

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



DUAL UZAYDA RİBBON ÇATIYA GÖRE FOKAL EĞRİLER

Sezai TURĞUT

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞUSTOS, 2021

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

DUAL UZAYDA RİBBON ÇATIYA GÖRE FOKAL EĞRİLER

Tez Yazarı
Sezai TURĞUT

Danışman
Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU

AĞUSTOS, 2021
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	Dual Uzayda Ribbon Çatıya Göre Fokal Eğriler
Yazarı:	Sezai TURĞUT
İlk Teslim	07.07.2021
Savunma	13.08.2021

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

		<i>İmza</i>
Danışman:	Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Vedat ASİL Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Prof. Dr. Talat KÖRPİNAR Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza
Doç. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Dual Uzayda Ribbon Çatıya göre Fokal Eğriler” yüksek lisans tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

ELAZIĞ, 2021

Sezai TURĞUT



ÖNSÖZ

“Dual Uzayda Ribbon Çatıya göre Fokal Eğriler” adlı bu tez çalışması Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında “Yüksek Lisans Tezi” olarak hazırlanmıştır.

Konunun belirlenmesinde ve çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU’na en içten duygularıyla teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca desteğini hiç eksik etmeyen sevgili eşime ve bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme üzerimdeki emeklerinden dolayı saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Sezai TURĞUT

ELAZIĞ, 2021



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
SİMGELER	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR.....	2
3. DUAL FOKAL EĞRİ.....	8
3.1. Giriş	8
3.2. $\mathbb{D}^3$ 'te Dual Frenet Çatısına göre Dual Fokal Eğriler	8
4. DUAL UZAYDA RİBBON ÇATIYA GÖRE FOKAL EĞRİLER.....	10
4.1. Dual Uzayda Ribbon Çatı	10
4.2. Dual Uzayda Ribbon Çatıya göre Fokal Eğriler	11
5. SONUÇ	13
KAYNAKLAR.....	14
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Dual Uzayda Ribbon Çatıya Göre Fokal Eğriler

Sezai TURĞUT

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı
Ağustos 2021, Sayfa viii+14

Öklid uzayında eğriler teorisinde farklı çatılara göre birçok çalışma yapılmıştır. Birçok bilim adamı bu teoride Frenet çatı, Bishop çatı, Adapted çatı, Ribbon çatı gibi çatıları çalışmıştır. Bu çatılar eğriler ile ilgili karakterizasyonlarda bize yardımcı olur.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak çalışmanın temelini oluşturan dual uzay ile ilgili ayrıntılı bilgilere yer verilmiştir. Daha sonra oluşturulan bu içerik kullanılarak Dual Uzayda Fokal Eğriler tanımlandı. Son olarak da Dual Uzayda Ribbon Çatı ifade edilerek bu çatıya göre Dual Fokal Eğri ifade edildi.

Anahtar Kelimeler: Dual Sayılar, Dual Darboux Vektörü, Fokal Eğri, Ribbon Çatı.

ABSTRACT

Focal Curves According to Ribbon Roof in Dual Space

Sezai TURĞUT

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics
August 2021, Page viii+14

Many studies have been carried out according to different frameworks in the theory of curves in Euclidean space. Many scientists have studied roofs such as Frenet roof, Bishop roof, Adapted roof, Ribbon roof in this theory. These frameworks help us with characterizations about curves.

In this thesis, first of all detailed information about dual the Dual space, which forms the basis of the study, is given. Using this created content later, Focal Curves in Dual Space were defined. Finally, by expressing the Ribbon roof in Dual Space, the dual Focal Curves was expresswd according to this framework.

Keywords: Dual Numbers, Dual Darboux Vector, Focal Curve, Ribbon Roof

SİMGELER

$\mathbb{D}$	: Dual sayılar halkası
$\mathbb{D}^3$	: 3- Boyutlu dual uzayı
$\mathbb{R}^3$	: 3- boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{E}$	: Öklit uzayı
ε	: Karesi ‘‘0’’ olan dual sayı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
Λ	: Dış çarpım
$\langle, \rangle$	: İç çarpım
τ	: Burulma
κ	: Eğrilik
$T(s)$	: Teğet vektör alanı
$N(s)$	: Normal vektör alanı
$B(s)$	: Binormal vektör alanı
$\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$	: Dual frenet çatı
$\{\hat{e}, \hat{f}, \hat{g}\}$	: Ortonormal üçyüzlü
$\hat{C}_{\hat{\gamma}}^R$	: Ribbon çatıya göre focal eğri
C_{γ}	: Fokal eğri
(c_1, c_2)	: Fokal eğrilikler
a_s	: Oskulatör çemberin merkezi
r	: Oskulatör çemberin yarıçapı
$D(s)$	: Darboux vektörü

1. GİRİŞ

Geometri, özellikle nesnelerin şeklini inceleyen matematiğin bir alt bilim dalı olarak ele alınır. Bu şekil ise genellikle nesnenin üzerindeki noktalar arasındaki mesafeye bağlı olarak tanımlanır. Geometriciler tarafından zaman içerisinde en fazla çalışılan ve rağbet gören şekillerin bir çifti eğriler ve yüzeyler olmuştur. Eğrilerin ve yüzeylerin diferansiyellenebilir olması ise bu şekillere ait birçok temel kavramın tanımlanması ve anlamlandırılması bakımından çok önemlidir. Eğriler ve yüzeyler üzerinde seçilen herhangi bir noktanın komşuluğundaki yerel özellikler klasik diferansiyel geometri yardımıyla ele alınırken; bu özelliklerin genel manada incelendiği diferansiyel geometrinin yanı sıra topoloji ve vektör analizinin de yoğun olarak kullanıldığı disiplin ise global diferansiyel geometri olarak adlandırılmıştır. Örneğin, bir eğrinin eğriliği yerel bir özellik olarak sınıflandırılırken; bir yüzeyin üzerinde bulunan deliklerin sayısı veya sınırları global özellikler olarak düşünülür.

Dual sayılar 1850’li yıllarda bilim adamı W. Clifford tarafından tanımlanmış ve geliştirilmiştir [1]. Dual sayılara ait temel kavramlara Hacısalihoğlu’nun “Hareket Teorisi ve Kuaterniyonlar Teorisi” ve Müller’in “Kinematik Dersleri” adlı kitaplarında yer verilmiştir [2,3]. 1903’de Eduard Study kendi adını verdiği E.Study dönüşümünde birim dual küre üzerindeki her noktanın $\mathbb{R}^3$ ’deki yönlü doğrulara birebir karşılık geldiğini kanıtlamıştır [4]. Bu sayede $\mathbb{R}^3$ ’deki yönlü doğrular teorisinin dual sayılar yardımıyla incelenmesine imkan verilmiştir.

Ribbon teorisi DNA ve protein çalışmalarında uygulanabilir. G.S. Chirikjian DNA düğümünü bu teori yardımıyla incelemiştir [5]. Bohr ve Markvorsen bazı özel eğrileri ribbon çatıya göre vermişti [6].

Fokal eğri, eğrinin her noktasındaki oskülatör kürelerin merkezlerinin geometrik yeri olarak tanımlanmıştır [7]. Ayrıca, Fokal eğriler eğrinin zarf eğrisi olan evolüt eğrisi olarak da düşünülebilir. Bu sayede, Fokal eğrilerden yararlanarak eğrinin birçok özelliğini incelemek mümkündür. Örneğin, Fokal eğrinin hız vektörünün kritik noktaları bize eğrinin eksenleri kestiği noktayı, bir başka deyişle, köşe noktalarını verir. Fizikte optik geometri alanında da Fokal eğriler önemlidir. Bunu incelemelerinin en önemli sebebi, canlıların göz yapısında da bir odak noktasının bulunmasıdır. Dolayısıyla, en iyi görüntüyü, alabilmek, kırılan ışık ışınların bir noktada toplamakla mümkündür. Bu nokta da odak (Fokal) noktası olacağından, bu noktanın eğriden veya yüzeyden ne kadar uzaklıkta olduğunu bilmek önemlidir. Bu konuda Vergas, Arslan, Körpınar gibi bilim insanları çeşitli çalışmalar yapmıştır [7,8,9,10,11]

Bu tez çalışmasında eğriler vasıtasıyla yüzeylerin özel bir sınıfı olarak inşa edilen dual sayılar detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Ve Dual sayılar yardımıyla Dual Frenet Çatıya göre Dual Fokal eğriler oluşturulmuştur. Daha sonra dual uzayda Ribbon çatıya göre Fokal eğriler detaylı bir şekilde açıklanmıştır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1: $\forall a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi üzerinde $\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*)$ sıralı ikililerin kümesi $\mathbb{D}$ ile gösterilsin. $\mathbb{D} = \{(a, a^*) : a, a^* \in \mathbb{R}\}$ kümesi üzerinde iki iç işlem aşağıdaki gibi tanımlanır [2]:

Toplama $\oplus$: $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ve $\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*), \hat{\mathcal{B}} = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere,

$$\hat{\mathcal{A}} \oplus \hat{\mathcal{B}} = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$$

$\mathbb{D}$ deki toplama olarak adlandırılır.

Çarpma $\odot$: $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ iç işlemi $\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*), \hat{\mathcal{B}} = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere,

$$\hat{\mathcal{A}} \odot \hat{\mathcal{B}} = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab, a^*b + b^*a)$$

$\mathbb{D}'$ deki çarpma olarak adlandırılır.

Tanım 2.2 (Eşitlik): $\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*), \hat{\mathcal{B}} = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{B}}$ olması için $\Leftrightarrow$

$a = b, a^* = b^*$ olmasıdır [2].

Tanım 2.3: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere; $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise $\mathbb{D}$ kümesine dual sayılar sistemi denir. ve $\forall \hat{\mathcal{A}} = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ elemanına bir dual sayı denir [2].

Teorem 2.4: $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır [2].

Not 2.4: $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ halkasını $\mathbb{D}$ ile gösterelim.

Tanım 2.5 (Sıfır eleman): $\hat{\mathcal{A}} \oplus \hat{\mathcal{X}} = \hat{\mathcal{A}}$ denkleminin çözümü olan $\hat{\mathcal{X}} = (0, 0)$ dual sayısına $\mathbb{D}$ nin sıfırı denir ve $\hat{0} = (0, 0)$ ile gösterilir [2].

Teorem 2.6: $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir [2].

Önerme 2.7 (Bölme): $\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*), \hat{\mathcal{B}} = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ ise $\hat{\mathcal{A}} \odot \hat{\mathcal{X}} = \hat{\mathcal{B}}$ denkleminin $\hat{\mathcal{X}} = (x, x^*)$ çözümü aşağıdaki durumlarda mevcuttur [2].

1) $a \neq 0$ ise $\hat{\mathcal{X}} = \left(\frac{b}{a}, \frac{b^*a - a^*b}{a^2}\right)$ dır.

2) $a = 0, b = 0, a^* \neq 0$ ise $\hat{\mathcal{X}} = \left(\frac{b^*}{a^*}, x^*\right)$ dır.

3) $a = 0, a^* = 0, b = 0, b^* = 0$ ise her $\hat{\mathcal{X}} = (x, x^*) \in \mathbb{D}$ çözümdür.

Teorem 2.8: $\mathbb{D}$ halkası, $\mathbb{R}$ kümesine izomorf bir alt kümeyi alt cisim olarak kapsar [2].

Sonuç 2.9: Teorem 2.8 in bir sonucu olarak $(a, 0)$ dual sayısı, izomorf olduğu 'a' ile gösterilecektir. Yani $(a, 0) = a$ alınacaktır [2].

Tanım 2.10: Bir $\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısında a reel sayısına $\hat{\mathcal{A}}$ 'nın reel kısmı " a^* " reel sayısına $\hat{\mathcal{A}}$ 'nın dual kısmı denir ve $Re \hat{\mathcal{A}} = a$ ve $Du \hat{\mathcal{A}} = a^*$ şeklinde yazılır [2].

Tanım 2.11: $(1, 0)$ dual sayısına $\mathbb{D}$ deki çarpma işleminin birim elemanı veya $\mathbb{D}$ deki reel birim denir. $(1, 0)$ dual sayısı kısaca $\mathcal{E}$ ile gösterilmektedir. O halde $\mathcal{E} = (0, 1)$ alınacak ve dual birim olarak adlandırılacaktır [2].

Sonuç 2.12: $\odot$ işleminin tanımı gereğince $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E} \cdot \mathcal{E} = (0,1)(0,1) = (0,0)$ dır. Yani $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E} \cdot \mathcal{E} = 0$ olduğu görülür [2].

Tanım 2.13: $(0,0)$ dual sayısına $\mathbb{D}$ nin toplama işlemine göre birim elemanı (Abel grubunun birim elemanı) denir ve $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ izomorfizminde karşılık geldiği "0" reel sayısı ile gösterilir [2].

Teorem 2.14: $\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı $\hat{\mathcal{A}} = a + \mathcal{E}a^*$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Yani $\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*) = a + \mathcal{E}a^*$ dır [2].

Sonuç 2.15: $\mathbb{R}$ deki $(+)$ ve $(.)$ işlemlerine ait kurallar $\mathbb{D}$ de aynen kullanılabilir. Bundan sonra $\odot$ ve $\oplus$ sembolleri yerine $(+)$ ve $(.)$ işaretlerini kullanacağız [2].

Önerme 2.16: $\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}$ ve $\hat{\mathcal{A}} \cdot \hat{\mathcal{B}} = 0$ ise $\hat{\mathcal{A}}$ ve $\hat{\mathcal{B}}$ den herhangi birinin "0" olması gerekmez [2].

Önerme 2.17: $\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*) = a + \mathcal{E}a^* \in \mathbb{D}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ ise λ ile $\hat{\mathcal{A}}$ nın çarpımı $\lambda \cdot \hat{\mathcal{A}} = (\lambda a, \lambda a^*) = \lambda a + \mathcal{E}\lambda a^*$ dır [2].

Tanım 2.18: λ reel sayısı ile $\hat{\mathcal{A}}$ dual sayısının çarpımı $\mathbb{R} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ şeklinde bir dış işlem olup bir dual sayının bir reel skalar ile çarpımı adını alır [2].

Önerme 2.19: $\hat{\mathcal{A}} = a + \mathcal{E}a^*$ ve $\hat{\mathcal{B}} = b + \mathcal{E}b^*$ iki dual sayı olsun. Bu taktirde $\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}} = ab + \mathcal{E}(ab^* + a^*b)$ dir [2].

Önerme 2.20: $\hat{\mathcal{A}} = a + \mathcal{E}a^*, a \neq 0$ ve $\hat{\mathcal{B}} = b + \mathcal{E}b^*$ iki dual sayı olsun. Bu taktirde

$$\frac{\hat{\mathcal{B}}}{\hat{\mathcal{A}}} = \frac{b + \mathcal{E}b^*}{a + \mathcal{E}a^*} = \frac{(b + \mathcal{E}b^*)(a - \mathcal{E}a^*)}{(a + \mathcal{E}a^*)(a - \mathcal{E}a^*)} = \frac{ba + \mathcal{E}(b^*a - ba^*) - \mathcal{E}^2a^*b^*}{a^2 + \mathcal{E}(aa^* - aa^*) - \mathcal{E}^2a^{*2}} \text{ ve } \mathcal{E}^2 = 0$$

olduğundan dolayı;

$$\frac{\hat{\mathcal{B}}}{\hat{\mathcal{A}}} = \frac{ba + \mathcal{E}(b^*a - ba^*)}{a^2} = \frac{b}{a} + \mathcal{E} \frac{(b^*a - ba^*)}{a^2}$$

bulunur [2].

Önerme 2.21: $\hat{\mathcal{A}} = a + \mathcal{E}a^*, a \neq 0$ bir dual sayı olsun. O halde;

$$\frac{1}{\hat{\mathcal{A}}} = \frac{1}{a} - \mathcal{E} \frac{a^*}{a^2} \text{ dir [2].}$$

Tanım 2.22: K birimli ve değişmeli bir halka olsun. $\varphi: K \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $\varphi(k, x) = kx$ biçiminde tanımlanan φ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa $\mathcal{X}$, K halkasının üzerinde bir modüldür denir.

- i) $k(x + y) = kx + ky, \forall x, y \in \mathcal{X}, k \in K$
- ii) $(k_1 + k_2)x = k_1x + k_2x, \forall x \in \mathcal{X}, k_1, k_2 \in K$
- iii) $(k_1 \cdot k_2)x = k_1(k_2x), \forall x \in \mathcal{X}, k_1, k_2 \in K$
- iv) $1 \cdot x = x, x \in \mathcal{X}$

Eğer $K = \mathbb{D}$ ise $\mathbb{D}$ bir modül olarak adlandırılır [2].

Teorem 2.23: $(\mathbb{D}^3, +)$ bir abel gruptur [2].

Teorem 2.24: $(\mathbb{D}^3, +)$ sistemi $\mathbb{D}$ üzerinde bir modüldür [2].

Tanım 2.25: $\mathbb{D}$ - Modül'ün elemanları olan sıralı dual üçlülere dual vektörler denir [2].

Teorem 2.26: $\vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\mathbb{D}$ - modül'de herbir $\vec{\mathcal{A}}$ dual vektör

$$\vec{\mathcal{A}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \quad , \quad [\varepsilon = (0,1) \in \mathbb{D}]$$

Şeklinde yazılabilir [2].

İspat: $\vec{\mathcal{A}} = (\hat{\mathcal{A}}_1, \hat{\mathcal{A}}_2, \hat{\mathcal{A}}_3)$, $\hat{\mathcal{A}}_i = a_i + \varepsilon a_i^*$, $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere

$$\vec{\mathcal{A}} = (a_1 + \varepsilon a_1^* \quad , \quad a_2 + \varepsilon a_2^* \quad , \quad a_3 + \varepsilon a_3^*)$$

yada;

$$\vec{\mathcal{A}} = (a_1, a_2, a_3) + \varepsilon (a_1^*, a_2^*, a_3^*)$$

şeklinde yazılır. $a_i, a_i^* \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$ olduğundan $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{a}^* = (a_1^*, a_2^*, a_3^*)$ alınır;

$$\vec{\mathcal{A}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$$

olur.

Tanım 2.27: ($\mathbb{D}$ - modül üzerinde iç çarpım)

$\vec{\mathcal{A}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$, $\vec{\mathcal{B}} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in \mathbb{D}^3$ de iki vektör olsun.

$$f: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}$$

dönüşümü;

$$f(\vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{B}}) = \langle \vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{B}} \rangle = \langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon [\langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle]$$

olarak tanımlansın. Eğer bu dönüşüm aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa buna $\mathbb{D}^3$ de dual iç çarpım denir [2].

i. Simetri Özelliği

$$\langle \vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{B}} \rangle = \langle \vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{A}} \rangle$$

ii. Bilineerlik özelliği;

$\hat{\alpha} = \alpha + \varepsilon \alpha^*, \hat{\beta} = \beta + \varepsilon \beta^* \in \mathbb{D}$ ve $\vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}} \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\langle \hat{\alpha} \vec{\mathcal{A}} + \hat{\beta} \vec{\mathcal{C}}, \vec{\mathcal{B}} \rangle = \hat{\alpha} \langle \vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{B}} \rangle + \hat{\beta} \langle \vec{\mathcal{C}}, \vec{\mathcal{B}} \rangle$$

$$\langle \vec{\mathcal{A}}, \hat{\alpha} \vec{\mathcal{B}} + \hat{\beta} \vec{\mathcal{C}} \rangle = \hat{\alpha} \langle \vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{B}} \rangle + \hat{\beta} \langle \vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{C}} \rangle$$

iii. Pozitif Tanımlılık;

$$\langle \vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{A}} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{A}} = 0$$

ve $\vec{\mathcal{A}} \neq 0$ ise $\langle \vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{A}} \rangle > 0$ dır.

Bu aksiyomlar reel vektör uzayındaki iç çarpım aksiyomları ile aynıdır [2].

Tanım 2.28 (Dual Vektörlerin Normlanması): Bir $\vec{\mathcal{A}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ dual vektörün normu diye;

$$\|\vec{\mathcal{A}}\| = \langle \vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{A}} \rangle^{1/2} = \left(\|\vec{a}\|^2 + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \right)^{1/2}, \quad \vec{a} \neq \vec{0}$$

Dual sayısına denir. Bundan sonra bu dual sayı;

$$a = \|\vec{a}\| \text{ ve } a^* = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|}$$

olmak üzere;

$$\|\vec{\mathcal{A}}\| = a + \varepsilon a^*$$

olarak yazılacaktır [17].

Tanım 2.29: Normu reel birime karşılık gelen dual vektöre birim dual vektör denir [2].

Teorem 2.30: $\vec{\mathcal{A}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ birim dual vektör ise;

$$\|\vec{a}\| = 1, \quad \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$$

dır [2].

Tanım 2.31 (Dual Küre): $\{\vec{\mathcal{X}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*, \|\vec{\mathcal{X}}\| = (1,0); \vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{R}^3\}$ kümesine $\mathbb{D}$ -modül de birim dual küre denir [3].

Teorem 2.32: $\vec{\mathcal{A}} \neq (\vec{0}, \vec{a}) \in \mathbb{D}$ -modül olmak üzere $\mathbb{D}$ -modül'de denklemi;

$$\|\vec{\mathcal{A}}\| = (1,0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları, $\mathbb{R}^3$ 'deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir [3].

Teorem 2.33: O başlangıç noktası yerine başka bir P noktası seçildiğinde $\mathbb{R}^3$ 'deki yönlü doğruyu belirten birim dual vektör;

$$\vec{\mathcal{A}} = \vec{a} + \varepsilon (\vec{p} \wedge \vec{a} + \vec{a}^*)$$

dır [2].

Tanım 2.34 (Dual Açı): $\vec{\mathcal{A}}$ ve $\vec{\mathcal{B}}$ iki birim dual vektör olsun. Eğer;

$$\langle \vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{B}} \rangle = \cos \hat{\theta} = \cos(\theta + \varepsilon \theta^*)$$

ise $\hat{\theta}$, $\vec{\mathcal{A}}$ ve $\vec{\mathcal{B}}$ vektörleri arasındaki Dual açı denir. Burada θ ve θ^* sırasıyla, bu vektörlere karşılık gelen yönlü doğru parçaları arasındaki açı ve en kısa uzaklıktır [17].

Tanım 2.35 ($\mathbb{D}$ -Modül Üzerinde Dış Çarpım): $\vec{\mathcal{A}} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{\mathcal{B}} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in \mathbb{D}^3$ olmak üzere bu Dual vektörlerin dış çarpımı;

$$\Lambda: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}^3$$

biçiminde bir işlemdir ve;

$$\vec{\mathcal{A}} \wedge \vec{\mathcal{B}} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon (\vec{a} \wedge \vec{b}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{b})$$

olarak tanımlanır [17].

Tanım 2.36:

$$\hat{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}^3$$

$$s \rightarrow \hat{\gamma}(s) = \gamma(s) + \varepsilon \gamma^*(s)$$

$\mathbb{D}^3$ Dual uzayda diferansiyellenebilir birim hızlı Dual eğri denir. $\mathbb{D}^3$ dual uzayında $\hat{\gamma}(s)$ Dual uzay eğrisi boyunca hareket eden Dual Frenet Çatısı $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ ile belirtelim. Sonra Dual ana normal ve Dual binormal vektör alanları, sırasıyla $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$ ye Dual teğettir. O halde Dual eğri için frenet formülleri şu şekilde verilir [18],

$$\begin{aligned}\hat{T}' &= \kappa N + \varepsilon(\kappa^* N + \kappa N^*) \\ \hat{N}' &= -\kappa T + \tau B + \varepsilon(-\kappa^* T - \kappa T^* + \tau^* B + \tau B^*) \\ \hat{B}' &= -\tau N - \varepsilon(\tau^* N + \tau N^*)\end{aligned}$$

Tanım 2.37 (Dual Darboux vektörü): $\hat{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}^3$ bir Dual eğri ve $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ de $\hat{\gamma}$ nın Dual Frenet Çatısı olsun. $\hat{\kappa}$ ve $\hat{\tau}$ bu eğrinin Dual eğrilik ve torsiyonu olmak üzere Dual Darboux vektörü $\hat{W}$ ile gösterilir ve;

$$\hat{W} = \hat{\tau} \hat{T} + \hat{\kappa} \hat{B}$$

şeklinde tanımlanır [12,19].

Tanım 2.38 (Fokal Eğri): γ : diferansiyellenebilir bir eğri ve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim eğri olsun. $t = \gamma'$ birim teğet, $n = \frac{t'}{\|t'\|}$ normali ve $b = t \times n$ binormali olmak üzere bir Fokal eğri $c_\gamma = \gamma + c_1 n + c_2 b$ olarak tanımlanır. Burada c_1, c_2 Fokal eğrilerdir [7].

Teorem 2.39: $c_\gamma = \gamma_s + c_0 t + c_1 n + c_2 b$, γ' nın bir Fokal eğrisi olmak üzere;

$$c_0 = 0 \quad , \quad c_1 = \frac{1}{\kappa} \quad , \quad c_2 = \frac{1}{\tau} \left(-\frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)$$

bulunur [7].

Tanım 2.40 (Ribbon Çatı): Ribbon ve merkez eğrisi $w(s)$ ve $\theta(s)$ gibi iki sürekli fonksiyon tarafından oluşturulur. Burada $s \in [0, L]$ aralığında tanımlıdır ve L Ribbon'un iç uzunluğudur. Bu aralıkta her s için $\theta(s) \in [0, \pi]$ olduğunu varsayalım. Böylece s için $\sin(\theta(s)) > 0$ dır. Ribbona teğet bir alan olan ve Ribbon merkez eğrisini $\theta(s)$ açısı ile tanımlayacağız. Bu yapıda en önemli olan $A(s)$ birim vektör alanıdır ve bu vektör alanı $\theta(s)$ açısına bağlı olarak tanımlanır. Böylece $A(s)$ ve $\theta(s)$ birlikte

$$D(s) = A(s)W(s)$$

Darboux Vektörünü oluşturur. Kabul edelim ki $\{e(s), f(s), g(s)\}$ bir ortonormal vektör sistemi olsun. Bu sisteminin diferensiyeli aşağıdaki gibidir [6,14].

$$\begin{aligned}e(s)' &= W(s)A(s) \times e(s) \\ f(s)' &= W(s)A(s) \times f(s) \\ g(s)' &= W(s)A(s) \times g(s)\end{aligned}$$

Burada $A(s)$, $e(s)$ ve $g(s)$ cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

$$A(s) = \cos(\theta(s))e(s) + \sin(\theta(s))g(s)$$

Tanım (2.10) ve (2.11) den

$$e(s)' = W(s) \sin(\theta(s))f(s)$$

$$f(s)' = -W(s) \sin(\theta(s))e(s) + W(s) \cos(\theta(s))g(s)$$

$$g(s)' = -W(s) \cos(\theta(s))f(s)$$

yazılır. Burada s yay parametresidir.

$$R(s)' = R(s)E(s)$$

Burada $R(s)$ ortogonal matristir.

$$E(s) = \begin{bmatrix} 0 & -W(s) \sin(\theta(s)) & 0 \\ W(s) \sin(\theta(s)) & 0 & -W(s) \cos(\theta(s)) \\ 0 & W(s) \cos(\theta(s)) & 0 \end{bmatrix}$$

Ribbon merkez eğrisinin İki temel eğrilik $\kappa_1(s), \kappa_2(s)$ ve iki temel doğrultmanı t_1, t_2 olmak üzere;

$$\kappa_1(s) = \frac{-W(s)}{\sin(\theta(s))}, \quad \kappa_2(s) = 0$$

$$t_1' = \sin(\theta(s))e(s) - \cos(\theta(s))g(s), \quad t_2(s) = A(s)$$

Euler teoremine göre merkez çizgisinin normal eğriliği;

$$\kappa_n(s) = \kappa_1(s) \sin^2(\theta(s)) + \kappa_2(s) \cos^2(\theta(s)) = -W(s) \sin(\theta(s))$$

Olur. Merkez eğrisinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$i) \kappa(s) = \|e(s)'\| = |W(s)| \sin(\theta(s))$$

$$ii) \tau = \langle (e(s) \times e(s)'), e''(s) \rangle = W(s) \cos(\theta(s))$$

3. DUAL FOKAL EĞRİ

3.1. Giriş

Dual sayıların uzayda uygulama çalışması Kotelnikov tarafından formüle edilmiştir [20]. Küresel nokta geometrisi için matematiksel ifadenin, Dual sayı uzantısı ile uzamsal yüzey geometrisine tam olarak genelleştirilmesini sağlar, yani, tüm normal miktarların karşılık gelen Dual sayılarla değiştirilmesidir [13,15,16].

Bu bölümde, $\mathbb{D}^3$ üç boyutlu uzayda Dual Fokal Eğrilerini inceleyeceğiz. Dual Fokal Eğrilerini Dual Fokal eğrilikleri açısından karakterize edeceğiz..

3.2. $\mathbb{D}^3$ 'te Dual Frenet Çatısına Göre Dual Fokal Eğriler

Dual Fokal Eğrisini $\hat{C}_{\hat{\gamma}}$ ile ifade ederek aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\hat{C}_{\hat{\gamma}} = (\hat{\gamma} + \hat{c}_1 \hat{N} + \hat{c}_2 \hat{B})(s) \quad (3.2.1)$$

Burada $\hat{c}_1, \hat{c}_2$ katsayıları, sırasıyla $\hat{\gamma}$ nın birinci ve ikinci Dual Fokal eğriliği olarak adlandırılır. (3.2.1) ifadesinin reel ve dual kısmı aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\left. \begin{aligned} C_{\gamma} &= (\gamma + c_1 N + c_2 B)(s) \\ C_{\gamma^*}^* &= (\gamma^* + c_1^* N^* + c_1^{**} N + c_2^* B^* + c_2^{**} B)(s) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.2)$$

Teorem 3.3: $\hat{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{D}^3$ in birim hızlı dual eğri ve $\hat{C}_{\hat{\gamma}}$ da $\mathbb{D}^3$ te $\hat{\gamma}$ nın Dual Fokal Eğrisi olsun. O halde;

$$C_{\gamma} = \gamma + \frac{1}{k} N - \frac{k'}{k^2 \tau} B \quad (3.2.3)$$

$$C_{\gamma^*}^* = \gamma^* + \frac{1}{k} N^* - \frac{k^*}{k^2} N - \frac{k'}{k^2 \tau} B^* + \left(\frac{-(k^*)' k^2 + 2k k^* k'}{k^4 \tau} \right) B \quad (3.2.4)$$

İspat: $\hat{\gamma}$ birim hızlı dual eğrisinin dual fokal eğrisi $\hat{C}_{\hat{\gamma}}$ olsun. (3.2.1) ifadesinden;

$$\hat{C}_{\hat{\gamma}} = (1 - \hat{k} \hat{c}_1) \hat{T} + (\hat{c}_1' - \hat{\tau} \hat{c}_2) \hat{N} + (\hat{\tau} \hat{c}_1 + \hat{c}_2') \hat{B} \quad (3.2.5)$$

yazılır. (3.2.5) ifadesinden,

$$1 - \hat{k} \hat{c}_1 = 0 \quad (3.2.6)$$

$$\hat{c}_1' - \hat{\tau} \hat{c}_2 = 0 \quad (3.2.7)$$

elde edilir. (3.2.6) ve (3.2.7) denklemlerinin reel ve dual kısımları ayrılırsa

$$\begin{aligned}
kc_1 &= 1 \\
kc_1^* + k^*c_1 &= 0 \\
c_1' - \tau c_2 &= 0 \\
(c_1^*)' - \tau c_2^* \tau^* c_2 &= 0
\end{aligned}$$

yazılır. O zaman;

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{k} \\
c_1^* &= -\frac{k^*}{k^2} \\
c_2 &= -\frac{k'}{k^2\tau} \\
c_2^* &= \frac{-(k^*)'k^2 + 2kk^*k'}{k^4\tau} + \frac{\tau^*k'}{k^2\tau^2}
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki sistemden (3.2.3) ve (3.2.4) elde edilir ve buda ispatı tamamlar.

Sonuç 3.4: $\hat{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{D}^3$ birim hız dual eğrisinin $\mathbb{D}^3$ 'teki Dual Fokal Eğrisi $\hat{C}_{\hat{\gamma}}$ olsun. $\hat{C}_{\hat{\gamma}}$ Dual Fokal Eğrisinin eğriliklerinin reel ve dual kısmı;

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{k} \\
c_1^* &= -\frac{k^*}{k^2} \\
c_2 &= -\frac{k'}{k^2\tau} \\
c_2^* &= \frac{-(k^*)'k^2 + 2kk^*k'}{k^4\tau} + \frac{\tau^*k'}{k^2\tau^2}
\end{aligned}$$

dır. Teorem 3.3 ve sonuç 3.4 'e göre, aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Sonuç 3.5: $\hat{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{D}^3$ birim hızlı dual eğri ve $\hat{C}_{\hat{\gamma}}$ da onun $\mathbb{D}^3$ 'teki Dual Fokal Eğrisi olsun. Eğer $\hat{\tau}$ ve $\hat{k}$ sabitse, o zaman $\hat{C}_{\hat{\gamma}}$ nın Fokal Eğriliklerinin reel ve dual kısmı aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}
c_1 &= \text{sabit sayı} \neq 0 \\
c_1^* &= \text{sabit sayı} \neq 0 \\
c_1^* &= 0 \\
c_2 &= 0 \\
c_2^* &= 0
\end{aligned}$$

4. DUAL UZAYDA RİBBON ÇATIYA GÖRE FOKAL EĞRİLER

4.1. Dual Uzayda Ribbon Çatı

$\hat{\gamma}$ bir dual eğri ve bu eğrinin Dual Frenet Vektörleri $\{\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}\}$ olsun. Bu eğrinin eğrilik ve burulması sırası ile $\hat{\kappa}$ ve $\hat{\tau}$ olmak üzere dual Darboux Vektörü;

$$\hat{W} = \hat{\tau}\hat{t} + \hat{\kappa}\hat{b}$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre $\hat{\gamma}$ dual eğrisinin Ribbon Çatısı;

$$\hat{e}' = \hat{W} \times \hat{e}$$

$$\hat{f}' = \hat{W} \times \hat{f} \quad (4.1.1)$$

$$\hat{g}' = \hat{W} \times \hat{g}$$

ifade edilir. Burada $\{\hat{e}, \hat{f}, \hat{g}\}$ ortonormal bir üç yüzlüdür. $\hat{A}(s)$ birim vektörü $\hat{W}(s)$ Darboux Vektörü yönünde birim vektör olmak üzere $\hat{W}(s) = \hat{w}(s) \hat{A}(s)$ dir. (4.1.1) ifadelerinden;

$$\hat{e}'(s) = \hat{w}(s) \hat{A}(s) \times \hat{e}$$

$$\hat{f}'(s) = \hat{w}(s) \hat{A}(s) \times \hat{f} \quad (4.1.2)$$

$$\hat{g}'(s) = \hat{w}(s) \hat{A}(s) \times \hat{g}$$

yazılır. $\hat{A}(s)$ birim vektör alanı, $\hat{e}(s)$ ve $\hat{g}(s)$ cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\hat{A}(s) = \cos(\hat{\theta}(s))\hat{e}(s) + \sin(\hat{\theta}(s))\hat{g}(s) \quad (4.1.3)$$

(4.1.2) ve (4.1.3) ifadelerinden;

$$\hat{e}'(s) = \hat{w}(s) \sin(\hat{\theta}(s)) \hat{f}(s)$$

$$\hat{f}'(s) = -\hat{w}(s) \sin(\hat{\theta}(s)) \hat{e}(s) + \hat{w}(s) \cos(\hat{\theta}(s)) \hat{g}(s) \quad (4.1.4)$$

$$\hat{g}'(s) = -\hat{w}(s) \cos(\hat{\theta}(s)) \hat{f}(s)$$

sistemi elde edilir. (4.1.4) sistemi matris formunda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{bmatrix} \hat{e}'(s) \\ \hat{f}'(s) \\ \hat{g}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{w}(s) \sin(\hat{\theta}(s)) & 0 \\ \hat{w}(s) \sin(\hat{\theta}(s)) & 0 & -\hat{w}(s) \cos(\hat{\theta}(s)) \\ 0 & \hat{w}(s) \cos(\hat{\theta}(s)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}(s) \\ \hat{f}(s) \\ \hat{g}(s) \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

4.2. Dual Uzayda Ribbon Çatıya göre Fokal Eğriler

Tanım 4.1: Dual uzayda $\hat{\gamma}$ bir dual eğri ve bu eğrinin ribbon çatısı $\{\hat{e}, \hat{f}, \hat{g}\}$ olsun. $\hat{\gamma}$ eğrisinin ribbon çatıya göre fokal eğrisi $\hat{C}_{\hat{\gamma}}^R$ ile gösterilir ve

$$\hat{C}_{\hat{\gamma}}^R(s) = (\hat{\gamma} + \hat{c}_1^R \hat{f} + \hat{c}_2^R \hat{g})(s) \quad (4.2.1)$$

olarak tanımlanır. Burada $\hat{c}_1^R, \hat{c}_2^R$ katsayıları sırasıyla $\hat{\gamma}$ eğrisinin birinci ve ikinci Fokal eğriliklerin fonksiyonlarıdır.

Teorem 4.2: $\hat{\gamma}$, dual uzayda bir dual eğri ve $\hat{C}_{\hat{\gamma}}^R = \hat{\gamma} + \hat{c}_0^R \hat{e} + \hat{c}_1^R \hat{f} + \hat{c}_2^R \hat{g}$ de bu eğrinin Dual Ribbon Çatıya göre Dual Fokal Eğrisi olmak üzere $\hat{c}_i^R$ ($i=0,1,2$) katsayıları aşağıdaki eşitlikleri sağlar;

$$\begin{aligned} \hat{c}_0^R &= 0 + 0\varepsilon \\ \hat{c}_1^R &= \frac{1}{\hat{w}(s) \sin(\hat{\theta}(s))} = \frac{1}{w \sin \theta} - \varepsilon \left(\frac{w \theta^* \cos \theta + w^* \sin \theta}{w^2 s, n^2 \theta} \right) \\ \hat{c}_2^R &= \frac{1}{\hat{w}^2(s) \sin(\hat{\theta}(s)) \cos(\hat{\theta}(s))} = \frac{2}{w \sin 2\theta} - \frac{4\varepsilon \theta^*}{w \sin^2 2\theta} (\cos 2\theta + w^* \sin 2\theta) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

İspat: $\hat{\gamma}$ eğrisinin Fokal Eğrisi dual uzayda oskülatör kürenin merkezinde tanımlıdır. O zaman $\hat{a}(s)$ ve $\hat{r}$ sırasıyla oskülatör kürenin merkezi ve yarıçapı olmak üzere;

$$\langle \hat{a}(s) - \hat{\gamma}(s), \hat{a}(s) - \hat{\gamma}(s) \rangle = r^2 \quad (4.2.3)$$

dir. Eğer (4.2.3) eşitliğinin s' ye göre türevi alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$\langle \hat{e}, \hat{a}(s) - \hat{\gamma}(s) \rangle = 0 \quad (4.2.3)$$

Diğer yandan;

$$\hat{a}(s) - \hat{\gamma}(s) = \hat{c}_0^R \hat{e} + \hat{c}_1^R \hat{f} + \hat{c}_2^R \hat{g} \quad (4.2.4)$$

yazılır. (4.2.4) eşitliği (4.2.3) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\hat{c}_0^R = 0 + 0\varepsilon \quad (4.2.5)$$

elde edilir. (4.2.3) eşitliğinin türevi alınırsa;

$$\langle \hat{w}(s) \sin(\hat{\theta}(s)) \hat{f}(s), \hat{c}_0^R \hat{e} + \hat{c}_1^R \hat{f} + \hat{c}_2^R \hat{g} \rangle = 1 \quad (4.2.6)$$

bulunur. Bu son eşitlikten;

$$\hat{c}_1^R = \frac{1}{\hat{w}(s) \sin(\hat{\theta}(s))} = \frac{1}{w \sin \theta} - \varepsilon \left(\frac{w \theta^* \cos \theta + w^* \sin \theta}{w^2 s, n^2 \theta} \right) \quad (4.2.7)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.2.6) dan

$$\hat{c}_2^R = \frac{1}{\hat{w}^2(s) \sin(\hat{\theta}(s)) \cos(\hat{\theta}(s))} = \frac{2}{w \sin 2\theta} - \frac{4\varepsilon \theta^*}{w \sin^2 2\theta} (\cos 2\theta + w^* \sin 2\theta) \quad (4.2.8)$$

bulunur.

Sonuç olarak $\hat{c}_1^R$ ve $\hat{c}_2^R$ Fokal Eğriliklerin Ribbon Çatıya göre Frenet denklemleri;

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \hat{c}_1^{R'} \\ \hat{c}_2^{R'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w(s) \sin(\hat{\theta}(s)) & 0 \\ -w(s) \sin(\hat{\theta}(s)) & 0 & w(s) \cos(\hat{\theta}(s)) \\ 0 & -w(s) \cos(\hat{\theta}(s)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{c}_1^R \\ \hat{c}_2^R \end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

elde edilir.

Sonuç 4.3: $\hat{r}$ oskülatör kürenin yarıçapı ve $\hat{\gamma}$ bir dual eğri olsun. Denklem (4.2.6) dan

$$\hat{r} = \sqrt{\hat{c}_1^{R^2} + \hat{c}_2^{R^2}} \quad (4.2.10)$$

bulunur.

5. SONUÇ

Bu çalışmada Dual sayılarda eğri kavramı detaylı bir şekilde tanım ve teoremlerle ele alınmıştır. Bu dual eğrinin Frenet ve Ribbon Çatıları tanımlanmıştır. Dual uzayda Ribbon Çatıya göre Dual Fokal Eğri ifade edilerek çeşitli karakterizasyonlar yapılmıştır.

Son olarak Dual Ribbon Çatıya göre Dual Fokal Eğriler, Dual Kuaterniyonlarda tanımlanarak yeni karakterizasyonlar elde edilebilir.



KAYNAKLAR

- [1] Clifford, W.K., (1873). Preliminary sketch of biquaternions, Proceeding of London Math. Society, 4(64): 361-395.
- [2] Hacısalıhoğlu, H. H. (1983). Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Matematik 2, Ankara.
- [3] Müller, H.R., (1963). Kinematik Dersleri, Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara.
- [4] E. Study, (1903) Geometrie der Dynamen, Leipzig.
- [5] Chirikjian G.S., Framed curves and knotted DNA, BiochemSoc. Trans. 41 (2013), 635-638.
- [6] Bohr, J. and Markvorsen S., Ribbon Crystals, Plos one, 8 (10), (2013).
- [7] Uribe-Vargas, On vertices, focal curvatures and differential geometry of space curves, Bull. Brazilian Math. Soc. 36 (3), (2005), 285—307.
- [8] Öztürk, G. and Arslan, K., On focal curves in Euclidean n -space R^n , Novi Sad Journal of Mathematics, 46 (1), (2016), 35-44.
- [9] Korpınar, T. and Bas, S., On Characterization Of B- Focal Curves In R^3 , E Bol. Soc. Paran. Math., Vol:31, No:1, (2013), 175-178.
- [10] Yeneroglu, M., New focal curves according to ribbon frame, Prespacetime Journal, 7 (5), (2016).
- [11] Gürses, N., Bektas, Ö. and Yüce, S., On the Quaternionic Focal Curves, Süleyman Demirel University Journal of Natural and Applied Sciences, 21(2), (2017), 357-366.
- [12] Soytürk, E., Ilarslan, K. and Sağlam, D., Osculating spheres and osculating circles of a curve in Semi-Riemannian space, Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara Series A1, 54 (2), (2005), 39-48.
- [13] M.P. (1976). Carmo: Differential Geometry of Curves and Surfaces, Pearson Education,
- [14] Giomi, L., Mahadevan, L., Statistical mechanics of developable ribbons, Phys. Rev. Lett., 104, (2010).
- [15] Sabucuoğlu, A., (2006). Diferansiyel Geometri. Nobel yayınları. Ankara. 264-277.
- [16] F.Şemin, (1983). Diferansiyel Geometri I. Fen Fakültesi Yayınları, İstanbul Üniversitesi. İstanbul.
- [17] Veldkamp, G.R., On the use of dual numbers, vectors and matrices in instantaneous, spatial kinematics, Mech. Mach. Theory, 11, (1976), 141-156.
- [18] Yücesan, A., Ayyıldız, N., Çöken, A.C., On rectifying dual space curves, Rev. Mat. Complut., 20(2) (2007), 497-506.
- [19] Şahiner, B., Önder M., Slant Helices, Darboux Helices and Similar Curves in Dual Space D^3 , Mathematica Moravica, 20(1), (2016), 89-103.
- [20] Kotelnikov A.P., (1895). Vintovoe Schislenie i Nikotoriya Prilozheniye evok geometrie i mehaniki, Kazan.

ÖZGEÇMİŞ

Sezai TURĞUT

████████████████████

10/10/2014

████████████████████

1. [REDACTED]

██████████

114

114

11/11/2016

[REDACTED]

██████████

████████████████████

© 2006 The Authors

114

114

████████████████████
