

**T.C.**  
**CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DUAL UZAYLARDA KÜRESEL SLANT EĞRİLERİN GEOMETRİSİ**

**DOKTORA TEZİ**

**Seda ORAL**

**Anabilim Dalı: MATEMATİK**

**Programı: GEOMETRİ**

**MANİSA 2014**

## İÇİNDEKİLER

|                                                                           |      |
|---------------------------------------------------------------------------|------|
| SEMBOL LİSTESİ.....                                                       | iv   |
| ŞEKİL LİSTESİ.....                                                        | vi   |
| TEŞEKKÜR.....                                                             | vii  |
| ÖZET.....                                                                 | viii |
| ABSTRACT.....                                                             | ix   |
| <br>                                                                      |      |
| 1. GİRİŞ.....                                                             | 1    |
| <br>                                                                      |      |
| 2. $E^3$ ÖKLİDYEN 3-UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR VE REGLE YÜZEYLER .....      | 3    |
| 2.1. Temel Kavramlar.....                                                 | 3    |
| 2.2. Regle Yüzeyler .....                                                 | 6    |
| <br>                                                                      |      |
| 3. $IR_1^3$ LORENTZİYEN 3-UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR VE REGLE YÜZEYLER..... | 12   |
| 3.1. Temel Kavramlar.....                                                 | 12   |
| 3.2. $IR_1^3$ Lorentziyen 3-Uzayında Spacelike Regle Yüzeyler.....        | 15   |
| 3.3 $IR_1^3$ Lorentziyen 3-Uzayında Timelike Regle Yüzeyler.....          | 16   |
| <br>                                                                      |      |
| 4. DUAL UZAYDA KÜRESEL SLANT EĞRİLER .....                                | 19   |
| 4.1. $ID^3$ Dual Uzayının Temel Kavramları .....                          | 19   |
| 4.2. Dual Küresel Eğrilerin Geometrisi .....                              | 23   |
| 4.3. Dual Küresel Slant Eğriler .....                                     | 26   |

|                                                                        |            |
|------------------------------------------------------------------------|------------|
| (a) $\tilde{e}$ - Slant Dual Küresel Eğriler .....                     | 26         |
| (b) $\tilde{t}$ - Slant Dual Küresel Eğriler .....                     | 33         |
| (c) $\tilde{g}$ - Slant Dual Küresel Eğriler .....                     | 41         |
| <b>5. DUAL LORENTZİYEN UZAYDA KÜRESEL SLANT EĞRİLER .....</b>          | <b>44</b>  |
| 5.1. $ID_1^3$ Dual Lorentziyen Uzayının Temel Kavramları .....         | 44         |
| 5.2. Dual Hiperbolik ve Lorentziyen Küresel Eğrilerin Geometrisi ..... | 46         |
| 5.3. Dual Hiperbolik Slant Eğriler .....                               | 54         |
| (a) $\tilde{e}$ - Slant Dual Hiperbolik Eğriler .....                  | 54         |
| (b) $\tilde{t}$ - Slant Dual Hiperbolik Eğriler .....                  | 61         |
| (c) $\tilde{g}$ - Slant Dual Hiperbolik Eğriler .....                  | 73         |
| 5.4. Dual Lorentziyen Slant Timelike Eğriler .....                     | 78         |
| (a) $\tilde{e}$ - Slant Dual Timelike Eğriler.....                     | 79         |
| (b) $\tilde{t}$ -Slant Dual Timelike Eğriler.....                      | 85         |
| (c) $\tilde{g}$ -Slant Dual Timelike Eğriler .....                     | 97         |
| 5.5. Dual Lorentziyen Slant Spacelike Eğriler .....                    | 98         |
| (a) $\tilde{e}$ - Slant Dual Spacelike Eğriler .....                   | 98         |
| (b) $\tilde{t}$ - Slant Dual Timelike Eğriler.....                     | 105        |
| (c) $\tilde{g}$ - Slant Dual Spacelike Eğriler.....                    | 117        |
| <b>REFERANSLAR .....</b>                                               | <b>122</b> |
| <b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>                                                   | <b>126</b> |

## SEMBOL LİSTESİ

|                                 |                                                  |
|---------------------------------|--------------------------------------------------|
| $A$                             | : Afin uzay                                      |
| $V$                             | : Vektör uzayı                                   |
| $IR$                            | : Reel sayılar kümesi                            |
| $E^3$                           | : Öklidyen çizgiler uzayı                        |
| $ID$                            | : Dual Sayılar Kümesi                            |
| $ID^3$                          | : Dual uzay                                      |
| $IR_1^3$                        | : Lorentziyen çizgiler uzayı                     |
| $ID_1^3$                        | : 3-boyutlu Dual Lorentziyen uzay                |
| $X(u, v)$                       | : Regle yüzey                                    |
| $R$                             | : Regle yüzeyin doğrultman vektörü               |
| $\alpha(u)$                     | : Regle yüzeyin dayanak eğrisi                   |
| $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ | : Bir uzay eğrisinin Frenet çatısı               |
| $\kappa(s)$                     | : Uzay eğrisinin eğriliği                        |
| $\tau(s)$                       | : Uzay eğrisinin burulması                       |
| $c(s)$                          | : Regle yüzeyin boğaz çizgisi                    |
| $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ | : Regle yüzeyin boğaz noktasındaki Frenet çatısı |
| $\gamma$                        | : Regle yüzeyin eğriliği                         |
| $s$                             | : Yay uzunluğu parametresi                       |
| $\bar{s}$                       | : Dual yay uzunluğu parametresi                  |
| $\varepsilon$                   | : Dual birim                                     |

|                                          |                                        |
|------------------------------------------|----------------------------------------|
| $\bar{\theta}$                           | : Dual açı                             |
| $\tilde{x}$                              | : Dual küresel eğri                    |
| $\{\tilde{\ell}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$ | : Bir dual eğrinin dual Darboux çatısı |
| $\bar{\gamma}(s)$                        | : Dual küresel eğrilik fonksiyonu      |
| $\bar{R}(s)$                             | : Dual eğrilik yarıçapı fonksiyonu     |
| $\tilde{d}(s)$                           | : Dual Darboux ani dönme vektörü       |

**ŞEKİL LİSTESİ**

|                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Şekil 4.1.</b> Regle yüzeyin E. Study dönüşümü .....                      | 23  |
| <b>Şekil 5.1.</b> $ c  > 1$ olmak üzere tek kanatlı hiperboloid örneği ..... | 78  |
| <b>Şekil 5.2.</b> $ c  < 1$ olmak üzere tek kanatlı hiperboloid örneği ..... | 121 |

## TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında desteğini esirgemeyen, tecrübelerinden yararlandığım danışman hocam sayın Doç. Dr. Mustafa KAZAZ' a teşekkürlerimi sunarım.

Zaman ve mekân gözetmeksizin yardımlarını esirgemeyen, bilgisinden ve tecrübesinden yararlandığım hocam sayın Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU' ya teşekkürü bir borç bilirim.

Değerli fikirlerini benimle paylaşan sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT' e ve engin bilgisiyle beni hiç yalnız bırakmayan, desteğini esirgemeyen hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÖNDER' e çok teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca hiçbir fedakârlıktan kaçınmayan aileme ve anlayışını hiç esirgemeyen eşim Furkan ALTINGÜL' e sonsuz teşekkürler.

## ÖZET

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmuştur.

Birinci bölüm tezin giriş kısmıdır. Bu bölümde, konuyla ilgili literatür bilgisi ve bu tezde yapılanlar hakkında kısaca bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde,  $E^3$  Öklidyen 3-uzayının temel kavramları ve regle yüzeylerin çatı elemanları kullanılarak incelenmesi ile ilgili bir özet verilmiştir.

Üçüncü bölümde,  $IR_1^3$  Lorentziyen 3-uzayının temel kavramları ve bu uzaydaki spacelike ve timelike regle yüzeylerin geometrisi incelenmiştir.

Dördüncü bölümde,  $ID^3$  dual uzayın temel kavramları ve  $E^3$  Öklidyen 3-uzayının regle yüzeyine birebir karşılık gelen birim dual küre üzerindeki eğrilerin geometrisi dördüncü bölümde verilmiştir. Ayrıca dual küresel slant eğriler tanımlanmış ve bunlarla ilgili temel teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Beşinci bölüm,  $ID_1^3$  dual Lorentziyen uzayın birim dual hiperbolik ve Lorentziyen küreleri üzerindeki slant eğrilerin geometrisine ayrılmıştır. Kesim 5.1. de  $ID_1^3$  uzayının temel kavramları ve birim dual küresel eğrilerin geometrisi verilmiştir. Dual hiperbolik slant eğrilerin geometrisi kesim 5.3. de, dual Lorentziyen slant timelike eğrilerin geometrisi kesim 5.4. de ve dual Lorentziyen slant spacelike eğrilerin geometrisi de kesim 5.5. de incelenmiştir.

## ABSTRACT

This thesis consists of five chapters.

First chapter is introduction. In this chapter, literature review about the subject a dual curve which corresponds a ruled surface with using dual Darboux frame and some information about this thesis is given.

In chapter two, preliminaries of  $E^3$  Euclidean 3-space and ruled surface are given.

In chapter three, preliminaries of  $IR_1^3$  Lorentzian 3-space and spacelike, timelike ruled surfaces are analyzed using  $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$  frame of the ruled surface.

In chapter four, preliminaries of  $ID^3$  dual space and by the aid of the E. Study Mapping, dual spherical curves that correspond to the ruled surfaces in  $E^3$  Euclidean 3-space are given. Besides a slant dual curve is defined on unit dual sphere  $\tilde{S}^2$  and some characterizations for a curve to be a slant dual curve are expressed.

In chapter five, the geometry of slant dual curves on  $\tilde{H}_0^2$  and  $\tilde{S}_1^2$  are defined. Firstly in 5.1. unit dual curves and preliminaries of  $ID_1^3$  dual Lorentzian space are given. Then, in 5.3. slant dual hyperbolic curves, in 5.4. slant dual Lorentzian timelike curves and in 5.5. slant dual Lorentzian spacelike curves are investigated.

## 1.GİRİŞ

Özel eğriler diferansiyel geometride büyük önem taşır. En iyi bilinen özel eğri helistir.  $E^3$  Öklidyen 3-uzayında bir genel helis, her noktasındaki teğet vektörü sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan eğri olarak Barros [4] tarafından tanımlanmıştır. Helislerle ilgili klasik bir sonuç 1802 yılında M. A. Lancret tarafından ifade edilmiş ve ilk olarak 1845 yılında B. De Saint Venant tarafından ispatlanmıştır: Bir helisin genel helis olması için gerek ve yeter şart  $\kappa/\tau$  oranının sabit olmasıdır. Helis eğrileri ile ilgili çalışmalar  $E^3$  uzayı ile sınırlı kalmamıştır. Ayrıca  $IR_1^3$  Lorentziyen uzayda bu eğriler için farklı karakterizasyonlar elde edilmiştir [5,19,28].

Helisler gibi bir diğer özel eğri sınıfı da slant helislerdir.  $E^3$  Öklidyen 3-uzayında bir slant helis, asli normal vektörü sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan eğri olarak, Izumiya ve Takeuchi [27] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra, Kula ve Yaylı [12,29]  $E^3$  Öklidyen 3-uzayında bir slant helisin küresel göstergesinin küresel helisler olduğunu elde etmiş ve slant helisler ile ilgili bazı sonuçlar vermişlerdir. Monterde [13] ise sıfırdan farklı burulmaya ve sabit eğriliğe sahip bir eğrinin slant helis olma şartını vermiştir. Ayrıca bir slant helisin konum vektörü Ali [3] tarafından incelenmiştir. Slant helislerle ilgili çalışmalar  $IR_1^3$  Lorentziyen 3-uzayında da devam etmiştir. Ali ve Turgut [2], bir timelike slant helisin konum vektörü üzerinde incelemeler yapmıştır. Daha sonra Ali ve Lopez [1], slant helislerle ilgili yeni karakterizasyonlar elde etmişlerdir.

Dual sayılar, W. K. Clifford (1849-1879) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Eduard Study [16] (1862-1930) doğrular geometrisi ve kinematik çalışmalarında dual sayılar ve dual vektörleri kullanarak ünlü dönüşümünü tanımlamıştır:  $E^3$  Öklidyen 3-uzayının yönlü doğrularının bir kümesi  $ID^3$  dual uzaydaki noktalara bire bir karşılık gelir. Ayrıca,  $\tilde{S}^2$  birim dual küre üzerindeki diferansiyellenebilir bir eğrinin  $E^3$  Öklidyen 3-uzayında bir doğrunun hareketiyle meydana gelen regle yüzeye karşılık geldiği Veldkamp tarafından verilmiştir [17]. Bu takdirde hareket geometrisi, matematiksel fizik, bilgisayar yardımıyla geometrik dizayn (CGAD)

ve modelleme gibi bilimin birçok dalında kullanılan regle yüzeyler, aslında,  $\tilde{S}^2$  birim dual küre yüzeyi üzerindeki dual eğrilere karşılık gelirler. Bu karşılık dikkate alınarak, bir regle yüzey dual hesaplamalar yardımıyla incelenmiş olup, örnek olarak [26,11] numaralı referanslara bakılabilir. Ayrıca,  $IR_1^3$  Lorentziyen 3-uzayındaki regle yüzeyler için benzer incelemeler,  $ID_1^3$  dual uzayında bulunan  $\tilde{S}_1^2$  birim dual Lorentziyen küre,  $\tilde{H}_0^2$  birim dual hiperbolik küre ve  $\tilde{A}^2$  dual ışık konisi üzerindeki dual eğriler yardımıyla yapılmıştır [32,33,34].

Bu tezde, Önder in bir regle yüzeyin boğaz çizgisi üzerindeki  $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$  Frenet çatısını kullanarak tanımladığı slant regle yüzeyleri [25,38] de kapsayan  $\tilde{S}^2$  birim dual küre üzerinde yeni dual eğriler tanımlanarak, bu eğrilere ait bazı karakterizasyonlar verilecektir. Ayrıca bu eğri tanımlanırken dual eğriye karşılık gelen regle yüzeyin  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatısı kullanılacaktır. Benzer olarak slant timelike ve spacelike regle yüzeyleri [18] kapsayan  $\tilde{S}_1^2$  birim dual Lorentziyen küre ve  $\tilde{H}_0^2$  birim dual hiperbolik küre üzerinde yeni dual eğriler tanımlanarak, bu eğriler için bazı teorem ve sonuçlar verilecektir.

## 2. $E^3$ ÖKLİDYEN 3-UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR VE REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde, Öklidyen uzayda eğriler teorisi ile ilgili temel tanımlar ifade edilecektir. Ayrıca yüzeyler, regle yüzeyler ve slant regle yüzeylerin tanım ve karakterizasyonları özet olarak verilecektir [6,7,9,12,21,25,36,37].

### 2.1. Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1.** Bir reel Afin uzay  $A$  ve  $A$  ile birlesen vektör uzayı da  $V$  olsun.  $V$  de

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

biçiminde bir Öklidyen iç çarpımı tanımlanırsa,  $A$  Afin uzayına Öklidyen 3-uzayı denir ve  $E^3$  ile gösterilir [7].

**Tanım 2.1.2.**  $d: E^3 \times E^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overline{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan  $d$  fonksiyonuna  $E^3$  Öklidyen 3-uzayında uzaklık fonksiyonu ve  $d(x, y)$  reel sayısına da  $x$  ve  $y \in E^3$  noktaları arasındaki uzaklık denir [7].

**Tanım 2.1.3.** Bir  $\vec{a} \in E^3$  vektörünün normu

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \quad (2.1)$$

biçiminde tanımlanır [7].

**Tanım 2.1.4.**  $E^3$  uzayında iki vektör  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  ve  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  olsun.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \quad (2.2)$$

vektörüne  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  nin vektörel çarpımı denir. Buna göre

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \vec{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}) \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

olmak üzere

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ile verilir [37].

**Tanım 2.1.5.**  $I \subseteq \mathbb{R}$  bir açık aralık olmak üzere türevlenebilir bir  $\vec{\alpha} : I \rightarrow E^3$  fonksiyonuna bir türevlenebilir parametrik eğri denir. Böylece  $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$  türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere her  $t \in I$  reel sayısına bir  $\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \in E^3$  noktasını karşılık getirir.

$\vec{\alpha}'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)) \in E^3$  vektörüne  $\vec{\alpha}$  eğrisinin  $t$  noktasındaki hız vektörü (veya teğet vektörü) denir [37].

**Tanım 2.1.6.**  $\forall t \in I$  için  $\vec{\alpha}'(t) \neq 0$  olan bir  $\vec{\alpha} : I \rightarrow E^3$  eğrisine regüler eğri denir [37].

**Tanım 2.1.7.**  $\forall t \in I \quad \|\vec{\alpha}'(t)\|=1$  ise  $\vec{\alpha}$  eğrisine birim hızlı eğri denir. Bu durumda  $t$  parametresine yay uzunluğu parametresi denir ve genellikle  $s$  ile gösterilir [37].

**Tanım 2.1.8.**  $\vec{\alpha}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  birim hızlı bir eğri olsun. Böylece  $\|\vec{T}(s)\| = \|\vec{\alpha}'(s)\| = 1$  dir.  $\kappa(s) = \|\vec{\alpha}''(s)\|$  sayısına  $\vec{\alpha}$  eğrisinin  $s$  noktasındaki eğriliği denir.  $\kappa(s) \neq 0$  olan noktalarda,  $\vec{\alpha}''(s) = \kappa(s)\vec{N}(s)$  eşitliği ile verilen  $\vec{N}(s)$  vektörüne  $s$  noktasındaki asli normal vektör denir.  $\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$  vektörüne  $s$  noktasındaki binormal vektör denir [9].

**Tanım 2.1.9.** Birim hızlı bir  $\vec{\alpha}$  uzay eğrisinin her bir  $s$  noktasında  $\vec{T}(s)$  teğet,  $\vec{N}(s)$  asli normal ve  $\vec{B}(s)$  binormal vektörlerinden oluşan bir  $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$  ortonormal koordinat sistemi vardır. Bu  $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$  üçlüsüne hareketli üçyüzlü ya da Frenet Çatısı denir [9].

**Tanım 2.1.10.**  $\vec{\alpha}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  birim hızlı bir eğri ve her  $s \in I$  için  $\vec{\alpha}''(s) \neq 0$  olsun.

$$\vec{B}'(s) = -\tau(s)\vec{N}(s)$$

ile tanımlanan  $\tau(s)$  sayısına  $\vec{\alpha}$  eğrisinin  $s$  noktasındaki burulması denir.

$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$  olduğundan  $\vec{N}' = \vec{B}' \times \vec{T} + \vec{B} \times \vec{T}' = -\tau\vec{B} + \kappa\vec{T}$  dir. Böylece

$$\vec{T}' = \kappa\vec{N}, \quad \vec{N}' = -\tau\vec{B} + \kappa\vec{T}, \quad \vec{B}' = -\tau\vec{N}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklere Frenet türev formülleri denir [9].

**Tanım 2.1.11.**  $\vec{\alpha}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  birim hızlı bir eğri olsun. Eğrinin teğetleri sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyor ise  $\vec{\alpha}$  eğrisi bir helistir [12].

**Tanım 2.1.12.**  $\vec{\alpha} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  birim hızlı bir eğri olsun. Eğrinin asli normalleri sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyor ise  $\vec{\alpha}$  eğrisi bir slant helistir [12].

**Tanım 2.1.13.**  $U \subset \mathbb{R}^2$  boştan farklı bir açık alt cümle olsun.  $\vec{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E^3$  olmak üzere

$$\vec{X}(U) = \{ \vec{X}(u, v) \mid (u, v) \in U \} \subseteq E^3$$

görüntüsüne bir yüzey adı verilir.  $\forall (u, v) \in U$  için

$$\vec{X}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

yazılabilir. Burada  $x_1, x_2, x_3$  iki değişkenli koordinat fonksiyonlarıdır.

Eğer  $\forall (u, v) \in U$  noktasında  $\vec{X}_u$  ve  $\vec{X}_v$  vektörleri lineer bağımsız (yani  $\vec{X}_u \times \vec{X}_v \neq 0$ )

ise  $\vec{X}$  yüzeyine düzgün (regüler) yüzey denir. Burada  $\vec{X}_u$  ve  $\vec{X}_v$ , sırasıyla,  $u$  veya  $v$  ye göre kısmi türevlerdir [21].

## 2.2. Regle Yüzeyler

**Tanım 2.2.1.** Uzayda bir doğrunun hareketi ile oluşan bir yüzeye regle yüzey denir. Bir regle yüzey

$$\vec{X}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{R}(u) \quad (2.3)$$

biçiminde bir parametrizasyona sahiptir [36]. Burada,  $\vec{\alpha}(u)$  eğrisine regle yüzeyin dayanak eğrisi,  $\vec{R}(u)$  vektörlerine de regle yüzeyin anadoğruları denir.

Regle yüzeyin anadoğruları  $\vec{R}(u)$  vektörleri, bir  $O$  başlangıç noktasına bağlanırsa bir koni elde edilir. Bu koniye regle yüzeyin yönlü konisi adı verilir. Yönlü konideki her bir vektör birimleştirilirse  $\vec{R}(u)$  vektörlerinin uç noktaları birim küre üzerinde bir eğri çizer. Bu eğriye regle yüzeyin küresel göstergesi adı verilir. Bir regle yüzeyin anadoğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir [9].

**Tanım 2.2.2.** Bir  $\vec{X}(u, v)$  regle yüzeyinin komşu iki anadoğrusunun ortak dikmesinin anadoğrular üzerindeki ayaklarına boğaz (striksiyon) noktası denir [6].

$\vec{X}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{R}(u)$  bir regle yüzey olsun.  $\vec{\alpha}' = \frac{d\vec{\alpha}}{du}$  ve  $\vec{R}' = \frac{d\vec{R}}{du}$  diyelim. Buna göre  $\vec{X}(u, v)$  regle yüzeyinin  $u$  ve  $v$  ye göre kısmi türevleri, sırasıyla,

$$\vec{X}_u = \vec{\alpha}' + v\vec{R}' \quad \text{ve} \quad \vec{X}_v = \vec{R}$$

dir. Şimdi  $\vec{p}$ ,  $P$  noktasının konum vektörü olmak üzere, bu regle yüzeyin herhangi bir  $P$  noktasındaki teğet denklemi,

$$\det(\vec{p} - \vec{X}, \vec{R}, \vec{\alpha}' + v\vec{R}') = 0 \quad (2.4)$$

ile verilir. Eğer  $P$  noktası, regle yüzeyin  $\vec{X}(u, v)$  noktasından geçen anadoğru üzerinde ise  $\mu$  uygun seçilmiş bir skaler olmak üzere  $\vec{p} - \vec{X} = \mu\vec{R}$  dir. Böylece bu ifade (2.4) teğet düzlem denkleminde kullanılırsa,  $\vec{X}(u, v)$  noktasından geçen anadoğrusunun bu noktadaki teğet düzlem içinde bulunduğu görülür. Diğer taraftan, regle yüzeyin herhangi bir noktasındaki normal vektörünün doğrultusu

$$\vec{X}_u \times \vec{X}_v = (\vec{\alpha}' + v\vec{R}') \times \vec{R} = (\vec{\alpha}' \times \vec{R}) + v(\vec{R}' \times \vec{R}) \quad (2.5)$$

ile verilir. Şimdi regle yüzeyin bir anadoğrusu boyunca normal doğrultusunun aynı kalması şartını verelim. Bu şartın (2.5) ile verilen normal vektör doğrultusunun  $v$  -parametresine bağlı olmaması ile sağlanacağı açıktır. Dolayısıyla  $\vec{\alpha}' \times \vec{R}$  ve  $\vec{R}' \times \vec{R}$  vektörleri aynı doğrultuya sahip olmalıdır. Böylece  $\vec{R}$ ,  $\vec{\alpha}'$  ve  $\vec{R}'$  vektörleri aynı düzleme paralel olurlar. Sonuç olarak, bir anadoğru boyunca regle yüzeyin normal doğrultusunun aynı kalma şartı,

$$\det(\vec{\alpha}', \vec{R}, \vec{R}') = 0 \quad (2.6)$$

ile verilir. Böylece, eğer  $|\vec{\alpha}', \vec{R}, \vec{R}'| = 0$  ise, regle yüzeyin tekil olmayan noktalarında ve aynı anadoğru üzerindeki bütün noktalarında normal vektörler lineer bağımlıdır. Yani teğet düzlem anadoğru boyunca aynı kalır. Böyle bir anadoğruya torsal anadoğru denir. Eğer  $|\vec{\alpha}', \vec{R}, \vec{R}'| \neq 0$  ise regle yüzeyin teğet düzlemleri aynı anadoğrunun bütün noktalarında birbirinden farklıdır. Böyle bir anadoğruya da torsal olmayan anadoğru denir [9].

**Tanım 2.2.3.** Bütün anadoğruları torsal olan bir regle yüzeye açılabilir regle yüzey denir. Aksi durumda, regle yüzeye açılmayan (aykırı) regle yüzey denir [9].

$\vec{X}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{R}(u)$  aykırı bir regle yüzey olsun. Bu durumda bu regle yüzeyin birim normal vektörü

$$\vec{n} = \frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} = \frac{(\vec{\alpha}' + v\vec{R}') \times \vec{R}}{\sqrt{\langle \vec{\alpha}' + v\vec{R}', \vec{\alpha}' + v\vec{R}' \rangle - \langle \vec{\alpha}', \vec{R} \rangle^2}} \quad (2.7)$$

şeklindedir. Burada limit alınarak torsal olmayan bir  $u = u_1$  anadoğrusunun noktalarında

$$a = \lim_{v \rightarrow \infty} \vec{n}(u_1, v) = \frac{\vec{R} \times \vec{R}'}{\|\vec{R}'\|} \quad (2.8)$$

elde edilir. Regle yüzeyin  $u = u_1$  anadoğrusundan geçen ve  $a$  vektörüne dik olan düzleme asimptotik düzlem denir ve  $\beta$  ile gösterilir.  $u_1$  anadoğrusundan geçen ve  $\beta$  asimptotik düzlemine dik olan  $\eta$  teğet düzlemine, merkez düzlem denir. Merkez düzlemin anadoğruya değme noktasına da  $u_1$  anadoğrusunun merkez (boğaz) noktası denir ve  $C$  ile gösterilir. Bir aykırı regle yüzeyin bütün anadoğrularının merkez noktalarının oluşturduğu eğriye de regle yüzeyin striksiyon eğrisi veya boğaz çizgisi denir.  $C$  boğaz noktasından geçen asimptotik ve teğet düzleme dik olan doğrular, sırasıyla, merkez teğet ve merkez normal olarak adlandırılır.  $\vec{R}, \vec{R}'$  vektörlerin dik olduklarını ve (2.8) bağıntısını kullanarak merkez normalin birim vektörü

$$\vec{h} = \frac{\vec{R}'}{\|\vec{R}'\|}$$

ile verilir.  $C$  merkez noktasının  $v$  parametresinin ifadesini elde etmek için (2.7) denkleminde  $\vec{h} \times \vec{n} = \vec{0}$  olduğu dikkate alınarak

$$\vec{R}' \times [(\vec{\alpha}' \times v\vec{R}') \times \vec{R}] = \langle \vec{R}', \vec{R} \rangle (\vec{\alpha}' \times v\vec{R}') - \langle \vec{R}', \vec{\alpha}' \times v\vec{R}' \rangle \vec{R} = 0 \quad (2.9)$$

elde edilir. (2.9) eşitliğinden de

$$v = -\frac{\langle \vec{R}', \vec{\alpha}' \rangle}{\langle \vec{R}', \vec{R}' \rangle} \quad (2.10)$$

bulunur. Böylece bir regle yüzeyin  $\vec{c} = \vec{c}(u)$  ile verilen boğaz çizgisinin parametrik ifadesi

$$\vec{c}(u) = \vec{\alpha}(u) - \frac{\langle \vec{R}', \vec{\alpha}' \rangle}{\langle \vec{R}', \vec{R}' \rangle} \vec{R}(u) \quad (2.11)$$

ile verilir. Buradan bir regle yüzeyin dayanak eğrisinin boğaz çizgisi olması için gerek ve yeter koşulun  $\langle \vec{R}', \vec{\alpha}' \rangle = 0$  eşitliğinin sağlanması sonucu elde edilir.

Şimdi, aykırı bir regle yüzeyin boğaz çizgisinin dayanak eğrisi olduğunu kabul edelim.  $(u, 0)$  boğaz noktasında normlanmış yüzey normali  $\vec{n}_0$  ile gösterilsin. Buradan

$$\vec{n}_0 = \vec{\alpha}' \times \vec{R} \quad (2.12)$$

elde edilir. Böylece,  $\vec{h} \times \vec{n}_0 = 0$  olduğundan  $d_R$  bir sabit olmak üzere  $\vec{\alpha}' \times \vec{R} = d_R \vec{R}'$  yazılır.

Buradan her iki tarafın  $\vec{R}'$  ile iç çarpımı alınırsa,

$$d_R = \frac{|\vec{\alpha}', \vec{R}, \vec{R}'|}{\langle \vec{R}', \vec{R}' \rangle} \quad (2.13)$$

bulunur.  $d_R$  sabitine regle yüzeyin dağılma parametresi denir.

Diğer taraftan,  $v \rightarrow \infty$  için normal vektörün ifadesi  $\vec{n}_\infty = \vec{R}' \times \vec{R}$  dir ve (2.12) den  $\vec{n}_0 \perp \vec{n}_\infty$  olduğu elde edilir. Böylece regle yüzeyin normlanmış normal vektörü

$$\vec{n} = (\vec{\alpha}' \times \vec{R}) + v(\vec{R}' \times \vec{R}) = \vec{n}_0 + v\vec{n}_\infty$$

dir. Dolayısıyla  $\vec{n}$  normali  $u$  -anadoğrusu boyunca sadece  $v$  -parametresine bağlıdır. Ayrıca  $\vec{n}$  ve  $\vec{n}_0$  vektörleri arasındaki açı  $\theta$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \vec{n}, \vec{n}_0 \rangle &= \|\vec{n}\| \|\vec{n}_0\| \cos \theta \\ \langle \vec{n}, \vec{n}_\infty \rangle &= \|\vec{n}\| \|\vec{n}_\infty\| \sin \theta \end{aligned}$$

dır. Buradan  $\tan \theta = \frac{v}{d_R}$  yazılır. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.2.1. (Chasles Teoremi)** Aykırı bir regle yüzeyin boğaz çizgisi dayanak eğrisi olsun. Bir anadoğrunun  $(u, v)$  noktasında yüzeyin teğet düzlemi ile merkez düzlemi arasındaki açı  $\theta$  ve yüzeyin dağılma parametresi de  $d_R$  olmak üzere

$$\tan \theta = \frac{v}{d_R}, \quad d_R \neq 0$$

dır [6]. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

**Sonuç 2.2.1.** Bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter koşul dağılma parametresinin sıfır olmasıdır.

**Tanım 2.2.4.**  $\vec{X}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{R}(u)$  bir regle yüzey olsun. Bu regle yüzeyin birim doğrultman vektörü  $\vec{q} = \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}$ , merkez normal vektörü  $\vec{h}$  ve merkez teğet vektörü  $\vec{a}$  olmak üzere bir  $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$  ortonormal koordinat sistemi vardır. Bu  $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$  üçlüsüne regle yüzeyin Frenet çatısı denir [6].

**Tanım 2.2.5.**  $s$ ,  $\vec{\alpha}(s)$  in yay parametresi ve  $\vec{\alpha}(s)$  regle yüzeyin boğaz çizgisi olmak üzere

$$\vec{X}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{R}(s), \quad \|\vec{R}(s)\| = 1$$

parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey olsun.  $\vec{X}$  yüzeyinin Frenet çatı elemanları  $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$  ve invariantları  $k_1, k_2$  olsun. Bu takdirde  $\vec{q}$  vektörü sıfırdan farklı sabit bir  $\vec{u}$  vektörü ile

$$\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \cos \theta = \text{sabit}; \quad \theta \neq \pi/2 \quad (2.14)$$

olacak şekilde sabit bir açı yapıyor ise,  $\vec{X}$  yüzeyine  $\vec{q}$  - slant regle yüzey denir. Benzer şekilde  $\vec{h}$  - slant ve  $\vec{a}$  - slant regle yüzeylerin tanımı verilebilir [25].

### 3. $IR_1^3$ LORENTZİYEN 3-UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR VE REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde,  $IR_1^3$  Lorentziyen 3-uzayının temel kavramları ile bu uzaydaki spacelike ve timelike regle yüzeylerin geometrisi, boğaz çizgisi üzerinde tanımlı formüller yardımıyla ifade edilecektir. Son olarak,  $IR_1^3$  Lorentziyen 3-uzayındaki slant regle yüzeylerin tanımları verilecektir [18,20,22,30,31,32,35].

#### 3.1. Temel Kavramlar

**Tanım 3.1.1.**  $IR^3$  reel vektör uzayı üzerinde

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3 \quad (3.1)$$

ile verilen Lorentziyen iç çarpım tanımlanırsa,  $IR^3$  Afin uzayı, Minkowski 3-uzay veya Lorentziyen 3-uzay olarak adlandırılır ve  $IR_1^3$  ile gösterilir [22].

Lorentziyen iç çarpım pozitif tanımlı olmadığından  $IR_1^3$  deki vektörler aşağıdaki gibi üç farklı karaktere sahip olabilirler.

**Tanım 3.1.2.**  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in IR_1^3$  herhangi bir vektör olsun.

- i.  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$  ya da  $\vec{u} = 0$  ise  $\vec{u}$  vektörüne spacelike,
- ii.  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle < 0$  ise  $\vec{u}$  vektörüne timelike,

iii.  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$  ve  $\vec{u} \neq 0$  ise  $\vec{u}$  vektörüne null (lightlike)

vektör denir [22].

**Tanım 3.1.3.** Bir  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in IR_1^3$  vektörünün normu

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{|\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle|} \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır. Normu 1 olan vektöre bir birim vektör denir [22].

**Tanım 3.1.4.**  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  ve  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $IR_1^3$  uzayında keyfi iki vektör olsun. Bu vektörlerin Lorentziyen vektörel çarpımı

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & -\vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_3 v_2 - u_2 v_3, u_1 v_3 - u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1) \quad (3.3)$$

biçiminde tanımlanır [30,31].

**Tanım 3.1.5.**  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  ve  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ ,  $IR_1^3$  uzayında üç vektör olsun. Bu durumda

$$i. \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = -\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \quad (3.4)$$

$$ii. (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u}$$

$$iii. \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0 \text{ ve } \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$$

$$iv. \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = -\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + (\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)^2$$

dir [31].

**Tanım 3.1.6.**  $IR_1^3$  uzayındaki orijin merkezli birim Lorentziyen ve birim hiperbolik küreler, sırasıyla

$$S_1^2 = \{\vec{u} \in IR_1^3 : \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1\} \quad (3.5)$$

ve

$$H_0^2 = \{\vec{u} \in IR_1^3 : \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = -1\} \quad (3.6)$$

olarak tanımlanır [31].

**Tanım 3.1.7.**  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ ,  $IR_1^3$  Lorentziyen 3-uzayında bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\forall s \in I \subset IR$  için  $\vec{\alpha}$  eğrisinin teğet vektörü  $\vec{\alpha}'(s)$  bir spacelike, timelike veya null vektör ise  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$  eğrisine, sırasıyla, spacelike, timelike veya null eğri adı verilir [22].

**Tanım 3.1.8.** Lorentziyen 3-uzayında bir yüzeyin her noktasındaki teğet düzlemi timelike (yani, yüzey normali spacelike) ise yüzeye timelike ve teğet düzlemi spacelike (yani, yüzey normali timelike) ise yüzeye spacelike yüzey denir [35].

**Tanım 3.1.9. i. Hiperbolik açı:**  $\vec{u}$  ve  $\vec{v}$ ,  $IR_1^3$  uzayında iki timelike vektör olsun.  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cosh \theta$  olacak şekilde bir  $\theta \geq 0$  reel sayısına  $\vec{u}$  ve  $\vec{v}$  vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir [30].

**ii. Merkez açı:**  $\vec{u}$  ve  $\vec{v}$ ,  $IR_1^3$  uzayında iki spacelike vektör ve bu vektörlerin gerdikleri düzlem timelike olsun.  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cosh \theta$  olacak şekilde bir  $\theta \geq 0$  reel sayısına  $\vec{u}$  ve  $\vec{v}$  vektörleri arasındaki merkez açı denir [30].

**iii. Spacelike açı:**  $\vec{u}$  ve  $\vec{v}$ ,  $IR_1^3$  uzayında iki spacelike vektör ve bu vektörlerin gerdikleri düzlem spacelike olsun.  $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \theta$  olacak şekilde bir  $\theta \geq 0$  reel sayısına  $\vec{u}$  ve  $\vec{v}$  vektörleri arasındaki spacelike açı denir [30].

**iv. Lorentziyen timelike açı:**  $\vec{u}$ ,  $IR_1^3$  uzayında bir spacelike vektör ve  $\vec{v}$ ,  $IR_1^3$  uzayında bir timelike vektör olsun.  $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sinh \theta$  olacak şekilde bir  $\theta \geq 0$  reel sayısına  $\vec{u}$  ve  $\vec{v}$  vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike açı denir [30,32].

### 3.2. $IR_1^3$ Lorentziyen 3-Uzayında Spacelike Regle Yüzeyler

$\vec{\alpha}(u)$ ,  $IR_1^3$  uzayında bir eğri ve  $\vec{R}(u)$  anadoğruların yön vektörü olmak üzere bir spacelike regle yüzey

$$\vec{X}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v \vec{R}(u)$$

denklemleri ile gösterilebilir. Burada,  $\vec{\alpha}(u)$  eğrisi ve  $\vec{R}(u)$  vektörleri spacelike vektörler olup  $u$  ve  $v$  reel parametrelerdir.

Bir  $\vec{X}(u, v)$  spacelike regle yüzeyinin dağılma parametresi, açılabilirliği, boğaz noktası ve boğaz noktalarının geometrik yeri olan boğaz çizgisi Lorentziyen metrik kullanılarak, Öklidyen 3-uzaydaki gibi benzer şekilde verilebilir.

Bir spacelike regle yüzeyin boğaz çizgisi boyunca  $\vec{q}$  doğrultman,  $\vec{h}$  merkez normal ve  $\vec{a}$  merkez teğet vektörlerinden oluşan bir  $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$  ortonormal koordinat sistemi vardır. Bu  $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$  üçlüsüne spacelike regle yüzeyin Frenet çatısı denir. Burada  $\vec{h}$  timelike,  $\vec{q}$  ve  $\vec{a}$  birim vektörleri ise spacelike vektörlerdir. Bu vektörler arasında

$$\vec{q} \times \vec{h} = -\vec{a}, \quad \vec{h} \times \vec{a} = -\vec{q}, \quad \vec{a} \times \vec{q} = \vec{h} \quad (3.7)$$

bağıntıları vardır [30]. Ayrıca bu  $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$  Frenet çatısının türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{h} \\ \vec{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{h} \\ \vec{a} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

ile verilir.

**Tanım 3.2.1.**  $s$ ,  $\vec{\alpha}(s)$  in yay parametresi ve  $\vec{\alpha}(s)$  regle yüzeyin boğaz çizgisi olmak üzere

$$\vec{X}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{R}(s), \quad \|\vec{R}(s)\| = 1$$

parametrizasyonu ile verilen bir spacelike regle yüzey olsun.  $\vec{X}$  yüzeyinin Frenet çatı elemanları  $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$  ve invariantları  $k_1, k_2$  olsun. Bu takdirde  $\vec{q}$  vektörü sıfırdan farklı sabit bir  $\vec{u}$  vektörü ile

$$\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = c_q = \text{sabit} \quad (3.9)$$

olacak şekilde sabit bir açı yapıyor ise,  $\vec{X}$  yüzeyine  $\vec{q}$ - slant spacelike regle yüzey denir. Benzer şekilde  $\vec{h}$  - slant ve  $\vec{a}$  - slant spacelike regle yüzeylerin tanımı verilebilir.

### 3.3 $IR_1^3$ Lorentziyen 3-Uzayında Timelike Regle Yüzeyler

Lorentziyen 3-uzayında timelike bir regle yüzeyin her noktasındaki yüzey normali spacelike vektördür. Bu nedenle bir regle yüzeyin anadoğruları spacelike veya timelike olabileceğinden bu bölüm iki kısımda incelenecektir.

#### 3.3.1. Spacelike Doğuranlı Timelike Regle Yüzeyler

$\vec{\alpha}(u)$ ,  $IR_1^3$  uzayında bir eğri ve  $\vec{R}(u)$  anadoğruların yön vektörü olmak üzere bir spacelike doğuranlı timelike regle yüzey

$$\vec{X}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{R}(u)$$

denklemleri ile gösterilebilir. Burada,  $\vec{R}(u)$  vektörleri spacelike vektörler,  $u$  ve  $v$  reel parametrelerdir.

Bir  $\vec{X}(u, v)$  spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyinin dağılma parametresi, açılabilirliği, boğaz noktası ve boğaz noktalarının geometrik yeri olan boğaz çizgisi Lorentziyen metrik kullanılarak, Öklidyen 3-uzaydaki gibi benzer şekilde verilebilir.

Bir spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyin boğaz çizgisi boyunca  $\vec{q}$  doğrultman,  $\vec{h}$  merkez normal ve  $\vec{a}$  merkez teğet vektörlerinden oluşan bir  $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$  ortonormal koordinat sistemi vardır. Bu  $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$  üçlüsüne regle yüzeyin Frenet çatısı denir. Burada  $\vec{q}$  ve  $\vec{h}$  spacelike vektörler,  $\vec{a}$  ise bir timelike vektördür. Bu vektörler arasında

$$\vec{q} \times \vec{h} = \vec{a}, \quad \vec{h} \times \vec{a} = -\vec{q}, \quad \vec{a} \times \vec{q} = -\vec{h} \quad (3.10)$$

bağıntıları vardır. Ayrıca, bu  $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$  Frenet çatısının türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{h} \\ \vec{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{h} \\ \vec{a} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

ile verilir.

### 3.3.2. Timelike Doğuranlı Timelike Regle Yüzeyler

$\vec{\alpha}(u)$ ,  $IR_1^3$  uzayında bir eğri ve  $\vec{R}(u)$  anadoğruların yön vektörü olmak üzere bir timelike doğuranlı timelike regle yüzey

$$\vec{X}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{R}(u)$$

denklemleri ile gösterilebilir. Burada,  $\vec{R}(u)$  vektörleri timelike vektörler,  $u$  ve  $v$  reel parametrelerdir.

Bir  $\vec{X}(u, v)$  timelike doğuranlı timelike regle yüzeyinin dağılıma parametresi, açılabilirliği, boğaz noktası ve boğaz noktalarının geometrik yeri olan boğaz çizgisi Lorentziyen metrik kullanılarak, Öklidyen 3-uzaydaki gibi benzer şekilde verilebilir.

Bir timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin boğaz çizgisi boyunca  $\vec{q}$  doğrultman,  $\vec{h}$  merkez normal ve  $\vec{a}$  merkez teğet vektörlerinden oluşan bir  $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$  ortonormal koordinat

sistemi vardır. Bu  $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$  üçlüsüne regle yüzeyin Frenet çatısı denir. Burada  $\vec{q}$  timelike vektör,  $\vec{h}$  ve  $\vec{a}$  ise spacelike vektörlerdir. Bu vektörler arasında

$$\vec{q} \times \vec{h} = -\vec{a}, \quad \vec{h} \times \vec{a} = \vec{q}, \quad \vec{a} \times \vec{q} = -\vec{h} \quad (3.12)$$

bağıntıları vardır. Ayrıca bu  $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$  Frenet çatısının türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{h} \\ \vec{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{h} \\ \vec{a} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

ile verilir.

**Tanım 3.3.1.**  $s$ ,  $\vec{\alpha}(s)$  in yay parametresi ve  $\vec{\alpha}(s)$  regle yüzeyin boğaz çizgisi olmak üzere

$$\vec{X}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v \vec{R}(s), \quad \|\vec{R}(s)\| = 1$$

parametrizasyonu ile verilen bir timelike regle yüzey olsun.  $\vec{X}$  yüzeyinin Frenet çatı elemanları  $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$  ve invaryantları  $k_1, k_2$  olsun. Bu takdirde  $\vec{q}$  vektörü sıfırdan farklı sabit bir  $\vec{u}$  vektörü ile

$$\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = c_q = \text{sabit} \quad (3.14)$$

olacak şekilde sabit bir açı yapıyor ise,  $\vec{X}$  yüzeyine  $\vec{q}$  - slant timelike regle yüzey denir. Benzer şekilde  $\vec{h}$  - slant ve  $\vec{a}$  - slant timelike regle yüzeylerin tanımı verilebilir.

#### 4. DUAL UZAYDA KÜRESEL SLANT EĞRİLER

Bu bölümde,  $ID^3$  dual uzayının temel kavramları incelenip E.Study dönüşümü yardımıyla dual küresel eğrilerin geometrisi verilecektir. Daha sonra bu uzayda küresel slant eğriler tanımlanarak bu eğrilerle ilgili temel teoremler ispat edilecektir. [8,10,16,17,32,38].

##### 4.1. $ID^3$ Dual Uzayının Temel Kavramları

$a$  ve  $a^*$  reel sayılar olmak üzere bir  $ID$  cümlesi

$$ID = \{\bar{a} = (a, a^*) : a, a^* \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlansın.  $\bar{a} = (a, a^*)$ ,  $\bar{b} = (b, b^*) \in ID$  elemanlarının toplamı, çarpımı ve eşitlik durumları, sırasıyla, aşağıdaki gibi verilsin:

**i. Toplama** :  $\bar{a} + \bar{b} = (a, a^*) + (b, b^*) = (a+b, a^* + b^*)$ .

**ii. Çarpma** :  $\bar{a} \cdot \bar{b} = (a, a^*) \cdot (b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b)$ .

**iii. Eşitlik** :  $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a = b, a^* = b^*$ .

Bu üç işlemle birlikte,  $ID$  cümlesine dual sayılar cümlesi, her bir  $\bar{a} = (a, a^*) \in ID$  elemanına da bir dual sayı denir [17].

**Teorem 4.1.1.**  $(ID, +, \cdot)$  üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır. Ancak bir cisim değildir [17].

**Teorem 4.1.2.**  $ID$  dual sayılar halkası,  $IR$  reel sayılar cümlesine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar.

Dolayısıyla  $(a, 0)$  dual sayısı izomorf olduğu  $a$  reel sayısı ile gösterilebilir. Yani  $(a, 0) = a$  alınabilir [17].

**Tanım 4.1.1.** Bir  $\bar{a} = (a, a^*) \in ID$  dual sayısında,  $a$  reel sayısına  $\bar{a}$  nin reel kısmı,  $a^*$  reel sayısına da  $\bar{a}$  nin dual kısmı denir [10].

**Tanım 4.1.2.**  $(0, 1)$  dual sayısı kısaca  $\varepsilon$  ile gösterilir. Yani,  $(0, 1) = \varepsilon$  alınır ve bu dual sayı, dual birim olarak adlandırılır [10].

**Sonuç 4.1.1.**  $\varepsilon \neq 0$  olmasına rağmen, dual sayılarda çarpmanın tanımını dikkate alınırsa  $\varepsilon^2 = \varepsilon \cdot \varepsilon = (0, 0) = 0$  dır [17].

**Tanım 4.1.3.**  $|a| \neq 0$  olmak üzere bir  $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$  dual sayısının mutlak değeri

$$|\bar{a}| = |a| + \varepsilon \frac{a}{|a|} a^*$$

biçiminde tanımlanır.

**Teorem 4.1.3.** Bir  $\bar{a} = (a, a^*) \in ID$  dual sayısı,  $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$  şeklinde yazılabilir.

Şimdi,

$$ID^3 = ID \times ID \times ID = \{\tilde{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) : \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \in ID\}$$

cümlesini tanımlayalım [16].  $ID^3$  cümlesi üzerinde aşağıdaki tanımları verelim:

**Tanım 4.1.4.** Her  $\tilde{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3), \tilde{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) \in ID^3$  için  $\tilde{a} = \tilde{b} \Leftrightarrow \bar{a}_i = \bar{b}_i, (i=1,2,3)$  dir [8].

**Tanım 4.1.5.** Her  $\tilde{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3), \tilde{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) \in ID^3$  için  $+: ID^3 \times ID^3 \rightarrow ID^3$  toplama işlemi  $\tilde{a} + \tilde{b} = (\bar{a}_i + \bar{b}_i), (i=1,2,3)$  ile tanımlanır [8].

**Tanım 4.1.6.** Her  $\lambda \in IR$  ve her  $\tilde{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \in ID^3$  için  $\cdot: IR \times ID^3 \rightarrow ID^3$  dış işlemi  $\lambda \cdot \tilde{a} = (\lambda \bar{a}_1, \lambda \bar{a}_2, \lambda \bar{a}_3)$  ile tanımlanır [8].

**Teorem 4.1.4.**  $(ID^3, +, \cdot)$  üçlüsü  $ID$  halkası üzerinde bir modüldür.

$(ID^3, +, \cdot)$  modülüne kısaca  $ID$ -modül denir. Bu modülün elemanları olan sıralı dual üçlülere de dual vektörler denir [8].

**Teorem 4.1.5.**  $\vec{a}, \vec{a}^* \in IR^3$  olmak üzere,  $ID$ -modülün her bir  $\tilde{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \in ID^3$  dual vektörü  $\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$  şeklinde yazılabilir [33].

**Teorem 4.1.6.** Bir dual değişkenli  $f(\bar{a})$  fonksiyonunun Maclaurin serisine açılımı,  $n > 1$  için  $\varepsilon^n = 0$  olduğundan,

$$f(\bar{a}) = f(a + \varepsilon a^*) = f(a) + \varepsilon a^* f'(a) \quad (4.1)$$

dır. Burada  $f'(a), f(a)$  nın  $a$  ya göre türevidir [10].

**Tanım 4.1.7.**  $\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \tilde{b} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in ID^3$  olsun.  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$  dual vektörlerinin Öklid iç çarpımı

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle) \quad (4.2)$$

ile verilir [8].

**Tanım 4.1.8.** Bir  $\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in ID^3$  dual vektörünün normu

$$\|\tilde{a}\| = \sqrt{\langle \tilde{a}, \tilde{a} \rangle} = \left( \|\vec{a}\|, \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \right) \quad (4.3)$$

ile verilen bir dual sayıdır [8].

**Tanım 4.1.9.** Normu  $(1, 0)$  dual sayısına eşit olan dual vektöre dual birim vektör denir. (4.3)

eşitliğinden bir  $\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in ID^3$  dual vektörünün birim olması için gerek ve yeter şartın  $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$ ,  $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$  olduğu görülür [32].

**Tanım 4.1.10.**  $\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ ,  $\tilde{b} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in ID^3$  iki dual birim vektör olsun.  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$  dual vektörlerine karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki açı  $\theta$  ve en kısa uzaklık  $\theta^*$  olmak üzere

$$\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^* \quad (4.4)$$

dual sayısına  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$  dual birim vektörleri arasındaki dual açı denir [32].

**Tanım 4.1.11.**  $\tilde{a}, \tilde{b} \in ID^3$  olmak üzere  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$  dual vektörlerinin vektörel çarpımı,

$$\begin{aligned} \times : ID^3 \times ID^3 &\rightarrow ID^3 \\ (\tilde{a}, \tilde{b}) &\rightarrow \tilde{a} \times \tilde{b} = \vec{a} \times \vec{b} + \varepsilon (\vec{a}^* \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}^*) \end{aligned} \quad (4.5)$$

biçiminde tanımlanır [32].

**Tanım 4.1.12.**  $\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in ID^3$  olmak üzere

$$\tilde{S}^2 = \{ \tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* : \|\tilde{a}\| = (1, 0); \vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3 \} \quad (4.6)$$

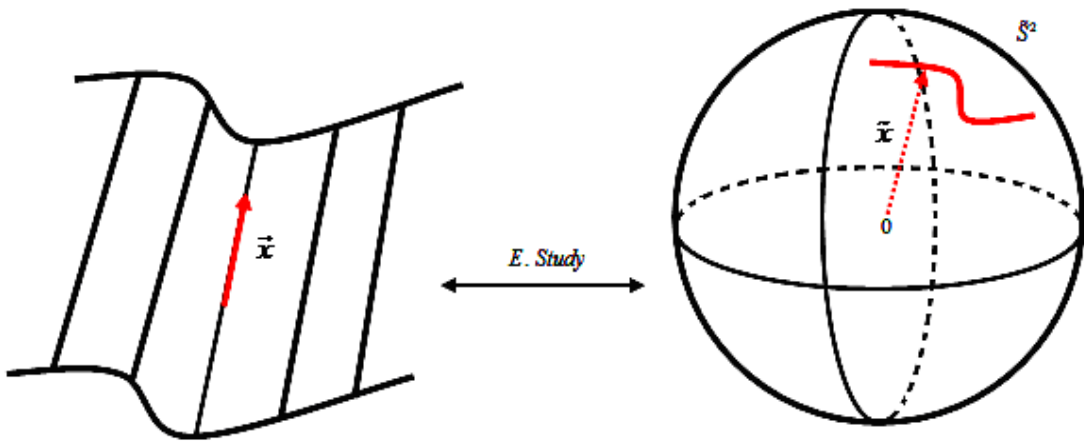
cümlesine birim dual küre denir [8].

#### 4.2. Dual Küresel Eğrilerin Geometrisi

Bu kısımda bir doğrunun hareketiyle meydana gelen regle yüzey, E. Study dönüşümü yardımıyla incelenerek dual darboux türev formülleri verilecektir.

**Teorem 4.2.1. (E.Study Dönüşümü)** Birim dual kürenin noktaları,  $E^3$  deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir [16].

Yani,  $\tilde{x} = \vec{x}(s) + \varepsilon \vec{x}^*(s)$  birim dual vektörünü reel bir  $s$  parametresine bağlı olarak düşünelim. Bu taktirde,  $\tilde{x}$  birim dual vektörü  $\tilde{S}^2$  birim dual küresi üzerinde bir eğri çizer. E.Study dönüşümünden bu eğriye çizgiler uzayında bir regle yüzey karşılık gelir (Şekil 1.1.). Bu  $\tilde{x} = \tilde{x}(s)$  dual küresel eğrisine, çizgiler uzayındaki regle yüzeyinin dual küresel resmi denir [14].



**Şekil 4.1.** Regle yüzeyin E. Study dönüşümü

$\tilde{S}^2$  birim dual küre üzerinde diferansiyellenebilir bir eğri

$$\tilde{x}(s) = \tilde{e}(s) = \vec{e}(s) + \varepsilon \vec{e}^*(s) \quad (4.7)$$

olsun. Burada,  $\vec{e}(s)$  birim vektörünün  $S^2$  birim küresi üzerine çizdiği eğri,  $\tilde{e}(s)$  eğrisinin reel gösterge eğrisidir ve gösterge eğrisinin tek bir noktadan ibaret olmadığı varsayılır. Ayrıca,  $\vec{e}^*(s)$  vektörü moment vektörü olup

$$\vec{e}^*(s) = \vec{c}(s) \times \vec{e}(s) \quad (4.8)$$

ile verilir. Burada

$$\langle \vec{e}, \vec{e} \rangle = 1, \quad \langle \vec{e}', \vec{e}' \rangle = 1, \quad \langle \vec{c}', \vec{e}' \rangle = 0 \quad (4.9)$$

özellikleri sağlanır.

$\vec{t} = \vec{e}'$  vektörü, gösterge eğrisinin teğetine paralel birim vektördür. Dual eğrinin türev normu

$$\|\vec{e}'\| = 1 + \varepsilon \Delta \quad (4.10)$$

biçimide yazılır. Burada  $\Delta = \det(\vec{c}', \vec{e}, \vec{t})$  dir.  $\tilde{e}$  dual eğrisinin yay uzunluğu

$$\bar{s} = \int_0^s \|\vec{e}'(u)\| du = \int_0^s (1 + \varepsilon \Delta) du = s + \varepsilon \int_0^s \Delta du \quad (4.11)$$

olarak verilir. (4.11) denkleminde  $\bar{s}' = 1 + \varepsilon \Delta$  olarak bulunur. Böylece  $\tilde{e}$  dual eğrisinin dual birim teğeti

$$\tilde{t} = \frac{d\tilde{e}}{d\bar{s}} = \frac{\vec{e}'}{\bar{s}'} = \frac{\vec{e}'}{1 + \varepsilon \Delta} = \vec{t} + \varepsilon(\vec{c} \times \vec{t}) \quad (4.12)$$

biçiminde yazılır.  $\tilde{e}$  ve  $\tilde{t}$  birim vektörlerine dik olan üçüncü birim vektör  $\tilde{g}$  da

$$\tilde{g} = \tilde{e} \times \tilde{t} = \vec{g} + \varepsilon(\vec{c} \times \vec{g}) \quad (4.13)$$

biçiminde verilir. Böylece  $\tilde{e}$  dual eğrisinin  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  dual Darboux çatısı elde edilmiş olur. Bu dual vektörler arasında

$$\tilde{e} \times \tilde{t} = \tilde{g}, \quad \tilde{t} \times \tilde{g} = \tilde{e}, \quad \tilde{g} \times \tilde{e} = \tilde{t}$$

bağlantısı vardır. Ayrıca, dual Darboux çatının türev formülleri matris formda,

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \bar{\gamma} \\ 0 & -\bar{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

ifade edilir. Bu Darboux türev formülleri reeldeki türev formüllerini kapsar. Burada  $\bar{\gamma}$  fonksiyonuna dual küresel eğrilik fonksiyonu denir. Darboux ani dönme vektörü

$$\tilde{d} = \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^* = \bar{\gamma} \tilde{e} + \tilde{g} \quad (4.15)$$

dir.

Şimdi, Darboux çatısına bağlı olmak üzere bir dual eğrinin eğrilik elemanlarını bulalım. Burada dual eğrilik yarıçapı

$$\bar{R} = \frac{\|d\tilde{e}/ds\|^3}{\|d\tilde{e}/ds \times d^2\tilde{e}/ds^2\|} = \frac{1}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} \quad (4.16)$$

eşitliğindeki gibidir. Buna göre

$$\tilde{d}_0 = \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} \tilde{e} + \frac{1}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} \tilde{g} \quad (4.17)$$

yazılabilir.  $\tilde{d}_0$  ve  $\tilde{e}$  arasındaki dual açı  $\bar{\varphi}$  olsun.  $\cos \bar{\varphi} = \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}}$ ,  $\sin \bar{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}}$  dir.

$\bar{R} = \sin \bar{\varphi}$ ,  $\bar{\gamma} = \cot \bar{\varphi}$  olduğundan

$$\tilde{d}_0 = \cos \bar{\varphi} \tilde{e} + \sin \bar{\varphi} \tilde{g} \quad (4.18)$$

biçiminde elde edilir.

### 4.3. Dual Küresel Slant Eğriler

Bir doğrunun hareketiyle oluşan yüzeye regle yüzey denir. M. Önder [25,38] bir regle yüzeyin boğaz çizgisi üzerinde bulunan çatı elemanları ile sabit açı yapan bir sabit vektörü dikkate alarak slant regle yüzeyleri tanımlamıştır. İyi bilinir ki E.Study dönüşümünden  $E^3$  uzayındaki yönlü doğrular birim dual kürenin noktalarına birebir karşılık gelir. Böylece bir regle yüzey dual birim küre üzerinde bir eğriye karşılık gelmektedir. Bu bölümde,  $\tilde{S}^2$  birim dual küre üzerindeki slant eğrilerin geometrisi, dual Darboux çatısı ve onun türev formülleri yardımıyla incelenecektir. Ayrıca dual slant eğrilerin, slant regle yüzeyler ile bağlantısı ifade edilecektir.

#### (a) $\tilde{e}$ - Slant Dual Küresel Eğriler

**Tanım 4.3.1.**  $\tilde{x}(s) = \vec{x}(s) + \varepsilon \vec{x}^*(s)$ ,  $\tilde{S}^2$  küresi üzerinde bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$  eğrisinin Darboux çatısı  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  ve dual geodezik eğriliği  $\bar{\gamma} \neq 0$  olarak verilsin. Buna göre  $\tilde{u}$  sıfırdan farklı sabit bir birim dual vektör ve  $\bar{\theta}$ ,  $\tilde{e}$  ve  $\tilde{u}$  birim vektörleri arasındaki dual açı olmak üzere

$$\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = \cos \bar{\theta} = \text{sabit} \quad (4.19)$$

oluyorsa  $\tilde{x}(s)$  eğrisine  $\tilde{e}$  - slant dual küresel eğri denir.

**Teorem 4.3.1.**  $\tilde{x}(s) = \vec{x}(s) + \varepsilon \vec{x}^*(s)$ ,  $\tilde{S}^2$  küresi üzerinde bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\bar{\gamma} \neq 0$  olmak üzere  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$  - slant dual küresel eğridir ancak ve ancak

$$\frac{1}{\bar{\gamma}} = \tan \bar{\theta} \quad (4.20)$$

ifadesi sabittir.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$  - slant dual küresel eğri olsun. Bu takdirde Tanım 4.3.1 den  $\tilde{u}$  bir sabit doğrultu olmak üzere

$$\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = \cos \bar{\theta} = \text{sabit} \quad (4.21)$$

olur. Burada  $\bar{\theta}$ ,  $\tilde{u}$  ve  $\tilde{e}$  birim dual vektörleri arasındaki dual açıdır. (4.21) denkleminin türevi alınırsa  $\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = 0$  bulunur. Yani  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{t}$  vektörüne diktir. Buradan

$$\tilde{u} = \cos \bar{\theta} \tilde{e} + \sin \bar{\theta} \tilde{g} \quad (4.22)$$

yazılabilir.  $\tilde{u}$  sabit olduğundan (4.22) denkleminin türevi alınırsa

$$0 = \cos \bar{\theta} \tilde{t} + \sin \bar{\theta} (-\bar{\gamma} \tilde{t}) \quad (4.23)$$

elde edilir. Buradan  $\frac{1}{\bar{\gamma}} = \tan \bar{\theta}$  bulunur.

( $\Leftarrow$ ):  $\frac{1}{\bar{\gamma}} = \tan \bar{\theta}$  eşitliği sabit olsun.  $\tilde{u}$  birim dual vektörü

$$\tilde{u} = \cos \bar{\theta} \tilde{e} + \sin \bar{\theta} \tilde{g} \quad (4.24)$$

olarak tanımlanır ve türevi alınırsa

$$\tilde{u}' = (\cos \bar{\theta} - \sin \bar{\theta} \bar{\gamma}) \tilde{t} = 0$$

bulunur. Yani  $\tilde{u}$  bir sabit birim dual vektördür. (4.24) eşitliğinden  $\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = \cos \bar{\theta} = \text{sabit}$  olur.

Böylece Tanım 4.3.1 den  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$ -slant dual küresel eğridir.

**Sonuç 4.3.1.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ -slant dual küresel eğri olsun. Bu takdirde, (4.20) nin reel ve dual kısımları, sırasıyla,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\gamma} = \tan \theta \\ -\frac{\gamma^*}{\gamma^2} = \theta^* \sec^2 \theta \end{array} \right. \quad (4.25)$$

biçimindedir.

**İspat:**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ -slant dual küresel eğri olduğundan (4.20) eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\frac{1}{\gamma + \varepsilon \gamma^*} = \tan(\theta + \varepsilon \theta^*)$$

$$\frac{\gamma - \varepsilon \gamma^*}{\gamma^2} = \tan \theta + \varepsilon \theta^* \sec^2 \theta$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1}{\gamma} - \varepsilon \frac{\gamma^*}{\gamma^2} = \tan \theta + \varepsilon \theta^* \sec^2 \theta$$

olur. Son eşitlikte reel ve dual kısımlar karşılaştırılırsa

$$\frac{1}{\gamma} = \tan \theta \quad \text{ve} \quad -\frac{\gamma^*}{\gamma^2} = \theta^* \sec^2 \theta$$

elde edilir. E. Study dönüşümünden bir regle yüzeyin anadoğruları  $\tilde{S}^2$  birim dual küresi üzerindeki diferansiyellenebilir  $\tilde{e}(s) = \vec{e}(s) + \varepsilon \vec{e}^*(s)$  eğrisinin reel kısmı olan  $\vec{e}(s)$  vektörüne karşılık gelmektedir. Bu takdirde (4.25) in ilk eşitliği  $\tilde{e}$  - slant dual küresel eğrisine karşılık gelen bir regle yüzeyin  $\tilde{q}$  - slant regle yüzey olma şartını verir [25,38]. Ayrıca (4.25) in ikinci eşitliğinden  $\theta^*$  ifadesi çekilerek  $\tilde{e}$  ve  $\tilde{u}$  birim dual vektörleri arasındaki dual açı dual invariantlar cinsinden

$$\bar{\theta} = \arctan\left(\frac{1}{\gamma}\right) - \varepsilon \frac{\gamma^*}{\gamma^2} \cos^2 \theta \quad (4.26)$$

olarak elde edilir. Burada  $\arctan\left(\frac{1}{\gamma}\right)$ ,  $\tilde{e}$  ve  $\tilde{u}$  birim dual vektörlerine  $E^3$  çizgiler uzayında

karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki açıdır.  $-\frac{\gamma^*}{\gamma^2} \cos^2 \theta$  ise yine bu doğrular arasındaki en

kısa uzaklıktır.

**Teorem 4.3.2.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatısı ile verilen, dual küresel eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$  - slant dual küresel eğridir ancak ve ancak

$$\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = 0$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:**  $(\Rightarrow)$ :  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$ - slant dual küresel eğri olsun. Dual Darboux türev formüllerinden

$$\tilde{e}' = \tilde{t}$$

$$\tilde{e}'' = -\tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g}$$

$$\tilde{e}''' = -\tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} - \bar{\gamma}^2 \tilde{t}$$

elde edilir. Buradan

$$\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \bar{\gamma} \\ 0 & -(1 + \bar{\gamma}^2) & \bar{\gamma}' \end{vmatrix}$$

$$\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = -\left(\frac{1}{\bar{\gamma}}\right)' \bar{\gamma}^2 \quad (4.27)$$

Teorem 4.3.1. den istenen sonuç bulunur.

$(\Leftarrow)$ :  $\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = 0$  olsun. (4.27) den  $\frac{1}{\bar{\gamma}}$  oranının sabit olduğu açıktır.

Dolayısıyla  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$ - slant dual küresel eğridir.

**Sonuç 5.1.2.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ - slant dual küresel eğri olsun. Bu takdirde,  $\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = 0$  eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = \langle \tilde{e}' \times \tilde{e}'', \tilde{e}''' \rangle = 0$$

$$\det(\vec{e}', \vec{e}'', \vec{e}''') = 0, \quad \det(\vec{e}', \vec{e}'', \vec{e}^{*''}) + \det(\vec{e}', \vec{e}^{*''}, \vec{e}''') + \det(\vec{e}^{*'}, \vec{e}'', \vec{e}''') = 0$$

bulunur. İyi bilinir ki bir regle yüzeyin anadoğruları bir dual eğrinin  $\vec{e}$  reel bileşenine karşılık geldiğinden  $\det(\vec{e}', \vec{e}'', \vec{e}''') = 0$  eşitliği, bir regle yüzeyin  $\vec{q}$ - slant regle yüzey olma şartıdır. Bu

takdirde  $\tilde{e}$  - slant dual küresel eğrisine karşılık gelen bir regle yüzeyin  $\bar{q}$  - slant regle yüzey olma şartını verir [25,38].

**Teorem 4.3.3.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatısı ile verilen, dual küresel eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$  - slant dual küresel eğridir ancak ve ancak

$$\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') = 0$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$ ,  $\tilde{e}$  - slant dual küresel eğri olsun. Dual Darboux türev formüllerinden

$$\begin{aligned}\tilde{g}' &= -\bar{\gamma}\tilde{t} \\ \tilde{g}'' &= \bar{\gamma}\tilde{e} - \bar{\gamma}'\tilde{t} - \bar{\gamma}^2\tilde{g} \\ \tilde{g}''' &= \bar{\gamma}'\tilde{e} + \bar{\gamma}\tilde{t} - \bar{\gamma}''\tilde{t} + \bar{\gamma}'\tilde{e} - \bar{\gamma}\bar{\gamma}'\tilde{g} - 2\bar{\gamma}\bar{\gamma}'\tilde{g} + \bar{\gamma}^3\tilde{t} \\ &= 2\bar{\gamma}'\tilde{e} + (\bar{\gamma}^3 + \bar{\gamma} - \bar{\gamma}'')\tilde{t} - 3\bar{\gamma}\bar{\gamma}'\tilde{g}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') &= \begin{vmatrix} 0 & -\bar{\gamma} & 0 \\ \bar{\gamma} & -\bar{\gamma}' & -\bar{\gamma}^2 \\ 2\bar{\gamma}' & \bar{\gamma}^3 + \bar{\gamma} - \bar{\gamma}'' & -3\bar{\gamma}\bar{\gamma}' \end{vmatrix} \\ &= \bar{\gamma}(-3\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}' + 2\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}') \\ \det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') &= \bar{\gamma}^5 \left( \frac{1}{\bar{\gamma}} \right)'\end{aligned}\tag{4.28}$$

Teorem 4.3.1. den istenen sonuç bulunur.

( $\Leftarrow$ ):  $\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') = 0$  olsun. (4.28) den  $\frac{1}{\bar{\gamma}}$  oranı sabit olduğu açıktır. Dolayısıyla

$\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$  - slant dual küresel eğridir.

**Sonuç 4.3.3.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ - slant dual küresel eğri olsun. Bu takdirde,  $\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') = 0$  eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') = \langle \tilde{g}' \times \tilde{g}'', \tilde{g}''' \rangle = 0$$

$$\det(\bar{g}', \bar{g}'', \bar{g}''') = 0, \quad \det(\bar{g}' \times \bar{g}'', \bar{g}''') + \det(\bar{g}' \times \bar{g}''', \bar{g}'') + \det(\bar{g}'' \times \bar{g}''', \bar{g}') = 0$$

bulunur. Bu takdirde  $\det(\bar{g}', \bar{g}'', \bar{g}''') = 0$  eşitliği,  $\tilde{e}$ - slant dual küresel eğrisine karşılık gelen bir regle yüzeyin  $\bar{q}$ - slant regle yüzey olma şartını verir [25,38].

**Teorem 4.3.4.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatısı ile verilen, dual küresel eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$ - *slant dual küresel eğridir* ancak ve ancak

$$\tilde{e}''' = -(1 + \bar{\gamma}^2) \tilde{e}' \quad (4.29)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$ - slant dual küresel eğri olsun. Darboux türev formüllerinden

$$\tilde{e}' = \tilde{t} \quad (4.30)$$

$$\tilde{e}'' = -\tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g} \quad (4.31)$$

$$\tilde{e}''' = -(1 + \bar{\gamma}^2) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} \quad (4.32)$$

tir.  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ - slant dual küresel eğri olduğundan Teorem 4.3.1 den  $\frac{1}{\bar{\gamma}} = \text{sabit}$  fonksiyonunun

türevi alınır,

$$\bar{\gamma}' = 0 \quad (4.33)$$

olur. (4.30) ve (4.33) denklemleri, (4.32) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{e}''' = -(1 + \bar{\gamma}^2) \tilde{e}' \quad (4.34)$$

elde edilir.

( $\Leftarrow$ ): (4.29) denklemi sağlansın.  $\tilde{t}' = \tilde{e}''$  olduğundan

$$\tilde{t}'' = \tilde{e}''' \quad (4.35)$$

bulunur. (4.29) denklemini (4.35) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{t}'' = -(1 + \bar{\gamma}^2) \tilde{e}' \quad (4.36)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\tilde{t}' = -\tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g} \quad (4.37)$$

$$\tilde{t}'' = -\tilde{e}' + \bar{\gamma}' \tilde{g} - \bar{\gamma}^2 \tilde{t} \quad (4.38)$$

olduğundan (4.36) ve (4.38) denklemleri karşılaştırılırsa

$$-\tilde{e}' + \bar{\gamma}' \tilde{g} - \bar{\gamma}^2 \tilde{t} = -(1 + \bar{\gamma}^2) \tilde{t}$$

olur. Karşılıklı eşitliklerden

$$\bar{\gamma}' = 0 \quad (4.39)$$

elde edilir. (4.39) denkleminin integrali alınır  $\frac{1}{\bar{\gamma}} = \text{sabit}$  bulunur. Böylece  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ - slant dual küresel eğridir.

**Sonuç 4.3.4.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ - slant dual küresel eğri olsun. Bu takdirde, (4.29) reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\begin{aligned} \bar{e}''' + \varepsilon \bar{e}^{*''' } &= -\left(1 + (\gamma + \varepsilon \gamma^*)^2\right)(\bar{e}' + \varepsilon \bar{e}^{*'}) \\ \bar{e}''' &= -(1 + \gamma^2) \bar{e}' \quad , \quad \bar{e}^{*''' } = -2 \gamma \gamma^* \bar{e}' - (1 + \gamma^2) \bar{e}^{*'} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu takdirde  $\bar{e}''' = -(1 + \gamma^2) \bar{e}'$  eşitliği,  $\tilde{e}$ - slant dual küresel eğrisine karşılık gelen bir regle yüzeyin  $\bar{q}$ - slant regle yüzey olma şartını verir [25,38].

**(b)  $\tilde{t}$  - Slant Dual Küresel Eğriler**

**Tanım 4.3.2.**  $\tilde{x}(s) = \vec{x}(s) + \varepsilon \vec{x}^*(s)$ ,  $\tilde{S}^2$  küresi üzerinde bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$  eğrisinin dual Darboux çatısı  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  ve dual geodezik eğriliği  $\bar{\gamma} \neq 0$  olarak verilsin. Buna göre  $\tilde{u}$  sıfırdan farklı sabit bir birim dual vektör ve  $\bar{\theta}$ ,  $\tilde{t}$  ve  $\tilde{u}$  birim vektörleri arasındaki dual açı olmak üzere

$$\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \cos \bar{\theta} = \text{sabit} \quad (4.40)$$

oluyorsa  $\tilde{x}(s)$  eğrisine  $\tilde{t}$  - slant dual küresel eğri denir.

**Teorem 4.3.5.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatısı ile verilen, dual küresel eğriliği sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun. Bu takdirde  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual küresel eğridir ancak ve ancak

$$\frac{\bar{\gamma}'}{(1 + \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{sabit} \quad (4.41)$$

olmasıdır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  -slant dual küresel eğri olsun. Bu takdirde sabit bir  $\tilde{u}$  vektörü için  $\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \cos \bar{\theta} = \bar{c} = \text{sabit}$  olur. Buradan  $\bar{c}$  sabit olmak üzere

$$\tilde{u} = \bar{b}_1 \tilde{e} + \bar{c} \tilde{t} + \bar{b}_2 \tilde{g} \quad (4.42)$$

yazılabilir. (4.42) denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{b}_1' \tilde{e} + \bar{b}_1 \tilde{t} - \bar{c} \tilde{e} + \bar{c} \bar{\gamma} \tilde{g} + \bar{b}_2' \tilde{g} - \bar{b}_2 \bar{\gamma} \tilde{t} \\ 0 &= (\bar{b}_1' - \bar{c}) \tilde{e} + (\bar{b}_1 - \bar{b}_2 \bar{\gamma}) \tilde{t} + (\bar{b}_2' + \bar{c} \bar{\gamma}) \tilde{g} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \bar{b}_1' - \bar{c} = 0, \\ \bar{b}_1 - \bar{b}_2 \bar{\gamma} = 0, \\ \bar{b}_2' + \bar{c} \bar{\gamma} = 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

sistemi elde edilir. (4.43) ün ikinci denkleminde

$$\bar{b}_1 = \bar{b}_2 \bar{\gamma} \quad (4.44)$$

bulunur.  $\tilde{u}$  sabit olduğundan

$$\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle = \bar{b}_1^2 + \bar{c}^2 + \bar{b}_2^2 = \text{sabit} \quad (4.45)$$

olur. Buradan (4.44) denklemini (4.45) de yerine yazılırsa

$$\bar{b}_2^2 \bar{\gamma}^2 + \bar{c}^2 + \bar{b}_2^2 = \bar{b}_2^2 (1 + \bar{\gamma}^2) = \bar{n}^2 = \text{sabit} \quad (4.46)$$

bulunur. Böylece

$$\bar{b}_2 = \pm \frac{\bar{n}}{\sqrt{1 + \bar{\gamma}^2}} \quad (4.47)$$

elde edilir. (4.43) sisteminin son denkleminde

$$\bar{b}_2' = -\bar{c} \bar{\gamma}$$

yani,

$$\frac{d}{ds} \left[ \pm \frac{\bar{n}}{\sqrt{1 + \bar{\gamma}^2}} \right] = -\bar{c} \bar{\gamma} \quad (4.48)$$

olup, bu türev düzenlenirse

$$\pm \frac{\bar{n} \frac{\bar{\gamma}' \bar{\gamma}}{\sqrt{1 + \bar{\gamma}^2}}}{1 + \bar{\gamma}^2} = -\bar{c} \bar{\gamma}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılır ve tekrar düzenlenirse

$$\pm \bar{\gamma}' \frac{1}{(1 + \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \bar{\gamma} = -\frac{\bar{c}}{\bar{n}} \bar{\gamma}$$

olur. Böylece

$$\frac{1}{(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \bar{\gamma}' = \frac{\bar{c}}{\bar{n}} = \bar{d} = \text{sabit}$$

ifadesi elde edilir.

( $\Leftarrow$ ): (4.41) denklemi sağlansın.

$$\tilde{u} = \left( \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} \right) \tilde{e} + \bar{d} \tilde{t} + \left( \frac{1}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} \right) \tilde{g} \quad (4.49)$$

vektörünü ele alalım. (4.49) denkleminin türevi alınırsa

$$\tilde{u}' = \left( \frac{\bar{\gamma}' \sqrt{1+\bar{\gamma}^2} - \bar{\gamma} \frac{\bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}}}{1+\bar{\gamma}^2} \right) \tilde{e} + \left( \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} \right) \tilde{t} - \bar{d} \tilde{e} + \bar{d} \bar{\gamma} \tilde{g} + \left( \frac{-\frac{\bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}}}{1+\bar{\gamma}^2} \right) \tilde{g} - \left( \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} \right) \tilde{t}$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{u}' &= \left( \frac{\bar{\gamma}'(1+\bar{\gamma}^2) - \bar{\gamma}(\bar{\gamma} \bar{\gamma}')}{(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{e} - \bar{d} \tilde{e} + \bar{d} \bar{\gamma} \tilde{g} + \left( \frac{-\bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{g} \\ \tilde{u}' &= \left( \frac{\bar{\gamma}' + \bar{\gamma}' \bar{\gamma}^2 - \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}'}{(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{e} - \bar{d} \tilde{e} + \bar{d} \bar{\gamma} \tilde{g} + \left( \frac{-\bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{g} \\ &= \left( \frac{-\bar{d}(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}} + \bar{\gamma}'}{(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{e} + \left( \frac{\bar{d} \bar{\gamma} (1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}} - \bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{g} \\ &= \left( \frac{-\bar{d}(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}} + \bar{d}(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{e} + \left( \frac{\bar{d} \bar{\gamma} (1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}} - \bar{d} \bar{\gamma} (1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{g} \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $\tilde{u}$  vektörünün sabit olduğu açıktır. Böylece  $\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \text{sabit}$  olup  $\tilde{x}(s)$  bir

$\tilde{t}$  - slant dual küresel eğridir.

**Sonuç 4.3.5.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual küresel eğri olsun. Bu takdirde, (4.41) reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\frac{\gamma'}{\sqrt{(\gamma^2 + 1)^3}} = \text{sabit} \quad , \quad \frac{[\gamma'^*(\gamma^2 + 1) - 3\gamma\gamma'\gamma^*]}{(\gamma^2 + 1)^{5/2}} = \text{sabit}$$

elde edilir.

**İspat:**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual küresel eğri olduğundan (4.41) eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\frac{\bar{\gamma}'}{\sqrt{(\bar{\gamma}^2 + 1)^3}} = \frac{\gamma' + \varepsilon\gamma'^*}{\sqrt{\bar{\gamma}^6 + 3\bar{\gamma}^4 + 3\bar{\gamma}^2 + 1}}$$

yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{\gamma' + \varepsilon\gamma'^*}{\sqrt{\bar{\gamma}^6 + 3\bar{\gamma}^4 + 3\bar{\gamma}^2 + 1}} = \frac{\gamma' + \varepsilon\gamma'^*}{\sqrt{(\gamma^2 + 1)^3 + \varepsilon(\gamma^2 + 1)^2 6\gamma\gamma^*}}$$

bulunur. Payda kökten kurtarılarak

$$\frac{\gamma'}{\sqrt{(\gamma^2 + 1)^3}} + \varepsilon \frac{[\gamma'^*(\gamma^2 + 1) - 3\gamma\gamma'\gamma^*]}{\sqrt{(\gamma^2 + 1)^5}} = \text{sabit}$$

elde edilir. Bu takdirde  $\frac{\gamma'}{\sqrt{(\gamma^2 + 1)^3}} = \text{sabit}$  ifadesi,  $\tilde{t}$  - slant dual küresel eğrisine karşılık

gelen bir regle yüzeyin  $\tilde{h}$  - slant regle yüzey olma şartını verir [25,38].

**Teorem 4.3.6.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual küresel eğridir ancak ve ancak

$$\bar{\gamma} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\tan^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2}} \quad (4.50)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:**  $(\Rightarrow)$ :  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual küresel eğri olsun. Bu takdirde

$$\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \cos \bar{\theta} = \text{sabit} \quad (4.51)$$

olur. (4.51) denkleminin türevi alınır

$$\langle -\tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = 0 \quad (4.52)$$

$$\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = \bar{\gamma} \langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle \quad (4.53)$$

bulunur.  $\langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = \bar{x}$  olsun. Böylece

$$\tilde{u} = \bar{\gamma} \bar{x} \tilde{e} + \cos \bar{\theta} \tilde{t} + \bar{x} \tilde{g} \quad (4.54)$$

olur.  $\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle = 1$  olduğundan

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^2 \bar{x}^2 + \cos^2 \bar{\theta} + \bar{x}^2 &= 1 \\ \bar{x}^2 (1 + \bar{\gamma}^2) &= \sin^2 \bar{\theta} \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \pm \frac{\sin \bar{\theta}}{\sqrt{1 + \bar{\gamma}^2}} \quad (4.55)$$

bulunur. Böylece (4.55) denkleminde

$$\tilde{u} = \pm \frac{\bar{\gamma} \sin \bar{\theta}}{\sqrt{1 + \bar{\gamma}^2}} \tilde{e} + \cos \bar{\theta} \tilde{t} \pm \frac{\sin \bar{\theta}}{\sqrt{1 + \bar{\gamma}^2}} \tilde{g} \quad (4.56)$$

olur. (4.52) denkleminin türevi alınır

$$\langle -\tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} - \bar{\gamma}^2 \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \langle -(1 + \bar{\gamma}^2) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = 0 \quad (4.57)$$

elde edilir. Buradan

$$-(1+\bar{\gamma}^2)\langle\tilde{t},\tilde{u}\rangle+\bar{\gamma}'\langle\tilde{g},\tilde{u}\rangle=-(1+\bar{\gamma}^2)\cos\bar{\theta}+\bar{\gamma}'\bar{x}=0$$

$$\bar{x}=\frac{(1+\bar{\gamma}^2)\cos\bar{\theta}}{\bar{\gamma}'} \quad (4.58)$$

bulunur. (4.55) ve (4.58) denklemleri eşitlenirse

$$\begin{aligned} \pm\frac{\sin\bar{\theta}}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}}&=\frac{(1+\bar{\gamma}^2)\cos\bar{\theta}}{\bar{\gamma}'} \\ \pm\tan\bar{\theta}\frac{\bar{\gamma}'}{(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}}+1&=0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

olur ve (4.59) denkleminin integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \pm\tan\bar{\theta}\frac{d\bar{\gamma}}{(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{d\bar{s}}+1&=0 \\ \pm\tan\bar{\theta}\int\frac{d\bar{\gamma}}{(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}}+\int d\bar{s}&=0 \\ \pm\tan\bar{\theta}\frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}}+\bar{s}+\bar{c}&=0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

Şimdi  $\bar{s}\rightarrow\bar{s}-\bar{c}$  dönüşümü yapılırsa

$$\pm\tan\bar{\theta}\frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}}=-\bar{s} \quad (4.61)$$

bulunur. (4.61) denkleminin karesi alınırsa

$$\begin{aligned} \tan^2\bar{\theta}\frac{\bar{\gamma}^2}{1+\bar{\gamma}^2}&=\bar{s}^2 \\ \bar{\gamma}^2\tan^2\bar{\theta}&=\bar{s}^2+\bar{s}^2\bar{\gamma}^2 \end{aligned}$$

$$\bar{\gamma}^2 (\tan^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2) = \bar{s}^2$$

$$\bar{\gamma} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\tan^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2}}$$

elde edilir.

$$(\Leftarrow): \bar{\gamma} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\tan^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2}} \text{ sağlansın.}$$

$$\bar{x} = \pm \frac{\sin \bar{\theta}}{\sqrt{1 + \bar{\gamma}^2}} = \pm \frac{\sin \bar{\theta}}{\sqrt{1 + \frac{\bar{s}^2}{\tan^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2}}}$$

$$\bar{x} = \pm \cos \bar{\theta} \sqrt{\tan^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2} \quad (4.62)$$

alalım.

$$\bar{\gamma} \bar{x} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\tan^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2}} \left( \pm \cos \bar{\theta} \sqrt{\tan^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2} \right) = \bar{s} \cos \bar{\theta}$$

olur. Şimdi

$$\tilde{u} = \bar{\gamma} \bar{x} \tilde{e} + \cos \bar{\theta} \tilde{t} + \bar{x} \tilde{g} = \cos \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{e} + \tilde{t} \pm \sqrt{\tan^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2} \tilde{g} \right)$$

vektörünün sabit olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \tilde{u}' &= \cos \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{t} + \bar{\gamma} \tilde{g} \pm \frac{-\bar{s}}{\sqrt{\tan^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2}} \tilde{g} \mp \bar{\gamma} \sqrt{\tan^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2} \tilde{t} \right) \\ &= \cos \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{t} \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\tan^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2}} \tilde{g} \pm \frac{-\bar{s}}{\sqrt{\tan^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2}} \tilde{g} \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\tan^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2}} \left( \mp \sqrt{\tan^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2} \right) \tilde{t} \right) \\ &= \cos \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{t} \pm (\mp \bar{s}) \tilde{t} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\tilde{u} = \cos \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{e} + \tilde{t} \pm \left( \sqrt{\tan^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2} \right) \tilde{g} \right) \quad (4.63)$$

sabit bir vektördür. Böylece  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual küresel eğridir.

**Sonuç 4.3.6.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual küresel eğri olsun. Bu takdirde, (4.50) reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{\tan^2 \theta - s^2}}, \quad \gamma^* = \pm \frac{\tan \theta (s^* \tan \theta - s \theta^* (1 + \tan^2 \theta))}{\sqrt{(\tan^2 \theta - s^2)^3}}$$

bulunur.

**İspat:**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual küresel eğri olduğundan (4.50) eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\bar{\gamma}^2 = \frac{\bar{s}^2}{\tan^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2} = \frac{(s + \varepsilon s^*)^2}{\tan^2 (\theta + \varepsilon \theta^*) - (s + \varepsilon s^*)^2}$$

yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{(s + \varepsilon s^*)^2}{\tan^2 (\theta + \varepsilon \theta^*) - (s + \varepsilon s^*)^2} = \frac{s^2 + \varepsilon 2ss^*}{(\tan^2 \theta - s^2) + \varepsilon 2[\theta^* (1 + \tan^2 \theta) \tan \theta - ss^*]}$$

bulunur. Payda eşleniği ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{s^2}{(\tan^2 \theta - s^2)} + \varepsilon \frac{2s \tan \theta [s^* \tan \theta - s \theta^* (1 + \tan^2 \theta)]}{(\tan^2 \theta - s^2)^2} = \gamma^2 + \varepsilon 2\gamma\gamma^*$$

elde edilir. Taraf tarafa eşleştirilip  $\gamma$  değeri yerine yazılırsa,

$$\gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{\tan^2 \theta - s^2}}, \quad \gamma^* = \pm \frac{\tan \theta (s^* \tan \theta - s \theta^* (1 + \tan^2 \theta))}{\sqrt{(\tan^2 \theta - s^2)^3}}$$

elde edilir. Bu takdirde ilk eşitlik  $\tilde{t}$  - slant dual küresel eğrisine karşılık gelen bir regle yüzeyin  $\bar{h}$  - slant regle yüzey olma şartını verir [25,38].

**(c)  $\tilde{g}$  - Slant Dual Küresel Eğriler**

**Tanım 4.3.3.**  $\tilde{x}(s) = \vec{x}(s) + \varepsilon \vec{x}^*(s)$ ,  $\tilde{S}^2$  küresi üzerinde bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$  eğrisinin Darboux çatısı  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  ve dual geodezik eğriliği  $\bar{\gamma} \neq 0$  olarak verilsin. Buna göre  $\tilde{u}$  sıfırdan farklı sabit bir birim dual vektör ve  $\bar{\theta}$ ,  $\tilde{g}$  ve  $\tilde{u}$  birim vektörleri arasındaki dual açı olmak üzere

$$\langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = \cos \bar{\theta} = \text{sabit} \quad (4.64)$$

oluyorsa  $\tilde{x}(s)$  eğrisine  $\tilde{g}$  - slant dual küresel eğri denir.

$\tilde{g}$  - slant dual küresel eğrilerin  $\tilde{e}$  - slant dual küresel eğriler olduğu açıktır. Dolayısıyla,  $\tilde{e}$  - slant dual küresel eğriler için geçerli olan tüm karakterizasyonlar  $\tilde{g}$  - slant dual küresel eğriler için de geçerlidir.

**Örnek 4.1.**

$$\tilde{a}(t) = \vec{a}(t) + \varepsilon \vec{a}^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(-\sin t, \cos t, 1) + \varepsilon (\sin t, -\cos t, 1)]$$

parametrizasyonu ile verilen ve tek kanatlı hiperboloide karşılık gelen birim hızlı dual eğrinin  $\tilde{e}$  - slant,  $\tilde{t}$  - slant ve  $\tilde{g}$  - slant dual küresel eğri olduğunu gösterelim:

Şimdi bu eğrinin  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  dual Darboux çatı elemanlarını bulalım

$$\tilde{e}(t) = \tilde{a}(t)$$

dir.  $s = s(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2}} dl$  parametre değişimi yapılırsa ve  $t = \sqrt{2}s$  olur. Buradan

$$\tilde{e}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin \sqrt{2}s, \cos \sqrt{2}s, 1) + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \sqrt{2}s, -\cos \sqrt{2}s, 1)$$

yazılır.

$$\tilde{t}(s) = e'(s) = (-\cos \sqrt{2}s, -\sin \sqrt{2}s, 0)$$

ve

$$\vec{g}(s) = \vec{e}(s) \times \vec{t}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin \sqrt{2}s & \cos \sqrt{2}s & 1 \\ -\cos \sqrt{2}s & -\sin \sqrt{2}s & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \sqrt{2}s, -\cos \sqrt{2}s, 1)$$

olur.  $\vec{c}(s) = (\cos \sqrt{2}s, \sin \sqrt{2}s, 0)$  olduğundan

$$\vec{t}^*(s) = \vec{c}(s) \times \vec{t}(s) = (0, 0, 0)$$

$$\vec{g}^*(s) = \vec{c}(s) \times \vec{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \sqrt{2}s, \cos \sqrt{2}s, -1)$$

olur. Buradan

$$\vec{t}(s) = \vec{t}(s) + \varepsilon \vec{t}^*(s) = (-\cos \sqrt{2}s, -\sin \sqrt{2}s, 0)$$

ve

$$\vec{g}(s) = \vec{g}(s) + \varepsilon \vec{g}^*(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \sqrt{2}s, -\cos \sqrt{2}s, 1) + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \sqrt{2}s, -\cos \sqrt{2}s, -1)$$

elde edilir. Şimdi  $\bar{\gamma}$  dual küresel eğrilik fonksiyonunu bulalım.  $\vec{g}'(s) = -\gamma \vec{t}(s)$  olduğundan  $\gamma = 1$  dir.

$$\Delta = \det(\vec{c}', \vec{e}, \vec{t}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \begin{vmatrix} -\sin \sqrt{2}s & \cos \sqrt{2}s & 0 \\ -\sin \sqrt{2}s & \cos \sqrt{2}s & 1 \\ -\cos \sqrt{2}s & -\sin \sqrt{2}s & 0 \end{vmatrix} = -1$$

ve

$$\delta = \langle \vec{c}', \vec{e} \rangle = \langle (-\sin \sqrt{2}s, \cos \sqrt{2}s, 0), (-\sin \sqrt{2}s, \cos \sqrt{2}s, 1) \rangle = 1$$

bulunur. Buradan

$$\bar{\gamma} = \gamma + \varepsilon(\delta - \gamma\Delta) = 1 + 2\varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla,  $\bar{\gamma}$  bir sabit olduğundan Teorem 4.3.1 den eğrimiz bir  $\tilde{e}$ - slant dual küresel eğridir.  $\tilde{e}$ - slant dual küresel eğriler,  $\tilde{g}$ - slant eğriler olduğundan, aynı zamanda bir  $\tilde{g}$ - slant dual küresel eğridir. Ayrıca  $\frac{1}{\bar{\gamma}}$  ifadesi sabit olduğundan  $\frac{\bar{\gamma}'}{(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}}$  değeri de sabittir.

Böylece Teorem 4.3.5 ten, eğrimizin  $\tilde{t}$ - slant dual küresel eğri olduğu görülmüş olur.

Ayrıca, dual Darboux çatının ani dönme vektörü

$$\tilde{d} = (1+2\varepsilon)\tilde{e} + \tilde{g} = (0,0,\sqrt{2}) + \varepsilon(0,0,\sqrt{2})$$

olarak yazılır. Dual eğrilik yarıçapı  $\bar{R} = \frac{1}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2}$  bulunur.  $\bar{R} = \sin \bar{\rho}$  olduğundan

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \rho + \varepsilon \rho^* \cos \rho$$

olur. Karşılıklı elemanlar eşleştirilirse  $\rho = \frac{3}{4}\pi$  ve  $\rho^* = 1$  olur. Buradan dual küresel eğrilik

yarıçapı  $\bar{\rho} = \rho + \varepsilon \rho^* = \frac{3}{4}\pi + \varepsilon$  bulunur.

## 5. DUAL LORENTZİYEN UZAYDA KÜRESEL SLANT EĞRİLER

Bu bölümde,  $ID_1^3$  dual uzayının temel kavramları ile birim dual küresel eğrilerin geometrisi verilecektir. Son olarak,  $ID_1^3$  dual Lorentziyen uzayının birim dual hiperbolik ve Lorentziyen küreleri üzerindeki slant eğriler tanımlanarak, bu eğrilerle ilgili temel teoremler ifade ve ispat edilecektir.

### 5.1. $ID_1^3$ Dual Lorentziyen Uzayının Temel Kavramları

$ID^3$  dual uzayı üzerinde iç çarpım olarak Lorentziyen iç çarpım alınırsa  $ID^3$  uzayına dual Lorentziyen uzay denir.  $ID_1^3$  ile gösterilen bu uzay

$$ID_1^3 = \{\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* : \vec{a}, \vec{a}^* \in IR_1^3\} \quad (5.1)$$

biçiminde ifade edilebilir [33].

**Tanım 5.1.1.**  $\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in ID_1^3$  olsun.

- i.  $\vec{a} \in IR_1^3$  bir spacelike vektör ise,  $\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in ID_1^3$  vektörüne dual spacelike vektör,
- ii.  $\vec{a} \in IR_1^3$  bir timelike vektör ise,  $\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in ID_1^3$  vektörüne dual timelike vektör,
- iii.  $\vec{a} \in IR_1^3$  bir null (lightlike) vektör ise,  $\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in ID_1^3$  vektörüne dual null (lightlike) vektör denir [33].

**Tanım 5.1.2.**  $\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$  ve  $\tilde{b} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in ID_1^3$  olmak üzere dual Lorentziyen skaler çarpım ve dual Lorentziyen vektörel çarpım sırasıyla

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle) \quad (5.2)$$

ve

$$\tilde{a} \times \tilde{b} = \vec{a} \times \vec{b} + \varepsilon (\vec{a} \times \vec{b}^* + \vec{a}^* \times \vec{b}) \quad (5.3)$$

olarak tanımlanır. Burada " $\langle , \rangle$ " Lorentziyen iç çarpımı ve " $\times$ " Lorentziyen vektörel çarpımı gösterir [33].

**Tanım 5.1.3.** Bir  $\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in ID_1^3$  dual vektörünün normu

$$\|\tilde{a}\| = \|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \quad (5.4)$$

biçiminde verilir [33].

**Tanım 5.1.4.**  $\tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in ID_1^3$  olmak üzere

$$\tilde{S}_1^2 = \{ \tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in ID_1^3 : \langle \tilde{a}, \tilde{a} \rangle = 1 \} \quad (5.5)$$

cümlesine birim dual Lorentziyen küre ve

$$\tilde{H}_0^2 = \{ \tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in ID_1^3 : \langle \tilde{a}, \tilde{a} \rangle = -1 \} \quad (5.6)$$

cümlesine ise birim dual hiperbolik küre denir [34].

**Teorem 5.1.1. (E. Study Dönüşümü)**  $ID_1^3$  uzayındaki  $\tilde{S}_1^2$  birim dual Lorentziyen kürenin ve  $\tilde{H}_0^2$  birim dual hiperbolik kürenin noktaları, sırasıyla,  $IR_1^3$  Lorentziyen uzayındaki yönlü spacelike ve timelike doğrulara birebir karşılık gelirler [33].

**Tanım 5.1.5. i. Dual hiperbolik açı:**  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$ ,  $ID_1^3$  uzayında iki birim dual timelike vektör olsun.

$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = -\cosh \bar{\theta}$  olacak şekilde  $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$  dual sayısına  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$  birim dual vektörleri arasındaki dual hiperbolik açı denir. Burada  $\theta$  ve  $\theta^*$  sırasıyla birim dual vektörlere karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki hiperbolik açı ve en kısa uzaklıktır [32].

**ii. Dual merkez açı:**  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$ ,  $ID_1^3$  uzayında iki birim dual spacelike vektör ve bu vektörlerin gerdiği dual düzlem timelike olsun.  $\left| \langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle \right| = \cosh \bar{\theta}$  olacak şekilde  $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$  dual sayısına  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$  birim dual vektörleri arasındaki dual merkez açı denir. Burada  $\theta$  ve  $\theta^*$  sırasıyla birim dual vektörlere karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki merkez açı ve en kısa uzaklıktır [32].

**iii. Dual spacelike açı:**  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$ ,  $ID_1^3$  uzayında iki birim dual spacelike vektör ve bu vektörlerin gerdiği dual düzlem spacelike olsun.  $\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \cos \bar{\theta}$  olacak şekilde  $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$  dual sayısına  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$  birim dual vektörleri arasındaki dual spacelike açı denir. Burada  $\theta$  ve  $\theta^*$  sırasıyla birim dual vektörlere karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki spacelike açı ve en kısa uzaklıktır [32].

**iv. Dual Lorentziyen timelike açı:**  $\tilde{a}$ ,  $ID_1^3$  uzayında bir birim dual spacelike vektör ve  $\tilde{b}$ ,  $ID_1^3$  uzayında bir birim dual timelike vektör olsun.  $\left| \langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle \right| = \sinh \bar{\theta}$  olacak şekilde  $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$  dual sayısına  $\tilde{a}$  ve  $\tilde{b}$  birim dual vektörleri arasındaki dual Lorentziyen timelike açı denir. Burada  $\theta$  ve  $\theta^*$  sırasıyla birim dual vektörlere karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki Lorentziyen timelike açı ve en kısa uzaklıktır [32].

## 5.2. Dual Hiperbolik ve Lorentziyen Küresel Eğrilerin Geometrisi

Bu kısımda ilk olarak birim dual hiperbolik küre üzerindeki eğrinin dual darboux türev formülleri elde edilerek bu formüller yardımıyla dual invariantları verilecektir. Daha sonra aynı ifadeler birim dual Lorentziyen küre üzerindeki dual eğri için incelenecektir.

### 5.2.1. Dual Hiperbolik Küresel Eğrilerin Geometrisi

Bir birim dual timelike vektörünü reel bir  $s$  parametresine bağlı olarak düşünelim. Bu taktirde, düşünülen dual birim vektör  $\tilde{H}_0^2$  dual hiperbolik birim küresi üzerinde bir dual eğri çizer.

Dual hiperbolik birim küre üzerinde diferansiyellenebilir bu eğri

$$\tilde{e}(s) = \vec{e}(s) + \varepsilon \vec{e}^*(s) \quad (5.7)$$

ile gösterilsin. Burada  $\vec{e}(s)$  birim vektörünün reel hiperbolik birim küre üzerine çizdiği eğri,  $\tilde{e}(s)$  eğrisinin reel göstergesidir ve gösterge eğrisinin tek bir noktadan ibaret olmadığı varsayılır. Ayrıca  $\vec{e}^*(s)$  moment vektörü olup

$$\vec{e}^*(s) = \vec{c}(s) \times \vec{e}(s) \quad (5.8)$$

biçiminde yazılır. Burada

$$\langle \vec{e}, \vec{e} \rangle = -1, \quad \langle \vec{e}', \vec{e}' \rangle = 1, \quad \langle \vec{c}', \vec{e}' \rangle = 0 \quad (5.9)$$

özellikleri sağlanır [24].

$\vec{t} = \vec{e}'$  vektörü, gösterge eğrisinin teğetine paralel birim vektördür. (5.9) denklemlerinden  $\vec{e}$  nin timelike vektör ve  $\vec{t}$  nin spacelike vektör olduğu görülür.

Dual hiperbolik eğrinin türevinin normu

$$\|\tilde{e}'\| = 1 - \varepsilon \Delta \quad (5.10)$$

biçiminde yazılabilir. Burada  $\Delta = \det(\vec{c}', \vec{e}, \vec{t})$  açılabilir timelike doğuranlı timelike regle yüzeyleri karakterize eder. Timelike doğuranlı timelike regle yüzeylerin açılabilir olması için gerek ve yeter şart  $\Delta = 0$  olmasıdır.  $\tilde{e}$  dual eğrisinin yay uzunluğu

$$\bar{s} = \int_0^s \|\tilde{e}'(u)\| du = \int_0^s (1 - \varepsilon \Delta) du = s - \varepsilon \int_0^s \Delta du \quad (5.11)$$

olarak verilir [24]. (5.11) denkleminde  $\vec{s}' = 1 - \varepsilon \Delta$  olduğu görülür. Böylece  $\tilde{e}(s)$  dual eğrisinin dual birim teğeti

$$\tilde{t} = \frac{d\tilde{e}}{d\vec{s}} = \frac{\tilde{e}'}{\vec{s}'} = \frac{\tilde{e}'}{1 - \varepsilon \Delta} = \tilde{t} + \varepsilon(\vec{c} \times \tilde{t}) \quad (5.12)$$

biçiminde verilir.  $\tilde{g}$  dual birim vektörü de

$$\tilde{g} = -\tilde{e} \times \tilde{t} = \vec{g} + \varepsilon(\vec{c} \times \vec{g}) \quad (5.13)$$

biçiminde verilebilir [24]. Burada  $\tilde{e}$  timelike vektör,  $\tilde{t}$  spacelike vektör olduğundan  $\vec{g}$  spacelike vektördür. Böylece  $\tilde{e}$  dual eğrisinin dual Darboux çatısı olarak bilinen  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  dual çatısı elde edilir. Bu vektörler arasında

$$\tilde{e} \times \tilde{t} = -\tilde{g}, \quad \tilde{t} \times \tilde{g} = \tilde{e}, \quad \tilde{g} \times \tilde{e} = -\tilde{t}$$

bağıntıları vardır [24]. Dual Darboux çatının türev formülleri matris formda,

$$\frac{d}{d\vec{s}} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \bar{\gamma} \\ 0 & -\bar{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

şeklinde yazılabilir [24]. Burada  $\bar{\gamma}$  dual küresel eğrilik fonksiyonu denir. Dual Darboux üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü

$$\tilde{d} = \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^* = -\bar{\gamma} \tilde{e} - \tilde{g} \quad (5.15)$$

dir.

Şimdi dual Darboux çatısına bağlı olmak üzere bir dual eğrinin eğrilik elemanlarını bulalım. Burada dual eğrilik yarıçapı

$$\bar{R} = \frac{\|d\tilde{e}/d\vec{s}\|^3}{\|d\tilde{e}/d\vec{s} \times d^2\tilde{e}/d\vec{s}^2\|} = \frac{1}{\sqrt{|1 - \bar{\gamma}^2|}} \quad (5.16)$$

eşitliğindeki gibidir.  $\tilde{d}$  ile lineer bağımlı olan  $\tilde{d}_0$  birim dual Darboux vektörü

$$\tilde{d}_0 = -\frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{|1-\bar{\gamma}^2|}}\tilde{e} - \frac{1}{\sqrt{|1-\bar{\gamma}^2|}}\tilde{g} \quad (5.17)$$

yazılabilir. Eğer  $|\bar{\gamma}| > 1$  (ya da  $|\bar{\gamma}| < 1$ ) ise,  $\tilde{d}_0$  timelike (ya da spacelike) vektördür. Buradan  $\tilde{d}_0$  ve  $\tilde{e}$  arasındaki dual açı

$$\begin{cases} \cosh \bar{\theta} = -\frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{|1-\bar{\gamma}^2|}}, & \sinh \bar{\theta} = -\frac{1}{\sqrt{|1-\bar{\gamma}^2|}}, & |\bar{\gamma}| > 1 \\ \sinh \bar{\theta} = -\frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{|1-\bar{\gamma}^2|}}, & \cosh \bar{\theta} = -\frac{1}{\sqrt{|1-\bar{\gamma}^2|}}, & |\bar{\gamma}| < 1 \end{cases} \quad (5.18)$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan

$$\bar{R} = \begin{cases} -\sinh \bar{\theta}, & |\bar{\gamma}| > 1 \\ -\cosh \bar{\theta}, & |\bar{\gamma}| < 1 \end{cases} \quad ve \quad \bar{\gamma} = \begin{cases} \coth \bar{\theta}, & |\bar{\gamma}| > 1 \\ \tanh \bar{\theta}, & |\bar{\gamma}| < 1 \end{cases} \quad (5.19)$$

olur [24].

### 5.2.2. Dual Lorentziyen Küresel Eğrilerin Geometrisi

Dual Lorentziyen küre üzerinde hem spacelike hem de timelike eğriler bulunduğundan, bu eğriler iki ayrı kısımda incelenecektir.

#### 5.2.2.1. Dual Lorentziyen Küresel Timelike Eğriler

Bir birim dual spacelike vektörünü reel bir  $s$  parametresine bağlı olarak düşünelim. Bu taktirde, düşünülen dual birim vektör  $\tilde{S}_1^2$  dual Lorentziyen birim küresi üzerinde bir dual eğri çizer.

Dual Lorentziyen birim küre üzerinde diferansiyellenebilir bu eğri

$$\tilde{e}(s) = \vec{e}(s) + \varepsilon \vec{e}^*(s) \quad (5.20)$$

ile gösterilsin. Burada  $\vec{e}(s)$  birim vektörünün  $\tilde{S}_1^2$  birim küresi üzerine çizdiği eğri,  $\tilde{e}(s)$  eğrisinin reel göstergesidir ve gösterge eğrisinin tek bir noktadan ibaret olmadığı varsayılır. Ayrıca  $\vec{e}^*(s)$  moment vektörü olup

$$\vec{e}^*(s) = \vec{c}(s) \times \vec{e}(s) \quad (5.21)$$

biçiminde yazılır. Burada

$$\langle \vec{e}, \vec{e} \rangle = 1, \quad \langle \vec{e}', \vec{e}' \rangle = -1, \quad \langle \vec{c}', \vec{e}' \rangle = 0 \quad (5.22)$$

özellikleri sağlanır.

$\vec{t} = \vec{e}'$  vektörü, gösterge eğrisinin teğetine paralel birim timelike vektördür. Dual eğrinin türevinin normu

$$\|\tilde{e}'\| = 1 + \varepsilon \Delta \quad (5.23)$$

biçiminde yazılabilir [23]. Burada  $\Delta = \det(\vec{c}', \vec{e}, \vec{t})$  açılabilir spacelike regle yüzeyleri karakterize eder. Spacelike regle yüzeylerin açılabilir olması için gerek ve yeter şart  $\Delta = 0$  olmasıdır.  $\tilde{e}$  dual eğrisinin yay uzunluğu

$$\bar{s} = \int_0^s \|\tilde{e}'(u)\| du = \int_0^s (1 + \varepsilon \Delta) du = s + \varepsilon \int_0^s \Delta du \quad (5.24)$$

olarak verilir [23]. (5.24) denkleminde  $\bar{s}' = 1 + \varepsilon \Delta$  olduğu görülür. Böylece  $\tilde{e}(s)$  dual eğrisinin dual birim teğeti

$$\tilde{t} = \frac{d\tilde{e}}{d\bar{s}} = \frac{\tilde{e}'}{\bar{s}'} = \frac{\tilde{e}'}{1 + \varepsilon \Delta} = \vec{t} + \varepsilon (\vec{c} \times \vec{t}) \quad (5.25)$$

biçiminde verilir.  $\tilde{g}$  dual birim vektörü de

$$\tilde{g} = -\tilde{e} \times \tilde{t} = \vec{g} + \varepsilon (\vec{c} \times \vec{g}) \quad (5.26)$$

biçiminde verilebilir. Burada  $\vec{e}$  spacelike vektör,  $\vec{t}$  timelike vektör olduğundan  $\vec{g}$  spacelike vektördür. Böylece  $\tilde{e}$  dual Lorentziyen eğrisinin dual Darboux çatısı olarak bilinen  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  dual çatısı elde edilir.

Dual Darboux çatının türev formülleri matris formda,

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \bar{\gamma} \\ 0 & \bar{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

şeklinde yazılabilir [23]. Burada  $\bar{\gamma}$  dual küresel eğrilik fonksiyonu denir. Dual Darboux üç yüzölçüsünün Darboux ani dönme vektörü

$$\tilde{d} = \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^* = -\bar{\gamma} \tilde{e} + \tilde{g} \quad (5.28)$$

dir.

Şimdi dual Darboux çatısına bağlı olmak üzere bir dual eğrinin eğrilik elemanlarını bulalım. Burada dual eğrilik yarıçapı

$$\bar{R} = \frac{\|d\tilde{e}/ds\|^3}{\|d\tilde{e}/ds \times d^2\tilde{e}/ds^2\|} = \frac{1}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} \quad (5.29)$$

eşitliğindeki gibidir.  $\tilde{d}$  ile lineer bağımlı olan  $\tilde{d}_0$  birim Darboux vektörü

$$\tilde{d}_0 = -\frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} \tilde{e} + \frac{1}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} \tilde{g} \quad (5.30)$$

yazılabilir.  $\tilde{d}_0$  spacelike vektördür. Buradan  $\tilde{d}_0$  ve  $\tilde{e}$  arasındaki dual açı

$$\sin \bar{\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} = \bar{R}, \quad \cos \bar{\theta} = \frac{-\bar{\gamma}}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} \quad (5.31)$$

olur [23].

#### 5.2.2.2. Dual Lorentziyen Küresel Spacelike Eğriler

Bir birim dual spacelike vektörünü reel bir  $s$  parametresine bağlı olarak düşünelim. Bu takdirde, düşünülen dual birim vektör  $\tilde{S}_1^2$  dual Lorentziyen birim küresi üzerinde bir dual eğri çizer.

Dual Lorentziyen birim küre üzerinde diferansiyellenebilir bu eğri

$$\tilde{e}(s) = \vec{e}(s) + \varepsilon \vec{e}^*(s) \quad (5.32)$$

ile gösterilsin. Burada  $\vec{e}(s)$  birim vektörünün  $S_1^2$  birim küre üzerine çizdiği eğri,  $\tilde{e}(s)$  eğrisinin reel göstergesidir ve gösterge eğrisinin tek bir noktadan ibaret olmadığı varsayılır. Ayrıca  $\vec{e}^*(s)$  moment vektörü olup

$$\vec{e}^*(s) = \vec{c}(s) \times \vec{e}(s) \quad (5.33)$$

biçiminde yazılır. Burada

$$\langle \vec{e}, \vec{e} \rangle = 1, \quad \langle \vec{e}', \vec{e}' \rangle = 1, \quad \langle \vec{c}', \vec{e}' \rangle = 0 \quad (5.34)$$

özellikleri sağlanır [32].

$\vec{t} = \vec{e}'$  vektörü, gösterge eğrisinin teğetine paralel birim vektördür. (5.34) denklemlerinden  $\vec{e}$  ve  $\vec{t}$  nin spacelike vektör olduğu görülür.

Dual Lorentziyen eğrinin türevinin normu

$$\|\tilde{e}'\| = 1 - \varepsilon \Delta \quad (5.35)$$

biçiminde yazılabilir [32]. Burada  $\Delta = \det(\vec{c}', \vec{e}, \vec{t})$  açılabilir spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyleri karakterize eder. Spacelike doğuranlı timelike regle yüzeylerin açılabilir olması için gerek ve yeter şart  $\Delta = 0$  olmasıdır.  $\tilde{e}$  dual eğrisinin yay uzunluğu

$$\bar{s} = \int_0^s \|\tilde{e}'(u)\| du = \int_0^s (1 - \varepsilon \Delta) du = s - \varepsilon \int_0^s \Delta du \quad (5.36)$$

olarak verilir. (5.36) denkleminde  $\bar{s}' = 1 - \varepsilon \Delta$  olduğu görülür. Böylece  $\tilde{e}(s)$  dual eğrisinin dual birim teğeti

$$\tilde{t} = \frac{d\tilde{e}}{d\bar{s}} = \frac{\tilde{e}'}{\bar{s}'} = \frac{\tilde{e}'}{1 - \varepsilon \Delta} = \vec{t} + \varepsilon (\vec{c} \times \vec{t}) \quad (5.37)$$

biçiminde verilir [32].  $\tilde{g}$  dual birim vektörü de

$$\tilde{g} = \tilde{e} \times \tilde{t} = \bar{g} + \varepsilon(\bar{c} \times \bar{g}) \quad (5.38)$$

biçiminde verilebilir. Burada  $\tilde{e}$  spacelike vektör,  $\tilde{t}$  spacelike vektör olduğundan  $\bar{g}$  timelike vektördür. Böylece  $\tilde{e}$  dual eğrisinin dual Darboux çatısı olarak bilinen  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  dual çatısı elde edilir. Bu vektörler arasında

$$\tilde{e} \times \tilde{t} = \tilde{g}, \quad \tilde{t} \times \tilde{g} = -\tilde{e}, \quad \tilde{g} \times \tilde{e} = -\tilde{t}$$

bağıntıları vardır [32]. Dual Darboux çatının türev formülleri matris formda,

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \bar{\gamma} \\ 0 & \bar{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\bar{\gamma}$  dual küresel eğrilik fonksiyonu denir. Dual Darboux üç yüzölçüsünün Darboux ani dönme vektörü

$$\tilde{d} = \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^* = \bar{\gamma} \tilde{e} - \tilde{g} \quad (5.40)$$

dir.

Şimdi dual Darboux çatısına bağlı olmak üzere bir dual eğrinin eğrilik elemanlarını bulalım. Burada dual eğrilik yarıçapı

$$\bar{R} = \frac{\|d\tilde{e}/ds\|^3}{\|d\tilde{e}/ds \times d^2\tilde{e}/ds^2\|} = \frac{1}{\sqrt{|\bar{\gamma}^2 - 1|}} \quad (5.41)$$

eşitliğindeki gibidir.  $\tilde{d}$  ile lineer bağımlı olan  $\tilde{d}_0$  birim dual Darboux vektörü

$$\tilde{d}_0 = \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{|\bar{\gamma}^2 - 1|}} \tilde{e} - \frac{1}{\sqrt{|\bar{\gamma}^2 - 1|}} \tilde{g} \quad (5.42)$$

yazılabilir. Eğer  $|\bar{\gamma}| > 1$  (ya da  $|\bar{\gamma}| < 1$ ) ise,  $\tilde{d}_0$  spacelike (ya da timelike) vektördür. Buradan  $\tilde{d}_0$  ve  $\tilde{e}$  arasındaki dual açı

$$\begin{cases} \cosh \bar{\theta} = \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{|\bar{\gamma}^2 - 1|}}, & \sinh \theta = -\frac{1}{\sqrt{|\bar{\gamma}^2 - 1|}}, & |\bar{\gamma}| > 1 \\ \sinh \bar{\theta} = \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{|\bar{\gamma}^2 - 1|}}, & \cosh \theta = -\frac{1}{\sqrt{|\bar{\gamma}^2 - 1|}}, & |\bar{\gamma}| < 1 \end{cases} \quad (5.43)$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan

$$\bar{R} = \begin{cases} -\sinh \bar{\theta}, & |\bar{\gamma}| > 1 \\ -\cosh \bar{\theta}, & |\bar{\gamma}| < 1 \end{cases} \quad ve \quad \bar{\gamma} = \begin{cases} -\coth \bar{\theta}, & |\bar{\gamma}| > 1 \\ -\tanh \bar{\theta}, & |\bar{\gamma}| < 1 \end{cases} \quad (5.44)$$

olur [32].

### 5.3. Dual Hiperbolik Slant Eğriler

Bir doğrunun hareketiyle oluşan yüzeye regle yüzey denir. M. Önder [18] timelike doğuranlı bir timelike regle yüzeyin boğaz çizgisi üzerinde bulunan çatı elemanları ile sabit açı yapan bir sabit vektörü dikkate alarak timelike slant regle yüzeyleri tanımlamıştır. İyi bilinir ki E.Study dönüşümünden  $IR_1^3$  uzayındaki yönlü doğrular birim dual hiperbolik kürenin noktalarına birebir karşılık gelir. Böylece timelike doğuranlı bir timelike regle yüzey, birim dual hiperbolik küre üzerinde bir eğriye karşılık gelmektedir. Bu bölümde,  $\tilde{H}_0^2$  birim dual hiperbolik küre üzerindeki slant eğrilerin geometrisi, dual Darboux çatısı ve onun türev formülleri yardımıyla incelenecektir.

#### (a) $\tilde{e}$ - Slant Dual Hiperbolik Eğriler

**Tanım 5.3.1.**  $\tilde{x}(s) = \vec{x}(s) + \varepsilon \vec{x}^*(s)$ ,  $\tilde{H}_0^2$  küresi üzerinde bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$  eğrisinin dual Darboux çatısı  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  ve dual geodezik eğrilik fonksiyonu  $\bar{\gamma} \neq 0$  olarak verilsin. Buna göre  $\tilde{u}$  sıfırdan farklı null olmayan sabit bir birim dual vektör olmak üzere

$$\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_\varepsilon = \text{sabit} \quad (5.45)$$

oluyorsa  $\tilde{x}(s)$  eğrisine  $\tilde{e}$  - slant dual hiperbolik eğri denir.

**Teorem 5.3.1.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\bar{\gamma}$  dual geodezik eğriliği sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun.

$\bar{c}_{\tilde{e}} = \langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle$  ve  $\bar{c}_{\tilde{g}} = \langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle$  sabit olmak üzere  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$  - *slant dual hiperbolik eğridir* ancak ve ancak

$$\frac{1}{\bar{\gamma}} = \frac{\bar{c}_{\tilde{g}}}{\bar{c}_{\tilde{e}}} \quad (5.46)$$

ifadesi sabittir.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$  - slant dual hiperbolik eğri olsun. Bu takdirde Tanım 5.3.1 den  $\tilde{u}$  bir sabit doğrultu olmak üzere

$$\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_{\tilde{e}} = \text{sabit} \quad (5.47)$$

olur. Dual Darboux türev formülleri kullanılarak (5.47) denkleminin türevi alınırsa  $\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = 0$

bulunur. Yani  $\tilde{u}$  birim dual vektörü  $\tilde{e}$  ve  $\tilde{g}$  dual vektörlerinin gerdiği düzlemedir. Buradan  $\bar{c}_{\tilde{e}}$  ve  $\bar{c}_{\tilde{g}}$  dual sabitler olmak üzere

$$\tilde{u} = \bar{c}_{\tilde{e}} \tilde{e} + \bar{c}_{\tilde{g}} \tilde{g} \quad (5.48)$$

yazılabilir.  $\tilde{u}$  sabit olduğundan (5.48) denkleminin türevi alınırsa

$$(\bar{c}_{\tilde{e}} - \bar{c}_{\tilde{g}} \bar{\gamma}) \tilde{t} = 0 \quad (5.49)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{\bar{\gamma}} = \frac{\bar{c}_{\tilde{g}}}{\bar{c}_{\tilde{e}}}$$

sabit bulunur.

( $\Leftarrow$ ): (5.46) denklemi sağlansın.  $\tilde{u}$  birim dual vektörü

$$\tilde{u} = \bar{c}_{\tilde{e}} \tilde{e} + \bar{c}_{\tilde{g}} \tilde{g} \quad (5.50)$$

olarak tanımlanır. (5.50) eşitliğinin türevi alınıp (5.46) eşitliği kullanılırsa  $\tilde{u}' = 0$  bulunur. Yani  $\tilde{u}$  bir sabit birim dual vektördür. Diğer yandan  $\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_e = \text{sabit}$  olur. Böylece Tanım 5.3.1 den  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ -slant dual hiperbolik eğridir.

**Sonuç 5.3.1.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ -slant dual hiperbolik eğri olsun. Bu takdirde, (5.46) nin reel ve dual kısımları, sırasıyla,

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma} = \frac{c_g}{c_e} \\ \gamma^* = \frac{c_g c_e^* - c_g^* c_e}{c_g^2} \end{cases} \quad (5.51)$$

biçimindedir.

**İspat:**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ -slant dual hiperbolik eğri olduğundan (5.46) eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\frac{1}{\gamma + \varepsilon \gamma^*} = \frac{c_g + \varepsilon c_g^*}{c_e + \varepsilon c_e^*}$$

$$\frac{\gamma - \varepsilon \gamma^*}{\gamma^2} = \frac{(c_g + \varepsilon c_g^*)(c_e - \varepsilon c_e^*)}{c_e^2}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1}{\gamma} - \varepsilon \frac{\gamma^*}{\gamma^2} = \frac{c_g}{c_e} + \varepsilon \frac{c_g^* c_e - c_g c_e^*}{c_e^2}$$

olur. Son eşitlikte reel ve dual kısımlar karşılaştırılırsa

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{c_g}{c_e} \quad \text{ve} \quad \gamma^* = \frac{c_g c_e^* - c_g^* c_e}{c_g^2}$$

elde edilir. E. Study dönüşümünden timelike doğuranlı bir timelike regle yüzeyin anadoğruları  $\tilde{H}_0^2$  birim dual küresi üzerindeki diferansiyellenebilir  $\tilde{e}(s) = \vec{e}(s) + \varepsilon \vec{e}^*(s)$  eğrisinin reel kısmı olan

$\bar{e}(s)$  vektörüne karşılık gelmektedir. Bu takdirde (5.51) in ilk eşitliği  $\tilde{e}$  - slant dual hiperbolik eğrisine karşılık gelen bir timelike regle yüzeyin  $\bar{q}$  - slant timelike regle yüzey olma şartını verir [18].

**Teorem 5.3.2.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatısı ile verilen, dual küresel eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$  - slant dual hiperbolik eğridir ancak ve ancak

$$\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = 0$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$ ,  $\tilde{e}$  - slant dual hiperbolik eğri olsun. Dual Darboux türev formüllerinden

$$\begin{aligned}\tilde{e}' &= \tilde{t} \\ \tilde{e}'' &= \tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g} \\ \tilde{e}''' &= \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} - \bar{\gamma}^2 \tilde{t} = (1 - \bar{\gamma}^2) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \bar{\gamma} \\ 0 & (1 - \bar{\gamma}^2) & \bar{\gamma}' \end{vmatrix} \\ \det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') &= -\bar{\gamma}^2 \left( \frac{1}{\bar{\gamma}} \right)' \end{aligned} \tag{5.52}$$

Teorem 5.3.1 den istenen sonuç bulunur.

( $\Leftarrow$ ):  $\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = 0$  olsun. (5.52) den  $\frac{1}{\bar{\gamma}}$  oranının sabit olduğu açıktır. Dolayısıyla

$\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$  - slant dual hiperbolik eğridir.

**Sonuç 5.3.2.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ - slant dual hiperbolik eğri olsun. Bu takdirde,  $\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = 0$  eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = - \langle \tilde{e}' \times \tilde{e}'', \tilde{e}''' \rangle = 0$$

$$\det(\bar{e}', \bar{e}'', \bar{e}''') = 0 \quad , \quad \det(\bar{e}', \bar{e}'', \bar{e}^{*''}) + \det(\bar{e}', \bar{e}^{*''}, \bar{e}''') + \det(\bar{e}^{*''}, \bar{e}'', \bar{e}''') = 0$$

elde edilir. İyi bilinir ki bir timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin anadoğruları bir dual hiperbolik eğrinin  $\bar{e}(s)$  reel bileşenine karşılık geldiğinden,  $\det(\bar{e}', \bar{e}'', \bar{e}''') = 0$  eşitliği bir timelike regle yüzeyin  $\bar{q}$ - slant timelike regle yüzey olma şartıdır. Bu takdirde  $\tilde{e}$ - slant dual hiperbolik eğrisine karşılık gelen bir timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin  $\bar{q}$ - slant timelike regle yüzey olma şartını verir [18].

**Teorem 5.3.3.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatısı ile verilen, dual küresel eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$ - slant dual hiperbolik eğridir ancak ve ancak

$$\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') = 0$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$ - slant dual hiperbolik eğri olsun. Dual Darboux türev formüllerinden

$$\begin{aligned} \tilde{g}' &= -\bar{\gamma}\tilde{t} \\ \tilde{g}'' &= -\bar{\gamma}\tilde{e} - \bar{\gamma}'\tilde{t} - \bar{\gamma}^2\tilde{g} \\ \tilde{g}''' &= -\bar{\gamma}'\tilde{e} - \bar{\gamma}\tilde{t} - \bar{\gamma}''\tilde{t} - \bar{\gamma}'(\tilde{e} + \bar{\gamma}\tilde{g}) - 2\bar{\gamma}'\bar{\gamma}\tilde{g} + \bar{\gamma}^2\bar{\gamma}'\tilde{t} \\ &= -2\bar{\gamma}'\tilde{e} + (\bar{\gamma}^3 - \bar{\gamma}'' - \bar{\gamma})\tilde{t} - 3\bar{\gamma}'\bar{\gamma}\tilde{g} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') &= \begin{vmatrix} 0 & -\bar{\gamma} & 0 \\ -\bar{\gamma} & -\bar{\gamma}' & -\bar{\gamma}^2 \\ -2\bar{\gamma}' & \bar{\gamma}^3 - \bar{\gamma}'' - \bar{\gamma} & -3\bar{\gamma}'\bar{\gamma} \end{vmatrix} \\ &= -\bar{\gamma}(\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}') \end{aligned}$$

$$\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') = \bar{\gamma}^5 \left( \frac{1}{\bar{\gamma}} \right)' \quad (5.53)$$

Teorem 5.3.1 den istenen sonuç bulunur.

( $\Leftarrow$ ):  $\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') = 0$  olsun. (5.53) den  $\frac{1}{\bar{\gamma}}$  oranının sabit olduğu açıktır. Dolayısıyla

$\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$  - slant dual hiperbolik eğridir.

**Sonuç 5.3.3.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$  - slant dual hiperbolik eğri olsun. Bu takdirde,  $\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') = 0$  eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') = - \langle \tilde{g}' \times \tilde{g}'', \tilde{g}''' \rangle = 0$$

$$\det(\bar{g}', \bar{g}'', \bar{g}''') = 0 \quad , \quad \det(\bar{g}', \bar{g}'', \bar{g}''') + \det(\bar{g}', \bar{g}^{*''}, \bar{g}''') + \det(\bar{g}^{*'}, \bar{g}'', \bar{g}''') = 0$$

olacak biçimde elde edilir. Bu takdirde  $\det(\bar{g}', \bar{g}'', \bar{g}''') = 0$  eşitliği,  $\tilde{e}$  - slant dual hiperbolik eğrisine karşılık gelen bir timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin  $\bar{q}$  - slant timelike regle yüzey olma şartını verir [18].

**Teorem 5.3.4.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatısı ile verilen, dual küresel eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$  - slant dual hiperbolik eğridir ancak ve ancak

$$\tilde{e}''' - (1 - \bar{\gamma}^2) \tilde{e}' = 0 \quad (5.54)$$

eşitlikleri sağlanır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$  - slant dual hiperbolik eğri olsun. Dual Darboux türev formüllerinden

$$\tilde{e}' = \tilde{t} \quad (5.55)$$

$$\tilde{e}'' = \tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g} \quad (5.56)$$

$$\tilde{e}''' = (1 - \bar{\gamma}^2) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} \quad (5.57)$$

tir.  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ - slant dual hiperbolik eğri olduğundan Teorem 5.3.1 den  $\frac{1}{\bar{\gamma}} = \text{sabit}$  fonksiyonunun türevi alınır,

$$\bar{\gamma}' = 0 \quad (5.58)$$

olur. (5.58) ve (5.55) denklemleri (5.57) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{e}''' - (1 - \bar{\gamma}^2) \tilde{e}' = 0 \quad (5.59)$$

elde edilir.

( $\Leftarrow$ ): (5.54) denklemi sağlansın.  $\tilde{t}' = \tilde{e}''$  ve buradan

$$\tilde{t}'' = \tilde{e}''' \quad (5.60)$$

bulunur. (5.54) denklemi (5.60) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{t}'' = (1 - \bar{\gamma}^2) \tilde{e}' \quad (5.61)$$

elde edilir. Diğer taraftan dual Darboux türev formüllerinden

$$\tilde{t}' = \tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g}$$

$$\tilde{t}'' = (1 - \bar{\gamma}^2) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} \quad (5.62)$$

olduğundan (5.61) ve (5.62) denklemleri karşılaştırılırsa

$$(1 - \bar{\gamma}^2) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} = (1 - \bar{\gamma}^2) \tilde{t}$$

olur. Karşılıklı eşitliklerden

$$\bar{\gamma}' = 0 \quad (5.63)$$

elde edilir. (5.63) denkleminin integrali alınır  $\frac{1}{\bar{\gamma}} = \text{sabit}$  bulunur. Teorem 5.3.1. gereğince

$\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$ - slant dual hiperbolik eğridir.

**Sonuç 5.3.4.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ - slant dual hiperbolik eğri olsun. Bu takdirde, (5.54) reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\begin{aligned}\vec{e}''' + \varepsilon \vec{e}^{*'''} &= (1 - (\gamma + \varepsilon \gamma^*)^2) (\vec{e}' + \varepsilon \vec{e}^{*'}) \\ \vec{e}''' &= (1 - \gamma^2) \vec{e}' \quad , \quad \vec{e}^{*'''} = (1 - \gamma^2) \vec{e}^{*'} - 2\gamma \gamma^* \vec{e}'\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $\vec{e}''' = (1 - \gamma^2) \vec{e}'$  bulunur. Bu takdirde  $\tilde{e}$ - slant dual hiperbolik eğrisine karşılık gelen bir timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin  $\bar{q}$ - slant timelike regle yüzey olma şartını verir [18].

#### (b) $\tilde{t}$ - Slant Dual Hiperbolik Eğriler

**Tanım 5.3.2.**  $\tilde{x}(s) = \vec{x}(s) + \varepsilon \vec{x}^*(s)$ ,  $\tilde{H}_0^2$  küresi üzerinde bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$  eğrisinin dual Darboux çatısı  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  ve dual geodezik eğrilik fonksiyonu  $\bar{\gamma} \neq 0$  olarak verilsin. Buna göre  $\tilde{u}$  sıfırdan farklı, null olmayan sabit bir birim dual vektör olmak üzere

$$\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_t = \text{sabit} \quad (5.64)$$

oluyorsa  $\tilde{x}(s)$  eğrisine  $\tilde{t}$  - slant dual hiperbolik eğri denir.

**Teorem 5.3.5.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatısı ile verilen, dual küresel eğriliği sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun. Bu takdirde  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual hiperbolik eğridir ancak ve ancak

$$\frac{\bar{\gamma}'}{(1 - \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{sabit} \quad (5.65)$$

olmasıdır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual hiperbolik eğri olsun. Bu takdirde sabit bir  $\tilde{u}$  vektörü için  $\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_t = \text{sabit}$  olur. Buradan

$$\tilde{u} = \bar{b}_1 \tilde{e} + \bar{c}_i \tilde{t} + \bar{b}_2 \tilde{g} \quad (5.66)$$

yazılabilir. (5.66) denkleminin türevi alınır

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{b}_1' \tilde{e} + \bar{b}_1 \tilde{t} + \bar{c}_i' \tilde{e} + \bar{c}_i \bar{\gamma} \tilde{g} + \bar{b}_2' \tilde{g} - \bar{b}_2 \bar{\gamma} \tilde{t} \\ 0 &= (\bar{b}_1' + \bar{c}_i') \tilde{e} + (\bar{b}_1 - \bar{b}_2 \bar{\gamma}) \tilde{t} + (\bar{b}_2' + \bar{c}_i \bar{\gamma}) \tilde{g} \end{aligned}$$

ve  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  bir ortonormal çatı olduğundan

$$\begin{cases} \bar{b}_1' + \bar{c}_i' = 0, \\ \bar{b}_1 - \bar{b}_2 \bar{\gamma} = 0, \\ \bar{b}_2' + \bar{c}_i \bar{\gamma} = 0 \end{cases} \quad (5.67)$$

sistemi elde edilir. (5.67) nin ikinci denkleminde

$$\bar{b}_1 = \bar{b}_2 \bar{\gamma} \quad (5.68)$$

bulunur.  $\tilde{u}$  sabit olduğundan

$$\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle = -\bar{b}_1^2 + \bar{c}_i^2 + \bar{b}_2^2 = \text{sabit} \quad (5.69)$$

olur. Buradan (5.68) denklemini (5.69) da yerine yazılırsa

$$-\bar{b}_2^2 \bar{\gamma}^2 + \bar{c}_i^2 + \bar{b}_2^2 = \bar{b}_2^2 (1 - \bar{\gamma}^2) = \bar{n}^2 = \text{sabit} \quad (5.70)$$

bulunur. Böylece

$$\bar{b}_2 = \pm \frac{\bar{n}}{\sqrt{1 - \bar{\gamma}^2}} \quad (5.71)$$

elde edilir. (5.67) nin son denkleminde

$$\bar{b}_2' = -\bar{c}_i \bar{\gamma}$$

yani,

$$\frac{d}{ds} \left[ \pm \frac{\bar{n}}{\sqrt{1-\bar{\gamma}^2}} \right] = -\bar{c}_i \bar{\gamma} \quad (5.72)$$

olup, bu türev düzenlenirse

$$\pm \frac{\bar{n} \frac{-\bar{\gamma}' \bar{\gamma}}{\sqrt{1-\bar{\gamma}^2}}}{1-\bar{\gamma}^2} = -\bar{c}_i \bar{\gamma}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılır ve tekrar düzenlenirse

$$\pm \bar{\gamma}' \frac{-1}{(1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \bar{\gamma} = -\frac{\bar{c}_i}{\bar{n}} \bar{\gamma}$$

olur. Böylece

$$\frac{1}{(1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \bar{\gamma}' = \frac{\bar{c}_i}{\bar{n}} = \bar{d} = \text{sabit}$$

ifadesi elde edilir.

( $\Leftarrow$ ): (5.66) denklemi sağlansın.

$$\tilde{u} = \left( \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{1-\bar{\gamma}^2}} \right) \tilde{e} - \bar{d} \tilde{t} + \left( \frac{1}{\sqrt{1-\bar{\gamma}^2}} \right) \tilde{g} \quad (5.73)$$

vektörünü ele alalım. (5.73) denkleminin türevi alınır

$$\tilde{u}' = \left( \frac{\bar{\gamma}' \sqrt{1-\bar{\gamma}^2} + \bar{\gamma} \frac{\bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{\sqrt{1-\bar{\gamma}^2}}}{1-\bar{\gamma}^2} \right) \tilde{e} + \left( \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{1-\bar{\gamma}^2}} \right) \tilde{t} - \bar{d} \tilde{e} - \bar{d} \bar{\gamma} \tilde{g} + \left( \frac{\frac{\bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{\sqrt{1-\bar{\gamma}^2}}}{1-\bar{\gamma}^2} \right) \tilde{g} - \left( \frac{1}{\sqrt{1-\bar{\gamma}^2}} \right) \bar{\gamma} \tilde{t}$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{u}' &= \left( \frac{(\bar{\gamma}'(1-\bar{\gamma}^2) + \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}')}{(1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{e} - \bar{d} \tilde{e} - \bar{d} \bar{\gamma} \tilde{g} + \left( \frac{\bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{(1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{g} \\
\tilde{u}' &= \left( \frac{\bar{\gamma}'}{(1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{e} - \bar{d} \tilde{e} - \bar{d} \bar{\gamma} \tilde{g} + \left( \frac{\bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{(1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{g} \\
&= \left( \frac{-\bar{d}(1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}} + \bar{\gamma}'}{(1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{e} + \left( \frac{-\bar{d} \bar{\gamma} (1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}} + \bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{(1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{g} \\
&= \left( \frac{-\bar{d}(1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}} + \bar{d}(1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{e} + \left( \frac{-\bar{d} \bar{\gamma} (1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}} + \bar{d} \bar{\gamma} (1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{g} \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $\tilde{u}$  vektörünün sabit olduğu açıktır. Böylece  $\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \text{sabit}$  olup  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual hiperbolik eğridir.

**Sonuç 5.3.5.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual hiperbolik eğri olsun. Bu takdirde, (5.65) reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\frac{\gamma'}{\sqrt{(1-\gamma^2)^3}} = \text{sabit} \quad , \quad \frac{[3\gamma\gamma'\gamma^* + \gamma^{*'}(1-\gamma^2)]}{(1-\gamma^2)^{5/2}} = \text{sabit}$$

elde edilir.

**İspat:**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual hiperbolik eğri olduğundan (5.65) eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\frac{\bar{\gamma}'}{(1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\gamma' + \varepsilon \gamma'^*}{\sqrt{-\bar{\gamma}^6 + 3\bar{\gamma}^4 - 3\bar{\gamma}^2 + 1}} = \text{sabit}$$

yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{\gamma' + \varepsilon \gamma'^*}{\sqrt{-\bar{\gamma}^6 + 3\bar{\gamma}^4 - 3\bar{\gamma}^2 + 1}} = \frac{\gamma' + \varepsilon \gamma'^*}{\sqrt{(1-\gamma^2)^3 - \varepsilon(1-\gamma^2)^2 6\gamma\gamma'^*}}$$

bulunur. Payda kökten kurtarılarak

$$\frac{\gamma'}{\sqrt{(1-\gamma^2)^3}} + \varepsilon \frac{[3\gamma\gamma'\gamma'^* + \gamma'^*(1-\gamma^2)]}{\sqrt{(1-\gamma^2)^5}} = \text{sabit}$$

elde edilir. Bu takdirde  $\frac{\gamma'}{\sqrt{(1-\gamma^2)^3}} = \text{sabit}$  ifadesi,  $\tilde{t}$  - slant dual hiperbolik eğrisine karşılık

gelen bir timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin  $\bar{h}$  - slant timelike regle yüzey olma şartını verir [18].

**Teorem 5.3.6.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual hiperbolik eğridir ancak ve ancak

$$\begin{cases} \bar{\gamma} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\bar{s}^2 - \coth^2 \bar{\theta}|}}, & \tilde{u} \text{ timelike} \\ \bar{\gamma} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\bar{s}^2 - \tanh^2 \bar{\theta}|}}, & \tilde{u} \text{ spacelike} \end{cases} \quad (5.74)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual hiperbolik eğri olsun.  $\tilde{u}$  sabit birim timelike vektörü için

$$\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \sinh \bar{\theta} = \text{sabit} \quad (5.75)$$

olur. (5.75) denkleminin türevi alınır

$$\langle \tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = 0 \quad (5.76)$$

$$\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = -\bar{\gamma} \langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle \quad (5.77)$$

bulunur.  $\langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = -\bar{x}$  olsun. Böylece

$$\tilde{u} = -\bar{\gamma} \bar{x} \tilde{e} + \sinh \bar{\theta} \tilde{t} - \bar{x} \tilde{g} \quad (5.78)$$

olur.  $\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle = -1$  olduğundan

$$\begin{aligned} -\bar{\gamma}^2 \bar{x}^2 + \sinh^2 \bar{\theta} + \bar{x}^2 &= -1 \\ \bar{x}^2 (\bar{\gamma}^2 - 1) &= \cosh^2 \bar{\theta} \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \pm \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} \quad (5.79)$$

bulunur. Böylece (5.78) denkleminde

$$\tilde{u} = \pm \frac{-\bar{\gamma} \cosh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} \tilde{e} + \sinh \bar{\theta} \tilde{t} \mp \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} \tilde{g} \quad (5.80)$$

olur. (5.76) denkleminin türevi alınır

$$\langle \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} - \bar{\gamma}^2 \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \langle (1 - \bar{\gamma}^2) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = 0 \quad (5.81)$$

elde edilir.

$$(1 - \bar{\gamma}^2) \langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle + \bar{\gamma}' \langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = (1 - \bar{\gamma}^2) \sinh \bar{\theta} - \bar{\gamma}' \bar{x} = 0$$

$$\bar{x} = \frac{(1 - \bar{\gamma}^2) \sinh \bar{\theta}}{\bar{\gamma}'} \quad (5.82)$$

bulunur. (5.79) ve (5.82) denklemleri eşitlenirse

$$\begin{aligned} \pm \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} &= \frac{(1 - \bar{\gamma}^2) \sinh \bar{\theta}}{\bar{\gamma}'} \\ \pm \coth \bar{\theta} \frac{-\bar{\gamma}'}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.83)$$

olur ve (5.83) denkleminin integrali alınır

$$\pm \coth \bar{\theta} \frac{-d\bar{\gamma}}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{d\bar{s}} - 1 = 0$$

$$\pm \coth \bar{\theta} \int \frac{-d\bar{\gamma}}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} - \int d\bar{s} = 0$$

$$\pm \coth \bar{\theta} \frac{-\bar{\gamma}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} - \bar{s} + \bar{c} = 0 \quad (5.84)$$

Şimdi  $\bar{s} \rightarrow -\bar{s} + \bar{c}$  dönüşümü yapılırsa

$$\pm \coth \bar{\theta} \frac{-\bar{\gamma}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} = -\bar{s} \quad (5.85)$$

bulunur. (5.85) denkleminin karesi alınırsa

$$\begin{aligned} \coth^2 \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}^2}{\bar{\gamma}^2 - 1} &= \bar{s}^2 \\ \bar{\gamma}^2 \coth^2 \bar{\theta} &= \bar{s}^2 \bar{\gamma}^2 - \bar{s}^2 \\ \bar{\gamma} &= \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 - \coth^2 \bar{\theta}}} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$(\Leftarrow) : \bar{\gamma} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 - \coth^2 \bar{\theta}}} \text{ sağlansın.}$$

$$\bar{x} = \pm \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} = \pm \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sqrt{\left( \frac{\bar{s}^2}{\bar{s}^2 - \coth^2 \bar{\theta}} - 1 \right)}}$$

$$\bar{x} = \pm \sinh \bar{\theta} \sqrt{\bar{s}^2 - \coth^2 \bar{\theta}} \quad (5.86)$$

alalım.

$$\bar{\gamma} \bar{x} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\bar{s}^2 - \coth^2 \bar{\theta}|}} \left( \pm \sinh \bar{\theta} \sqrt{|\bar{s}^2 - \coth^2 \bar{\theta}|} \right) = \bar{s} \sinh \bar{\theta}$$

olur. Şimdi

$$\tilde{u} = -\bar{\gamma} \bar{x} \tilde{e} + \sinh \bar{\theta} \tilde{t} - \bar{x} \tilde{g} = \sinh \bar{\theta} \left( -\bar{s} \tilde{e} + \tilde{t} \mp \sqrt{|\bar{s}^2 - \coth^2 \bar{\theta}|} \tilde{g} \right)$$

vektörünün sabit olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \tilde{u}' &= \sinh \bar{\theta} \left( -\bar{s} \tilde{t} + \bar{\gamma} \tilde{g} \mp \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\bar{s}^2 - \coth^2 \bar{\theta}|}} \tilde{g} \pm \bar{\gamma} \sqrt{|\bar{s}^2 - \coth^2 \bar{\theta}|} \tilde{t} \right) \\ &= \sinh \bar{\theta} \left( -\bar{s} \tilde{t} \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\bar{s}^2 - \coth^2 \bar{\theta}|}} \tilde{g} \mp \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\bar{s}^2 - \coth^2 \bar{\theta}|}} \tilde{g} \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\bar{s}^2 - \coth^2 \bar{\theta}|}} \left( \pm \sqrt{|\bar{s}^2 - \coth^2 \bar{\theta}|} \right) \tilde{t} \right) \\ \tilde{u}' &= \sinh \bar{\theta} \left( -\bar{s} \tilde{t} \pm (\pm \bar{s}) \tilde{t} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\tilde{u} = \sinh \bar{\theta} \left( -\bar{s} \tilde{e} + \tilde{t} \pm \left( \sqrt{|\bar{s}^2 - \coth^2 \bar{\theta}|} \right) \tilde{g} \right) \quad (5.87)$$

sabit bir vektördür. Böylece  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual hiperbolik eğridir.

Şimdi  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual hiperbolik eğri olsun.  $\tilde{u}$  sabit birim spacelike vektörü için

$$\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \cosh \bar{\theta} = \text{sabit} \quad (5.88)$$

olur. (5.88) denkleminin türevi alınırsa

$$\langle \tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = 0 \quad (5.89)$$

$$\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = -\bar{\gamma} \langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle \quad (5.90)$$

bulunur.  $\langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = -\bar{x}$  olsun. Böylece

$$\tilde{u} = -\bar{\gamma} \bar{x} \tilde{e} + \cosh \bar{\theta} \tilde{t} - \bar{x} \tilde{g} \quad (5.91)$$

olur.  $\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle = 1$  olduğundan

$$-\bar{\gamma}^2 \bar{x}^2 + \cosh^2 \bar{\theta} + \bar{x}^2 = 1$$

$$\bar{x}^2 (\bar{\gamma}^2 - 1) = \sinh^2 \bar{\theta}$$

$$\bar{x} = \pm \frac{\sinh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} \quad (5.92)$$

bulunur. Böylece (5.91) denkleminde

$$\tilde{u} = \pm \frac{-\bar{\gamma} \sinh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} \tilde{e} + \cosh \bar{\theta} \tilde{t} \mp \frac{\sinh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} \tilde{g} \quad (5.93)$$

olur. (5.89) in türevi alınırsa

$$\langle \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} - \bar{\gamma}^2 \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \langle (1 - \bar{\gamma}^2) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = 0 \quad (5.94)$$

elde edilir.

$$(1 - \bar{\gamma}^2) \langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle + \bar{\gamma}' \langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = (1 - \bar{\gamma}^2) \cosh \bar{\theta} - \bar{\gamma}' \bar{x} = 0$$

$$\bar{x} = \frac{(1 - \bar{\gamma}^2) \cosh \bar{\theta}}{\bar{\gamma}'} \quad (5.95)$$

bulunur. (5.92) ve (5.95) denklemleri eşitlenirse

$$\pm \frac{\sinh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} = \frac{(1 - \bar{\gamma}^2) \cosh \bar{\theta}}{\bar{\gamma}'}$$

$$\pm \tanh \bar{\theta} \frac{-\bar{\gamma}'}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} - 1 = 0 \quad (5.96)$$

olur ve (5.96) denkleminin integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \pm \tanh \bar{\theta} \frac{-d\bar{\gamma}}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{d\bar{s}} - 1 &= 0 \\ \pm \tanh \bar{\theta} \int \frac{-d\bar{\gamma}}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} - \int d\bar{s} &= 0 \\ \pm \tanh \bar{\theta} \frac{-\bar{\gamma}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} - \bar{s} + \bar{c} &= 0 \end{aligned} \quad (5.97)$$

Şimdi  $\bar{s} \rightarrow -\bar{s} + \bar{c}$  dönüşümü yapılırsa

$$\pm \tanh \bar{\theta} \frac{-\bar{\gamma}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} = -\bar{s} \quad (5.98)$$

bulunur. (5.98) denkleminin karesi alınırsa

$$\begin{aligned} \tanh^2 \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}^2}{\bar{\gamma}^2 - 1} &= \bar{s}^2 \\ \bar{\gamma}^2 \tanh^2 \bar{\theta} &= \bar{s}^2 \bar{\gamma}^2 - \bar{s}^2 \\ \bar{\gamma} &= \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\bar{s}^2 - \tanh^2 \bar{\theta}|}} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$(\Leftarrow): \bar{\gamma} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\bar{s}^2 - \tanh^2 \bar{\theta}|}} \text{ sağlansın.}$$

$$\bar{x} = \pm \frac{\sinh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} = \pm \frac{\sinh \bar{\theta}}{\sqrt{\left( \frac{\bar{s}^2}{\bar{s}^2 - \tanh^2 \bar{\theta}} - 1 \right)}}$$

$$\bar{x} = \pm \cosh \bar{\theta} \sqrt{|\bar{s}^2 - \tanh^2 \bar{\theta}|} \quad (5.99)$$

alalım.

$$\bar{\gamma} \bar{x} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\bar{s}^2 - \tanh^2 \bar{\theta}|}} \left( \pm \cosh \bar{\theta} \sqrt{|\bar{s}^2 - \tanh^2 \bar{\theta}|} \right) = \bar{s} \cosh \bar{\theta}$$

olur. Şimdi

$$\tilde{u} = -\bar{\gamma} \bar{x} \tilde{e} + \cosh \bar{\theta} \tilde{t} - \bar{x} \tilde{g} = \cosh \bar{\theta} \left( -\bar{s} \tilde{e} + \tilde{t} \mp \sqrt{|\bar{s}^2 - \tanh^2 \bar{\theta}|} \tilde{g} \right)$$

vektörünün sabit olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \tilde{u}' &= \cosh \bar{\theta} \left( -\bar{s} \tilde{t} + \bar{\gamma} \tilde{g} \mp \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\bar{s}^2 - \tanh^2 \bar{\theta}|}} \tilde{g} \pm \bar{\gamma} \sqrt{|\bar{s}^2 - \tanh^2 \bar{\theta}|} \tilde{t} \right) \\ &= \cosh \bar{\theta} \left( -\bar{s} \tilde{t} \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\bar{s}^2 - \tanh^2 \bar{\theta}|}} \tilde{g} \mp \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\bar{s}^2 - \tanh^2 \bar{\theta}|}} \tilde{g} \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\bar{s}^2 - \tanh^2 \bar{\theta}|}} \left( \pm \sqrt{|\bar{s}^2 - \tanh^2 \bar{\theta}|} \right) \tilde{t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}' &= \cosh \bar{\theta} \left( -\bar{s} \tilde{t} \pm (\pm \bar{s}) \tilde{t} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\tilde{u} = \cosh \bar{\theta} \left( -\bar{s} \tilde{e} + \tilde{t} \mp \left( \sqrt{|\bar{s}^2 - \tanh^2 \bar{\theta}|} \right) \tilde{g} \right) \quad (5.100)$$

sabit bir vektördür. Böylece  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual hiperbolik eğridir.

**Sonuç 5.3.6.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual hiperbolik eğri olsun. Bu takdirde, (5.74) reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\begin{cases} \gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{|s^2 - \coth^2 \theta|}} , & \gamma^* = \mp \frac{\coth \theta [s \theta^* \csc h^2 \theta + s^* \coth \theta]}{(s^2 - \coth^2 \theta)^{3/2}} , & \tilde{u} \text{ timelike} \\ \gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{|s^2 - \tanh^2 \theta|}} , & \gamma^* = \pm \frac{\tanh \theta [s \theta^* \sec h^2 \theta - s^* \tanh \theta]}{(s^2 - \tanh^2 \theta)^{3/2}} , & \tilde{u} \text{ spacelike} \end{cases}$$

bulunur.

**İspat:**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual hiperbolik eğri olsun. İlk olarak  $\tilde{u}$  nın sabit birim timelike vektör olduğu durumu ele alalım. (5.74) eşitliğinin ilk denklemi reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\bar{\gamma}^2 = \frac{\bar{s}^2}{\bar{s}^2 - \coth^2 \bar{\theta}} = \frac{(s + \varepsilon s^*)^2}{(s + \varepsilon s^*)^2 - \coth^2(\theta + \varepsilon \theta^*)}$$

yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{(s + \varepsilon s^*)^2}{(s + \varepsilon s^*)^2 - \coth^2(\theta + \varepsilon \theta^*)} = \frac{s^2 + \varepsilon 2ss^*}{(s^2 - \coth^2 \theta) + \varepsilon 2[s s^* + \theta^* \coth \theta \csc h^2 \theta]}$$

bulunur. Payda eşleniği ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{s^2}{s^2 - \coth^2 \theta} - \varepsilon \frac{2s \coth \theta [s \theta^* \csc h^2 \theta + s^* \coth \theta]}{(s^2 - \coth^2 \theta)^2} = \gamma^2 + \varepsilon 2\gamma\gamma^*$$

elde edilir. Taraf tarafa eşleştirilip  $\gamma$  değeri yerine yazılırsa,

$$\gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{|s^2 - \coth^2 \theta|}} , \quad \gamma^* = \mp \frac{\coth \theta [s \theta^* \csc h^2 \theta + s^* \coth \theta]}{(s^2 - \coth^2 \theta)^{3/2}}$$

elde edilir. Bu takdirde  $\gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{|s^2 - \coth^2 \theta|}}$  eşitliği  $\tilde{t}$  - slant dual hiperbolik eğrisine karşılık

gelen bir timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin  $\vec{h}$  - slant timelike regle yüzey olma şartını verir [18].

Şimdi  $\tilde{u}$  nın sabit birim spacelike vektör olduğu durumu ele alalım. (5.74) eşitliğinin ikinci denklemi reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\bar{\gamma}^2 = \frac{\bar{s}^2}{\bar{s}^2 - \tanh^2 \bar{\theta}} = \frac{(s + \varepsilon s^*)^2}{(s + \varepsilon s^*)^2 - \tanh^2(\theta + \varepsilon \theta^*)}$$

yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{(s + \varepsilon s^*)^2}{(s + \varepsilon s^*)^2 - \tanh^2(\theta + \varepsilon \theta^*)} = \frac{s^2 + \varepsilon 2ss^*}{(s^2 - \tanh^2 \theta) + \varepsilon 2[ss^* - \theta^* \tanh \theta \sec h^2 \theta]}$$

bulunur. Payda eşleniği ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{s^2}{s^2 - \tanh^2 \theta} + \varepsilon \frac{2s \tanh \theta [s \theta^* \sec h^2 \theta - s^* \tanh \theta]}{(s^2 - \tanh^2 \theta)^2} = \gamma^2 + \varepsilon 2\gamma\gamma^*$$

elde edilir. Taraf tarafa eşleştirilip  $\gamma$  değeri yerine yazılırsa,

$$\gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{s^2 - \tanh^2 \theta}} \quad , \quad \gamma^* = \pm \frac{\tanh \theta [s \theta^* \sec h^2 \theta - s^* \tanh \theta]}{(s^2 - \tanh^2 \theta)^{3/2}}$$

elde edilir. Bu takdirde  $\gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{s^2 - \tanh^2 \theta}}$  eşitliği  $\tilde{t}$  - slant dual hiperbolik eğrisine karşılık

gelen bir timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin  $\tilde{h}$  - slant timelike regle yüzey olma şartını verir [18].

### (c) $\tilde{g}$ - Slant Dual Hiperbolik Eğriler

**Tanım 5.3.3.**  $\tilde{x}(s) = \vec{x}(s) + \varepsilon \vec{x}^*(s)$ ,  $\tilde{H}_0^2$  küresi üzerinde bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$  eğrisinin dual Darboux çatısı  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  ve dual geodezik eğrilik fonksiyonu  $\bar{\gamma} \neq 0$  olarak verilsin. Buna göre  $\tilde{u}$  sıfırdan farklı, null olmayan sabit bir birim dual vektör olmak üzere

$$\langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_{\tilde{g}} = \text{sabit} \quad (5.101)$$

oluyorsa  $\tilde{x}(s)$  eğrisine  $\tilde{g}$  - slant dual hiperbolik eğri denir.

.  $\tilde{g}$  - slant dual hiperbolik eğrilerin  $\tilde{e}$  - slant dual hiperbolik eğriler olduğu açıktır. Dolayısıyla,  $\tilde{e}$  - slant dual hiperbolik eğriler için geçerli olan tüm karakterizasyonlar  $\tilde{g}$  - slant dual hiperbolik eğriler için de geçerlidir.

**Örnek 5.1.**  $|c| > 1$  olmak üzere Lorentziyen uzayda

$$r(t, v) = (\cos t - v \sin t, \sin t + v \cos t, cv)$$

parametrizasyonu ile verilen tek kanatlı hiperboloid olsun. Bu yüzeye karşılık gelen dual eğrinin  $\tilde{e}$  -slant,  $\tilde{t}$  -slant ve  $\tilde{g}$  -slant dual hiperbolik küresel eğri olduğunu gösterelim:

$$r(t, v) = (\cos t - v \sin t, \sin t + v \cos t, cv) = (\cos t, \sin t, 0) + v(-\sin t, \cos t, c)$$

olarak yazılırsa burada  $(\cos t, \sin t, 0)$  dayanak eğrisi ve  $(-\sin t, \cos t, c)$  ise doğrultmandır. Bu regle yüzeye karşılık dual birim küre üzerinde birim hızlı dual eğriyi oluşturalım.

$$\vec{t} = (-\sin t, \cos t, c) \quad , \quad \|\vec{t}\| = \sqrt{|\sin^2 t + \cos^2 t - c^2|} = \sqrt{c^2 - 1}$$

bulunur. Buradan  $\vec{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}}(-\sin t, \cos t, c)$  dır.

$$\vec{a}^*(t) = \vec{c}(t) \times \vec{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & -\vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & c \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}}(-c \sin t, c \cos t, 1)$$

elde edilir. Böylece regle yüzeye karşılık gelen birim hızlı dual eğri

$$\tilde{a}(t) = \vec{a}(t) + \varepsilon \vec{a}^*(t) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} [(-\sin t, \cos t, c) + \varepsilon(-c \sin t, c \cos t, 1)]$$

olarak bulunur. Şimdi bu eğrinin  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatı elemanlarını bulalım:

$$\tilde{e}(t) = \tilde{a}(t)$$

dir.  $s = s(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} dl$  parametre değişimi yapılırsa ve  $t = \sqrt{c^2 - 1}s$  olur. Buradan

$$\tilde{e}(s) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \left[ (-\sin(\sqrt{c^2 - 1}s), \cos(\sqrt{c^2 - 1}s), c) + \varepsilon(-c \sin(\sqrt{c^2 - 1}s), c \cos(\sqrt{c^2 - 1}s), 1) \right]$$

yazılır. Burada  $\langle \tilde{e}(s), \tilde{e}(s) \rangle = -1$  olduğu görülür ve  $\tilde{e}(s)$  timelike vektördür.

$$\vec{t}(s) = \vec{e}'(s) = (-\cos(\sqrt{c^2 - 1}s), -\sin(\sqrt{c^2 - 1}s), 0)$$

elde edilir.  $\langle \vec{t}(s), \vec{t}(s) \rangle = 1$  olduğundan  $\vec{t}(s)$  de spacelike bir vektördür. Bu durumda  $\vec{g}(s)$  spacelike bir vektördür ve

$$\begin{aligned} \vec{g}(s) = -\vec{e}(s) \times \vec{t}(s) &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & -\vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin(\sqrt{c^2 - 1}s) & \cos(\sqrt{c^2 - 1}s) & c \\ -\cos(\sqrt{c^2 - 1}s) & -\sin(\sqrt{c^2 - 1}s) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} (c \sin(\sqrt{c^2 - 1}s), -c \cos(\sqrt{c^2 - 1}s), -1) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca  $\langle \vec{g}(s), \vec{g}(s) \rangle = 1$  olduğu grlr.  $\vec{c}(s) = (\cos(\sqrt{c^2 - 1}s), \sin(\sqrt{c^2 - 1}s), 0)$  olduğundan

$$\vec{t}^*(s) = \vec{c}(s) \times \vec{t}(s) = \begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & -\vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \cos(\sqrt{c^2 - 1}s) & \sin(\sqrt{c^2 - 1}s) & 0 \\ -\cos(\sqrt{c^2 - 1}s) & -\sin(\sqrt{c^2 - 1}s) & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

ve

$$\begin{aligned}\vec{g}^*(s) = \vec{c}(s) \times \vec{g}(s) &= \frac{1}{\sqrt{c^2-1}} \begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & -\vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \cos(\sqrt{c^2-1}s) & \sin(\sqrt{c^2-1}s) & 0 \\ c \sin(\sqrt{c^2-1}s) & -c \cos(\sqrt{c^2-1}s) & -1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2-1}} (\sin(\sqrt{c^2-1}s), -\cos(\sqrt{c^2-1}s), -c)\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\vec{t}(s) = \vec{t}(s) + \varepsilon \vec{t}^*(s) = (-\cos(\sqrt{c^2-1}s), -\sin(\sqrt{c^2-1}s), 0)$$

ve

$$\tilde{g}(s) = \vec{g}(s) + \varepsilon \vec{g}^*(s) = \frac{1}{\sqrt{c^2-1}} \left[ (c \sin(\sqrt{c^2-1}s), -c \cos(\sqrt{c^2-1}s), -1) + \varepsilon (\sin(\sqrt{c^2-1}s), -\cos(\sqrt{c^2-1}s), -c) \right]$$

elde edilir. Şimdi  $\bar{\gamma}$  dual küresel eğrilik fonksiyonunu bulalım.  $\vec{g}'(s) = -\gamma \vec{t}(s)$  olduğundan  $\gamma = c$  dir.

$$\Delta = \det(\vec{c}', \vec{e}, \vec{t}) = \frac{1}{\sqrt{c^2-1}} \sqrt{c^2-1} \begin{vmatrix} -\sin(\sqrt{c^2-1}s) & \cos(\sqrt{c^2-1}s) & 0 \\ -\sin(\sqrt{c^2-1}s) & \cos(\sqrt{c^2-1}s) & c \\ -\cos(\sqrt{c^2-1}s) & -\sin(\sqrt{c^2-1}s) & 0 \end{vmatrix} = -c$$

ve

$$\delta = \langle \vec{c}', \vec{e} \rangle = \left\langle (-\sin(\sqrt{c^2-1}s), \cos(\sqrt{c^2-1}s), 0), (-\sin(\sqrt{c^2-1}s), \cos(\sqrt{c^2-1}s), c) \right\rangle = 1$$

bulunur. Buradan

$$\bar{\gamma} = \gamma + \varepsilon (\delta + \gamma \Delta) = c + \varepsilon (1 - c^2)$$

elde edilir. Dolayısıyla,  $\bar{\gamma}$  bir sabit olduğundan Teorem 5.3.1 den verilen eğri bir  $\tilde{e}$  - *slant dual hiperbolik eğridir*.  $\tilde{e}$  - slant dual hiperbolik eğri aynı zamanda  $\tilde{g}$  - slant dual hiperbolik eğri olduğundan, eğri bir  $\tilde{g}$  - *slant dual hiperbolik eğridir*. Ayrıca  $\frac{\bar{\gamma}'}{(1-\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}}$  ifadesi sabit

olduğundan Teorem 5.3.5 den tek kanatlı hiperboloid yüzeyine karşılık gelen eğri  $\tilde{t}$  - *slant dual hiperbolik eğridir*.

Ayrıca, dual Darboux çatının ani dönme vektörü

$$\tilde{d} = -(c + \varepsilon(1 - c^2))\tilde{e} - \tilde{g} = \sqrt{c^2 - 1}(0, 0, -1) + \varepsilon(0, 0, c)$$

olarak yazılır. Dual eğrilik yarıçapı

$$\bar{R} = \frac{1}{\sqrt{|1 - \bar{\gamma}^2|}} = \frac{1}{\sqrt{|1 - (c + \varepsilon(1 - c^2))^2|}} = \frac{1}{\sqrt{|(c^2 - 1)(1 - \varepsilon 2c)|}} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} + \varepsilon c \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}}$$

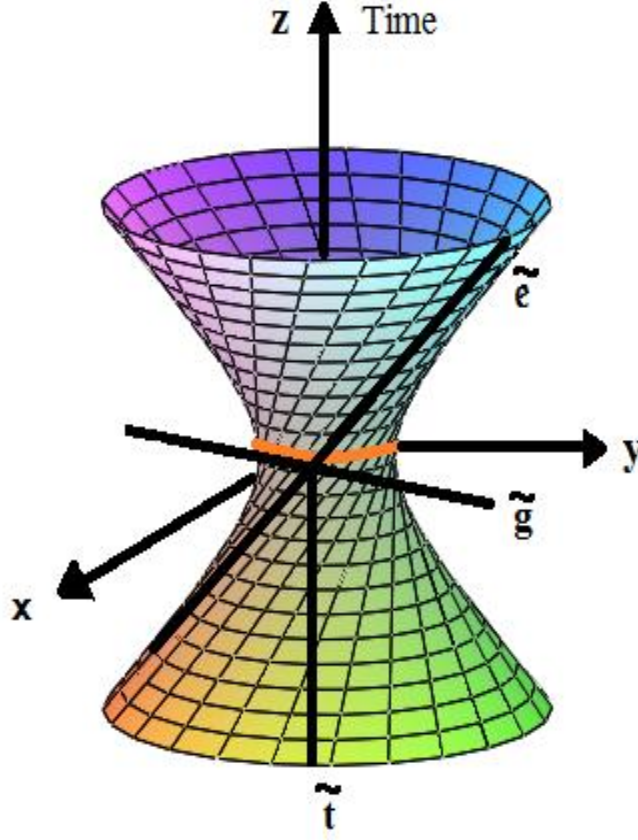
bulunur.  $\bar{R} = \sinh \bar{\theta}$  olduğundan

$$\sinh \theta + \varepsilon \theta^* \cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} + \varepsilon c \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}}$$

olur. Karşılıklı elemanlar eşleştirilirse  $\sinh \theta = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}}$  ve  $\theta^* \cosh \theta = \frac{c}{\sqrt{c^2 - 1}}$  olur. Buradan

$\theta^* = 1$  bulunur. O halde  $\tilde{e}$  ve  $\tilde{d}_0$  arasındaki dual hiperbolik açı

$$\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^* = \arcsinh \left( \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \right) + \varepsilon \text{ bulunur.}$$



Şekil 5.1.  $|c| > 1$  olmak üzere tek kanatlı hiperboloid örneği

#### 5.4. Dual Lorentziyen Slant Timelike Eğriler

Bir doğrunun hareketiyle oluşan yüzeye regle yüzey denir. M. Önder bir spacelike regle yüzeyin boğaz çizgisi üzerinde bulunan çatı elemanları ile sabit açı yapan bir sabit vektörü dikkate alarak spacelike slant regle yüzeyleri tanımlamıştır [18]. İyi bilinir ki E. Study dönüşümünden  $IR_1^3$  uzayındaki yönlü doğrular birim dual Lorentziyen kürenin noktalarına birebir karşılık gelir. Böylece spacelike regle yüzey birim dual Lorentziyen küre üzerinde bir eğriye karşılık gelmektedir. Bu bölümde,  $\tilde{S}_1^2$  birim dual Lorentziyen küre yüzeyi üzerindeki slant timelike eğrilerin geometrisi, dual Darboux çatısı ve onun türev formülleri yardımıyla incelenecektir.

**(a)  $\tilde{e}$  - Slant Dual Timelike Eğriler**

**Tanım 5.4.1.**  $\tilde{x}(s) = \vec{x}(s) + \varepsilon \vec{x}^*(s)$ ,  $\tilde{S}_1^2$  küresi üzerinde bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$  eğrisinin dual Darboux çatısı  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  ve dual geodezik eğrilik fonksiyonu  $\bar{\gamma} \neq 0$  olarak verilsin. Buna göre  $\tilde{u}$  sıfırdan farklı null olmayan sabit bir birim dual vektör olmak üzere

$$\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_e = \text{sabit} \quad (5.102)$$

oluyorsa  $\tilde{x}(s)$  eğrisine  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğri denir.

**Teorem 5.4.1.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\bar{\gamma}$  dual geodezik eğriliği sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\bar{c}_e = \langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle$  ve  $\bar{c}_g = \langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle$  sabit olmak üzere  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğridir ancak ve ancak

$$\frac{1}{\bar{\gamma}} = -\frac{\bar{c}_g}{\bar{c}_e} \quad (5.103)$$

ifadesi sabittir.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğri olsun. Bu takdirde Tanım 5.4.1. den  $\tilde{u}$  bir sabit doğrultu olmak üzere

$$\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_e = \text{sabit} \quad (5.104)$$

olur. Dual Darboux türev formülleri kullanılarak (5.104) denkleminin türevi alınır  $\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = 0$  bulunur. Yani  $\tilde{u}$  birim dual vektörü  $\tilde{e}$  ve  $\tilde{g}$  dual vektörlerinin gerdiği düzlemedir. Buradan  $\bar{c}_e$  ve  $\bar{c}_g$  dual sabitler olmak üzere

$$\tilde{u} = \bar{c}_e \tilde{e} + \bar{c}_g \tilde{g} \quad (5.105)$$

yazılabilir.  $\tilde{u}$  sabit olduğundan (5.105) denkleminin türevi alınır

$$(\bar{c}_e + \bar{c}_g \bar{\gamma}) \tilde{t} = 0 \quad (5.106)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{\gamma} = -\frac{\bar{c}_g}{\bar{c}_e}$$

sabit bulunur.

( $\Leftarrow$ ): (5.103) denklemini sağlansın.  $\tilde{u}$  birim dual vektörü

$$\tilde{u} = \bar{c}_e \tilde{e} + \bar{c}_g \tilde{g} \quad (5.107)$$

olarak tanımlanır. (5.107) eşitliğinin türevi alınıp (5.103) eşitliği kullanılırsa  $\tilde{u}' = 0$  bulunur. Yani  $\tilde{u}$  bir sabit birim dual vektördür. Diğer yandan  $\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_e = \text{sabit}$  tir. Böylece Tanım 5.4.1. den  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğridir.

**Sonuç 5.4.1.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğri olsun. Bu takdirde, (5.103) nin reel ve dual kısımları, sırasıyla,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\gamma} = -\frac{c_g}{c_e} \\ \gamma^* = \frac{c_g^* c_e - c_g c_e^*}{c_g^2} \end{array} \right. \quad (5.108)$$

biçimindedir.

**İspat:**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğri olduğundan (5.103) eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\frac{1}{\gamma + \varepsilon \gamma^*} = -\frac{c_g + \varepsilon c_g^*}{c_e + \varepsilon c_e^*}$$

$$\frac{\gamma - \varepsilon \gamma^*}{\gamma^2} = -\frac{(c_g + \varepsilon c_g^*)(c_e - \varepsilon c_e^*)}{c_e^2}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1}{\gamma} - \varepsilon \frac{\gamma^*}{\gamma^2} = -\frac{c_g}{c_e} - \varepsilon \frac{c_g^* c_e - c_g c_e^*}{c_e^2}$$

olur. Son eşitlikte reel ve dual kısımlar karşılaştırılırsa

$$\frac{1}{\gamma} = -\frac{c_g}{c_e} \quad \text{ve} \quad \gamma^* = \frac{c_g^* c_e - c_g c_e^*}{c_g^2}$$

elde edilir. E. Study dönüşümünden spacelike regle yüzeyin anadoğruları  $\tilde{S}_1^2$  birim dual küresi üzerindeki diferansiyellenebilir  $\tilde{e}(s) = \vec{e}(s) + \varepsilon \vec{e}^*(s)$  eğrisinin reel kısmı olan  $\vec{e}(s)$  vektörüne karşılık gelmektedir. Bu takdirde (5.108) in ilk eşitliği  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğrisine karşılık gelen bir spacelike regle yüzeyin  $\vec{q}$  - slant spacelike regle yüzey olma şartını verir [18].

**Teorem 5.4.2.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatısı ile verilen, dual küresel eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğridir ancak ve ancak

$$\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = 0$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$ ,  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğri olsun. Dual Darboux türev formüllerinden

$$\tilde{e}' = \tilde{t}$$

$$\tilde{e}'' = \tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g}$$

$$\tilde{e}''' = \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} + \bar{\gamma}^2 \tilde{t} = (1 + \bar{\gamma}^2) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g}$$

elde edilir. Buradan

$$\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \bar{\gamma} \\ 0 & (1 + \bar{\gamma}^2) & \bar{\gamma}' \end{vmatrix}$$

$$\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = \bar{\gamma}^2 \left( \frac{1}{\bar{\gamma}} \right)' \quad (5.109)$$

Teorem 5.4.1 den istenen sonuç bulunur.

$$(\Leftarrow): \det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = 0 \text{ olsun. (5.109) dan } \frac{1}{\bar{\gamma}} \text{ oranının sabit olduğu açıktır.}$$

Dolayısıyla  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğridir.

**Sonuç 5.4.2.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğri olsun. Bu takdirde,  $\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = 0$  eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = - \langle \tilde{e}' \times \tilde{e}'', \tilde{e}''' \rangle = 0$$

$$\det(\bar{e}', \bar{e}'', \bar{e}''') = 0, \quad \det(\bar{e}', \bar{e}'', \bar{e}^{*''}) + \det(\bar{e}', \bar{e}^{*''}, \bar{e}''') + \det(\bar{e}^{*'}, \bar{e}'', \bar{e}''') = 0$$

elde edilir. İyi bilinir ki bir spacelike regle yüzeyin anadoğruları bir dual timelike eğrinin  $\bar{e}(s)$  reel bileşenine karşılık geldiğinden,  $\det(\bar{e}', \bar{e}'', \bar{e}''') = 0$  eşitliği, bir spacelike regle yüzeyin  $\bar{q}$  - slant spacelike regle yüzey olma şartıdır. Bu takdirde  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğrisine karşılık gelen bir spacelike regle yüzeyin  $\bar{q}$  - slant spacelike regle yüzey olma şartını verir [18].

**Teorem 5.4.3.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatısı ile verilen, dual küresel eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğridir ancak ve ancak

$$\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') = 0$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:**  $(\Rightarrow)$ :  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğri olsun. Dual Darboux türev formüllerinden

$$\begin{aligned} \tilde{g}' &= \bar{\gamma} \tilde{t} \\ \tilde{g}'' &= \bar{\gamma} \tilde{e} + \bar{\gamma}' \tilde{t} + \bar{\gamma}^2 \tilde{g} \\ \tilde{g}''' &= \bar{\gamma}'' \tilde{t} + \bar{\gamma}' (\tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g}) + \bar{\gamma}' \tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{t} + 2\bar{\gamma}' \bar{\gamma} \tilde{g} + \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}' \tilde{t} \\ &= 2\bar{\gamma}' \tilde{e} + (\bar{\gamma}^3 + \bar{\gamma}'' + \bar{\gamma}) \tilde{t} + 3\bar{\gamma}' \bar{\gamma} \tilde{g} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') &= \begin{vmatrix} 0 & \bar{\gamma} & 0 \\ \bar{\gamma} & \bar{\gamma}' & \bar{\gamma}^2 \\ 2\bar{\gamma}' & \bar{\gamma}^3 + \bar{\gamma}'' + \bar{\gamma} & 3\bar{\gamma}\bar{\gamma}' \end{vmatrix} \\
&= \bar{\gamma}(\bar{\gamma}^2\bar{\gamma}') \\
\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') &= -\bar{\gamma}^5 \left( \frac{1}{\bar{\gamma}} \right)' \tag{5.110}
\end{aligned}$$

Teorem 5.4.1. den istenen sonuç bulunur.

$$(\Leftarrow): \det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') = 0 \text{ olsun. (5.110) dan } \frac{1}{\bar{\gamma}} \text{ oranının sabit olduğu açıktır.}$$

Dolayısıyla  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğridir.

**Sonuç 5.4.3.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğri olsun. Bu takdirde,  $\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') = 0$  eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') = -\langle \tilde{g}' \times \tilde{g}'', \tilde{g}''' \rangle = 0$$

$$\det(\bar{g}', \bar{g}'', \bar{g}''') = 0, \quad \det(\bar{g}', \bar{g}'', \bar{g}''') + \det(\bar{g}', \bar{g}^{*''}, \bar{g}''') + \det(\bar{g}^{*'}, \bar{g}'', \bar{g}''') = 0$$

elde edilir. Bu takdirde  $\det(\bar{g}', \bar{g}'', \bar{g}''') = 0$  eşitliği,  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğrisine karşılık gelen bir spacelike regle yüzeyin  $\bar{q}$  - slant spacelike regle yüzey olma şartını verir [18].

**Teorem 5.4.4.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatısı ile verilen, dual küresel eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğridir ancak ve ancak

$$\tilde{e}''' - (1 + \bar{\gamma}^2)\tilde{e}' = 0 \tag{5.111}$$

eşitlikleri sağlanır.

**İspat:**  $(\Rightarrow)$ :  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğri olsun. Dual Darboux türev formüllerinden

$$\tilde{e}' = \tilde{t} \quad (5.112)$$

$$\tilde{e}'' = \tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g} \quad (5.113)$$

$$\tilde{e}''' = (1 + \bar{\gamma}^2) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} \quad (5.114)$$

tir.  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ - slant dual timelike eğri olduğundan Teorem 5.4.1. den  $\frac{1}{\bar{\gamma}} = \text{sabit}$  fonksiyonunun türevi alınır,

$$\bar{\gamma}' = 0 \quad (5.115)$$

olur. (5.115) ve (5.112) denklemleri (5.114) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{e}''' - (1 + \bar{\gamma}^2) \tilde{e}' = 0 \quad (5.116)$$

elde edilir.

( $\Leftarrow$ ): (5.111) denklemi sağlansın.  $\tilde{t}' = \tilde{e}''$  ve buradan

$$\tilde{t}'' = \tilde{e}''' \quad (5.117)$$

bulunur. (5.111) denklemi (5.117) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{t}'' = (1 + \bar{\gamma}^2) \tilde{e}' \quad (5.118)$$

elde edilir. Diğer taraftan dual Darboux türev formüllerinden

$$\tilde{t}' = \tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g}$$

$$\tilde{t}'' = (1 + \bar{\gamma}^2) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} \quad (5.119)$$

olduğundan (5.118) ve (5.119) denklemleri karşılaştırılırsa

$$(1 + \bar{\gamma}^2) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} = (1 + \bar{\gamma}^2) \tilde{t}$$

olur. Karşılıklı eşitliklerden

$$\bar{\gamma}' = 0 \quad (5.120)$$

elde edilir. (5.120) denkleminin integrali alınırsa  $\frac{1}{\bar{\gamma}} = \text{sabit}$  bulunur. Teorem 5.4.1. gereğince

$\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğridir.

**Sonuç 5.4.4.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$  - slant dual hiperbolik eğri olsun. Bu takdirde, (5.111) reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\begin{aligned}\vec{e}''' + \varepsilon \vec{e}^{*'''} &= (1 + (\gamma + \varepsilon \gamma^*)^2) (\vec{e}' + \varepsilon \vec{e}^{*'}) \\ \vec{e}''' &= (1 + \gamma^2) \vec{e}', \quad \vec{e}^{*'''} = 2\gamma \gamma^* \vec{e}' + (1 + \gamma^2) \vec{e}^{*'}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu takdirde  $\vec{e}''' = (1 + \gamma^2) \vec{e}'$  eşitliği,  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğrisine karşılık gelen bir spacelike regle yüzeyin  $\bar{q}$  - slant spacelike regle yüzey olma şartını verir [18].

#### (b) $\tilde{t}$ -Slant Dual Timelike Eğriler

**Tanım 5.4.2.**  $\tilde{x}(s) = \vec{x}(s) + \varepsilon \vec{x}^*(s)$ ,  $\tilde{S}_1^2$  küresi üzerinde bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$  eğrisinin dual Darboux çatısı  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  ve dual geodezik eğrilik fonksiyonu  $\bar{\gamma} \neq 0$  olarak verilsin. Buna göre  $\tilde{u}$  sıfırdan farklı null olmayan sabit bir birim dual vektör olmak üzere

$$\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_t = \text{sabit} \quad (5.121)$$

oluyorsa  $\tilde{x}(s)$  eğrisine  $\tilde{t}$  - slant dual timelike eğri denir.

**Teorem 5.4.5.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatısı ile verilen, dual küresel eğriliği sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun. Bu takdirde  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual timelike eğridir ancak ve ancak

$$\frac{\bar{\gamma}'}{(1 + \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{sabit} \quad (5.122)$$

olmasıdır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual timelike eğri olsun. Bu takdirde sabit bir  $\tilde{u}$  vektörü için  $\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_i = \text{sabittir}$ . Buradan

$$\tilde{u} = \bar{b}_1 \tilde{e} + \bar{c}_i \tilde{t} + \bar{b}_2 \tilde{g} \quad (5.123)$$

yazılabilir. (5.123) denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{b}_1' \tilde{e} + \bar{b}_1 \tilde{t} + \bar{c}_i' \tilde{e} + \bar{c}_i \bar{\gamma} \tilde{g} + \bar{b}_2' \tilde{g} + \bar{b}_2 \bar{\gamma} \tilde{t} \\ 0 &= (\bar{b}_1' + \bar{c}_i') \tilde{e} + (\bar{b}_1 + \bar{b}_2 \bar{\gamma}) \tilde{t} + (\bar{b}_2' + \bar{c}_i \bar{\gamma}) \tilde{g} \end{aligned}$$

ve  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  bir ortonormal çatı olduğundan

$$\begin{cases} \bar{b}_1' + \bar{c}_i' = 0, \\ \bar{b}_1 + \bar{b}_2 \bar{\gamma} = 0, \\ \bar{b}_2' + \bar{c}_i \bar{\gamma} = 0 \end{cases} \quad (5.124)$$

sistemi elde edilir. (5.124) ün ikinci denkleminde

$$\bar{b}_1 = -\bar{b}_2 \bar{\gamma} \quad (5.125)$$

bulunur.  $\tilde{u}$  sabit olduğundan

$$\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle = \bar{b}_1^2 - \bar{c}_i^2 + \bar{b}_2^2 = \text{sabit} \quad (5.126)$$

olur. Buradan (5.125) denklemini (5.126) da yerine yazılırsa

$$\bar{b}_2^2 \bar{\gamma}^2 - \bar{c}_i^2 + \bar{b}_2^2 = \bar{b}_2^2 (1 + \bar{\gamma}^2) = \bar{n}^2 = \text{sabit} \quad (5.127)$$

bulunur. Böylece

$$\bar{b}_2 = \pm \frac{\bar{n}}{\sqrt{1 + \bar{\gamma}^2}} \quad (5.128)$$

elde edilir. (5.124) ün son denkleminde

$$\bar{b}_2' = -\bar{c}_i \bar{\gamma}$$

yani,

$$\frac{d}{ds} \left[ \pm \frac{\bar{n}}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} \right] = -\bar{c}_i \bar{\gamma} \quad (5.129)$$

olup, bu türev düzenlenirse

$$\pm \frac{\bar{n} \frac{\bar{\gamma}' \bar{\gamma}}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}}}{1+\bar{\gamma}^2} = -\bar{c}_i \bar{\gamma}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılır ve tekrar düzenlenirse

$$\pm \bar{\gamma}' \frac{1}{(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \bar{\gamma} = -\frac{\bar{c}_i}{\bar{n}} \bar{\gamma}$$

olur. Böylece

$$\frac{1}{(1+\bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \bar{\gamma}' = \frac{\bar{c}_i}{\bar{n}} = \bar{d} = \text{sabit}$$

ifadesi elde edilir.

( $\Leftarrow$ ) : (5.123) denklemi sağlansın.

$$\tilde{u} = \left( \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} \right) \tilde{e} - \bar{d} \tilde{t} - \left( \frac{1}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} \right) \tilde{g} \quad (5.130)$$

vektörünü ele alalım. (5.130) denkleminin türevi alınırsa

$$\tilde{u}' = \left( \frac{\bar{\gamma}' \sqrt{1+\bar{\gamma}^2} - \bar{\gamma} \frac{\bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}}}{1+\bar{\gamma}^2} \right) \tilde{e} + \left( \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} \right) \tilde{t} - \bar{d} \tilde{e} - \bar{d} \bar{\gamma} \tilde{g} - \left( \frac{-\frac{\bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}}}{1+\bar{\gamma}^2} \right) \tilde{g} - \left( \frac{1}{\sqrt{1+\bar{\gamma}^2}} \right) \bar{\gamma} \tilde{t}$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{u}' &= \left( \frac{(\bar{\gamma}'(\bar{\gamma}^2 + 1) - \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}')}{(1 + \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{e} - \bar{d} \tilde{e} - \bar{d} \bar{\gamma} \tilde{g} + \left( \frac{\bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{(1 + \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{g} \\
\tilde{u}' &= \left( \frac{\bar{\gamma}'}{(1 + \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{e} - \bar{d} \tilde{e} - \bar{d} \bar{\gamma} \tilde{g} + \left( \frac{\bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{(1 + \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{g} \\
&= \left( \frac{\bar{\gamma}' - \bar{d} (1 + \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{e} + \left( \frac{\bar{\gamma} \bar{\gamma}' - \bar{d} \bar{\gamma} (1 + \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{g} \\
&= \left( \frac{\bar{d} (1 + \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}} - \bar{d} (1 + \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{e} + \left( \frac{\bar{d} \bar{\gamma} (1 + \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}} - \bar{d} \bar{\gamma} (1 + \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{g} \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $\tilde{u}$  vektörünün sabit olduğu açıktır. Böylece  $\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \text{sabit}$  olup  $\tilde{x}(s)$  bir

$\tilde{t}$  - slant dual timelike eğridir.

**Sonuç 5.4.5.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual timelike eğri olsun. Bu takdirde, (5.122) reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\frac{\gamma'}{\sqrt{(\gamma^2 + 1)^3}} = \text{sabit} \quad , \quad \frac{[\gamma^{*'}(1 + \gamma^2) - 3\gamma\gamma'\gamma^*]}{(1 + \gamma^2)^{5/2}} = \text{sabit}$$

elde edilir.

**İspat:**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual timelike eğri olduğundan (5.122) eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\frac{\bar{\gamma}'}{\sqrt{(\bar{\gamma}^2 + 1)^3}} = \frac{\gamma' + \varepsilon \gamma'^*}{\sqrt{\bar{\gamma}^6 + 3\bar{\gamma}^4 + 3\bar{\gamma}^2 + 1}}$$

yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{\gamma' + \varepsilon \gamma'^*}{\sqrt{\bar{\gamma}^6 + 3\bar{\gamma}^4 + 3\bar{\gamma}^2 + 1}} = \frac{\gamma' + \varepsilon \gamma'^*}{\sqrt{(\gamma^2 + 1)^3 + \varepsilon(\gamma^2 + 1)^2 6\gamma \gamma^*}}$$

bulunur. Payda kökten kurtarılarak

$$\frac{\gamma'}{\sqrt{(\gamma^2 + 1)^3}} + \varepsilon \frac{[\gamma'^*(\gamma^2 + 1) - 3\gamma \gamma' \gamma^*]}{\sqrt{(\gamma^2 + 1)^5}} = \text{sabit}$$

elde edilir. Bu takdirde  $\frac{\gamma'}{\sqrt{(\gamma^2 + 1)^3}} = \text{sabit}$  eşitliği,  $\tilde{t}$  - slant dual timelike eğrisine karşılık

gelen bir spacelike regle yüzeyin  $\bar{h}$  - slant spacelike regle yüzey olma şartını verir [18].

**Teorem 5.4.6.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual timelike eğridir ancak ve ancak

$$\begin{cases} \bar{\gamma} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\tanh^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2|}}, & \tilde{u} \text{ timelike} \\ \bar{\gamma} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\coth^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2|}}, & \tilde{u} \text{ spacelike} \end{cases} \quad (5.131)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:**  $(\Rightarrow)$ :  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual timelike eğri olsun.  $\tilde{u}$  sabit birim timelike vektörü için

$$\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = -\cosh \bar{\theta} = \text{sabit} \quad (5.132)$$

olur. (5.132) denkleminin türevi alınır

$$\langle \tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = 0 \quad (5.133)$$

$$\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = -\bar{\gamma} \langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle \quad (5.134)$$

bulunur.  $\langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = \bar{x}$  olsun. Böylece

$$\tilde{u} = \bar{\gamma} \bar{x} \tilde{e} - \cosh \bar{\theta} \tilde{t} - \bar{x} \tilde{g} \quad (5.135)$$

olur.  $\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle = -1$  olduğundan

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^2 \bar{x}^2 - \cosh^2 \bar{\theta} + \bar{x}^2 &= -1 \\ \bar{x}^2 (\bar{\gamma}^2 + 1) &= \sinh^2 \bar{\theta} \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \pm \frac{\sinh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} \quad (5.136)$$

bulunur. Böylece (5.135) denkleminde

$$\tilde{u} = \pm \frac{\bar{\gamma} \sinh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} \tilde{e} - \cosh \bar{\theta} \tilde{t} \mp \frac{\sinh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} \tilde{g} \quad (5.137)$$

olur. (5.133) denkleminin türevi alınırsa

$$\langle \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} + \bar{\gamma}^2 \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \langle (1 + \bar{\gamma}^2) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = 0 \quad (5.138)$$

elde edilir.

$$(1 + \bar{\gamma}^2) \langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle + \bar{\gamma}' \langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = -(1 + \bar{\gamma}^2) \cosh \bar{\theta} + \bar{\gamma}' \bar{x} = 0$$

$$\bar{x} = \frac{(1 + \bar{\gamma}^2) \cosh \bar{\theta}}{\bar{\gamma}'} \quad (5.139)$$

bulunur. (5.136) ve (5.139) denklemleri eşitlenirse

$$\pm \frac{\sinh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} = \frac{(1 + \bar{\gamma}^2) \cosh \bar{\theta}}{\bar{\gamma}'}$$

$$\pm \tanh \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}'}{(\bar{\gamma}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - 1 = 0 \quad (5.140)$$

olur ve (5.140) denkleminin integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \pm \tanh \bar{\theta} \frac{d\bar{\gamma}}{(\bar{\gamma}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{d\bar{s}} - 1 &= 0 \\ \pm \tanh \bar{\theta} \int \frac{d\bar{\gamma}}{(\bar{\gamma}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \int d\bar{s} &= 0 \\ \pm \tanh \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} - \bar{s} + \bar{c} &= 0 \end{aligned} \quad (5.141)$$

Şimdi  $\bar{s} \rightarrow -\bar{s} + \bar{c}$  dönüşümü yapılırsa

$$\pm \tanh \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} = -\bar{s} \quad (5.142)$$

bulunur. (5.142) denkleminin karesi alınırsa

$$\begin{aligned} \tanh^2 \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}^2}{\bar{\gamma}^2 + 1} &= \bar{s}^2 \\ \bar{\gamma}^2 \tanh^2 \bar{\theta} &= \bar{s}^2 + \bar{s}^2 \bar{\gamma}^2 \\ \bar{\gamma} &= \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\tanh^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2|}} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$(\Leftarrow) : \bar{\gamma} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\tanh^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2|}} \text{ sağlansın.}$$

$$\bar{x} = \pm \frac{\sinh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} = \pm \frac{\sinh \bar{\theta}}{\sqrt{\left( \frac{\bar{s}^2}{\tanh^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2} + 1 \right)}}$$

$$\bar{x} = \pm \cosh \bar{\theta} \sqrt{\tanh^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2} \quad (5.143)$$

alalım.

$$\bar{\gamma} \bar{x} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\tanh^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2}} \left( \pm \cosh \bar{\theta} \sqrt{\tanh^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2} \right) = \bar{s} \cosh \bar{\theta}$$

olur. Şimdi

$$\tilde{u} = \bar{\gamma} \bar{x} \tilde{e} - \cosh \bar{\theta} \tilde{t} - \bar{x} \tilde{g} = \cosh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{e} - \tilde{t} \mp \sqrt{\tanh^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2} \tilde{g} \right)$$

vektörünün sabit olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \tilde{u}' &= \cosh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{t} - \bar{\gamma} \tilde{g} \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\tanh^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2}} \tilde{g} \mp \bar{\gamma} \sqrt{\tanh^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2} \tilde{t} \right) \\ &= \sinh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{t} \mp \frac{\bar{s}}{\sqrt{\tanh^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2}} \tilde{g} \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\tanh^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2}} \tilde{g} \mp \frac{\bar{s}}{\sqrt{\tanh^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2}} \left( \pm \sqrt{\tanh^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2} \right) \tilde{t} \right) \\ \tilde{u}' &= \cosh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{t} \mp (\pm \bar{s}) \tilde{t} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\tilde{u} = \cosh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{e} - \tilde{t} \mp \left( \sqrt{\tanh^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2} \right) \tilde{g} \right) \quad (5.144)$$

sabit bir vektördür. Böylece  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual timelike eğridir.

Şimdi  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual timelike eğri olsun.  $\tilde{u}$  sabit birim spacelike vektörü için

$$\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \sinh \bar{\theta} = \text{sabit} \quad (5.145)$$

olur. (5.145) denkleminin türevi alınırsa

$$\langle \tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = 0 \quad (5.146)$$

$$\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = -\bar{\gamma} \langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle \quad (5.147)$$

bulunur.  $\langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = \bar{x}$  olsun. Böylece

$$\tilde{u} = \bar{\gamma} \bar{x} \tilde{e} - \sinh \bar{\theta} \tilde{t} - \bar{x} \tilde{g} \quad (5.148)$$

olur.  $\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle = 1$  olduğundan

$$\bar{\gamma}^2 \bar{x}^2 - \sinh^2 \bar{\theta} + \bar{x}^2 = 1$$

$$\bar{x}^2 (\bar{\gamma}^2 + 1) = \cosh^2 \bar{\theta}$$

$$\bar{x} = \pm \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} \quad (5.149)$$

bulunur. Böylece (5.148) denkleminde

$$\tilde{u} = \pm \frac{\bar{\gamma} \cosh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} \tilde{e} - \sinh \bar{\theta} \tilde{t} \mp \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} \tilde{g} \quad (5.150)$$

olur. (5.146) in türevi alınır

$$\langle \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} + \bar{\gamma}^2 \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \langle (1 + \bar{\gamma}^2) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = 0 \quad (5.151)$$

elde edilir.

$$(\bar{\gamma}^2 + 1) \langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle + \bar{\gamma}' \langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = (\bar{\gamma}^2 + 1) \sinh \bar{\theta} + \bar{\gamma}' \bar{x} = 0$$

$$\bar{x} = -\frac{(\bar{\gamma}^2 + 1) \sinh \bar{\theta}}{\bar{\gamma}'} \quad (5.152)$$

bulunur. (5.149) ve (5.152) denklemleri eşitlenirse

$$\pm \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} = -\frac{(\bar{\gamma}^2 + 1) \sinh \bar{\theta}}{\bar{\gamma}'}$$

$$\pm \coth \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}'}{(\bar{\gamma}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - 1 = 0 \quad (5.153)$$

olur ve (5.153) denkleminin integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \mp \coth \bar{\theta} \frac{d\bar{\gamma}}{(\bar{\gamma}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{d\bar{s}} - 1 &= 0 \\ \mp \coth \bar{\theta} \int \frac{d\bar{\gamma}}{(\bar{\gamma}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \int d\bar{s} &= 0 \\ \mp \coth \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} - \bar{s} + \bar{c} &= 0 \end{aligned} \quad (5.154)$$

Şimdi  $\bar{s} \rightarrow -\bar{s} + \bar{c}$  dönüşümü yapılırsa

$$\mp \coth \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} = -\bar{s} \quad (5.155)$$

bulunur. (5.155) denkleminin karesi alınırsa

$$\begin{aligned} \coth^2 \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}^2}{\bar{\gamma}^2 + 1} &= \bar{s}^2 \\ \bar{\gamma}^2 \coth^2 \bar{\theta} &= \bar{s}^2 + \bar{s}^2 \bar{\gamma}^2 \\ \bar{\gamma} &= \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\coth^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2|}} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$(\Leftarrow): \bar{\gamma} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\coth^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2|}} \text{ sağlansın.}$$

$$\bar{x} = \pm \frac{\coth \bar{\theta}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 + 1}} = \pm \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sqrt{\left( \frac{\bar{s}^2}{\coth^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2} + 1 \right)}}$$

$$\bar{x} = \pm \sinh \bar{\theta} \sqrt{|\coth^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2|} \quad (5.156)$$

alalım.

$$\bar{\gamma} \bar{x} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\coth^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2|}} \left( \pm \sinh \bar{\theta} \sqrt{|\coth^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2|} \right) = \bar{s} \sinh \bar{\theta}$$

olur. Şimdi

$$\tilde{u} = \bar{\gamma} \bar{x} \tilde{e} - \sinh \bar{\theta} \tilde{t} - \bar{x} \tilde{g} = \sinh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{e} - \tilde{t} \mp \left( \sqrt{|\coth^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2|} \right) \tilde{g} \right)$$

vektörünün sabit olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \tilde{u}' &= \sinh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{t} - \bar{\gamma} \tilde{g} \mp \frac{-\bar{s}}{\sqrt{|\coth^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2|}} \tilde{g} \mp \bar{\gamma} \sqrt{|\coth^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2|} \tilde{t} \right) \\ &= \sinh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{t} \mp \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\coth^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2|}} \tilde{g} \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\coth^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2|}} \tilde{g} \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{|\coth^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2|}} \left( \mp \sqrt{|\coth^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2|} \right) \tilde{t} \right) \\ \tilde{u}' &= \sinh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{t} \pm (\mp \bar{s}) \tilde{t} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\tilde{u} = \sinh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{e} - \tilde{t} \mp \left( \sqrt{|\coth^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2|} \right) \tilde{g} \right) \quad (5.157)$$

sabit bir vektördür. Böylece  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual timelike eğridir.

**Sonuç 5.4.6.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  -slant dual timelike eğri olsun. Bu takdirde, (5.131) reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\begin{cases} \gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{|\tanh^2 \theta - s^2|}} , & \gamma^* = \pm \frac{\tanh \theta [s^* \tanh \theta - s \theta^* \sec h^2 \theta]}{(\tanh^2 \theta - s^2)^{3/2}} , & \tilde{u} \text{ timelike} \\ \gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{|\coth^2 \theta - s^2|}} , & \gamma^* = \pm \frac{\coth \theta [s^* \coth \theta + s \theta^* \csc h^2 \theta]}{(\coth^2 \theta - s^2)^{3/2}} , & \tilde{u} \text{ spacelike} \end{cases}$$

bulunur.

**İspat:**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual timelikel eğri olsun. İlk olarak  $\tilde{u}$  nın sabit birim timelike vektör olduğu durumu ele alalım. (5.131) eşitliğinin ilk denklemleri reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\bar{\gamma}^2 = \frac{\bar{s}^2}{\tanh^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2} = \frac{(s + \varepsilon s^*)^2}{\tanh^2 (\theta + \varepsilon \theta^*) - (s + \varepsilon s^*)^2}$$

yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{(s + \varepsilon s^*)^2}{\tanh^2 (\theta + \varepsilon \theta^*) - (s + \varepsilon s^*)^2} = \frac{s^2 + \varepsilon 2ss^*}{(\tanh^2 \theta - s^2) + \varepsilon 2[\theta^* \tanh \theta \sec h^2 \theta - ss^*]}$$

bulunur. Payda eşleniği ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{s^2}{\tanh^2 \theta - s^2} - \varepsilon \frac{2s \tanh \theta [s^* \tanh \theta - s \theta^* \sec h^2 \theta +]}{(\tanh^2 \theta - s^2)^2} = \gamma^2 + \varepsilon 2\gamma\gamma^*$$

elde edilir. Taraf tarafa eşleştirilip  $\gamma$  değeri yerine yazılırsa,

$$\gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{|\tanh^2 \theta - s^2|}} , \quad \gamma^* = \pm \frac{\tanh \theta [s^* \tanh \theta - s \theta^* \sec h^2 \theta]}{(\tanh^2 \theta - s^2)^{3/2}}$$

elde edilir. Bu takdirde  $\gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{|\tanh^2 \theta - s^2|}}$  eşitliği,  $\tilde{t}$  - slant dual timelike eğrisine karşılık

gelen bir spacelike regle yüzeyin  $\bar{h}$  - slant spacelike regle yüzey olma şartını verir [18].

Şimdi  $\tilde{u}$  nın sabit birim spacelike vektör olduğu durumu ele alalım. (5.131) eşitliğinin ikinci denklemleri reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\bar{\gamma}^2 = \frac{\bar{s}^2}{\coth^2 \bar{\theta} - \bar{s}^2} = \frac{(s + \varepsilon s^*)^2}{\coth^2(\theta + \varepsilon \theta^*) - (s + \varepsilon s^*)^2}$$

yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{(s + \varepsilon s^*)^2}{\coth^2(\theta + \varepsilon \theta^*) - (s + \varepsilon s^*)^2} = \frac{s^2 + \varepsilon 2ss^*}{(\coth^2 \theta - s^2) - \varepsilon 2[ss^* + \theta^* \coth \theta \csc h^2 \theta]}$$

bulunur. Payda eşleniği ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{s^2}{\coth^2 \theta - s^2} + \varepsilon \frac{2s \coth \theta [s^* \coth \theta + s \theta^* \csc h^2 \theta]}{(\coth^2 \theta - s^2)^2} = \gamma^2 + \varepsilon 2\gamma\gamma^*$$

elde edilir. Taraf tarafa eşleştirilip  $\gamma$  değeri yerine yazılırsa,

$$\gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{|\coth^2 \theta - s^2|}} \quad , \quad \gamma^* = \pm \frac{\coth \theta [s^* \coth \theta + s \theta^* \csc h^2 \theta]}{(\coth^2 \theta - s^2)^{3/2}}$$

elde edilir. Bu takdirde  $\gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{|\coth^2 \theta - s^2|}}$  eşitliği,  $\tilde{t}$  - slant dual timelike eğrisine karşılık

gelen bir spacelike regle yüzeyin  $\vec{h}$  - slant spacelike regle yüzey olma şartını verir [18].

### (c) $\tilde{g}$ - Slant Dual Timelike Eğriler

**Tanım 5.4.3.**  $\tilde{x}(s) = \vec{x}(s) + \varepsilon \vec{x}^*(s)$ ,  $\tilde{S}_1^2$  küresi üzerinde bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$  eğrisinin dual Darboux çatısı  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  ve dual geodezik eğrilik fonksiyonu  $\bar{\gamma} \neq 0$  olarak verilsin. Buna göre  $\tilde{u}$  sıfırdan farklı null olmayan sabit bir birim dual vektör olmak üzere

$$\langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_{\tilde{g}} = \text{sabit} \quad (5.158)$$

oluyorsa  $\tilde{x}(s)$  eğrisine  $\tilde{g}$  - slant dual timelike eğri denir.

.  $\tilde{g}$  - slant dual timelike eğrilerin  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğriler olduğu açıktır. Dolayısıyla,  $\tilde{e}$  - slant dual timelike eğriler için geçerli olan tüm karakterizasyonlar  $\tilde{g}$  - slant dual timelike eğriler için de geçerlidir.

### 5.5. Dual Lorentziyen Slant Spacelike Eğriler

Bir doğrunun hareketiyle oluşan yüzeye regle yüzey denir. M. Önder spacelike doğuranlı bir timelike regle yüzeyin boğaz çizgisi üzerinde bulunan çatı elemanları ile sabit açı yapan bir sabit vektörü dikkate alarak spacelike doğuranlı timelike slant regle yüzeyleri tanımlamıştır [18]. İyi bilinir ki E. Study dönüşümünden  $IR_1^3$  uzayındaki yönlü doğrular birim dual Lorentziyen kürenin noktalarına birebir karşılık gelir. Böylece spacelike doğuranlı bir timelike regle yüzey birim dual Lorentziyen küre üzerinde bir eğriye karşılık gelmektedir. Bu bölümde,  $\tilde{S}_1^2$  birim dual Lorentziyen küre yüzeyi üzerindeki spacelike slant eğrilerin geometrisi, dual Darboux çatısı ve onun türev formülleri yardımıyla incelenecektir.

#### (a) $\tilde{e}$ - Slant Dual Spacelike Eğriler

**Tanım 5.5.1.**  $\tilde{x}(s) = \vec{x}(s) + \varepsilon \vec{x}^*(s)$ ,  $\tilde{S}_0^2$  küresi üzerinde bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$  eğrisinin dual Darboux çatısı  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  ve dual geodezik eğrilik fonksiyonu  $\bar{\gamma} \neq 0$  olarak verilsin. Buna göre  $\tilde{u}$  sıfırdan farklı null olmayan sabit bir birim dual vektör olmak üzere

$$\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_e = \text{sabit} \quad (5.159)$$

oluyorsa  $\tilde{x}(s)$  eğrisine  $\tilde{e}$  - slant dual spacelike eğri denir.

**Teorem 5.5.1.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\bar{\gamma}$  dual geodezik eğriliği sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\bar{c}_e = \langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle$  ve  $\bar{c}_g = \langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle$  sabit olmak üzere  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$  - slant dual spacelike eğridir ancak ve ancak

$$\frac{1}{\bar{\gamma}} = -\frac{\bar{c}_g}{\bar{c}_e} \quad (5.160)$$

ifadesi sabittir.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ - slant dual spacelike eğri olsun. Bu takdirde Tanım 5.5.1. den  $\tilde{u}$  bir sabit doğrultu olmak üzere

$$\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_{\tilde{e}} = \text{sabit} \quad (5.161)$$

olur. Dual Darboux türev formülleri kullanılarak (5.161) denkleminin türevi alınırsa  $\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = 0$  bulunur. Yani  $\tilde{u}$  birim dual vektörü  $\tilde{e}$  ve  $\tilde{g}$  dual vektörlerinin gerdiği düzlemindedir. Buradan  $\bar{c}_{\tilde{e}}$  ve  $\bar{c}_{\tilde{g}}$  dual sabitler olmak üzere

$$\tilde{u} = \bar{c}_{\tilde{e}} \tilde{e} + \bar{c}_{\tilde{g}} \tilde{g} \quad (5.162)$$

yazılabilir.  $\tilde{u}$  sabit olduğundan (5.162) denkleminin türevi alınırsa

$$(\bar{c}_{\tilde{e}} + \bar{c}_{\tilde{g}} \bar{\gamma}) \tilde{t} = 0 \quad (5.163)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{\bar{\gamma}} = -\frac{\bar{c}_{\tilde{g}}}{\bar{c}_{\tilde{e}}}$$

sabit bulunur.

( $\Leftarrow$ ): (5.160) denklemi sağlansın.  $\tilde{u}$  birim dual vektörü

$$\tilde{u} = \bar{c}_{\tilde{e}} \tilde{e} + \bar{c}_{\tilde{g}} \tilde{g} \quad (5.164)$$

olarak tanımlanır. (5.164) eşitliğinin türevi alınıp (5.160) eşitliği kullanılırsa  $\tilde{u}' = 0$  bulunur. Yani  $\tilde{u}$  bir sabit birim dual vektördür. Diğer yandan  $\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_{\tilde{e}} = \text{sabit}$  tir. Böylece Tanım 5.5.1. den  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ - slant dual spacelike eğridir.

**Sonuç 5.5.1.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ - slant dual spacelike eğri olsun. Bu takdirde, (5.160) nin reel ve dual kısımları, sırasıyla,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\gamma} = -\frac{c_g}{c_e} \\ \gamma^* = \frac{c_g^* c_e - c_g c_e^*}{c_g^2} \end{array} \right. \quad (5.165)$$

biçimindedir.

**İspat:**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ - slant dual spacelike eğri olduğundan (5.160) eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\frac{1}{\gamma + \varepsilon \gamma^*} = -\frac{c_g + \varepsilon c_g^*}{c_e + \varepsilon c_e^*}$$

$$\frac{\gamma - \varepsilon \gamma^*}{\gamma^2} = -\frac{(c_g + \varepsilon c_g^*)(c_e - \varepsilon c_e^*)}{c_e^2}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1}{\gamma} - \varepsilon \frac{\gamma^*}{\gamma^2} = -\frac{c_g}{c_e} - \varepsilon \frac{c_g^* c_e - c_g c_e^*}{c_e^2}$$

olur. Son eşitlikte reel ve dual kısımlar karşılaştırılırsa

$$\frac{1}{\gamma} = -\frac{c_g}{c_e} \quad ve \quad \gamma^* = \frac{c_g^* c_e - c_g c_e^*}{c_g^2}$$

elde edilir. E. Study dönüşümünden spacelike doğuranlı bir timelike regle yüzeyin anadoğruları  $\tilde{S}_1^2$  birim dual küresi üzerindeki diferansiyellenebilir  $\tilde{e}(s) = \vec{e}(s) + \varepsilon \vec{e}^*(s)$  eğrisinin reel kısmı olan  $\vec{e}(s)$  vektörüne karşılık gelmektedir. Bu takdirde (5.165) in ilk eşitliği  $\tilde{e}$ - slant dual spacelike eğrisine karşılık gelen bir spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyin  $\vec{q}$ - slant timelike regle yüzey olma şartını verir [18].

**Teorem 5.5.2.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatısı ile verilen, dual küresel eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$ - slant dual spacelike eğridir ancak ve ancak

$$\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = 0$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$ ,  $\tilde{e}$  - slant dual spacelike eğri olsun. Dual Darboux türev formüllerinden

$$\begin{aligned}\tilde{e}' &= \tilde{t} \\ \tilde{e}'' &= -\tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g} \\ \tilde{e}''' &= -\tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} + \bar{\gamma}^2 \tilde{t} = (\bar{\gamma}^2 - 1) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \bar{\gamma} \\ 0 & \bar{\gamma}^2 - 1 & \bar{\gamma}' \end{vmatrix}$$

$$\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = -\bar{\gamma}^2 \left( \frac{1}{\bar{\gamma}} \right)' \quad (5.166)$$

Teorem 5.5.1. den istenen sonuç bulunur.

$$(\Leftarrow): \det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = 0 \text{ olsun. (5.166) dan } \frac{1}{\bar{\gamma}} \text{ oranının sabit olduğu açıktır.}$$

Dolayısıyla  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$  - slant dual spacelike küresel eğridir.

**Sonuç 5.5.2.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$  - slant dual spacelike eğri olsun. Bu takdirde,  $\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = 0$  eşitliğinin reel ve dual kısımları

$$\det(\tilde{e}', \tilde{e}'', \tilde{e}''') = -\langle \tilde{e}' \times \tilde{e}'', \tilde{e}''' \rangle = 0$$

$$\det(\vec{e}', \vec{e}'', \vec{e}''') = 0, \quad \det(\vec{e}', \vec{e}'', \vec{e}^{*''}) + \det(\vec{e}', \vec{e}^{*''}, \vec{e}''') + \det(\vec{e}^{*'}, \vec{e}'', \vec{e}''') = 0$$

biçimindedir. İyi bilinir ki bir spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyin anadoğruları bir dual spacelike eğrinin  $\vec{e}(s)$  reel bileşenine karşılık geldiğinden,  $\det(\vec{e}', \vec{e}'', \vec{e}''') = 0$  eşitliği bir timelike regle yüzeyin  $\vec{q}$  - slant timelike regle yüzey olma şartıdır. Bu takdirde  $\tilde{e}$  - slant dual spacelike

eğrisine karşılık gelen bir spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyin  $\bar{q}$ - slant timelike regle yüzey olma şartını verir [18].

**Teorem 5.5.3.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatısı ile verilen, dual küresel eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$ - slant dual spacelike eğridir ancak ve ancak

$$\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') = 0$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$ - slant dual spacelike eğri olsun. Dual Darboux türev formüllerinden

$$\begin{aligned}\tilde{g}' &= \bar{\gamma} \tilde{t} \\ \tilde{g}'' &= -\bar{\gamma} \tilde{e} + \bar{\gamma}' \tilde{t} + \bar{\gamma}^2 \tilde{g} \\ \tilde{g}''' &= \bar{\gamma}'' \tilde{t} + \bar{\gamma}' (-\tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g}) - \bar{\gamma}' \tilde{e} - \bar{\gamma} \tilde{t} + 2\bar{\gamma}' \bar{\gamma} \tilde{g} + \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}' \tilde{t} \\ &= -2\bar{\gamma}' \tilde{e} + (\bar{\gamma}^3 + \bar{\gamma}'' - \bar{\gamma}) \tilde{t} + 3\bar{\gamma}' \bar{\gamma} \tilde{g}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') &= \begin{vmatrix} 0 & \bar{\gamma} & 0 \\ -\bar{\gamma} & \bar{\gamma}' & \bar{\gamma}^2 \\ -2\bar{\gamma}' & \bar{\gamma}^3 + \bar{\gamma}'' - \bar{\gamma} & 3\bar{\gamma}' \bar{\gamma} \end{vmatrix} \\ &= -\bar{\gamma} (\bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}') \\ \det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') &= \bar{\gamma}^5 \left( \frac{1}{\bar{\gamma}} \right)'\end{aligned} \tag{5.167}$$

Teorem 5.5.1. den istenen sonuç bulunur.

$$(\Leftarrow): \det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') = 0 \text{ olsun. (5.167) den } \frac{1}{\bar{\gamma}} \text{ oranının sabit olduğu açıktır.}$$

Dolayısıyla  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$ - slant dual spacelike eğridir.

**Sonuç 5.5.3.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ - slant dual spacelike eğri olsun. Bu takdirde,  $\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') = 0$  eşitliğinin reel ve dual kısımları

$$\det(\tilde{g}', \tilde{g}'', \tilde{g}''') = -\langle \tilde{g}' \times \tilde{g}'', \tilde{g}''' \rangle = 0$$

$$\det(\bar{g}', \bar{g}'', \bar{g}''') , \quad \det(\bar{g}', \bar{g}'', \bar{g}^{*'''}) + \det(\bar{g}', \bar{g}^{*''}, \bar{g}''') + \det(\bar{g}^{*'}, \bar{g}'', \bar{g}''') \geq 0$$

elde edilir. Bu takdirde  $\det(\bar{g}', \bar{g}'', \bar{g}''') = 0$  eşitliği,  $\tilde{e}$ - slant dual spacelike eğrisine karşılık gelen bir spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyin  $\bar{q}$ - slant timelike regle yüzey olma şartını verir [18].

**Teorem 5.5.4.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatısı ile verilen, dual küresel eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$ - slant dual spacelike eğridir ancak ve ancak

$$\tilde{e}''' + (1 - \bar{\gamma}^2) \tilde{e}' = 0 \quad (5.168)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$ - slant dual spacelike eğri olsun. Dual Darboux türev formüllerinden

$$\tilde{e}' = \tilde{t} \quad (5.169)$$

$$\tilde{e}'' = -\tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g} \quad (5.170)$$

$$\tilde{e}''' = (\bar{\gamma}^2 - 1) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} \quad (5.171)$$

tir.  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ - slant dual spacelike eğri olduğundan Teorem 5.5.1. den  $\frac{1}{\bar{\gamma}} = \text{sabit}$

fonksiyonunun türevi alınırsa,

$$\bar{\gamma}' = 0 \quad (5.172)$$

olur. (5.172) ve (5.169) denklemleri (5.171) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{e}''' + (1 - \bar{\gamma}^2) \tilde{e}' = 0 \quad (5.173)$$

elde edilir.

( $\Leftarrow$ ): (5.168) denklemi sağlansın.  $\tilde{t}' = \tilde{e}''$  ve buradan

$$\tilde{t}'' = \tilde{e}''' \quad (5.174)$$

bulunur. (5.168) denklemi (5.174) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{t}'' = (\bar{\gamma}^2 - 1) \tilde{e}' \quad (5.175)$$

elde edilir. Diğer taraftan dual Darboux türev formüllerinden

$$\begin{aligned} \tilde{t}' &= -\tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g} \\ \tilde{t}'' &= (\bar{\gamma}^2 - 1) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} \end{aligned} \quad (5.176)$$

olduğundan (5.175) ve (5.176) denklemleri karşılaştırılırsa

$$(\bar{\gamma}^2 - 1) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} = (\bar{\gamma}^2 - 1) \tilde{t}$$

olur. Karşılıklı eşitliklerden

$$\bar{\gamma}' = 0 \quad (5.177)$$

elde edilir. (5.177) denkleminin integrali alınır  $\frac{1}{\bar{\gamma}} = \text{sabit}$  bulunur. Teorem 5.5.1. gereğince

$\tilde{x}(s)$ , bir  $\tilde{e}$ - slant dual spacelike eğridir.

**Sonuç 5.5.4.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{e}$ - slant dual spacelike eğri olsun. Bu takdirde, (5.168) reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\begin{aligned} \vec{e}''' + \varepsilon \vec{e}^{*''' } &= -\left(1 - (\gamma + \varepsilon \gamma^*)^2\right) (\vec{e}' + \varepsilon \vec{e}^{*'}) \\ \vec{e}''' &= -(1 - \gamma^2) \vec{e}', \quad \vec{e}^{*''' } = 2\gamma \gamma^* \vec{e}' - (1 - \gamma^2) \vec{e}^{*'} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu takdirde  $\vec{e}''' = -(1 - \gamma^2) \vec{e}'$  eşitliği,  $\tilde{e}$ - slant dual spacelike eğrisine karşılık gelen bir spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyin  $\vec{q}$ - slant timelike regle yüzey olma şartını verir [18].

**(b)  $\tilde{t}$  - Slant Dual Timelike Eğriler**

**Tanım 5.5.2.**  $\tilde{x}(s) = \vec{x}(s) + \varepsilon \vec{x}^*(s)$ ,  $\tilde{S}_0^2$  küresi üzerinde bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$  eğrisinin dual Darboux çatısı  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  ve dual geodezik eğrilik fonksiyonu  $\bar{\gamma} \neq 0$  olarak verilsin. Buna göre  $\tilde{u}$  sıfırdan farklı null olmayan sabit bir birim dual vektör olmak üzere

$$\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_i = \text{sabit} \quad (5.178)$$

oluyorsa  $\tilde{x}(s)$  eğrisine  $\tilde{t}$  - slant dual spacelike eğri denir.

**Teorem 5.5.5.**  $\tilde{x}(s)$ ,  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatısı ile verilen, dual küresel eğriliği sıfırdan farklı bir diferansiyellenebilir eğri olsun. Bu takdirde  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual spacelike eğridir ancak ve ancak

$$\frac{\bar{\gamma}'}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} = \text{sabit} \quad (5.179)$$

olmasıdır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual spacelike eğri olsun. Bu takdirde sabit bir  $\tilde{u}$  vektörü için  $\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_i = \text{sabit}$  olur. Buradan

$$\tilde{u} = \bar{b}_1 \tilde{e} + \bar{c}_i \tilde{t} + \bar{b}_2 \tilde{g} \quad (5.180)$$

yazılabilir. (5.180) denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{b}_1' \tilde{e} + \bar{b}_1 \tilde{t} - \bar{c}_i' \tilde{e} + \bar{c}_i \bar{\gamma} \tilde{g} + \bar{b}_2' \tilde{g} + \bar{b}_2 \bar{\gamma} \tilde{t} \\ 0 &= (\bar{b}_1' - \bar{c}_i') \tilde{e} + (\bar{b}_1 + \bar{b}_2 \bar{\gamma}) \tilde{t} + (\bar{b}_2' + \bar{c}_i \bar{\gamma}) \tilde{g} \end{aligned}$$

ve  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  bir ortonormal çatı olduğundan

$$\begin{cases} \bar{b}_1' - \bar{c}_i' = 0, \\ \bar{b}_1 + \bar{b}_2 \bar{\gamma} = 0, \\ \bar{b}_2' + \bar{c}_i \bar{\gamma} = 0 \end{cases} \quad (5.181)$$

sistemi elde edilir. (5.181) in ikinci denkleminde

$$\bar{b}_1 = -\bar{b}_2 \bar{\gamma} \quad (5.182)$$

bulunur.  $\tilde{u}$  sabit olduğundan

$$\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle = \bar{b}_1^2 - \bar{c}_i^2 - \bar{b}_2^2 = \text{sabit} \quad (5.183)$$

olur. Buradan (5.182) denklemini (5.183) de yerine yazılırsa

$$\bar{b}_2^2 \bar{\gamma}^2 + \bar{c}_i^2 - \bar{b}_2^2 = \bar{b}_2^2 (\bar{\gamma}^2 - 1) = \bar{n}^2 = \text{sabit} \quad (5.184)$$

bulunur. Böylece

$$\bar{b}_2 = \pm \frac{\bar{n}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} \quad (5.185)$$

elde edilir. (5.181) in son denkleminde

$$\bar{b}_2' = -\bar{c}_i \bar{\gamma}$$

yani,

$$\frac{d}{ds} \left[ \pm \frac{\bar{n}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} \right] = -\bar{c}_i \bar{\gamma} \quad (5.186)$$

olup, bu türev düzenlenirse

$$\pm \frac{\bar{n}}{\bar{\gamma}^2 - 1} \frac{\bar{\gamma}' \bar{\gamma}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} = -\bar{c}_i \bar{\gamma}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılır ve tekrar düzenlenirse

$$\pm \bar{\gamma}' \frac{1}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \bar{\gamma} = -\frac{\bar{c}_i}{\bar{n}} \bar{\gamma}$$

olur. Böylece

$$\frac{1}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \bar{\gamma}' = \frac{\bar{c}_i}{\bar{n}} = \bar{d} = \text{sabit}$$

ifadesi elde edilir.

( $\Leftarrow$ ) : (5.180) denklemi sağlansın.

$$\tilde{u} = \left( \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} \right) \tilde{e} - \bar{d} \tilde{t} - \left( \frac{1}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} \right) \tilde{g} \quad (5.187)$$

vektörünü ele alalım. (5.187) denkleminin türevi alınırsa

$$\tilde{u}' = \left( \frac{\bar{\gamma}' \sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1} - \bar{\gamma} \frac{\bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}}}{\bar{\gamma}^2 - 1} \right) \tilde{e} + \left( \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} \right) \tilde{t} + \bar{d} \tilde{e} - \bar{d} \bar{\gamma} \tilde{g} - \left( \frac{-\frac{\bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}}}{\bar{\gamma}^2 - 1} \right) \tilde{g} - \left( \frac{1}{\sqrt{\bar{\gamma}^2 - 1}} \right) \bar{\gamma} \tilde{t}$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{u}' &= \left( \frac{(\bar{\gamma}'(\bar{\gamma}^2 - 1) - \bar{\gamma}^2 \bar{\gamma}')}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{e} + \bar{d} \tilde{e} - \bar{d} \bar{\gamma} \tilde{g} + \left( \frac{\bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{g} \\ \tilde{u}' &= \left( \frac{-\bar{\gamma}'}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{e} + \bar{d} \tilde{e} - \bar{d} \bar{\gamma} \tilde{g} + \left( \frac{\bar{\gamma} \bar{\gamma}'}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{g} \\ &= \left( \frac{\bar{d}(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}} - \bar{\gamma}'}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{e} + \left( \frac{\bar{\gamma} \bar{\gamma}' - \bar{d} \bar{\gamma}(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{g} \\ &= \left( \frac{\bar{d}(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}} - \bar{d}(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{e} + \left( \frac{\bar{d} \bar{\gamma}(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}} - \bar{d} \bar{\gamma}(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \tilde{g} \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $\tilde{u}$  vektörünün sabit olduğu açıktır. Böylece  $\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \text{sabit}$  olup  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual spacelike eğridir.

**Sonuç 5.5.5.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual spacelike eğri olsun. Bu takdirde, (5.179) reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\frac{\gamma'}{\sqrt{(\gamma^2 - 1)^3}} = \text{sabit} \quad , \quad \frac{[\gamma'^*(\gamma^2 - 1) - 3\gamma\gamma'\gamma'^*]}{(\gamma^2 - 1)^{5/2}} = \text{sabit}$$

elde edilir.

**İspat:**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual spacelike eğri olduğundan (5.179) eşitliği reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\frac{\bar{\gamma}'}{\sqrt{(\bar{\gamma}^2 - 1)^3}} = \frac{\gamma' + \varepsilon\gamma'^*}{\sqrt{\bar{\gamma}^6 - 3\bar{\gamma}^4 + 3\bar{\gamma}^2 - 1}}$$

yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{\gamma' + \varepsilon\gamma'^*}{\sqrt{\bar{\gamma}^6 - 3\bar{\gamma}^4 + 3\bar{\gamma}^2 - 1}} = \frac{\gamma' + \varepsilon\gamma'^*}{\sqrt{(\gamma^2 - 1)^3 + \varepsilon(\gamma^2 - 1)^2 6\gamma\gamma'^*}}$$

bulunur. Payda kökten kurtarılarak

$$\frac{\gamma'}{\sqrt{(\gamma^2 - 1)^3}} + \varepsilon \frac{[\gamma'^*(\gamma^2 - 1) - 3\gamma\gamma'\gamma'^*]}{(\gamma^2 - 1)^{5/2}} = \text{sabit}$$

elde edilir. Bu takdirde  $\frac{\gamma'}{\sqrt{(\gamma^2 - 1)^3}} = \text{sabit}$  eşitliği,  $\tilde{t}$  - slant dual spacelike eğrisine karşılık

gelen bir spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyin  $\bar{h}$  - slant timelike regle yüzey olma şartını verir [18].

**Teorem 5.5.6.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual spacelike eğridir ancak ve ancak

$$\begin{cases} \bar{\gamma} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 + \coth^2 \bar{\theta}}}, & \tilde{u} \text{ timelike} \\ \bar{\gamma} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 + \tanh^2 \bar{\theta}}}, & \tilde{u} \text{ spacelike} \end{cases} \quad (5.188)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ):  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual spacelike eğri olsun.  $\tilde{u}$  sabit birim timelike vektörü için

$$\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \sinh \bar{\theta} = \text{sabit} \quad (5.189)$$

olur. (5.189) denkleminin türevi alınır

$$\langle -\tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = 0 \quad (5.190)$$

$$\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = \bar{\gamma} \langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle \quad (5.191)$$

bulunur.  $\langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = \bar{x}$  olsun. Böylece

$$\tilde{u} = \bar{\gamma} \bar{x} \tilde{e} + \sinh \bar{\theta} \tilde{t} - \bar{x} \tilde{g} \quad (5.192)$$

olur.  $\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle = -1$  olduğundan

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^2 \bar{x}^2 + \sinh^2 \bar{\theta} - \bar{x}^2 &= -1 \\ \bar{x}^2 (\bar{\gamma}^2 - 1) &= -\cosh^2 \bar{\theta} \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \pm \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sqrt{1 - \bar{\gamma}^2}} \quad (5.193)$$

bulunur. Böylece (5.192) denkleminde

$$\tilde{u} = \pm \frac{\bar{\gamma} \cosh \bar{\theta}}{\sqrt{1 - \bar{\gamma}^2}} \tilde{e} + \sinh \bar{\theta} \tilde{t} \mp \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sqrt{1 - \bar{\gamma}^2}} \tilde{g} \quad (5.194)$$

olur. (5.190) denkleminin türevi alınır

$$\langle -\tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} + \bar{\gamma}^2 \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \langle (\bar{\gamma}^2 - 1) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = 0 \quad (5.195)$$

elde edilir.

$$(\bar{\gamma}^2 - 1)\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle + \bar{\gamma}' \langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = (\bar{\gamma}^2 - 1) \sinh \bar{\theta} + \bar{\gamma}' \bar{x} = 0$$

$$\bar{x} = \frac{(1 - \bar{\gamma}^2) \sinh \bar{\theta}}{\bar{\gamma}'} \quad (5.196)$$

bulunur. (5.193) ve (5.196) denklemleri eşitlenirse

$$\begin{aligned} \pm \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sqrt{1 - \bar{\gamma}^2}} &= \frac{(1 - \bar{\gamma}^2) \sinh \bar{\theta}}{\bar{\gamma}'} \\ \pm \coth \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}'}{(1 - \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.197)$$

olur ve (5.197) denkleminin integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \pm \coth \bar{\theta} \frac{d\bar{\gamma}}{(1 - \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{d\bar{s}} - 1 &= 0 \\ \pm \coth \bar{\theta} \int \frac{d\bar{\gamma}}{(1 - \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} - \int d\bar{s} &= 0 \\ \pm \coth \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{1 - \bar{\gamma}^2}} - \bar{s} + \bar{c} &= 0 \end{aligned} \quad (5.198)$$

Şimdi  $\bar{s} \rightarrow -\bar{s} + \bar{c}$  dönüşümü yapılırsa

$$\pm \coth \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{1 - \bar{\gamma}^2}} = -\bar{s} \quad (5.199)$$

bulunur. (5.199) denkleminin karesi alınırsa

$$\begin{aligned} \coth^2 \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}^2}{1 - \bar{\gamma}^2} &= \bar{s}^2 \\ \bar{\gamma}^2 \coth^2 \bar{\theta} &= \bar{s}^2 - \bar{s}^2 \bar{\gamma}^2 \end{aligned}$$

$$\bar{\gamma} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 + \coth^2 \bar{\theta}}}$$

elde edilir.

$$(\Leftarrow): \bar{\gamma} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 + \coth^2 \bar{\theta}}} \text{ sağlansın.}$$

$$\bar{x} = \pm \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sqrt{1 - \bar{\gamma}^2}} = \pm \frac{\cosh \bar{\theta}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\bar{s}^2}{\bar{s}^2 + \coth^2 \bar{\theta}}\right)}}$$

$$\bar{x} = \pm \sinh \bar{\theta} \sqrt{\bar{s}^2 + \coth^2 \bar{\theta}} \quad (5.200)$$

alalım.

$$\bar{\gamma} \bar{x} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 + \coth^2 \bar{\theta}}} \left( \pm \sinh \bar{\theta} \sqrt{\bar{s}^2 + \coth^2 \bar{\theta}} \right) = \bar{s} \sinh \bar{\theta}$$

olur. Şimdi

$$\tilde{u} = \bar{\gamma} \bar{x} \tilde{e} + \sinh \bar{\theta} \tilde{t} - \bar{x} \tilde{g} = \sinh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{e} + \tilde{t} \mp \sqrt{\bar{s}^2 + \coth^2 \bar{\theta}} \tilde{g} \right)$$

vektörünün sabit olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \tilde{u}' &= \sinh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{t} + \bar{\gamma} \tilde{g} \mp \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 + \coth^2 \bar{\theta}}} \tilde{g} \mp \bar{\gamma} \sqrt{\bar{s}^2 + \coth^2 \bar{\theta}} \tilde{t} \right) \\ &= \sinh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{t} \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 + \coth^2 \bar{\theta}}} \tilde{g} \mp \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 + \coth^2 \bar{\theta}}} \tilde{g} \mp \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 + \coth^2 \bar{\theta}}} \left( \pm \sqrt{\bar{s}^2 + \coth^2 \bar{\theta}} \right) \tilde{t} \right) \\ \tilde{u}' &= \sinh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{t} \mp (\pm \bar{s}) \tilde{t} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\tilde{u} = \sinh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{e} + \tilde{t} \pm \left( \sqrt{\bar{s}^2 + \coth^2 \bar{\theta}} \right) \tilde{g} \right) \quad (5.201)$$

sabit bir vektördür. Böylece  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual spacelike eğridir.

Şimdi  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual spacelike eğri olsun.  $\tilde{u}$  sabit birim spacelike vektörü için

$$\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \cosh \bar{\theta} = \text{sabit} \quad (5.202)$$

olur. (5.202) denkleminin türevi alınırsa

$$\langle -\tilde{e} + \bar{\gamma} \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = 0 \quad (5.203)$$

$$\langle \tilde{e}, \tilde{u} \rangle = \bar{\gamma} \langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle \quad (5.204)$$

bulunur.  $\langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = \bar{x}$  olsun. Böylece

$$\tilde{u} = \bar{\gamma} \bar{x} \tilde{e} + \cosh \bar{\theta} \tilde{t} - \bar{x} \tilde{g} \quad (5.205)$$

olur.  $\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle = 1$  olduğundan

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^2 \bar{x}^2 + \cosh^2 \bar{\theta} - \bar{x}^2 &= 1 \\ \bar{x}^2 (\bar{\gamma}^2 - 1) &= -\sinh^2 \bar{\theta} \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \pm \frac{\sinh \bar{\theta}}{\sqrt{1 - \bar{\gamma}^2}} \quad (5.206)$$

bulunur. Böylece (5.205) denkleminde

$$\tilde{u} = \pm \frac{\bar{\gamma} \sinh \bar{\theta}}{\sqrt{1 - \bar{\gamma}^2}} \tilde{e} + \cosh \bar{\theta} \tilde{t} \mp \frac{\sinh \bar{\theta}}{\sqrt{1 - \bar{\gamma}^2}} \tilde{g} \quad (5.207)$$

olur. (5.203) ün türevi alınırsa

$$\langle -\tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g} + \bar{\gamma}^2 \tilde{t}, \tilde{u} \rangle = \langle (\bar{\gamma}^2 - 1) \tilde{t} + \bar{\gamma}' \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = 0 \quad (5.208)$$

elde edilir.

$$(\bar{\gamma}^2 - 1)\langle \tilde{t}, \tilde{u} \rangle + \bar{\gamma}' \langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = (\bar{\gamma}^2 - 1) \cosh \bar{\theta} + \bar{\gamma}' \bar{x} = 0$$

$$\bar{x} = \frac{(1 - \bar{\gamma}^2) \cosh \bar{\theta}}{\bar{\gamma}'} \quad (5.209)$$

bulunur. (5.206) ve (5.209) denklemleri eşitlenirse

$$\begin{aligned} \pm \frac{\sinh \bar{\theta}}{\sqrt{1 - \bar{\gamma}^2}} &= \frac{(1 - \bar{\gamma}^2) \cosh \bar{\theta}}{\bar{\gamma}'} \\ \pm \tanh \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}'}{(1 - \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.210)$$

olur ve (5.210) denkleminin integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \pm \tanh \bar{\theta} \frac{d\bar{\gamma}}{(1 - \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{d\bar{s}} - 1 &= 0 \\ \pm \tanh \bar{\theta} \int \frac{d\bar{\gamma}}{(1 - \bar{\gamma}^2)^{\frac{3}{2}}} - \int d\bar{s} &= 0 \\ \pm \tanh \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{1 - \bar{\gamma}^2}} - \bar{s} + \bar{c} &= 0 \end{aligned} \quad (5.211)$$

Şimdi  $\bar{s} \rightarrow -\bar{s} + \bar{c}$  dönüşümü yapılırsa

$$\pm \tanh \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{1 - \bar{\gamma}^2}} = -\bar{s} \quad (5.212)$$

bulunur. (5.212) denkleminin karesi alınırsa

$$\begin{aligned} \tanh^2 \bar{\theta} \frac{\bar{\gamma}^2}{1 - \bar{\gamma}^2} &= \bar{s}^2 \\ \bar{\gamma}^2 \tanh^2 \bar{\theta} &= \bar{s}^2 - \bar{s}^2 \bar{\gamma}^2 \end{aligned}$$

$$\bar{\gamma} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 + \tanh^2 \bar{\theta}}}$$

elde edilir.

$$(\Leftarrow): \bar{\gamma} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 + \tanh^2 \bar{\theta}}} \text{ sağlansın.}$$

$$\bar{x} = \pm \frac{\sinh \bar{\theta}}{\sqrt{1 - \bar{\gamma}^2}} = \pm \frac{\sinh \bar{\theta}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\bar{s}^2}{\bar{s}^2 + \tanh^2 \bar{\theta}}\right)}}$$

$$\bar{x} = \pm \cosh \bar{\theta} \sqrt{\bar{s}^2 + \tanh^2 \bar{\theta}} \quad (5.213)$$

alalım.

$$\bar{\gamma} \bar{x} = \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 + \tanh^2 \bar{\theta}}} \left( \pm \cosh \bar{\theta} \sqrt{\bar{s}^2 + \tanh^2 \bar{\theta}} \right) = \bar{s} \cosh \bar{\theta}$$

olur. Şimdi

$$\tilde{u} = \bar{\gamma} \bar{x} \tilde{e} + \cosh \bar{\theta} \tilde{t} - \bar{x} \tilde{g} = \cosh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{e} + \tilde{t} \mp \left( \sqrt{\bar{s}^2 + \tanh^2 \bar{\theta}} \right) \tilde{g} \right)$$

vektörünün sabit olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \tilde{u}' &= \cosh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{t} + \bar{\gamma} \tilde{g} \mp \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 + \tanh^2 \bar{\theta}}} \tilde{g} \mp \bar{\gamma} \sqrt{\bar{s}^2 + \tanh^2 \bar{\theta}} \tilde{t} \right) \\ &= \cosh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{t} \pm \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 + \tanh^2 \bar{\theta}}} \tilde{g} \mp \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 + \tanh^2 \bar{\theta}}} \tilde{g} \mp \frac{\bar{s}}{\sqrt{\bar{s}^2 + \tanh^2 \bar{\theta}}} \left( \pm \sqrt{\bar{s}^2 + \tanh^2 \bar{\theta}} \right) \tilde{t} \right) \\ \tilde{u}' &= \cosh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{t} \mp (\pm \bar{s}) \tilde{t} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\tilde{u} = \cosh \bar{\theta} \left( \bar{s} \tilde{e} + \tilde{t} \mp \left( \sqrt{\bar{s}^2 + \tanh^2 \bar{\theta}} \right) \tilde{g} \right) \quad (5.214)$$

sabit bir vektördür. Böylece  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual spacelike eğridir.

**Sonuç 5.5.6.**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual spacelike eğri olsun. Bu takdirde, (5.188) reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\begin{cases} \gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{s^2 + \coth^2 \theta}} & , & \gamma^* = \pm \frac{\coth \theta [s^* \coth \theta - s \theta^* \csc h^2 \theta]}{(s^2 + \coth^2 \theta)^{3/2}} & , & \tilde{u} \text{ timelike} \\ \gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{s^2 + \tanh^2 \theta}} & , & \gamma^* = \pm \frac{\tanh \theta [s^* \tanh \theta - s \theta^* \sec h^2 \theta]}{(s^2 + \tanh^2 \theta)^{3/2}} & , & \tilde{u} \text{ spacelike} \end{cases}$$

bulunur.

**İspat:**  $\tilde{x}(s)$  bir  $\tilde{t}$  - slant dual timelike küresel eğri olsun. İlk olarak  $\tilde{u}$  nın sabit birim timelike vektör olduğu durumu ele alalım. (5.188) eşitliğinin ilk denklemi reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$\bar{\gamma}^2 = \frac{\bar{s}^2}{\coth^2 \theta + \bar{s}^2} = \frac{(s + \varepsilon s^*)^2}{\coth^2(\theta + \varepsilon \theta^*) + (s + \varepsilon s^*)^2}$$

yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{(s + \varepsilon s^*)^2}{\coth^2(\theta + \varepsilon \theta^*) + (s + \varepsilon s^*)^2} = \frac{s^2 + \varepsilon 2ss^*}{(s^2 + \coth^2 \theta) + \varepsilon 2[ss^* - \theta^* \coth \theta \csc h^2 \theta]}$$

bulunur. Payda eşleniği ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{s^2}{s^2 + \coth^2 \theta} + \varepsilon \frac{2s \coth \theta [s^* \coth \theta - s \theta^* \csc h^2 \theta]}{(s^2 + \coth^2 \theta)^2} = \gamma^2 + \varepsilon 2\gamma\gamma^*$$

elde edilir. Taraf tarafa eşleştirilip  $\gamma$  değeri yerine yazılırsa,

$$\gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{s^2 + \coth^2 \theta}} & , & \gamma^* = \pm \frac{\coth \theta [s^* \coth \theta - s \theta^* \csc h^2 \theta]}{(s^2 + \coth^2 \theta)^{3/2}}$$

elde edilir. Bu takdirde  $\gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{s^2 + \coth^2 \theta}}$  eşitliği,  $\tilde{t}$  - slant dual spacelike eğrisine karşılık

gelen bir spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyin  $\tilde{h}$  - slant timelike regle yüzey olma şartını verir [18].

Şimdi  $\tilde{u}$  nın sabit birim spacelike vektör olduğu durumu ele alalım. (5.188) eşitliğinin ikinci denklemini reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\bar{\gamma}^2 = \frac{\bar{s}^2}{\bar{s}^2 + \tanh^2 \bar{\theta}} = \frac{(s + \varepsilon s^*)^2}{(s + \varepsilon s^*)^2 + \tanh^2(\theta + \varepsilon \theta^*)}$$

yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{(s + \varepsilon s^*)^2}{(s + \varepsilon s^*)^2 + \tanh^2(\theta + \varepsilon \theta^*)} = \frac{s^2 + \varepsilon 2ss^*}{(s^2 + \tanh^2 \theta) + \varepsilon 2[\theta^* \tanh \theta \sec h^2 \theta + ss^*]}$$

bulunur. Payda eşleniği ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{s^2}{s^2 + \tanh^2 \theta} + \varepsilon \frac{2s \tanh \theta [s^* \tanh \theta - s \theta^* \sec h^2 \theta +]}{(s^2 + \tanh^2 \theta)^2} = \gamma^2 + \varepsilon 2\gamma\gamma^*$$

elde edilir. Taraf tarafa eşleştirilip  $\gamma$  değeri yerine yazılırsa,

$$\gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{s^2 + \tanh^2 \theta}} \quad , \quad \gamma^* = \pm \frac{\tanh \theta [s^* \tanh \theta - s \theta^* \sec h^2 \theta]}{(s^2 + \tanh^2 \theta)^{3/2}}$$

elde edilir. Bu takdirde  $\gamma = \pm \frac{s}{\sqrt{s^2 + \tanh^2 \theta}}$  eşitliği,  $\tilde{t}$  - slant dual spacelike eğrisine karşılık

gelen bir spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyin  $\tilde{h}$  - slant timelike regle yüzey olma şartını verir [18].

(c)  $\tilde{g}$  - Slant Dual Spacelike Eğriler

**Tanım 5.5.3**  $\tilde{x}(s) = \vec{x}(s) + \varepsilon \vec{x}^*(s)$ ,  $\tilde{S}_1^2$  küresi üzerinde bir diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\tilde{x}(s)$  eğrisinin dual Darboux çatısı  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  ve dual geodezik eğrilik fonksiyonu  $\bar{\gamma} \neq 0$  olarak verilsin. Buna göre  $\tilde{u}$  sıfırdan farklı null olmayan sabit bir birim dual vektör olmak üzere

$$\langle \tilde{g}, \tilde{u} \rangle = \bar{c}_{\tilde{g}} = \text{sabit} \quad (5.215)$$

oluyorsa  $\tilde{x}(s)$  eğrisine  $\tilde{g}$  - slant dual spacelike eğri denir.

.  $\tilde{g}$  - slant dual spacelike eğrilerin  $\tilde{e}$  - slant dual spacelike eğriler olduğu açıktır. Dolayısıyla,  $\tilde{e}$  - slant dual spacelike eğriler için geçerli olan tüm karakterizasyonlar  $\tilde{g}$  - slant dual spacelike eğriler için de geçerlidir.

**Örnek 5.2.**  $|c| < 1$  olmak üzere Lorentziyen uzayda

$$r(t, v) = (\cos t - v \sin t, \sin t + v \cos t, cv)$$

parametrizasyonu ile verilen tek kanatlı hiperboloid olsun. Bu yüzeye karşılık gelen dual eğrinin  $\tilde{e}$  - slant,  $\tilde{t}$  - slant ve  $\tilde{g}$  - slant dual spacelike eğri olduğunu gösterelim:

$$r(t, v) = (\cos t - v \sin t, \sin t + v \cos t, cv) = (\cos t, \sin t, 0) + v(-\sin t, \cos t, c)$$

olarak yazılırsa burada  $(\cos t, \sin t, 0)$  dayanak eğrisi ve  $(-\sin t, \cos t, c)$  ise doğrultmandır.

Bu regle yüzeye karşılık dual birim küre üzerinde birim hızlı dual eğriyi oluşturalım.

$$\vec{t} = (-\sin t, \cos t, c) \quad , \quad \|\vec{t}\| = \sqrt{|\sin^2 t + \cos^2 t - c^2|} = \sqrt{1 - c^2}$$

bulunur. Buradan  $\vec{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}(-\sin t, \cos t, c)$  dır.

$$\vec{a}^*(t) = \vec{c}(t) \times \vec{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & -\vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & c \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} (-c \sin t, c \cos t, 1)$$

elde edilir. Böylece regle yüzeye karşılık gelen birim hızlı dual eğri

$$\tilde{a}(t) = \vec{a}(t) + \varepsilon \vec{a}^*(t) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} [(-\sin t, \cos t, c) + \varepsilon (-c \sin t, c \cos t, 1)]$$

olarak bulunur. Şimdi bu eğrinin  $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$  Darboux çatı elemanlarını bulalım

$$\tilde{e}(t) = \tilde{a}(t)$$

dir.  $s = s(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} dl$  parametre değişimi yapılırsa ve  $t = \sqrt{1-c^2} s$  olur. Buradan

$$\tilde{e}(s) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} [(-\sin \sqrt{1-c^2} s, \cos \sqrt{1-c^2} s, c) + \varepsilon (-c \sin \sqrt{1-c^2} s, c \cos \sqrt{1-c^2} s, 1)]$$

yazılır. Burada  $\langle \vec{e}(s), \vec{e}(s) \rangle = 1$  olduğu görülür ve  $\tilde{e}(s)$  spacelike vektördür.

$$\vec{t}(s) = \vec{e}'(s) = (-\cos \sqrt{1-c^2} s, -\sin \sqrt{1-c^2} s, 0)$$

elde edilir.  $\langle \vec{t}(s), \vec{t}(s) \rangle = 1$  olduğundan  $\vec{t}(s)$  de spacelike bir vektördür. Bu durumda  $\tilde{g}(s)$  timelike bir vektördür ve

$$\begin{aligned} \vec{g}(s) = \vec{e}(s) \times \vec{t}(s) &= \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & -\vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin \sqrt{1-c^2} s & \cos \sqrt{1-c^2} s & c \\ -\cos \sqrt{1-c^2} s & -\sin \sqrt{1-c^2} s & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} (-c \sin \sqrt{1-c^2} s, c \cos \sqrt{1-c^2} s, 1) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca  $\langle \vec{g}(s), \vec{g}(s) \rangle = -1$  olduğu görülür.  $\vec{c}(s) = (\cos \sqrt{1-c^2} s, \sin \sqrt{1-c^2} s, 0)$  olduğundan

$$\vec{t}^*(s) = \vec{c}(s) \times \vec{t}(s) = \begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & -\vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \cos \sqrt{1-c^2}s & \sin \sqrt{1-c^2}s & 0 \\ -\cos \sqrt{1-c^2}s & -\sin \sqrt{1-c^2}s & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{g}^*(s) = \vec{c}(s) \times \vec{g}(s) &= \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & -\vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \cos \sqrt{1-c^2}s & \sin \sqrt{1-c^2}s & 0 \\ -c \sin \sqrt{1-c^2}s & c \cos \sqrt{1-c^2}s & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} (-\sin \sqrt{1-c^2}s, \cos \sqrt{1-c^2}s, c) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\tilde{t}(s) = \vec{t}(s) + \varepsilon \vec{t}^*(s) = (-\cos \sqrt{1-c^2}s, -\sin \sqrt{1-c^2}s, 0)$$

ve

$$\tilde{g}(s) = \vec{g}(s) + \varepsilon \vec{g}^*(s) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \left[ (-c \sin \sqrt{1-c^2}s, c \cos \sqrt{1-c^2}s, 1) + \varepsilon (-\sin \sqrt{1-c^2}s, \cos \sqrt{1-c^2}s, c) \right]$$

elde edilir. Şimdi  $\tilde{\gamma}$  dual küresel eğrilik fonksiyonunu bulalım.  $\vec{g}'(s) = \gamma \vec{t}(s)$  olduğundan  $\gamma = c$  dir.

$$\Delta = \det(\vec{c}', \vec{e}, \vec{t}) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \sqrt{1-c^2} \begin{vmatrix} -\sin \sqrt{1-c^2}s & \cos \sqrt{1-c^2}s & 0 \\ -\sin \sqrt{1-c^2}s & \cos \sqrt{1-c^2}s & c \\ -\cos \sqrt{1-c^2}s & -\sin \sqrt{1-c^2}s & 0 \end{vmatrix} = -c$$

ve

$$\delta = \langle \vec{c}', \vec{e} \rangle = \left\langle (-\sin \sqrt{1-c^2}s, \cos \sqrt{1-c^2}s, 0), (-\sin \sqrt{1-c^2}s, \cos \sqrt{1-c^2}s, c) \right\rangle = 1$$

bulunur. Buradan

$$\tilde{\gamma} = \gamma + \varepsilon(\delta - \gamma\Delta) = c + \varepsilon(1 - c^2)$$

elde edilir. Dolayısıyla,  $\bar{\gamma}$  bir sabit olduğundan Teorem 5.5.1 den verilen eğri bir  $\tilde{e}$  - slant dual spacelike eğridir.  $\tilde{e}$  - slant dual spacelike eğri aynı zamanda  $\tilde{g}$  - slant dual spacelike eğri olduğundan, eğri bir  $\tilde{g}$  - slant dual spacelike eğridir. Ayrıca  $\frac{\bar{\gamma}'}{(\bar{\gamma}^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$  ifadesi sabit

olduğundan Teorem 5.5.5. den tek kanatlı hiperboloid yüzeyine karşılık gelen eğri  $\tilde{t}$  - slant dual spacelike eğridir.

Ayrıca, dual Darboux çatının ani dönme vektörü

$$\tilde{d} = (c + \varepsilon(1 - c^2))\tilde{e} - \tilde{g} = \sqrt{1 - c^2}(0, 0, -1) + \varepsilon(0, 0, c)$$

olarak yazılır. Dual eğrilik yarıçapı

$$\bar{R} = \frac{1}{\sqrt{|\bar{\gamma}^2 - 1|}} = \frac{1}{\left| (c + \varepsilon(1 - c^2))^2 - 1 \right|} = \frac{1}{\sqrt{|(1 - c^2)(-1 + \varepsilon 2c)|}} = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} + \varepsilon c \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}$$

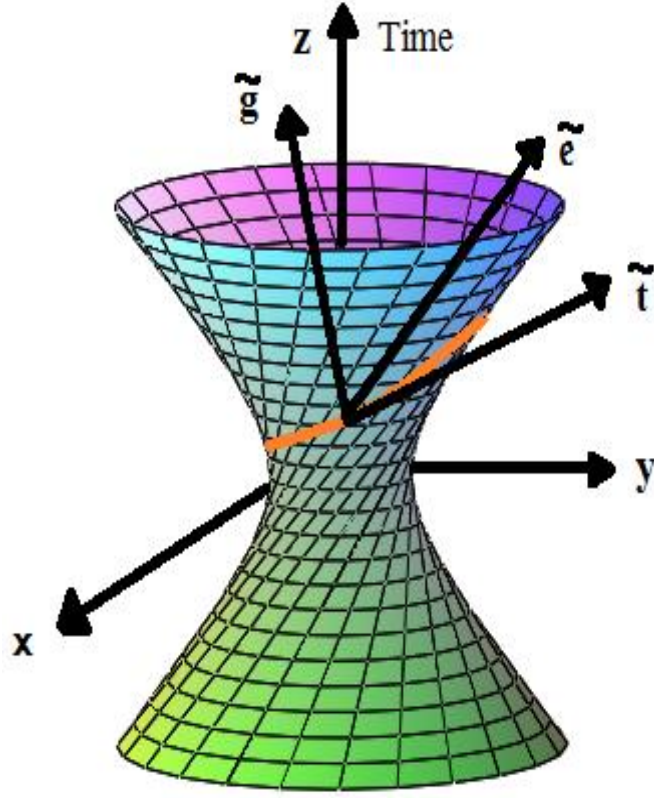
bulunur.  $\bar{R} = \sinh \bar{\theta}$  olduğundan

$$\frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} + \varepsilon c \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} = \sinh \theta + \varepsilon \theta^* \cosh \theta$$

olur. Karşılıklı elemanlar eşleştirilirse  $\sinh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}$  ve  $\theta^* \cosh \theta = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}$  olur. Buradan

$\theta^* = 1$  bulunur. O halde  $\tilde{e}$  ve  $\tilde{d}_0$  arasındaki dual merkez açısı

$$\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^* = \arcsin h \left( \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} \right) + \varepsilon \text{ bulunur.}$$



Şekil 5.2.  $|c| < 1$  olmak üzere tek kanatlı hiperboloid örneği

### REFERANSLAR

- [1] Ali, A.T., Lopez, R., Slant Helices in Minkowski Space  $E_1^3$ , J. Korean Math. Soc. 48(1) (2011) 159-167.
- [2] Ali, A.T., Turgut, M., Position vector of a time-like slant helix in Minkowski 3-space, J. Math. Anal. Appl. 365 (2010) 559–569.
- [3] Ali, A.T., Position vectors of slant helices in Euclidean Space  $E^3$ , Journal of Egyptian Mathematical Society, V. 20(1), 2012, 1-6.
- [4] Barros, M., General helices and a theorem of Lancret, Proc. Amer. Math. Soc. 125, No.5, (1997) 1503–1509.
- [5] Ekmekçi, N., Hacısalihoğlu, H.H., On Helices of a Lorentzian Manifold, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 45 (1996) 45-50.
- [6] Biran, L., *“Diferansiyel Geometri”* İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları, 1970.
- [7] Hacısalihoğlu, H. H., *“Diferansiyel Geometri”*, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları No:2, (1983).
- [8] Blaschke, W., *“Differential Geometrie and Geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie”*, New York, (1945).
- [9] Karger, A., Novak, J., Space Kinematics and Lie Groups. STNL Publishers of Technical Lit., Prague, Czechoslovakia (1978).
- [10] Dimentberg, F. M., The Screw Calculus and its Application in Mechanics, (Izdat, Nauka, Moscow, USSR) English translation: AD680993, Clearinghouse for Federal and Scientific Technical Information, (1965).

- [11] Gürsoy O., “*On the integral invariants of a closed ruled surface*”, Journal of Geometry, 39 (1990), 80-91.
- [12] Kula, L., Ekmekçi, N., Yaylı, Y., İlarslan, K., Characterizations of Slant Helices in Euclidean 3-Space, Turk J Math., 33 (2009) 1–13.
- [13] Monterde, J., Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion, Comput. Aided Geomet. Design 26 (2009) 271–278.
- [14] Orbay, K., Kasap, E., Aydemir, İ.: Mannheim Offsets of Ruled Surfaces, Mathematical Problems in Engineering, Volume 2009, Article ID 160917.
- [15] Önder, M., Similar Ruled Surfaces with Variable Transformations in Euclidean 3-space, [arXiv:1203.6234v1 \[math.DG\]](https://arxiv.org/abs/1203.6234v1), 28 Mar 2012.
- [16] Study, E., Geometrie der Dynamen, Leipzig (1903).
- [17] Veldkamp, G. R., On the Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices in Instantaneous Spatial Kinematics, Mechanism and Machine Theory, Vol. 11, (1975) 141-156.
- [18] Önder, M., Timelike and spacelike slant ruled surfaces in Minkowski 3-space  $E_1^3$ .
- [19] Önder, M., Kocayigit, H., Kazaz, M., Spacelike helices in Minkowski 4-space  $E_1^4$ , Ann Univ Ferrara, 56 (2010) 335–343.
- [20] Ravani, B., Ku, T.S., Bertrand Offsets of ruled and developable surfaces, Comp. Aided Geom. Design, 23 (2) (1991) 145-152.
- [21] Struik, D.J., Lectures on Classical Differential Geometry, 2<sup>nd</sup> ed. Addison Wesley, Dover, (1988).

- [22] O'Neill, B., "Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity", Academic Press, London, (1983).
- [23] Önder, M., Uğurlu, H. H., "Dual Darboux Frame of a Spacelike Ruled Surface and Darboux Approach to Mannheim Offsets of Spacelike Ruled Surfaces", arXiv: 1201.6148v2[math.DG], (2013).
- [24] Önder, M., Uğurlu, H. H., "Dual Darboux Frame of a Timelike Ruled Surface and Darboux Approach to Mannheim Offsets of Timelike Ruled Surfaces", Proceedings of a National Academy of Science, India Section A: Physical Science, Vol. 83, No. 2, 163-169,(2013).
- [25] Önder, M., Slant ruled surfaces in Euclidean 3-space  $E^3$ , arXiv:1311.0627v1 [math.DG] 2013.
- [26] Küçük, A., Gürsoy O., "On the invariants of Bertrand trajectory surface offsets", App. Math. and Comp., 151, (2004), 763–773.
- [27] Izumiya, S., Takeuchi, N., New special curves and developable surfaces, Turk J. Math. 28, (2004) 153-163.
- [28] Kocayiğit, H., Önder, M., Timelike curves of constant slope in Minkowski space  $E_1^4$ , J. Science Techn. Beykent Univ. 1 (2007) 311-318.
- [29] Kula, L. and Yayli, Y., On slant helix and its spherical indicatrix, Applied Mathematics and Computation. 169, (2005) 600-607.
- [30] Turgut, A., "3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler", A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, (1995).
- [31] Uğurlu, H. H., Çalışkan, A., "Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi", Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, Manisa, (2012).

- [32] Uğurlu, H. H., Çalışkan, A., Kılıç, O., "Öklid ve Lorentz Uzaylarında Doğrular Geometrisi", Ders Notları, Basım aşamasında.
- [33] Uğurlu, H. H., Çalışkan, A., "The Study Mapping for Directed Spacelike and Timelike Lines in Minkowski 3-Space  $IR_1^3$ ", Mathematical and Computational Applications, 1(2), 142-148, (1996).
- [34] Yaylı, Y., Çalışkan, A., Uğurlu, H. H., "The E. Study Maps of Circle on Dual Hyperbolic and Lorentzian Unit Shperes  $\tilde{H}_0^2$  and  $\tilde{S}_1^2$ ", Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy, 102A (1), 37-47, (2002).
- [35] Yücesan., A., Ayyıldız, N., Çöken, A.C., "On Rectifying Dual Space Curves", Rev. Mat. Comp. 20 (2), 497-506, (2007).
- [36] DoCarmo, M.P., "Differential Geometry of Curves and Surfaces", Prentice-Hall, New Jersey, (1976).
- [37] O'Neill, B., "Elementary Differential Geometry", Revised second edition, Elsevier, London, (2006).
- [38] Önder, M., Kaya O., Characterizations of Slant Ruled Surfaces in Euclidean 3-space arXiv: 1311/6928 [math.DG] 2013.

### ÖZGEÇMİŞ

**ADI SOYADI** : Seda ORAL

**UNVANI** : Öğretim Görevlisi

**DOĞUM TARİHİ** : 28.04.1987

**DOĞUM YERİ** : UŞAK

Lise öğrenimini 2004 yılında Alaşehir Anadolu Lisesi'nde tamamlayan Seda ORAL, aynı yıl başladığı Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2008 yılında mezun oldu. 2010 yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı'nda yüksek lisansını tamamladı. Yine aynı yıl Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda doktora öğrenimine başladı. 2013 yılından bu yana Celal Bayar Üniversitesi Akhisar Meslek Yüksek Okulu'nda Öğretim Görevlisi (Görevlendirme) olarak görev yapmaktadır.