamız gerekli. Bunun için verilen eğrinin öncelikle s ve v ye göre yönlü türevini alalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} = \frac{(k_1 + k_2) \vec{N}}{\sqrt{2}} + v \left(k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2 \right)$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_v} = \vec{N}$$

kısmi türevlerinden I. Esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_s}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \rangle = \frac{(k_1 + k_2)^2}{2} + v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_v}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \rangle = \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_v}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_v} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I = \left(\frac{(k_1 + k_2)^2}{2} + v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2 \right) ds^2 + \sqrt{2} (k_1 + k_2) ds dv + dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanına ihtiyacımız var. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{\vec{\psi}_{\hat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\hat{N}_v}}{\|\vec{\psi}_{\hat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\hat{N}_v}\|} = \frac{-vk_1 \vec{N}_2 + vk_2 \vec{N}_1}{\sqrt{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2}}$$

olarak elde edilir. $\hat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\hat{N}$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}} = (k_1 + k_2)' \vec{N} + (k_1 + k_2) (k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2) + vk_1' \vec{N}_1 + vk_1 \vec{N} + vk_2' \vec{N}_2 + vk_2 k_2 \vec{N}$$

ifadesi biraz daha düzenlenirse

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}} = \vec{N} \left((k_1 + k_2)' + vk_1^2 + k_2^2 \right) + \vec{N}_1 (k_1^2 + k_1 k_2 + vk_1') + \vec{N}_2 (k_1 k_2 + k_2^2 + vk_2')$$

olarak verilir. Benzer şekilde $\vec{\psi}_{\hat{N}_{sv}} = k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2$ ve $\vec{\psi}_{\hat{N}_{vv}} = 0$ sonucu bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\hat{N}$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}}, \vec{n} \rangle = \left\{ \frac{vk_2 (k_1 k_2 + k_2^2 + vk_2') - vk_1 (k_1^2 + k_1 k_2 + vk_1')}{v \sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \right\}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{sv}}, \vec{n} \rangle = \frac{-vk_1 k_2}{v \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\hat{N}} = - \frac{\left(\frac{-vk_1 k_2}{v \sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \right)^2}{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2} = - \frac{v^2 k_1^2 k_2^2}{(v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2)^2}$$

$$H_{\hat{N}} = \frac{\sqrt{2} \frac{vk_1^2 k_2 + k_1 k_2^2}{v \sqrt{k_1^2 + k_2^2}} + \frac{vk_2 (k_1 k_2 + k_2^2 + vk_2') - vk_1 (k_1^2 + k_1 k_2 + vk_1')}{v \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}}{2(v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2)}$$

Benzer yolla şimdi de $\{\vec{\psi}_{\widehat{N}_1}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_2}\}$ yüzeyleri için Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1s}} = \frac{k_2 \vec{N} + k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2}{\sqrt{2}} + vk_1 \vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1v}} = \vec{N}_1$$

kısmi türevlerinden I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1s}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1s}} \rangle = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2} + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1s}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1v}} \rangle = \frac{k_1}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1v}}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1v}} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I = \left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{2} + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) ds^2 + \sqrt{2} k_1 ds dv + dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin

belirttiği normal vektör alanı $\vec{n} = \frac{\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1v}}}{\|\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1v}}\|}$ dir. $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör

alanı için öncelikle

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1v}} = \begin{vmatrix} vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} & \frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \vec{N} & \vec{N}_1 & \vec{N}_2 \end{vmatrix}$$

ifadesi düzenlenirse,

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1s}} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1v}} = -\frac{k_2}{\sqrt{2}} \vec{N} + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right) \vec{N}_2$$

dir. Bu determinant yerine yazıldığında $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{-\frac{k_2}{\sqrt{2}}\vec{N} + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)\vec{N}_2}{\sqrt{\frac{k_2^2}{2} + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

olarak elde edilir. $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1ss}} = \frac{k_2'\vec{N} + k_1k_2\vec{N}_1 + k_2^2\vec{N}_2 + k_1'\vec{N}_1 + k_1^2\vec{N} + k_2'\vec{N}_2 + k_2^2\vec{N}}{\sqrt{2}} + vk_1'\vec{N} + vk_1^2\vec{N}_1 + vk_1k_2\vec{N}_2$$

ifadesi biraz düzenlenirse,

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1ss}} = \vec{N}\left(\frac{k_1^2 + k_2^2 + k_2'}{\sqrt{2}} + vk_1'\right) + \vec{N}_1\left(\frac{k_1k_2 + k_1'}{\sqrt{2}} + vk_1^2\right) + \vec{N}_2\left(\frac{k_2^2 + k_2'}{\sqrt{2}} + vk_1k_2\right)$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1sv}} = k_1\vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{1vv}} = 0$$

olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\widehat{N}_1$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1ss}}, \vec{n} \rangle = \frac{-\frac{k_2}{\sqrt{2}}\left(\frac{k_1^2 + k_2^2 + k_2'}{\sqrt{2}} + vk_1'\right) + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{k_2^2 + k_2'}{\sqrt{2}} + vk_1k_2\right)}{\sqrt{\frac{k_2^2}{2} + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{1sv}}, \vec{n} \rangle = -\frac{k_2k_1}{2\sqrt{\frac{k_2^2}{2} + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_v}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\hat{N}_l} = - \frac{\left(- \frac{k_2 k_l}{2 \sqrt{\frac{k_2^2}{2} + \left(v k_l + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2}} \right)^2}{\frac{k_2^2}{2} + \left(v k_l + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2} = - \frac{k_l^2 k_2^2}{2 \left(\frac{k_2^2}{2} + \left(v k_l + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^2}$$

$$H_{\hat{N}_l} = \frac{- \frac{k_l^2 k_2}{\sqrt{k_2^2 + 2 \left(v k_l + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2}} + \frac{- \frac{k_2}{\sqrt{2}} \left(\frac{k_l^2 + k_2^2 + k_2'}{\sqrt{2}} + v k_l' \right) + \left(v k_l + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{k_2^2 + k_2'}{\sqrt{2}} + v k_l k_2 \right)}{\sqrt{\frac{k_2^2}{2} + \left(v k_l + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2}}}{k_2^2 + 2 \left(v k_l + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2}$$

$$H_{\hat{N}_l} = \frac{- k_l^2 k_2 - \frac{k_2}{\sqrt{2}} \left(\frac{k_l^2 + k_2^2 + k_2'}{\sqrt{2}} + v k_l' \right) + \left(v k_l + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{k_2^2 + k_2'}{\sqrt{2}} + v k_l k_2 \right)}{\sqrt{\left(k_2^2 + 2 \left(v k_l + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^3}}$$

olarak elde edilir. Şimdi de $\vec{\psi}_{\hat{N}_2}$ dual eğrisine bakalım.

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{2s}} = \frac{k_l \vec{N}_l + k_2 \vec{N}_2 - k_l \vec{N}}{\sqrt{2}} + v k_2 \vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{2v}} = \vec{N}_2$$

kısmi türevlerinden I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{2s}}, \vec{\psi}_{\hat{N}_{2s}} \rangle = \frac{k_l^2}{2} + \left(\left(v k_2 - \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 + \frac{k_2^2}{2}$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_2 s}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_2 v} \rangle = \frac{k_2}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_2 v}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_2 v} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I = \left[\frac{k_1^2}{2} + \left(\left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 + \frac{k_2^2}{2} \right] ds^2 + \sqrt{2} k_2 ds dv + dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin

belirttiği normal vektör alanı $\vec{n} = \frac{\vec{\psi}_{\widehat{N}_2 s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_2 v}}{\|\vec{\psi}_{\widehat{N}_2 s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_2 v}\|}$ dir. $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör

alanı için öncelikle aşağıdaki determinanı hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_2 s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_2 v} = \begin{vmatrix} \left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) & \frac{k_1}{\sqrt{2}} & \frac{k_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ N & N_1 & N_2 \end{vmatrix}$$

ifadesi biraz düzenlendiğinde $\vec{\psi}_{\widehat{N}_2 s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_2 v} = \frac{k_1}{\sqrt{2}} \vec{N} - \left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) \vec{N}_1$ olur. Bu determinant yerine

yazıldığında $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{\frac{k_1}{\sqrt{2}} \vec{N} - \left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) \vec{N}_1}{\sqrt{\left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{k_1^2}{2}}}$$

olarak elde edilir. $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye

ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}_2$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_2 ss} = \left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right)' \vec{N} + \left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) (k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2) + \frac{k_1' \vec{N}_1}{\sqrt{2}} + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} \vec{N} + \frac{k_2' \vec{N}_2}{\sqrt{2}} + \frac{k_1 k_2 \vec{N}}{\sqrt{2}}$$

ifadesini biraz düzenlersek,

$$\vec{\psi}_{\widehat{N_2}_{ss}} = \left(\left(vk_2 - \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right)' + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l k_2}{\sqrt{2}} \right) \vec{N} + \left(vk_2 k_l + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l'}{\sqrt{2}} \right) \vec{N}_l + \left(vk_2^2 + \frac{k_2'}{\sqrt{2}} \right) \vec{N}_2$$

olarak verilir. Aynı şekilde $\vec{\psi}_{\widehat{N_2}_{sv}} = k_2 \vec{N}$ ve $\vec{\psi}_{\widehat{N_2}_{vv}} = 0$ sonuçları bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\widehat{N_2}$ dual eğrisinin normal vektör alanın iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N_2}_{ss}}, \vec{n} \rangle = \frac{\frac{k_l}{\sqrt{2}} \left(\left(vk_2 - \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right)' + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l k_2}{\sqrt{2}} \right) - \left(vk_2 - \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right) \left(vk_2 k_l + \frac{k_l^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_l'}{\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{\left(vk_2 - \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{k_l^2}{2}}}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N_2}_{sv}}, \vec{n} \rangle = \frac{\frac{k_l k_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(vk_2 - \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{k_l^2}{2}}}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N_2}_{vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\widehat{N_2}} = \frac{- \left(\frac{\frac{k_l k_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(vk_2 - \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{k_l^2}{2}}} \right)^2}{\frac{k_l^2}{2} + \left(\left(vk_2 - \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 + \frac{k_2^2}{2} - \frac{k_2^2}{2}} = - \frac{k_l^2 k_2^2}{2 \left(\frac{k_l^2}{2} + \left(\left(vk_2 - \frac{k_l}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 \right)^2}$$

$$H_{\widehat{N}_2} = \frac{-2\frac{k_2}{\sqrt{2}}\frac{\frac{k_1 k_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{k_1^2}{2}}} + \frac{\frac{k_1}{\sqrt{2}}\left(\left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)' + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_1 k_2}{\sqrt{2}}\right) - \left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)\left(vk_2 k_1 + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_1'}{\sqrt{2}}\right)}{2\left(\frac{k_1^2}{2} + \left(\left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 + \frac{k_2^2}{2} - \frac{k_2^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{-2k_2^2 k_1 + \frac{k_1}{\sqrt{2}}\left(\left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)' + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_1 k_2}{\sqrt{2}}\right) - \left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)\left(vk_2 k_1 + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_1'}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{\left(\left(vk_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{k_1^2}{2}\right)^3}}$$

elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5.4.3 Dual Darboux $(\vec{\omega})$ ve dual Steiner $(\vec{D})$ vektörlerinin ani dönmesi

$$\vec{\omega} = -k_2 \vec{N}_1 + k_1 \vec{N}_2 + \varepsilon \left(\frac{k_1 \vec{N} - k_2 \vec{N}_2 - k_1 \vec{N}_1}{\sqrt{2}} \right) \text{ ve}$$

$$\vec{D} = \oint \vec{\omega} = -\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1 + \varepsilon \left(\vec{N} \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N}_1 \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N}_2 \oint \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)$$

ile verilir.

İspat. Darboux vektörü tanımından

$$\vec{\omega} = \vec{\omega} + \varepsilon \vec{\omega}^*$$

$$\vec{\omega}^* = \alpha \wedge \vec{\omega} = \left(\frac{\vec{N} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2}{\sqrt{2}} \right) \wedge (-k_2 \vec{N}_1 + k_1 \vec{N}_2) = \frac{(k_1 + k_2) \vec{N} - k_2 \vec{N}_2 - k_1 \vec{N}_1}{\sqrt{2}}$$

olur, buradan da

$$\vec{\omega} = -k_2 \vec{N}_1 + k_1 \vec{N}_2 + \varepsilon \left(\frac{(k_1 + k_2) \vec{N} - k_2 \vec{N}_2 - k_1 \vec{N}_1}{\sqrt{2}} \right) \text{ olarak elde edilir. Dual Steiner vektörün}$$

tanımından da

$$\vec{D} = \oint \vec{\omega} = -\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1 + \varepsilon \left(\vec{N} \oint \left(\frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N}_1 \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N}_2 \oint \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)$$

olarak elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5.4.4 $\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2$ dual eğrilerinin oluşturmuş olduğu kapalı regle yüzeylere ait dual açılara ait eğimler sırasıyla $\Lambda_{\widehat{N}} = 0$, $\Lambda_{\widehat{N}_1} = -\oint k_2$ ve $\Lambda_{\widehat{N}_2} = \oint k_1$ dir.

İspat.

$$\Lambda_{\widehat{N}} = -\langle \vec{D}, \vec{N} \rangle = -\langle \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^*, \vec{N} + \varepsilon \vec{N}^* \rangle$$

ifadesi daha açık bir halde yazılırsa

$$\begin{aligned} \Lambda_{\widehat{N}} &= \langle -\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1, \vec{N} \rangle \\ &\quad + \varepsilon \left(\left\langle \left(-\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1, \frac{\vec{N}_1 - \vec{N}_2}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle + \left\langle \left(\vec{N} \oint \left(\frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N}_1 \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N}_2 \oint \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right), \vec{N} \right\rangle \right) \\ \Lambda_{\widehat{N}} &= \varepsilon \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \oint k_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \oint k_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \oint k_1 + k_2 \right) \\ \Lambda_{\widehat{N}} &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler $\widehat{N}_1$ ve $\widehat{N}_2$ için yapılırsa,

$$\begin{aligned} \Lambda_{\widehat{N}_1} &= \langle -\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1, \vec{N}_1 \rangle \\ &\quad + \varepsilon \left(\left\langle \left(-\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1, \frac{-\vec{N}_1 + \vec{N}_2}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle + \left\langle \left(\vec{N} \oint \left(\frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N}_1 \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \vec{N}_2 \oint \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right), \vec{N}_1 \right\rangle \right) \\ \Lambda_{\widehat{N}_1} &= -\oint k_2 + \varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \oint k_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \oint k_1 \right) \\ \Lambda_{\widehat{N}_1} &= -\oint k_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\widehat{N}_2} &= \left\langle -\overline{N}_1 \wp k_2 + \overline{N}_2 \wp k_1, \overline{N}_2 \right\rangle \\
&+ \varepsilon \left\langle \left\langle -\overline{N}_1 \wp k_2 + \overline{N}_2 \wp k_1, \frac{\overline{N} - \overline{N}_1}{\sqrt{2}} \right\rangle + \left\langle \left(\overline{N} \wp \left(\frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}} \right) - \overline{N}_1 \wp \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}} \right) - \overline{N}_2 \wp \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right), \overline{N}_2 \right\rangle \right\rangle \\
\Lambda_{\widehat{N}_2} &= \wp k_1 + \varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \wp k_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \wp k_2 \right) \\
\Lambda_{\widehat{N}_2} &= \wp k_1
\end{aligned}$$

olarak elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

3.6 Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}$ Çatısına Göre Dual Eğriler ve Karşılık Geldiği Regle Yüzeyler

3.6.1 Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}$ Çatısına Göre $\widehat{N}\widehat{C}$ Smarandache Eğrileri ve Regle Yüzeyler

E-Study dönüşümü yardımıyla dual birim küre üzerinde seçilen $\{\overline{N}, \overline{C}, \overline{W}\}$ alternatif hareketli çatısının elemanları ile dual uzayda çizilen kapalı eğriler E^3 Öklid uzayında bir regle yüzey temsil etmektedir. Buradan seçilen dual eğriler $\widehat{N} = \overline{N} + \varepsilon \overline{N}^*, \widehat{N}_1 = \overline{N}_1 + \varepsilon \overline{N}_1^*, \widehat{N}_2 = \overline{N}_2 + \varepsilon \overline{N}_2^*$ olmak üzere, $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\varphi_{\widehat{N}}(s, v) = \beta_{\overline{N}}(s) + v \overline{N}(s) \quad , \quad \beta_{\overline{N}}(s) = \overline{N} \wedge \overline{N}^*,$$

$$\varphi_{\widehat{C}}(s, v) = \beta_{\overline{C}}(s) + v \overline{C}(s) \quad , \quad \beta_{\overline{N}_1}(s) = \overline{C} \wedge \overline{C}^*,$$

$$\varphi_{\widehat{W}}(s, v) = \beta_{\overline{W}}(s) + v \overline{W}(s) \quad , \quad \beta_{\overline{N}_2}(s) = \overline{W} \wedge \overline{W}^*,$$

Bu denklemler bize $\alpha(s)$ eğrisine ait $\alpha_{\overline{NC}}(s)$ Smarandache eğrisini $\{\overline{N}, \overline{C}, \overline{W}\}$ vektörleri

yardımıyla $\alpha_{\overline{NC}}(s) = \frac{\overline{N} + \overline{C}}{\sqrt{2}}$ ile tanımlanır. $\{\overline{N}, \overline{C}, \overline{W}\}$ vektörlerinin vektörel momentleri

$$\overline{N}^* = \alpha \wedge \overline{N} = \left(\frac{\overline{N} + \overline{C}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \overline{N} = -\frac{\overline{W}}{\sqrt{2}}$$

olur. Benzer şekilde

$$\vec{C}^* = \alpha \wedge \vec{C} = \left(\frac{\vec{N} + \vec{C}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \vec{C} = \frac{\vec{W}}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\vec{W}^* = \alpha \wedge \vec{W} = \left(\frac{\vec{N} + \vec{C}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \vec{W} = \frac{\vec{N} - \vec{C}}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir. Bu denklemler kullanılarak $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ dual eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri sırasıyla aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) = \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v\vec{N} = \vec{N} \wedge \left(-\frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{N} = \frac{\vec{C}}{\sqrt{2}} + v\vec{N},$$

$$\vec{\psi}_{\hat{C}}(s, v) = \vec{C} \wedge \vec{C}^* + v\vec{C} = \vec{C} \wedge \frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} + v\vec{C} = \frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{C}$$

$$\vec{\psi}_{\hat{W}}(s, v) = \vec{W} \wedge \vec{W}^* + v\vec{W} = \vec{W} \wedge \left(\frac{\vec{N} - \vec{C}}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{W} = \frac{\vec{N} + \vec{C}}{\sqrt{2}} + v\vec{W}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.6.1.1 $(\hat{N}), (\hat{C}), (\hat{W})$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin dağılma

parametreleri, $P_{\hat{N}} = \frac{g}{\sqrt{2}f}, P_{\hat{C}} = 0$ ve $P_{\hat{W}} = \frac{-f}{\sqrt{2}g}$ olarak hesaplanır.

İspat. $\hat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin dağılma parametresini

$$P_{\hat{N}} = \frac{\det \left(\frac{d\beta_{\vec{N}}}{ds_t}, \vec{N}, \frac{d\vec{N}}{ds_t} \right)}{\left\| \frac{d\vec{N}}{ds_t} \right\|^2} = \frac{\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}')}{\left\| \vec{N}' \right\|^2}$$

determinantını hesaplayabilmek için öncelikle $(\vec{N} \wedge \vec{N}^*)'$ türevini hesaplayalım.

$$(\vec{N} \wedge \vec{N}^*)' = \left(\frac{\vec{C}}{\sqrt{2}} \right)' = \frac{-f\vec{N} + g\vec{W}}{\sqrt{2}}$$

determinant alma işlemi yapıldıktan sonra

$$\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}') = \begin{vmatrix} \frac{-f}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix}$$

ifadesi biraz düzenlendiğinde

$$P_{\hat{N}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{-f}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix}}{f^2}$$

verilen dual eğrinin dağılma parametresi $P_{\hat{N}} = \frac{gf}{\sqrt{2}f^2} = \frac{g}{\sqrt{2}f}$ olarak hesaplanır. Aynı şekilde $P_{\hat{C}}$

ve $P_{\hat{W}}$ de bulalım.

$$P_{\hat{C}} = \frac{\det\left(\frac{d\beta_{\vec{C}}}{ds_t}, \vec{C}, \frac{d\vec{C}}{ds_t}\right)}{\left\|\frac{d\vec{C}}{ds_t}\right\|^2} = \frac{\det((\vec{C} \wedge \vec{C}^*)', \vec{C}, \vec{C}')}{\|\vec{C}'\|^2}$$

determinantını hesaplayabilmek için öncelikle $(\vec{C} \wedge \vec{C}^*)'$ türevini hesaplayalım.

$$(\vec{C} \wedge \vec{C}^*)' = \left(\frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} \right)' = \frac{f\vec{C}}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir.

$$\det((\vec{C} \wedge \vec{C}^*)', \vec{C}, \vec{C}') = \begin{vmatrix} 0 & \frac{f}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -f & 0 & g \end{vmatrix}$$

determinantı hesaplandığında,

$$P_{\vec{C}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{f}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -f & 0 & g \end{vmatrix}}{f^2 + g^2}$$

gerekli işlemler yapıldığında $P_{\vec{C}} = 0$ olarak bulunur. Şimdi de benzer işlemleri $P_{\vec{W}}$ için yapalım.

$$P_{\vec{W}} = \frac{\det\left(\frac{d\beta_{\vec{W}}}{ds_t}, \vec{W}, \frac{d\vec{W}}{ds_t}\right)}{\left\|\frac{d\vec{W}}{ds_t}\right\|^2} = \frac{\det((\vec{W} \wedge \vec{W}^*)', \vec{W}, \vec{W}')}{\|\vec{W}'\|^2}$$

determinantını hesaplayabilmek için öncelikle $(\vec{W} \wedge \vec{W}^*)'$ türevini hesaplayalım.

$$(\vec{W} \wedge \vec{W}^*)' = \left(\frac{\vec{N} + \vec{C}}{\sqrt{2}}\right)' = \frac{f\vec{C} + (-f\vec{N} + g\vec{W})}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir. Şimdi de verilen dual eğrinin dağılma parametresini hesaplayabilmek için $\det((\vec{W} \wedge \vec{W}^*)', \vec{W}, \vec{W}')$ hesaplayalım.

$$\det((\vec{W} \wedge \vec{W}^*)', \vec{W}, \vec{W}') = \begin{vmatrix} \frac{-f}{\sqrt{2}} & \frac{f}{\sqrt{2}} & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & 0 \end{vmatrix}$$

ifadesini yerine koyduğumuzda

$$P_{\widehat{W}} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{f}{\sqrt{2}} & \frac{f}{\sqrt{2}} & g \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & 0 \end{vmatrix}}{g^2}$$

determinantı hesaplandığında verilen dual eğrinin dağılma parametresi $P_{\widehat{W}} = \frac{-f}{\sqrt{2}g}$ olur ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Sonuç: Dayanak eğrisi $\widehat{NC}$ Smarandache eğrisi ile üretilen $(\widehat{W})$ dual eğrisine karşılık gelen $\vec{\psi}_{\widehat{N}\widehat{C}}$ kapalı regle yüzeyini için $g=0$ veya $\frac{\tau}{\kappa} = sbt$ olması durumunda dağılma parametresi hesaplanamamaktadır.

Teorem 3.6.1.2 $\{\widehat{N}, \widehat{C}, \widehat{W}\}$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin ortalama eğrilikleri

$$K_{\widehat{N}} = -\frac{f^2 g^2}{2\left(\frac{g^2}{2} + v^2 f^2\right)^2}, \quad K_{\widehat{C}} = 0, \quad K_{\widehat{W}} = -\frac{g^2 f^2}{2\left(\frac{f^2}{2} + \left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2}$$

ve Gauss eğrilikleri

$$H_{\widehat{N}} = \frac{(f^2 g) \frac{f^2}{2}}{2\sqrt{\left(\frac{g^2}{2} + v^2 f^2\right)^3}}, \quad H_{\widehat{C}} = -\frac{f\left(\frac{g}{\sqrt{2}} + vg'\right) + g\left(\frac{-f^2}{\sqrt{2}} - vf'\right)}{2v^2 \sqrt{(f^2 + g^2)^3}},$$

$$H_{\widehat{W}} = \frac{-2g^2 f + \left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{f'}{\sqrt{2}} + \left(fvg - \frac{f^2}{\sqrt{2}}\right)\right) - \frac{f}{\sqrt{2}}\left(-\frac{f^2}{\sqrt{2}} - \left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}}\right) - \frac{g^2}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{\left(\left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{f^2}{2}\right)^3}}$$

olarak elde edilir.

İspat. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliğini bulmak için I. esas form ve II. esas form ile birlikte normal vektör alanını bulmamız gerekli bu yüzden de öncelikle $\vec{\psi}_{\widehat{N}_v}$ dual eğrisinin yönlü türevleri

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} = \left[\frac{-f\vec{N} + g\vec{W}}{\sqrt{2}} + vf\vec{C} \right] \text{ ve } \vec{\psi}_{\widehat{N}_v} = \vec{N}$$

olur. Buradan I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_s}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \rangle = \frac{f^2}{2} + \frac{g^2}{2} + v^2 f^2$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_v}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \rangle = \frac{-f}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_v}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_v} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{f^2}{2} + \frac{g^2}{2} + v^2 f^2 \right) ds^2 + 2 \left(\frac{-f}{\sqrt{2}} \right) ds dv + 1 dv^2 \\ &= \left(\frac{f^2}{2} + \frac{g^2}{2} + v^2 f^2 \right) ds^2 - (\sqrt{2}f) ds dv + 1 dv^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Şimdi de II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı $\vec{n} = \frac{\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_v}}{\|\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_v}\|}$ olarak elde edilir. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği

normal vektör alanı için öncelikle aşağıdaki determinanti hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_v} = \begin{vmatrix} -\frac{f}{\sqrt{2}} & vf & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ \vec{N} & \vec{C} & \vec{W} \end{vmatrix}$$

determinantı yerine yazıldığında $\vec{n} = \frac{\frac{g}{\sqrt{2}}\vec{C} - vf\vec{W}}{\sqrt{v^2f^2 + \frac{g^2}{2}}}$ olarak elde edilir. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği

normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\begin{aligned}\vec{\psi}_{\widehat{N}_{ss}} &= \frac{d}{ds} \left[\frac{-f\vec{N} + g\vec{W}}{\sqrt{2}} + vf\vec{C} \right] \\ &= \frac{-f'\vec{N} - f(f'\vec{C}) + g'\vec{W} + g(-g'\vec{C})}{\sqrt{2}} + vf'\vec{C} + vf(-f'\vec{N} + g'\vec{W})\end{aligned}$$

ifadesi biraz daha düzenlenirse

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{ss}} = \vec{N} \left(\frac{-f'}{\sqrt{2}} - vf^2 \right) + \vec{C} \left(vf' - \frac{g^2}{\sqrt{2}} - \frac{f^2}{\sqrt{2}} \right) + \vec{W} \left(vfg + \frac{g'}{\sqrt{2}} \right)$$

olarak verilir. Aynı şekilde kısmi türevler $\psi_{\widehat{N}_{sv}} = f\vec{C}$ ve $\psi_{\widehat{N}_{vv}} = 0$ ile bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\widehat{N}$ dual eğrisinin normal vektör alanın iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{ss}}, \vec{n} \rangle = \left\{ \frac{\frac{g}{\sqrt{2}} \left((vf)' - \frac{g^2}{\sqrt{2}} - \frac{f^2}{\sqrt{2}} \right) - vf \left(g + \frac{g'}{\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{v^2f^2 + \frac{g^2}{2}}} \right\}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{sv}}, \vec{n} \rangle = (\psi_n)_{s,v} = \frac{f \frac{g}{\sqrt{2}}}{\sqrt{v^2f^2 + \frac{g^2}{2}}}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\widehat{N}_{vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\hat{N}} = -\frac{\left(\frac{f \frac{g}{\sqrt{2}}}{\sqrt{v^2 f^2 + \frac{g^2}{2}}}\right)^2}{\frac{f^2}{2} + \frac{g^2}{2} + v^2 f^2 - \frac{f^2}{2}} = -\frac{f^2 g^2}{2\left(\frac{g^2}{2} + v^2 f^2\right)^2} \text{ ve}$$

$$H_{\hat{N}} = \frac{-2\left(\frac{f \frac{g}{\sqrt{2}}}{\sqrt{v^2 f^2 + \frac{g^2}{2}}}\right) \frac{-f}{\sqrt{2}}}{2\left(\frac{f^2}{2} + \frac{g^2}{2} + v^2 f^2 - \frac{f^2}{2}\right)} = \frac{(f^2 g) \frac{f^2}{2}}{2\sqrt{\left(\frac{g^2}{2} + v^2 f^2\right)^3}}$$

Benzer yolla şimdi de $\{\vec{\psi}_{\hat{C}}, \vec{\psi}_{\hat{W}}\}$ yüzeyleri için Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\hat{C}_s} = \frac{f\vec{C}}{\sqrt{2}} + v(-f\vec{N} + g\vec{W})$$

$$\vec{\psi}_{\hat{C}_v} = C$$

kısmi türevlerinden I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_s}, \vec{\psi}_{\hat{C}_s} \rangle = \frac{f^2}{2} + v^2 f^2 + v^2 g^2$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_s}, \vec{\psi}_{\hat{C}_v} \rangle = \frac{f}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_v}, \vec{\psi}_{\hat{C}_v} \rangle = I$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{f^2}{2} + v^2 f^2 + v^2 g^2 \right) ds^2 + 2 \frac{f^2}{2} ds dv + dv^2 \\ &= \left(\frac{f^2}{2} + v^2 f^2 + v^2 g^2 \right) ds^2 + f^2 ds dv + dv^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Şimdi de II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{C}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanını bulalım. $\widehat{C}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı için öncelikle aşağıdaki determinanı hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{C}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{C}_v} = \begin{vmatrix} -vf & \frac{f}{\sqrt{2}} & vg \\ 0 & 1 & 0 \\ \vec{N} & \vec{C} & \vec{W} \end{vmatrix}$$

determinantı hesaplandığında,

$$\vec{\psi}_{\widehat{C}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{C}_v} = -vf\vec{W} - vg\vec{N}$$

olarak elde edilir. Bu determinant yerine yazıldığında $\widehat{C}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = -\frac{vf\vec{W} + vg\vec{N}}{v\sqrt{f^2 + g^2}} = -\frac{f\vec{W} + g\vec{N}}{\sqrt{f^2 + g^2}}$$

olarak elde edilir. $\widehat{C}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{C}$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\widehat{C}_{ss}} = \left(\frac{f'\vec{C} + f(-f\vec{N} + g\vec{W})}{\sqrt{2}} - (vf)'\vec{N} - (vf)(f\vec{C}) + (vg)'\vec{W} + (vg)(-g\vec{C}) \right)$$

ifadesi biraz düzenlenirse,

$$\vec{\psi}_{\widehat{C}_{ss}} = \vec{N} \left(\frac{-f^2}{\sqrt{2}} - (vf)' \right) + \vec{C} \left(\frac{f'}{\sqrt{2}} - vf^2 - vg^2 \right) + \vec{W} \left(\frac{g}{\sqrt{2}} + (vg)' \right)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde kısmi türevler $\vec{\psi}_{\widehat{C}_{sv}} = -f\vec{N} + g\vec{W}$ ve $\vec{\psi}_{\widehat{C}_{vv}} = 0$ olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\widehat{C}$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_{ss}}, \vec{n} \rangle = - \frac{f \left(\frac{g}{\sqrt{2}} + v g' \right) + g \left(\frac{-f^2}{\sqrt{2}} - v f' \right)}{\sqrt{f^2 + g^2}}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_{ss}}, \vec{n} \rangle = - \frac{fg - fg}{\sqrt{f^2 + g^2}} = 0$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_{vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\hat{C}} = 0 \text{ ve}$$

$$H_{\hat{C}} = \frac{- \frac{f \left(\frac{g}{\sqrt{2}} + v g' \right) + g \left(\frac{-f^2}{\sqrt{2}} - v f' \right)}{\sqrt{f^2 + g^2}}}{2 \left[\frac{f^2}{2} + v^2 f^2 + v^2 g^2 - \frac{f^2}{2} \right]} = - \frac{f \left(\frac{g}{\sqrt{2}} + v g' \right) + g \left(\frac{-f^2}{\sqrt{2}} - v f' \right)}{2 v^2 \sqrt{(f^2 + g^2)}^3}$$

olarak elde edilir. Şimdi de $\vec{\psi}_{\hat{C}}$ dual eğrisine bakalım.

$$\vec{\psi}_{\hat{W}_s} = \frac{f\vec{C} - f\vec{N} + g\vec{W}}{\sqrt{2}} + v(-g\vec{C})$$

verilen ifade biraz daha düzenlenirse, kısmi türevler $\psi_{\hat{W}_s} = -\frac{f}{\sqrt{2}}\vec{N} - \left(v g - \frac{f}{\sqrt{2}} \right) \vec{C} + \frac{g}{\sqrt{2}} \vec{W}$ ve

$\vec{\psi}_{\hat{W}_v} = \vec{W}$ olarak elde edilir. Buradan I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\hat{W}_s}, \vec{\psi}_{\hat{W}_s} \rangle = \frac{f^2}{2} + \left(\left(v g - \frac{f}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 + \frac{g^2}{2}$$

$$F = \langle \psi_{\hat{W}_s}, \psi_{\hat{W}_v} \rangle = \frac{g}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_2 v}, \vec{\psi}_{\hat{N}_2 v} \rangle = I$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I = \left[\frac{f^2}{2} + \left(\left(v g - \frac{f}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 + \frac{g^2}{2} \right] ds^2 + \sqrt{2} g ds dv + dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{W}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanını bulalım. $\widehat{W}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı için öncelikle aşağıdaki determinanı hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{W}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{W}_v} = \begin{vmatrix} -\frac{f}{\sqrt{2}} & -\left(v g - \frac{f}{\sqrt{2}} \right) & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ \vec{N} & \vec{C} & \vec{W} \end{vmatrix}$$

determinantı hesaplandığında

$$\vec{\psi}_{\widehat{W}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{W}_v} = \left(v g - \frac{f}{\sqrt{2}} \right) \vec{N} - \frac{f}{\sqrt{2}} \vec{C}$$

olarak elde edilir. Bu determinant yerine yazıldığında $\widehat{W}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{\left(v g - \frac{f}{\sqrt{2}} \right) \vec{N} - \frac{f}{\sqrt{2}} \vec{C}}{\sqrt{\left(v g - \frac{f}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{f^2}{2}}}$$

olarak elde edilir. $\widehat{W}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{W}$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\begin{aligned}\vec{\psi}_{\widehat{W}_{ss}} &= \left(-\frac{f}{\sqrt{2}} \vec{N} - \left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}} \right) \vec{C} + \frac{g}{\sqrt{2}} \vec{W} \right)' \\ &= -\frac{f'}{\sqrt{2}} \vec{N} - \frac{f}{\sqrt{2}} (f \vec{C}) - \left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}} \right) \vec{C} - \left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}} \right) (-f \vec{N} + g \vec{W}) + \frac{g'}{\sqrt{2}} \vec{W} + \frac{g}{\sqrt{2}} (-g \vec{C})\end{aligned}$$

ifadesini biraz düzenlersek,

$$\vec{\psi}_{\widehat{W}_{ss}} = \vec{N} \left(-\frac{f'}{\sqrt{2}} + \left(fvg - \frac{f^2}{\sqrt{2}} \right) \right) + \vec{C} \left(-\frac{f^2}{\sqrt{2}} - \left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}} \right) - \frac{g^2}{\sqrt{2}} \right) + \vec{W} \left(-\left(vg^2 - \frac{fg}{\sqrt{2}} \right) + \frac{g'}{\sqrt{2}} \right)$$

olarak verilir. Benzer şekilde $\vec{\psi}_{\widehat{W}_{sv}} = -g \vec{C}$ ve $\vec{\psi}_{\widehat{W}_{vy}} = 0$ olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler

ve $\widehat{W}$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\widehat{W}_{ss}}, \vec{n} \rangle = \frac{\left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}} \right) \left(-\frac{f'}{\sqrt{2}} + \left(fvg - \frac{f^2}{\sqrt{2}} \right) \right) - \frac{f}{\sqrt{2}} \left(-\frac{f^2}{\sqrt{2}} - \left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}} \right) - \frac{g^2}{\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{\left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{f^2}{2}}},$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\widehat{W}_{sv}}, \vec{n} \rangle = \frac{\frac{gf}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{f^2}{2}}},$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\widehat{W}_{vy}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\widehat{W}} = \frac{\left(\frac{\frac{gf}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{f^2}{2}}} \right)^2}{\frac{f^2}{2} + \left(\left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}} \right) \right)^2} = -\frac{g^2 f^2}{2 \left(\frac{f^2}{2} + \left(\left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 \right)}$$

ve

$$H_{\hat{W}} = \frac{-2 \frac{g}{\sqrt{2}} \frac{gf}{\sqrt{2}} + \frac{\left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}}\right) \left(-\frac{f'}{\sqrt{2}} + \left(fvg - \frac{f^2}{\sqrt{2}}\right)\right) - \frac{f}{\sqrt{2}} \left(-\frac{f^2}{\sqrt{2}} - \left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}}\right) - \frac{g^2}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{f^2}{2}} \sqrt{\left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{f^2}{2}}} \\ 2 \left(\frac{f^2}{2} + \left(\left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 \right)$$

İfadesi biraz daha düzenlenirse,

$$H_{\hat{W}} = \frac{-2g^2f + \left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}}\right) \left(-\frac{f'}{\sqrt{2}} + \left(fvg - \frac{f^2}{\sqrt{2}}\right)\right) - \frac{f}{\sqrt{2}} \left(-\frac{f^2}{\sqrt{2}} - \left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}}\right) - \frac{g^2}{\sqrt{2}}\right)}{2 \sqrt{\left(\left(vg - \frac{f}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 + \frac{f^2}{2}}^3}$$

elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.6.1.3 Dual Darboux $(\vec{\omega})$ ve dual Steiner $(\vec{D})$ vektörlerinin ani dönme vektörü

$$\vec{\omega} = g\vec{N} + f\vec{W} + \varepsilon \left(\frac{f\vec{N} - g\vec{C}}{\sqrt{2}} \right) \text{ ve}$$

$$\vec{D} = \oint \vec{\omega} = \vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f + \varepsilon \left(\vec{N} \oint \left(\frac{f}{\sqrt{2}} \right) - \vec{W} \oint \frac{g}{\sqrt{2}} \right) \text{ dir.}$$

İspat.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega} + \varepsilon \vec{\omega}^*$$

$$\vec{\omega}^* = \alpha \wedge \vec{\omega} = \left(\frac{\vec{N} + \vec{C}}{\sqrt{2}} \right) \wedge (g\vec{N} + f\vec{W}) = \frac{f\vec{N} - f\vec{C} - g\vec{W}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{olur buradan da } \vec{\omega} = g\vec{N} + f\vec{W} + \varepsilon \left(\frac{f\vec{N} - f\vec{C} + g\vec{W}}{\sqrt{2}} \right) \text{ olarak elde edilir. Dual Steiner vektörün}$$

tanımından

$$D = \oint \vec{\omega} = \vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f + \varepsilon \left(\vec{N} \oint \left(\frac{f}{\sqrt{2}} \right) - \vec{C} \oint \left(\frac{f}{\sqrt{2}} \right) - \vec{W} \oint \frac{g}{\sqrt{2}} \right)$$

olarak elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.6.1.4 $\widehat{N}, \widehat{C}, \widehat{W}$ dual eğrilerinin oluşturmuş olduğu kapalı regle yüzeylere ait dual açılara ait eğimler sırasıyla

$$\Lambda_{\widehat{N}} = \oint g, \quad \Lambda_{\widehat{C}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \oint f \quad \text{ve} \quad \Lambda_{\widehat{W}} = \oint f$$

dir.

İspat.

$$\Lambda_{\widehat{N}} = -\langle \vec{D}, \vec{N} \rangle = -\langle d + \varepsilon d^*, \vec{N} + \varepsilon \vec{N}^* \rangle$$

ifadesi daha açık bir halde yazılırsa

$$\begin{aligned} \Lambda_{\widehat{N}} &= \langle \vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f, \vec{N} \rangle + \varepsilon \left(\left\langle \left(\vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f, -\frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle + \left\langle \vec{N} \oint \left(\frac{f}{\sqrt{2}} \right) - \vec{W} \oint \frac{g}{\sqrt{2}}, \vec{N} \right\rangle \right) \\ \Lambda_{\widehat{N}} &= \oint g + \varepsilon \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \oint f + \frac{1}{\sqrt{2}} \oint f \right) \\ \Lambda_{\widehat{N}} &= \oint g \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler $\widehat{C}$ ve $\widehat{W}$ için yapılırsa,

$$\begin{aligned} \Lambda_{\widehat{C}} &= \langle \vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f, \vec{C} \rangle + \varepsilon \left(\left\langle \left(\vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f, \frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle + \left\langle \vec{N} \oint \left(\frac{f}{\sqrt{2}} \right) - \vec{W} \oint \frac{g}{\sqrt{2}}, \vec{C} \right\rangle \right) \\ \Lambda_{\widehat{C}} &= +\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \oint f \right) \\ \Lambda_{\widehat{C}} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \oint f \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \Lambda_{\widehat{W}} &= \langle \vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f, \vec{W} \rangle + \varepsilon \left(\left\langle \left(\vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f, \frac{\vec{N} - \vec{C}}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle + \left\langle \vec{N} \oint \left(\frac{f}{\sqrt{2}} \right) - \vec{W} \oint \frac{g}{\sqrt{2}}, \vec{W} \right\rangle \right) \\ \Lambda_{\widehat{W}} &= \oint f + \varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \oint g - \frac{1}{\sqrt{2}} \oint g \right) \\ \Lambda_{\widehat{W}} &= \oint f \end{aligned}$$

olarak elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

3.6.2 Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}$ Çatısına Göre $\widehat{N}\widehat{W}$ Smarandache Eğrileri ve Regle Yüzeyler

E-Study dönüşümü yardımıyla dual birim küre üzerinde seçilen $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ alternatif hareketli çatısının elemanları ile dual uzayda çizilen kapalı eğriler E^3 Öklid uzayında bir regle yüzey temsil etmektedir. Buradan seçilen dual eğriler $\widehat{N} = \vec{N} + \varepsilon \vec{N}^*$, $\widehat{N}_1 = \vec{N}_1 + \varepsilon \vec{N}_1^*$, $\widehat{N}_2 = \vec{N}_2 + \varepsilon \vec{N}_2^*$ olmak üzere, $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\varphi_{\widehat{N}}(s, v) = \beta_N(s) + v \vec{N}(s) \quad , \quad \beta_{\vec{N}}(s) = \vec{N} \wedge \vec{N}^*,$$

$$\varphi_{\widehat{C}}(s, v) = \beta_C(s) + v \vec{C}(s) \quad , \quad \beta_{\vec{N}_1}(s) = \vec{C} \wedge \vec{C}^*,$$

$$\varphi_{\widehat{W}}(s, v) = \beta_W(s) + v \vec{W}(s) \quad , \quad \beta_{\vec{N}_2}(s) = \vec{W} \wedge \vec{W}^*,$$

Bu denklemler bize $\alpha(s)$ Smarandache eğrisini $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ vektörleri yardımıyla $\alpha_{\vec{N}\vec{W}}(s) = \frac{\vec{N} + \vec{W}}{\sqrt{2}}$

olarak elde edilir. Bu eğriye bağlı olarak $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ vektörlerinin vektörel momentleri sırasıyla

$$\vec{N}^* = \alpha_{\vec{N}\vec{W}}(s) \wedge \vec{N} = \left(\frac{\vec{N} + \vec{W}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \vec{N} = \frac{\vec{C}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{C}^* = \alpha_{\vec{N}\vec{W}}(s) \wedge \vec{C} = \left(\frac{\vec{N} + \vec{W}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \vec{C} = \frac{\vec{W} - \vec{N}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{W}^* = \alpha_{\vec{N}\vec{W}}(s) \wedge \vec{W} = \left(\frac{\vec{N} + \vec{W}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \vec{W} = \frac{-\vec{C}}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir. Bu denklemler kullanılarak $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ dual eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri sırasıyla aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\vec{\psi}_{\hat{N}}(s, \varphi) = \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v \vec{N} = \vec{N} \wedge \left(\frac{\vec{C}}{\sqrt{2}} \right) + v \vec{N} = \frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} + v \vec{N}$$

benzer yolla

$$\vec{\psi}_{\hat{C}}(s, v) = \vec{C} \wedge \vec{C}^* + v \vec{C} = \vec{C} \wedge \frac{\vec{W} - \vec{N}}{\sqrt{2}} + v \vec{C} = \frac{\vec{N} + \vec{W}}{\sqrt{2}} + v \vec{C}$$

ve

$$\vec{\psi}_{\hat{W}}(s, v) = \vec{W} \wedge \vec{W}^* + v \vec{W} = \vec{W} \wedge \left(\frac{-\vec{C}}{\sqrt{2}} \right) + v \vec{W} = \frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} + v \vec{W}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.6.2.1 $\{\hat{N}, \hat{C}, \hat{W}\}$ dual eğrileri kapalı bir regle yüzeyini belirtmek üzere, dağılma parametreleri $P_{\hat{N}} = 0$, $P_{\hat{C}} = 0$ ve $P_{\hat{W}} = 0$ olarak hesaplanır.

İspat. $\hat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin dağılma parametresini bulmak için

$$P_{\hat{N}} = \frac{\det \left(\frac{d\beta_{\vec{N}}}{ds_t}, \vec{N}, \frac{d\vec{N}}{ds_t} \right)}{\left\| \frac{d\vec{N}}{ds_t} \right\|^2} = \frac{\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}')}{\left\| \vec{N}' \right\|^2}$$

determinantını hesaplamak gerekir. Öncelikle $(\vec{N} \wedge \vec{N}^*)' = \left(\frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} \right)' = \frac{-g\vec{C}}{\sqrt{2}}$ eşitliğini kullanarak

verilen eğrinin dağılma parametresini bulabilmek için $\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}')$ hesaplamalıyız.

$$\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}') = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{g}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix}$$

ve

$$P_{\hat{N}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\frac{g}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix}}{f^2}$$

elde edilir. Determinant alma işlemi yapıldıktan sonra verilen dual eğrinin dağılma parametresi

$P_{\hat{N}} = 0$ olarak hesaplanır. Aynı şekilde $P_{\hat{C}}$ ve $P_{\hat{W}}$ de

$$P_{\hat{C}} = \frac{\det\left(\frac{d\beta_C}{ds_t}, \vec{C}, \frac{d\vec{C}}{ds_t}\right)}{\left\|\frac{d\vec{C}}{ds_t}\right\|^2} = \frac{\det((\vec{C} \wedge \vec{C}')', \vec{C}, \vec{C}')}{\|\vec{C}'^2\|}$$

olarak verilebilir. Şimdi de bu determinanti hesaplayabilmek için öncelikle

$$(\vec{C} \wedge \vec{C}')' = \left(\frac{\vec{N} + \vec{W}}{\sqrt{2}}\right)' = \frac{(f-g)\vec{C}}{\sqrt{2}} \text{ olarak elde edilir.}$$

$$\det((\vec{C} \wedge \vec{C}')', \vec{C}, \vec{C}') = \begin{vmatrix} 0 & \frac{(f-g)}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -f & 0 & g \end{vmatrix}$$

determinanti hesaplandığında,

$$P_{\hat{C}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{(f-g)}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -f & 0 & g \end{vmatrix}}{f^2 + g^2} = 0$$

olarak bulunur. Şimdi de benzer işlemleri $P_{\widehat{W}}$ için yapalım.

$$P_{\widehat{W}} = \frac{\det\left(\frac{d\beta_{\widehat{W}}}{ds_t}, \widehat{W}, \frac{d\widehat{W}}{ds_t}\right)}{\left\|\frac{d\widehat{W}}{ds_t}\right\|^2} = \frac{\det((\widehat{W} \wedge \widehat{W}^*)', \widehat{W}, \widehat{W}')}{\|\widehat{W}'^2\|}$$

olarak verilebilir. Şimdi de bu determinanti hesaplayabilmek için öncelikle $(\widehat{W} \wedge \widehat{W}^*)'$ türevini hesaplayalım.

$$(\widehat{W} \wedge \widehat{W}^*)' = \left(\frac{\widehat{N}}{\sqrt{2}}\right)' = \frac{f\widehat{C}}{\sqrt{2}}$$

yardımla

$$\det((\widehat{W} \wedge \widehat{W}^*)', \widehat{W}, \widehat{W}') = \begin{vmatrix} 0 & \frac{f}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & 0 \end{vmatrix}$$

determinanti hesaplandığında verilen dual eğrinin dağılma parametresi,

$$P_{\widehat{W}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{f}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & 0 \end{vmatrix}}{g^2} = 0$$

olur ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.6.2.2 $\{\widehat{N}, \widehat{C}, \widehat{W}\}$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin Gauss eğrilikleri ve ortalama eğrilikleri

$$K_{\widehat{N}} = 0, \quad K_{\widehat{C}} = 0 \quad \text{ve} \quad K_{\widehat{W}} = 0$$

$$H_{\hat{N}} = \frac{-g}{\sqrt{2}(\sqrt{2}vf - g)} \quad , \quad H_{\hat{C}} = \frac{g\left(-f\left(\frac{f-g}{\sqrt{2}}\right) - vf'\right) + f\left(g\left(\frac{f-g}{\sqrt{2}}\right) + vg'\right)}{\sqrt{f^2 + g^2} \left[f^2 - 2fg + g^2 + 2v^2 f^2 + 2v^2 g^2 - (f-g)^2 \right]},$$

$$H_{\hat{W}} = \frac{-f}{2\left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}}\right)}$$

olarak elde edilir.

İspat. $\hat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliğini bulmak için I. esas form ve II. esas form ile birlikte normal vektör alanını bulmamız gerekli bunları bulmak için de $\vec{\psi}_{\hat{N}}$ dual eğrisinin yönlü türevlerini bulalım.

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_s} = \left[\frac{-g\vec{C}}{\sqrt{2}} + vf\vec{C} \right] = \frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}}\vec{C} \quad \text{ve} \quad \vec{\psi}_{\hat{N}_v} = \vec{N}$$

kısmi türevlerinden I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_s}, \vec{\psi}_{\hat{N}_s} \rangle = \frac{(\sqrt{2}vf - g)^2}{2}$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_v}, \vec{\psi}_{\hat{N}_s} \rangle = 0$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_v}, \vec{\psi}_{\hat{N}_v} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I = \frac{(\sqrt{2}vf - g)^2}{2} ds^2 + I dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\hat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanına ihtiyacımız var. $\hat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı için öncelikle aşağıdaki determinantı hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\hat{N}_v} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \vec{N} & \vec{C} & \vec{W} \end{vmatrix}$$

determinantı hesaplandığında,

$$\vec{n} = \frac{-\frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}}\vec{W}}{\sqrt{\frac{(\sqrt{2}vf - g)^2}{2}}} = -\vec{W}$$

olarak elde edilir. $\hat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\hat{N}$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}} = \left(\frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}} \right)' \vec{C} + \frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}} (-f\vec{N} + g\vec{W})$$

ifadesi biraz daha düzenlenirse

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}} = -f\vec{N} \frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}} + \left(\frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}} \right)' \vec{C} + g\vec{W} \frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}}$$

olarak verilir. Benzer şekilde $\vec{\psi}_{\hat{N}_{sv}} = f\vec{C}$ ve $\vec{\psi}_{\hat{N}_{vv}} = 0$ olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\hat{N}$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}}, \vec{n} \rangle = -g \frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{sv}}, \vec{n} \rangle = (\vec{\psi}_n)_{s,v} = 0$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\hat{N}} = 0$$

ve

$$H_{\hat{N}} = \frac{-g \frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}}}{2 \left(\frac{(\sqrt{2}vf - g)^2}{2} \right)} = \frac{-g}{\sqrt{2}(\sqrt{2}vf - g)}$$

olarak elde edilir. Benzer yolla şimdide $\{\vec{\psi}_{\hat{C}}, \vec{\psi}_{\hat{W}}\}$ yüzeyleri için Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplayalım. $\vec{\psi}_{\hat{C}_s} = \frac{f-g}{\sqrt{2}}\vec{C} + v(-f\vec{N} + g\vec{W})$ ve $\vec{\psi}_{\hat{C}_v} = \vec{C}$ denklemlerinden I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_s}, \vec{\psi}_{\hat{C}_s} \rangle = \frac{f^2 - 2fg + g^2 + 2v^2f^2 + 2v^2g^2}{2}$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_s}, \vec{\psi}_{\hat{C}_v} \rangle = \frac{f-g}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_v}, \vec{\psi}_{\hat{C}_v} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I \left(\frac{f^2 - 2fg + g^2 + 2v^2f^2 + 2v^2g^2}{2} \right) ds^2 + \sqrt{2}(f-g)dsdv + dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\hat{C}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanını bulalım. $\hat{C}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı için öncelikle aşağıdaki determinanti hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\hat{C}_s} \wedge \vec{\psi}_{\hat{C}_v} = \begin{vmatrix} -vf & \frac{f-g}{\sqrt{2}} & vg \\ 0 & 1 & 0 \\ \bar{N} & \bar{C} & \bar{W} \end{vmatrix}$$

determinantı hesaplandığında

$$\vec{\psi}_{\hat{C}_s} \wedge \vec{\psi}_{\hat{C}_v} = -vf\bar{W} - vg\bar{N}$$

olarak elde edilir. Bu determinant yerine yazıldığında $\hat{C}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = -\frac{f\bar{W} + g\bar{N}}{\sqrt{f^2 + g^2}}$$

olarak elde edilir. $\hat{C}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\hat{C}$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\hat{C}_{ss}} = \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}}\right)' \bar{C} + \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}}\right)(-f\bar{N} + g\bar{W}) - vf'\bar{N} - vf^2\bar{C} + vg'\bar{W} - vg^2\bar{C}$$

ifadesi biraz düzenlenirse,

$$\vec{\psi}_{\hat{C}_{ss}} = \bar{N}\left(-f\left(\frac{f-g}{\sqrt{2}}\right) - vf'\right) + \bar{C}\left(\left(\frac{f-g}{\sqrt{2}}\right)' - vf^2 - vg^2\right) + \bar{W}\left(g\left(\frac{f-g}{\sqrt{2}}\right) + vg'\right)$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde kısmi türevler $\vec{\psi}_{\hat{C}_{sv}} = -f\bar{N} + g\bar{W}$ ve $\vec{\psi}_{\hat{C}_{vv}} = 0$ ile bulunur.

Şimdi bu yönlü türevler ve $\hat{C}$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_{ss}}, \vec{n} \rangle = \left\langle \vec{N} \left(-f \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}} \right) - v f' \right) + \vec{C} \left(\left(\frac{f-g}{\sqrt{2}} \right)' - v f^2 - v g^2 \right) + \vec{W} \left(g \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}} \right) + v g' \right), -\frac{f\vec{W} + g\vec{N}}{\sqrt{f^2 + g^2}} \right\rangle$$

iç çarpımı hesaplanırsa

$$L = -\frac{g \left(-f \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}} \right) - f' \right) - f \left(g \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}} \right) + v g' \right)}{\sqrt{f^2 + g^2}}$$

olarak elde edilir. Aynı yolla

$$\text{ve } M = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_{sv}}, \vec{n} \rangle = 0 \quad N = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{lv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\hat{C}} = 0$$

ve

$$H_{\hat{C}} = \frac{-2 \frac{-g \left(-f \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}} \right) - v f' \right) - f \left(g \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}} \right) + v g' \right)}{\sqrt{f^2 + g^2}}}{2 \left[f^2 - 2fg + g^2 + 2v^2 f^2 + 2v^2 g^2 - (f-g)^2 \right]}$$

$$H_{\hat{C}} = \frac{g \left(-f \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}} \right) - v f' \right) + f \left(g \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}} \right) + v g' \right)}{\sqrt{f^2 + g^2} \left[f^2 - 2fg + g^2 + 2v^2 f^2 + 2v^2 g^2 - (f-g)^2 \right]}$$

olarak elde edilir. Şimdi de $\vec{\psi}_{\hat{W}}$ dual eğrisine bakalım.

$$\vec{\psi}_{\hat{W}_s} = \frac{f\vec{C}}{\sqrt{2}} + v(-g\vec{C})$$

verilen ifade biraz daha düzenlenirse,

$$\vec{\psi}_{\hat{W}_s} = \frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \vec{C}$$

elde edilir.

$$\vec{\psi}_{\hat{W}_v} = \vec{W}$$

Buradan I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\hat{W}_s}, \vec{\psi}_{\hat{W}_s} \rangle = \left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\hat{W}_s}, \vec{\psi}_{\hat{W}_v} \rangle = 0$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_2v}, \vec{\psi}_{\hat{N}_2v} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I = \left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)^2 ds^2 + \sqrt{2}gdsdv + dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{W}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanını bulalım. $\widehat{W}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı için öncelikle aşağıdaki determinanı hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\hat{W}_s} \wedge \vec{\psi}_{\hat{W}_v} = \begin{vmatrix} 0 & \left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vec{N} & \vec{C} & \vec{W} \end{vmatrix}$$

determinantı hesaplandığında

$$\vec{\psi}_{\hat{W}_s} \wedge \vec{\psi}_{\hat{W}_v} = \left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right) \vec{N}$$

olarak elde edilir. Bu determinant yerine yazıldığında $\widehat{W}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{\left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right) N}{\sqrt{\left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)^2}} = N$$

olarak elde edilir. $\widehat{W}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{W}$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\begin{aligned}\vec{\psi}_{\widehat{W}_{ss}} &= \left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \vec{C} \right)' \\ &= \left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)' \vec{C} + \left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right) (-f \vec{N} + g \vec{W})\end{aligned}$$

ifadesini biraz düzenlersek,

$$\vec{\psi}_{\widehat{W}_{ss}} = \vec{N} \left(-f \left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right) \right) + \vec{C} \left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)' + \vec{W} \left(g \left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

olarak verilir. Benzer yolla $\vec{\psi}_{\widehat{W}_{sv}} = -g \vec{C}$ ve $\psi_{\widehat{W}_{vv}} = 0$ olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve

$\widehat{W}$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\widehat{W}_{ss}}, \vec{n} \rangle = -f \left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right),$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\widehat{W}_{sv}}, \vec{n} \rangle = 0 \text{ ve}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\widehat{W}_{vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\widehat{W}} = 0 \text{ ve}$$

$$H_{\widehat{W}} = \frac{-f \left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)}{2 \left(\left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)} = \frac{-f}{2 \left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)}$$

olarak elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.6.2.3 Dual darboux $(\overrightarrow{\omega})$ ve dual Steiner $(\overrightarrow{D})$ vektörlerinin ani dönüşü aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\overrightarrow{\omega} = g\overrightarrow{N} + f\overrightarrow{W} + \varepsilon \left(\frac{-f + g}{\sqrt{2}} \overrightarrow{C} \right) \text{ ve}$$

$$\overrightarrow{D} = \wp \overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{N} \wp g + \overrightarrow{W} \wp f + \varepsilon \left(\overrightarrow{C} \wp \left(\frac{-f + g}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

eşitlikleri ile verilir.

İspat.

$$\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega} + \varepsilon \overrightarrow{\omega}^*$$

$$\overrightarrow{\omega}^* = \alpha \wedge \overrightarrow{\omega} = \left(\frac{\overrightarrow{N} + \overrightarrow{W}}{\sqrt{2}} \right) \wedge (g\overrightarrow{N} + f\overrightarrow{W}) = \frac{-f\overrightarrow{C} + g\overrightarrow{C}}{\sqrt{2}} = \frac{-f + g}{\sqrt{2}} \overrightarrow{C}$$

olur burada.

$$\overrightarrow{\omega} = g\overrightarrow{N} + f\overrightarrow{W} + \varepsilon \left(\frac{-f + g}{\sqrt{2}} \overrightarrow{C} \right) \text{ olarak elde edilir. Dual Steiner vektörün tanımından .}$$

$$\overrightarrow{D} = \wp R = \overrightarrow{N} \wp g + \overrightarrow{W} \wp f + \varepsilon \left(\overrightarrow{C} \wp \left(\frac{-f + g}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

olarak elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.6.2.4 $\widehat{N}, \widehat{C}, \widehat{W}$ dual eğrilerinin oluşturmuş olduğu kapalı regle yüzeylere ait dual açılara ait eğimler sırasıyla

$$\Lambda_{\widehat{N}} = \oint g, \quad \Lambda_{\widehat{C}} = 0 \quad \text{ve} \quad \Lambda_{\widehat{W}} = \oint f \quad \text{dir.}$$

İspat.

$$\Lambda_{\widehat{N}} = -\langle \vec{D}, \vec{N} \rangle = -\langle \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^*, \vec{N} + \varepsilon \vec{N}^* \rangle$$

ifadesi daha açık bir halde yazılırsa

$$\Lambda_{\widehat{N}} = \langle \vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f, \vec{N} \rangle + \varepsilon \left(\left\langle \left(\vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f, \frac{\vec{C}}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle + \left\langle \vec{C} \oint \left(\frac{-f+g}{\sqrt{2}} \right), \vec{N} \right\rangle \right) = \oint g$$

elde edilir. Benzer işlemler $\widehat{C}$ ve $\widehat{W}$ için yapılırsa,

$$\begin{aligned} \Lambda_{\widehat{C}} &= \langle \vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f, \vec{C} \rangle + \varepsilon \left(\left\langle \left(\vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f, \frac{\vec{W} - \vec{N}}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle + \left\langle \vec{C} \oint \left(\frac{-f+g}{\sqrt{2}} \right), \vec{C} \right\rangle \right) \\ &= +\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \oint f - \oint \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \right) + \oint \left(\frac{-f+g}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \Lambda_{\widehat{W}} &= \langle \vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f, \vec{W} \rangle + \varepsilon \left(\left\langle \left(\vec{N} \oint g + \vec{W} \oint f, \frac{\vec{C}}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle + \left\langle \vec{C} \oint \left(\frac{-f+g}{\sqrt{2}} \right), \vec{W} \right\rangle \right) \\ &= \oint f \end{aligned}$$

olarak elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

3.6.3 Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}$ Çatısına Göre $\widehat{C}\widehat{W}$ Smarandache Eğrileri ve Regle Yüzeyler

E-Study dönüşümü yardımıyla dual birim küre üzerinde seçilen $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ alternatif hareketli çatısının elemanları ile dual uzayda çizilen kapalı eğriler E^3 Öklid uzayında bir regle yüzey temsil etmektedir. Buradan seçilen dual eğriler $\widehat{N} = \vec{N} + \varepsilon \vec{N}^*, \widehat{N}_1 = \vec{N}_1 + \varepsilon \vec{N}_1^*, \widehat{N}_2 = \vec{N}_2 + \varepsilon \vec{N}_2^*$ olmak üzere, $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\varphi_{\hat{N}}(s, v) = \beta_{\overline{N}}(s) + v\overline{N}(s) \quad , \quad \beta_{\overline{N}}(s) = \overline{N} \wedge \overline{N}^*,$$

$$\varphi_{\hat{C}}(s, v) = \beta_{\overline{C}}(s) + v\overline{C}(s) \quad , \quad \beta_{\overline{C}}(s) = \overline{C} \wedge \overline{C}^*,$$

$$\varphi_{\hat{W}}(s, v) = \beta_{\overline{W}}(s) + v\overline{W}(s) \quad , \quad \beta_{\overline{W}}(s) = \overline{W} \wedge \overline{W}^*,$$

Bu denklemler bize $\alpha(s)$ Smarandache eğrisini $\{\overline{N}, \overline{C}, \overline{W}\}$ vektörleri yardımıyla $\alpha_{CW}(s) = \frac{\overline{C} + \overline{W}}{\sqrt{2}}$ ile

verilir. Bu eğriye bağlı olarak $\{\overline{N}, \overline{C}, \overline{W}\}$ vektörlerinin vektörel momentleri sırasıyla

$$\overline{N}^* = \alpha_{\overline{CW}}(s) \wedge \overline{N} = \left(\frac{\overline{C} + \overline{W}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \overline{N} = \frac{-\overline{W} + \overline{C}}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{C}^* = \alpha_{\overline{CW}}(s) \wedge \overline{C} = \left(\frac{\overline{C} + \overline{W}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \overline{C} = \frac{-\overline{N}}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{W}^* = \alpha_{\overline{CW}}(s) \wedge \overline{W} = \left(\frac{\overline{C} + \overline{W}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \overline{W} = \frac{\overline{N}}{\sqrt{2}}$$

olur. Bu denklemler kullanılarak $\{\overline{N}, \overline{C}, \overline{W}\}$ dual eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri sırasıyla

$$\overline{\psi}_{\hat{N}}(s, \varphi) = \overline{N} \wedge \overline{N}^* + v\overline{N} = \overline{N} \wedge \left(\frac{\overline{C} - \overline{W}}{\sqrt{2}} \right) + v\overline{N} = \frac{\overline{W} + \overline{C}}{\sqrt{2}} + v\overline{N}$$

$$\overline{\psi}_{\hat{C}}(s, v) = \overline{C} \wedge \overline{C}^* + v\overline{C} = \overline{C} \wedge \frac{-\overline{N}}{\sqrt{2}} + v\overline{C} = \frac{\overline{W}}{\sqrt{2}} + v\overline{C}$$

$$\overline{\psi}_{\hat{W}}(s, v) = \overline{W} \wedge \overline{W}^* + v\overline{W} = \overline{W} \wedge \left(\frac{\overline{C} + \overline{W}}{\sqrt{2}} \right) + v\overline{W} = \frac{-\overline{N}}{\sqrt{2}} + v\overline{W}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.6.3.1 $\{\widehat{N}, \widehat{C}, \widehat{W}\}$ dual eğrileri kapalı bir regle yüzeyini belirtmek üzere, dağılma parametreleri $P_{\widehat{N}} = \frac{fg}{\sqrt{2}(f^2 + g^2)}$, $P_{\widehat{C}} = 0$ ve $P_{\widehat{W}} = \frac{f}{\sqrt{2}g}$ olarak hesaplanır.

İspat. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin dağılma parametresini

$$P_{\widehat{N}} = \frac{\det\left(\frac{d\beta_{\widehat{N}}}{ds_t}, \widehat{N}, \frac{d\widehat{N}}{ds_t}\right)}{\left\|\frac{d\widehat{N}}{ds_t}\right\|^2} = \frac{\det((\widehat{N} \wedge \widehat{N}^*)', \widehat{N}, \widehat{N}')}{\|\widehat{N}'^2\|}$$

şeklinde yazılabilir. Bu determinanı hesaplayabilmek için öncelikle $(\widehat{N} \wedge \widehat{N}^*)'$ türevini hesaplayalım.

$$(\widehat{N} \wedge \widehat{N}^*)' = \left(\frac{\widehat{W} + \widehat{C}}{\sqrt{2}}\right)' = \frac{-g\widehat{C} - f\widehat{N} + g\widehat{W}}{\sqrt{2}}$$

olur. Determinant alma işlemi yapıldıktan sonra

$$\det((\widehat{N} \wedge \widehat{N}^*)', \widehat{N}, \widehat{N}') = \begin{vmatrix} \frac{-f}{\sqrt{2}} & \frac{-g}{\sqrt{2}} & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix}$$

ve

$$P_{\widehat{N}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{-f}{\sqrt{2}} & \frac{-g}{\sqrt{2}} & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix}}{f^2 + g^2} = \frac{fg}{\sqrt{2}(f^2 + g^2)}$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde $P_{\widehat{C}}$ ve $P_{\widehat{W}}$ de

$$P_{\vec{C}} = \frac{\det\left(\frac{d\beta_{\vec{C}}}{ds_t}, \vec{C}, \frac{d\vec{C}}{ds_t}\right)}{\left\|\frac{d\vec{C}}{ds_t}\right\|^2} = \frac{\det((\vec{C} \wedge \vec{C}^*)', \vec{C}, \vec{C}')}{\|\vec{C}'^2\|}$$

determinantını hesaplayabilmek için öncelikle $(\vec{C} \wedge \vec{C}^*)'$ türevini hesaplayalım.

$$(\vec{C} \wedge \vec{C}^*)' = \left(\frac{\vec{W}}{\sqrt{2}}\right)' = \frac{-g\vec{C}}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir.

$$\det((\vec{C} \wedge \vec{C}^*)', \vec{C}, \vec{C}') = \begin{vmatrix} 0 & \frac{-g}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -f & 0 & g \end{vmatrix}$$

ve

$$P_{\vec{C}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{-g}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -f & 0 & g \end{vmatrix}}{g^2} = 0$$

olarak bulunur. Şimdi de benzer işlemleri $P_{\vec{W}}$ için yapalım.

$$P_{\vec{W}} = \frac{\det\left(\frac{d\beta_{\vec{W}}}{ds_t}, \vec{W}, \frac{d\vec{W}}{ds_t}\right)}{\left\|\frac{d\vec{W}}{ds_t}\right\|^2} = \frac{\det((\vec{W} \wedge \vec{W}^*)', \vec{W}, \vec{W}')}{\|\vec{W}'^2\|}$$

determinantını hesaplayabilmek için öncelikle $(\vec{W} \wedge \vec{W}^*)'$ türevini hesaplayalım;

$$(\vec{W} \wedge \vec{W}^*)' = \left(\frac{\vec{C}}{\sqrt{2}} \right)' = \frac{-f\vec{N} + g\vec{W}}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\det((\vec{W} \wedge \vec{W}^*)', \vec{W}, \vec{W}') = \begin{vmatrix} \frac{-f}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & 0 \end{vmatrix}$$

hesaplandığında verilen dual eğrinin dağılma parametresi,

$$P_{\widehat{W}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{-f}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & 0 \end{vmatrix}}{g^2} = \frac{f}{\sqrt{2}g}$$

olur ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Sonuç: Dayanak eğrisi $\widehat{C}\widehat{W}$ Smarandache eğrisi ile üretilen $(\widehat{W})$ dual eğrisine karşılık gelen

$\psi_{\widehat{C}\widehat{W}}$ kapalı regle yüzeyini için $g = 0$ veya $\frac{\tau}{\kappa} = sbt$ olması durumunda dağılma parametresi hesaplanamamaktadır.

Teorem 3.6.3.2 $\{\widehat{N}, \widehat{C}, \widehat{W}\}$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin ve Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$K_{\widehat{N}} = \frac{L\bar{N} - M^2}{EG - F^2} = \frac{\left(\frac{\frac{fg}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{(\sqrt{2}vf + f - g)^2}{2} + \frac{g^2}{2}}} \right)^2}{\frac{(\sqrt{2}vf - g)^2 + g^2}{2}}, \quad K_{\widehat{C}} = 0, \quad K_{\widehat{W}} = 0$$

$$H_{\hat{N}} = \frac{-2 \frac{fg}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{(\sqrt{2}vf+f-g)^2}{2} + \frac{g^2}{2}}} + \frac{-\left(\sqrt{2}vf-g\right) \left(\frac{(\sqrt{2}vfg-g^2)}{2} + \frac{g'}{2} \right) + g \left(\left(\frac{(\sqrt{2}vf-g)}{2} \right)' - \frac{f^2}{2} - \frac{g^2}{2} \right)}{2 \left(\frac{(\sqrt{2}vf-g)^2 + g^2}{2} \right)}$$

$$H_{\hat{C}} = \frac{g \left(-f \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}} \right) - vf' \right) + f \left(g \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}} \right) - vg^2 + vg' \right)}{\sqrt{f^2 + g^2} \left[2v^2 f^2 + 2v^2 g^2 \right]}, \quad H_{\hat{W}} = \frac{f}{2 \left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)}$$

olarak elde edilir.

İspat. $\hat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliğini bulmak için I. esas form ve II. esas form ile birlikte normal vektör alanını bulmamız gereklidir.

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_s} = \left[\frac{-g\vec{C}}{\sqrt{2}} - \frac{f\vec{N}}{\sqrt{2}} + \frac{g\vec{W}}{\sqrt{2}} + vf\vec{C} \right] = -\frac{f\vec{N}}{\sqrt{2}} + \frac{(\sqrt{2}vf-g)}{\sqrt{2}}\vec{C} + \frac{g\vec{W}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_v} = \vec{N}$$

kısmi türevlerinden I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_s}, \vec{\psi}_{\hat{N}_s} \rangle = \frac{(\sqrt{2}vf-g)^2 + g^2 + f^2}{2}$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_v}, \vec{\psi}_{\hat{N}_s} \rangle = \frac{f}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_v}, \vec{\psi}_{\hat{N}_v} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I = \frac{(\sqrt{2}vf + f - g)^2}{2} ds^2 + l dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanını bulalım. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı için öncelikle aşağıdaki determinanı hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_v} = \begin{vmatrix} -\frac{f}{\sqrt{2}} & \frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}} & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ \vec{N} & \vec{C} & \vec{W} \end{vmatrix}$$

olarak bulunur. Burada gerekli işlemler yapıldığında,

$$\vec{n} = \frac{-\frac{(\sqrt{2}vf - g)}{\sqrt{2}}\vec{W} + \frac{g\vec{C}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{(\sqrt{2}vf + f - g)^2}{2} + \frac{g^2}{2}}}$$

olarak elde edilir. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdi de bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{ss}} = \left(\frac{(\sqrt{2}vf + f - g)}{\sqrt{2}} \right)' \vec{C} + \frac{(\sqrt{2}vf + f - g)}{\sqrt{2}} (-f\vec{N} + g\vec{W})$$

ifadesi biraz daha düzenlenirse

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}} = -f\bar{N}\frac{(\sqrt{2}vf-g)}{\sqrt{2}} + \left(\frac{(\sqrt{2}vf-g)}{\sqrt{2}}\right)' \bar{C} + g\bar{W}\frac{(\sqrt{2}vf-g)}{\sqrt{2}} - \frac{f'}{\sqrt{2}}\bar{N} - \frac{f^2}{\sqrt{2}}\bar{C} + \frac{g'}{\sqrt{2}}\bar{W} - \frac{g^2}{\sqrt{2}}\bar{C}$$

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}} = \bar{N}\left(-\frac{(\sqrt{2}vf^2-fg)}{\sqrt{2}} - \frac{f'}{\sqrt{2}}\right) + \bar{C}\left(\left(\frac{(\sqrt{2}vf-g)}{\sqrt{2}}\right)' - \frac{f^2}{\sqrt{2}} - \frac{g^2}{\sqrt{2}}\right) + \bar{W}\left(\frac{(\sqrt{2}vfg-g^2)}{\sqrt{2}} + \frac{g'}{\sqrt{2}}\right)$$

olarak verilir. Aynı şekilde $\vec{\psi}_{\hat{N}_{sv}} = f\bar{C}$ ve $\vec{\psi}_{\hat{N}_{vy}} = 0$ sonucu bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve

$\hat{N}$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}}, \vec{n} \rangle = \frac{-\left(\sqrt{2}vf-g\right)\left(\frac{(\sqrt{2}vfg-g^2)}{2} + \frac{g'}{2}\right) + g\left(\left(\frac{(\sqrt{2}vf-g)}{2}\right)' - \frac{f^2}{2} - \frac{g^2}{2}\right)}{\sqrt{\frac{(\sqrt{2}vf+f-g)^2}{2} + \frac{g^2}{2}}}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{sv}}, \vec{n} \rangle = \frac{fg}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{(\sqrt{2}vf+f-g)^2}{2} + \frac{g^2}{2}}}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{vy}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\hat{N}} = \frac{\left(\frac{\frac{fg}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{(\sqrt{2}vf+f-g)^2}{2} + \frac{g^2}{2}}}\right)^2}{\frac{(\sqrt{2}vf-g)^2 + g^2}{2}}$$

ve

$$H_{\hat{N}} = \frac{-2 \frac{fg}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{(\sqrt{2}vf + f - g)^2}{2} + \frac{g^2}{2}}} + \frac{-(\sqrt{2}vf - g) \left(\frac{(\sqrt{2}vfg - g^2)}{2} + \frac{g'}{2} \right) + g \left(\left(\frac{(\sqrt{2}vf - g)}{2} \right)' - \frac{f^2}{2} - \frac{g^2}{2} \right)}{\sqrt{\frac{(\sqrt{2}vf + f - g)^2}{2} + \frac{g^2}{2}}}{2 \left(\frac{(\sqrt{2}vf - g)^2}{2} + g^2 \right)}$$

olarak elde edilir. Benzer yolla şimdide $\{\vec{\psi}_{\hat{C}}, \vec{\psi}_{\hat{W}}\}$ yüzeyleri için Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\hat{C}_s} = \frac{-g}{\sqrt{2}} \vec{C} + v(-f \vec{N} + g \vec{W})$$

$$\vec{\psi}_{\hat{C}_v} = \vec{C}$$

Buradan I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_s}, \vec{\psi}_{\hat{C}_s} \rangle = \frac{g^2 + 2v^2 f^2 + 2v^2 g^2}{2}$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_s}, \vec{\psi}_{\hat{C}_v} \rangle = \frac{-g}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_v}, \vec{\psi}_{\hat{C}_v} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I \left(\frac{2v^2 f^2 + 2v^2 g^2}{2} \right) ds^2 + \sqrt{2}(-g) ds dv + dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\hat{C}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanına ihtiyacımız var. $\hat{C}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı için öncelikle aşağıdaki determinanı hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\hat{C}_s} \wedge \vec{\psi}_{\hat{C}_v} = \begin{vmatrix} -vf & \frac{-g}{\sqrt{2}} & vg \\ 0 & 1 & 0 \\ \bar{N} & \bar{C} & \bar{W} \end{vmatrix}$$

determinantı hesaplandığında $\vec{\psi}_{\hat{C}_s} \wedge \vec{\psi}_{\hat{C}_v} = -vf\bar{W} - vg\bar{N}$ olarak elde edilir. Bu determinant yerine

$$\text{yazıldığında } \hat{C} \text{ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı } \vec{n} = \vec{\psi}_{\hat{C}_s} \wedge \vec{\psi}_{\hat{C}_v} = -\frac{f\bar{W} + g\bar{N}}{\sqrt{f^2 + g^2}}$$

olarak elde edilir. $\hat{C}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\hat{C}$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\hat{C}_{ss}} = \left(\frac{-g}{\sqrt{2}}\right)' \bar{C} + \left(\frac{-g}{\sqrt{2}}\right) (-f\bar{N} + g\bar{W}) - vf'\bar{N} - vf^2\bar{C} + vg'\bar{W} - vg^2\bar{W}$$

ifadesi biraz düzenlenirse,

$$\vec{\psi}_{\hat{C}_{ss}} = \bar{N} \left(\frac{fg}{\sqrt{2}} - vf' \right) + \bar{C} \left(\left(\frac{-g}{\sqrt{2}} \right)' - vf^2 \right) + \bar{W} \left(-\frac{g^2}{\sqrt{2}} - vg^2 + vg' \right)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $\vec{\psi}_{\hat{C}_{sv}} = -f\bar{N} + g\bar{W}$ ve $\vec{\psi}_{\hat{C}_{vv}} = 0$ olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\hat{C}$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}}, \vec{n} \rangle = \left\langle \bar{N} \left(\frac{fg}{\sqrt{2}} - vf' \right) + \bar{C} \left(\left(\frac{-g}{\sqrt{2}} \right)' - vf^2 \right) + \bar{W} \left(-\frac{g^2}{\sqrt{2}} - vg^2 + vg' \right), -\frac{f\bar{W} + g\bar{N}}{\sqrt{f^2 + g^2}} \right\rangle$$

ifadesinde iç çarpım hesaplanırsa,

$$L = -\frac{g \left(\frac{fg}{\sqrt{2}} - f' \right) - f \left(-\frac{g^2}{\sqrt{2}} - vg^2 + vg' \right)}{\sqrt{f^2 + g^2}}$$

olarak bulunur. Aynı şekilde $M = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_{sv}}, \vec{n} \rangle = -\frac{-fg + fg}{\sqrt{f^2 + g^2}} = 0$ ve $N = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{lv}}, \vec{n} \rangle = 0$ olarak elde

edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\hat{C}} = 0$$

ve

$$H_{\hat{C}} = \frac{-2 \frac{-g \left(-f \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}} \right) - vf' \right) - f \left(g \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}} \right) - vg^2 + vg' \right)}{\sqrt{f^2 + g^2}}}{2 \left[g^2 + 2v^2 f^2 + 2v^2 g^2 - (-g)^2 \right]}$$

$$H_{\hat{C}} = \frac{\frac{g \left(-f \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}} \right) - vf' \right) + f \left(g \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}} \right) - vg^2 + vg' \right)}{\sqrt{f^2 + g^2}}}{\left[2v^2 f^2 + 2v^2 g^2 \right]}$$

biraz daha düzenlenirse,

$$H_{\hat{C}} = \frac{fg - fgn + g \left(-f \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}} \right) - vf' \right) + f \left(g \left(\frac{f-g}{\sqrt{2}} \right) - vg^2 + vg' \right)}{\sqrt{f^2 + g^2} \left[f^2 - 2fg + g^2 + 2v^2 f^2 + 2v^2 g^2 - (f-g)^2 \right]}$$

olarak elde edilir. Şimdi de $\vec{\psi}_{\hat{C}}$ dual eğrisine bakalım.

$$\vec{\psi}_{\hat{W}_s} = \frac{-f\vec{C}}{\sqrt{2}} + v(-g\vec{C})$$

verilen ifade biraz daha düzenlenirse, $\vec{\psi}_{\hat{W}_s} = \frac{-f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}}\vec{C}$ elde edilir. Benzer şekilde $\vec{\psi}_{\hat{W}_v} = \vec{W}$

olur. Buradan I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\hat{W}_s}, \vec{\psi}_{\hat{W}_s} \rangle = \left(\frac{-f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\hat{W}_s}, \vec{\psi}_{\hat{W}_v} \rangle = 0$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_2 v}, \vec{\psi}_{\hat{N}_2 v} \rangle = I$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I = \left(\frac{-f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)^2 ds^2 + \sqrt{2}gdsdv + dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{W}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanını bulmalıyız. $\widehat{W}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı için öncelikle aşağıdaki determinanı hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{W}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{W}_v} = \begin{vmatrix} 0 & \left(\frac{-f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right) & 0 \\ 0 & 0 & I \\ \bar{N} & \bar{C} & \bar{W} \end{vmatrix}$$

determinantı hesaplandığında,

$$\vec{\psi}_{\widehat{W}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{W}_v} = \left(\frac{-f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right) \bar{N}$$

olarak elde edilir. Bu determinant yerine yazıldığında $\widehat{W}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{\left(\frac{-f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right) \bar{N}}{\sqrt{\left(\frac{-f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)^2}} = \bar{N}$$

olarak elde edilir. $\widehat{W}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{W}$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\begin{aligned}\vec{\psi}_{\widehat{W}_{ss}} &= \left(\frac{-f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \vec{C} \right)' \\ &= \left(\frac{-f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)' \vec{C} + \left(\frac{-f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right) (-f\vec{N} + g\vec{W})\end{aligned}$$

ifadesini biraz düzenlersek,

$$\vec{\psi}_{\widehat{W}_{ss}} = \vec{N} \left(f \left(\frac{f + \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right) \right) + \vec{C} \left(\frac{-f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)' + \vec{W} \left(g \left(\frac{-f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

olarak verilir. Benzer yolla $\vec{\psi}_{\widehat{W}_{sv}} = -g\vec{C}$ ve $\vec{\psi}_{\widehat{W}_{vv}} = 0$ olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\widehat{W}$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\widehat{W}_{ss}}, \vec{n} \rangle = f \left(\frac{f + \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\widehat{W}_{sv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\widehat{W}_{vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\widehat{W}} = 0$$

ve

$$H_{\widehat{W}} = \frac{f \left(\frac{f + \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)}{2 \left(\left(\frac{-f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)} = \frac{f}{2 \left(\frac{f - \sqrt{2}vg}{\sqrt{2}} \right)}$$

olarak elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.6.3.3 Dual Darboux ($\vec{\varpi}$) ve dual Steiner ($\vec{D}$) vektörlerinin ani dönüşü aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\vec{\omega} = g\vec{N} + f\vec{W} + \varepsilon \left(\frac{-f+g}{\sqrt{2}} \vec{C} \right) \quad \text{ve}$$

$$\bar{D} = \oint \hat{w} = \bar{N} \oint g + \bar{W} \oint f + \varepsilon \left(\bar{C} \oint \left(\frac{-f+g}{\sqrt{2}} \right) \right) \text{dir.}$$

İspat

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \vec{\omega} + \varepsilon \vec{\omega}^* \\ \vec{\omega}^* &= \alpha \wedge \vec{\omega} \\ &= \left(\frac{\vec{C} + \vec{W}}{\sqrt{2}} \right) \wedge (g\vec{N} + f\vec{W}) \\ &= \frac{-g\vec{W} + f\vec{N} - g\vec{C}}{\sqrt{2}} = \frac{f}{\sqrt{2}} \vec{N} - \frac{g}{\sqrt{2}} \vec{C} - \frac{g}{\sqrt{2}} \vec{W} \end{aligned}$$

olur buradan da

$$\vec{\omega} = g\vec{N} + f\vec{W} + \varepsilon \left(\frac{f}{\sqrt{2}} \vec{N} - \frac{g}{\sqrt{2}} \vec{C} - \frac{g}{\sqrt{2}} \vec{W} \right) \text{ olarak elde edilir. Dual Steiner vektörün tanımından}$$

$$\bar{D} = \oint \vec{\omega} = \bar{N} \oint g + \bar{W} \oint f + \varepsilon \left(\bar{C} \oint \left(\frac{f}{\sqrt{2}} \vec{N} - \frac{g}{\sqrt{2}} \vec{C} - \frac{g}{\sqrt{2}} \vec{W} \right) \right)$$

olarak elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.6.3.4 $\hat{N}, \hat{C}, \hat{W}$ dual eğrilerinin oluşturmuş olduğu kapalı regle yüzeylere ait dual açılara ait eğimler sırasıyla $\Lambda_{\hat{N}} = \oint g$, $\Lambda_{\hat{C}} = +\varepsilon \left(-2 \oint \frac{g}{\sqrt{2}} \right)$ ve $\Lambda_{\hat{W}} = \oint f$ dir.

İspat.

$$\Lambda_{\hat{N}} = -\langle D, \vec{N} \rangle = -\langle d + \varepsilon d^*, \vec{N} + \varepsilon \vec{N}^* \rangle$$

ifadesi daha açık bir halde yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\widehat{N}} &= \langle \overline{N} \wp g + \overline{W} \wp f, \overline{N} \rangle + \varepsilon \left(\left\langle \overline{N} \wp g + \overline{W} \wp f, \frac{-\overline{W} + \overline{C}}{\sqrt{2}} \right\rangle + \left\langle \overline{N} \wp \frac{f}{\sqrt{2}} - \overline{C} \wp \frac{g}{\sqrt{2}} - \overline{W} \wp \frac{g}{\sqrt{2}}, \overline{N} \right\rangle \right) \\
&= \wp g + \varepsilon \left(-\wp \frac{f}{\sqrt{2}} + \wp \frac{f}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \wp g
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler $\widehat{C}$ ve $\widehat{W}$ için yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\widehat{C}} &= \langle \overline{N} \wp g + \overline{W} \wp f, \overline{C} \rangle + \varepsilon \left(\left\langle \overline{N} \wp g + \overline{W} \wp f, \frac{-\overline{N}}{\sqrt{2}} \right\rangle + \left\langle \overline{N} \wp \frac{f}{\sqrt{2}} - \overline{C} \wp \frac{g}{\sqrt{2}} - \overline{W} \wp \frac{g}{\sqrt{2}}, \overline{C} \right\rangle \right) \\
&= +\varepsilon \left(-2\wp \frac{g}{\sqrt{2}} \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\widehat{W}} &= \langle \overline{N} \wp g + \overline{W} \wp f, \overline{W} \rangle + \varepsilon \left(\left\langle \overline{N} \wp g + \overline{W} \wp f, \frac{\overline{N}}{\sqrt{2}} \right\rangle + \left\langle \overline{N} \wp \frac{f}{\sqrt{2}} - \overline{C} \wp \frac{g}{\sqrt{2}} - \overline{W} \wp \frac{g}{\sqrt{2}}, \overline{W} \right\rangle \right) \\
&= \wp f
\end{aligned}$$

olarak elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

3.6.4 Dual Uzayda $\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}$ Çatısına Göre $\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}$ Smarandache Eğrileri ve Regle Yüzeyler

E-Study dönüşümü yardımıyla dual birim küre üzerinde seçilen $\{\overline{N}, \overline{C}, \overline{W}\}$ alternatif hareketli çatısının elemanları ile dual uzayda çizilen kapalı eğriler E^3 Öklid uzayında bir regle yüzey temsil etmektedir. Buradan seçilen dual eğriler

$\widehat{N} = \overline{N} + \varepsilon \overline{N}^*$, $\widehat{N}_1 = \overline{N}_1 + \varepsilon \overline{N}_1^*$, $\widehat{N}_2 = \overline{N}_2 + \varepsilon \overline{N}_2^*$ olmak üzere, $\{\widehat{N}, \widehat{N}_1, \widehat{N}_2\}$ eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri

$$\varphi_{\widehat{N}}(s, v) = \beta_{\overline{N}}(s) + v \overline{N}(s) \quad , \quad \beta_{\overline{N}}(s) = \overline{N} \wedge \overline{N}^*,$$

$$\varphi_{\widehat{C}}(s, v) = \beta_{\overline{C}}(s) + v \overline{C}(s) \quad , \quad \beta_{\overline{N}_1}(s) = \overline{C} \wedge \overline{C}^*,$$

$$\varphi_{\widehat{W}}(s, v) = \beta_{\overline{W}}(s) + v \overline{W}(s) \quad , \quad \beta_{\overline{N}_2}(s) = \overline{W} \wedge \overline{W}^*,$$

ile verilmiştir. Bu denklemler bize $\alpha(s)$ eğrisine ait $\alpha_{\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}}(s)$ Smarandache eğrisini $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ vektörleri yardımıyla $\alpha_{\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}}(s) = \frac{\vec{N} + \vec{C} + \vec{W}}{\sqrt{2}}$ ile tanımlarız. Bu eğriye bağlı olarak $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ vektörlerinin vektörel momentleri sırasıyla

$$\vec{N}^* = \alpha \wedge \vec{N} = \left(\frac{\vec{N} + \vec{C} + \vec{W}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \vec{N} = \frac{-\vec{W} + \vec{C}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{C}^* = \alpha \wedge \vec{C} = \left(\frac{\vec{N} + \vec{C} + \vec{W}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \vec{C} = \frac{\vec{W} - \vec{N}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{W}^* = \alpha \wedge \vec{W} = \left(\frac{\vec{N} + \vec{C} + \vec{W}}{\sqrt{2}} \right) \wedge \vec{W} = \frac{\vec{N} - \vec{C}}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir. Bu denklemler kullanılarak $\{\widehat{N}, \widehat{C}, \widehat{W}\}$ dual eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri sırasıyla aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\psi_{\widehat{N}}(s, v) = \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v\vec{N} = \vec{N} \wedge \left(\frac{\vec{C} - \vec{W}}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{N} = \frac{\vec{W} + \vec{C}}{\sqrt{2}} + v\vec{N}$$

$$\psi_{\widehat{C}}(s, v) = \vec{C} \wedge \vec{C}^* + v\vec{C} = \vec{C} \wedge \frac{\vec{W} - \vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{C} = \frac{\vec{N} + \vec{W}}{\sqrt{2}} + v\vec{C}$$

$$\psi_{\widehat{W}}(s, v) = \vec{W} \wedge \vec{W}^* + v\vec{W} = \vec{W} \wedge \left(\frac{\vec{N} - \vec{C}}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{W} = \frac{\vec{N} + \vec{C}}{\sqrt{2}} + v\vec{W}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.6.4.1 $\{\widehat{N}, \widehat{C}, \widehat{W}\}$ dual eğrileri kapalı bir regle yüzeyini belirtmek üzere, dağılma parametreleri $P_{\widehat{N}} = \frac{g}{\sqrt{2}f}$, $P_{\widehat{C}} = 0$ ve $P_{\widehat{W}} = \frac{-f}{\sqrt{2}g}$ olarak hesaplanır.

İspat. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin dağılma parametresini

$$P_{\hat{N}} = \frac{\det\left(\frac{d\beta_{\vec{N}}}{ds_t}, \vec{N}, \frac{d\vec{N}}{ds_t}\right)}{\left\|\frac{d\vec{N}}{ds_t}\right\|^2} = \frac{\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}')}{\|\vec{N}'^2\|}$$

olarak verilebilir. Şimdi de bu determinanti hesaplayabilmek için öncelikle $(\vec{N} \wedge \vec{N}^*)'$ türevini hesaplayalım.

$$(\vec{N} \wedge \vec{N}^*)' = \left(\frac{\vec{W} + \vec{C}}{\sqrt{2}}\right)' = \frac{(-f - g)\vec{N} + g\vec{W}}{\sqrt{2}}$$

determinant alma işlemi yapıldıktan sonra

$$\det((\vec{N} \wedge \vec{N}^*)', \vec{N}, \vec{N}') = \begin{vmatrix} \frac{-f-g}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix}$$

$$P_{\hat{N}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{-f-g}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix}}{f^2}$$

verilen dual eğrinin dağılma parametresi

$$P_{\hat{N}} = \frac{gf}{\sqrt{2}f^2} = \frac{g}{\sqrt{2}f}$$

aynı şekilde $P_{\hat{C}}$ ve $P_{\hat{W}}$ de

$$P_{\hat{C}} = \frac{\det\left(\frac{d\beta_{\vec{C}}}{ds_t}, \vec{C}, \frac{d\vec{C}}{ds_t}\right)}{\left\|\frac{d\vec{C}}{ds_t}\right\|^2} = \frac{\det((\vec{C} \wedge \vec{C}^*)', \vec{C}, \vec{C}')}{\|\vec{C}'^2\|}$$

olarak verilebilir. Şimdi de bu determinanı hesaplayabilmek için öncelikle $(\vec{C} \wedge \vec{C}^*)'$ türevi

$$(\vec{C} \wedge \vec{C}^*)' = \left(\frac{\vec{N} + \vec{W}}{\sqrt{2}} \right)' = \frac{(f - g)\vec{C}}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir.

$$\det((\vec{C} \wedge \vec{C}^*)', \vec{C}, \vec{C}') = \begin{vmatrix} 0 & \frac{f-g}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -f & 0 & g \end{vmatrix}$$

determinanı hesaplandığında,

$$P_{\vec{C}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{f-g}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -f & 0 & g \end{vmatrix}}{f^2 + g^2} = 0$$

olarak bulunur. Şimdi de benzer işlemleri $P_{\vec{W}}$ için yapalım.

$$P_{\vec{W}} = \frac{\det\left(\frac{d\beta_{\vec{W}}}{ds_t}, \vec{W}, \frac{d\vec{W}}{ds_t}\right)}{\left\|\frac{d\vec{W}}{ds_t}\right\|^2} = \frac{\det((\vec{W} \wedge \vec{W}^*)', \vec{W}, \vec{W}')}{\|\vec{W}'^2\|}$$

olarak verilebilir. Şimdi de bu determinanı hesaplayabilmek için öncelikle $(\vec{W} \wedge \vec{W}^*)'$ türevi

$$(\vec{W} \wedge \vec{W}^*)' = \left(\frac{\vec{N} + \vec{C}}{\sqrt{2}} \right)' = \frac{f\vec{C} + (-f\vec{N} + g\vec{W})}{\sqrt{2}}$$

olur.

$$\det((\vec{W} \wedge \vec{W}^*)', \vec{W}, \vec{W}') = \begin{vmatrix} \frac{-f}{\sqrt{2}} & \frac{f}{\sqrt{2}} & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & 0 \end{vmatrix}$$

determinantı hesaplandığında verilen dual eğrinin dağılma parametresi,

$$P_{\widehat{W}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{f}{\sqrt{2}} & \frac{f}{\sqrt{2}} & -\frac{g}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g & 0 \end{vmatrix}}{g^2}$$

determinatı hesaplandığında

$$P_{\widehat{W}} = \frac{-f}{\sqrt{2}g} \text{ olur ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.}$$

Sonuç: Dayanak eğrisi $\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}$ Smarandache eğrisi ile üretilen $(\widehat{W})$ dual eğrisine karşılık gelen

$\psi_{\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}}$ kapalı regle yüzeyini için $g = 0$ veya $\frac{\tau}{\kappa} = sbt$ olması durumunda dağılma parametresi hesaplanamamaktadır.

Teorem 3.6.4.2 $\{\widehat{N}, \widehat{C}, \widehat{W}\}$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$K_{\widehat{N}} = -\frac{\left(\frac{\frac{fg}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(vf + \frac{g}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{g^2}{2}}}\right)^2}{\left(vf + \frac{g}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{g^2}{2}}, \quad K_{\widehat{C}} = 0, \quad K_{\widehat{W}} = -\frac{g^2 f^2}{2\left(\frac{f^2}{2} + \left(vg + \frac{f-g}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}$$

ve

$$H_{\hat{N}} = \frac{(f^2 g)}{2\sqrt{\left(\left(vf + \frac{g}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{g^2}{2}\right)^3}}, \quad H_{\hat{C}} = -\frac{f\left(\frac{fg - g^2}{\sqrt{2}} + vg'\right) + g\left(\frac{-f^2 + fg}{\sqrt{2}} - vf'\right)}{2v^2\sqrt{(f^2 + g^2)^3}}$$

$$H_{\hat{W}} = \frac{-2g^2 f - \left(vg + \frac{f}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{f'}{\sqrt{2}} + \left(fvg + \frac{f^2}{\sqrt{2}}\right)\right) + \frac{f}{\sqrt{2}}\left(-\frac{f^2}{\sqrt{2}} - \left(vg + \frac{f}{\sqrt{2}}\right) - \frac{g^2}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{\left(\left(vg + \frac{f}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{f^2}{2}\right)^3}}$$

olarak elde edilir.

İspat. $\hat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliğini bulmak için I. esas form ve II. esas form ile birlikte normal vektör alanını bulmamız gerekli.

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_s} = \left[\frac{-f\vec{N} + g\vec{W} + g\vec{C}}{\sqrt{2}} + vf\vec{C} \right]$$

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_v} = \vec{N}$$

Buradan I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_s}, \vec{\psi}_{\hat{N}_s} \rangle = \frac{f^2}{2} + \frac{g^2}{2} + \left(\frac{g}{\sqrt{2}} + vf \right)^2$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_v}, \vec{\psi}_{\hat{N}_s} \rangle = \frac{-f}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_v}, \vec{\psi}_{\hat{N}_v} \rangle = I$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{f^2}{2} + g^2 + v^2 f^2 \right) ds^2 + 2 \left(\frac{-f}{\sqrt{2}} \right) ds dv + I dv^2 \\ &= \left(\frac{f^2}{2} + g^2 + v^2 f^2 \right) ds^2 - (\sqrt{2}f) ds dv + I dv^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanına ihtiyacımız vardır. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı için öncelikle aşağıdaki determinanı hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N}_v} = \begin{vmatrix} -\frac{f}{\sqrt{2}} & vf + \frac{g}{\sqrt{2}} & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ \vec{N} & \vec{C} & \vec{W} \end{vmatrix} = \frac{g}{\sqrt{2}} \vec{C} - vf \vec{W}$$

ve buradan da

$$\vec{n} = \frac{\frac{g}{\sqrt{2}} \vec{C} - \left(vf + \frac{g}{\sqrt{2}}\right) \vec{W}}{\sqrt{\left(vf + \frac{g}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{g^2}{2}}}$$

olarak elde edilir. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{\widehat{N}_{ss}} &= \frac{d}{ds} \left[\frac{-f\vec{N} + g\vec{W} + g\vec{C}}{\sqrt{2}} + vf\vec{C} \right] \\ &= \frac{-f'\vec{N} - f(f\vec{C}) + g'\vec{W} + g(-g\vec{C}) + g'\vec{C} + g(-f\vec{N} + g\vec{W})}{\sqrt{2}} + vf'\vec{C} + vf(-f\vec{N} + g\vec{W}) \end{aligned}$$

ifadesi biraz daha düzenlenirse

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{ss}} = \vec{N} \left(\frac{-f'}{\sqrt{2}} - vf^2 - \frac{gf}{\sqrt{2}} \right) + \vec{C} \left(vf' - \frac{g^2}{\sqrt{2}} - \frac{f^2}{\sqrt{2}} + \frac{g'}{\sqrt{2}} \right) + \vec{W} \left(vfg + \frac{g'}{\sqrt{2}} + \frac{g^2}{\sqrt{2}} \right)$$

olarak verilir. Benzer yolla $\vec{\psi}_{\widehat{N}_{sv}} = f\vec{C}$ ve $\vec{\psi}_{\widehat{N}_{vv}} = 0$ olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\widehat{N}$ dual eğrisinin normal vektör alanın iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}}, \vec{n} \rangle = \left\{ \frac{\frac{g}{\sqrt{2}} \left(vf' - \frac{g^2}{\sqrt{2}} - \frac{f^2}{\sqrt{2}} + \frac{g'}{\sqrt{2}} \right) - \left(vf + \frac{g}{\sqrt{2}} \right) \left(vfg + \frac{g'}{\sqrt{2}} + \frac{g^2}{\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{\left(vf + \frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{g^2}{2}}} \right\}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{sv}}, \vec{n} \rangle = \frac{fg}{\sqrt{2} \sqrt{\left(vf + \frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{g^2}{2}}}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\hat{N}_{vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\hat{N}} = - \frac{\left(\frac{\frac{fg}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(vf + \frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{g^2}{2}}} \right)^2}{\frac{f^2}{2} + \frac{g^2}{2} + \left(\frac{g}{\sqrt{2}} + vf \right)^2} - \frac{f^2}{2} = - \frac{\left(\frac{\frac{fg}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(vf + \frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{g^2}{2}}} \right)^2}{\frac{g^2}{2} + \left(\frac{g}{\sqrt{2}} + vf \right)^2}$$

ve

$$\begin{aligned} H_{\hat{N}} &= \frac{-2 \left(\frac{fg}{\sqrt{2} \sqrt{\left(vf + \frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{g^2}{2}}} \right) \frac{-f}{\sqrt{2}}}{2 \left(\frac{g^2}{2} + \left(\frac{g}{\sqrt{2}} + vf \right)^2 \right)} \\ &= \frac{(f^2 g)}{2 \sqrt{\left(\left(vf + \frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{g^2}{2} \right)^3}} \end{aligned}$$

benzer şekilde şimdide $\{\vec{\psi}_{\hat{C}}, \vec{\psi}_{\hat{W}}\}$ yüzeyleri için Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplayalım.

$\vec{\psi}_{\hat{C}_s} = \frac{(f-g)\vec{C}}{\sqrt{2}} + v(-f\vec{N} + g\vec{W})$ ve $\vec{\psi}_{\hat{C}_v} = \vec{C}$ dir. Buradan I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_s}, \vec{\psi}_{\hat{C}_s} \rangle = \frac{f^2 - 2fg + g^2}{2} + v^2 f^2 + v^2 g^2$$

$$F = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_s}, \vec{\psi}_{\hat{C}_v} \rangle = \frac{f-g}{\sqrt{2}}$$

$$G = \langle \vec{\psi}_{\hat{C}_v}, \vec{\psi}_{\hat{C}_v} \rangle = 1$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{f^2 - 2fg + g^2}{2} + v^2 f^2 + v^2 g^2 \right) ds^2 + 2 \frac{f-g}{\sqrt{2}} ds dv + dv^2 \\ &= \left(\frac{f^2 - 2fg + g^2}{2} + v^2 f^2 + v^2 g^2 \right) ds^2 + \sqrt{2} (f-g) ds dv + dv^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\hat{C}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanına ihtiyacımız vardır. $\hat{C}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı için öncelikle aşağıdaki determinanı hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\hat{C}_s} \wedge \vec{\psi}_{\hat{C}_v} = \begin{vmatrix} -vf & \frac{f-g}{\sqrt{2}} & vg \\ 0 & 1 & 0 \\ \vec{N} & \vec{C} & \vec{W} \end{vmatrix}$$

determinantı hesaplandığında $\vec{\psi}_{\hat{C}_s} \wedge \vec{\psi}_{\hat{C}_v} = -vf\vec{W} - vg\vec{N}$ olarak elde edilir. Bu determinant yerine yazıldığında $\hat{C}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = -\frac{vf\vec{W} + vg\vec{N}}{v\sqrt{f^2 + g^2}} = -\frac{f\vec{W} + g\vec{N}}{\sqrt{f^2 + g^2}}$$

olarak elde edilir. $\widehat{C}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{C}$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\vec{\psi}_{\widehat{C}_{ss}} = \left(\frac{(f-g)' \vec{C} + (f-g)(-f\vec{N} + g\vec{W})}{\sqrt{2}} - (vf)' \vec{N} - (vf)(f\vec{C}) + (vg)' \vec{W} + (vg)(-g\vec{C}) \right)$$

ifadesi biraz düzenlenirse,

$$\vec{\psi}_{\widehat{C}_{ss}} = \vec{N} \left(\frac{-f^2 + fg}{\sqrt{2}} - vf' \right) + \vec{C} \left(\frac{(f-g)'}{\sqrt{2}} - vf^2 - vg^2 \right) + \vec{W} \left(\frac{fg - g^2}{\sqrt{2}} + vg' \right)$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde

$$\vec{\psi}_{\widehat{C}_{sv}} = -f\vec{N} + g\vec{W}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{C}_{vv}} = 0$$

olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\widehat{C}$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\widehat{C}_{ss}}, \vec{n} \rangle = - \frac{f \left(\frac{fg - g^2}{\sqrt{2}} + vg' \right) + g \left(\frac{-f^2 + fg}{\sqrt{2}} - vf' \right)}{\sqrt{f^2 + g^2}}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\widehat{C}_{sv}}, \vec{n} \rangle = - \frac{fg - fg'}{\sqrt{f^2 + g^2}}$$

$$M = 0$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\widehat{C}_{vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\widehat{C}} = 0$$

ve

$$H_{\hat{C}} = \frac{-\frac{f\left(\frac{fg-g^2}{\sqrt{2}}+vg'\right)+g\left(\frac{-f^2+fg}{\sqrt{2}}-vf'\right)}{\sqrt{f^2+g^2}}}{2\left[\frac{f^2-2fg+g^2}{2}+v^2f^2+v^2g^2-\frac{f^2-2fg+g^2}{2}\right]} = -\frac{f\left(\frac{fg-g^2}{\sqrt{2}}+vg'\right)+g\left(\frac{-f^2+fg}{\sqrt{2}}-vf'\right)}{2v^2\sqrt{(f^2+g^2)^3}}$$

olarak elde edilir. Şimdi de $\vec{\psi}_{\hat{C}}$ dual eğrisine bakalım.

$$\vec{\psi}_{\hat{W}_s} = \frac{(f-g)\vec{C}-f\vec{N}+g\vec{W}}{\sqrt{2}}+v(-g\vec{C})$$

verilen ifade biraz daha düzenlenirse,

$\vec{\psi}_{\hat{W}_s} = -\frac{f}{\sqrt{2}}\vec{N}-\left(vg+\frac{f-g}{\sqrt{2}}\right)\vec{C}+\frac{g}{\sqrt{2}}\vec{W}$ ve $\vec{\psi}_{\hat{W}_v}=\vec{W}$ elde edilir. Buradan I. esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E=<\vec{\psi}_{\hat{W}_s},\vec{\psi}_{\hat{W}_s}>= \frac{f^2}{2}+\left(\left(vg+\frac{f-g}{\sqrt{2}}\right)\right)^2+\frac{g^2}{2}$$

$$F=<\vec{\psi}_{\hat{W}_s},\vec{\psi}_{\hat{W}_v}>=\frac{g}{\sqrt{2}}$$

$$G=<\vec{\psi}_{\hat{N}_{2v}},\vec{\psi}_{\hat{N}_{2v}}>=I$$

olarak bulunur. Buradan I. esas form

$$I=\left(\frac{f^2}{2}+\left(\left(vg+\frac{f-g}{\sqrt{2}}\right)\right)^2+\frac{g^2}{2}\right)ds^2+\sqrt{2}gdsdv+dv^2$$

olarak elde edilir. Şimdide II. esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{W}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanını bulalım. $\widehat{W}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı için öncelikle aşağıdaki determinanı hesaplayalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{W}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{W}_v} = \begin{vmatrix} -\frac{f}{\sqrt{2}} & -\left(vg + \frac{f-g}{\sqrt{2}}\right) & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \\ \vec{N} & \vec{C} & \vec{W} \end{vmatrix}$$

determinatı hesaplandığında

$$\vec{\psi}_{\widehat{W}_s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{W}_v} = \left(vg + \frac{f-g}{\sqrt{2}}\right)\vec{N} - \frac{f}{\sqrt{2}}\vec{C}$$

olarak elde edilir. Bu determinant yerine yazıldığında $\widehat{W}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{-\left(vg + \frac{f-g}{\sqrt{2}}\right)\vec{N} + \frac{f}{\sqrt{2}}\vec{C}}{\sqrt{\left(vg + \frac{f}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{f^2}{2}}}$$

olarak elde edilir. $\widehat{W}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdide bu eğriye ait II. esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{W}$ dual eğrisinin s ve v ye göre tekrardan yönlü türev alma işlemini uyguladığımızda;

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{\widehat{W}_{ss}} &= \left(-\frac{f}{\sqrt{2}}\vec{N} - \left(vg + \frac{f-g}{\sqrt{2}}\right)\vec{C} + \frac{g}{\sqrt{2}}\vec{W}\right)' \\ &= -\frac{f'}{\sqrt{2}}\vec{N} - \frac{f}{\sqrt{2}}(f\vec{C}) - \left(vg + \frac{f-g}{\sqrt{2}}\right)' \vec{C} - \left(vg + \frac{f-g}{\sqrt{2}}\right)(-f\vec{N} + g\vec{W}) + \frac{g'}{\sqrt{2}}\vec{W} + \frac{g}{\sqrt{2}}(-g\vec{C}) \end{aligned}$$

ifadesini biraz düzenlersek,

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_{\widehat{W}_{ss}} &= \vec{N} \left(-\frac{f'}{\sqrt{2}} + \left(fvg + \frac{f^2 - fg}{\sqrt{2}}\right)\right) + \vec{C} \left(-\frac{f^2}{\sqrt{2}} - \left(vg + \frac{f-g}{\sqrt{2}}\right)' - \frac{g^2}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad + \vec{W} \left(-\left(vg^2 + \frac{fg - g^2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{g'}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

olarak verilir. Benzer şekilde $\vec{\psi}_{\widehat{W}_{sv}} = -g\vec{C}$ ve $\vec{\psi}_{\widehat{W}_{vv}} = 0$ olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve $\widehat{W}$ dual eğrisinin normal vektör alanının iç çarpımından, II. esas formun katsayıları

$$L = \langle \vec{\psi}_{\widehat{W}_{ss}}, \vec{n} \rangle = \frac{-\left(vg + \frac{f}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{f'}{\sqrt{2}} + \left(fvg + \frac{f^2 - fg}{\sqrt{2}}\right)\right) + \frac{f}{\sqrt{2}}\left(-\frac{f^2}{\sqrt{2}} - \left(vg^2 + \frac{fg - g^2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{g^2}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\left(vg + \frac{f}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{f^2}{2}}}$$

$$M = \langle \vec{\psi}_{\widehat{W}_{sv}}, \vec{n} \rangle = \frac{\frac{gf}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(vg + \frac{f}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{f^2}{2}}}$$

$$N = \langle \vec{\psi}_{\widehat{W}_{vv}}, \vec{n} \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bilgileri (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$K_{\widehat{W}} = \frac{-\left(\frac{\frac{gf}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(vg + \frac{f}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{f^2}{2}}}\right)^2}{\frac{f^2}{2} + \left(\left(vg + \frac{f}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 + \frac{g^2}{2} - \frac{g^2}{2}} = -\frac{g^2 f^2}{2\left(\frac{f^2}{2} + \left(vg + \frac{f}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2}$$

ve

$$H_{\widehat{W}} = \frac{-2\frac{g}{\sqrt{2}}\frac{\frac{gf}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(vg + \frac{f}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{f^2}{2}}} + \frac{-\left(vg + \frac{f}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{f'}{\sqrt{2}} + \left(fvg + \frac{f^2 - fg}{\sqrt{2}}\right)\right) + \frac{f}{\sqrt{2}}\left(-\frac{f^2}{\sqrt{2}} - \left(vg^2 + \frac{fg - g^2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{g^2}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\left(vg + \frac{f}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{f^2}{2}}}}{4\left(\frac{f^2}{2} + \left(vg + \frac{f}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2}$$

ifadesi biraz daha düzenlenirse

$$H_{\widehat{W}} = \frac{-2g^2 f - \left(vg + \frac{f}{\sqrt{2}}\right) \left(-\frac{f'}{\sqrt{2}} + \left(fvg + \frac{f^2}{\sqrt{2}}\right)\right) + \frac{f}{\sqrt{2}} \left(-\frac{f^2}{\sqrt{2}} - \left(vg + \frac{f}{\sqrt{2}}\right) - \frac{g^2}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{\left(\left(vg + \frac{f}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{f^2}{2}\right)^3}}$$

olarak elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.6.4.3 Dual Darboux $(\overline{\omega})$ ve dual Steiner $(\overline{D})$ vektörlerinin ani dönüşü aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\overline{\omega} = g\overline{N} + f\overline{W} + \varepsilon \left(\frac{f\overline{N} - g\overline{C}}{\sqrt{2}} \right) \text{ ve}$$

$$\overline{D} = \oint \overline{\omega} = \overline{N} \oint g + \overline{W} \oint f + \varepsilon \left(\overline{N} \oint \left(\frac{f}{\sqrt{2}} \right) - \overline{W} \oint \frac{g}{\sqrt{2}} \right) \text{ dir.}$$

İspat.

$$\overline{\omega} = \overline{\omega} + \varepsilon \overline{\omega}^*$$

$$\overline{\omega}^* = \alpha \wedge \overline{\omega} = \left(\frac{\overline{N} + \overline{C} + \overline{W}}{\sqrt{2}} \right) \wedge (g\overline{N} + f\overline{W}) = \frac{-f\overline{C} + g\overline{W} - f\overline{N} - g\overline{C}}{\sqrt{2}}$$

olur buradan da

$$\overline{\omega} = g\overline{N} + f\overline{W} + \varepsilon \left(\frac{-f\overline{N} - (g+f)\overline{C} + g\overline{W}}{\sqrt{2}} \right)$$

olarak elde edilir. Dual Steiner vektörün tanımından

$$\overline{D} = \oint \overline{\omega} = \overline{N} \oint g + \overline{W} \oint f + \varepsilon \left(\overline{N} \oint \left(\frac{f}{\sqrt{2}} \right) - \overline{C} \oint (g+f) + \overline{W} \oint \frac{g}{\sqrt{2}} \right)$$

olarak elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.6.4.4 $\widehat{N}, \widehat{C}, \widehat{W}$ dual eğrilerinin oluşturmuş olduğu kapalı regle yüzeylere ait dual açılara ait eğimler sırasıyla

$$\Lambda_{\widehat{N}} = \oint g, \quad \Lambda_{\widehat{C}} = \sqrt{2}\varepsilon \oint f \text{ ve } \Lambda_{\widehat{W}} = \oint f$$

dir.

İspat.

$$\Lambda_{\hat{N}} = -\langle D, \bar{N} \rangle = -\langle d + \varepsilon d^*, \bar{N} + \varepsilon \bar{N}^* \rangle$$

ifadesi daha açık bir halde yazılırsa

$$\Lambda_{\hat{N}} = \langle \bar{N} \wp g + \bar{W} \wp f, \bar{N} \rangle + \varepsilon \left(\left\langle \bar{N} \wp g + \bar{W} \wp f, \frac{-\bar{W} + \bar{C}}{\sqrt{2}} \right\rangle + \left\langle \bar{N} \wp \left(\frac{f}{\sqrt{2}} \right) - \bar{C} \wp (g + f) + \bar{W} \wp \frac{g}{\sqrt{2}}, \bar{N} \right\rangle \right)$$

$$\Lambda_{\hat{N}} = \wp g + \varepsilon \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \wp f + \frac{1}{\sqrt{2}} \wp f \right)$$

$$\Lambda_{\hat{N}} = \wp g$$

elde edilir. Benzer işlemler $\hat{C}$ ve $\hat{W}$ için yapılırsa,

$$\Lambda_{\hat{C}} = \langle \bar{N} \wp g + \bar{W} \wp f, \bar{C} \rangle + \varepsilon \left(\left\langle \bar{N} \wp g + \bar{W} \wp f, \frac{\bar{W} - \bar{N}}{\sqrt{2}} \right\rangle + \left\langle \bar{N} \wp \left(\frac{f}{\sqrt{2}} \right) - \bar{C} \wp (g + f) + \bar{W} \wp \frac{g}{\sqrt{2}}, \bar{C} \right\rangle \right)$$

$$\Lambda_{\hat{C}} = +\varepsilon \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \wp g + \frac{1}{\sqrt{2}} \wp f - \frac{1}{\sqrt{2}} \wp (f + g) \right) \quad \text{ve}$$

$$\Lambda_{\hat{C}} = \sqrt{2}\varepsilon \wp f$$

$$\Lambda_{\hat{W}} = \langle \bar{N} \wp g + \bar{W} \wp f, \bar{W} \rangle + \varepsilon \left(\left\langle \bar{N} \wp g + \bar{W} \wp f, \frac{\bar{N} - \bar{C}}{\sqrt{2}} \right\rangle + \left\langle \bar{N} \wp \left(\frac{f}{\sqrt{2}} \right) - \bar{C} \wp (g + f) + \bar{W} \wp \frac{g}{\sqrt{2}}, \bar{W} \right\rangle \right)$$

$$\Lambda_{\hat{W}} = \wp f + \varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \wp g - \frac{1}{\sqrt{2}} \wp g - \right)$$

$$\Lambda_{\hat{W}} = \wp f$$

olarak elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

3.7. Sayısal Örnekler

3.7.1 Dual N-Bishop Çatısının Karşılık Geldiği Regle Yüzeyleri

Örnek 3.7.1.1. $\alpha(s) = \left(\frac{3}{5} \cos s, \frac{3}{5} \sin s, \frac{4}{5} s \right)$ eğrisini göz önüne alalım.

$\alpha'(s) = \left(-\frac{3}{5} \sin s, \frac{3}{5} \cos s, \frac{4}{5} \right)$, $\|\alpha'(s)\| = 1$ olduğundan $\alpha(s)$ eğrisi birim hızlıdır. $\alpha(s)$

eğrisinin (2.1) denkleminde teğetini

$\vec{T} = \alpha'(s) = \left(-\frac{3}{5} \sin s, \frac{3}{5} \cos s, \frac{4}{5} \right)$ olarak buluruz. Teğetin türevinin normuna oranlanmasıyla da

eğrinin normal vektörünü

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'}{\|\vec{T}'\|} = \frac{\left(-\frac{3}{5} \cos s, -\frac{3}{5} \sin s, 0 \right)}{1} = \left(-\frac{3}{5} \cos s, -\frac{3}{5} \sin s, 0 \right)$$

olarak elde edilir. (2.2) denkleminde eğriye ait binormal vektör

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{3}{5} \sin s & \frac{3}{5} \cos s & \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \cos s & -\frac{3}{5} \sin s & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{12}{25} \sin s, -\frac{12}{25} \cos s, \frac{9}{25} \right)$$

olarak bulunur. Buradan $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ çatısının elemanlarından $\vec{N}(s) = (-\cos s, -\sin s, 0)$ vektörünün

türevi $\vec{N}'(s) = (\sin s, -\cos s, 0)$ ve normu $\|\vec{N}'\| = 1$ olarak hesaplanır. Böylece (2.3)

denkleminde $\vec{C}(s) = \frac{\vec{N}'}{\|\vec{N}'\|} = (\sin s, -\cos s, 0)$ ve alternatif çatının üçüncü bileşeni de

$$\vec{W} = \vec{N} \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & -\cos s & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

olarak elde edilir. $\varphi(s) = \int_0^s g(s) ds$ ve N-C-W çatısının eğrilikleri

$f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$, ve $g = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$ dir [21]. Gerekli işlemler yapıldığında $\kappa = |\vec{T}| = 1$ ve

$$\tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\kappa\|^2} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{3}{5} \sin s & \frac{3}{5} \cos s & \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \cos s & -\frac{3}{5} \sin s & 0 \\ \frac{3}{5} \sin s & -\frac{3}{5} \cos s & 0 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-\frac{4}{5}}{1} = -\frac{4}{5}$$

olarak elde edilir buradan da $f = \frac{\sqrt{41}}{5}$ ve $g = 0$ bulunur.

(2.4) denkleminde ve geçiş matrisleri yardımıyla N-Bishop çatısı

$$\vec{N} = (-\cos s, -\sin s, 0)$$

$$\vec{N}_1 = \vec{C} \cos r - \vec{W} \sin r = (\sin s \cos r, -\cos s \cos r, -\sin r)$$

$$\vec{N}_2 = \vec{C} \sin r + \vec{W} \cos r = (\sin s \sin r, -\cos s \sin r, \cos r)$$

olarak elde edilir. $\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\}$ alternatif çatısının dual bileşenleri yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) &= \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v \vec{N} \\
\vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) &= \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \vec{N}_2 + \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \vec{N}_1 + v \vec{N} \\
\vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) &= \frac{\lambda_2 f \sin s + \lambda_3 f \cos s}{f} \vec{N}_2 + \frac{\lambda_2 f \cos s - \lambda_3 f \sin s}{f} \vec{N}_1 + v \vec{N} \\
\vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) &= (\lambda_2 \sin s + \lambda_3 \cos s) \vec{N}_2 + (\lambda_2 \cos s - \lambda_3 \sin s) \vec{N}_1 + v \vec{N} \\
\vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) &= \left(\begin{aligned} &(\lambda_2 \sin s + \lambda_3 \cos s)(\sin s \sin r, -\cos s \sin r, \cos r) \\ &+ (\lambda_2 \cos s - \lambda_3 \sin s)(\sin s \cos r, -\cos s \cos r, -\sin r) + (-v \cos s, -v \sin s, 0) \end{aligned} \right) \\
\vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) &= \left(\begin{aligned} &\lambda_2 \sin^2 s \sin r + \lambda_3 \cos s \sin s \sin r + \lambda_2 \cos s \sin s \cos r - \lambda_3 \sin^2 s \cos r - v \cos s \\ &,- \lambda_2 \sin s \cos s \sin r - \lambda_3 \cos^2 s \sin r + \lambda_2 \cos^2 s \cos r + \lambda_3 \sin s \cos s \cos r - v \sin s \\ &,\lambda_2 \sin s \cos r + \lambda_3 \cos s \cos r - \lambda_2 \cos s \sin r + \lambda_3 \sin s \sin r \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}
\vec{\psi}_{\hat{N}_1}(s, \varphi) &= \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_1^* + v \vec{N}_1 \\
\vec{\psi}_{\hat{N}_1}(s, \varphi) &= \lambda_1 \vec{N} + \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_1}{f} \vec{N}_2 + v \vec{N}_1 \\
\vec{\psi}_{\hat{N}_1}(s, \varphi) &= \lambda_1 \vec{N} + \frac{\lambda_2 f \sin s + \lambda_3 f \cos s}{f} \vec{N}_2 + v \vec{N}_1 \\
\vec{\psi}_{\hat{N}_1}(s, \varphi) &= \lambda_1 \vec{N} + (\lambda_2 \sin s + \lambda_3 \cos s) \vec{N}_2 + v \vec{N}_1 \\
\vec{\psi}_{\hat{N}_1}(s, \varphi) &= \left(\begin{aligned} &\lambda_1 (-\cos s, -\sin s, 0) + (\lambda_2 \sin s + \lambda_3 \cos s)(\sin s \sin r, -\cos s \sin r, \cos r) \\ &+ v(\sin s \cos r, -\cos s \cos r, -\sin r) \end{aligned} \right) \\
\vec{\psi}_{\hat{N}_1}(s, \varphi) &= \left(\begin{aligned} &-\lambda_1 \cos s + \lambda_2 \sin^2 s \sin r + \lambda_3 \cos s \sin s \sin r + v \sin s \cos r \\ &,- \lambda_1 \sin s - \lambda_2 \sin s \cos s \sin r - \lambda_3 \cos^2 s \sin r - \cos s \cos r \\ &,\lambda_2 \sin s \cos r + \lambda_3 \cos s \cos r - \sin r \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\vec{\psi}_{\hat{N}_2}(s, \varphi) &= \vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^* + v \vec{N}_2 \\
\vec{\psi}_{\hat{N}_2}(s, v) &= \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \vec{N}_1 + \lambda_1 \vec{N} + v \vec{N}_2 \\
\vec{\psi}_{\hat{N}_2}(s, v) &= \frac{\lambda_2 f \cos s - \lambda_3 f \sin s}{f} \vec{N}_1 + \lambda_1 \vec{N} + v \vec{N}_2 \\
\vec{\psi}_{\hat{N}_2}(s, v) &= (\lambda_2 \cos s - \lambda_3 \sin s) \vec{N}_1 + \lambda_1 \vec{N} + v \vec{N}_2 \\
\vec{\psi}_{\hat{N}_2}(s, v) &= \begin{pmatrix} (\lambda_2 \cos s - \lambda_3 \sin s)(\sin s \cos r, -\cos s \cos r, -\sin r) \\ + \lambda_1(-\cos s, -\sin s, 0) + v(\sin s \sin r, -\cos s \sin r, \cos r) \end{pmatrix} \\
\vec{\psi}_{\hat{N}_2}(s, v) &= \begin{pmatrix} \lambda_2 \cos s \sin s \cos r - \lambda_3 \sin^2 s \cos r - \lambda_1 \cos s + v \sin s \sin r \\ -\lambda_2 \cos^2 s \cos r + \lambda_3 \sin s \cos s \cos r - \lambda_1 \sin s - v \cos s \sin r \\ -\lambda_2 \cos s \sin r + \lambda_3 \sin s \sin r + v \cos r \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

regle yüzeyleri elde edilir.

Örnek 3.7.1.2. $\alpha(s) = \left(\frac{5}{13} \cos s, \frac{5}{13} \sin s, \frac{12}{13} s \right)$ eğrisini göz önüne alalım.

$\alpha'(s) = \left(-\frac{5}{13} \sin s, \frac{5}{13} \cos s, \frac{12}{13} \right)$, $\|\alpha'(s)\| = 1$ olduğundan $\alpha(s)$ eğrisi birim hızlıdır. $\alpha(s)$

eğrisinin birinci türevi eğrinin teğetine eşit olup $\vec{T} = \alpha'(s) = \left(-\frac{5}{13} \sin s, \frac{5}{13} \cos s, \frac{12}{13} \right)$ dir.

Buradan da $\alpha(s)$ eğrisinin teğetinin normuna bölünmesiyle eğriye ait normal vektör

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'}{\|\vec{T}'\|} = \frac{\left(-\frac{5}{13} \cos s, -\frac{5}{13} \sin s, 0 \right)}{1} = \left(-\frac{5}{13} \cos s, -\frac{5}{13} \sin s, 0 \right)$$

olarak elde edilir. (2.2) denkelminden binormal vektörü bulalım.

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{5}{13} \sin s & \frac{5}{13} \cos s & \frac{12}{13} \\ -\frac{5}{13} \cos s & -\frac{5}{13} \sin s & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{60}{169} \sin s, -\frac{60}{169} \cos s, \frac{25}{169} \right)$$

olur (2.3) denkleminden de normalin sabit tutulmasıyla $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ çatısı

$$\vec{N}(s) = (-\cos s, -\sin s, 0)$$

$$\vec{N}'(s) = (\sin s, -\cos s, 0),$$

$$\vec{C}(s) = \frac{\vec{N}'}{\|\vec{N}'\|} = (\sin s, -\cos s, 0)$$

$$\vec{W} = \vec{N} \wedge \vec{C} = (0, 0, 1)$$

olarak elde edilir. $\varphi(s) = \int_0^s g(s) ds$ ve N-C-W çatısının eğrilikleri $f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$, ve

$$g = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \text{ dir [21]. Gerekli işlemler yapıldığında } \kappa = |\vec{T}| = 1 \text{ ve}$$

$$\tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\kappa\|^2} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{5}{13} \sin s & \frac{5}{13} \cos s & \frac{12}{13} \\ -\frac{5}{13} \cos s & -\frac{5}{13} \sin s & 0 \\ \frac{5}{13} \sin s & -\frac{5}{13} \cos s & 0 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-\frac{12}{13}}{1} = -\frac{12}{13}$$

$$f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}, g = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = \frac{1}{1 + \frac{144}{169}} \left(\frac{13}{12} \right)' = 0 \rightarrow \varphi(s) = \int_0^s g(s) ds = r = sbt$$

olur. (2.4) denkleminden ve geçiş matrisleri yardımıyla N-Bishop çatısı

$$\vec{N} = (-\cos s, -\sin s, 0)$$

$$\vec{N}_1 = C \cos r - W \sin r = (\sin s \cos r, -\cos s \cos r, -\sin r)$$

$$\vec{N}_2 = C \sin r + W \cos r = (\sin s \sin r, -\cos s \sin r, \cos r)$$

elde edilir. $\{\vec{N}, \vec{N}_I, N_2\}$ alternatif çatısının Dual bileşenleri yardımıyla,

$$\begin{aligned}\vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) &= \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v\vec{N} \\ \vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) &= \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_I}{f} \vec{N}_2 + \frac{\lambda_2 k_I - \lambda_3 k_2}{f} \vec{N}_I + v\vec{N} \\ \vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) &= \frac{\lambda_2 f \sin s + \lambda_3 f \cos s}{f} \vec{N}_2 + \frac{\lambda_2 f \cos s - \lambda_3 f \sin s}{f} \vec{N}_I + v\vec{N} \\ \vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) &= (\lambda_2 \sin s + \lambda_3 \cos s) \vec{N}_2 + (\lambda_2 \cos s - \lambda_3 \sin s) \vec{N}_I + v\vec{N} \\ \vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) &= \left((\lambda_2 \sin s + \lambda_3 \cos s) (\sin s \sin r, -\cos s \sin r, \cos r) \right. \\ &\quad \left. + (\lambda_2 \cos s - \lambda_3 \sin s) (\sin s \cos r, -\cos s \cos r, -\sin r) + (-v \cos s, -v \sin s, 0) \right) \\ \vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) &= \begin{pmatrix} \lambda_2 \sin^2 s \sin r + \lambda_3 \cos s \sin s \sin r + \lambda_2 \cos s \sin s \cos r - \lambda_3 \sin^2 s \cos r - v \cos s \\ -\lambda_2 \sin s \cos s \sin r - \lambda_3 \cos^2 s \sin r + \lambda_2 \cos^2 s \cos r + \lambda_3 \sin s \cos s \cos r - v \sin s \\ \lambda_2 \sin s \cos r + \lambda_3 \cos s \cos r - \lambda_2 \cos s \sin r + \lambda_3 \sin s \sin r \end{pmatrix}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer işlemlerle

$$\begin{aligned}\vec{\psi}_{\hat{N}_I}(s, \varphi) &= \vec{N}_I \wedge \vec{N}_I^* + v\vec{N}_I \\ \vec{\psi}_{\hat{N}_I}(s, \varphi) &= \lambda_I \vec{N} + \frac{\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_I}{f} \vec{N}_2 + v\vec{N}_I \\ \vec{\psi}_{\hat{N}_I}(s, \varphi) &= \lambda_I \vec{N} + \frac{\lambda_2 f \sin s + \lambda_3 f \cos s}{f} \vec{N}_2 + v\vec{N}_I \\ \vec{\psi}_{\hat{N}_I}(s, \varphi) &= \lambda_I \vec{N} + (\lambda_2 \sin s + \lambda_3 \cos s) \vec{N}_2 + v\vec{N}_I \\ \vec{\psi}_{\hat{N}_I}(s, \varphi) &= \left(\lambda_I (-\cos s, -\sin s, 0) + (\lambda_2 \sin s + \lambda_3 \cos s) (\sin s \sin r, -\cos s \sin r, \cos r) \right. \\ &\quad \left. + v (\sin s \cos r, -\cos s \cos r, -\sin r) \right) \\ \vec{\psi}_{\hat{N}_I}(s, \varphi) &= \begin{pmatrix} -\lambda_I \cos s + \lambda_2 \sin^2 s \sin r + \lambda_3 \cos s \sin s \sin r + v \sin s \cos r \\ -\lambda_I \sin s - \lambda_2 \sin s \cos s \sin r - \lambda_3 \cos^2 s \sin r - \cos s \cos r \\ \lambda_2 \sin s \cos r + \lambda_3 \cos s \cos r - \sin r \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\vec{\psi}_{\hat{N}_2}(s, \varphi) &= \vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^* + v \vec{N}_2 \\
\vec{\psi}_{\hat{N}_2}(s, v) &= \frac{\lambda_2 k_1 - \lambda_3 k_2}{f} \vec{N}_1 + \lambda_1 \vec{N} + v \vec{N}_2 \\
\vec{\psi}_{\hat{N}_2}(s, v) &= \frac{\lambda_2 f \cos s - \lambda_3 f \sin s}{f} \vec{N}_1 + \lambda_1 \vec{N} + v \vec{N}_2 \\
\vec{\psi}_{\hat{N}_2}(s, v) &= (\lambda_2 \cos s - \lambda_3 \sin s) \vec{N}_1 + \lambda_1 \vec{N} + v \vec{N}_2 \\
\vec{\psi}_{\hat{N}_2}(s, v) &= \begin{pmatrix} (\lambda_2 \cos s - \lambda_3 \sin s)(\sin s \cos r, -\cos s \cos r, -\sin r) \\ +\lambda_1(-\cos s, -\sin s, 0) + v(\sin s \sin r, -\cos s \sin r, \cos r) \end{pmatrix} \\
\vec{\psi}_{\hat{N}_2}(s, v) &= \begin{pmatrix} \lambda_2 \cos s \sin s \cos r - \lambda_3 \sin^2 s \cos r - \lambda_1 \cos s + v \sin s \sin r \\ -\lambda_2 \cos^2 s \cos r + \lambda_3 \sin s \cos s \cos r - \lambda_1 \sin s - v \cos s \sin r \\ -\lambda_2 \cos s \sin r + \lambda_3 \sin s \sin r + v \cos r \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

regle yüzeyleri elde edilir.

3.7.2 Dual Smarandache regle yüzeyi

Örnek : $\alpha(s) = \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \cos s, \frac{3}{\sqrt{13}} s, \frac{2}{\sqrt{13}} \sin s \right)$ eğrisini göz önüne alalım.

$\alpha'(s) = \left(\frac{-2}{\sqrt{13}} \sin s, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \cos s \right)$, $\|\alpha'(s)\| = 1$ olduğundan $\alpha(s)$ eğrisi birim hızlıdır.

Bu eğriye ait birinci türev bize bu eğriye ait teğeti verir.

$$\vec{T} = \alpha'(s) = \left(\frac{-2}{\sqrt{13}} \sin s, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \cos s \right)$$

Teğetin türevinin normuna oranlanmasıyla da bu eğriye ait normal

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'}{\|\vec{T}'\|} = \frac{\left(\frac{-2}{\sqrt{13}} \cos s, 0, \frac{-2}{\sqrt{13}} \sin s \right)}{\frac{2}{\sqrt{13}}} = (-\cos s, 0, -\sin s)$$

olur. Şimdi de (2.2) denkleminde bulduğumuz teğet ve normalin değerlerini yerine yazıp binormali hesaplayalım.

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} \sin s & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \cos s \\ -\cos s & 0 & -\sin s \end{vmatrix} = \left(\frac{-3}{\sqrt{13}} \sin s, -\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \cos s \right)$$

olur. Bu eğrinin eğriliği (2.1) denkleminde $\kappa = |\vec{T}'| = 1$ olarak bulunur. Eğrinin burulması da

$$\frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\kappa\|^2} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{-2}{\sqrt{13}} \sin s & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \cos s \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} \cos s & 0 & -\frac{2}{\sqrt{13}} \sin s \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \sin s & 0 & -\frac{2}{\sqrt{13}} \cos s \end{vmatrix}}{1} = \frac{12\sqrt{13}}{169}$$

dur. Buradan $\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\}$ çatısının elemanlarından $\vec{N}(s) = (-\cos s, 0, -\sin s)$ $\vec{N}'(s) = (\sin s, 0, -\cos s)$

ve normu $\|\vec{N}'\| = 1$ olarak hesaplanır. Böylece $\vec{C}(s) = \frac{\vec{N}'}{\|\vec{N}'\|} = (\sin s, 0, -\cos s)$ vektörü elde edilir.

Alternatif çatının üçüncü bileşeni de (2.3) denkleminde

$$\vec{W} = \vec{N} \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\cos s & 0 & -\sin s \\ \sin s & 0 & -\cos s \end{vmatrix} = (0, 1, 0)$$

olarak elde edilir. $\varphi(s) = \int_0^s g(s) ds$ N-C-W çatısının eğrilikleri

$$f = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{12\sqrt{13}}{13}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{2041}{169}} = \frac{\sqrt{2041}}{13} \text{ ve } g = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0 \text{ bulunur [21].}$$

(2.4) ve geçiş matrisleri yardımıyla da N-Bishop çatısının elemanları

$$\vec{N} = (-\cos s, 0, -\sin s)$$

$$\vec{N}_1 = C \cos r - W \sin r = (\sin s \cos r, -\sin r, -\cos s \cos r)$$

$$\vec{N}_2 = C \sin r + W \cos r = (\sin s \sin r, \cos r, -\cos s \sin r)$$

olarak elde edilir.

3.7.2.1 Dual $\widehat{N}\widehat{N}_1$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi

Örnek 3.7.2 de verilen eğri için Dual $\widehat{N}\widehat{N}_1$ Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeylerini bulalım.

$$\begin{aligned}\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s, v) &= \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v\vec{N} \\ &= \vec{N} \wedge \left(-\frac{\vec{N}_2}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{N} \\ &= \frac{\vec{N}_1}{\sqrt{2}} + v\vec{N} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \cos r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin r, \frac{-1}{\sqrt{2}} \cos s \cos r \right) + (-v \cos s, 0, -v \sin s) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \cos r - v \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \cos r - v \sin s \right)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}\vec{\psi}_{\widehat{N}_1}(s, v) &= \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_1^* + v\vec{N}_1 \\ &= \vec{N}_1 \wedge \frac{\vec{N}_2}{\sqrt{2}} + v\vec{N}_1 \\ &= \frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{N}_1 \\ &= (-\cos s, 0, -\sin s) + (v \sin s \cos r, -v \sin r, -v \cos s \cos r) \\ &= (-\cos s + v \sin s \cos r, -v \sin r, -\sin s - v \cos s \cos r)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\vec{\psi}_{\widehat{N}_2}(s, v) &= \vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^* + v \vec{N}_2 \\
&= \vec{N}_2 \wedge \left(\frac{\vec{N} - \vec{N}_l}{\sqrt{2}} \right) + v \vec{N}_2 \\
&= \frac{\vec{N} + \vec{N}_l}{\sqrt{2}} + v \vec{N}_2 \\
&= \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \cos r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \cos r \right) \right) \\
&\quad + (v \sin s \sin r, v \cos r, -v \cos s \sin r) \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \cos r + v \sin s \sin r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin r + v \cos r, \right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - \cos s \cos r - v \cos s \sin r \right)
\end{aligned}$$

olarak verilir.

3.7.2.2 Dual $\widehat{N}\widehat{N}_2$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi

Örnek 3.7.2 de verilen eğri için Dual $\widehat{N}\widehat{N}_2$ Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeylerini bulalım.

$$\begin{aligned}
\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s, v) &= \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v \vec{N} \\
&= \vec{N} \wedge \left(\frac{\vec{N}_l}{\sqrt{2}} \right) + v \vec{N} \\
&= \frac{\vec{N}_2}{\sqrt{2}} + v \vec{N} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \sin r, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \sin r \right) + (-v \cos s, 0, -v \sin s) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \sin r - v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos r, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \sin r - v \sin s \right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer işlemlerle

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_l}(s, v) = \vec{N}_l \wedge \vec{N}_l^* + v \vec{N}_l$$

$$\begin{aligned}
\vec{\psi}_{\widehat{N}_1}(s, v) &= \vec{N}_1 \wedge \frac{-\vec{N} + \vec{N}_2}{\sqrt{2}} + v\vec{N}_1 \\
\vec{\psi}_{\widehat{N}_1}(s, v) &= \frac{\vec{N} + \vec{N}_2}{\sqrt{2}} + v\vec{N}_1 \\
\vec{\psi}_{\widehat{N}_1}(s, v) &= (-\cos s, 0, -\sin s) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \sin r, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \sin r \right) \\
&\quad + v(\sin s \cos r, -\sin r, -\cos s \cos r) \\
\vec{\psi}_{\widehat{N}_1}(s, v) &= \begin{pmatrix} -\cos s + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \sin r + v \sin s \cos r, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos r - \sin r, \\ -\sin s - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \sin r - v \cos s \cos r \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\vec{\psi}_{\widehat{N}_2}(s, v) &= \vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^* + v\vec{N}_2 \\
&= \vec{N}_2 \wedge \left(\frac{-\vec{N}_1}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{N}_2 \\
&= \frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{N}_2 \\
&= (-\cos s, 0, -\sin s) + v(-\sin s \sin r, \cos r, -\cos s \sin r) \\
&= (-\cos s + v \sin s \sin r, v \cos r, -\sin s - v \cos s \sin r)
\end{aligned}$$

olarak verilir.

3.7.2.3 Dual $\widehat{N}_1 \widehat{N}_2$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi

Örnek 3.7.2 de verilen eğri için Dual $\widehat{N}_1 \widehat{N}_2$ Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeylerini bulalım.

$$\vec{\psi}_{\hat{N}}(s,v) = \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v\vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\hat{N}}(s,v) = \vec{N} \wedge \left(\frac{\vec{N}_1 - \vec{N}_2}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\hat{N}}(s,v) = \frac{\vec{N}_1 + \vec{N}_2}{\sqrt{2}} + v\vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\hat{N}}(s,v) = \left(\begin{array}{l} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \cos r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \cos r \right) \\ + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \sin r, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \sin r \right) + (v \cos s, 0, v \sin s) \end{array} \right)$$

$$\vec{\psi}_{\hat{N}}(s,v) = \left(\begin{array}{l} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \cos r + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \sin r - v \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin r + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos r, \right. \\ \left. -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \cos r - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \sin r - v \sin s \right) \end{array} \right)$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_1}(s,v) = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_1^* + v\vec{N}_1$$

$$= \vec{N}_1 \wedge \frac{-\vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{N}_1$$

$$= \frac{\vec{N}_2}{\sqrt{2}} + v\vec{N}_1$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \sin r, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \sin r \right) + v \left(\sin s \cos r, -\sin r, -\cos s \cos r \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \sin r + v \sin s \cos r, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos r - v \sin r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \sin r - v \cos s \cos r \right)$$

ve

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_2}(s,v) = \vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^* + v\vec{N}_2$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_2}(s, v) = \vec{N}_2 \wedge \left(\frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} \right) + v \vec{N}_2$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_2}(s, v) = \frac{\vec{N}_1}{\sqrt{2}} + v \vec{N}_2$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_2}(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \cos r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \cos r \right) + (v \sin s \sin r, v \cos r, -v \cos s \sin r)$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_2}(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \cos r + v \sin s \sin r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin r + v \cos r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \cos r - v \cos s \sin r \right)$$

olarak verilir.

3.7.2.4 Dual $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi

Örnek 3.7.2 de verilen eğri için Dual $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeylerini bulalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s, v) = \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v \vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s, v) = \vec{N} \wedge \left(\frac{\vec{N}_1 - \vec{N}_2}{\sqrt{2}} \right) + v \vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s, v) = \frac{\vec{N}_1 + \vec{N}_2}{\sqrt{2}} + v \vec{N}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \cos r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \cos r \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \sin r, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \sin r \right) + v(-\cos s, 0, -\sin s)$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \cos r + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \sin r - v \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin r + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \cos r - \cos s \sin r - v \sin s \right)$$

olarak elde edilir. Benzer işlemlerle

$$\begin{aligned}
\vec{\psi}_{\widehat{N}_1}(s,v) &= N_1 \wedge N_1^* + vN_1 \\
&= \vec{N}_1 \wedge \frac{-\vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{N}_1 \\
&= \frac{\vec{N}_2}{\sqrt{2}} + v\vec{N}_1 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \sin r, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \sin r \right) + v(\sin s \cos r, -\sin r, -\cos s \cos r) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \sin r + \frac{1}{\sqrt{2}} v \sin s \cos r, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos r - v \sin r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \sin r - v \cos s \cos r \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\vec{\psi}_{\widehat{N}_2}(s,v) &= \vec{N}_2 \wedge \vec{N}_2^* + v\vec{N}_2 \\
&= \vec{N}_2 \wedge \left(\frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{N}_2 \\
&= \frac{\vec{N}_1}{\sqrt{2}} + v\vec{N}_2 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \cos r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \cos r \right) + v(\sin s \sin r, \cos r, -\cos s \sin r) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \cos r + v \sin s \sin r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin r + v \cos r, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \cos r - v \cos s \sin r \right)
\end{aligned}$$

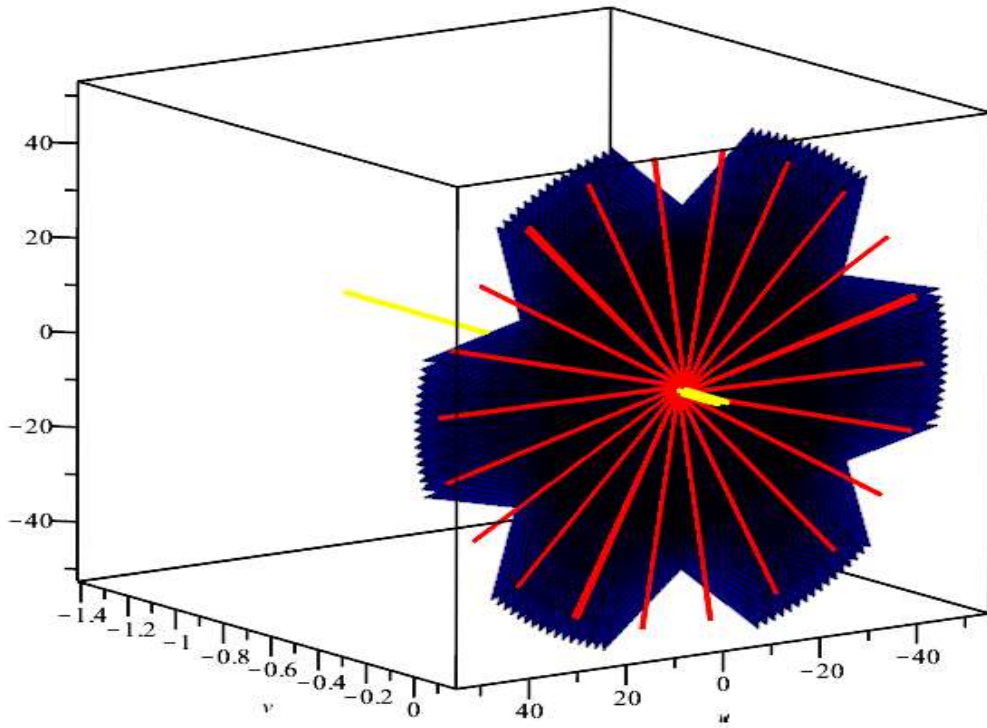
olarak verilir.

3.7.2.5 Dual $\widehat{N}\widehat{C}$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi

Örnek 3.7.2 de verilen eğri için Dual $\widehat{N}\widehat{C}$ Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeylerini bulalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s,v) = \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v\vec{N}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{N} \wedge \left(-\frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} \right) + v \vec{N} \\
&= \frac{\vec{C}}{\sqrt{2}} + v \vec{N} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right) + v (-\cos s, 0, -\sin s) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s \right)
\end{aligned}$$

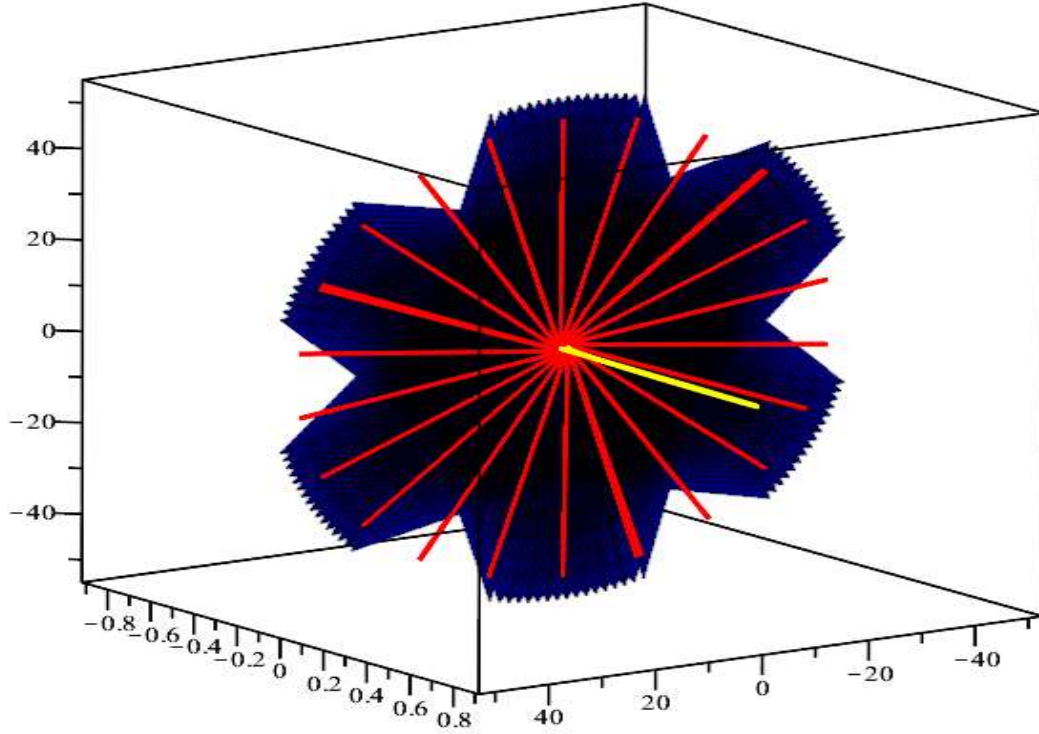


Şekil 4.1. $\vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s \right)$ eğrisine ait regle yüzeyin maple çizimi

olarak elde edilir. Benzer yolla

$$\vec{\psi}_{\hat{C}}(s, v) = \vec{C} \wedge \vec{C}^* + v \vec{C}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{C} \wedge \frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} + v \vec{C} \\
&= \frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} + v \vec{C} \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right) + v (\sin s, 0, -\cos s) \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + v \sin s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s \right)
\end{aligned}$$



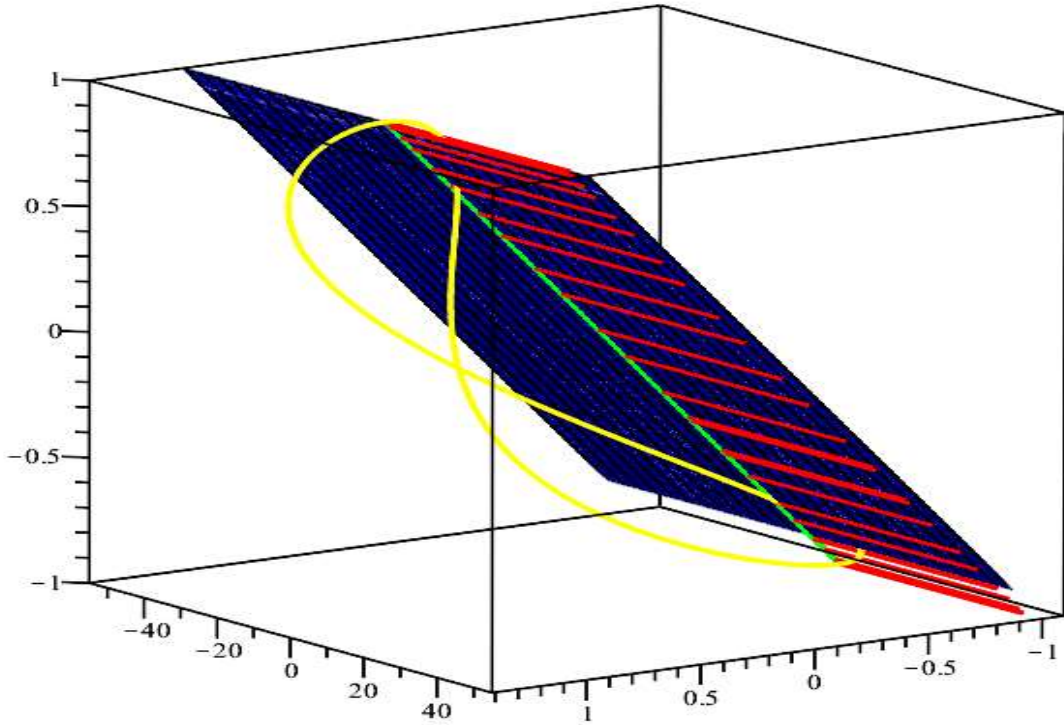
Şekil 4.2. $\vec{\psi}_{\hat{C}}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + v \sin s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s \right)$ eğrisine ait regle yüzeyin maple çizimi

ve

$$\vec{\psi}_{\hat{W}}(s, v) = \vec{W} \wedge \vec{W}^* + v \vec{W}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{W} \wedge \left(\frac{\vec{N} - \vec{C}}{\sqrt{2}} \right) + v \vec{W} \\
&= \frac{\vec{N} + \vec{C}}{\sqrt{2}} + v \vec{W} \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right) + (0, v, 0) \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right)
\end{aligned}$$

olarak verilir.



Şekil 4.3. $\vec{\psi}_{\hat{W}}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{26}}{4} \sin s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right)$ eğrisine ait regle yüzeyin Maple çizimi

7.3.2.6 Dual $\widehat{N}\widehat{W}$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi

Örnek 7.3.2 de verilen eğri için Dual $\widehat{N}\widehat{W}$ Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeylerini bulalım.

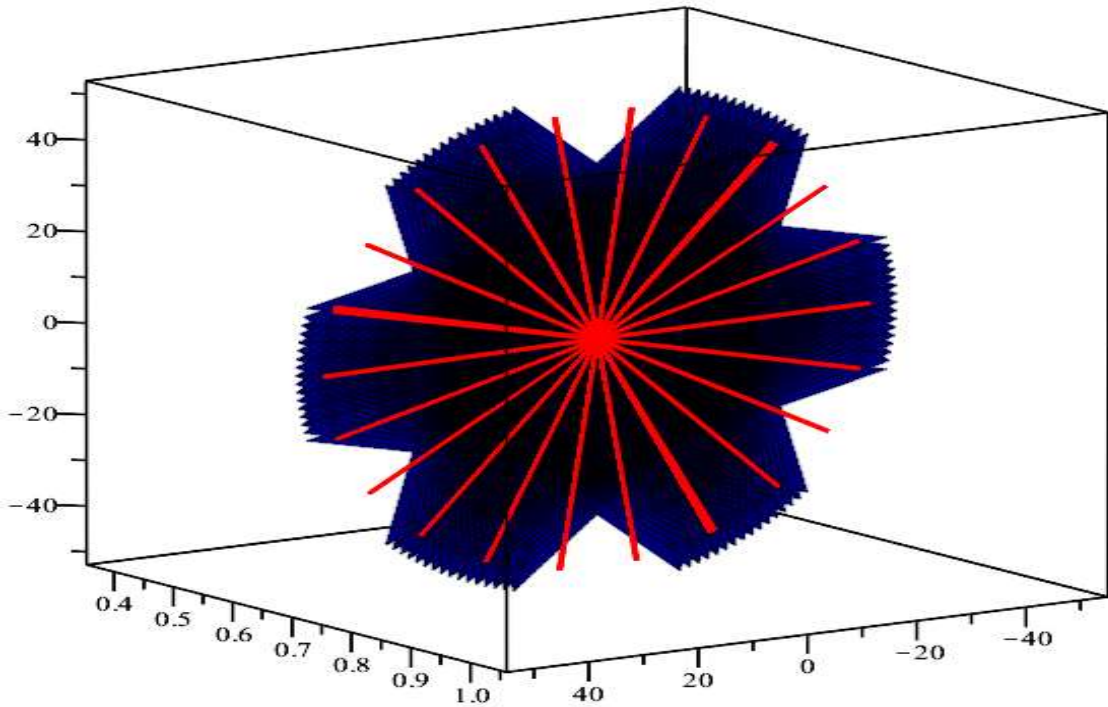
$$\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s, \varphi) = N \wedge N^* + vN$$

$$= \vec{N} \wedge \left(\frac{\vec{C}}{\sqrt{2}} \right) + v\vec{N}$$

$$= \frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} + v\vec{N}$$

$$= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) + v(-\cos s, 0, -\sin s)$$

$$= \left(-v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \sin s \right)$$



Şekil 4.4. $\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s, \varphi) = \left(-v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \sin s \right)$ eğrisine ait regle yüzeyin Maple çizimi

olarak elde edilir. Aynı yolla

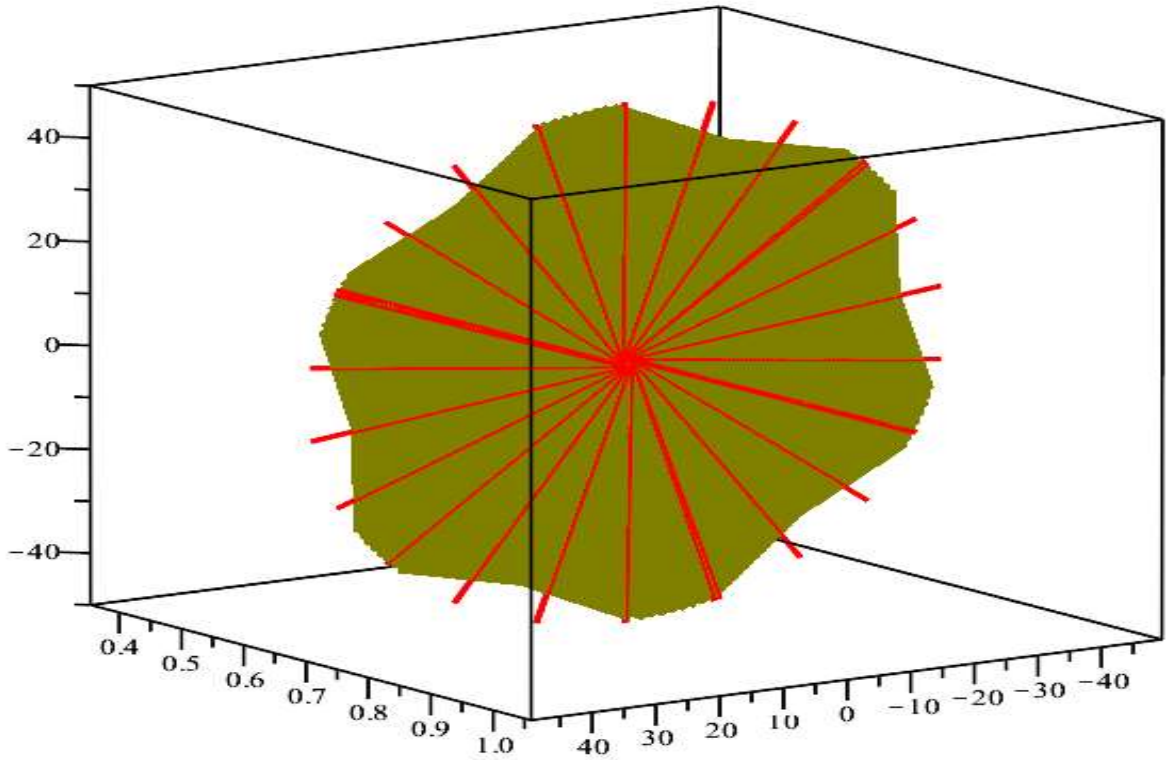
$$\vec{\psi}_{\vec{C}}(s,v) = \vec{C} \wedge \vec{C}^* + v\vec{C}$$

$$= \vec{C} \wedge \frac{\vec{W} - \vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{C}$$

$$= \frac{\vec{N} + \vec{W}}{\sqrt{2}} + v\vec{C}$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right) + \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) + v(\sin s, 0, -\cos s)$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + v \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s \right)$$

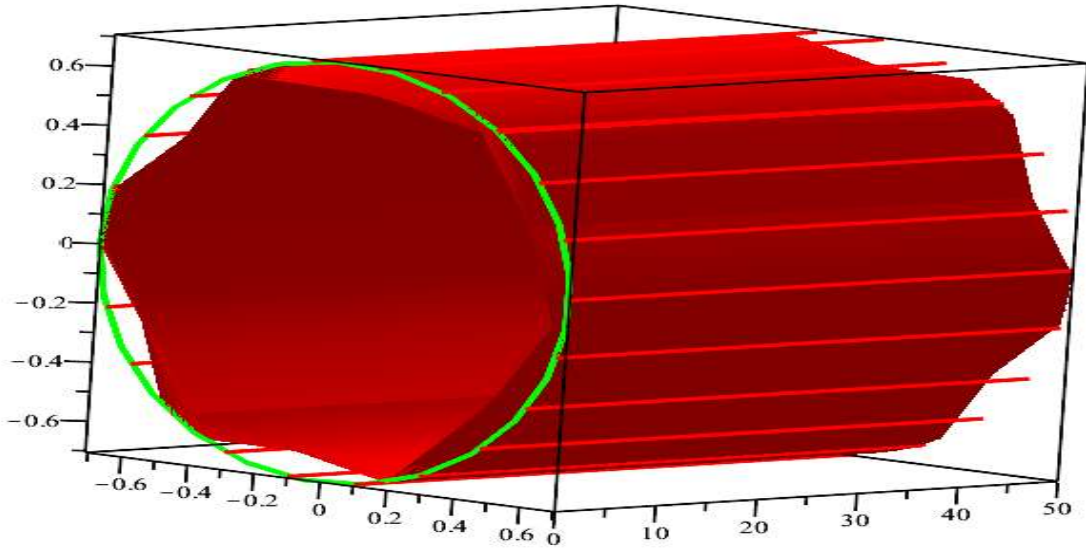


Şekil 4.5. $\vec{\psi}_{\vec{C}}(s,v) = \left(-v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \sin s \right)$ eğrisine ait regle yüzeyin maple çizimi

ve

$$\vec{\psi}_{\vec{W}}(s,v) = \vec{W} \wedge \vec{W}^* + v\vec{W}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{W} \wedge \left(\frac{-\vec{C}}{\sqrt{2}} \right) + v \vec{W} \\
&= \frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} + v \vec{W} \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right) + (0, v, 0) \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right)
\end{aligned}$$



Şekil 4.6. $\vec{\psi}_{\widehat{W}}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right)$ eğrisine ait regle yüzeyin maple çizimi

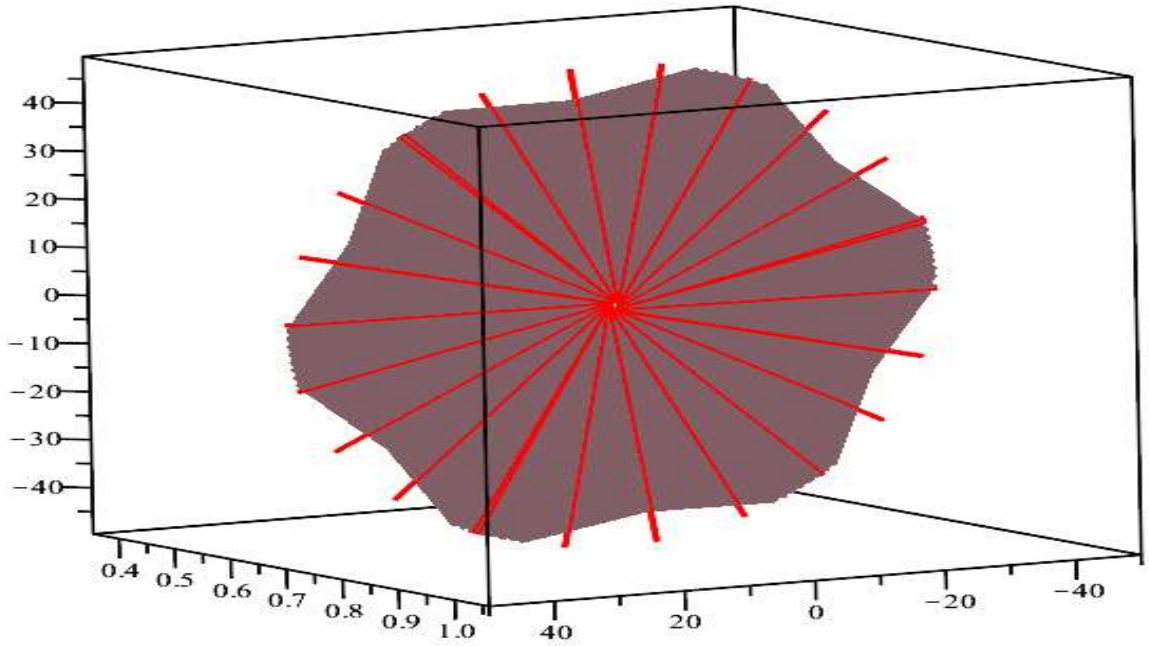
olarak verilir.

3.7.2.7 Dual $\widehat{C}\widehat{W}$ Smarandache Eğrisin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi

Örnek 3.7.2 de verilen eğri için dual $\widehat{C}\widehat{W}$ Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeylerini bulalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s, \varphi) = \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v \vec{N}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{N} \wedge \left(\frac{\vec{C} - \vec{W}}{\sqrt{2}} \right) + v \vec{N} \\
&= \frac{\vec{W} + \vec{C}}{\sqrt{2}} + v \vec{N} \\
&= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right) + v(-\cos s, 0, -\sin s) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s \right)
\end{aligned}$$

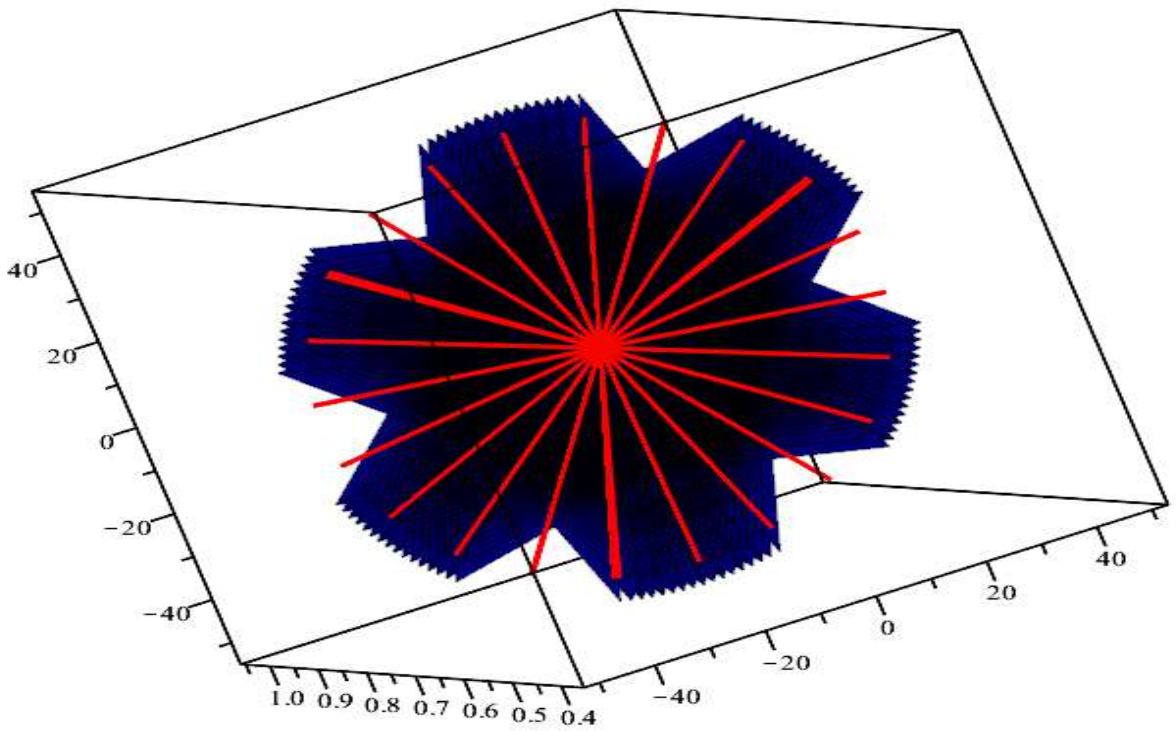


Şekil 4.7. $\vec{\psi}_{\hat{N}}(s, \varphi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s \right)$ eğrisine ait regle yüzeyin maple çizimi

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$\vec{\psi}_{\hat{C}}(s, v) = \vec{C} \wedge \vec{C}^* + v \vec{C}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{C} \wedge \frac{-\vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{C} \\
&= \frac{\vec{W}}{\sqrt{2}} + v\vec{C} \\
&= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + v(\sin s, 0, -\cos s) \\
&= \left(v \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \cos s\right)
\end{aligned}$$

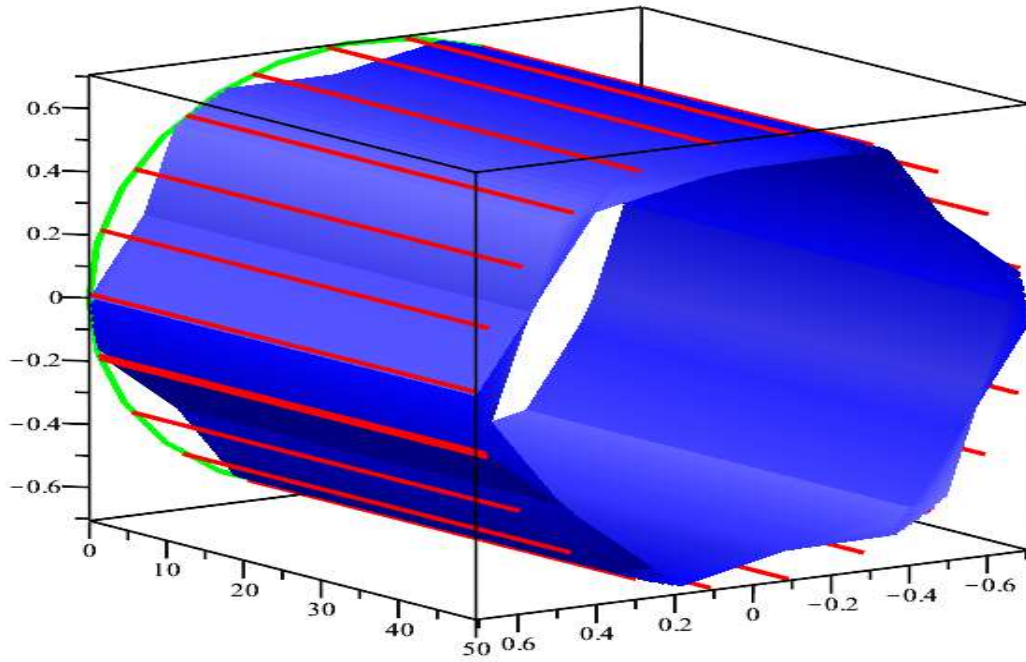


Şekil 4.8. $\vec{\psi}_{\vec{C}}(s, v) = \left(v \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \cos s\right)$ eğrisine ait regle yüzeyin maple çizimi

ve

$$\vec{\psi}_{\vec{W}}(s, v) = \vec{W} \wedge \vec{W}^* + v\vec{W}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{W} \wedge \left(\frac{\vec{C} + \vec{W}}{\sqrt{2}} \right) + v \vec{W} \\
&= \frac{-\vec{N}}{\sqrt{2}} + v \vec{W} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right) + (0, v, 0) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, v, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right)
\end{aligned}$$



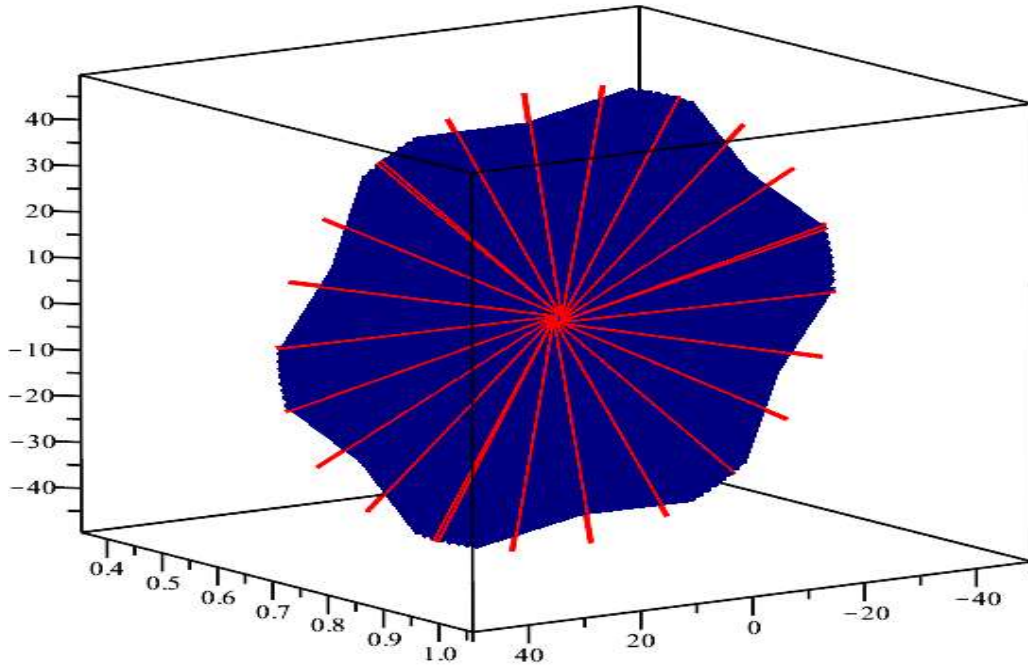
Şekil 4.9. $\vec{\psi}_{\hat{C}}(s, v) = \left(v \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -v \cos s \right)$ eğrisine ait regle yüzeyin maple çizimi

olarak verilir.

3.7.2.8 Dual $\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi

Örnek 3.7.2 de verilen eğri için Dual $\widehat{N}\widehat{C}\widehat{W}$ Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeylerini $\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s, v) = \vec{N} \wedge \vec{N}^* + v \vec{N}$

$$\begin{aligned}
&= \vec{N} \wedge \left(\frac{\vec{C} - \vec{W}}{\sqrt{2}} \right) + v \vec{N} \\
&= \frac{\vec{W} + \vec{C}}{\sqrt{2}} + v \vec{N} \\
&= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right) + (-v \cos s, 0, -v \sin s) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s \right)
\end{aligned}$$



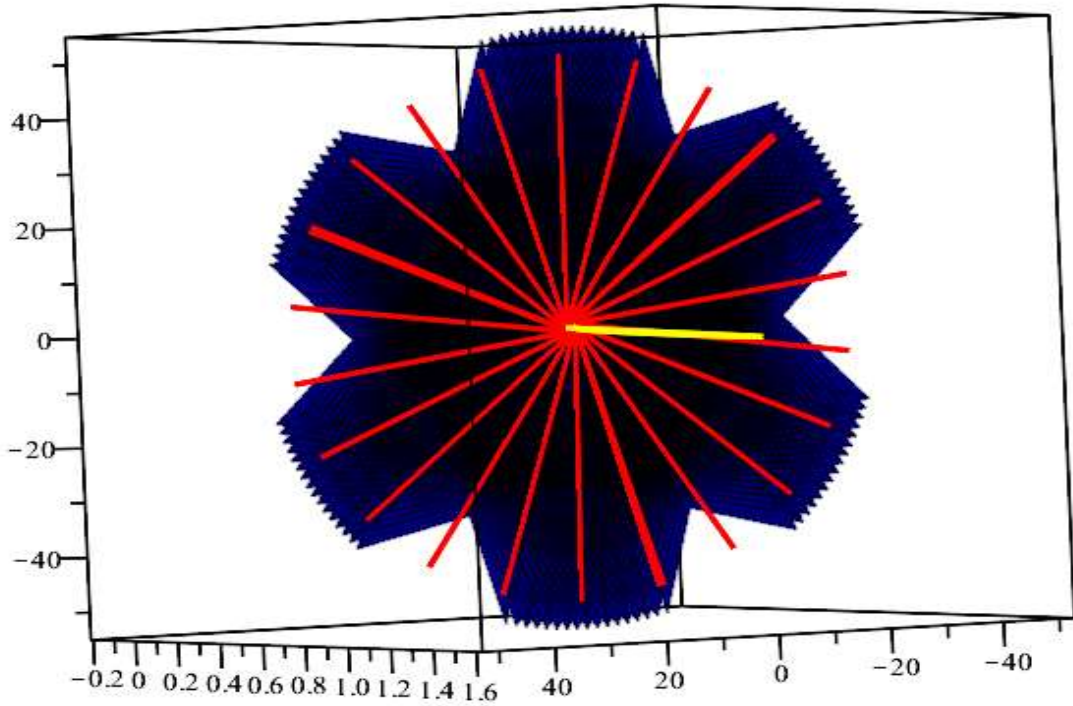
Şekil 4.10. $\vec{\psi}_{\hat{N}}(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - v \sin s \right)$ eğrisine ait regle yüzeyin

Maple çizimi

olarak elde edilir. Benzer yolla

$$\vec{\psi}_{\hat{C}}(s, v) = \vec{C} \wedge \vec{C}^* + v \vec{C}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{C} \wedge \frac{\vec{W} - \vec{N}}{\sqrt{2}} + v\vec{C} \\
&= \frac{\vec{N} + \vec{W}}{\sqrt{2}} + v\vec{C} \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right) + \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) + (v \sin s, 0, -v \cos s) \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + v \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s \right)
\end{aligned}$$



Şekil 4.11. $\vec{\psi}_{\vec{C}}(s, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + v \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - v \cos s \right)$ eğrisine ait regle yüzeyin

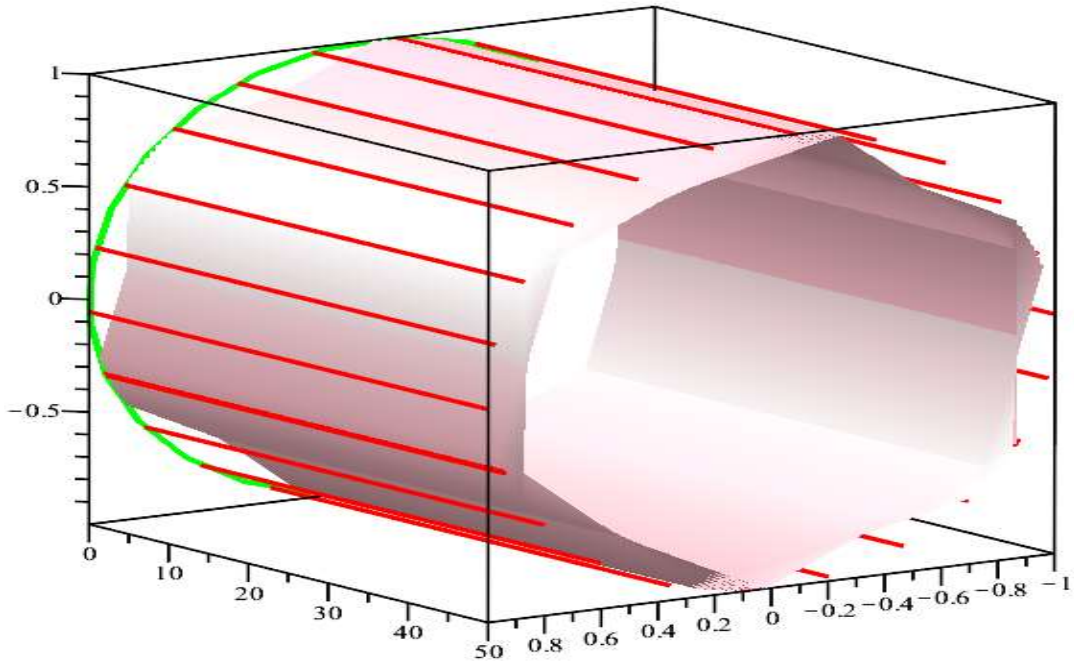
Maple çizimi

ve

$$\vec{\psi}_{\vec{W}}(s, v) = \vec{W} \wedge \vec{W}^* + v\vec{W}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{W} \wedge \left(\frac{\vec{N} - \vec{C}}{\sqrt{2}} \right) + v \vec{W} \\
&= \frac{\vec{N} + \vec{C}}{\sqrt{2}} + v \vec{W} \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right) + (0, v, 0) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.



Şekil 4.12. $\vec{\psi}_{\hat{W}}(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, v, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right)$ eğrisine ait regle yüzeyin

Maple çizimi

4.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada daha önce farklı uzaylarda eğriler ve yüzeyler üzerine yapılmış bazı çalışmalar incelenmiştir. Ayrıca dual uzay ile ilgili bazı temel kavram ve teoremlere yer verilmiştir. E-Study dönüşümü yardımıyla birim dual küre üzerinde seçilecek bir noktanın E^3 Öklid uzayında yönlü bir doğru belirtmesinden hareketle Abdal Baky dual Serret-Frenet çatısının elemanlarını kullanarak yeni bir dual eğri tanımlamıştır. Biz de bu çalışmadan hareketle N-Bishop çatısının elemanları yardımıyla yeni dual eğriler tanımladık ve bu dual eğrilerin E^3 Öklid uzayında oluşturduğu regle yüzeyler üzerinde Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplayıp, bu regle yüzeylere ait dual Steiner vektörü ve dual açısı bulunmuştur. Dual N-Bishop eğrilerini elde ettiğimiz bu çalışmamızda yeni bir eğri ve yüzey tanımlanarak literatüre katkıda bulunulmuştur. Öneri olarak, bu çalışmada bulunan yeni dual eğrilerle ilgili yeni karakterizasyonlar elde edilebilir. Ayrıca bu dual eğrilerin aynı zamanda E^3 Öklid uzayında karşılık geldiği regle yüzeylerin de farklı karakterizasyonları incelenebilir.

5.KAYNAKLAR

- [1] Casselman B, 2019. One of the Oldest Extant Diagrams from Euclid. The University of British Columbia.
- [2] Eves H, 1990. An Introduction to the History of Mathematics, Saunders.
- [3] Monge G, 1809. Application de L'analyse à la Géométrie, 4, Bernard.
- [4] Gauss CF, 1902. General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825. Princeton University Library.
- [5] Euclides D, 2007. Euclid's Elements – All Thirteen Books Complete in One Volume. Editted by Densmore, Translation by Heath TL. Green Lion Press.
- [6] Hacısalıhoğlu HH, 1983. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Yayınları. Malatya.
- [7] Hacısalıhoğlu HH, 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi FenEdb. Fakültesi. Ankara.
- [8] Blaschke W, 1923. Differential Geometrie II. Verlag von Julius springer. Berlin, Germany, 10–15.
- [9] O'Neill B, 1966. Elementary Differential Geometry. Academic Press. New York.
- [10] Frenet JF, 1847. Sur les Fonctions qui Servent à Déterminer L'attraction des Sphéroïdes Quelconques, Doctoral dissertation.
- [11] Serret JA, 1851. Mémoire Sur la Représentation Géométrique des Fonctions Elliptiques et Ultra-elliptiques.
- [12] Bishop RL, 1975. There is More than One Way to Frame a Curve. The American Mathematical Monthly, 82(3): 246–251.
- [13] Bukcu B, Karacan MK, 2008. Bishop Frame of the Spacelike Curve with a Spacelike Principal Normal In Minkowski 3-Space. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat, 57 (1):13–22.
- [14] Bukcu B, Karacan MK, 2009. The Slant Helices According to Bishop Frame. International Journal of Computational and Mathematical Sciences, 3(2):67–70.

- [15] Karacan MK, Bukcu B, 2009. The Bishop Darboux Rotation Axis of the Spacelike Curves with a Spacelike Principal Normal in Minkowski 3-Space. *Revista Notas de Matematica*, 279 (2): 29–35
- [16] Bukcu B, Karacan MK, 2010. Bishop Frame of the Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space. *Selcuk Journal of Applied Mathematics*, 11(1): 15–25.
- [17] Yilmaz S, Turgut MA, 2010. New Version of Bishop Frame and an Application to Spherical Images, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 371(2):764–776
- [18] Yilmaz S, 2015. A New Version of Bishop Frame and Application to Spherical Images of Spacelike Curve in Minkowski 3-space. *Prespacetime Journal*, 6(12).
- [19] Çetin M, Tuncer Y, Karacan MK, 2014. Smarandache Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space, *General Mathematics Notes*, 20 (2): 50–66.
- [20] Turhan E, Körpınar T, 2010. Biharmonic Slant Helices According to Bishop Frame in E^3 , *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 3: 64–68.
- [21] Scofield PD, 1995. Curves of Constant Precession. *The American Mathematical Monthly*, 102(6): 531–537.
- [22] Keskin O, Yayli Y, 2017. An Application of N-Bishop Frame to Spherical Images for Direction Curves, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14.
- [23] Ashbacher C, 1997. Smarandache Geometries, *Smarandache Notions Journal*, 8(1-3): 212–215.
- [24] Ali AT, 2010. Special Smarandache Curves in the Euclidean Space, *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 2: 30–36
- [25] Bektaş Ö, Yüce S, 2013. Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in E^3 , *Rom. J. Math. Comput. Sci.*, 3: 48–59.
- [26] Guggenheimer H, 1977. *Differential Geometry*, Corrected Reprint of the 1963 Edition.
- [27] Önder M, 2020. On Rectifying Ruled Surfaces. *Kuwait Journal of Science*, 47(4).
- [28] Bottema O, Roth B, 1979. *Theoretical Kinematics*. North-Holland Publishing Company. NewYork.

- [29] Dimentber FM, 1969. The Screw Calculus and its Application in Mechanics. Foreign Technology Division. Ohio.
- [30] Mc Carthy JM, Roth B, 1981. The Curvature Theory of Line Trajectories in Spatial Kinematics.
- [31] Saçlı GY, Yüce S, 2013. Darboux Çatılı Regle Yüzeylerin Karakteristik Özellikleri, Yüksek Lisans, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- [32] Clifford WK, 1873. Preliminary Sketch of Biquaternions. Proceedings of the London Mathematical Society, 4: 361–395
- [33] Ozkaldi S, Ilarslan K, Yayli Y, 2009. On Mannheim Partner Curve in Dual Space. Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, 17(2): 131–142.
- [34] Yücesan A, Ayyıldız N, Çöken AC, 2007. On Rectifying Dual Space Curves. Revista Matematica Complutense, 20(2): 497–506.
- [35] Önder M, Uğurlu HH, 2013. Normal and Spherical Curves in Dual Space D^3 . Mediterranean Journal of Mathematics, 10(3): 1527–1537.
- [36] Kahraman T, Önder M, Uğurlu H, 2013. Blaschke Approach to Dual Smarandache Curves, 5(3): 13–25.
- [37] Yayli Y, Saracoğlu S, 2011. Some Notes on Dual Spherical Curves. Journal of Informatics and Mathematical Sciences, 3(2): 177–189.
- [38] Abdel Baky RA, 2002. An Explicit Characterization of Dual Spherical Curve. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 51(2):1–9.
- [39] Study E, 1903. Die Geometrie der Dynamen. Verlag Teubner. Leipzig.
- [40] Kahraman T, Uğurlu HH, 2014. Dual Smarandache Curves and Smarandache Ruled Surfaces. Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 2(1).
- [41] Çalışkan A, Şenyurt S, 2020. Curves and Ruled Surfaces According to Alternative Frame in Dual Space. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 69(1): 684–698.

- [42] Samanci HK, Kocayığit H, 2019. N-Bishop Darboux Vector of the Spacelike Curve with Spacelike Binormal.
- [43] Abdel Baky RA, 1997. The Relation Among Darboux Vectors of Ruled Surfaces in a Line Congruences. Riv. Mat, Univ. Parma (5)6: 201–211.
- [44] Yayli Y, Saracoglu S, 2012. Ruled Surfaces and Dual Spherical Curves. Acta Universitatis Apulensis, 30, 337–354.
- [45] Hacısalıhoğlu HH, 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi. Ankara.
- [46] Şenyurt S, Çaliskan A, 2015. N^* C^* -Smarandache Curves of Mannheim Curve Couple According to Frenet Frame. International Journal of Mathematical Combinatorics, 1, 1–13.
- [47] Gürses NB, Bektaş O, Yüce S, 2016. Special Smarandache Curves in R^3 . Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 65(2): 143–160.
- [48] Atalay GS, Kasap E, 2017. Surfaces Family with Common Smarandache Geodesic Curve. Journal of Science and Arts, 17(4): 651–664.
- [49] Arslan Güven İ, 2010. Dual Küresel Eğriler ve Yüzeyler. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.