

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

DÜŞÜK-BOYUTLU DİNAMİK SİSTEMLERİN

KAOS GEÇİŞ EŞİĞİ CİVARINDA

DAVRANIŞLARI VE

BUNLARIN SAĞLAMLIK ANALİZİ

Kıvanç ÇETİN

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Uğur TIRNAKLI

Fizik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu : 404.06.01

Sunuş Tarihi : 15.01.2015

Bornova-İZMİR

2015

Kıvanç ÇETİN tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan “Düşük-boyutlu dinamik sistemlerin kaos geçiş eşiği civarında davranışları ve bunların sağlamlık analizi” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **15.01.2015** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı

: Prof. Dr. Doğan DEMİRHAN

Raportör Üye

: Prof. Dr. Uğur TIRNAKLI

Üye

: Prof. Dr. Özhan KAYACAN

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi / Doktora Tezi olarak sunduğum “**Düşük-boyutlu dinamik sistemlerin kaos geçiş eşiği civarında davranışları ve bunların sağlamlık analizi**” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

.15 / 06 / 2015

İmzası



Adı-Soyadı

Kıvanç ÇETİN

ÖZET

DÜŞÜK-BOYUTLU DİNAMİK SİSTEMLERİN KAOS GEÇİŞ EŞİĞİ CİVARINDA DAVRANIŞLARI VE BUNLARIN SAĞLAMLIK ANALİZİ

ÇETİN, Kıvanç

Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Uğur TIRNAKLI
Ocak 2015, 49 sayfa

Bu tez çalışmasında; kaos eşiği civarında, bir boyutlu yitimli dinamik sistemlerden lojistik mapin iterasyonlarının toplamının dağılımı ve lineer olmayan dinamiğin önemli niceliklerinin arasındaki ilişkiler, farklı yoğunluklarla iki çeşit katkı eklenerek sayısal olarak araştırılmıştır. İlk katkı iyi bilinen beyaz gürültü olup, ikinci katkı yeni tanımladığımız ve korale gürültü olarak adlandırdığımız, mapin kendi yapısından katkılar yapan bir katkıdır. Lojistik mapte kaos eşiğine yaklaşırken, standart lojistik mapin (gürültüsüz) iterasyonları güçlü korelasyonlara sahiptir ve standart Merkezsel Limit Teoremi artık geçerli olmaz. Daha önce yapılan çalışmada (Tirnakli et al. ,2009); limit dağılımın, uygun koşullar altında toplanabilir olmayan $S_q \equiv (1 - \sum_i p_i^q)/(q - 1)$ Tsallis entropisini maksimum yapan q -Gaussiyen dağılıma yakınsadığı gösterilmiştir. Bu tez çalışmasında beyaz gürültü ve korale gürültü katkılarının, limit dağılım ve elde edilen q -Gaussiyen dağılımın genişliği üzerindeki etkileri incelenmektedir. Bulunan bu sonuçlarla; korelasyon, fraktal boyut, Lyapunov üsteli ve q -Gaussiyen dağılımlar arasındaki ölçeklenme ilişkileri iki çeşit gürültü varlığı altında analiz edilmektedir.

Anahtar sözcükler: Kaos eşiğindeki lojistik map, merkezsel limit davranışlar, gürültülü lojistik map.

ABSTRACT

BEHAVIORS OF LOW-DIMENSIONAL DYNAMICAL SYSTEMS AT VICINITY OF THE CHAOS THRESHOLD AND THEIR ROBUSTNESS ANALYSIS

ÇETİN, KIVANÇ

MSc in Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Uğur TIRNAKLI

January 2015, 49 pages

In this thesis we numerically investigate the distribution of the sums of the iterates of the logistic map, which is a good example for a dimensional dissipative dynamical system, and the relationships among the important properties of the nonlinear dynamics in the vicinity of the chaos threshold by adding two kinds of contributions with different densities. The first one is the well-known white noise, whereas the second is a newly defined one, named as correlated noise, which makes contributions from the own structure of the map. As the chaos threshold is approached, the iterates of the standard logistic map (*i.e* noise-free) have strong correlations and the standard Central Limit Theorem is not valid anymore. In a recent work (Tirnakli et al. (2009), it has been shown that the limit distribution seems to converge to q -Gaussian distribution, which maximizes the nonadditive entropy $S_q \equiv (1 - \sum_i p_i^q)/(q - 1)$ under appropriate conditions. In this thesis, we investigate the effect of these contributions (*i.e* white noise and correlated noise) on the limit distribution and on the range of the obtained q -Gaussian distribution. As a result of these findings, under the existence of white noise and also the correlated, we analyze the scaling relations among correlation, fractality, the Lyapunov divergence and q -Gaussian distributions.

Keywords: Logistic map at chaos threshold, central limit behavior, noisy logistic map.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarım süresince bilgi birikimi ve tecrübesiyle bana yol gösteren, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm tez danışmanım Prof. Dr. Uğur Tırnaklı 'ya büyük katkılarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışması boyunca tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini gördüğüm, fikir ve önerileriyle bana çok şey kazandırdığını düşündüğüm Dr. Özgür Afşar'a tüm desteklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Tecrübe ve fikir alışverişlerinden yararlandığım, desteğini yanımda hissettiğim Dr. Ahmet Çelikoğlu'na yardımları için teşekkürlerimi sunarım.

Araştırmalarımın ilerleme sürecinde 112T083 numaralı projelerimize destek sunan TÜBİTAK'a ve 2012FEN076 numaralı projemize destek sunan Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Dekanlığı'na teşekkür ederim.

Hayatımın her aşamasında olduğu gibi bu tez çalışmasında da her türlü desteklerini hissettiğim sevgili aileme tüm anlayışları ve yardımları için en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xv
ÇİZELGELER DİZİNİ	xvii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xix
1. GİRİŞ	1
2. STANDART LOJİSTİK MAP VE İKİ ÇEŞİT GÜRÜLTÜ EKLENMİŞ LOJİSTİK MAPLERİN LİMİT DAVRANIŞLARI	4
2.1 Merkezsel Limit Teoremi.....	4
2.2 Beyaz Gürültü ve Korale Gürültü Eklenmiş Lojistik Map	8
2.3 Genelleştirilmiş Huberman-Rudnick Ölçeklenme Yasası	16
2.4 Kaos Eşiği Civarında Olasılık Dağılımları	18
3. GÜRÜLTÜLÜ LOJİSTİK MAPLER İÇİN ÖLÇEKLENME İLİŞKİLERİ ..	23
3.1 q -Gaussiyen Dağılımın Genişliği ile Korelasyon Boyutu Arasındaki İlişki..	23
3.2 q -Gaussiyen Dağılımın Genişliği ile Korelasyon Uzunluğu Arasındaki İlişki	28

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

3.3 q -Gaussiyen Dağılımın Genişliği ile Lyapunov Üsteli Arasındaki İlişki.....	31
3.4 q -Gaussiyen Dağılımın Genişliği ile Fraktal Boyut Arasındaki İlişki.....	34
4. SONUÇ ve TARTIŞMA.....	42
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	45
ÖZGEÇMİŞ.....	49

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
2.1 Standart lojistik map için (a) dallanma diyagramı ve (b) Lyapunov üsteli grafiği. Dallanma diyagramında standart lojistik mapin kaos eşiği $a_c=1.401155189092...$ noktasına kadar periyodik dallanma rejimi ve bu noktadan sonra başlayan kaotik rejim görülmektedir. a_c noktasından sonra Lyapunov üstelinin artan pozitifliği ile sistem giderek kaotik hale gelir.	9
2.2 $D = 10^{-12}$ gürültü yoğunluğuyla beyaz gürültü katkısı yapılmış lojistik mapin (a) dallanma diyagramı ve (b) Lyapunov üsteli grafiği. Bu gürültü yoğunluğu için $a_c=1.40115518896...$ olarak elde edilmiştir.....	11
2.3 $D = 10^{-2}$ gürültü yoğunluğuyla beyaz gürültü katkısı yapılmış lojistik mapin (a) dallanma diyagramı ve (b) Lyapunov üsteli grafiği. Dallanma diyagramı ve Lyapunov üsteli grafiğindeki bulanıklaşma net bir şekilde görülmektedir.....	11
2.4 Lojistik mape eklenen beyaz gürültü ve korale gürültü terimlerinin otokorelasyon fonksiyonları.	12
2.5 $b = 0.25$ gürültü yoğunluğuyla korale gürültü katkısı yapılmış lojistik mapin (a) dallanma diyagramı ve (b) Lyapunov üsteli grafiği. Dallanma diyagramının sınırlarından da görüleceği üzere standart lojistik map için limit olan $a = 2$ parametre değeri, korale gürültünün kaydırma etkisiyle $a = 1.75$ olmuştur. Böylece bu yoğunluk için $a_c = 1.16158354235 ...$ olarak elde edilmiştir.	13
2.6 $b = 1.25$ gürültü yoğunluğuyla korale gürültü katkısı yapılmış lojistik mapin (a) dallanma diyagramı ve (b) Lyapunov üsteli grafiği. Çok büyük bir yoğunluğa örnek olarak seçilen $b = 1.25$ yoğunluğunda, lojistik mapin kaos eşik değerinin ($a_c = 0.28129217535 ...$) ve a parametresi için üst limitin değiştiği görülmektedir.....	14

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

Şekil

Sayfa

- 2.7 $a = 2$ için standart lojistik mapin olasılık dağılım fonksiyonu. $P(y) = e^{-y^2/(2\sigma^2)}/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ olasılık dağılım fonksiyonuna sahip Gaussiyen kesikli çizgi ile gösterilmiştir.....15
- 2.8 Standart lojistik map için kaos eşiğine artan n değerleriyle yaklaşırken elde edilen dağılım fonksiyonlarının $q = 1.7$ ve $\beta = 6.2$ değerlerine sahip bir q -Gaussiyene yakınsadığı gözlemlenmektedir.21
- 2.9 Beyaz gürültü eklenmiş lojistik map için (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunluklarında, kaos eşiğine artan n değerleriyle yaklaşırken elde edilen dağılım fonksiyonları. Bu düşük yoğunluk değerlerinde q -Gaussiyen dağılımın (siyah kesikli çizgi) q değerinin (a) şeklinde standart lojistik map için elde edilen dağılımın q değeriyle aynı olduğu, (b) şeklinde artan gürültü ile çok az bir şekilde değiştiği görülmektedir. Mavi ve yeşil kesikli çizgilerle $n = 6.02$ ve $n = 8.02$ değerleri için elde edilen dağılımların genişliğini göstermektedir.....22
- 2.10 Korale gürültü eklenmiş lojistik map için (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunluklarında, kaos eşiğine artan n değerleriyle yaklaşırken elde edilen dağılım fonksiyonları. Bu yoğunluk değerlerinde q -Gaussiyen dağılımın (siyah kesikli çizgi) q değerinin (a) şeklinde standart lojistik map için elde edilen dağılımın q değerinden çok az küçük olduğu, (b) şeklinde artan gürültü ile gürültü etkisi sonucu q değerinin daha fazla değiştiği görülmektedir. Mavi ve yeşil kesikli çizgilerle $n = 6.02$ ve $n = 8.02$ değerleri için elde edilen dağılımların genişliğini göstermektedir.22

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

Şekil

Sayfa

- 3.1 Beyaz gürültü eklenmiş lojistik map için (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunluklarında her bir (n,a) grubuna karşılık gelen kaotik bant içindeki yörüngenin kaos eşiği doğrusu $D_{corr} = 0.5$ üzerindeki gelişimi. (b) şeklinde kaos eşiği doğrusunun uç bölgesinde meydana gelen düzleşme gürültü yoğunluğunun küçük boyutunun neden olduğu basamaklama (digitization) etkisidir ve hesap üzerinde bir etkisi yoktur. 25
- 3.2 Korale gürültü eklenmiş lojistik map için (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunluklarında her bir (n,a) grubuna karşılık gelen kaotik bant içindeki yörüngenin kaos eşiği doğrusu $D_{corr} = 0.5$ üzerindeki gelişimi. 26
- 3.3 Beyaz gürültü eklenmiş lojistik map için (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunluklarında q -Gaussiyen olasılık dağılımının genişliği ile kaos eşiğindeki korelasyon boyutu değerinden sapma arasındaki kuvvet yasası ölçeklenmesinin grafiği. 27
- 3.4 Korale gürültü eklenmiş lojistik map için (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunluklarında q -Gaussiyen olasılık dağılımının genişliği ile kaos eşiğindeki korelasyon boyutu değerinden sapma arasındaki kuvvet yasası ölçeklenmesinin grafiği 27
- 3.5 Beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunluğu için l kaos eşiğindeki korelasyon boyutundan sapma ile $(a-a_c)$ kaos eşiğine mesafe arasındaki ölçeklenme ilişkisi. Kaos eşiğine yaklaştıkça l_n değerlerinin sıfıra gittiği görülmektedir..... 27

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

Şekil	Sayfa
3.6 Korale gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunluğu için l kaos eşiğindeki korelasyon boyutundan sapma ile $(a-a_c)$ kaos eşiğine mesafe arasındaki ölçeklenme ilişkisi. Kaos eşiğine yaklaştıkça l_n değerlerinin sıfıra gittiği görülmektedir	28
3.7 Beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunluğunda kaos eşiğine yaklaşırken q -Gaussiyen dağılımın genişliğiyle korelasyon uzunluğu arasındaki ölçeklenme ilişkisi.....	30
3.8 Korale gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunluğunda kaos eşiğine yaklaşırken q -Gaussiyen dağılımın genişliğiyle korelasyon uzunluğu arasındaki ölçeklenme ilişkisi.....	30
3.9 Beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunluğunda kaos eşiğine yaklaşırken korelasyon uzunluğu ile kaos eşiğine mesafe arasındaki ölçeklenme ilişkisi.....	30
3.10 Korale gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunluğunda kaos eşiğine yaklaşırken korelasyon uzunluğu ile kaos eşiğine mesafe arasındaki ölçeklenme ilişkisi.....	31
3.11 Beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunluklarında, kaos eşiğine yaklaşırken elde edilen q -Gaussiyen dağılımların genişliğinin Lyapunov üsteli ile ölçeklenmesi.	33
3.12 Korale gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunluklarında, kaos eşiğine yaklaşırken elde edilen q -Gaussiyen dağılımların genişliğinin Lyapunov üsteli ile ölçeklenmesi.	33

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

Şekil

Sayfa

- 3.13 Beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunluklarında, her bir (n, a) grubu için hesaplanan Lyapunov üstellerinin $(a - a_c)$ kaos eşiğine mesafe ile ölçeklenmesi. Elde edilen ölçeklenmenin Huberman-Rudnick ölçeklenme yasasıyla uyduğu görülmektedir 34
- 3.14 Korale gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunluklarında, her bir (n, a) grubu için hesaplanan Lyapunov üstellerinin $(a - a_c)$ kaos eşiğine mesafe ile ölçeklenmesi. Beyaz gürültü eklenmiş senaryo ile benzer olarak elde edilen ölçeklenmenin Huberman-Rudnick ölçeklenme yasasıyla uyduğu görülmektedir..... 34
- 3.15 $D = 10^{-12}$ gürültü yoğunluğunda beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $n = 5.02$, (b) $n = 6.02$, (c) $n = 7.02$, (d) $n = 8.02$ ve (e) $a = a_c$ için kutu sayma fraktal boyutu hesabı grafikleri. Kesikli çizgilerle belirtilen bölgede yer alan eğrinin eğimi fraktal boyutu vermektedir 37
- 3.16 $b = 0.25$ gürültü yoğunluğunda korale gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $n = 5.02$, (b) $n = 6.02$, (c) $n = 7.02$, (d) $n = 8.02$ ve (e) $a = a_c$ için kutu sayma fraktal boyutu hesabı grafikleri. Kesikli çizgilerle belirtilen bölgede yer alan eğrinin eğimi fraktal boyutu vermektedir 38
- 3.17 Beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunlukları için $1/g \propto (D - D_c)$ ölçeklenme ilişkisi 38
- 3.18 Korale gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunlukları için $1/g \propto (D - D_c)$ ölçeklenme ilişkisi 39

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

Şekil

Sayfa

- 3.19 Beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunlukları için (n, a) gruplarının fraktal boyutlarının kaos eşiğine yaklaşıırken, $(a - a_c)$ kaos eşiğine mesafeyle ilişkisi39
- 3.20 Korale gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunlukları için (n, a) gruplarının fraktal boyutlarının kaos eşiğine yaklaşıırken, $(a - a_c)$ kaos eşiğine mesafeyle ilişkisi39

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Çeşitli yoğunluklar için beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin kritik parametre değerleri	10
2.2 Çeşitli yoğunluklar için korale gürültü eklenmiş lojistik mapin kritik parametre değerleri. Gürültünün kaydırma etkisi açık şekilde görülmektedir.....	13
2.3 Standart lojistik mapin $n = 5.02, 6.02, 7.02, 8.02$ değerleri ve $s = 1$ durumu için geliştirilmiş Huberman-Rudnick ölçeklenmesiyle elde edilmiş parametre değerleri ve bu parametre değerleri için optimum iterasyon sayıları.	19
2.4 Beyaz gürültü eklenmiş lojistik map için seçilen iki gürültü yoğunluğunda $n = 5.02, 6.02, 7.02, 8.02$ değerleri ve $s = 1$ durumu için geliştirilmiş Huberman-Rudnick ölçeklenmesiyle elde edilmiş parametre değerleri ve bu parametre değerleri için optimum iterasyon sayıları.	20
2.5 Korale gürültü eklenmiş lojistik map için seçilen iki gürültü yoğunluğunda $n = 5.02, 6.02, 7.02, 8.02$ değerleri ve $s = 1$ durumu için geliştirilmiş Huberman-Rudnick ölçeklenmesiyle elde edilmiş parametre değerleri ve bu parametre değerleri için optimum iterasyon sayıları	20
3.1 Beyaz gürültü eklenmiş lojistik map için bant yarılma prosedürü ile elde edilen ölçeklenme ilişkileri ve bu ilişkilerin kritik üstel değerleri. Karşılaştırma amaçlı olarak standart lojistik map için değerler (Afsar and Tirnakli, 2014) çalışmasından alınmıştır	40
3.2 Korale gürültü eklenmiş lojistik map için bant yarılma prosedürü ile elde edilen ölçeklenme ilişkileri ve bu ilişkilerin kritik üstel değerleri. Karşılaştırma amaçlı olarak standart lojistik map için değerler (Afsar and Tirnakli, 2014) çalışmasından alınmıştır	41

1. GİRİŞ

İstatistiksel mekanik ve olasılık teorisinde büyük öneme sahip olan standart merkezselsel limit teoremi, özdeş olarak dağılmış çok sayıda bağımsız rastgele değişkenin toplamının dağılımının, uygun şartlar altında yaklaşık olarak Gaussiyen olacağını söyler (Kampen, 1981). Standart merkezselsel limit teoremi bağımsız ya da neredeyse bağımsız (örneğin, kısa mesafeli korelasyonlar) değişkenler içeren sistemler için geçerliiyken, rastgele değişkenleri arasında güçlü korelasyonlar sergileyen sistemler için standart merkezselsel limit teoremi artık geçerli değildir. Bu tip sistemler için merkezselsel limit teoreminin bir q -genelleştirilmesi geliştirilmiştir (Umarov et al., 2008, 2010; Nelson and Umarov, 2010; Vignat and Plastino, 2007; Umarov and Tsallis, 2008; Hahn et al., 2010). Bu genelleştirme ile limit dağılımlar, $S_q \equiv (1 - \sum_i p_i^q) / (q - 1)$ şeklinde tanımlanan toplanabilir olmayan Tsallis entropisini optimize eden q -Gaussiyenler olarak elde edilir. Bu genelleştirilmiş entropi, genelleştirilmiş istatistiksel mekaniğin temeli olup (Tsallis, 1988, 2009; Curado and Tsallis, 1991; Tsallis et al., 1998), $q \rightarrow 1$ özel durumunda standart Boltzmann-Gibbs entropisine indirgenir. q -Gaussiyen dağılımlar; β dağılımın genişliğini kontrol eden parametre olmak üzere;

$$P(y) = P(0) \left[1 - (1-q)\beta x^2 \right]^{1/(1-q)} \quad (1)$$

şeklinde tanımlanır. $q = 1$ için, dağılım Gaussiyen olarak elde edilir.

Standart merkezselsel limit teoremi, rastgele değişkenlerin bağımsızlığına gerek duymasına rağmen; iterasyonları asla tamamen bağımsız olamayan deterministik dinamik sistemler için de merkezselsel limit teoremlerin bulunduğu bilinmektedir. Bu tip sistemler için; özdeş şekilde dağılmış rastgele değişkenler varsayımı, sistemin yeterince karışmış olma (mixing) özelliği ile yer değiştirirse çeşitli merkezselsel limit teoremlerinin geçerli olduğu gösterilmiştir (Kac, 1946; Beck and Roepstorff, 1987; Bilingsley, 1968; Beck, 1990; Mackey and Tyran-Kaminska, 2006). Deterministik algoritması ve uygulamadaki kolaylığı ile bu tip sistemlere standart lojistik map güzel bir örnektir. Pek çok özelliği ortaya konmuş ve doğrusal olmayan dinamik sistemlerde büyük bir öneme sahip olan lojistik map, bir boyutlu yitimli dinamik sistemler sınıfında yer alıp, bu mapten elde edilen sonuçların bu sınıf için birer genel sonuç olması beklenir. Standart lojistik map kuvvetli olarak kaotik iken sistemden elde edilen iterasyonlar ergodik ve kuvvetli olarak karışmıştır. Literatürde, kuvvetli olarak kaotik rejimdeki standart lojistik mapin uygun çarpan ile ölçeklenmiş iterasyonları toplamının dağılımının

Gaussiyen olduğu ve bu durumun standart merkezzel limit teoremine uygun olduğu gösterilmiştir (Bilingsley, 1968; Beck, 1990; Tirnakli et al., 2007, 2009). Lyapunov üstelinin pozitif değerlerinin sistemin kaotik rejimde, aynı üstelin negatif değerlerinin ise sistemin periyodik rejimde olduğunu belirttiği göz önüne alınarak; bir boyutlu yitimli sistemler için Lyapunov üstelinin pozitif değerlerinde standart merkezzel limit teoreminin geçerli olduğu söylenebilir (Mackey and Tyran-Kaminska, 2006).

Lojistik mapin kaotik bölgesinden kaos eşiğine yaklaşırken, mapin iterasyonları arasındaki korelasyonlar giderek kuvvetlenir. Standart lojistik mapin tam kaos eşiği noktasında ($a_c=1.401155189\dots$), Lyapunov üstelinin değeri sıfırdır, lojistik mapin iterasyonları arasındaki kuvvetli korelasyonlar ve karıştırıcı özelliğin eksikliğinden dolayı bir standart merkezzel limit teoremi geçerli olamaz. Ayrıca bu noktada sistem artık ergodik değildir. Literatürde ve bu tez çalışmasında, kaos eşiğine yaklaşılırken limit dağılımların, elde edilen olasılık dağılımlarının eteklerinin genişleyerek q -Gaussiyen dağılım tarafından tarif edilebilir hale geldiği görülmüştür (Tirnakli et al., 2009).

Bu tez çalışmasında ilk olarak standart lojistik mapin kaos eşiği civarında gösterdiği limit davranışları incelenip, daha sonra bu mape iki farklı cins katkı (beyaz ve korale gürültü) eklenerek elde edilen q -Gaussiyen dağılımların bu gürültülü senaryolar için de geçerli olup olmadığı kontrol edilmiştir. Bu gürültüler farklı yoğunluklarda mape eklenerek, sistemin dinamiği üzerindeki etkileri incelenmiş ve böylece elde edilen limit dağılımların bir boyutlu yitimli sistemler için geçerliliği test edilmiştir. Doğadaki bütün sistem çeşitleri için gürültünün her zaman kendini göstermesinden dolayı, gürültü katkısı özellikle önemlidir. Bu önemden dolayı literatürde bu tür sistemlere gürültünün etkisinin çalışıldığı pek çok çalışma vardır (Teramae and Kuramoto, 2001; Pluchino et al., 2013). Ayrıca, özellikle gürültünün kaos eşiği üzerindeki ve Lyapunov üstelinin belirlenmesindeki etkisi yoğun şekilde çalışılmıştır (Gao et al., 1999; Guterrez et al., 1993). Bu çalışmada gürültüler, gürültünün mapin öz dinamiğine baskın gelmemesi ve elde edilecek dağılımların sadece gürültü etkisinin dağılımı olmasını önlemek için akla yatkın yoğunluklarda eklenmiştir. Tez çalışmasında elde edilen sonuçların her birinin literatürde özgün bir değere sahip olması açısından ulaşılmak istenen amaca doğrudan katkı vererek, korale rastgele değişkenlerden oluşan pek çok gerçek dünya sistemleri için limit dağılımların doğasına ışık tutacağı düşünülmektedir. Ayrıca bu tür sayısal sonuçlar

genelleştirilmiş limit teoremlerinin analitik çalışmalarına ilham kaynağı olacağından oldukça önem taşımaktadır.

İki çeşit gürültülü lojistik map için kaos eşiği civarındaki olasılık dağılımları incelendikten sonra, bu dağılımların genişliği ile korelasyon boyutu, korelasyon uzunluğu, Lyapunov üsteli ve fraktal boyut gibi doğrusal olmayan dinamiğin önemli nicelikleri arasındaki daha önce ortaya konan ölçeklenme ilişkileri (Afsar and Tirnakli, 2014) bu gürültülü lojistik mapler için test edilmiştir. Kaos eşiği civarında lojistik mapin kuvvetli korele doğası ve fraktal yapısı nedeniyle elde edilen sonuçların, uzun menzilli korelasyonlara ve fraktal yapıya sahip sistemlerde ortaya çıkan dağılımlar için açıklayıcı olacağı düşünülmektedir. Literatürde ilk defa (Afsar and Tirnakli, 2014) çalışmasında ele alınan bu konunun, çeşitli gürültülerle yapılan testlerinin; elde edilen sonuçların doğruluğunu kanıtlamasının yanı sıra q -Gaussiyen dağılımları ile bu nicelikler arasındaki ilişkilere yönelik, özellikle de fraktal boyut üzerine, yapılacak analitik çalışmalara yol göstereceği düşünülmektedir.

2. STANDART LOJİSTİK MAP VE İKİ ÇEŞİT GÜRÜLTÜ EKLENMİŞ LOJİSTİK MAPLERİN LİMİT DAVRANIŞLARI

Bir boyutlu yitimli dinamik sistemler sınıfında yer alan lojistik map için, davranışın kuvvetlice kaotik olduğu rejiminde standart merkezsiz limit teoreminin geçerli olduğu bilinmektedir. Periyodik rejimden kaotik rejime bir faz geçişinin olduğu kaos eşiği civarında ise mapin iterasyonları arasındaki kuvvetli korelasyonlar ve ergodik özelliğin eksikliği nedeniyle standart merkezsiz limit teoremi geçerli olamaz. Sergilediği bu özellikler nedeniyle kaos eşiği yakınındaki lojistik mapin limit davranışlarının araştırılması, bileşenleri arasında yüksek dereceden korelasyonlar gösteren sistemlerin incelenmesi için bir yol gösterici nitelik taşımaktadır. Bu bölümde ilk olarak merkezsiz limit teoremi tanıtılarak, lojistik map için bu teoremin geçerli olduğu ve bu teoreme neden bir genelleştirme yapılması gerektiğinden bahsedilmiştir. Bu tartışmaların ardından çalışmada uygulama modeli olarak ele aldığımız standart ve iki tip gürültü katkısı yapılmış lojistik mapler tanıtılarak, davranışın kuvvetlice kaotik olduğu bölgede ve kaos eşiği civarında limit dağılımlar elde edilmiştir. Kaos geçiş eşiği civarında elde edilen dağılımların standart ve gürültülü senaryolar için karşılaştırması yapılarak, bu bölgede lojistik map ile aynı evrensellik sınıfında yer alan sistemler için evrensel bir davranış olarak q -Gaussiyen dağılımların elde edileceği sonucuna varılmıştır.

2.1 Merkezi Limit Teoremi

Daha önce de Moivre, Laplace, Chebyshev gibi araştırmacılar tarafından incelenen limit teoreminin ilk tam ispatı, bugün karakteristik fonksiyonlar olarak bilinen analitik bir araç ile çalışılarak 1901 yılında Lyapunov tarafından yapılmıştır. 1920 yılında Lindeberg, karakteristik fonksiyonlara göre oldukça basit olan yeni bir metot ile teoremi ispatlamıştır (Lindeberg, 1922). Teorem, olasılık teorisindeki büyük önemi nedeniyle ilk defa (Polya, 1920) çalışmasında literatüre merkezsiz limit teoremi ifadesiyle girmiştir.

Bu teorem, birbirinden bağımsız çok sayıda ($\cong \infty$) rastgele değişkenin toplamının olasılık dağılımın yaklaşık olarak normal (veya Gaussiyen) olacağını söyler. Bu çok sayıdaki rastgele değişken, bir rastgele sürecin bir adımın önceki adımdan bağımsız olacak şekilde üst üste pek çok kere tekrarlanmasıyla oluşturulmuş bir deney topluluğu olabilir. $X_1, X_2, \dots, X_n$ setinin birbirinden bağımsız ve özdeş olarak dağılmış, μ ortalamalı ve sonlu bir σ^2 varyanslı rastgele değişkenler olduklarını varsayalım. Bu X_i bağımsız rastgele değişkenler setiyle

ilgili olasılık dağılımını bulmak için, U_n gibi bir rastgele değişken tanımlayabiliriz;

$$U_n = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma / \sqrt{n}} \text{ burada } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i . \quad (2)$$

Bu U_n rastgele değişkeniyle daha rahat işlem yapmak için; ortalaması $E(Z_i) = 0$ ve varyansı $V(Z_i) = 1$ olacak şekilde bir Z_i rastgele değişkeni tanımlayalım;

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} . \quad (3)$$

Bu rastgele değişkenin moment üretim fonksiyonu

$$m_Z(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} E[Z_i^3] + \dots \quad (4)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca, X_i rastgele değişkenleri bağımsız olduğundan Z_i rastgele değişkenleri de bağımsız olur ve

$$U_n = \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i \quad (5)$$

kolayca yazılabilir. Bağımsız rastgele değişkenlerin toplamının moment üretim fonksiyonu, bu değişkenlerin bireysel moment üretim fonksiyonlarının çarpımına eşittir. Böylece U_n değişkeninin moment üretim fonksiyonu, $m_n(t)$, Z_i rastgele değişkenlerinin moment üretim fonksiyonları cinsinden yazılabilir.

$$m_n(t) = \left[m_Z \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right]^n = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{3! n^{3/2}} E(Z_i^3) + \dots \right)^n \quad (6)$$

Bu ifadenin $n \rightarrow \infty$ limitini alabilmek için; ilk olarak logaritmasını alır sonra da elde edilen ifadeyi sadeleştirme amaçlı değişken dönüşümü yaparız.

$$\ln(m_n(t)) = n \ln \left[1 + \left(\frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{3!n^{3/2}} E(Z_i^3) + \dots \right) \right] \quad (7)$$

$$y = \left(\frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{3!n^{3/2}} E(Z_i^e) + \dots \right) \quad (8)$$

$$\ln(m_n(t)) = n \ln(1 + y) \quad (9)$$

Artık bu ifadenin sağ tarafını Taylor serisine açarak yazabiliriz,

$$\ln(m_n(t)) = n \ln(1 + y) = n \left[y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots \right]. \quad (10)$$

y değişkeninin asıl formunu yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} \ln(m_n(t)) = n & \left[\left(\frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{3!n^{3/2}} E(Z_i^3) + \dots \right) \right. \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{3!n^{3/2}} E(Z_i^3) + \dots \right)^2 \\ & \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{3!n^{3/2}} E(Z_i^3) + \dots \right)^3 - \dots \right] \end{aligned} \quad (11)$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadede köşeli parantez dışındaki n terimi, parantez içerisine etkidiğinde birinci terim dışındaki bütün terimlerde n 'in bazı pozitif kuvvetlerine sahip oluruz. $n \rightarrow \infty$ limitinde bu ilk terim dışındaki tüm terimler sıfıra gider ve böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(m_n(t))) = \frac{t^2}{2} \quad (12)$$

ve dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (m_n(t)) = e^{\frac{t^2}{2}} \quad (13)$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifade bir standart normal rastgele değişken için moment üretim fonksiyonudur. Moment üretim fonksiyonlarının, karşılık geldikleri dağılımlar için özgün oldukları hatırlanırsa, U_n 'nin dağılımının standart normal rastgele değişkenin dağılım fonksiyonuna yakınsayacağı görülür.

Merkezselsel limit teoremi fizik, kimya, ekonomi gibi pek çok disiplinde çok sayıda bağımsız ya da nerdeyse bağımsız değişkenlerden oluşan stokastik süreçlerin limit dağılımlarını açıklamakta önemli rol oynar. Stokastik süreçlerin aksine deterministik algoritmaya sahip dinamik sistemlerde, sistemin iterasyonlarının birbirlerinden asla tam olarak bağımsız olamayacağı göz önüne alınarak bu sistemlerde merkezselsel limit teoreminin geçerli olmayacağı düşünülebilir. Ancak pozitif Lyapunov üsteline sahip deterministik sistemlerde merkezselsel limit teoreminin varlığından söz edilebilir. Lyapunov üstelinin pozitif olup sistemin kaotik rejimde olduğu deterministik dinamik sistemde; merkezselsel limit teoreminin özdeş şekilde dağılmış rastgele değişkenler varsayımı asimptotik istatistiksel bağımsızlık anlamına da gelen kuvvetlice karışmış olma koşulu ile yer değiştirirse bu sistem için merkezselsel limit teoremi geçerli olabilir. Lyapunov üstelinin yeteri kadar büyük olduğu kuvvetli kaotik rejimde, sistemin iterasyonları ergodik özellik gösterir ve yeterince karışmış olma koşulu sağlanarak standart merkezselsel limit teoremi sağlanır.

Sistemin iterasyonları arasında yüksek korelasyonların olduğu, sistemin iterasyonlarının yeterince karışmış olmadığı ve Lyapunov üstelinin pozitif fakat sıfır civarında salınım yaptığı kaos eşiği civarında ise standart merkezselsel limit teoreminin geçerli olamayacağı aşikardır. Bu durumda limit davranışı araştırırken alınan sonsuz limiti tek başına yeterli değildir, aynı zamanda kaos geçiş eşiği noktasını sonsuz hassasiyetle tespit etmek de gerekir. Ancak sayısal hesaplarda sonsuz limitini almanın imkansız olduğu gibi kaos eşik noktasını sonsuz hassasiyetle tespit etmek de imkansızdır. Bu nedenle kaos geçiş eşiği noktası ve kullanılan iterasyon sayısı arasında uygun bir ilişki kurularak limit dağılımlar araştırılmalıdır. Literatürde ve bu tez çalışmasında; kaos geçiş eşiği civarındaki limit davranışları araştırırken, bir boyutlu yitilmiş dinamik sistemlerden iyi bilinen lojistik map kullanılmış ve bu mapin uygun çarpan ile ölçeklendirilmiş kuvvetli korele iterasyon toplamalarının olasılık dağılımlarının q -Gaussiyen limit dağılıma yakınsadığı (Tirnakli et al., 2007, 2009) ve bu q -Gaussiyen limit dağılımlarının, mapin tüm pencerelerinin kaos eşikleri civarında geçerli olduğu gösterilmiştir (Afsar and Tirnakli, 2013). Bu sonuç ışığında kaos geçiş eşiği civarında, lojistik maple aynı evrensel sınıfta yer alan bütün sistemler için merkezselsel limit

teoreminin q -genelleştirilmiş halinin geçerli olacağı sonucuna varılır. Bu tez çalışmasında özel olarak kaos geçiş eşiği civarındaki standart lojistik map için elde edilen q -Gaussiyen dağılımların, iki çeşit gürültü eklenerek sağlamlık testi yapılmış ve sonuçlardan limit dağılımın q -Gaussiyen formda kaldığı görülmüştür (Cetin et al., 2015).

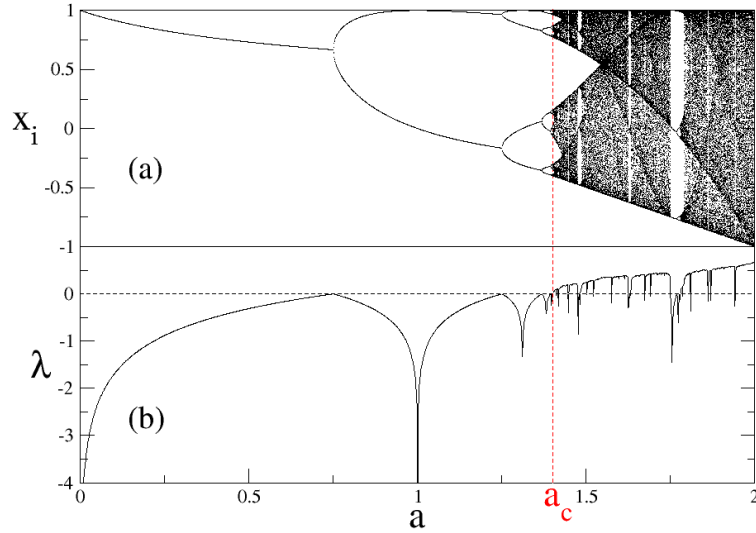
2.2 Beyaz Gürültü ve Korale Gürültü Eklenmiş Lojistik Map

Doğrusal olmayan dinamiğin ve kaos teorisinin yapı taşlarından olan standart lojistik map kaotik rejimindeki davranışların iyi bilinmesi ve gerçek dünyadaki pek çok problem için örnek model olması nedeniyle, bu alandaki çalışmalarda en yaygın kullanılan modeldir. Kaos geçiş eşiği civarında iterasyonları arasında gösterdiği kuvvetli korelasyonlar nedeniyle korale sistemlere iyi bir örnek olan lojistik map, limit dağılımları aradığımız bu tez çalışması için ideal bir sistemdir.

İlk olarak bir biyolojik model olarak ortaya atılan lojistik map,

$$x_{i+1} = 1 - ax_i^2 \quad (14)$$

($0 < a \leq 2$; $|x_i| \leq 1$; $i = 0, 1, 2, \dots$) değişen a parametre değeriyle periyodik dallanmalar şeklinde evrilirken, kaos geçiş eşiği olarak adlandırdığımız bir kritik parametre değerinden sonra ($a_c = 1.401155189092\dots$) evrilmesini bir kaotik bant birleşmesi prosedürü ile kaotik bölge içerisinde devam ettirir. Sistem $a = 2$ parametre değerinde en kaotik hale gelir. Artan parametre değeriyle periyodik rejimden kaotik rejime geçiş yapan lojistik mapin bu evrimini Lyapunov üstelinin değişen değerleri ile izleyebildiğimiz gibi, pozitif değerlerinin kaotik rejime işaret etmesiyle bu üsteli kaosu nicellemede de kullanabiliriz (Lyapunov üsteli Bölüm 3.3'te ayrıntılı olarak ele alınmıştır). Periyodik rejimde negatif değerler alan Lyapunov üsteli (bu rejimdeki dallanma noktalarında Lyapunov üsteli değeri sıfırdır); kaos eşiğinde sıfır değer aldıktan sonra artan pozitif değerliğiyle sistemin giderek kaotik hale geldiğini belirtir (kaotik bölgede ortaya çıkan periyodik pencereleri görmezden gelirsek). Şekil (2.1)'de standart lojistik map için dallanma diyagramı ve Lyapunov üsteli grafiği, değişen a parametre değerine göre gösterilmiştir.



Şekil 2.1: Standart lojistik map için (a) dallanma diyagramı ve (b) Lyapunov üsteli grafiği. Dallanma diyagramında standart lojistik mapin kaos eşiği $a_c=1.401155189092\dots$ noktasına kadar periyodik dallanma rejimi ve bu noktadan sonra başlayan kaotik rejim görülmektedir. a_c noktasından sonra Lyapunov üstelinin artan pozitifliği ile sistem giderek kaotik hale gelir.

Kaos eşiğine yaklaşırken limit dağılımda ne gibi değişimler olacağını görmek için, bu tez çalışmasında standart lojistik mape beyaz gürültü ve yeni tanımladığımız korale gürültü olmak üzere iki farklı katkı eklenmiştir. Böylece literatürde ve bu çalışmada yer alan standart lojistik map için elde edilen q -Gaussiyen limit dağılımların sağlamlığı test edilmek istenmiştir (Tirnakli et al. 2009; Afsar and Tirnakli, 2014; Cetin et al., 2015).

İlk katkı olarak standart lojistik mape, uygulamalarda yaygın olarak kullanılan ve iyi bilinen beyaz gürültü,

$$x_{i+1} = 1 - ax_i^2 + D\eta \quad (15)$$

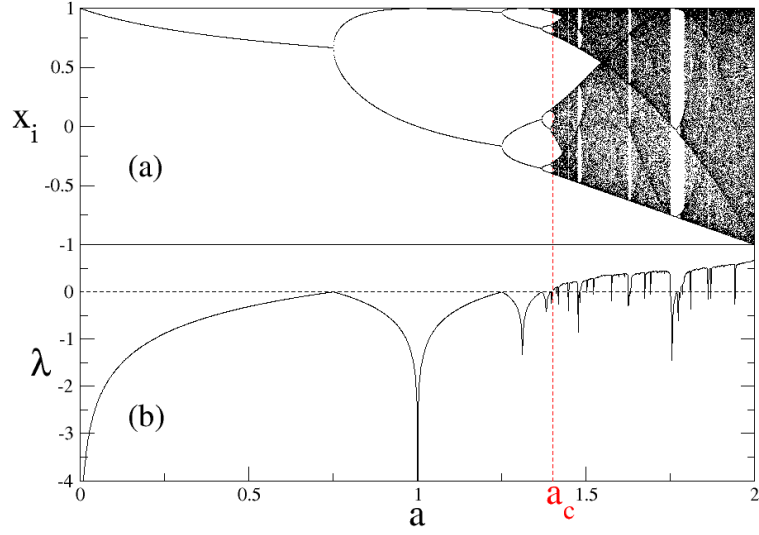
η beyaz gürültü katkısı, D beyaz gürültünün yoğunluğunu ayarlayan parametre olacak şekilde eklenmiştir. Beyaz gürültü, $|x_i| \leq 1$ tanım aralığında kalacak şekilde bir rastgele sayı dizisi olarak oluşturulmuş ve D yoğunluk parametresine değerler atanarak belirli ölçülerde mape eklenmiştir. Kendisinin bir rastgele sayılar dizisi olması nedeniyle, olasılık dağılımının Gaussiyen olarak elde edilen beyaz gürültünün, mapin öz dinamiklerine baskın gelememesi ve elde edeceğimiz limit davranışın bu gürültüyle gölgelenmemesi için, akla yatkın düzeylerdeki yoğunluklarla kaos geçiş eşiği civarındaki dağılım araştırılmıştır.

Beyaz gürültü bir katkı olarak eklendiğinden dolayı, standart lojistik map üzerinde kaos geçiş eşik noktasını değiştirmek, dallanma diyagramını ve Lyapunov üsteli grafiğini bulanıklaştırmak gibi bazı etkilere neden olur. Düşük yoğunluklarda bu etkiler kabul edilebilir düzeyde olsalar da, gürültü yoğunluğu arttırıldıkça lojistik map artık kendi dinamiklerini dolayısıyla da araştırmak istediğimiz özelliklerini kaybeder hale gelir. Çeşitli beyaz gürültü yoğunlukları için, gürültülü lojistik mapin kritik parametre değerleri Çizelge (2.1)'de verilmiştir. Bu tablodan da görüleceği üzere artan gürültü yoğunluklarıyla kritik parametre değeri giderek küçülmektedir.

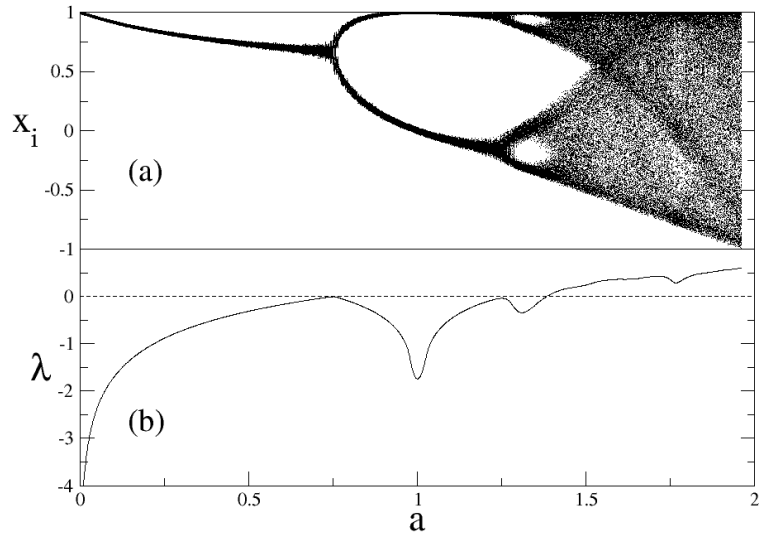
Çizelge 2.1: Çeşitli yoğunluklar için beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin kritik parametre değerleri.

D	a_c
10^{-12}	1.40115518896 ...
10^{-10}	1.40115518551 ...
10^{-9}	1.40115515731 ...
10^{-8}	1.40115501904 ...
10^{-7}	1.40115365001 ...

Bu çalışmada Çizelge (2.1)'de yer alan gürültü yoğunluklarından en küçük ilk iki yoğunluk çalışılmak üzere seçilmiştir ($D = 10^{-12}$ ve $D = 10^{-10}$). Neden küçük yoğunlukların seçildiğini daha net göstermek için Şekil (2.2) ve Şekil (2.3)'te sırasıyla $D = 10^{-12}$ ve $D = 10^{-2}$ yoğunlukları için beyaz gürültü eklenmiş gürültülü lojistik mapin dallanma diyagramı ve Lyapunov üsteli grafikleri çizdirilmiştir.



Şekil 2.2: $D = 10^{-12}$ gürültü yoğunluğuyla beyaz gürültü katkısı yapılmış lojistik mapin (a) dallanma diyagramı ve (b) Lyapunov üsteli grafiği. Bu gürültü yoğunluğu için $a_c = 1.40115518896...$ olarak elde edilmiştir.

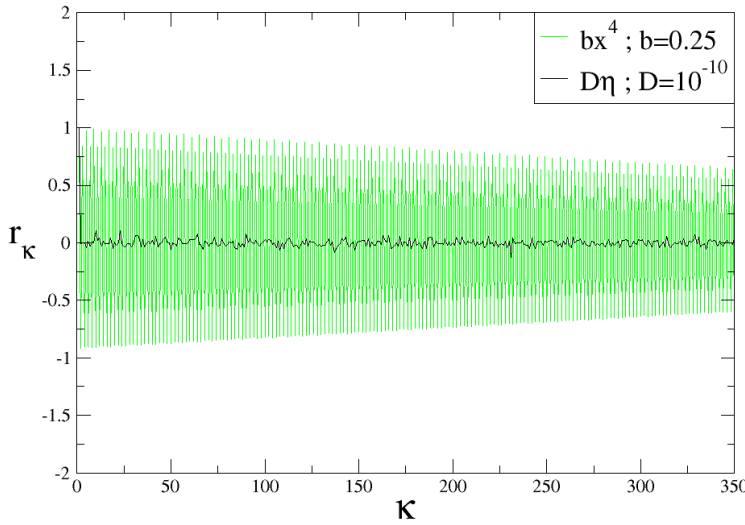


Şekil 2.3: $D = 10^{-2}$ gürültü yoğunluğuyla beyaz gürültü katkısı yapılmış lojistik mapin (a) dallanma diyagramı ve (b) Lyapunov üsteli grafiği. Dallanma diyagramı ve Lyapunov üsteli grafiğindeki bulanıklaşma net bir şekilde görülmektedir.

Beyaz gürültü lojistik mape “dışarıdan” bir katkı olarak eklenirken, bu çalışmada ayrıca mapin kendi öz yapısından eklenen yeni bir katkı tanımlanmıştır. Korale gürültü olarak adlandırdığımız bu yeni katkı türü; mapin belli bir a parametresi için elde edilen iterasyonlardan oluşmakta ve her bir iterasyon işleminde katkıda bulunacak şekilde mape eklenmektedir. Korale gürültü eklenmiş lojistik map,

$$x_{i+1} = 1 - ax_i^2 - bx_i^4 \quad (16)$$

olarak yazılmaktadır (Cetin et al., 2015). Bu ifadede $|x_i| \leq 1$ tanım aralığı düşünülerek, eklenen katkı terimindeki x_i^4 teriminin kuvveti, orijinal lojistik mapteki x_i^2 teriminin kuvvetinden daha büyük seçilerek; bu terimin mape tam olarak baskın gelmesinin önüne geçilmiştir. Burada gürültü katkısının yoğunluğu bir b parametresiyle kontrol edilmektedir. Bu gürültüde katkılar standart lojistik mapin yapısından geldiğinden, standart lojistik mapin iterasyonları korale olduğu sürece bu terimin iterasyonları da korale olur. Bu nedenle bu yeni katkıya korale gürültü adını vermek, gürültünün özelliğini açıklamak açısından uygun görülmüştür. Bir rastgele sayı dizisi olan beyaz gürültü ile mapin yapısından eklenen korale gürültünün arasındaki farkı daha açık bir şekilde ortaya koymak için; beyaz gürültünün $D\eta$ terimiyle korale gürültünün bx_i^4 teriminin dataları için otokorelasyon fonksiyonlarının grafiği çizdirilmiştir (Şekil (2.4)). Bu grafikten de görüleceği üzere beyaz gürültü teriminin otokorelasyon fonksiyonu hızlı bir şekilde sıfıra inerken, korale gürültü teriminin otokorelasyon terimi içerdiği güçlü korelasyonlar nedeniyle sıfıra salınım yapan bir davranışla çok yavaş bir şekilde inmektedir.



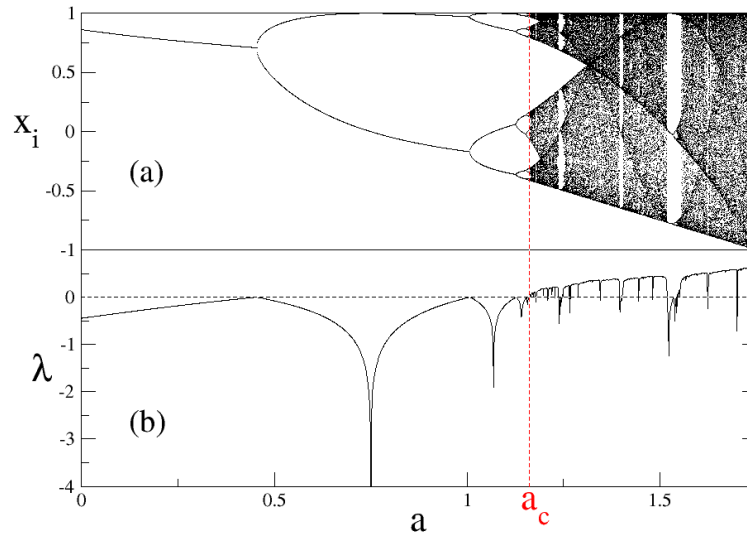
Şekil 2.4: Lojistik mape eklenen beyaz gürültü ve korale gürültü terimlerinin otokorelasyon fonksiyonları.

Korale gürültünün mapin kendi yapısından eklenmesi nedeniyle beyaz gürültüye nazaran, kaos geçiş eşiği noktasının değerinde daha ciddi değişimlere neden olduğu görülmüştür. Eklenen gürültünün mapi “kaydırma” etkisi olması nedeniyle bu beklenen bir sonuçtur. Farklı gürültü yoğunlukları için elde edilen kaos geçiş eşikleri Çizelge (2.2)’de verilmiştir. Beyaz gürültü ile yapılan

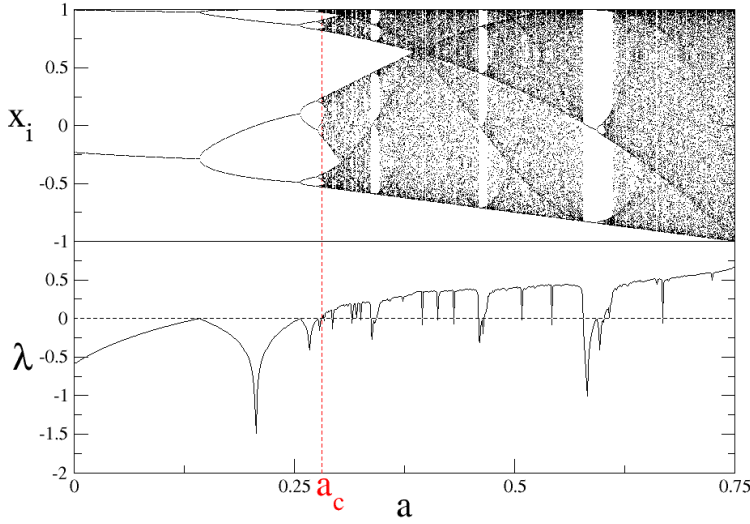
çalışmada olduğu gibi korale gürültü çalışmasında da en küçük iki uygun yoğunluk değeri ($b = 0.25$ ve $b = 0.5$) çalışılmak için seçilmiştir. Artan yoğunluk değeri ile artan kaydırma etkisi Şekil (2.5) ve Şekil (2.6)'da sırasıyla $b = 0.25$ ve $b = 1.25$ yoğunluklarında korale gürültü eklenmiş lojistik mapin çatallanma diyagramında kendisini açık bir şekilde göstermektedir. Bu şekillerde ayrıca korale gürültünün, beyaz gürültü gibi bir bulanıklaşmaya neden olmadığı ancak kaydırma nedeniyle periyodik rejimde değişikliklere neden olduğu görülmektedir. Tüm bu kaydırma etkisine rağmen kaotik rejimde sistem hala standart lojistik mapin davranışlarını bire bir sergilemektedir.

Çizelge 2.2: Çeşitli yoğunluklar için korale gürültü eklenmiş lojistik mapin kritik parametre değerleri. Gürültünün kaydırma etkisi açık şekilde görülmektedir.

b	a_c
0.25	1.16158354235...
0.5	0.92979567698...
0.75	0.70641013018...
1	0.49071036930...
1.25	0.28129217535...



Şekil 2.5: $b = 0.25$ gürültü yoğunluğuyla korale gürültü katkısı yapılmış lojistik mapin (a) dallanma diyagramı ve (b) Lyapunov üsteli grafiği. Dallanma diyagramının sınırlarından da görüleceği üzere standart lojistik map için limit olan $a = 2$ parametre değeri, korale gürültünün kaydırma etkisiyle $a = 1.75$ olmuştur. Böylece bu yoğunluk için $a_c = 1.16158354235 \dots$ olarak elde edilmiştir.

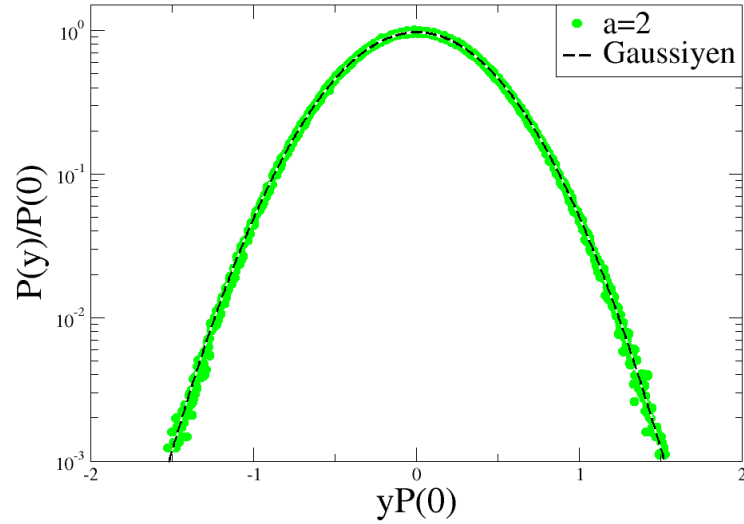


Şekil 2.6: $b = 1.25$ gürültü yoğunluğuyla korale gürültü katkısı yapılmış lojistik mapin (a) dallanma diyagramı ve (b) Lyapunov üsteli grafiği. Çok büyük bir yoğunluğa örnek olarak seçilen $b = 1.25$ yoğunluğunda, lojistik mapin kaos eşik değerinin ($a_c = 0.28129217535 \dots$) ve a parametresi için üst limitin değiştiği görülmektedir.

Bu üç çeşit lojistik mapin dallanma diyagramlarından da görüleceği üzere davranış en kaotik iken iterasyonlar durum uzayını tam olarak kaplar. Bu durumda iterasyonlar üzerinden alınan zaman ortalamalarıyla durum uzayı üzerinden alınan ortalamalar birbirine eşit olur ve sistem ergodiktir. Bununla beraber iterasyonlar arasındaki korelasyonlar asimptotik olarak sifıra yakınsadığından, sistemden gelen iterasyonlar yeterince karışmıştır (asimptotik olarak bağımsızdırlar). Bu durumda lojistik mapin iterasyonlarının toplamının

$$y := \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle) \quad (17)$$

olasılık dağılımı $N \rightarrow \infty$ (N , iterasyon sayısı) limitinde, x_i rastgele değişken olarak görülerek, Gaussiyen olur ve standart merkezsiz limit teoremi geçerli olur (bu ifadede $\langle \dots \rangle$ zaman ortalaması olarak alınmıştır). Standart lojistik mapin en kaotik olduğu $a = 2$ parametre değerinde, Denklem (17)'de verilen niceliğin olasılık dağılımı Şekil (2.7)'de verilmiştir ve bu limit davranış diğer iki gürültü çeşidi eklenmiş lojistik mapin davranışın en kaotik olduğu durumları için de geçerlidir.



Şekil 2.7: $a = 2$ için standart lojistik mapin olasılık dağılım fonksiyonu. $P(y) = e^{-y^2/(2\sigma^2)}/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ olasılık dağılım fonksiyonuna sahip Gaussiyen kesikli çizgi ile gösterilmiştir.

Kuvvetli kaotik rejimde standart merkezsiz limit teoremi varlığını sürdürürken, kaotik rejimden kaos eşiğine yaklaştıkça iterasyonlar arası korelasyonların giderek kuvvetlenmesi nedeniyle artık geçerli olamaz. İterasyonlar arası korelasyonun çok kuvvetli olduğu ve sistemin artık ergodik olmadığı kaos eşiğinde Denklem (17) ile verilen niceliğin limit davranış araştırılırken; ifadede yer alan ortalamayı, çok büyük sayıdaki N iterasyon sayısının yanı sıra rastgele seçilen n_{ini} başlangıç koşulları üzerinden de almak gerekir. Bu durumda bu ortalama ifadesi

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n_{ini}} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{n_{ini}} \sum_{i=1}^N x_i^{(j)} \quad (18)$$

olarak yazılır. Bunun yanı sıra eşik noktasının sonsuz hassasiyetle tespit edilmesi ve $N \rightarrow \infty$ limitinin aynı anda alınması gerekir ki sayısal hesaplamalarda ikisi de mümkün değildir. Bu nedenle kaos eşiği değerine çok yakın değerlerde, kaotik bölgede olacak şekilde, bir parametre değeri seçilmelidir. Ancak bu parametre değeri için N iterasyon sayısı çok büyük alınırsa sistem kaotik bölgede olduğunu anlar ve Gaussiyen dağılım elde edilir. N çok küçük alınırsa bu sefer de bir limit dağılıma ulaşmakta yetersiz kalır.

Kaos eşiği civarındaki limit davranışı bulmak için; iterasyon sayısı ile, a_c 'ye yakınlık arasındaki ilişki genelleştirilmiş Huberman-Rudnick ölçekleme yasası yardımıyla kurulabilir (Tirnakli et al., 2007, 2009; Afsar and Tirnakli, 2013).

2.3 Genelleştirilmiş Huberman-Rudnick Ölçeklenme Yasası

Standart lojistik map dallanma diyagramından görüleceği üzere periyot dallanma davranışı ile kaos eşiğine (periyot yığın noktasına) gelir. Lyapunov üstelinin periyot dallanma noktalarında sıfır değer alması dışında bu periyodik bölgede Lyapunov üsteli negatif değerler almaktadır. 2^n periyotlu davranışın belirli bir parametre değerinde 2^{n+1} periyoduna dallanarak geçtiği ve periyodun sosuz olduğu kaos eşiğinde son bulan ($n=1, 2, \dots, \infty$) bu dallanma prosedüründe mapin kendi kendine benzer yapısı nedeniyle, Feigenbaum ölçeklenmesi

$$|a - a_c| \sim \delta^{-n} \quad (19)$$

yardımıyla periyot dallanmalarının gerçekleştiği parametre değerlerini tespit edebiliriz. Bu ifadede $\delta = 4.669201 \dots$ Feigenbaum sabitidir (Feigenbaum, 1979).

Periyodik bölgede gözlemlenen periyodik dallanmalara benzer bir davranış kaotik bölgede ($a > a_c$), kaos eşiğine sağdan yaklaşırken kaotik bantların yarılmaları olarak kendini gösterir. Davranışın en kaotik olduğu ve faz uzayının iterasyonlar tarafından tamamen kaplandığı durum ilk kaotik bant olarak alınır ve periyot 2 bant bölgesi için ($s = 1$) bu noktadan kaos eşiğine ulaşıncaya kadar $s2^n$ kaotik bantları $s2^{n+1}$ kaotik bantlarını oluşturacak şekilde Feigenbaum ölçeklenmesine uygun olarak yarılr.

Kaotik bölgede Lyapunov üstelinin pozitifliğinin, sistemin ne kadar kaotik olduğunun belirlenmesindeki rolünü göz önüne alarak Huberman ve Rudnick, Lyapunov üstelinin kontrol parametresine bağlılığını göstermek için bir evrensel ifade oluşturmuşlardır (Huberman and Rudnick, 1980). Bu evrensel ölçeklenme ifadesi,

$$\lambda = \lambda_0 |a - a_c|^\nu \quad (20)$$

$\nu = \ln 2 / \ln \delta$ ve sabit bir değer olan λ_0 efektif Lyapunov üsteli olacak şekilde verilir. Lyapunov üsteli, kaotik bölgedeki kaotik bant yarıma prosedürünün 2^n kaotik bantlarının bir karakteristiği olup, bu 2^n kaotik bandında birbirine çok yakın iki tane yörünge başlangıç noktasının 2^n iterasyon sonunda aralarındaki mesafenin nasıl değişeceğinin belirlenmesinde rol oynar. Bu iki başlangıç noktasının arasındaki mesafe d_0 iken, gerçekleştirilen 2^n iterasyonun ardından tekrar aynı bandın içine düşerler, ancak bu son durumda iki başlangıç noktası

arasındaki d_{2^n} mesafesi, kaotik davranıştaki yörüngeler arası eksponansiyel iraksamayla;

$$d_{2^n} = d_0 e^{\lambda 2^n} = d_0 e^{\lambda_0} \quad (21)$$

şeklinde yazılabilir. Burada efektif Lyapunov üstelinin $\lambda_0 = \lambda 2^n$ olduğu görülür.

Feigenbaum ölçeklenmesi ifadesinde n yalnız bırakılarak elde edilen ifade efektif Lyapunov üsteli tanımında yazılarak

$$\lambda = \lambda_0 2^{\frac{\ln(a-a_c)}{\ln \delta}} \quad (22)$$

elde edilir. Bu ifadenin logaritması alınarak ve üsteller düzenlenerek Denklem (19)'daki ölçeklenme ifadesi elde edilir. Bu ölçeklenme yasasındaki $|a - a_c|$ ifadesinde $a = a_c$ olduğu durumda gerçekleşen periyodik-kaotik rejim değişikliği nedeniyle, bu ölçeklenme yasası manyetik sistemlerde karşılaşılan ikinci dereceden faz geçişlerini açıklayan ölçeklenme yasalarına benzer bir yapıdadır. Burada Lyapunov üsteli bir düzen parametresi rolü oynar. Bu ölçeklenme yasasında efektif Lyapunov üsteli tekrar yerine yazılarak Denklem (18)'deki Feigenbaum ölçeklemesi formunda elde edilebilir.

$s = 1$ periyot 2 penceresi için elde ettiğimiz bu ölçeklenme yasası, diğer s bantlarını da içerecek şekilde genelleştirilebilir. Bir s periyotlu kaotik bölge için efektif Lyapunov üstelinin $\lambda_0 = \lambda s 2^n$ olacağı düşünülürse, genelleştirilmiş Huberman-Rudnick ölçeklenme yasası

$$\left| a - a_c^{(s)} \right| = \delta^{-n \frac{\ln s}{\ln 2}} \quad (23)$$

olarak elde edilir (Afsar and Tirnakli, 2013). Periyot dallanması yoluyla kaosa geçen tüm sistemler için geçerli olan bu ölçeklenme yasası yardımıyla, standart lojistik mapin ve seçtiğimiz yoğunluklardaki iki çeşit gürültünün eklendiği lojistik maplerin tespit ettiğimiz kaos eşiklerine yaklaşabiliriz.

Bu tez çalışmasında lojistik maplerin sadece periyot 2 pencereleri ($s = 1$) için çalışma yapılmıştır. Denklem (23)'deki n değeri $n = 5.02, 6.02, 7.02, 8.02$ olacak şekilde aynı miktarda arttırılarak kaos eşiğine yaklaşılmıştır. n 'nin tamsayı değerleri Lyapunov üstelinin $-\infty$ olmasına neden olacağından, tam sayı olmayan

değerler seçilmiştir. Tam sayı olmayan bu değerler, Huberman-Rudnick ölçeklenme yasasıyla verilen ve hepsi küçük ama pozitif Lyapunov üstellerine sahip olan sonsuz sayıdaki eğrilerden biri üzerinde kaos eşiğine yaklaşmamızı sağlar.

2.4 Kaos Eşiği Civarında Olasılık Dağılımları

Beyaz gürültü ve korale gürültü eklenmiş lojistik maplerin, incelemede kullanılmak üzere seçilen gürültü yoğunluklarındaki kaos eşiklerine yaklaşmak için genelleştirilmiş Huberman-Rudnick ölçeklenme yasasından yararlandık (periyot 2 penceresi için). Seçilen bir n değeri için Denklem (23)'den elde edilen kontrol parametresi değerinde, bu parametre değerine karşılık gelen 2^n kaotik bandında seçilen başlangıç noktasını 2^n kere itere ettiğimizde; kaotik banttaki aynı konumuna küçük bir dalgalanmayla geri döner. Bu durumda $\sum_{i=1}^{2^n} x_i$ iterasyonlar toplamı $\omega = 2^n \langle x \rangle$ sabit değeri ile 2^n 'inci iterasyonun sonunda meydana gelen dalgalanmayı belirten $\Delta\omega_1$ düzeltme teriminin toplamına yakınsayacaktır. Böylece Denklem (17) ile verilen nicelik için,

$$y_1 = \sum_{i=1}^{2^n} (x_i - \langle x \rangle) = \Delta\omega_1 \quad (24)$$

olur. Bulunduğumuz noktada bir 2^n iterasyonu daha uygularsak;

$$y_2 = \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} (x_i - \langle x \rangle) = \Delta\omega_2 \quad (25)$$

yeni dalgalanma, kaos eşiği civarındayken iterasyonlar arası korelasyonlar nedeniyle $\Delta\omega_1$ ilk dalgalanmasından bağımsız olamaz. Bu 2^n kere itere etme işlemini 2^n kere tekrarlarsak, yani mapi toplamda 4^n kere itere edersek; sonunda,

$$y_{2^n} = \sum_{i=4^n-2^n+1}^{4^n} (x_i - \langle x \rangle) = \Delta\omega_{2^n} \quad (26)$$

elde edilir. Böylece iterasyonların genel toplamı

$$y = \sum_{i=1}^{4^n} (x_i - \langle x \rangle) = \sum_{j=1}^{2^n} \Delta \omega_j \quad (27)$$

kaos eşiğinden $a - a_c = \delta^{-n}$ kadar mesafedeki 2^n kaotik bantlarının yapısından etkilenen, birbirleriyle kuvvetlice korale 2^n tane $\Delta \omega_j$ rastgele değişkeninin toplamı olarak görülebilir. Bu tartışma sonucunda, kaos eşiğinden bu mesafedeki kaotik bandı tamamen sararak limit dağılıma ulaşmak için gerekli olan optimum iterasyon sayısı

$$N^* = 2^{2n} \quad (28)$$

olacağı açıktır. Standart lojistik mapin kaos eşiği ve inceleme amaçlı seçilmiş beyaz ve korale gürültü yoğunlukları için tespit edilen kaos eşiği değerlerine yaklaşımakta kullanılan, Huberman-Rudnick ölçeklenmesiyle hesaplanan, parametre değerleri ve bu parametre değerleri için optimum iterasyon sayısı sırasıyla Çizelge (2.3), Çizelge (2.4) ve Çizelge (2.5)'te verilmiştir.

Çizelge 2.3: Standart lojistik mapin $n = 5.02, 6.02, 7.02, 8.02$ değerleri ve $s = 1$ durumu için genelleştirilmiş Huberman-Rudnick ölçeklenmesiyle elde edilmiş parametre değerleri ve bu parametre değerleri için optimum iterasyon sayıları.

Gürültü Çeşidi	a_c	a	$N^* = 2^{2n}$
Standart Lojistik Map $x_{i+1} = 1 - ax_i^2$	1.40115518909...	1.4015921091824...	1024
		1.4012487639956...	4096
		1.4011752299708...	16384
		1.4011594812345...	65536

Çizelge 2.4: Beyaz gürültü eklenmiş lojistik map için seçilen iki gürültü yoğunluğunda $n = 5.02, 6.02, 7.02, 8.02$ değerleri ve $s = 1$ durumu için genelleştirilmiş Huberman-Rudnick ölçeklenmesiyle elde edilmiş parametre değerleri ve bu parametre değerleri için optimum iterasyon sayıları.

Gürültü Çeşidi	Gürültü Yoğunluğu	a_c	a	$N^* = 2^{2n}$
Beyaz Gürültü $x_{i+1} = 1 - ax_i^2 + D\eta$	$D = 10^{-12}$	1.40115518896...	1.4015921090504...	1024
			1.4012487638636...	4096
			1.4011752298388...	16384
			1.4011594811025...	65536
	$D = 10^{-10}$	1.40115518551...	1.4015921056004...	1024
			1.4012487604136...	4096
			1.4011752263888...	16384
			1.4011594776525...	65536

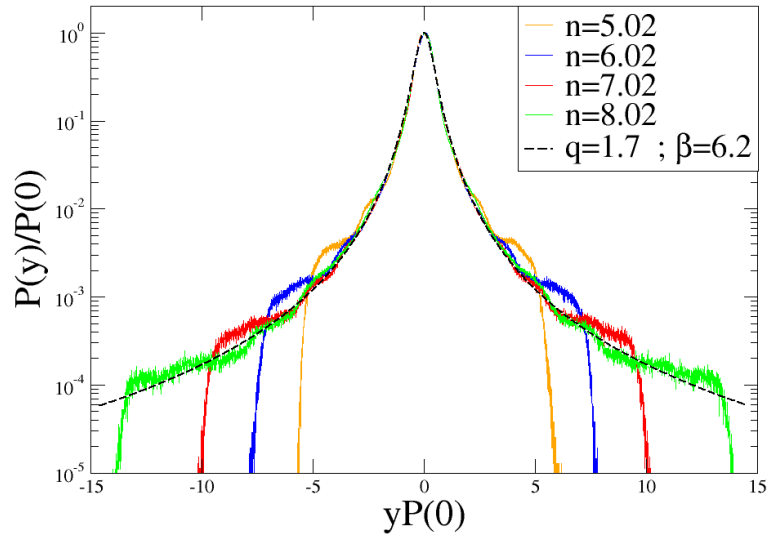
Çizelge 2.5: Korale gürültü eklenmiş lojistik map için seçilen iki gürültü yoğunluğunda $n = 5.02, 6.02, 7.02, 8.02$ değerleri ve $s = 1$ durumu için genelleştirilmiş Huberman-Rudnick ölçeklenmesiyle elde edilmiş parametre değerleri ve bu parametre değerleri için optimum iterasyon sayıları.

Gürültü Çeşidi	Gürültü Yoğunluğu	a_c	a	$N^* = 2^{2n}$
Korale Gürültü $x_{i+1} = 1 - ax_i^2 - bx_i^4$	$b = 0.25$	1.16158354235...	1.1620204624404...	1024
			1.1616771172536...	4096
			1.1616035832288...	16384
			1.1615878344925...	65536
	$b = 0.5$	0.92979567698...	0.9302325970704...	1024
			0.9298892518836...	4096
			0.9298157178588...	16384
			0.929799961225...	65536

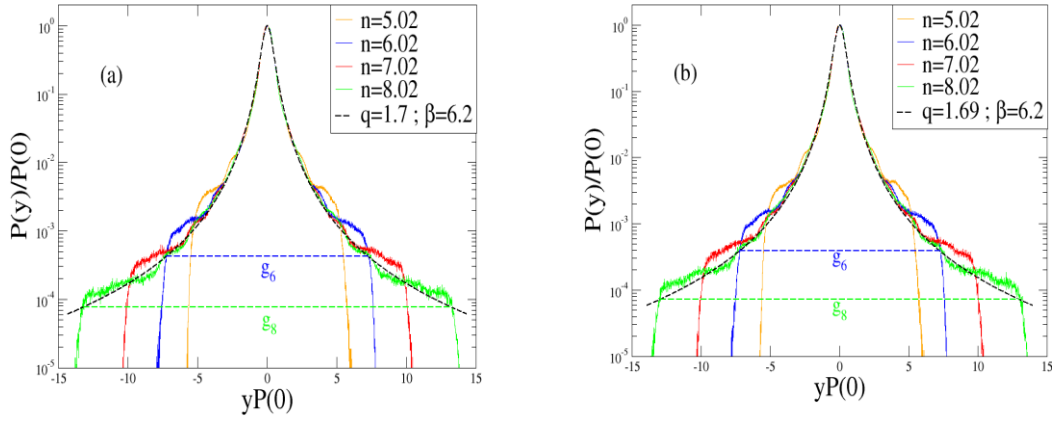
Tezin bu aşamasında genelleştirilmiş Huberman-Rudnick ölçeklenme yasası yardımıyla kaos eşiğine belirli mesafelerde bulunacak şekilde elde edilen parametre değerlerinde, belirlenen optimum iterasyon sayılarıyla Denklem (17)'de verilen niceliğin Denklem (18)'de belirtilen koşul altında $n_{ini} = 10^6$ tane bağımsız rasgele başlangıç koşulu üzerinden elde edilen olasılık dağılımları; standart lojistik map için Şekil (2.8), $D = 10^{-12}$ ve $D = 10^{-10}$ yoğunluklarında beyaz

gürültü eklenmiş lojistik map için Şekil (2.9), $b = 0.25$ ve $b = 0.5$ yoğunluklarında korale gürültü eklenmiş lojistik map için Şekil (2.10)'da görülmektedir. Tüm grafiklerde artan n değeriyle kaos eşiğine yaklaşılrken, elde edilen dağılımların eteklerinin açılarak bir q -Gaussiyen formla giderek daha iyi örtüştüğü görülmektedir (Cetin et al., 2015). Kaos eşiğine yaklaştıkça dağılımın bir q -Gaussiyene daha çok yakınsadığı bu gözlem için; kaos geçiş noktasının sonsuz hassasiyetle tespit edildiği durumda, dağılımın eteklerinin q -Gaussiyenin dağılımına uygun olarak sonsuza açılacağı yorumu yapılabilir ve bu durum q -genelleştirilmiş merkezsel teoreminin ispatı niteliğindedir.

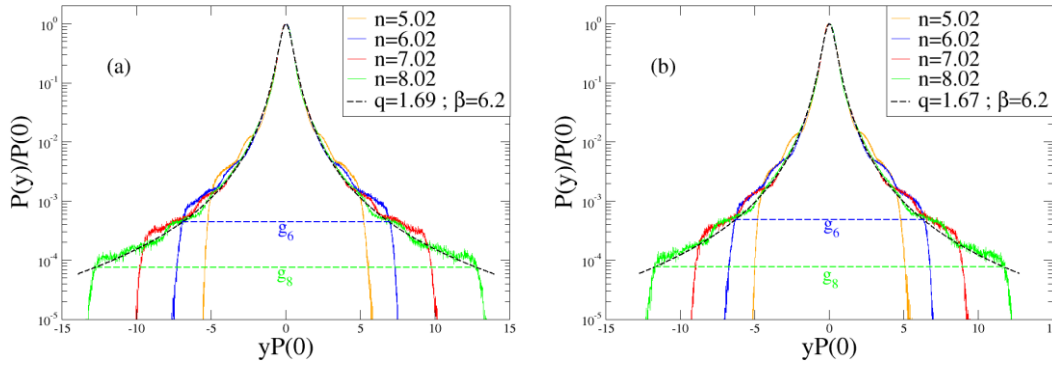
Beyaz gürültü ve korale gürültünün, iterasyonlar arası kuvvetli korelasyonların gözlemlendiği kaos eşiği civarındaki limit dağılımı test etmek için eklendiği senaryolarda q -Gaussiyen dağılımın varlığını koruduğu görülmüştür (Cetin et al., 2015). Artan gürültü yoğunluğuyla her iki gürültülü lojistik map için de elde edilen dağılımların eteklerinin gürültü etkisiyle çok az daraldığı görülmektedir. Dağılımların örtüştüğü q -Gaussiyenlerin q değerlerinin artan gürültüyle azalması bu duruma işaret etmektedir. Gürültü katkısının arttırılıp mapin dinamiklerine giderek baskın gelmesiyle elde edilen dağılımların q değerlerinin de gürültünün öz dağılımına yakınsayacak şekilde küçüleceği ve en sonunda sadece gürültünün dağılımının elde edileceği açıktır.



Şekil 2.8: Standart lojistik map için kaos eşiğine artan n değerleriyle yaklaşırken elde edilen dağılım fonksiyonlarının $q = 1.7$ ve $\beta = 6.2$ değerlerine sahip bir q -Gaussiyene yakınsadığı gözlemlenmektedir.



Şekil 2.9: Beyaz gürültü eklenmiş lojistik map için (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunluklarında, kaos eşiğine artan n değerleriyle yaklaşırken elde edilen dağılım fonksiyonları. Bu düşük yoğunluk değerlerinde q -Gaussiyen dağılımın (siyah kesikli çizgi) q değerinin (a) şeklinde standart lojistik map için elde edilen dağılımın q değeriyle aynı olduğu, (b) şeklinde artan gürültü ile çok az bir şekilde değiştiği görülmektedir. Mavi ve yeşil kesikli çizgilerle $n = 6.02$ ve $n = 8.02$ değerleri için elde edilen dağılımların genişliğini göstermektedir.



Şekil 2.10: Korale gürültü eklenmiş lojistik map için (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunluklarında, kaos eşiğine artan n değerleriyle yaklaşırken elde edilen dağılım fonksiyonları. Bu yoğunluk değerlerinde q -Gaussiyen dağılımın (siyah kesikli çizgi) q değerinin (a) şeklinde standart lojistik map için elde edilen dağılımın q değerinden çok az küçük olduğu, (b) şeklinde artan gürültü ile gürültü etkisi sonucu q değerinin daha fazla değiştiği görülmektedir. Mavi ve yeşil kesikli çizgilerle $n = 6.02$ ve $n = 8.02$ değerleri için elde edilen dağılımların genişliğini göstermektedir.

3. GÜRÜLTÜLÜ LOJİSTİK MAPLER İÇİN ÖLÇEKLENME İLİŞKİLERİ

Lojistik mapin kaotik bölgesinden kaos geçiş eşiğine yaklaşıırken, kaos geçiş eşiği noktası civarında elde edilen q -Gaussiyen dağılımların eteklerinin genişleyerek q -Gaussiyen formuna giderek daha iyi yakınsadığı görülmüştür. Bu bölgede faz uzayının kaos geçiş eşiğine sağdan yaklaşıırken gözlemlenen kaotik bant yarıma prosedüründeki kaotik bantlar tarafından kesikli bir biçimde doldurulması ve bu bantlarda yer alan mapin iterasyonları arasındaki korelasyonlar nedeniyle; mapin iterasyonları toplamının olasılık dağılımlarının genişliğiyle, sistemin korelasyonları ve fraktal boyutu arasında bir ilişki kurulabilir.

Kaos geçiş eşiğine yaklaşıırken olasılık dağılımlarının artan genişliği ile sistemin iterasyonları arasındaki korelasyonların ve bu iterasyonların yer aldığı kaotik bantların fraktal boyutlarının nasıl değiştiği, sistemin Lyapunov üstelinin bu değerlerle nasıl bir davranış sergileyeceği; standart lojistik map için ortaya konan ölçeklenme ilişkileriyle literatürde tarif edilmiştir (Afsar and Tirnakli, 2014). Standart lojistik map için elde edilen ölçeklenme ilişkileri ve bunların kritik üstel değeri Çizelge (3.1) ve Çizelge (3.2)'de verilmiştir. Tezin bu aşamasında literatürde standart lojistik map için yer alan bu ölçeklenme ilişkilerinin, standart lojistik mape beyaz ve korale gürültü katkıları eklenerek sağlamlık testi yapılmıştır. Korelasyon boyutu, korelasyon toplamı ve kutu sayma fraktal boyutu gibi sayısal yöntemlerin kullanıldığı bu incelemelerde, olasılık dağılımları araştırmasında olduğu gibi genelleştirilmiş Huberman-Rudnick ölçeklenme ilişkisiyle kaos geçiş eşiğine yaklaşılmış ve bu ölçeklenme ilişkisine benzer formda ilişkiler elde edilmiştir. Manyetik sistemlerde ikinci dereceden faz geçişlerini tarif eden ölçeklenme yasalarına benzer formda ölçeklenme ilişkilerinin elde edilmesi ilgi çekicidir. Bu ölçeklenme ilişkilerinin gürültü varlığında da geçerliliğini sürdürmesiyle doğada uzun menzilli korelasyonlara ve kesikli olarak doldurulmuş faz uzaylarına sahip sistemler için q -Gaussiyen olasılık dağılımlarının ortaya çıkış mekanizmasının araştırılmasında yardımcı olacağı düşünülmektedir.

3.1 q -Gaussiyen Dağılımın Genişliği ile Korelasyon Boyutu Arasındaki İlişki

Beyaz ve korale gürültü eklenmiş lojistik maplerin seçilen gürültü yoğunlukları için, artan n değerleriyle bu maplerin spesifik kaos geçiş eşiklerine

yaklaştıkça elde edilen dağılımların eteklerinin q -Gaussiyen formunda genişlediği görülmüştür. Her bir n değeri için elde edilen dağılımların genişlikleri Şekil (2.9) ve Şekil (2.10)'da g_n olarak temsil edilmiştir. Bu n değerlerine karşılık gelen genelleştirilmiş Huberman-Rudnick ölçeklenme yasasından elde edilmiş a parametre değerleri için çeşitli yoğunluklarda gürültü eklenmiş lojistik maplerin uzun zaman aralığındaki zaman serileri (yörünge noktaları) için korelasyon boyutları hesaplanarak, bu n değerlerine karşılık gelen g_n olasılık dağılımı genişlikleri ile olan ölçeklenme ilişkileri araştırılmıştır.

Gürültülü lojistik maplerin her bir (n,a) grubu için korelasyon boyutu Grassberger-Procaccia algoritması kullanılarak hesaplanmıştır (Grassberger and Procaccia, 1983; Hilborn, 2000). Bu algoritma, bir N iterasyon sonunda elde edilen yörünge noktaları kümesinde; her bir i noktası için bu i noktasına bir R mesafesinde yer alan noktaların (i noktası hariç) göreceli frekansını, $N_i(R)$ bu R mesafesindeki yörünge noktası olmak üzere, $p_i(R) = N_i(R)/N - 1$ olacak şekilde hesaplar. Bu göreceli frekans ile korelasyon toplamı,

$$C(R) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i(R) \quad (29)$$

olarak elde edilir. Tüm yörünge noktaları birbirinin R mesafesinde yer alıyorsa $p_i(R)=1$ ve $C(R)=1$ olur. Eğer R mesafesi, yörüngeler arası en küçük mesafeden de küçük olursa, hiçbir nokta birbirinin R mesafesine düşmez ve $p_i(R)=0$ ve $C(R)=0$ olur. Göreceli frekans $p_i(R)$, hesaplanmasında Heaviside basamak fonksiyonu $H(X)$ kullanılarak kolay bir şekilde hesaplanabilir. Bu fonksiyon;

$$\begin{aligned} x < 0 \text{ için, } & H(X) = 0 \\ x \geq 0 \text{ için, } & H(X) = 1 \end{aligned} \quad (30)$$

olarak tanımlanır. Bu fonksiyon bir x_i noktasına R mesafesi içinde yer alan her bir x_j noktası için toplama 1 ekleyecek şekilde göreceli frekansın hesaplanmasında kullanılabilir.

$$p_i(R) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1, j \neq i}^N H(R - |x_i - x_j|). \quad (31)$$

Bu göreceli frekans ifadesi Denklem (29)'da yerine yazılarak korelasyon toplamı Denklem (32)'den rahatlıkla hesaplanır.

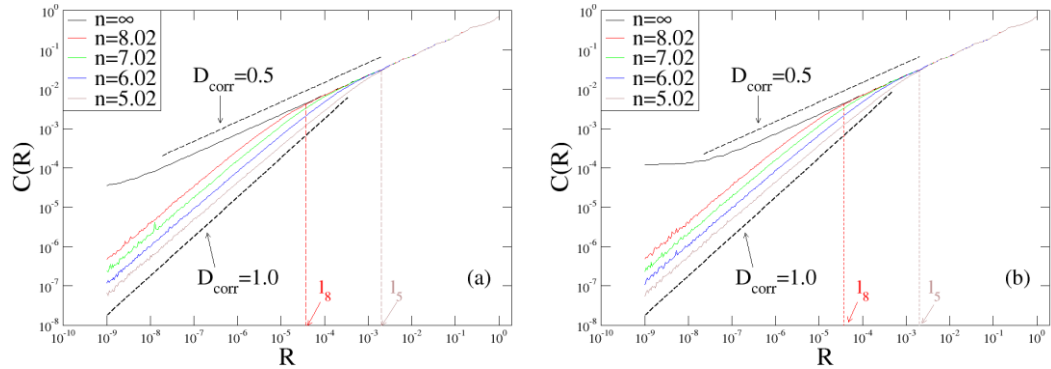
$$C(R) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N H(R - |x_i - x_j|) \quad (32)$$

Korelasyon boyutu, korelasyon toplamı $C(R)$ ve R mesafesi arasındaki ilişkiyi belirtmek üzere,

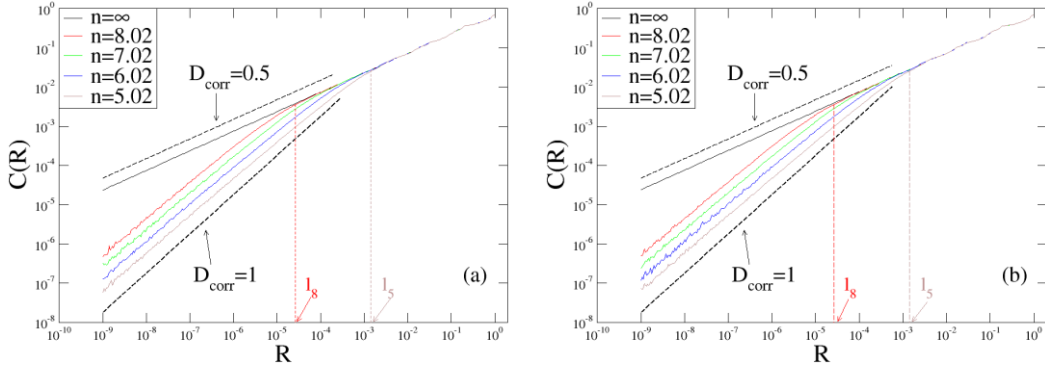
$$D_{corr} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log(C(R))}{\log(R)} \quad (33)$$

olarak tanımlanır.

Seçilen gürültü yoğunlarındaki gürültülü lojistik maplerin (n,a) grupları için hesaplanan $C(R)$ korelasyon uzunlukları beyaz gürültü senaryosu için Şekil (3.1), korale gürültü senaryosu için de Şekil (3.2)'de R 'nin fonksiyonu olarak çizdirilmiştir. Şekillerden de açıkça görüldüğü gibi (n,a) grupları için korelasyon boyutu değerleri; en kaotik durumun boyutu ve üst limit olan $D_{corr} = 1$ 'den kaos geçiş eşiğindeki boyut olan $D_{corr} = 0.5$ 'e doğru artan n değerleri ile yaklaşmaktadır. Bu şekillerdeki I_n , (n,a) grubuna karşılık gelen kaotik bant içindeki yörünge, $D_{corr} = 0.5$ kaos eşiği doğrusu üzerindeki gelişimini (kaos eşiğindeki korelasyon boyutundan sapma olarak da adlandırılabilir) temsil eder.

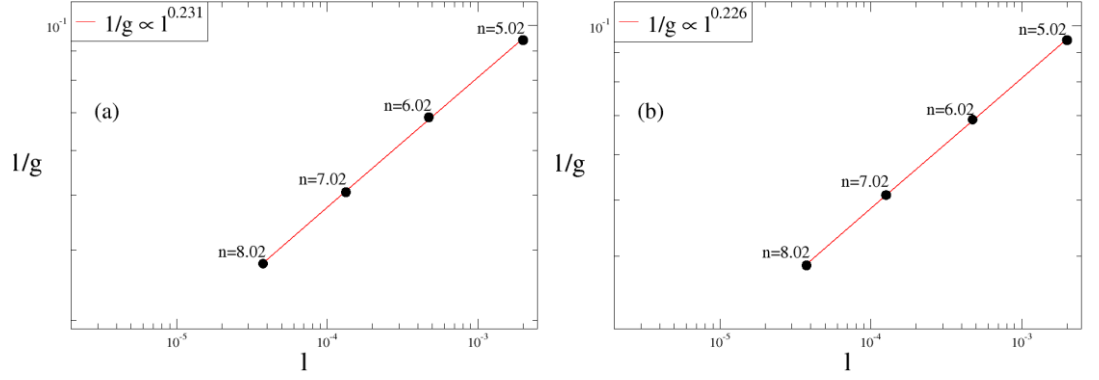


Şekil 3.1: Beyaz gürültü eklenmiş lojistik map için (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunluklarında her bir (n,a) grubuna karşılık gelen kaotik bant içindeki yörünge, $D_{corr} = 0.5$ kaos eşiği doğrusu üzerindeki gelişimi. (b) şeklinde kaos eşiği doğrusunun uç bölgesinde meydana gelen düzleşme gürültü yoğunluğunun küçük boyutunun neden olduğu basamaklama (digitization) etkisidir ve hesap üzerinde bir etkisi yoktur.

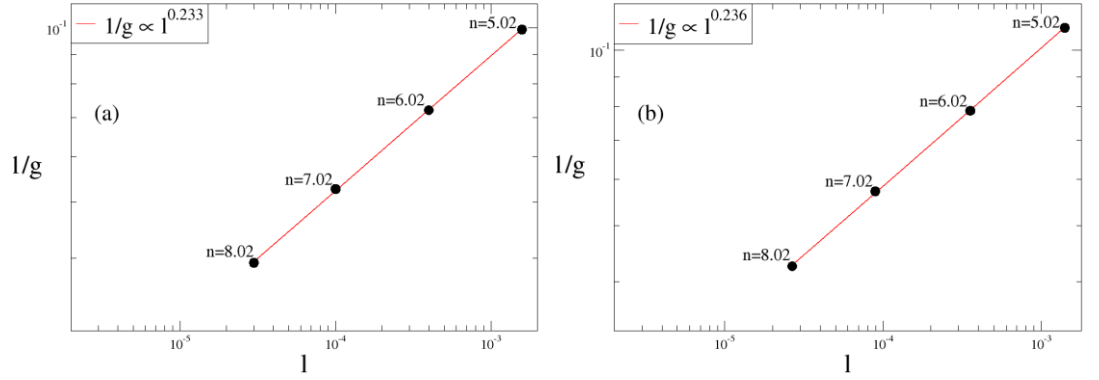


Şekil 3.2: Korale gürültü eklenmiş lojistik map için (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunluklarında her bir (n, a) grubuna karşılık gelen kaotik bant içindeki yörüngenin kaos eşiği doğrusu $D_{corr} = 0.5$ üzerindeki gelişimi.

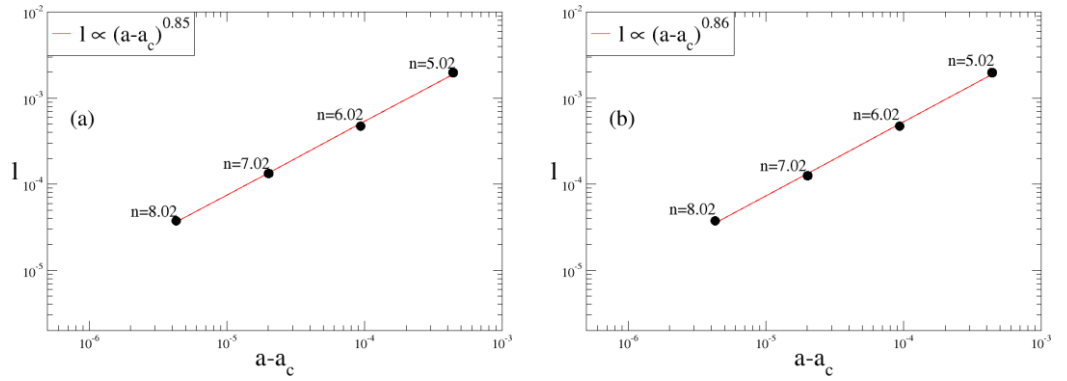
Beyaz gürültü ve korale gürültü eklenmiş lojistik maplerin seçilen yoğunluklardaki katkılı durumlarının seçilen kaos eşiğine mesafeyi belirten n değerleri için bulunan l_n değerleri ile bu n değerleri için bulunan olasılık dağılımı genişliği g_n değerleri arasındaki ilişkiyi göstermek amacıyla sırasıyla Şekil (3.3) ve Şekil (3.4)'te çizdirilmiştir. Her iki gürültülü senaryo için de kaos eşiğine yaklaşırken l_n sıfıra yaklaşırken (kaos eşiği doğrusu üzerine giderken) q -Gaussiye'nin genişliğinin de sonsuza $1/g \propto l^\tau$ formunda bir kuvvet yasası ölçeklenmesi ile gittiği tespit edilmiştir. Gürültülü lojistik mapler için kritik üstel değerleri $\tau \simeq 0.23$ ile literatürde standart lojistik map için elde edilen $\tau = 0.23 \pm 0.01$ kritik üstel değerinin değer aralığında yer alacak şekilde bulunmuştur (Afsar and Tirnakli, 2014). l_n değerlerinin, q -Gaussiye'nin dağılımın genişliğiyle ölçeklenmesinin yanı sıra, beklenen bir sonuç olarak $(a - a_c)$ kaos eşik değerine mesafeyle de bir $l \propto (a - a_c)^\gamma$ kuvvet yasası formunda $\gamma \simeq 0.84$ kritik üsteliyle ölçeklendiği görülmüştür. Şekil (3.5) ve Şekil (3.6)'da gösterilen bu ölçeklenme ilişkisi (Afsar and Tirnakli, 2014) çalışmasında tespit edilen kritik üstel değeriyle mükemmel şekilde uyumaktadır.



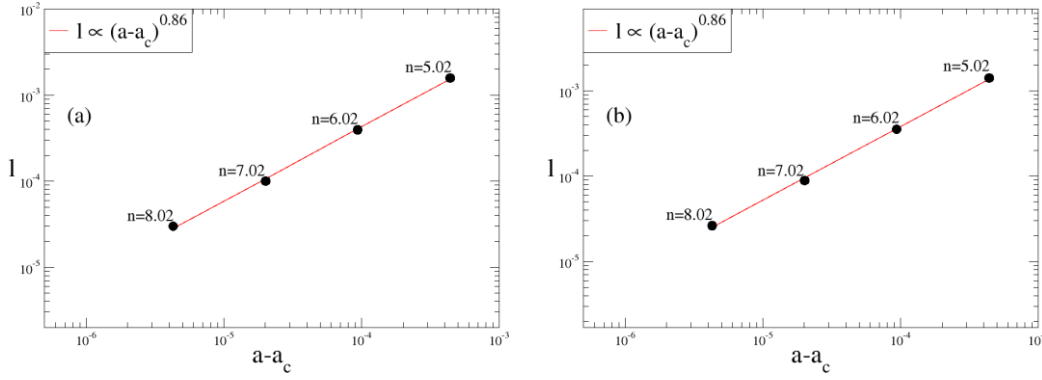
Şekil 3.3: Beyaz gürültü eklenmiş lojistik map için (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunluklarında q -Gaussiyen olasılık dağılımının genişliği ile kaos eşiğindeki korelasyon boyutu değerinden sapma arasındaki kuvvet yasası ölçeklenmesinin grafiği.



Şekil 3.4: Korale gürültü eklenmiş lojistik map için (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunluklarında q -Gaussiyen olasılık dağılımının genişliği ile kaos eşiğindeki korelasyon boyutu değerinden sapma arasındaki kuvvet yasası ölçeklenmesinin grafiği.



Şekil 3.5: Beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunluğu için l kaos eşiğindeki korelasyon boyutundan sapma ile $(a - a_c)$ kaos eşiğine mesafe arasındaki ölçeklenme ilişkisi. Kaos eşiğine yaklaştıkça l_n değerlerinin sıfıra gittiği görülmektedir.



Şekil 3.6: Korale gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunluğu için l kaos eşiğindeki korelasyon boyutundan sapma ile $(a - a_c)$ kaos eşiğine mesafe arasındaki ölçeklenme ilişkisi. Kaos eşiğine yaklaştıkça l_n değerlerinin sıfıra gittiği görülmektedir.

3.2 q -Gaussiyen Dağılımın Genişliği ile Korelasyon Uzunluğu Arasındaki İlişki

Kaos eşiği civarındaki lojistik mapin iterasyonlarının kuvvetli korelasyonlar göstermesi nedeniyle, kaos eşiğine yaklaşırken gözlemlenen q -Gaussiyen dağılımın eteklerinin genişlemesi ile lojistik mapin iterasyonları arasındaki korelasyon uzunlukları arasında bir ilişkinin olması gerektiği düşünülmüştür. Herhangi bir zaman serisinin dataları için korelasyon uzunluğu ξ ; κ zaman gecikmesi, N zaman serisindeki data sayısı ve K korale olan ve korale olmayan dataları ayıran, κ zaman gecikmesi için bir sınır olmak üzere,

$$\xi = \sum_{k=1}^K \left(1 - \frac{k}{N}\right) r_{\kappa} \quad (34)$$

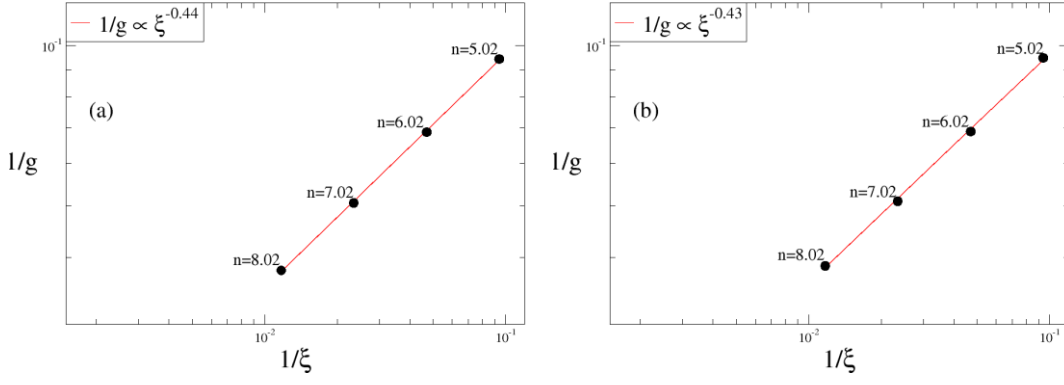
şeklinde tanımlanır. Bu ifadede yer alan r_{κ} otokorelasyon fonksiyonu olup zaman serisinin dataları arasındaki korelasyonun belirlenmesinde kullanılır. Bu fonksiyon $\langle y \rangle = (1/N) \sum_{i=1}^N y_i$ olmak üzere,

$$r_{\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^{N-\kappa} (y_i - \langle y \rangle)(y_{i+\kappa} - \langle y \rangle)}{\sum_{i=1}^N (y_i - \langle y \rangle)^2} \quad (35)$$

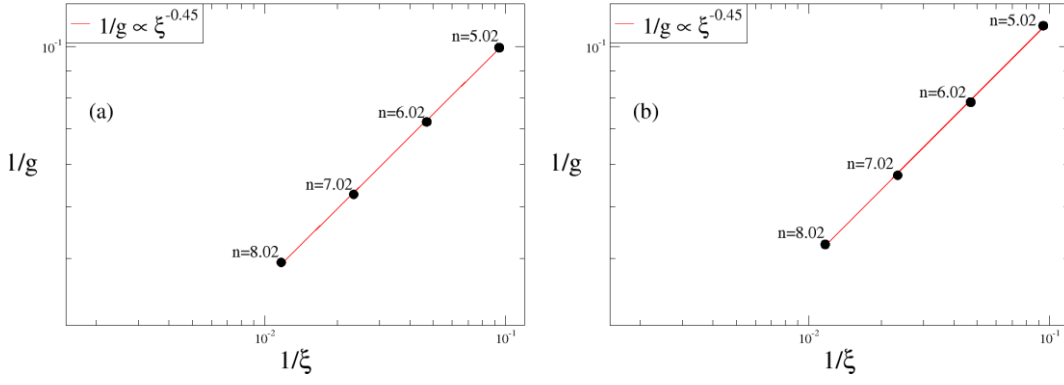
şeklinde verilir. Otokorelasyon fonksiyonu; $\kappa < K$ için $r_{\kappa} \neq 0$ 'dır ve bu durum korale datayı temsil eder, $\kappa > K$ için ise $r_{\kappa} = 0$ 'dır ve bu durumda data korale değildir.

Önceki bölümlerde lojistik mape eklenen beyaz gürültü ve korale gürültünün özelliklerini tanıtmakta faydalandığımız, bu katkıları belirten terimlerden elde edilen dataların otokorelasyon fonksiyonları grafiği Şekil (2.4)'te verilmişti. Grafikten de görüldüğü üzere dataları arasında korelasyon olmayan beyaz gürültüde ilk zaman gecikmesi adımımdan sonra otokorelasyon fonksiyonunun hızlı bir şekilde $r_k=0$ 'a düştüğü ve daha sonra sıfır civarında küçük genlikli salınımlar yaptığı görülmektedir. Bu durumda beyaz gürültü terimi için elde edilen dataların birbirleriyle korale olmadığı, her datanın kendisiyle korale olduğu sonucuna varılır. Korale gürültü teriminin lojistik mapin kendi iterasyonlarını içermesinden dolayı, bu terim için elde edilen zaman serisi datalarının kuvvetli olarak korale olduğu bilinmektedir. Şekil (2.4)'ten de görüleceği üzere bu terim için elde edilen datanın otokorelasyon fonksiyonu $r_k=0$ civarında büyük genlikte salınımlar yaparak çok büyük bir zaman gecikmesi değerinde sıfır olacaktır. Bu nedenle bu terimin zaman serisi datasının kuvvetli korelasyonlar göstererek çok uzun bir korelasyon uzunluğuna sahip olacağı söylenir.

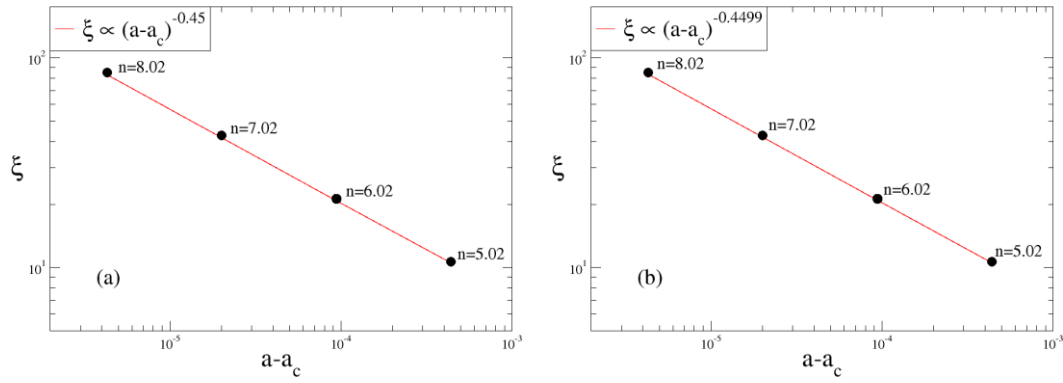
Beyaz gürültü ve korale gürültü eklenmiş lojistik maplerin artan n değerleriyle genelleştirilmiş Huberman-Rudnick ölçeklenmesi yardımıyla yaklaşılan kaos eşikleri civarında limit dağılımı araştırırken kullandığımız $y_i = \Delta\omega_i$ birbiriyle korale dalgalanmaları, incelemede kullanacağımız zaman serisi olarak alınarak gürültülü lojistik maplerin her bir (n,a) grubu için otokorelasyon fonksiyonları ve korelasyon uzunlukları hesaplanmıştır. Böylece kaos eşiği civarında her bir (n,a) grubu için bulduğumuz olasılık dağılımlarının genişlikleri ile birebir ilişki sağlanmıştır. Her iki gürültülü lojistik map için de yapılan hesaplamalar sonucunda, kaos eşiğine yaklaşıırken q -Gaussiyen dağılımlarının genişliğinin sonsuza artan korelasyon uzunlukları değerleriyle $1/g \propto \zeta^{-\mu}$ formunda bir kuvvet yasası formunda $\mu \simeq 0.44$ kritik üsteliyle ölçeklendiği görülmüştür (Şekil (3.7) ve Şekil (3.8)). Ayrıca kaos eşiğine yaklaştıkça korelasyon uzunluklarının büyümesinden yola çıkılarak bu niceliğin $(a-a_c)$ kaos eşiğine mesafeyle de ilişkisi araştırılmış ve benzer bir kuvvet yasası formunda olan $\zeta \propto (a-a_c)^{-\nu}$, $\nu \simeq 0.45$ kritik üstel değeriyle ölçeklenme ilişkisi gözlenmiştir (Şekil (3.9) ve Şekil (3.10)). Elde edilen bu iki ölçeklenme ilişkisi ve bunların kritik üstelleri, literatürde yer alan standart lojistik map için bulunan ölçeklenme ilişkileriyle uyum içerisindedir (Afsar and Tirnakli, 2014). Gürültülü lojistik mapler için elde edilen kritik üstel değerleri, standart durum için elde edilen kritik üstel değerinin değer aralığında bulunmaktadır (Cetin et al., 2015).



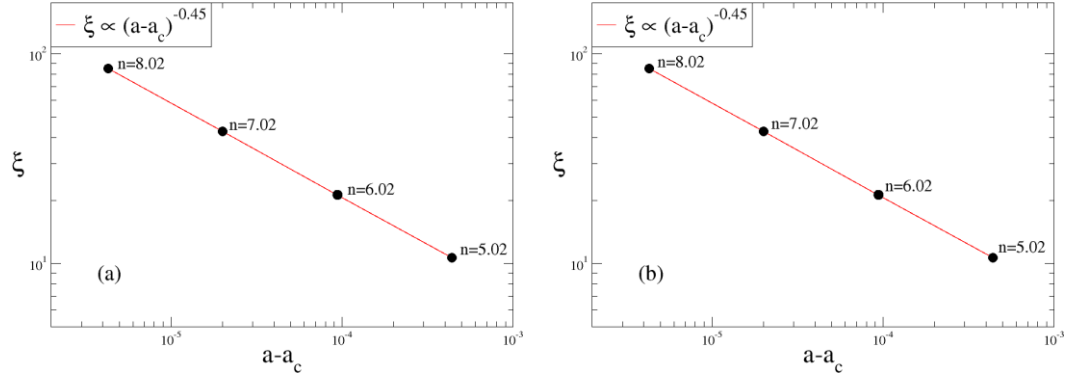
Şekil 3.7: Beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunluğunda kaos eşiğine yaklaşırken q -Gaussiyen dağılımın genişliğiyle korelasyon uzunluğu arasındaki ölçeklenme ilişkisi.



Şekil 3.8: Korale gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunluğunda kaos eşiğine yaklaşırken q -Gaussiyen dağılımın genişliğiyle korelasyon uzunluğu arasındaki ölçeklenme ilişkisi.



Şekil 3.9: Beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunluğunda kaos eşiğine yaklaşırken korelasyon uzunluğu ile kaos eşiğine mesafe arasındaki ölçeklenme ilişkisi.



Şekil 3.10: Korale gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunluğunda kaos eşiğine yaklaşırken korelasyon uzunluğu ile kaos eşiğine mesafe arasındaki ölçeklenme ilişkisi.

3.3 q -Gaussiyen Dağılımın Genişliği ile Lyapunov Üsteli Arasındaki İlişki

Tezin bu bölümünde lojistik map'i tanıtırken önemli özelliklerine Bölüm 2.2'de kısaca değindiğimiz Lyapunov üstelinin detaylı bir tanımını verip, gürültülü lojistik mapler için kaos geçiş eşiğine yaklaşırken elde edilen olasılık dağılımlarının genişlikleriyle bu üstelin değeri arasındaki ölçeklenme ilişkilerini araştırdık.

Lyapunov üsteli, birbirine çok yakın iki başlangıç koşulunun zaman evrimi sonucunda ortalamada birbirlerine ne kadar hızlı yaklaştığı veya birbirlerinden ne kadar hızlı uzaklaştıklarının bir ölçüsüdür. Lojistik map benzeri bir boyutlu bir sistem olarak $x_{n+1}=f(x_n)$ mapinin bir x_0 başlangıç koşuluna bir ε mesafesindeki $x_0+\varepsilon$ başlangıç koşulu için, map'i n kere itere ettiğimizde bu iki başlangıç koşulu birbirinden d_n kadar ayrılır. Bu d_n ayrılığının, başlangıçtaki ayrılığa oranı ile bu iki başlangıç koşulunun birbirinden ıraksama oranı bulunur,

$$\frac{d_n}{\varepsilon} = \frac{|f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)|}{\varepsilon}. \quad (36)$$

Davranış kaotik iken bu ıraksama e^λ şeklinde eksponansiyel formda olur ve λ Lyapunov üsteli olarak adlandırılır. Denklem (36)'da sağ tarafın doğal logaritması alınarak;

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)|}{\varepsilon} \right) \quad (37)$$

elde edilir. Başlangıçtaki mesafenin çok çok küçük olduğunu belirten $\varepsilon \rightarrow 0$ limitinde bu eşitlikteki doğal logaritmanın içindeki ifade map fonksiyonunun x 'e göre türevine eşit olur $f^{(n)'}(x_n)$. Bu türev ifadesi zincir kuralıyla, $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ yörünge noktalarındaki $f(x_n)$ fonksiyonlarının türevlerinin çarpımı olarak yazılabilir. Böylece Lyapunov üsteli için genel ifade;

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_n)| \quad (38)$$

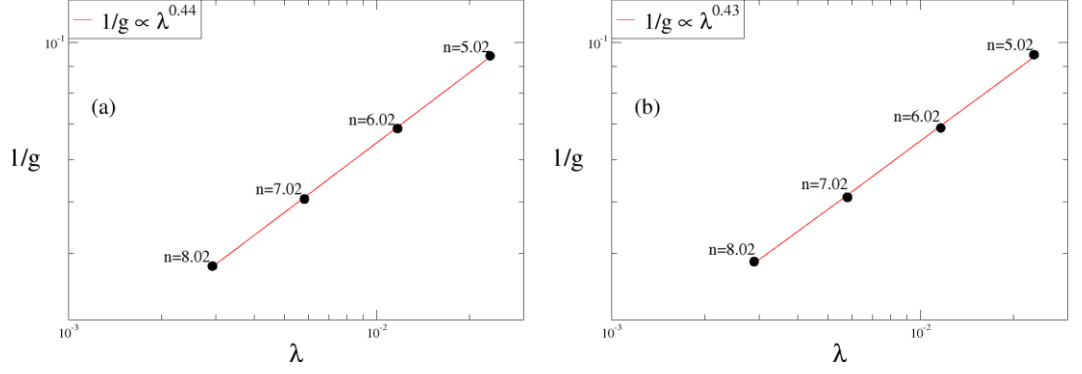
olarak elde edilir. Bu üstelin negatif değer alıp komşu iki başlangıç koşulunun birbirine yakınsayacak şekilde evrildiği durumda davranış periyodik iken, pozitif değerler aldığıında bu iki başlangıç koşulu zaman evrimi içerisinde birbirinden eksponansiyel olarak ıraksar ve davranış kaotiktir. Gürültülü lojistik mapler için sıfırdan itibaren artan a parametre değerleriyle sistemin Lyapunov üsteli değerindeki değişim Şekil (2.2) ve Şekil (2.5)'te seçilen gürültü yoğunluk değerleri için verilmiştir. İşaretinin negatiften pozitive değişirken sistemin davranışının periyodik rejimden kaotiğe geçmesiyle, Lyapunov üsteli sistemin bir düzen parametresi olarak düşünülebilir. Kaos geçiş eşiğinde sıfır değer alan bu üstelin pozitifliği büyüdükçe sistem giderek daha kaotik hale gelir.

Sistemin davranışının tespiti ve kaotik davranışın nicellenmesinde büyük öneme sahip Lyapunov üsteliyle, kaos geçiş eşiğine yaklaşırken elde edilen q -Gaussiyen dağılımların genişlikleri arasındaki ilişkiyi ortaya koymak için; beyaz ve korale gürültü eklenmiş lojistik maplerin her bir (n,a) grubu için elde edilen g_n genişlikleri, bu (n,a) grupları için Denklem (38)'den hesaplanan Lyapunov üstellerinin fonksiyonu olarak çizdirilmiştir. Şekil (3.11) ve Şekil (3.12)'de verilen grafiklerde; artan n değerleriyle kaos geçiş eşiğine yaklaşıırken, λ sıfıra giderken q -Gaussiyen genişliğinin $1/g \propto \lambda^\mu$ formunda bir kuvvet yasasıyla, $\mu \simeq 0.44$ kritik üsteliyle sonsuza gittiği görülmektedir.

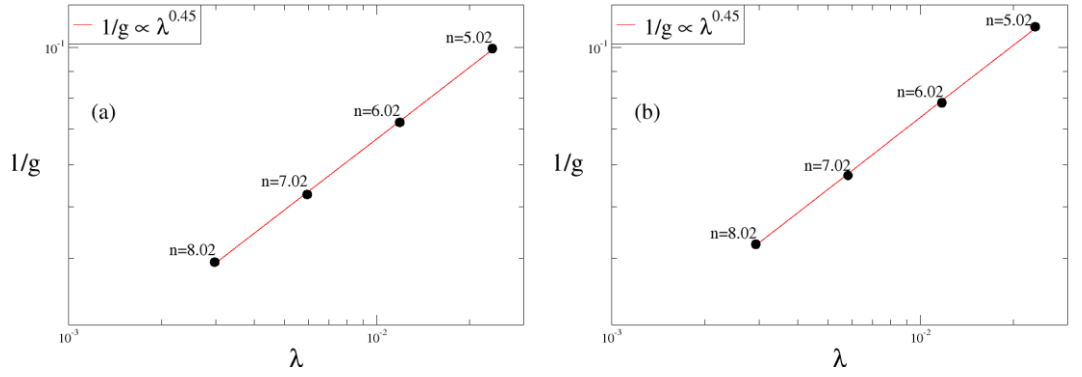
Ayrıca bu (n,a) grupları için hesaplanan Lyapunov üstelleri ile bu (n,a) gruplarının $(a - a_c)$ kaos eşiğine mesafeleri Şekil (3.13) ve Şekil (3.14)'te çizdirilerek Huberman-Rudnick ölçeklenmesiyle birebir örtüşen bir ilişki elde edilmiştir ($\lambda \propto (a - a_c)^v, v \simeq 0.448$). Böylece tüm bu araştırmalarımızda kullandığımız metodolojinin doğruluğu bir kez daha ispatlanmıştır.

Bu bölümde beyaz gürültü ve korale gürültü eklenmiş lojistik mapler için elde edilen iki ölçeklenme ilişkisi de literatürde yer alan ölçeklenme ilişkileriyle

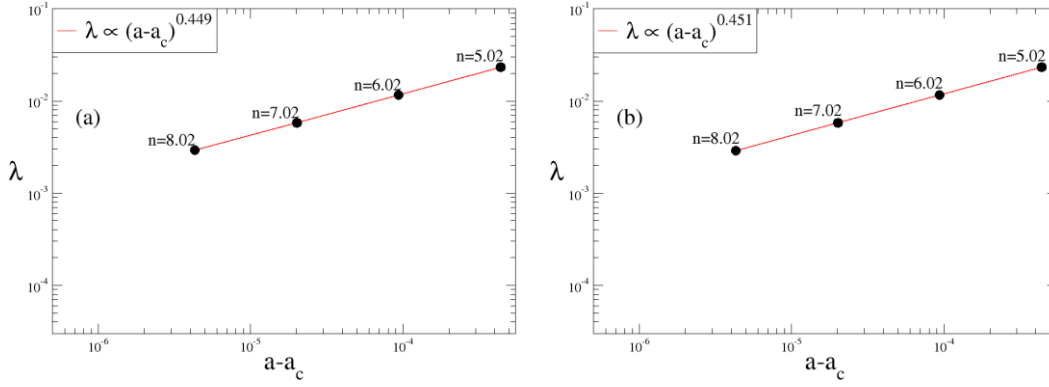
uyumludur (Afsar and Tirnakli, 2014). Elde edilen kritik üsteller standart lojistik map çalışmasından elden edilen kritik üstellerin değer aralığında yer almakta ve elde edilen sonuçların evrensel olduğunu doğrular niteliktedir.



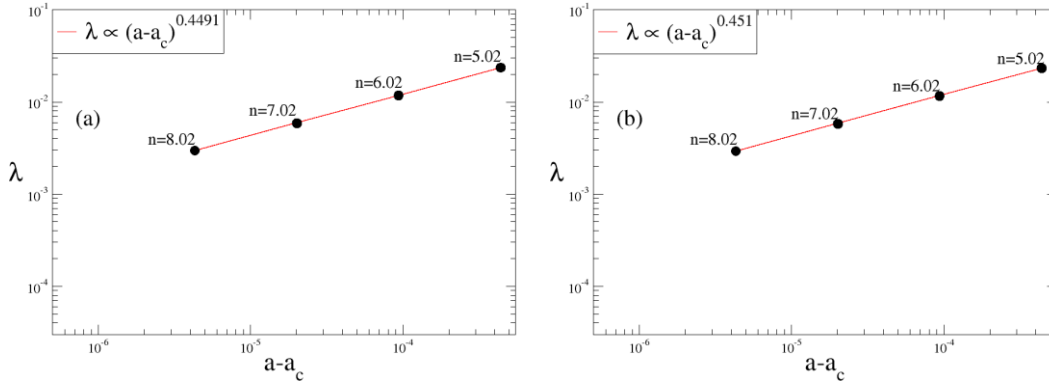
Şekil 3.11: Beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunluklarında, kaos eşiğine yaklaşırken elde edilen q -Gaussiyen dağılımların genişliğinin Lyapunov üsteli ile ölçeklenmesi.



Şekil 3.12: Korale gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunluklarında, kaos eşiğine yaklaşırken elde edilen q -Gaussiyen dağılımların genişliğinin Lyapunov üsteli ile ölçeklenmesi.



Şekil 3.13: Beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunluklarında, her bir (n, a) grubu için hesaplanan Lyapunov üstellerinin $(a - a_c)$ kaos eşiğine mesafe ile ölçeklenmesi. Elde edilen ölçeklenmenin Huberman-Rudnick ölçeklenme yasasıyla uyduğu görülmektedir.



Şekil 3.14: Korale gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunluklarında, her bir (n, a) grubu için hesaplanan Lyapunov üstellerinin $(a - a_c)$ kaos eşiğine mesafe ile ölçeklenmesi. Beyaz gürültü eklenmiş senaryo ile benzer olarak elde edilen ölçeklenmenin Huberman-Rudnick ölçeklenme yasasıyla uyduğu görülmektedir.

3.4 q -Gaussiyen Dağılımın Genişliği ile Fraktal Boyut Arasındaki İlişki

Lojistik map için davranışın en kaotik olduğu durumda, mapin iterasyonları faz uzayının tamamını doldurur. Kaotik bölgeden kaos eşiğine yaklaşırken, mapin periyodik rejimindeki periyot dallanmalarına benzer bir davranış kaotik bantların yarılmaları olarak gözlenir. Bu bant yarılmaları prosedüründe 2^n kaotik bantları 2^{n+1} kaotik bantlarını oluşturacak şekilde yarılr ve bu bant yarılmaları sonsuz tane kaotik bantın bulunduğu kaos geçiş eşliğinde son bulur. Bu kaotik bantlarda mapin iterasyonları yaklaşık olarak düzgün dağılırlar da, kaotik bantlar faz uzayının sadece belirli bir kısmını kaplar ve bir 2^n kaotik bantı içinde iterasyonların yerleşmediği yasak bölgeler oluşur. Gözlemlenen bu bant yarılmaları prosedürü nedeniyle faz uzayı fraktal özellikler gösterir. Lojistik mapin

faz uzayında gözlemlenen bu geometrik özelliklerini inceleyerek sistemin uzun-dönem dinamik davranışlarını belirleyebiliriz (Hilborn, 2000).

Faz uzayının geometrik yapısı üzerine odaklanan bir yöntem olan kutu sayma fraktal boyutu metoduyla faz uzayının boyutunu belirleyebiliriz. Bu metotta ele alınan sistemin faz uzayı ε kenar uzunluğuna sahip kutularla kaplanır (lojistik map benzeri bir boyutlu yitimli dinamik sistemler için ε uzunluklu çizgi parçaları). Daha sonra ele alınan dinamik sistemin uzun süre evrilmesine izin verilerek elde edilen yörüngelerden kaç tanesinin bu kutular içerisine düştüğü saydırılır. Faz uzayının ortaya çıkan yasak bölgeler nedeniyle tamamen doldurulamadığı durumlarda bazı kutular boş kalırken, faz uzayının yörüngeler tarafından tamamen işgal edildiği durumlarda tüm kutular dolu olacaktır. Faz uzayını kutularla doldurma işlemi ε kutu kenarlarını küçülterek, dolayısıyla uzayı kaplayan kutu sayısını arttırarak tekrarlanır. $N(\varepsilon)$, içi yörüngeler tarafından doldurulan kutu sayısı ve N_{box} tüm uzayı kaplamak için gerekli olan kutu sayısı olmak üzere; kutu sayma fraktal boyutu D ,

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log N_{box}} \quad (39)$$

olarak tanımlanır.

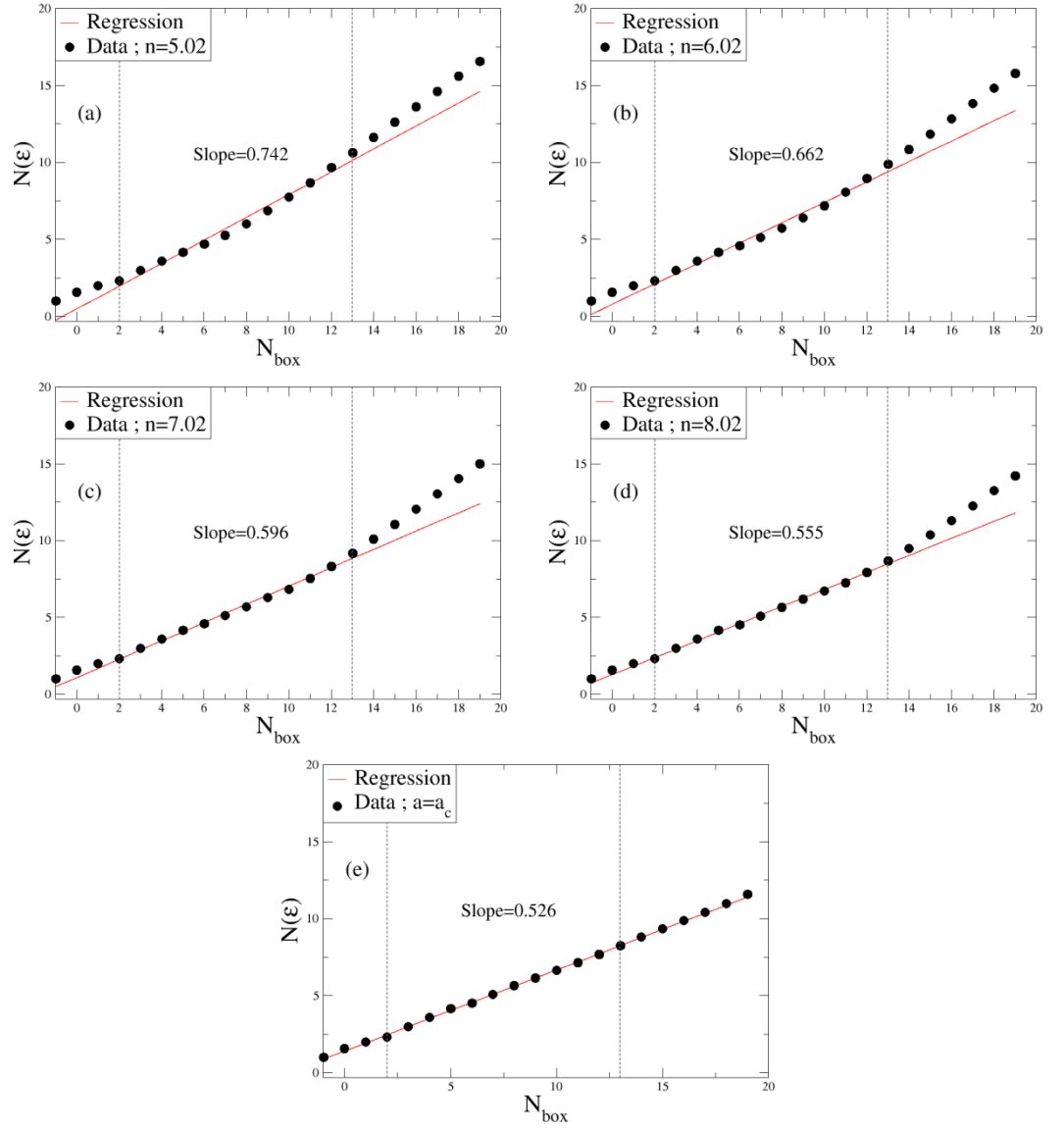
Lojistik mapin kaotik bölgesinde kaos eşiğine yaklaşırken gözlemlenen kaotik bant yarılmaları prosedürü, her bir adımda ortasından boyunun üçte biri büyüklüğünde bir parça çıkarılarak oluşturulan ünlü Cantor seti inşasına benzetilerek kutu sayma boyutu hesaplanabilir (Hilborn, 2000). Sistemin en kaotik olduğu bölgede yörüngeler faz uzayını tamamen kaplar ve bu durumda bir eğrinin boyutu olan 1 elde edilir. Ancak kaos eşiğine kadar süren kaotik bant yarılmalarına bakıldığında, bu bantlar uzayın belirli bölgeleri işgal ettiğinden bu prosedür için tam sayı olmayan boyut değeri elde edilir. Kaos eşiğindeki kutu sayma fraktal boyutu, analitik olarak $D = 0.543$ olarak bulunmuştur (Hilborn, 2000).

Beyaz ve korale gürültü eklenmiş lojistik maplerin kaos eşiklerine yaklaşmakta kullandığımız (n,a) gruplarının a değerleri bir 2^n kaotik bandına karşılık geldiğinden, iki tip gürültülü lojistik mapin her bir (n,a) grubu için fraktal boyutlar hesaplanmıştır. Beyaz gürültünün $D = 10^{-12}$ ve korale gürültünün $b = 0.25$ yoğunlukları seçilerek (n,a) gruplarının fraktal boyutlarının kaos eşiğine

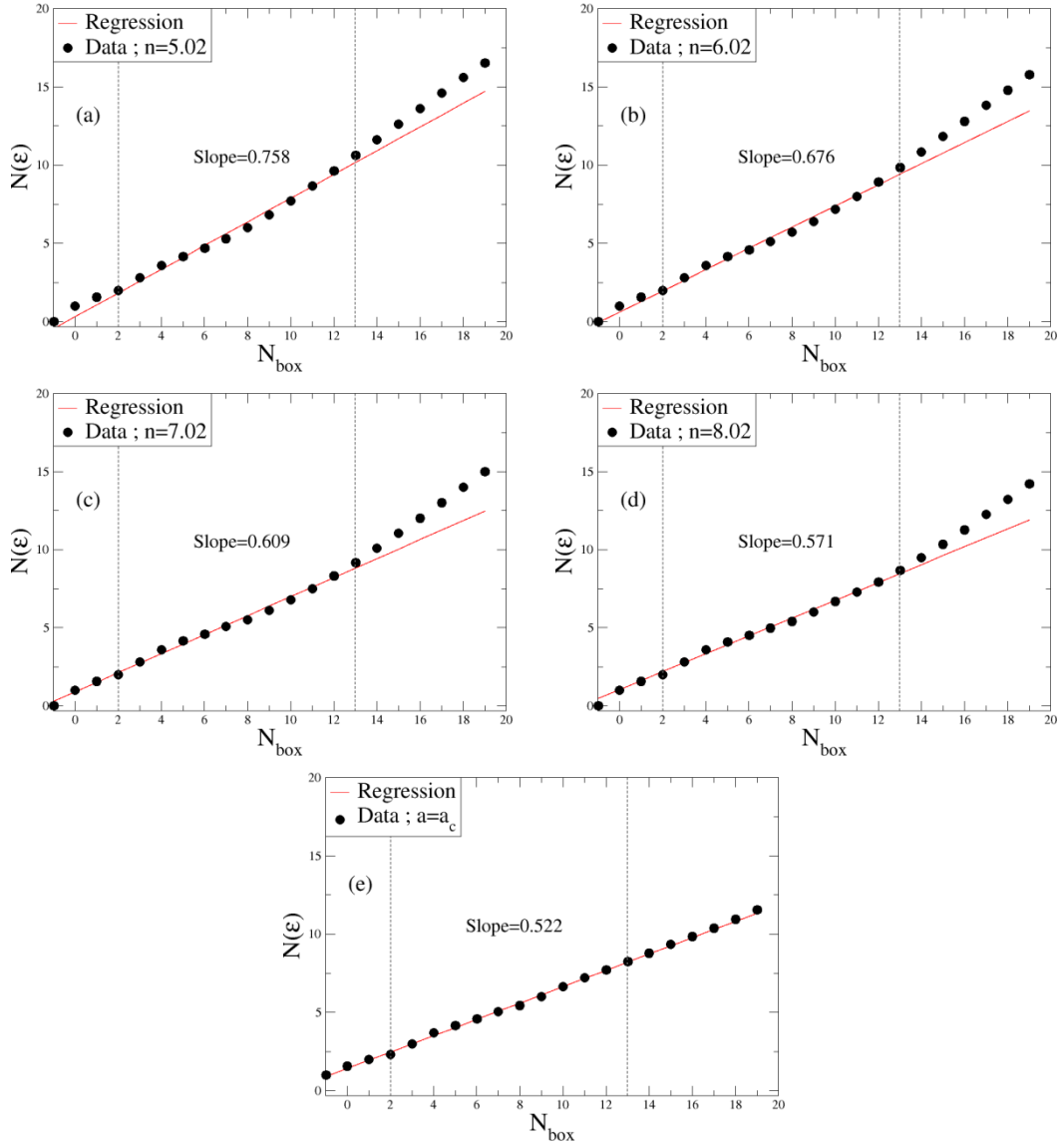
artan n değerleriyle yaklaşırken nasıl değiştiği sırasıyla Şekil (3.15) ve Şekil (3.16)'da gösterilmiştir. Şekillerden de açıkça görüldüğü üzere kaos eşiğine yaklaştıkça, hesaplanan fraktal boyut değerleri kendi spesifik kaos eşiği fraktal boyutlarına, D_c , yaklaşmaktadır. Bu gözlemin ardından, hesaplanan kaos eşiği fraktal boyutları arasında görülen farkın gürültü etkisinden kaynaklandığını belirtmekte yarar vardır.

Gürültülü lojistik maplerin kaos eşikleri civarındaki olasılık dağılımlarının genişliği ile fraktal boyutları arasındaki ilişkiyi kurmak için; kaos geçiş eşiğine yaklaşımda kullandığımız her bir (n,a) grubu için hesaplanan fraktal boyut değerinin bu maplerin hesaplanan kaos eşiği fraktal boyutuyla farkı olan $(D-D_c)$ niceliğini kullandık. Şekil (3.17) ve Şekil (3.18)'den de görüleceği üzere kaos eşiğine yaklaştıkça fraktal boyutun mapin kendi kaos eşiği fraktal boyutuna yakınsarken, olasılık dağılımlarının genişliğinin $1/g \propto (D-D_c)^\mu$ formunda bir kuvvet yasası ile geliştiği görülmektedir. Ayrıca fraktal boyutun kaos eşiğine yaklaştıkça değişimini irdelemek için $(a - a_c)$ kaos eşiğine mesafe niceliği ile yapılan incelemelerde de Şekil (3.19) ve Şekil (3.20)'de verilen $(D-D_c) \propto (a-a_c)^\nu$ şeklinde bir ölçeklenme ilişkisi elde edilmiştir.

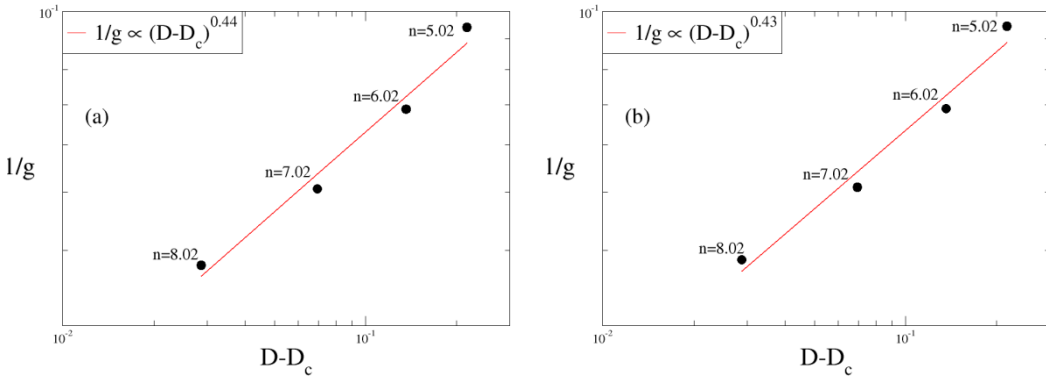
Tezin bu bölümünde fraktal boyut üzerine yapılan incelemelerde iki çeşit gürültü eklenmiş lojistik mapler için elde edilen ölçeklenme ilişkileri literatürde standart durum için elde edilen ölçeklenme ilişkileriyle form açısından uyumaktadır (Afsar and Tirnakli, 2014). Beyaz gürültü eklenmiş lojistik map için elde edilen $\mu = 0.44 \pm 0.06$ ve $\nu = 0.44 \pm 0.06$ kritik üstel değerleri, standart durumun için bulunan kritik üstel değerlerinin değer aralığında yer almaktadır. Ancak korale gürültü eklenmiş senaryolarda Şekil (3.18) ve Şekil (3.20)'den de görüldüğü üzere; beyaz gürültü eklenmiş senaryoyla aynı kuvvet yasası formlarında ölçeklenme ilişkileri elde edilirken, farklı değerlerde kritik üsteller elde edilmiştir. Korale gürültünün eklenmesinin kaos eşiğinin evrensel özelliklerini teorik olarak değiştirmesi beklenmediği için elde edilen bu farklı kritik üstel değerlerinin Şekil (3.16)'da görülen kuvvetli dalgalanmalardan kaynaklanmaktadır (Cetin et al., 2015).



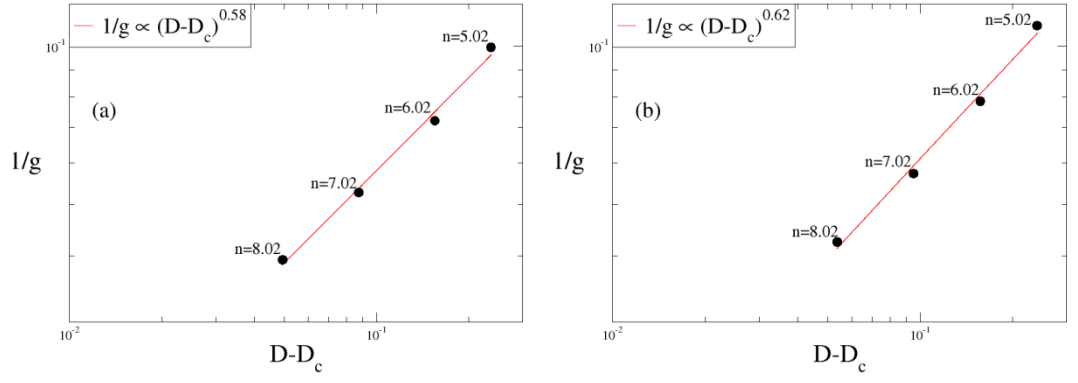
Şekil 3.15: $D = 10^{-12}$ gürültü yoğunluğunda beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $n = 5.02$, (b) $n = 6.02$, (c) $n = 7.02$, (d) $n = 8.02$ ve (e) $a = a_c$ için kutu sayma fraktal boyutu hesabı grafikleri. Kesikli çizgilerle belirtilen bölgede yer alan eğrinin eğimi fraktal boyutu vermektedir.



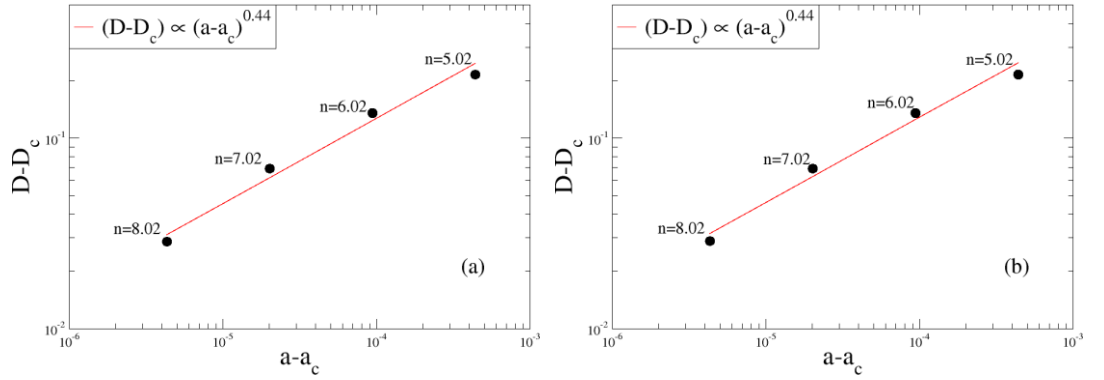
Şekil 3.16: $b = 0.25$ gürültü yoğunluğunda korale gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $n = 5.02$, (b) $n = 6.02$, (c) $n = 7.02$, (d) $n = 8.02$ ve (e) $a = a_c$ için kutu sayma fraktal boyutu hesabı grafikleri. Kesikli çizgilerle belirtilen bölgede yer alan eğrinin eğimi fraktal boyutu vermektedir.



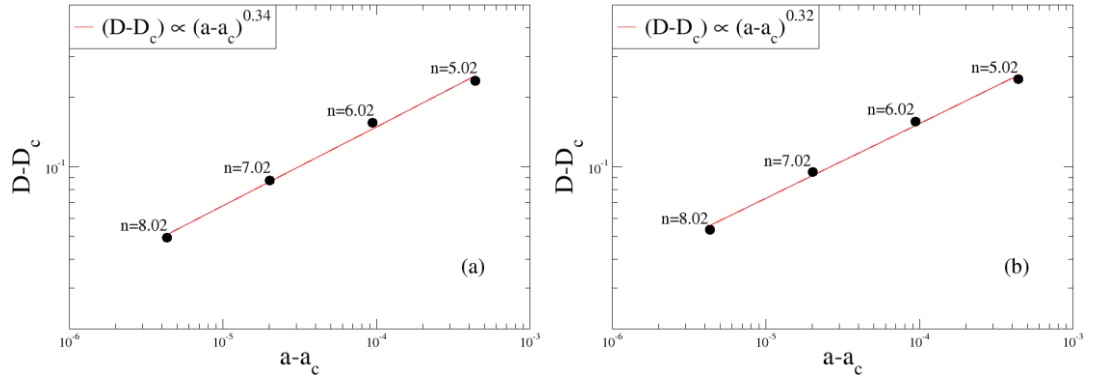
Şekil 3.17: Beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunlukları için $1/g \propto (D-D_c)$ ölçeklenme ilişkisi.



Şekil 3.18: Korale gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunlukları için $1/g \propto (D-D_c)$ ölçeklenme ilişkisi.



Şekil 3.19: Beyaz gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $D = 10^{-12}$ ve (b) $D = 10^{-10}$ gürültü yoğunlukları için (n,a) gruplarının fraktal boyutlarının kaos eşikine yaklaşıırken, $(a - a_c)$ kaos eşikine mesafeye ilişkisi.



Şekil 3.20: Korale gürültü eklenmiş lojistik mapin (a) $b = 0.25$ ve (b) $b = 0.5$ gürültü yoğunlukları için (n,a) gruplarının fraktal boyutlarının kaos eşikine yaklaşıırken, $(a - a_c)$ kaos eşikine mesafeye ilişkisi.

Çeşitli yoğunluklarda beyaz gürültü ve korale gürültü eklenmiş lojistik mapler için tespit edilen kaos eşiklerine genelleştirilmiş Huberman-Rudnick ölçeklenmesiyle periyot 2 pencereleri için yaklaşıırken elde edilen q -Gaussiyen dağılımların eteklerinin genişlemesiyle (bu dağılımların bir tam q -Gaussiyen

formuna gelişimi), lineer olmayan dinamiğin önemli nicelikleri arasındaki ilişkileri ortaya koyduğumuz bu bölüm için elde edilen ölçeklenme ilişkileri ve bu ölçeklenmelerin kritik üstel değerleri Çizelge (3.1) ve Çizelge (3.2)'de sırasıyla beyaz gürültü eklenmiş senaryo ve korale gürültü eklenmiş senaryo için verilmiştir. Bu çizelgelere standart lojistik map için (Afsar and Tirnakli, 2014) çalışmasında elde edilen ölçeklenme ilişkileri ve kritik üstel değerleri karşılaştırma amaçlı olarak eklenmiştir. Bu çizelgelerden de görüleceği üzere gürültü senaryolar için elde edilen kuvvet yasası formundaki ölçeklenme ilişkileri, standart lojistik map için elde edilenlerle aynıdır. Gürültünün beklenen bir etkisi olarak elde edilen kritik üstel değerlerinde küçük değişimler görülse de, elde edilen bu değerler standart durum kritik üstellerinin değer aralığında yer alıp ve standart durum için bulunan sonuçların birer evrensel sonuç olduğunu doğrular niteliktedir.

Çizelge 3.1: Beyaz gürültü eklenmiş lojistik map için bant yarılma prosedürü ile elde edilen ölçeklenme ilişkileri ve bu ilişkilerin kritik üstel değerleri. Karşılaştırma amaçlı olarak standart lojistik map için değerler (Afsar and Tirnakli, 2014) çalışmasından alınmıştır.

Ölçeklenme İlişkileri	$D = 0$ için kritik üsteller (standart durum)	$D = 10^{-12}$ için kritik üsteller	$D = 10^{-10}$ için kritik üsteller
$1/g \propto l^\tau$	$\tau = 0.23 \pm 0.01$	$\tau = 0.231 \pm 0.002$	$\tau = 0.226 \pm 0.003$
$l \propto (a - a_c)^\gamma$	$\gamma = 0.84 \pm 0.01$	$\gamma = 0.85 \pm 0.02$	$\gamma = 0.86 \pm 0.04$
$1/g \propto \lambda^\mu$	$\mu = 0.43 \pm 0.01$	$\mu = 0.44 \pm 0.01$	$\mu = 0.43 \pm 0.01$
$1/g \propto \xi^{-\mu}$	$\mu = 0.43 \pm 0.01$	$\mu = 0.44 \pm 0.01$	$\mu = 0.43 \pm 0.01$
$1/g \propto (D - D_c)^\mu$	$\mu = 0.43 \pm 0.01$	$\mu = 0.44 \pm 0.06$	$\mu = 0.43 \pm 0.06$
$\lambda \propto (a - a_c)^\nu$	$\nu = 0.448 \pm 0.003$	$\nu = 0.449 \pm 0.001$	$\nu = 0.451 \pm 0.001$
$\xi \propto (a - a_c)^\nu$	$\nu = 0.448 \pm 0.003$	$\nu = 0.4500 \pm 0.0001$	$\nu = 0.4499 \pm 0.0001$
$(D - D_c) \propto (a - a_c)^\nu$	$\nu = 0.448 \pm 0.003$	$\nu = 0.44 \pm 0.06$	$\nu = 0.44 \pm 0.06$

Çizelge 3.2: Korale gürültü eklenmiş lojistik map için bant yarılma prosedürü ile elde edilen ölçeklenme ilişkileri ve bu ilişkilerin kritik üstel değerleri. Karşılaştırma amaçlı olarak standart lojistik map için değerler (Afsar and Tirnakli, 2014) çalışmasından alınmıştır.

Ölçeklenme İlişkileri	$b = 0$ için kritik üsteller (standart durum)	$b = 0.25$ için kritik üsteller	$b = 0.5$ için kritik üsteller
$1/g \propto l^\tau$	$\tau = 0.23 \pm 0.01$	$\tau = 0.233 \pm 0.004$	$\tau = 0.236 \pm 0.004$
$l \propto (a - a_c)^\gamma$	$\gamma = 0.84 \pm 0.01$	$\gamma = 0.86 \pm 0.03$	$\gamma = 0.86 \pm 0.02$
$1/g \propto \lambda^\mu$	$\mu = 0.43 \pm 0.01$	$\mu = 0.45 \pm 0.01$	$\mu = 0.45 \pm 0.01$
$1/g \propto \xi^{-\mu}$	$\mu = 0.43 \pm 0.01$	$\mu = 0.45 \pm 0.01$	$\mu = 0.45 \pm 0.01$
$1/g \propto (D - D_c)^\mu$	$\mu = 0.43 \pm 0.01$	$\mu = 0.58 \pm 0.05$	$\mu = 0.62 \pm 0.05$
$\lambda \propto (a - a_c)^\nu$	$\nu = 0.448 \pm 0.003$	$\nu = 0.4491 \pm 0.0003$	$\nu = 0.451 \pm 0.001$
$\xi \propto (a - a_c)^\nu$	$\nu = 0.448 \pm 0.003$	$\nu = 0.4500 \pm 0.0001$	$\nu = 0.4500 \pm 0.0001$
$(D - D_c) \propto (a - a_c)^\nu$	$\nu = 0.448 \pm 0.003$	$\nu = 0.34 \pm 0.02$	$\nu = 0.32 \pm 0.02$

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında bileşenleri arasında kuvvetli korelasyonlar gösteren dinamik sistemlere iyi bir örnek olan lojistik mapin, kaos geçiş eşiği civarında elde edilen zaman serileri kullanılarak istatistiğin ve olasılık teorisinin yapı taşlarından olan merkezselsel limit teoreminin genelleştirilmiş bir formunun varlığı gösterilmiştir.

Bağımsız ya da yaklaşık olarak bağımsız bileşenlerden oluşan sistemlerde olasılık dağılımlarının Gaussiyen formda elde edileceğini belirten merkezselsel limit teoreminin Boltzmann-Gibbs istatistiğinin en önemli teoremlerindendir. Ancak sistemin bileşenleri arasında uzun menzilli korelasyonların bulunduğu ve merkezselsel limit teoreminin geçerli olmayıp, elde edilen dağılımların Gaussiyen formda olmaması, bu dağılımların ortaya çıkış nedenleri ve doğası hakkında merak uyandırmıştır. Bu tip sistemler için merkezselsel limit teoreminin geçerli olmaması nedeniyle, bu teoremi de içerisine alacak şekilde bir genelleştirmeye ihtiyaç duyulmuştur. Genelleştirilmiş istatistiğin (Tsallis istatistiği olarak da bilinir) ortaya koyduğu q -genelleştirilmiş merkezselsel limit teoremiyle, bileşenleri arasında belirli bir tipte uzun menzilli korelasyonlara sahip olan sistemlerde ortaya çıkan olasılık dağılımlarının q -Gaussiyen dağılımlar olacağı teorik olarak öne sürülmüştür. Genelleştirilmiş istatistik mekanik içerisinde yer alan q parametresi, ele alınan sistemin bileşenleri arasındaki korelasyonun tipi ile ilgili ve dinamik sistemin faz uzayının yapısını belirleyen bir parametre olup, bu parametrenin $q=1$ değeri Boltzmann-Gibbs istatistiğine karşılık gelir. Gaussiyen dağılımların Boltzmann-Gibbs istatistiğinde üstlendiği rolü; genelleştirilmiş istatistikte q -Gaussiyenlerin üstlenmesi nedeniyle, bu dağılımlar ile bu dağılımların ortaya çıkışını açıklayan q -genelleştirilmiş merkezselsel limit teoreminin arasındaki bağlantıyı kurmak büyük bir öneme sahiptir. Bu tez çalışmasında q -genelleştirmesine ihtiyaç duyulmasına neden olan özellikleri sergilemesi nedeniyle lojistik map inceleme amaçlı olarak seçilmiş ve q -Gaussiyenler ile q -genelleştirilmiş merkezselsel limit teoremi arasındaki ilişki sayısal olarak gösterilmiş ve lojistik mape iki farklı türde gürültü eklenerek test edilmiştir. Kaos eşiği civarında faz uzayını kesikli bir yapıda dolduran kaotik bantlarda yer alan ve birbirleriyle kuvvetli korelasyonlar gösteren lojistik mapin iterasyonlarının toplamaları için elde edilen dağılımlarının $q>1$ ile bir q -Gaussiyen formuyla örtüşecek şekilde kaos eşiğine yaklaştıkça eteklerinin genişlediği görülmüştür. Beyaz ve korale gürültü eklenen senaryolarda da bu limit davranışın gözlemlenmesi q -genelleştirilmiş merkezselsel limit teoreminin varlığını ispatlar niteliktedir.

Bu çalışmada standart gürültülü lojistik maplerin kaos eşiklerine yaklaşmakta kullandığımız Huberman-Rudnick ölçeklenmesi belirlediğimiz (n,a) grupları için elde edilen q -Gaussiyen dağılımlarının eteklerinin, artan n değerleriyle kaos geçiş eşiğine yaklaşırken genişlemesi davranışını; korelasyon boyutu, korelasyon uzunluğu, Lyapunov üsteli değeri ve fraktal boyut gibi niceliklerle ilişkilendirerek q -Gaussiyen limit dağılımlarının ortaya çıkış mekanizmasına ışık tutmaya çalıştık. Daha önce standart lojistik map için yapılan incelemeleri baz alarak gürültülü senaryolar için yaptığımız hesaplamalarda; standart durum için bulunan ölçeklenme davranışlarıyla çok iyi şekilde örtüşen kuvvet yasası formunda ölçeklenme ilişkileri elde edildi. Bu ölçeklenme ilişkilerinin kritik üstel değerlerinde eklenen gürültülerin etkileri görülse de, gürültülü lojistik map incelemesinde elde edilen bu üstel değerlerinin, standart durum için tespit edilen üstellerin değer aralığında yer aldığı açıkça görülmüştür. Korale gürültü eklenmiş lojistik map için fraktal boyut analizinde elde edilen standart duruma göre farklı kritik üstel değerlerinin, faz uzayının geometrik bir karakterizasyonu olan kutu sayma fraktal boyutu metodunda ortaya çıkan dalgalanmalar olduğu düşünülmektedir. Korale gürültünün mapin içyapısından eklenerek mapi kaydırması yanı sıra, hesaplamaların yapıldığı (n,a) gruplarına karşılık gelen kaotik bantların geometrisini değiştirmesinden (daraltma ve birbirine yakınlaştırma gibi) dolayı elde edilen sonucun etkilendiği sonucuna varılmıştır. Bu senaryoların ölçeklenme ilişkileri arasında görülen uyum ile standart durum için tespit edilen ölçeklenme ilişkilerinin, lojistik map ile aynı evrensellik sınıfında yer alan sistemler için geçerli olduğu sonucuna varılabilir. Bulunan bu ölçeklenmeler ile matematiksel bir model olan lojistik map ile aynı korelasyon ve faz uzayında fraktallık özelliği gösteren sentetik yada doğal sistemlerde gözlenen q -Gaussiyen dağılımların ortaya çıkış mekanizmasının araştırılmasına ön ayak olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Afsar, O.** and **Tirnakli, U.**, 2013, Generalized Huberman-Rudnick scaling law and robustness of q-Gaussian probability distributions., *EPL*, 101, 20003p.
- Afsar, O.** and **Tirnakli, U.**, 2014, Relationships and scaling laws among correlation, fractality, Lyapunov divergence and q-Gaussian distributions, *Physica D*, 272, 18p.
- Beck, C.**, 1990, Brownian motion from deterministic dynamics, *Physica A*, 169, 324p.
- Beck, C.** and **Roepstorff, G.**, 1987, From dynamical systems to the Langevin equation, *Physica A*, 145,1p.
- Billingsley, P.**, 1968, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York.
- Cetin, K., Afsar, O.** and **Tirnakli, U.**, 2015, Limit behaviour and scaling relations of two kinds of noisy logistic maps in vicinity of chaos threshold and their robustness, *Physica A* (in press).
- Curado, E.M.F.** and **Tsallis, C.**, 1991, Generalized Statistical-Mechanics Connection with Thermodynamics, *J. Phys. A*, 24, L:69.
- Feigenbaum, M.**, 1979, The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations, *J. Stat. Phys.*, 21, 669p.
- Gao, J.B, Hwang, S.K.** and **Liu, J.M**, 1999, When can noise induce chaos?, *Phys. Rev. Lett.*, 82, 1232p.
- Grassberger, P.** and **Procaccia, I.**, 1983, Characterization of Strange Attractors, *Physical Review Lett.*, 50, 346p.
- Gutierrez, J.M., Iglesias, A.** and **Rogrigues, M.A.**, 1993, Logistic map driven by dichotomous noise, *Phys. Rev. E*, 48, 2507p.
- Hahn, M.G., Jiang, X.X.** and **Umarov, S.**, 2010, On q-Gaussians and exchangeability, *J. Phys. A*, 43, 165208p.
- Hilborn, R.C.**, 2000, *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press, New York.
- Huberman, B.A.** and **Rudnick, J.**, 1980, Scaling behavior of chaotic flows, *Phys. Rev. Lett*, 45, 154p.
- Kac, M.**, 1946, On the distribution of values of sums of the $\sum f(2kt)$, *Ann. Math.*, 47, 33p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Kampen, N.G.V.**, 1981, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland, Amsterdam.
- Lindeberg, J.W.**, 1922, Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Z.*, 15, 211p.
- Mackey, M.C. and Tyran-Kaminska, M.**, 2006, Deterministic brownian motion: The effects of perturbing a dynamical system by a chaotic semi dynamical system, *Phys. Rep.*, 422, 167p.
- Morales, J.J. and Nuevo, M.J.**, 1993, Physical Meaning of the Time Correlation Length Obtained in a Computer Simulation, *Phys. Rev. E*, 48(2), 1550p.
- Nelson, K.P. and Umarov, S.**, 2010, Nonlinear statistical coupling, *Physica A*, 389, 2157p.
- Pluchino, A., Rapisarda, A. and Tsallis, C.**, 2013, Noise, synchrony and correlations at the edge of chaos, *Phys. Rev. E*, 87, 022910p.
- Polya, G.**, 1920, Ueber den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem, *Math. Z.*, 8, 171p.
- Teramae, J. and Kuramoto, Y.**, 2001, Strong desynchronizing effects of weak noise in globally coupled systems, *Phys. Rev. E*, 63, 036210p.
- Tirnakli, U., Beck, C. and Tsallis, C.**, 2007, Central limit behavior of deterministic dynamical systems, *Phys. Rev. E*, 75, 040106(R).
- Tirnakli, U., Beck, C. and Tsallis, C.**, 2009, A closer look at time averages of the logistic map at the edge of chaos, *Phys. Rev. E*, 79, 056209(R).
- Tsallis, C.**, 1988, Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, *J. Stat. Phys.*, 52, 479p.
- Tsallis, C., Mendez, R.S. and Plastino, A.R.**, 1998, The role of constraints within generalized nonextensive statistics, *Physica A*, 261, 534p.
- Tsallis, C.**, 2009, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics Approaching a Complex World*, Springer, New York.
- Umarov, S. and Tsallis, C.**, 2008, On a representation of the inverse Fq-transform, *Phys. Lett. A*, 372, 4874p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Umarov, S., Tsallis, C. and Steinberg, S.**, 2008, On a q -central limit theorem consistent with nonextensive statistical mechanics, *Milan J. Math.*, 76, 307p.
- Umarov, S., Tsallis, C., Gell-Mann, M. and Steinberg, S.**, 2010, Generalization of symmetric α -stable Lévy distributions for $q > 1$, *J. Math. Phys.*, 51, 033502.
- Vignat, C. and Plastino, A.**, 2007, Central limit theorem and deformed exponentials, *J. Phys. A*, 40, F:969.

ÖZGEÇMİŞ

Ad, Soyadı: Kıvanç ÇETİN

Doğum Tarihi: 15.06.1989

Doğum Yeri : İzmir

Öğrenim Durumu:

Lisans: Ege Üniversitesi Fizik Bölümü (2006-2011)

Yüksek Lisans: Ege Üniversitesi Fizik Bölümü (2011-)

Yayınlar:

Kıvanç Çetin, Özgür Afsar, Uğur Tırnaklı, Limit behaviour and scaling relations of two kinds of noisy logistic maps in vicinity of chaos threshold and their robustness, *Physica A*, 2015 (in press).