

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DÜZENLİLEŞTİRME YÖNTEMLERİNİN BİLGİSAYARLI TOMOGRAFİ
GÖRÜNTÜLERİNE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Cansu ALKAN

MART 2024

TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**DÜZENLİLEŞTİRME YÖNTEMLERİNİN BİLGİSAYARLI TOMOGRAFİ
GÖRÜNTÜLERİNE UYGULANMASI**

Cansu ALKAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"BİLGİSAYAR YÜKSEK MÜHENDİSİ"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16 / 02 / 2024

Tezin Savunma Tarihi : 20/ 03 / 2024

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Bekir DİZDAROĞLU

Trabzon 2024

ÖNSÖZ

“Düzenlileştirme Yöntemlerinin Bilgisayarlı Tomografi Görüntülerine Uygulanması” isimli bu tez Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Bilgisayar Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Yüksek Lisans Programı’nda hazırlanmıştır.

Tez çalışmam boyunca hiçbir desteğini esirgemeyen ve bilim insanı olma yolundaki ilk adımlarımı atarken kıymetli bilgileriyle ve tecrübesiyle yolumu aydınlatan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Bekir DİZDAROĞLU’na teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak, doğduğum günden itibaren her zaman yanımda olan, beni hep destekleyen annem Ayfer Feray ALKAN ve babam Musa ALKAN’a, kardeşlerim Canan YAKARIŞIK ve Caner ALKAN’a teşekkür eder, minnettarlığımı sunarım.

Bu tez çalışmasının bundan sonraki çalışmalara katkı sağlamasını temenni ederim.

Cansu ALKAN

Trabzon 2024

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Düzenleştirme Yöntemlerinin Bilgisayarlı Tomografi Görüntülerine Uygulanması” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Bekir DİZDAROĞLU’nun sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 20/03/2024

Cansu ALKAN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IX
TABLolar DİZİNİ.....	XI
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Sayısal Görüntü İşleme	2
1.3. Sayısal Görüntüde Bulanıklık	3
1.3.1. Nokta Yayılma Fonksiyonu (PSF).....	3
1.3.2. Gürültü	4
1.3.3. Sınır Koşulları	4
1.3.4. Bulanıklık Matrisi	6
1.4. Fourier Dönüşümü (FT)	11
1.4.1. Ayırık Fourier Dönüşümü (DFT).....	12
1.4.2. Hızlı Fourier Dönüşümü	12
1.5. Ayırık Kosinüs Dönüşümü (DCT)	13
1.6. BCCB Matrisi.....	14
1.7. BTTB + BTHB + BHTB + BHHB Matrisleri.....	15
1.8. Kronecker Çarpım Matrisleri	16
1.9. Spektral Süzgeçleme	17
1.10. Düzenleştirme Yöntemleri	18
1.10.1. Tikhonov Düzenleştirme Yöntemi.....	19
1.10.2. Toplam Varyasyon Düzenleştirmesi.....	21
1.11. Bilgisayarlı Tomografi	22
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR BULGULAR VE İRDELEME.....	23
2.1. Literatür Çalışması	23
2.2. Yapılan Çalışmalar	26
2.2.1. Genel Tikhonov Düzenleştirme Yöntemi	28
2.2.2. Renkli Görüntülerde Düzenleştirme İşlemi	29

2.2.3. Düzenleştirme Yönteminin Bilgisayarlı Tomografi Görüntülerine Uygulanması	35
3. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	42
4. ÖNERİLER.....	43
5. KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	



Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

DÜZENLİLEŞTİRME YÖNTEMLERİNİN BİLGİSAYARLI TOMOGRAFİ GÖRÜNTÜLERİNE UYGULANMASI

Cansu ALKAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Bekir DİZDAROĞLU
2024, 47 Sayfa

Tıbbi görüntülemede, bilgisayarlı tomografi görüntülerinin (BT) bulanıklığını gidermek oldukça önemlidir. BT görüntüleri bulanık olduğunda, önemli ayrıntılar gizlenebilir ve doğru teşhis engellenebilir. X-ışınları kullanılarak elde edilen BT görüntüleri kesit dilimleri halinde yeniden yapılandırılırken, hareket artefaktları, donanım ve yazılım sorunları nedeniyle bulanıklaşabilir. Oluşan bu bulanıklık nedeniyle radyologların görüntüyü yorumlaması zorlaşır. Yapılan bu çalışmada bu görüntülerin bulanıklığını gidermek için, Hızlı Fourier Dönüşümü (FFT) ile BT görüntüler frekans bölgesine geçirilmiştir. Bu işlemle, görüntü zaman bölgesinden frekans bölgesine aktarılmıştır. Bu sayede görüntünün frekans bileşenleri elde edilmiştir. Genel Tikhonov yöntemi ise gürültülü veya eksik verilere sahip BT görüntülerinin iyileştirilmesini sağlamıştır. Bu sayede görüntü hakkındaki ön bilgiler (örneğin, pürüzsüzlük gibi) dahil edilerek, geri yüklenen görüntünün kalitesi artırılmıştır. Görüntüye, Laplace süzgeci uygulandığında, görüntüdeki kenarlar ve keskin geçişler vurgulanmıştır. Bu çalışmada Hızlı Fourier dönüşümüne dayalı Genel Tikhonov yönteminde daha büyük boyutlu Laplace süzgeci kullanan bir yöntem önerilmiştir. Önerilen yöntem literatürdeki benzer yöntemlerle karşılaştırılmış ve yöntemin etkili sonuçlar ürettiği görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Bilgisayarlı Tomografi Görüntüsü; Bulanıklaştırma; Gürültü; Bulanıklık Giderme; Tekil Değer Ayırıştırması; Genel Tikhonov Yöntemi; Hızlı Fourier Dönüşümü

Master Thesis

SUMMARY

APPLICATION OF REGULARIZATION METHODS TO COMPUTED TOMOGRAPHY IMAGES

Cansu ALKAN

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Computer Engineering Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Bekir DİZDAROĞLU
2024, 47 Pages

In medical imaging, deblurring computed tomography (CT) images is very important. When CT images are blurred, important details can be obscured, and accurate diagnosis can be hindered. As CT images obtained using X-rays are reconstructed into slices, they can become blurred due to motion artifacts, hardware, and software problems. This blurring makes it difficult for radiologists to interpret the image. In this study, to remove the blurring of these images, the Fast Fourier Transform (FFT) was used to transform the CT images into the frequency domain. With this process, the image is transferred from the time domain to the frequency domain. In this way, the frequency components of the image were obtained. The General Tikhonov method is used to enhance CT images with noisy or missing data. This improves the quality of the restored image by incorporating prior information about the image (e.g., smoothness). When Laplace filtering was applied to the image, edges and sharp transitions in the image were emphasized. In this study, we propose a method that utilizes a larger size Laplace filter in the General Tikhonov method based on the Fast Fourier transform. The proposed method is compared with similar methods in the literature, and it is shown that the method produces effective results.

Key Words: Computed Tomography Image (CT); Blurring; Noise; Deblurring; Singular Value Decomposition; General Tikhonov Method; Fast Fourier Transform.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. Sayısal görüntü işleme seviyeleri (Çayıroğlu, 2022)	2
Şekil 2. (a) BT test görüntüsü, (b) Bulanıklık ve beyaz Gauss gürültüsü ilave edilmiş BT görüntüsü	4
Şekil 3. VTve U matrisleri sırasıyla ters döndürme ve döndürme işlemlerini ve Σ matrisi ise ölçekleme işlemini temsil etmektedir (Strang, 2019)	7
Şekil 4. Renkli test görüntüsü Barbara için en küçük kareler yöntemini uygulanması: a) Özgün görüntü, b) PSF fonksiyonu, c) Yapay olarak bulanıklık ve beyaz Gauss gürültü eklenmiş görüntü ve d) Sonuç görüntüsü	27
Şekil 5. Renkli test görüntüleri: a) Barbara, b) Peppers ve c) Lena	31
Şekil 6. Barbara test görüntüsü için elde edilen düzenlileştirme sonuçları: a) Yapay olarak bulanıklık ($\sigma = 3$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 50$) eklenmiş görüntü, b) Tikhonov FFT yöntemi, c) TSVD FFT yöntemi, d) Tikhonov ayrılabilir süzgeç yöntemi, e) Genel Tikhonov FFT yöntemi (P_1 matrisine göre) ve f) Önerilen yöntem (P_2 matrisine göre)	32
Şekil 7. Peppers test görüntüsü için elde edilen düzenlileştirme sonuçları: a) Yapay olarak bulanıklık ($\sigma = 3$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 50$) eklenmiş görüntü, b) Tikhonov FFT yöntemi, c) TSVD FFT yöntemi, d) Tikhonov ayrılabilir süzgeç yöntemi, e) Genel Tikhonov FFT yöntemi (P_1 matrisine göre) ve f) Önerilen yöntem (P_2 matrisine göre)	33
Şekil 8. Lena test görüntüsü için elde edilen düzenlileştirme sonuçları: a) Yapay olarak bulanıklık ($\sigma = 3$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 50$) eklenmiş görüntü, b) Tikhonov FFT yöntemi, c) TSVD FFT yöntemi, d) Tikhonov ayrılabilir süzgeç yöntemi, e) Genel Tikhonov FFT yöntemi (P_1 matrisine göre) ve f) Önerilen yöntem (P_2 matrisine göre)	34
Şekil 9. BT test görüntüleri: a) Göğüs ve c) Akciğer	36
Şekil 10. Göğüs BT test görüntüsü için elde edilen düzenlileştirme sonuçları: a) Yapay olarak bulanıklık ($\sigma = 3$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 10$) eklenmiş görüntü, b) Tikhonov FFT yöntemi, c) TSVD FFT yöntemi, d) Tikhonov ayrılabilir süzgeç yöntemi, e) Genel Tikhonov FFT yöntemi (P_1 matrisine göre) ve f) Önerilen yöntem (P_2 matrisine göre)	37
Şekil 11. Akciğer BT test görüntüsü için elde edilen düzenlileştirme sonuçları: a) Yapay olarak bulanıklık ($\sigma = 3$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 10$) eklenmiş görüntü, b) Tikhonov FFT yöntemi, c) TSVD FFT yöntemi, d) Tikhonov ayrılabilir süzgeç yöntemi, e) Genel Tikhonov FFT yöntemi (P_1 matrisine göre) ve f) Önerilen yöntem (P_2 matrisine göre)	38
Şekil 12. Göğüs BT test görüntüsü için elde edilen düzenlileştirme sonuçları: a) Yapay olarak bulanıklık ($\sigma = 5$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 20$)	

eklenmiş görüntü, b) Tikhonov FFT yöntemi, c) TSVD FFT yöntemi, d) Tikhonov ayrılabilir süzgeç yöntemi, e) Genel Tikhonov FFT yöntemi (P_1 matrisine göre) ve f) Önerilen yöntem (P_2 matrisine göre) 39

Şekil 13. Akciğer BT test görüntüsü için elde edilen düzenlileştirme sonuçları: a) Yapay olarak bulanıklık ($\sigma = 5$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 20$) eklenmiş görüntü, b) Tikhonov FFT yöntemi, c) TSVD FFT yöntemi, d) Tikhonov ayrılabilir süzgeç yöntemi, e) Genel Tikhonov FFT yöntemi (P_1 matrisine göre) ve f) Önerilen yöntem (P_2 matrisine göre) 40



TABLÖLAR DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1. Bulanıklık ($\sigma = 3$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 50$) ilave edilmiş Barbara (B), Peppers (P) ve Lena (L) test görüntüleri için yöntemlere ait sonuçlar ve program kod parçalarının çalışma süreleri	35
Tablo 2. Bulanıklık ($\sigma = 3$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 10$) ilave edilmiş Göğüs (G) ve Akciğer (A) BT test görüntüleri için yöntemlere ait sonuçlar	41
Tablo 3. Bulanıklık ($\sigma = 5$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 20$) ilave edilmiş Göğüs (G) ve Akciğer (A) BT test görüntüleri için yöntemlere ait sonuçlar	41

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A	: Bulanıklık Matrisi
X	: Görüntü
U	: Dikgen Matris
V	: Dikgen Matris
Σ	: Köşegen Matris
$\otimes$	: Kronecker Çarpım
BTTB	: Köşegen Matris
Δ	: Blok Toeplitz Toeplitz Blok Matris
BCCB	: Blok Dolanır Dolanır Blok Matris
FFT	: Hızlı Fourier Dönüşümü
FT	: Fourier Dönüşümü
PSF	: Nokta Yayılma Fonksiyonu
SVD	: Tekil Değer Ayrıştırması
DFT	: Ayrık Fourier Dönüşümü
DCT	: Ayrık Kosinüs Dönüşümü
TSVD	: Tam Ters Dönüşüm Yöntemi
CT	: Bilgisayarlı Tomografi
CAT	: Bilgisayarlı Eksenel Tomografi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bilgisayarlı tomografi görüntüleri, vücudun ayrıntılı kesitsel görüntülerini sağlayarak radyologlar ve doktorlar için vücudun iç yapısı hakkında bilgi edinmesine imkân sağlar. Bilgisayarlı tomografi görüntüleri yaralanmalar, hastalıklar, kanserler gibi çeşitli hastalıkların teşhisine yardımcı olur. Yapıların, şekil, doku, yoğunluk gibi özelliklerini ortaya çıkararak eğer anormallik var ise bu durumun ortaya çıkmasında doktorlara yardımcı olurlar. Oluşan bu görüntüler yeniden yapılandırılırken, hareket artefaktları, donanım ve yazılım sorunları nedeniyle bulanıklaşabilir ve gürültü eklenebilir. Oluşan bulanık tomografi görüntülerle teşhis koymak sorun oluşturabilir. Bu nedenle bu görüntülerde bulanıklığı gidermek oldukça önemlidir. Bulanıklığı giderilmiş bilgisayarlı tomografi görüntüsü ile ince yapılar ortaya çıkar ve radyologların teşhis koymasını kolaylaştırır, yine bu görüntülerle daha keskin daha net görüntüler elde edildiğinden daha iyi teşhis koyulur, cerrahi müdahaleler kolaylaşır.

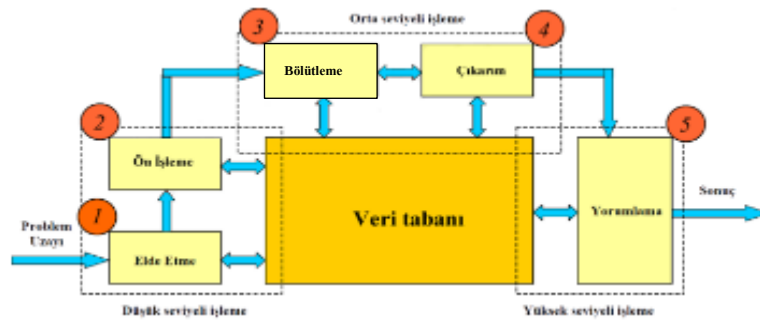
Bu çalışmada bilgisayarlı tomografi görüntülerinde bulanıklık ve gürültü gibi istenmeyen etkileri azaltmak/ yok etmek için FFT algoritmasına bağlı Genel Tikhonov Düzenileştirme yöntemi önerilmiştir. Tikhonov düzenileştirmesi frekans bölgesinde uygulanabilir ve daha büyük boyutlu Laplace süzgeci kullanarak yapısal bilgiyi koruyabilir.

Laplace süzgeci, genellikle kenar tespiti veya yapısalılık vurgulama gibi görüntü işleme uygulamalarında kullanılan bir süzgeç türüdür. Büyük boyutlu Laplace süzgeci, daha geniş bir alanı etkileyerek daha fazla yapısal bilgiyi koruyabilir. Bu süzgecin kullanılması, Tikhonov düzenileştirmesi sırasında yapısal bilginin korunmasını sağlayabilir ve bulanıklık giderme işleminin daha iyi sonuçlar vermesine yardımcı olabilir.

Önerilen yöntem, frekans bölgesindeki çözümlerde büyük boyutlu Laplace süzgecinin kullanılmasıyla birlikte Tikhonov düzenileştirmesinin entegrasyonunu içerir. Bu yaklaşım, görüntüdeki yapısal bilgiyi korurken gürültüyü azaltmaya ve bulanıklığı gidermeye yardımcı olmuştur.

1.2. Sayısal Görüntü İşleme

Analog ya da sürekli bir görüntü 2-boyutlu $f(x, y)$ fonksiyonu olarak tanımlanabilir; x , y değerleri ise bu görüntünün uzamsal koordinatlarıdır. Herhangi x , y koordinat çiftindeki f 'nin genliği, yoğunluk ya da görüntünün o noktadaki gri seviyesi olarak adlandırılır. Uzamsal koordinatlar, görüntü elemanı ya da kısaca piksel olarak adlandırılır. Analog görüntülerdeki gibi, sayısal görüntüler de belirli uzamsal koordinatları ve değeri olan, belli sayıdaki elemanlardan oluşur. Bu elemanlara da görüntü ögesi ya da piksel denir (Gonzalez ve Woods, 2018). Sayısal görüntü, m , n uzamsal koordinatları göstermek üzere, $f[m, n]$ 'nin yoğunluk değeri sonlu ve ayrık olduğunda oluşur. Bu bağlamda sayısal görüntü işleme alanı, sayısal görüntülerin sayısal bilgisayarla işlenmesidir (Gonzalez ve Woods, 2018). Sayısal görüntü işleme üç ayrı süreçten oluşur; bu süreçler, düşük, orta ve yüksek seviye şeklinde tanımlanabilir (Bakınız Şekil 1). Düşük seviyeli işlem, gürültüyü azaltma amacıyla görüntü ön işleme, kontrast iyileştirme ve görüntü keskinleştirme gibi temel işlemleri içerir. Bu seviyede girdiler ve çıktılar görüntü olarak temsil edilir. Orta seviyeli görüntü işleme, bölütleme (segmentasyon, bir görüntünün bölgelere ve nesnelere bölünmesi), nesnelerin, bilgisayar işlemesine uygun forma getirilerek tanımlanması (çıkartım) ve ayrık nesnelerin sınıflandırılması (tanıma) gibi görevler içerir. Bu seviyede, girdiler genellikle görüntüler olup, çıktılar ise bu görüntülerden çıkarılan niteliklerdir (örneğin, kenarlar, konturlar ve tekil nesnelerin kimliği gibi). Yüksek seviyeli işlem, görüntü analizinde olduğu gibi, tanınan nesneler topluluğunun "anlamlandırılmasını" ve normalde insan görüşüyle ilişkilendirilen bilişsel işlevleri yerine getirmeyi içerir (Gonzalez ve Woods, 2018).



Şekil 1. Sayısal görüntü işleme seviyeleri (Çayıroğlu, 2022)

1.3. Sayısal Görüntüde Bulanıklık

Sayısal bir görüntü, oluşturulma aşamasında, birçok istenmeyen nedenden dolayı, başarısız bir şekilde üretilebilir. Görüntü oluşturulurken, fiziksel veya mekanik aşamada meydana gelen görüntüdeki bulanıklık, doğrusal bir matematiksel modelle tanımlanır. Burada, bulanık görüntülere, nesne hareketinden dolayı veya kamera lensinin odaklanmaması nedeni ile oluşan görüntüler örnek verilebilir (Hansen, Nagy ve O’Leary, 2006). Bu çalışmada bulanıklık ve beyaz Gauss gürültüsü içeren girdi görüntülerinin iyileştirilmesi için etkili bir yöntem önerilmiştir.

Gri tonlamalı bir görüntü, $m \times n$ boyutlarında 2-boyutlu bir dizi olarak tanımlanabilir. Bu görüntüde yer alan pikseller ise, ışık yoğunluğunu temsil eder. Kaydedilen bulanıklık içeren görüntü $\mathbf{B}$ matrisi ile temsil edilirse, bu görüntünün vektörel temsili $\mathbf{b} = \text{vec}(\mathbf{B})$ olarak verilebilir (Hansen ve diğerleri, 2006).

İdeal görüntü, kaydedilen görüntüde bulanıklık ve gürültünün olmadığı görüntü olarak göz önüne alınabilir. Kaydedilen görüntü ile aynı boyutta olan ideal görüntü, $\mathbf{X}$ ile temsil edilirse, kaydedilen görüntü ile ideal görüntü arasındaki ilişki,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (1)$$

şeklinde temsil edilir. $\mathbf{A}$ matrisi kaydedilen görüntüdeki bulanıklığı temsil eder. $\mathbf{A}$ bulanıklık matrisi, PSF (Point Spread Function) -her bir pikselin bulanıklaşma nedeni- ve sınır koşullarına (görüntünün hemen dışında kalan alandaki varsayıma) bağlıdır, boyutu $N \times N$ ve $N = m \times n$ ‘dir (Hansen ve diğerleri, 2006).

1.3.1. Nokta Yayılma Fonksiyonu (PSF)

PSF, görüntünün kaydedilmesi sırasında tek bir parlak pikselin komşu piksellere yayılması ile oluşan işlemin bir fonksiyonudur (Hansen ve diğerleri, 2006). PSF, optikte yer alan kusurlara yanıt olarak herhangi bir nesneye eklenen bulanıklık miktarının ölçüsünü verir (URL-1, 2022).

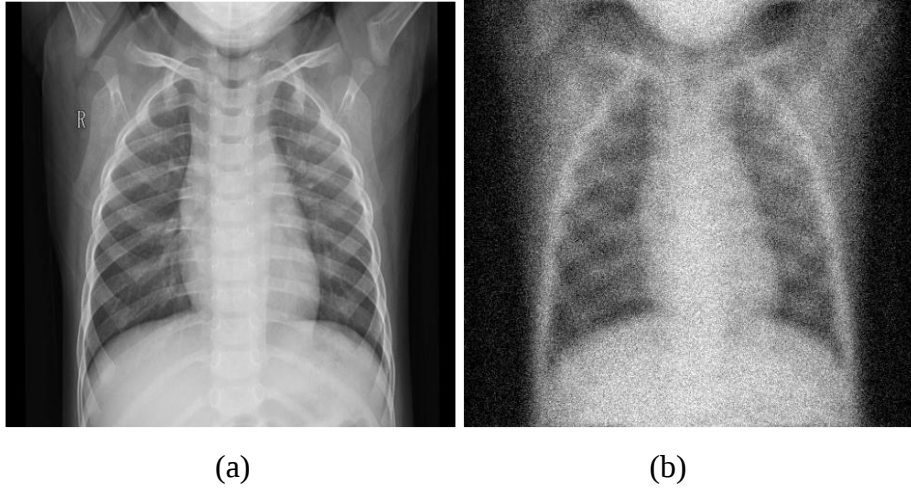
PSF, görüntüde yer alan noktaların nasıl bulanıklaştığını ortaya çıkarır (URL-2, 2022).

1.3.2. Gürültü

Gürültü, kaydedilen görüntüde ortaya çıkan istenmeyen etkilerdir, görüntülerde tanecik olarak gözükür ve görüntünün kalitesini düşürür. Gürültü, kaydedilen görüntünün gerçek piksel değerleri yerine, görüntünün farklı değerlerde piksellere sahip olmasına neden olur. Sayısal görüntülerdeki başlıca gürültü kaynaklarına, görüntüleme sensörü, görüntü alımı esnasındaki çevresel faktörler, yeterli olmayan ışık miktarı, sensör sıcaklığı örnek gösterilebilir (Verma ve Ali, 2013). Bulanıklığa ek olarak, görüntüler gürültüden de etkilenir. Gürültüler birçok kaynaktan ortaya çıktığı gibi, doğrusal, doğrusal olmayan, çarpımsal ve toplamsal türlerde olabilir (Hansen ve diğerleri, 2006). Görüntüye gürültü eklendiğinde, görüntünün bit, piksel ya da görselinde bozulmalar ve görüntüde veri kayıpları olur (Bovik, 2000). Rastgele gürültüler genelde dedektör hassasiyetinden, çevresel nedenlerden, radyasyonun doğasından, iletim ya da nicemleme hatalarından kaynaklanır (Li ve Fan, 2018). Bu çalışmada toplamsal gürültü ile çalışılacağından,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{tam}} + \mathbf{E} \quad (2)$$

olarak ifade edilir. Burada $\mathbf{E}$, $m \times n$ boyutlarında bir dizidir (Hansen ve diğerleri, 2006).



Şekil 2. (a) BT test görüntüsü, (b) Bulanıklık ve beyaz Gauss gürültüsü ilave edilmiş BT görüntüsü

1.3.3. Sınır Koşulları

Bulanık görüntüdeki her bir piksel, orijinal görüntüde karşılık gelen pikselin ve komşularının ağırlıklı toplamı ya da ortalaması ile hesaplanır. Görüntü sınırlarındaki

pikseller de ağırlıklı toplam ile hesaplanacağından bazıları görüş alanı dışında kalabilir. Görüntü bulanıklığı giderme işleminde, sınır koşulu dikkate alınmazsa, yeniden yapılandırılmış görüntünün sınırlarında istenmeyen yapay bozukluklar oluşabilir (Hansen ve diğerleri, 2006).

- Sıfır Sınır Koşulu

Sıfır sınır koşulunda, sınır dışında kalan tüm alanlar siyah piksel değerini almaktadır. A , bulanıklık matrisi oluşumunda sınır koşulu göz ardı edilirse, sıfır sınır koşulu kabul edilmiş olur. Astronomik görüntülerde sıfır sınır koşulu iyi bir seçim olabilir. Görüntü kenarı dışında kalan alana sıfır sınır koşulu uygulanıp, daha sonra görüntü yeniden yapılandırıldığında eğer görüntü kenarlarında halka (ring) oluşursa, bunun nedeni görüntü sınırı dışındaki alanın siyah olmamasından kaynaklanmaktadır denir. Diğer bir ifadeyle, görüntü sınırı içindeki pikselle, görüntü sınırı dışındaki piksel arasında büyük değer farklılıkları olmasından kaynaklı halkalanma oluşur (Hansen ve diğerleri, 2006). Bu sınır koşulu uygulanarak oluşturulan bulanıklık matrisi eğer tek boyutlu ise Toeplitz matrisi, eğer iki boyutlu ise BTTB (Blok Toeplitz Toeplitz Blok) matrisi olarak adlandırılır (Ng, Chan ve Tang, 1999).

$$\mathbf{X}_{ideal} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

- Periyodik Sınır Koşulu

Periyodik sınır koşulunda, görüntü ($\mathbf{X}$) kendini tüm durumlarda tekrar eder. Bu durumda A bulanıklık matrisi, BCCB (Blok Dolanır-Dolanır Blok) matrisi olarak adlandırılır (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$\mathbf{X}_{ideal} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X} & \mathbf{X} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X} & \mathbf{X} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \quad (4)$$

- Yansıyan Sınır Koşulu

Yansıyan sınır koşulunda, görüntü sınırı dışındaki alan, görüntü sınırı içindeki alanın ayna görüntüsüdür (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$\mathbf{X}_{ideal} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_x & \mathbf{X}_{ud} & \mathbf{X}_x \\ \mathbf{X}_{lr} & \mathbf{X} & \mathbf{X}_{lr} \\ \mathbf{X}_x & \mathbf{X}_{ud} & \mathbf{X}_x \end{bmatrix} \quad (5)$$

$\mathbf{X}_{lr} = \text{fliplr}(\mathbf{X})$ - dikey ekseninde, sol-sağ yönde çevrilmiş $\mathbf{X}$ sütunları

$\mathbf{X}_{ud} = \text{flipud}(\mathbf{X})$ - yatay ekseninde, yukarı-aşağı yönde çevrilmiş $\mathbf{X}$ satırları

$\mathbf{X}_x = \text{fliplr}(\mathbf{X}_{ud})$ - dikey ekseninde, sol-sağ yönde çevrilmiş $\mathbf{X}_{ud}$ sütunları

1.3.4. Bulanıklık Matrisi

Kaydedilen görüntü ve ideal görüntü arasındaki ilişki,

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (6)$$

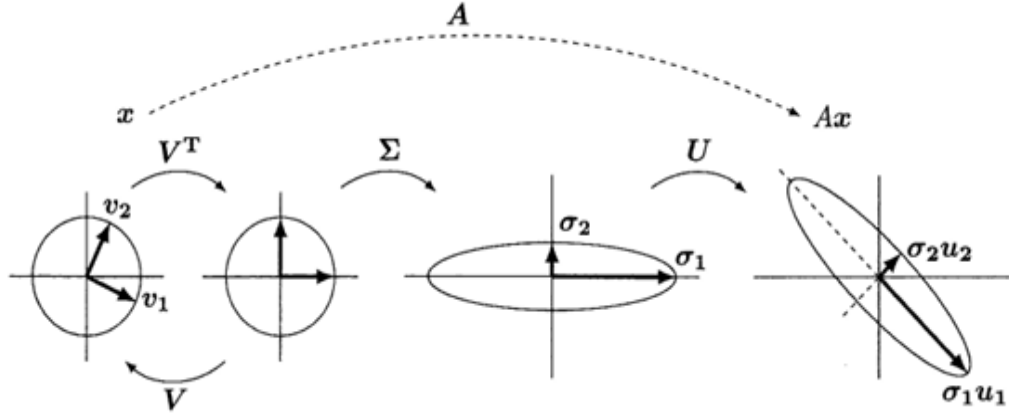
doğrusal model ile tanımlanır (Hansen ve diğerleri, 2006). Ayrık ortamda, $\mathbf{x}$ vektörü, sınırlı alandaki ideal (bilinmeyen) görüntünün piksel değerlerini içerir. $\mathbf{A}$ matrisi, ortaya çıkan görüntüdeki bozulmayı gösterir ve $\mathbf{e}$ ise toplamsal gürültüdür. Ayrık problemi temsil eden (6)'da verilen denklemdeki matematiksel model, genelde kötü konumlanmış (ill-posed) olarak ifade edilir. Diğer bir ifadeyle, tekil değerleri sıfıra yaklaşan $\mathbf{A}$ matrisi kötü koşullandırılmıştır denilir. Ayrıca $\mathbf{A}$ matrisi, PSF ve uygulanan sınır koşuluna bağlıdır (Fan ve Nagy, 2011).

Bu çalışmada, bulanıklık giderme algoritmaları olarak, $\mathbf{A}$ bulanıklık matrisinin dikgen veya üniter ayrıştırmaları kullanılacaktır.

$\mathbf{A}$, $R^{m \times n}$ boyutlarındaki bulanıklık matrisinin tekil değer ayrıştırması (SVD), aynı zamanda en küçük kareler problemi için de kullanılan bir matris ayrıştırmasıdır. Bu tür matris ayrıştırma yöntemlerinin geçmişi bir asırdan fazla geriye gitmektedir. SVD, işaret ve görüntü işleme, kontrol teorisi, örüntü tanıma, zaman serisi analizi gibi birçok uygulama alanında kullanılır (Björck, 1996).

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (7)$$

eşitliğindeki tekil değer ayrıştırmasında, $\mathbf{U}$ ve $\mathbf{V}$ dikgen matris, $\mathbf{\Sigma}$ ise köşegen matristir. $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}_N$ ve $\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_N$ olmaktadır. $\mathbf{\Sigma}$ ise, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N > 0$ sıralı tekil değerlerine sahip köşegen bir matristir (Hansen ve diğerleri, 2006) (Bakınız Şekil 3).



Şekil 3. V^T ve U matrisleri sırasıyla ters döndürme ve döndürme işlemlerini ve Σ matrisi ise ölçekleme işlemini temsil etmektedir (Strang, 2019)

$$A = \tilde{U} \Lambda \tilde{U}^* \quad (8)$$

eşitliğindeki (üniter) spektral ayrıştırmasında, $\tilde{U}$ üniter matristir ve $\tilde{U} \tilde{U}^* = \tilde{U}^* \tilde{U} = I$ özelliği geçerlidir. Λ ise, A 'nın öz değerlerini içeren köşegen matristir. Herhangi bir matris için, SVD ayrıştırılması yapılabiliyorken; spektral ayrışım, sadece A matrisi normalse, yani $A A^* = A^* A$ ise hesaplanabilir. Eğer A gerçekte değerlere sahipse, SVD matrisindeki elemanların değeri gerçekte olur, fakat spektral ayrıştırmadaki değerler karmaşık da olabilir (Hansen ve diğerleri, 2006).

Uzamsal olarak değişmeyen görüntü bulanıklığı giderme sorunları için A bulanıklık matrisinin yapısı uygulanan sınır koşuluna bağlı olup, Toeplitz, Dolanır (Periyodik) ve Hankel matrislerini içerebilir (Hansen ve diğerleri, 2006).

Konvolüsyon, matematiksel bir işlem olup; ideal görüntü ile PSF konvolüsyona girerek bulanık görüntü elde edilir. Bulanık görüntüdeki her bir piksel, ideal görüntüde karşılık gelen piksel ve komşularının ağırlıklı toplamından elde edilir; ağırlıklar ise PSF dizisinin elemanları tarafından verilir. İdeal görüntü ve PSF dizisi tek boyutlu olarak yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ - \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ - \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} \quad (9)$$

vektörleri elde edilir. Burada w_i ve y_i değerleri gerçek görüntüdeki pikselleri temsil etmekte olup görüntü sınırının dışında kalan bölgeyi ifade eder. $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{p}$ 'nin konvolüsyonu ile $\mathbf{b}$ değeri hesaplanır.

Buradaki konvolüsyon, matris-vektör çarpımı olarak da yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & & & & \\ & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & & & \\ & & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & & \\ & & & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & \\ & & & & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ - \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ - \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

w_i ve y_i görüş alanı dışında olsalar da bulanık görüntüde gözlenen piksellere katkıda bulunur. Bu değerler bilinmediğinden, onları görüş alanı içindeki x_i pikselleriyle ilişkilendirmek için sınır koşulları kullanılır (Hansen ve diğerleri, 2006).

- Sıfır Sınır koşulunda;

Gerçek görüntünün dışında kalan $w_i = y_i = 0$ kabul edilir, (10) denklemi yeniden yazılırsa, girişleri her köşegende sabit olan Toeplitz matrisi elde edilir (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_3 & p_2 & p_1 & & \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \\ & & p_5 & p_4 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (11)$$

- Periyodik Sınır koşulunda;

Gerçek görüntünün $\mathbf{x}$ 'in periyodik kopyalarından oluştuğu varsayılır, $w_1 = x_4, w_2 = x_5, y_1 = x_1$ ve $y_2 = x_2$ kabul edilir, (10) denklemi bu bilgiler ile tekrardan oluşturulduğunda, Dolanır matris elde edilir (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} p_3 & p_2 & p_1 & & \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \\ & & p_5 & p_4 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & & p_5 & p_4 \\ & & & p_5 & \\ p_1 & & & & \\ p_2 & p_1 & & & \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_3 & p_2 & p_1 & p_5 & p_4 \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_5 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_5 & p_4 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

- Yansıyan Sınır koşulunda;

Görüş alanının dışındaki gerçek görüntünün, görüş alanı içindeki görüntünün aynadaki yansıması olduğu varsayılır. $w_1 = x_2, w_2 = x_1, y_1 = x_5$ ve $y_2 = x_4$ olarak kabul edilir, (10) denklemi tekrardan oluşturulduğunda, Toeplitz + Hankel matrisi elde edilir (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} p_3 & p_2 & p_1 & & \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \\ & & p_5 & p_4 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_4 & p_5 & & & \\ p_5 & & & & \\ & & & p_1 & \\ & & & p_2 & \\ & & p_1 & p_2 & \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_3 + p_4 & p_2 + p_5 & p_1 & & \\ p_4 + p_5 & p_3 & p_2 & p_1 & \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 + p_1 \\ & & p_5 & p_4 + p_1 & p_3 + p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

2-boyutlu görüntülerin konvolüsyon işlemi 1-boyutlu durum ile benzerdir. $\mathbf{B} (i, j)$, PSF dizisi 180° döndürüldükten sonra PSF dizisinin merkezi, $\mathbf{X} (i, j)$ üzerine yerleştirilerek eşleşen değerler çarpılır.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \\ b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left| \begin{array}{ccc} p_{22} & p_{12} & \\ p_{32} & p_{22} & p_{12} \\ & p_{32} & p_{22} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} p_{21} & p_{11} & \\ p_{31} & p_{21} & p_{11} \\ & p_{31} & p_{21} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{ccc} p_{23} & p_{13} & \\ p_{33} & p_{23} & p_{13} \\ & p_{33} & p_{23} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} p_{22} & p_{12} & \\ p_{32} & p_{22} & p_{12} \\ & p_{32} & p_{22} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} p_{21} & p_{11} & \\ p_{31} & p_{21} & p_{11} \\ & p_{31} & p_{21} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{ccc} & & \\ p_{23} & p_{13} & \\ p_{33} & p_{23} & p_{13} \\ & p_{33} & p_{23} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} p_{22} & p_{12} & \\ p_{32} & p_{22} & p_{12} \\ & p_{32} & p_{22} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Sıfır Sınır koşulu ile (15)'teki BTTB matrisi elde edilir (Hansen ve diğerleri, 2006).

Bazı durumlarda bulanıklığın yatay ve dikey bileşenleri ayrıştırılabilir.

$$\mathbf{P} = \mathbf{c} \mathbf{r}^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

$m \times n$ boyutlarındaki $\mathbf{P}$, PSF dizisi yatay ve dikey şekilde ayrıştırıldığında; $\mathbf{r}$, bulanıklığın yatay bileşenlerini ve $\mathbf{c}$ de dikey bileşenlerini temsil eder (Hansen ve diğerleri, 2006).

$\mathbf{A}$ bulanıklık matrisi de yatay ve dikey olarak ayrıştırıldığında, girişleri $a_{ij}^{(r)}$ olan $m \times m$ boyutundaki $\mathbf{A}_c$ matrisi ve $n \times n$ boyutundaki $\mathbf{A}_r$ matrisi oluşur. $\mathbf{A}_r$ ve $\mathbf{A}_c$ arasındaki $\otimes$ işlemine Kronocker çarpımı denir.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_r \otimes \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} a_{11}^{(r)} \mathbf{A}_c & a_{12}^{(r)} \mathbf{A}_c & \dots & a_{1n}^{(r)} \mathbf{A}_c \\ a_{21}^{(r)} \mathbf{A}_c & a_{22}^{(r)} \mathbf{A}_c & \dots & a_{2n}^{(r)} \mathbf{A}_c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(r)} \mathbf{A}_c & a_{n2}^{(r)} \mathbf{A}_c & \dots & a_{nn}^{(r)} \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \quad (17)$$

- Sıfır Sınır koşulunda, $\mathbf{A}_r$, $\mathbf{r}$ parametresine sahip Toeplitz matris ve $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{c}$ parametresine sahip Toeplitz matristir.
- Periyodik Sınır koşulunda, $\mathbf{A}_r$, $\mathbf{r}$ parametresine sahip Dolanır matris ve $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{c}$ parametresine sahip Dolanır matristir.
- Yansımali Sınır koşulunda, $\mathbf{A}_r$, $\mathbf{r}$ parametresine sahip Toeplitz + Hankel matris ve $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{c}$ parametresine sahip Toeplitz + Hankel matristir (Hansen ve diğeri, 2006).

1.4. Fourier Dönüşümü (FT)

Sinyalleri gözlemlemenin ve analiz etmenin geleneksel yolu, onları zaman bölgesinde temsil etmektir. Baron Jean Baptiste Fourier tarafından gerçek dünyada var olan herhangi bir dalga formunun farklı sinüzoidal dalgaları toplayarak temsil edilebileceğini (yani üretilebileceğini) gösterilmiştir. Bu sayede zaman bölgesindeki sinyaller sinüzoidal dalgalar cinsinden gösterilebilir. Fourier dönüşümü, sinyal işleme, görüntüyü yeniden yapılandırma gibi birçok alanda kullanılmaktadır (Sevgi, 2014).

Fourier analizi, verileri veya fonksiyonları zaman bölgesinden frekans bölgesine dönüştürür, veride veya fonksiyonda bulunan frekanslara ilişkin bilgi verebilir. Fourier serisi, zaman bölgesindeki periyodik bir işlevi, frekans bölgesindeki karşılık gelen ayrık değerlere dönüştürür; bu ayrık değerler Fourier katsayılarıdır. Buna karşılık, Fourier dönüşümü, zaman veya uzamsal bölgede periyodik olmayan ve sürekli bir fonksiyonu alır ve bunu frekans bölgesinde sonsuz ve sürekli bir fonksiyona dönüştürür (Lindfield ve Penny, 2019):

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t} dt \quad (18)$$

burada tek değişkenli $f(t)$ sürekli fonksiyonunun Fourier dönüşümü, μ frekans bölgesindeki parametre olmak üzere, $F(\mu)$ ile ifade edilmiştir. (Gonzalez ve Woods, 2018).

1.4.1. Ayırık Fourier Dönüşümü (DFT)

Fourier dönüşümünün sayısal ortamda hesaplanmasına Ayırık Fourier Dönüşümü (DFT) denir (Sevgi, 2014). Sürekli fonksiyonların bir bilgisayarda işlenmeden önce ayırık değerler dizisine dönüştürülmesi gerekir. Böylece Fourier dönüşümü, Ayırık Fourier Dönüşümü olarak ifade edilir (Gonzalez ve Woods, 2018)

Fourier dönüşümünün sayısal hesaplamasında üç zorluk vardır:

- Ayırıklaştırma (hem zaman hem de frekans bölgesinde periyodikliği ortaya çıkarır)
- Sayısal entegrasyon (yaklaşım, sayısal yuvarlama ve kesme ortaya çıkarır)
- Sınırlı zaman süresi (maksimum frekans ve çözünürlük sınırlamaları getirir) (Sevgi, 2014).

DFT ile frekans bölgesinde çalışma yapıp daha sonra da ters DFT ile tekrardan uzamsal bölgeye dönülebilir (Gonzalez ve Woods, 2018).

x_j bileşenlerinden oluşan n uzunluklu $\mathbf{x}$ vektörünün DFT 'si $\hat{\mathbf{x}}$ vektörüdür.

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n x_j e^{-2\pi i(j-1)(k-1)/n} \quad (19)$$

$\hat{t} = \sqrt{-1}$ olduğundan $\hat{\mathbf{x}}$ vektörünün ters DFT 'si $\mathbf{x}$ olur:

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \hat{x}_k e^{2\pi i(j-1)(k-1)/n} \quad (20)$$

Bir $\mathbf{X}$ dizisinin 2-boyutlu DFT'si, $\mathbf{X}$ 'in sütunlarının DFT'si ve ardından satırlarının DFT'si hesaplanarak elde edilebilir. 2-boyutlu ters DFT için de benzer yaklaşım kullanılabilir (Hansen ve diğerleri, 2006).

1.4.2. Hızlı Fourier Dönüşümü

Hızlı Fourier dönüşümü, sayısal bilgisayarlar aracılığıyla güç spektrum analizi ve süzgeç simülasyonu gibi işaret analizini kolaylaştıran bir hesaplama aracıdır. Bu yaklaşım, bir dizi veri örneğinin (zaman serisi olarak adlandırılır) ayırık Fourier dönüşümünü verimli bir şekilde hesaplamak için kullanılan yöntemdir (Rader ve Maling, 1967).

Genel amaçlı makinelerle çalışırken, DFT, hızlı bir Fourier dönüşümü (FFT) algoritması kullanılarak hesaplandığı, frekans bölgesi yöntemleri, kullanılan süzgeç boyutuna bağlı olarak uzamsal bölgede konvolüsyonla karşılaştırıldığında yüzlerce kat daha hızlı olabilir (Gonzalez ve Woods, 2018).

1.5. Ayrık Kosinüs Dönüşümü (DCT)

Ayrık kosinüs dönüşümü (DCT), değişen büyüklük ve frekanslardaki sinüzoidal dalgaların toplamı olarak bir görüntüyü temsil eder. DCT, tipik bir görüntü için, görüntüyle ilgili görsel olarak önemli bilgilerin çoğunu yalnızca birkaç katsayıda yoğunlaştırmıştır. Bu nedenle DCT, görüntü sıkıştırma uygulamalarında sıklıkla kullanılmaktadır (URL-5, 2022). DCT, yüksek sıkıştırma uygulamaları, iyi bilgi uyum yeteneği ve küçük bit hata oranı için kullanılabilen sayısal işaret/görüntü işleme için genel bir dikey dönüşümdür. Ayrık Fourier dönüşümüne benzer bir dönüşümdür. Sayısal işaret işlemede DCT, en yaygın doğrusal dönüşüm teknolojilerinden biri olarak kabul edilir. Görüntüyü farklı frekans bantlarına ayırır. Burada orta frekans bantları seçilir, çünkü bu bantlar en iyi görüntü parçalarına sahiptir (Bhattacharyya, Maulik ve Dutta, 2017).

x_j bileşenlerinden oluşan n uzunluklu $\mathbf{x}$ vektörünün DCT'si $\hat{\mathbf{x}}$ vektörüdür:

$$\hat{x}_k = \omega_k \sum_{j=1}^n x_j \cos \frac{\pi(2j-1)(k-1)}{2n} \quad (21)$$

$\omega = \sqrt{1/n}$ ve $\omega = \sqrt{2/n}$, $k = 2, \dots, n$ olduğunda, $\hat{\mathbf{x}}$ vektörünün ters DCT'si $\mathbf{x}$ olur,

$$x_j = \sum_{k=1}^n \omega_k \hat{x}_k \cos \frac{\pi(2j-1)(k-1)}{2n} \quad (22)$$

Bir $\mathbf{X}$ dizisinin 2-boyutlu DCT'si, $\mathbf{X}$ 'in sütunlarının DCT'si ve ardından satırların DCT'si hesaplanarak elde edilebilir. Ters 2-boyutlu DCT için benzer bir yaklaşım kullanılabilir (Hansen ve diğerleri, 2006).

1.6. BCCB Matrisi

Görüntü bulanıklığı giderilmesinde, uzamsal olarak değişmeyen BCCB matrisleri periyodik sınır koşulları kullanıldığında ortaya çıkar. 3x3 boyutlarında görüntü dikkate alındığında, BCCB matrisi oluşur (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \\ b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{22} & p_{12} & p_{32} & p_{21} & p_{11} & p_{31} & p_{23} & p_{13} & p_{33} \\ p_{32} & p_{22} & p_{12} & p_{31} & p_{21} & p_{11} & p_{33} & p_{23} & p_{13} \\ p_{12} & p_{32} & p_{22} & p_{11} & p_{31} & p_{21} & p_{13} & p_{33} & p_{23} \\ p_{23} & p_{13} & p_{33} & p_{22} & p_{12} & p_{32} & p_{21} & p_{11} & p_{31} \\ p_{33} & p_{23} & p_{13} & p_{32} & p_{22} & p_{12} & p_{31} & p_{21} & p_{11} \\ p_{13} & p_{33} & p_{23} & p_{12} & p_{32} & p_{22} & p_{11} & p_{31} & p_{21} \\ p_{21} & p_{11} & p_{31} & p_{23} & p_{13} & p_{33} & p_{22} & p_{12} & p_{32} \\ p_{31} & p_{21} & p_{11} & p_{33} & p_{23} & p_{13} & p_{32} & p_{22} & p_{12} \\ p_{11} & p_{31} & p_{21} & p_{13} & p_{33} & p_{23} & p_{12} & p_{32} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^*$ olduğunda BCCB matrisi normaldir. Burada $\mathbf{A}$ üniter spektral ayrışımına sahiptir. BCCB matrisi de özel spektral ayrışım içerir,

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^* \mathbf{\Lambda} \mathbf{F}. \quad (24)$$

(24)'teki denklemde $\mathbf{F}$, 2-boyutlu üniter ayrık Fourier dönüşümü matrisidir. Bu matrisle hızlı Fourier dönüşümü kullanılarak $\mathbf{F}$ 'yi tamamı ile oluşturmada $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{F}^*$ matris-vektör çarpımlarını gerçekleştirmek için böl ve fethet yaklaşımı kullanılabilir. MATLAB programında **fft2** fonksiyonu $\mathbf{F}$ ile matris-vektör çarpımı için ve **ifft2** fonksiyonu ise $\mathbf{F}^*$ ile matris-vektör çarpımı için kullanılabilir. **fft2** ve **ifft2** fonksiyonun boyutlarına bağlı olan bir ölçekleme faktörü içerir: **fft2**, $\sqrt{N}\mathbf{F}$ ile matris-vektör çarpımı ve **ifft2**, $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{F}^*$ ile matris-vektör çarpımı gerektirir. Burada N , $m \times n$ piksel değerleri dizisi olup $\mathbf{A}$ 'nın boyutudur.

$\mathbf{A} = \mathbf{F}^* \mathbf{\Lambda} \mathbf{F}$ spektral ayrışımında $\mathbf{F}$, Fourier matrisi, $\mathbf{F}^*$, Fourier matrisinin eşlenik devriği ve $\mathbf{\Lambda}$ ise $\mathbf{A}$ matrisinin $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ özdeğerlerini içermektedir (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^* \mathbf{\Lambda} \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{F} \mathbf{A} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{F} \mathbf{a}_1 = \mathbf{\Lambda} \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \boldsymbol{\lambda} \quad (25)$$

Özdeğerler (25)'teki denklemle bulunabilir. Frekans bölgesinde $\mathbf{A}$ matrisinin özdeğerlerini bulmak için $\mathbf{A}$ matrisinin sadece birinci sütunu kullanılır (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \leftrightarrow \dot{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} p_{22} & p_{23} & p_{21} \\ p_{32} & p_{33} & p_{31} \\ p_{12} & p_{13} & p_{11} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{a}_1 = \text{vec}(\dot{\mathbf{P}}), \mathbf{a}_1 = [p_{22} \ p_{23} \ p_{21} \ p_{32} \ p_{33} \ p_{31} \ p_{12} \ p_{13} \ p_{11}]^T \quad (27)$$

1.7. BTTB + BTHB + BHTB + BHBB Matrisleri

Yansımali sınır koşulunda $\mathbf{A}$ matrisi BTTB, BTHB, BHTB, BHBB matrislerinin toplamıdır. $\mathbf{A}$ matrisi simetriktir. Matris, blok simetrik olduğunda her bir bloğun kendisi de simetriktir. Bu durumda $\mathbf{A}$ matrisi normaldir ve bu matrisin gerçek spektral ayrışımı (28)'deki denklemdeki gibidir (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{C} \quad (28)$$

Burada $\mathbf{C}$, 2-boyutlu dikgen ayırık kosinüs dönüşüm (DCT) matrisidir. $\mathbf{C}$ matrisi, $\mathbf{F}$ matrisi ile benzerdir. $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{C}^T$ ile matris-vektör çarpımı için hızlı algoritmalar mevcuttur. MATLAB programında **dct2** ve **idct2** fonksiyonları bu hesaplamalar için kullanılır. Fourier dönüşümü hesaplamalarında karmaşık sayılar içerebilirken, kosinüs dönüşümü gerçek sayılar içerir (Hansen ve diğerleri, 2006).

$\mathbf{A}$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_i = \frac{[\mathbf{C}\mathbf{a}_1]_i}{c_{i1}}$ denklemi ile bulunur. a_1 , $\mathbf{A}$ matrisinin ilk sütunu ve c_{i1} , $\mathbf{C}$ 'nin herhangi bir elemanıdır. $\mathbf{A}$ matrisinin ilk sütunu PSF dizisini işleyerek bulunabilir (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Eğer yansımali sınır koşulu kullanılırsa, $\mathbf{A}$ matrisinin ilk sütunu dizi olarak temsil edilebilir (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} p_{33} & p_{34} & p_{35} & 0 & 0 \\ p_{43} & p_{44} & p_{45} & 0 & 0 \\ p_{53} & p_{54} & p_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{34} & p_{35} & 0 & 0 & 0 \\ p_{44} & p_{45} & 0 & 0 & 0 \\ p_{54} & p_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} p_{43} & p_{44} & p_{45} & 0 & 0 \\ p_{53} & p_{54} & p_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{44} & p_{45} & 0 & 0 & 0 \\ p_{54} & p_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)
 \end{aligned}$$

1.8. Kronecker Çarpım Matrisleri

$\mathbf{A}$ bulanıklık matrisi, Kronecker çarpımı ile ifade edilmek istendiğinde,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_r \otimes \mathbf{A}_c \quad (31)$$

ifadesi verilir. $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{B}$ görüntüleri $m \times n$ piksellerinde olduğunda $\mathbf{A}_r$, $n \times n$ ve $\mathbf{A}_c$, $m \times m$ boyutunda olur. PSF bölünebildiğinde, PSF'den Kronocker çarpımı oluşturulabilir. $m \times n$ boyutlu PSF dizisi (32)'deki denklem şeklinde yazılabilir.

$$\mathbf{P} = \mathbf{c} \mathbf{r}^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix} \quad (32)$$

$\mathbf{A}_r$ ve $\mathbf{A}_c$ matrislerinin yapıları sınır koşullarına bağlıdır (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 r_1 & c_1 r_2 & c_1 r_3 \\ c_2 r_1 & c_2 r_2 & c_2 r_3 \\ c_3 r_1 & c_3 r_2 & c_3 r_3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ eşitliği, Kronecker çarpımı olarak $\mathbf{B} = \mathbf{A}_c \mathbf{X} \mathbf{A}_r^T$ şeklinde yazılır. Eğer $\mathbf{A}_r$ ve $\mathbf{A}_c$ tekil değilse, $\mathbf{X} = \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}_r^{-T}$ eşitliği yazılabilir. Kronecker çarpımının SVD'si matrislerin SVD'si olarak temsil edilebilir (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{U}_r \mathbf{\Sigma}_r \mathbf{V}_r^T \text{ ve } \mathbf{A}_c = \mathbf{U}_c \mathbf{\Sigma}_c \mathbf{V}_c^T, \quad (34)$$

$$\mathbf{x}_{\text{tam}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{b}, \quad (35)$$

$$\mathbf{X}_{\text{tam}} = \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}_r^{-T} = \mathbf{V}_c \mathbf{\Sigma}_c^{-1} \mathbf{U}_c^T \mathbf{B} \mathbf{U}_r \mathbf{\Sigma}_r^{-1} \mathbf{V}_r^T \quad (36)$$

(35)'te yer alan denklem SVD kullanarak (36)'daki şekilde yazılabilir. (Hansen ve diğerleri, 2006)

Eğer PSF ayrıştırılabiliyorsa, herhangi bir sınır koşulu için etkili bir şekilde hesaplamalar yapılabilir (Hansen ve diğerleri, 2006).

1.9. Spektral Süzgeçleme

SVD, kaydedilen bulanık görüntüde $\mathbf{e}$ gürültüsünün, yeniden yapılandırılmış görüntüye ters gürültü biçiminde $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}$ nasıl girdiğini açıklamak için kullanılır. SVD analizi görüntü bulanıklığı giderme algoritmalarından bağımsızdır. SVD, ters gürültü ile başa çıkmak için önerilen bir yöntemdir. Küçük tekil değerlere bölünmenin etkilerini azaltmak için SVD yaklaşımı kullanılabilir (Hansen ve diğerleri, 2006). (7)'deki denklem tekrardan yazılırsa, (37)'deki denklem elde edilir.

$$\mathbf{x}_{\text{tam}} = \mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{b} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \quad (37)$$

$$\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i, \quad k < N \quad (38)$$

Gürültünün hâkim olduğu SVD bileşenlerini atarak, küçük tekil değerlere bölünme etkileri azaltılabilir. (38)'deki denklemde k değeri arttığında daha fazla bileşen ve böylece daha yüksek frekanslar dâhil olacaktır (Hansen ve diğerleri, 2006).

Spektral süzgeçleme denklemi (39)'daki şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{x}_{\text{süzgeçleme}} = \sum_{i=1}^N \phi_i \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \quad (39)$$

Süzgeçleme yöntemi gürültünün etkisini azaltmak için kullanılır. Spektral süzgeçleme, frekans bölgesinde bulanık görüntüde gürültünün etkisini azaltacak şekilde süzgeçleme anlamına gelir. Bir görüntü gürültüden etkilendiğinde süzgeçleme işlemi gereklidir. Süzgeçleme işlemi düzenlileştirme olarak da adlandırılır. Düzenlileştirme derecesi düzenlileştirme parametresi tarafından yönetilir (Hansen ve diğerleri, 2006).

1.10. Düzenlileştirme Yöntemleri

$\mathbf{A}$ bulanıklık matrisi, $\mathbb{R}^{m \times n}$ boyutlarında ve $m \geq n$ olsun. $m > n$ olduğunda en küçük kareler problemi $\min_x \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$ olarak düşünülür. Bu durumda, tam çözüm denildiğinde, ya $m = n$ durumu ile $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ çözümü ya da $m > n$ durumu ile en küçük kareler yöntemi düşünülür. $\mathbf{A}$ matrisinin koşul sayısı, $\text{cond}(\mathbf{A}) = \sigma_1/\sigma_n$ olarak verilir (Hansen, 2010).

Ayrık kötü konumlanmış (ill-posed) problemler büyük koşul sayısına sahip katsayı matrisleri içerirler. Bu durum, tam çözümün verilerdeki hataları temsil eden sağ taraftaki herhangi bir bozulmaya karşı çok duyarlı olduğu anlamına gelir (Hansen, 2010).

$$\mathbf{A} \mathbf{x}^{\text{gerçek}} = \mathbf{b}^{\text{gerçek}}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} = \mathbf{b}^{\text{gerçek}} + \mathbf{e} \quad (40)$$

(40)'daki denklemde $\mathbf{e}$ bozulmayı (pertürbasyon) temsil eder. $\text{cond}(\mathbf{A})$ büyük olduğunda, $\mathbf{x}$ 'in $\mathbf{x}^{\text{gerçek}}$ 'den çok uzak olduğu anlamına gelir. Ayrık ters problemlerin uygulamalarında her zaman üst sınıra yakın bozulmalar ortaya çıkar. Bu nedenle, $\mathbf{x}^{\text{gerçek}}$ 'e daha az hassas yaklaşımları hesaplayabilen düzenlileştirme yöntemlerine ihtiyaç duyulur (Hansen, 2010).

1.10.1. Tikhonov Düzenleştirme Yöntemi

Tikhonov metodundaki ana fikir, sürekli durumda yumuşatma fonksiyonu veya ayrık durumda (yarı) norm şeklinde, istenen çözümün boyutu ve pürüzsüzlüğü hakkında varsayımları dâhil etmektir. Tikhonov çözümü minimizasyon problemi ile ilgilidir (Hansen, 1998).

(39)'daki denklemde, Tikhonov metodu için süzgeçleme faktörü (41)'deki gibidir.

$$\phi_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha^2}, \quad i = 1, \dots, N \quad (41)$$

$\alpha > 0$ yumuşatma parametresidir. Süzgeç faktörlerinin bu seçimi, minimizasyon problemi için $\mathbf{x}_\alpha$ çözüm vektörünü verir.

$$\min_{\mathbf{x}} \{ \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_2^2 + \alpha^2 \|\mathbf{x}\|_2^2 \} \quad (42)$$

$\|\cdot\|$, Öklid vektör normunu veya spektral matris normunu belirtir.

(42)'deki denklemde $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_2$ 'nin küçük olması istenir, bu durumda, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ seçilip, 0 değerine eşitleme yapılırsa, (43)'teki denklem elde edilir.

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(\mathbf{u}_i^T \mathbf{b})^2}{\sigma_i^2} \quad (43)$$

$\mathbf{u}_i$ doğrultusunda gürültünün büyüklüğü σ_i tekil değerinin büyüklüğünü önemli ölçüde aştığında, bu miktar gerçekçi olmayan bir şekilde büyük olur. Bu nedenle $\|\mathbf{x}\|_2$ ifadesini küçük tutmak istenir. (42)'deki denklem, $\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_\alpha$ kalıntı normunun ve $\mathbf{x}_\alpha$ çözüm normunun küçük olmasını sağlar.

(42)'deki denklem, (44)'teki gibi yazılabilir,

$$\min_{\mathbf{x}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \alpha \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x} \right\|_2^2 \quad (44)$$

(44)'teki fonksiyonun türevi sıfıra eşitlendiğinde (45)'teki denklem elde edilir.

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha^2 \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (45)$$

(45)'teki eşitlikten de (46)'daki çözüme ulaşılabilir (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$\mathbf{x}_\alpha = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (46)$$

$\sigma_i \gg \alpha$ durumunda ϕ_i değerini elde etmek için $(1+\epsilon)^{-1} = 1 - \epsilon + \frac{1}{2} \epsilon^2 + O(\epsilon^3)$

Taylor serisi açılımı uygulandığında,

$$\phi_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha^2} = \frac{1}{1 + \alpha^2 / \sigma_i^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{\sigma_i^2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^4}{\sigma_i^4} + \dots \quad \text{elde edilir.}$$

$\sigma_i \ll \alpha$ durumunda ϕ_i değerini elde etmek için $(1+\epsilon)^{-1}$ Taylor serisi açılımı uygulandığında,

$$\phi_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha^2} = \frac{\sigma_i^2}{\alpha^2} \frac{1}{1 + \sigma_i^2 / \alpha^2} = \frac{\sigma_i^2}{\alpha^2} \left(1 - \frac{\sigma_i^2}{\alpha^2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_i^4}{\alpha^4} \dots \right) + \quad \text{elde edilir.}$$

Böylece,

$$\phi_i = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\alpha}{\sigma_i}\right)^2 + O\left(\left(\frac{\alpha}{\sigma_i}\right)^4\right), & \sigma_i \gg \alpha \\ \left(\frac{\sigma_i}{\alpha}\right)^2 + O\left(\left(\frac{\sigma_i}{\alpha}\right)^4\right), & \sigma_i \ll \alpha \end{cases} \quad \text{elde edilir.}$$

Bu durumda, $[\sigma_N, \sigma_1]$ aralığındaki α değerlerinde, küçük i indisleri için $\phi_i \approx 1$ ve büyük i indisleri için $\phi_i \approx \frac{\sigma_i^2}{\alpha^2}$ değerleri olur (Hansen ve diğerleri, 2006).

α yumuşatma (düzenlileştirme) parametresinin seçiminde dört farklı yöntem bulunmaktadır, bu yöntemler, tutarsızlık ilkesi, L-eğrisi kriteri, genelleştirilmiş çapraz doğrulama ve NCP'dir. Bu yöntemlerden kısaca bahsedilirse,

- Tutarsızlık ilkesi (Discrepancy principle): Artık vektörün yalnızca gürültüden oluştuğunu ortaya çıkarmaya çalışan basit bir yöntemdir.
- L-eğrisi kriteri (L-curve criterion): İki hata bileşenini dengelemeye çalışır. Çözüm çokça düzenlileştirme içerdiğinde bu yöntem başarısız olur.
- Genelleştirilmiş çapraz doğrulama (GCV): Tahmin hatasını en aza indirmeye çalışır ve genellikle geçerli bir yöntemdir. Deneyimler, gürültü beyaz olduğu sürece bu parametre seçim yönteminin oldukça sağlam ve doğru olduğunu göstermektedir (çünkü bu varsayım GCV fonksiyonunun türetilmesinin temelini oluşturur)
- NCP: Artık vektörün güç spektrumuna dayalı olarak yalnızca gürültüden oluştuğunu ortaya çıkarmaya çalışan istatistiksel temelli bir yöntemdir (Hansen, 2010).

(47)'daki denklem GCV fonksiyonuna aittir (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$G(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i^2 + \alpha^2} \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2 + \alpha^2} \right)^2} \quad (47)$$

1.10.2. Toplam Varyasyon Düzenileştirmesi

Toplam varyasyon (TV) minimizasyon modeli, Rudin, Osher ve Fatemi tarafından 1992'de önerilmiştir. Bir görüntüde yer alan gürültüyü tahmin etmek için kullanılan yöntemler en küçük kareler ölçütüne dayalıdır; bu durum L_2 normuna bağlıdır, fakat TV yaklaşımında L_1 normu kullanılır (Rudin, Osher ve Fatemi, 1992).

Toplam varyasyon düzenileştirmesinde L_1 normu ($\|\cdot\|_1$) ve birinci dereceden türev işlemini birlikte kullanıldığında, görüntülerde bulanıklık ve gürültü giderme işlemini sağlar. 2-boyutlu $x = x(s, t)$ fonksiyonunun gradyan büyüklüğü $Y(s, t)$ yeni bir 2-boyutlu fonksiyondur ve (48) 'deki gibi tanımlanır (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$Y(s, t) = \|\nabla x\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} x_s \\ x_t \end{bmatrix} \right\|_2 \quad (48)$$

x 'in s ve t 'ye göre kısmi türevleri x_s ve x_t şeklindedir. Toplam varyasyon fonksiyonu (49)'deki gibi tanımlanır (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$J_{TV}(x) = \|Y\|_1 = \int_0^1 \int_0^1 |Y(s, t)| ds dt \quad (49)$$

Toplam varyasyon (TV) düzenileştirmesi gürültüyü çok iyi bir şekilde ortadan kaldıracaktır ve aynı zamanda kenarları koruyabilir (Tang ve Fang, 2016).

$J_{TV}(x)$, görüntüdeki kenarların iyi bir şekilde korunmasını sağlayan bir ölçüttür. Ayrık formülde $\mathbf{X}$ görüntüsünün toplam varyasyonu, $\mathbf{X}$ görüntüsündeki piksellerle ilişkili tüm gradyanların normlarının toplamıdır. Bu durumda (50) 'teki denklem verilir.

$$J_{TV}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n ((\mathbf{X} \mathbf{D}_{1,n}^T)_{ij}^2 + (\mathbf{D}_{1,m} \mathbf{X})_{ij}^2)^{1/2} \quad (50)$$

Periyodik sınır koşullarında birincil türev için $D_{1,m}$ dolanır matrisi kullanılabilir; yansımali sınır koşulunda ise, eğer X sabit bir görüntüyse $J_{TV}(x) = 0$ seçilir. Bu durumda $D_{1,m}$ matrisi aşağıdaki gibi alınır (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$D_{1,m} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Toplam varyasyona bulanıklığı giderme problemi (51)'deki gibi ifade edilebilir. Burada $J_{TV}(X)$ düzenleştirme terimidir (Hansen ve diğerleri, 2006)

$$\min\{\|b - Ax\|_2^2 + \alpha J_{TV}(X)\} \quad (51)$$

1.11. Bilgisayarlı Tomografi

Sayısal görüntü işleme, tıbbi görüntüleme alanında 1960'ların sonu 1970'lerin başında kullanılmaya başlandı. Kısaca bilgisayarlı tomografi (CT) olarak da adlandırılan bilgisayarlı eksenel tomografinin (CAT) 1970'lerin başında icadı, tıbbi teşhiste görüntü işleme uygulamasındaki en önemli adımlardan biridir. Bilgisayarlı tomografi, birbirinden bağımsız olarak Sir Godfrey N. Hounsfield ve Profesör Allan M. Cormack tarafından icat edilmiş olup bu buluşlarından dolayı 1979 Nobel Tıp Ödülü'nü paylaşmışlardır (Gonzalez ve Woods, 2018). Bilgisayarlı tomografide, hastaya X-ışınları gönderilerek ve vücudun etrafında hızlıca döndürülerek işaretler üretilir. Bu işaretler makinenin bilgisayarı tarafından işlenerek tomografi görüntüleri oluşturulur (URL-3, 2022).

Bilgisayarlı tomografide, röntgen makinesine bağlı bir bilgisayar bulunmaktadır. Farklı açılardan doku ve organların görüntüleri alınır ve bu görüntüler üç boyutlu görünüm oluşturmak için kullanılır. Doku ve organların daha net görülebilmesi için damar yolundan hastaya boya da enjekte edilebilir. Bilgisayarlı tomografi, hastalığın teşhisinde, tedavi süreci ile ilgili bilgi almak için kullanılabilir (URL-4, 2022).

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR BULGULAR VE İRDELEME

2.1. Literatür Çalışması

Yao ve arkadaşları tarafından, ultrason bilgisayarlı tomografinin düzenlenileştirilmesi için Tikhonov düzenlenileştirme yöntemi ve Toplam Varyasyon (TV) yönteminin birleştirilerek kullanılması önerilmiştir (Yao, Fan, Nakajima ve Qu, 2020). Bu makalede, Ultrason bilgisayarlı tomografinin sağlamış olduğu yaklaşımlardan yankı ile elde edilen görüntü kullanılarak, bir diğer yaklaşım olan ses hızıyla elde edilen görüntünün iyileştirilmesi için Tikhonov düzenlenileştirmesi ve TV yönteminin birleştirilerek kullanılması önerilmiş, Tikhonov ve TV yöntemleriyle karşılaştırıldığında, önerilen yöntemin ses hızı görüntüsünün kalitesini artırdığı gözlenmiştir.

Wu ve arkadaşları tarafından derin öğrenme tabanlı metot geliştirilmiştir (W. Wu ve diğerleri, 2021). ULTRA olarak adlandırılan, derin öğrenmeye dayalı, yeniden yapılandırma sağlayan bu metot, görüntü ayrıntılarını korurken görüntüdeki parazitleri azaltır ve görüntü kalitesinin iyileştirilmesini sağlar. Bu yöntem düşük hesaplama maliyetine sahiptir ve ayrıca bilgisayarlı tomografi görüntüsünün yeniden yapılandırması için verimlidir.

Cascarano ve arkadaşları tarafından gradyan tabanlı konvolüsyonel sinir ağı (CNN) geliştirilmiş ve bu bağlamda Toplam Varyasyonu ve CNN tabanlı gürültü gidericiyi birleştiren hibrit bir tak-çalıştır (PnP) düzenlenileştirmeden bahsedilmiştir (Cascarano, Piccolomini, Morotti ve Sebastiani, 2022). Bu iki yöntem, sentetik ve gerçek tıbbi bilgisayarlı tomografi görüntülerine uygulanıp incelendiğinde ve farklı gürültü gidericilerinden yararlanan diğer PnP yöntemleriyle karşılaştırıldığında, sayısal sonuçlar, önerilen gradyan tabanlı yöntemin bilgisayarlı tomografi görüntülerinin farklı nesnelerini geri yüklemede ve gürültüyü gidermede başarılı olduğunu göstermiştir.

Shi ve arkadaşları tarafından optik uzaktan algılama görüntüleri için derin açılım yöntemine dayalı bulanıklık giderme algoritması önerilmiştir (Shi, Gu, Gao, Liu ve Chen, 2022). Bu algoritma DDNet diye adlandırılır ve geleneksel iyileştirme tabanlı algoritma ile sinir ağı algoritmasının birleşimidir. Deneysel çalışmalar önerilen algoritmanın bulanıklık giderme görevini mükemmel bir şekilde yerine getirebildiğini ve farklı bulanıklaştırma süzgeçlerine uyum sağlayabildiğini göstermiştir.

Nagare ve arkadaşları tarafından bilgisayarlı tomografiler için keskinleştirme filtresi önerilmiştir (Nagare ve diğerleri, 2022). Radyologlar belirli bir gürültü seviyesindeki görüntüleri okumak istediklerinden görüntüyü keskinleştirirken gürültü enerjisi ve dokusunu önemli ölçüde değiştirmeyen gürültü koruyucu keskinleştirme filtresi (NPSF) önerilmiştir. Kullanıcı tarafından ayarlanabilen parametreler ile NPSF görüntüdeki keskinlik ve gürültü seviyesini kontrol edebilir. Yapılan çalışmalarda NPSF'nin geleneksel yaklaşımlardan daha iyi performans gösterdiği gözlemlenmiştir.

Majee ve arkadaşları tarafından bilgisayarlı tomografi görüntülerinin edinimi ve yeniden yapılandırması için CodEx metodu önerilmiştir (Majee, Aslan, Gürsoy ve Bouman, 2022). CodEx yeniden yapılandırması, hızlı dönme hareketi ile oluşan doğrusal bulanıklığı, tomografi taramasının iletimindeki doğrusal olmayan etkileri ve çözünürlüğün iyileştirilmesini gerçekleştirmek için kodlamayı modellerdir. Yapılan çalışmalar, CodEx metodunun hızla dönen nesnelerin seyrek görünümlü taraması kullanıldığında, yeniden yapılandırma kalitesini iyileştirmede geleneksel doğrusal bulanıklık giderme ve model tabanlı yinelemeli yeniden yapılandırma (MBIR) yöntemlerinden daha etkili olduğu gözlenmiştir. Zamansal kodlamanın, 180° üzerindeki tarama görünüm aralıkları dikkate alındığında bulanıklaştırma yapaylıklarını azaltmak için kullanılabileceği gözlemlenmiştir.

Petrova ve arkadaşları tarafından bulanık (odaklanmamış) bilgisayarlı tomografilerin yeniden yapılandırılması için uzamsal filtre metotları incelenmiştir (Petrova, Petrov ve Petkova-Georgieva, 2021). Bu çalışmada, Lucy-Richardson, en küçük kareler yöntemi (LMS) ve Wiener süzgeçleri incelenmiştir. Görüntü bulanıklığına neden olan PSF'nin boyutunun bilinip/bilinmemesine bağlı olarak görüntülere çalışmada önerilen süzgeçler uygulanmıştır. Yapılan denemelerde, en iyi sonucun yinelemeli Lucy-Richardson süzgeci ile elde edildiği gözlenmiştir, ancak aynı zamanda en uzun işlem süresi gerektirdiği de gözlemlenmiştir.

Lee ve arkadaşları tarafından Alzheimer hastalarına ait pozitron emisyon tomografisi (PET) görüntülerinin iyileştirilmesi için görüntü onarma algoritması tasarımı önerilmiştir (Lee, Yun, Kim ve Lee, 2022). Bu algoritma ile PET görüntülerindeki gürültüyü azaltma, görüntü bulanıklığını giderme işlemleri yapılmıştır. PET görüntülerine, yerel olmayan araçlar (NLM) yaklaşımı uygulanıp gürültü azaltılması gerçekleştirildikten sonra bulanıklık giderme için kör ters evrişim algoritması uygulanmıştır. Yapılan çalışmalar sonucunda, NLM tabanlı gürültü giderme ve kör ters evrişim tabanlı bulanıklık giderme algoritmasının birleşiminin PET görüntülerinde kaliteyi artırdığı gözlemlenmiştir.

Wu ve arkadaşları tarafından endüstriyel bilgisayarlı tomografi görüntülerinde, görüntü bulanıklığını gidermek için L_0 düzenleme yöntemi önerilmiştir (D. Wu, Guerrero, Sinico ve Dewulf, 2022). Bu görüntülerde bulanıklık, görüntü kalitesi ve uzamsal çözünürlüğü düşürür. L_0 düzenleme yönteminin uygulanması ile hem yoğunluk görüntüsünün hem de gradyan görüntüsünün seyreklik bilgisi ile bulanıklık azaltılır ve görüntü kalitesi iyileştirilir.

Choi ve arkadaşları tarafından sayısal meme tomosentezi sisteminde elde edilen görüntülerin bulanıklığını gidermek için 2-aşamalı öğrenme yaklaşımı önerilmiştir (Choi, Han, Jang, Shim ve Baek, 2022). Bu yöntemde 2 alt modülden/fazdan oluşan evrişimli sinir ağı modeli kullanılır, burada faz-1 ile 3-boyutlu görüntülerin bulanıklığını giderme ve faz-2 ile 2-boyutlu görüntülerin bulanıklığını giderme işlemi gerçekleştirilir. Elde edilen sonuçlarda önerilen yöntemin, etkili şekilde 3-boyutlu bulanıklık giderme işlemini gerçekleştirdiğini sayısal meme tomosentezi görüntüsünün farklı düzlemlerinde yer alan bulanıklık artefaktlarını azalttığı gözlemlenmiştir.

Sharif ve arkadaşları tarafından tıbbi görüntülerde yer alan bulanıklığı gidermek için derin bir ağ modeli önerilmiştir (Sharif ve diğerleri, 2023). Bu yöntem farklı tıbbi görüntülerden bulanıklık gidermeyi öğrenmek için uçtan uca ölçeklenebilmelidir. Önerilen ağ, tıbbi görüntü bulanıklığını gidermeyi öğrenirken göze çarpan bilgileri kurtarmak için uzamsal-asimetrik dikkat modülü ile yeni bir kalıntı bloğu içerir. Deneysel sonuçlar, bu yöntemin tıbbi görüntülerdeki bulanıklığı giderebileceğini göstermiştir. Niteliksel ve niceliksel değerlendirmede bu yöntemin, derin bulanıklık giderme metodlarından daha iyi performans gösterdiği söylenebilir.

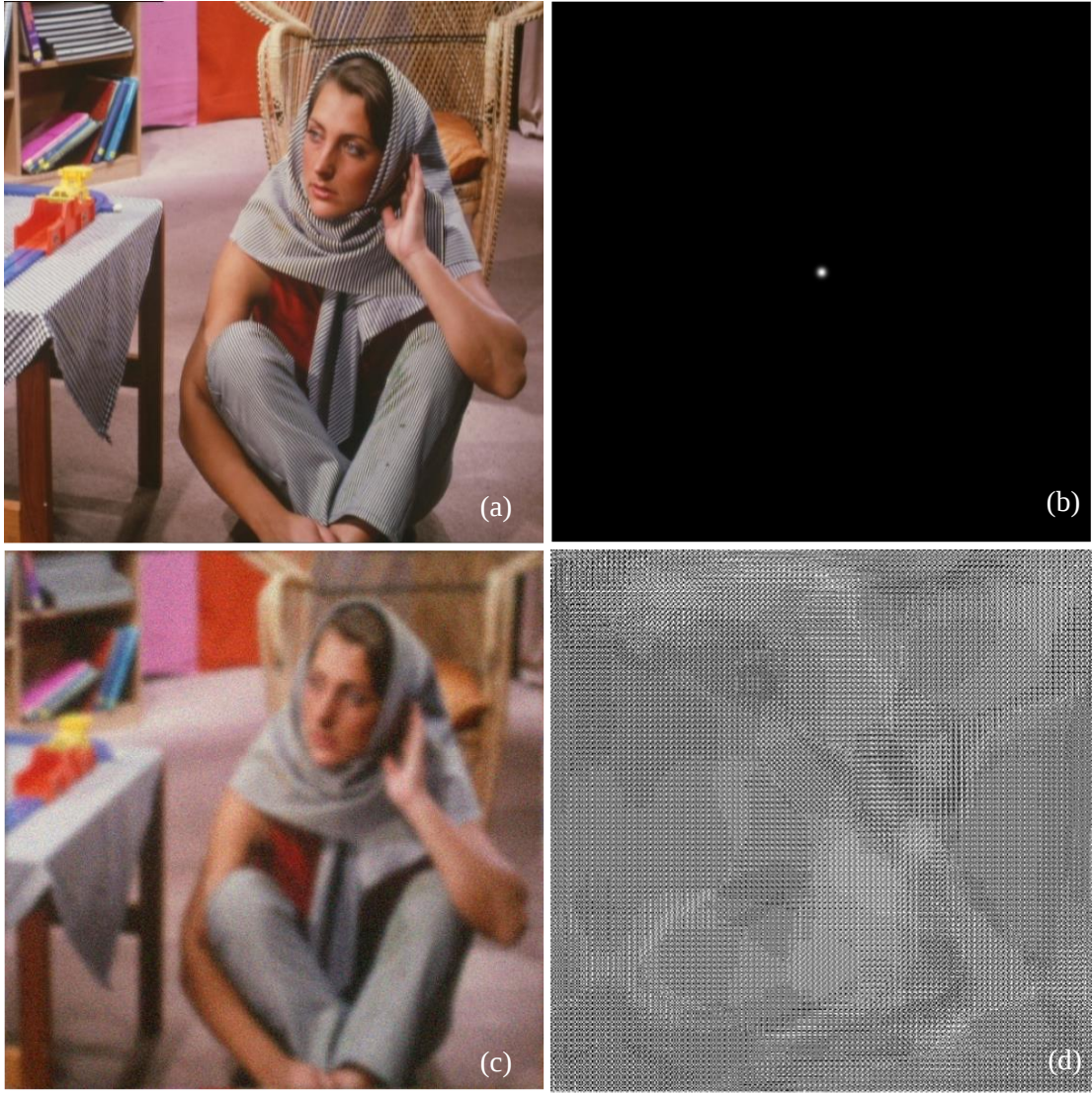
Abuya ve arkadaşları tarafından bilgisayarlı tomografi görüntülerdeki gürültüleri azaltmak için Dalgacık-Anizotropik Gauss Filtresi Tabanlı Gürültü Giderici Evrişimsel Sinir Ağını (CNN) kullanan görüntü gürültü giderme tekniği önerilmiştir. Bu çalışmada, BT tıbbi görüntülerindeki gürültüyü yok etmek için dalgacık tabanlı bir anizotropik Gauss filtresi (AGF) ve CNN gürültü giderme yöntemi sunulmuştur. Ön işleme işlemleri olarak Haar dalgacık dönüşümü ve AGF kullanılmıştır. Sürece, tıbbi görüntülere Gauss gürültüsünün eklenmesiyle başlamış ve oluşturulan gürültülü görüntülerin ardından AGF kullanılarak gürültü giderilmiştir. Haar dönüşümüyle, gürültüsü giderilmiş BT taraması görüntüsü farklı frekans bantlarına ayrıştırılmıştır. Diğer standart süzgeçleme teknikleri ve CNN tabanlı yöntemlerle karşılaştırıldığında, önerilen yaklaşımın daha iyi performans gösterdiği gözlemlenmiştir (Abuya, Rimiru ve Okeyo, 2023) .

Al-Ameen ve arkadaşları tarafından bilgisayarlı tomografi görüntülerde bulanıklığı gidermek için Yeni Düzeltilmiş Landweber algoritması kullanılarak bilgisayarlı tomografi görüntülerinde bulanıklığının giderilmesi bir çalışma önerilmiştir. Bu çalışmada sentetik ve gerçek bulanık bilgisayarlı tomografi görüntüler kullanılmıştır. Çalışma sonucunda önerilen algoritmanın başarılı olduğu gözlemlenmiştir (Al-Ameen ve Sulong, 2015).

Zifan ve arkadaşları tarafından tıbbi görüntü bulanıklığının giderilmesi için bir çalışma önerilmiştir. Bu çalışmada tıbbi görüntülerin bulanıklığı doğrusal olmayan yaklaşımlar kullanarak belirlenmiş ve önerilen yöntem, eğri kenarlar için son derece uygun olan Morlet ve Curvelet çerçevelerinden oluşmuş, sağlam bir geometrik görüntü tanımı sağlamıştır (Zifan ve Liatsis, 2011).

2.2. Yapılan Çalışmalar

Kırmızı, yeşil ve mavi renk uzayında, renkli olarak üretilmiş bir görüntünün kanalları aslında gri düzeyli görüntüler şeklindedir. Kayıt altına alınan görüntüler kaliteli bir şekilde oluşturulmak istense de ortama ve cihaza bağlı olarak bulanıklık ve bunun yanında gürültü gibi artefaktlar içerebilir. Görüntüdeki bu türden bozuklukları giderme işlemi, kaydedilen sahneyi daha keskinleştirmek ve gürültüden elimine etmektir (Hansen ve diğerleri, 2006). Şekil 4a’da verildiği üzere, görüntüler kaydetme esnasında piksellerin etrafındaki piksellerin üzerine yayılır ve böylece bulanıklaşma meydana gelir; bu piksel nokta kaynağı ve ilgili işlev de nokta yayılma işlevi (PSF) olarak adlandırılır (Bakınız Şekil 4b). İlaveten kaydedilen görüntüye başka bir bozukluk olarak farklı tipteki gürültüler de eklenebilir. Bu türden artefaktlara Şekil 4c’deki bulanıklık ve gürültü ilave edilmiş Barbara test görüntüsü örnek olarak gösterilebilir. Ama Şekil 4d’de verildiği gibi, eğer doğrusal modele ait denklem takımı en küçük kareler yaklaşımıyla çözülürse, gürültüden dolayı görüntü başarısız bir şekilde üretilmektedir. Bu bağlamda literatürde başarılı bir şekilde gürültüyü elimine ederek görüntüler üreten birçok yöntem geliştirilmiştir (Hansen ve diğerleri, 2006)(Hansen, 2010).



Şekil 4. Renkli test görüntüsü Barbara için en küçük kareler yönteminin uygulanması: a) Özgün görüntü, b) PSF fonksiyonu, c) Yapay olarak bulanıklık ve beyaz Gauss gürültü eklenmiş görüntü ve d) Sonuç görüntüsü

Bu tezde görüntü iyileştirmesinde dikkate alınan iteratif olmayan yaklaşımlardan söz edilecektir. Burada açıklanan yaklaşımların kısa bir süre içerisinde sonuç üretmesi için dikkate alınan sınır şartlarına ve PSF işlevlerine göre bazı dönüşümler kullanılmıştır. Periyodik sınır şartlarında hızlı Fourier dönüşümü, yansımali sınır şartlarında ayırık Kosinüs dönüşümü ve ayrılabilir PSF fonksiyonlarında ise tekil değer ayrışımı kullanılmıştır. Bu tezde ise, Genel Tikhonov düzenleme yönteminde hızlı Fourier dönüşümü kullanılarak gri düzeyli ve renkli görüntülerde iyileştirme işlemi gerçekleştirilmiş, ilaveten doğrusal denklem çözümüne daha geniş bir Laplace süzgeci eklenerek üretilen sonuçlar iyileştirilmiştir.

2.2.1. Genel Tikhonov Düzenleme Yöntemi

$$\min_{\mathbf{x}} \{ \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_2^2 + \alpha^2 \|\mathbf{Dx}\|_2^2 \}, \quad (52)$$

Genel Tikhonov yöntemi (52)'deki gibi ifade edilebilir (Hansen ve diğerleri, 2006). Denklemdaki $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_2^2$ ifadesi $\mathbf{x}$ çözümünün kabul edilebilirliğini kontrol eder. Denklemdaki kalıntı değeri çok büyükse, $\mathbf{Ax}$ vektörü $\mathbf{b}$ vektörüyle çok benzer değildir anlamına gelir; diğer taraftan, eğer kalıntı değeri çok küçükse, o durumda da $\mathbf{x}$ vektörünün çok fazla gürültüye maruz kaldığı çıkarımı yapılabilir. (52)'deki denklemin ikinci kısmı $\|\mathbf{Dx}\|_2^2$ yumuşatma terimi olarak ifade edilir. $\mathbf{x}$ vektöründeki gürültünün elimine edilebilmesi için $\mathbf{D}$ matrisinin düzgün bir şekilde setlenmesi lazımdır. α yumuşatma katsayısıyla, denklemdaki iki terim en küçüklenirken, denge sağlaması yapılır; α çok küçük değerli seçilirse, ilk terimin ağırlığı artar, bu durumda $\mathbf{x}$ vektörü çok fazla gürültüye maruz kalır. α çok büyük değerli seçilirse, o durumda da ikinci terimin ağırlığı artar ve böylece çok az ayrıntıyla çokça yumuşatılmış bir sonuç üretilir (Hansen, 1998; Hansen ve diğerleri, 2006).

$$\mathbf{x}_{\alpha, \mathbf{D}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (53)$$

(53)'teki denklem, sınır koşulları periyodik alınırsa ayrık Fourier dönüşümüyle çözülebilir. Bu bağlamda denklem $\mathbf{A} = \mathbf{F}^* \mathbf{\Lambda}_A \mathbf{F}$ spektral ayrıştırmasıyla çözülmektedir. Burada $\mathbf{F}$, Fourier matrisi, $\mathbf{F}^*$, Fourier matrisinin eşlenik devriği ve $\mathbf{\Lambda}_A$ köşegen matrisi ise $\mathbf{A}$ dolaşım matrisinin $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ özdeğerlerini ifade etmektedir ve bu özdeğerler aşağıdaki denklem dikkate alınarak hızlı bir şekilde hesaplanabilmektedir (Hansen ve diğerleri, 2006).

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^* \mathbf{\Lambda}_A \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{FA} = \mathbf{\Lambda}_A \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{Fa}_1 = \mathbf{\Lambda}_A \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \boldsymbol{\lambda} \quad (54)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \leftrightarrow \dot{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} p_{22} & p_{23} & p_{21} \\ p_{32} & p_{33} & p_{31} \\ p_{12} & p_{13} & p_{11} \end{bmatrix}, \quad (55)$$

$$\mathbf{a}_1 = \text{vec}(\dot{\mathbf{P}})$$

$$\mathbf{a}_1 = [p_{22} \ p_{23} \ p_{21} \ p_{32} \ p_{33} \ p_{31} \ p_{12} \ p_{13} \ p_{11}]^T \quad (56)$$

(53) ‘teki denklem hızlı Fourier dönüşümü göz önüne alınarak çözüldüğünde aşağıda verilen denklem elde edilmektedir (Hansen ve diğerleri, 2006):

$$\mathbf{x}_{\alpha, \mathbf{D}} = \mathbf{F}^* (|\mathbf{\Lambda}_A|^2 (|\mathbf{\Lambda}_A|^2 + \alpha^2 \Delta)^{-1}) \mathbf{\Lambda}_A^{-1} \mathbf{F} \mathbf{b}, \quad (57)$$

Δ , $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$ matrisinin özdeğerleriyle ilişkili bir köşegen matristir (Hansen ve diğerleri, 2006).

2.2.2. Renkli Görüntülerde Düzenleştirme İşlemi

Kırmızı (r), yeşil (g) ve mavi (b) renk uzayında renkli görüntünün her bir kanalı ayrı ayrı gri düzeyli görüntü olarak göz önüne alınabilir. Özgün görüntünün her bir renk kanalı $\mathbf{X}_r$, $\mathbf{X}_g$ ve $\mathbf{X}_b$ olarak ifade edilsin. Bu bağlamda renkli görüntülerde bulanıklık giderme işleminde ilave bir matris daha kullanılır.

$$\begin{bmatrix} a_{rr} \mathbf{A} & a_{rg} \mathbf{A} & a_{rb} \mathbf{A} \\ a_{gr} \mathbf{A} & a_{gg} \mathbf{A} & a_{gb} \mathbf{A} \\ a_{br} \mathbf{A} & a_{bg} \mathbf{A} & a_{bb} \mathbf{A} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \text{vec}(\mathbf{X}_r) \\ \text{vec}(\mathbf{X}_g) \\ \text{vec}(\mathbf{X}_b) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \text{vec}(\mathbf{B}_r) \\ \text{vec}(\mathbf{B}_g) \\ \text{vec}(\mathbf{B}_b) \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (58)$$

$$(\mathbf{A}_{\text{renkli}} \otimes \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (59)$$

(57)’deki denklem renkli görüntülerde bulanıklık giderme işlemi için (62)’deki denkleme uyarlanabilir. $\mathbf{D}$ matrisi için, düzenleştirilmiş PSF fonksiyonları olarak, aşağıda verilen 2-boyutlu Laplace süzgeçleri dikkate alınmaktadır (Dizdaroğlu ve Alkan Özdemir, 2022):

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -48 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

FFT algoritmasına bağlı genel Tikhonov yöntemini kullanarak renkli görüntülerde bulanıklık giderme çalışması yapılmıştır. Bu çalışmada Tikhonov FFT (Hansen, Nagy ve O’Leary, 2006), TSVD FFT (Hansen, Nagy ve O’Leary, 2006), Tikhonov Ayrılabilir Süzgeç

(Hansen, Nagy ve O’Leary, 2006), P_1 süzgeci ile Genel Tikhonov FFT (Hansen, Nagy ve O’Leary, 2006) ve önerilen yöntem olan P_2 süzgeci ile Genel Tikhonov FFT yöntemi kıyaslanmıştır (Dizdaroğlu ve Alkan Özdemir, 2022). Yöntemlerin performansını değerlendirmek için 512×512 boyutlu Barbara, Lena ve Peppers test görüntüleri dikkate alınmıştır (Bakınız Şekil 5.a, b ve c). İlk işlem olarak görüntüler standart sapması ($\sigma=3$) olan bir Gauss süzgeciyle evriştirilerek bulanıklaştırılmıştır. Bir sonraki işlem adımı olarak da görüntülere beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma=50$) ilave edilmiştir.

Burada nicel değerlendirme ölçütleri için aşağıdaki metrikler dikkate alınmıştır. Tepe İşaret Gürültü Oranı (Peak Signal-to-Noise Ratio – PSNR):

$$PSNR = 10 \times \log_{10} \left(255^2 / MSE \right)$$

burada $MSE = 1 / (n \times m) \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (X(i,j) - Y(i,j))^2 \right)$ ifadesiyle hesaplanmaktadır.

Burada X gri düzeyli özgün görüntü ve Y ise gri düzeyli süzgeçlenmiş görüntüdür. Diğer taraftan Yapısal Benzerlik İndisi (Structural Similarity (SSIM) Index):

$$SSIM = \left(\frac{(2\mu_X\mu_Y + C_1)(2\sigma_{XY} + C_2)}{(\mu_X^2 + \mu_Y^2 + C_1)(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + C_2)} \right)$$

ifadesiyle hesaplanmaktadır. Burada μ_X ve μ_Y özgün görüntü ve süzgeçlenmiş görüntü için yerel ortalama değerler, σ_X^2 ve σ_Y^2 yerel varyanslar, σ_{XY} yerel ortak varyans, C_1 ve C_2 sabit değerlerdir. SSIM ölçütüyle iki görüntünün benzer olup olmadığı kontrol edilmektedir. Yukarıda gri düzeyli görüntüler için verilen nicel değerlendirme ölçütleri renkli görüntüler için de kolayca uyarlanabilir.

Barbara, Lena ve Peppers test görüntüleri için sırasıyla Şekil 6.a, 7.a ve 8.a yapay olarak bulanıklık ve beyaz Gauss gürültüsü eklenmiş girdi görüntülerini, 6.b, 7.b ve 8.b Tikhonov FFT yöntemini, 6.c, 7.c ve 8.c frekans bölgesinde kesilmiş SVD (TSVD) yaklaşımını, 6.d, 7.d ve 8.d ayrılabilir süzgece ait Tikhonov yaklaşımının SVD ile çözümünü, 6.e-f, 7.e-f ve 8.e-f Tikhonov yönteminin frekans bölgesinde P_1 düzenleme süzgecini kullanan yaklaşımını ve P_2 düzenleme süzgecini kullanan önerilen yöntemin sonuçlarını göstermektedir. Görüntüler incelendiğinde en iyi sonuç önerilen yöntemle elde edilmiştir. Bu durumu destekleyen PSNR ve SSIM değerlerine ait nicel sonuçlar ise Tablo 1’de verilmiştir. Diğer bir ifadeyle önerilen yöntemin hem görsel hem sayısal olarak en iyi sonuçları verdiği söylenebilir. Diğer yaklaşımlarla karşılaştırıldığında, önerilen yöntemin koşma süresi de ortalama civarındadır.



Şekil 5. Renkli test görüntüleri: a) Barbara, b) Peppers ve c) Lena



Şekil 6. Barbara test görüntüsü için elde edilen düzenlileştirme sonuçları: a) Yapay olarak bulanıklık ($\sigma = 3$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 50$) eklenmiş görüntü, b) Tikhonov FFT yöntemi, c) TSVD FFT yöntemi, d) Tikhonov ayrılabilir süzgeç yöntemi, e) Genel Tikhonov FFT yöntemi (P1 matrisine göre) ve f) Önerilen yöntem (P2 matrisine göre)



Şekil 7. Peppers test görüntüsü için elde edilen düzenlileştirme sonuçları: a) Yapay olarak bulanıklık ($\sigma = 3$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 50$) eklenmiş görüntü, b) Tikhonov FFT yöntemi, c) TSVD FFT yöntemi, d) Tikhonov ayrılabilir süzgeç yöntemi, e) Genel Tikhonov FFT yöntemi (P1 matrisine göre) ve f) Önerilen yöntem (P2 matrisine göre)



Şekil 8. Lena test görüntüsü için elde edilen düzenlileştirme sonuçları: a) Yapay olarak bulanıklık ($\sigma = 3$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 50$) eklenmiş görüntü, b) Tikhonov FFT yöntemi, c) TSVD FFT yöntemi, d) Tikhonov ayrılabilir süzgeç yöntemi, e) Genel Tikhonov FFT yöntemi (P1 matrisine göre) ve f) Önerilen yöntem (P2 matrisine göre)

Tablo 1. Bulanıklık ($\sigma = 3$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 50$) ilave edilmiş Barbara (B), Peppers (P) ve Lena (L) test görüntüleri için yöntemlere ait sonuçlar ve program kod parçalarının çalışma süreleri

		Yöntem				
		Tikhonov FFT	TSVD FFT	Tikhonov Ayrılabilir Süzgeç	Genel Tikhonov FFT	Önerilen
PSNR	B	18.404	22.669	18.356	22.034	23.076
	P	18.449	23.089	18.338	22.439	23.511
	L	18.323	23.874	18.308	22.849	24.316
SSIM	B	0.4257	0.6916	0.4934	0.6693	0.7114
	P	0.7461	0.9099	0.7853	0.9015	0.9175
	L	0.7215	0.9247	0.7773	0.9106	0.9310
Süre (Saniye)	B	0.358	0.244	0.823	0.846	0.619
	P	0.334	0.197	0.707	0.777	0.474
	L	0.349	0.204	0.740	0.745	0.496

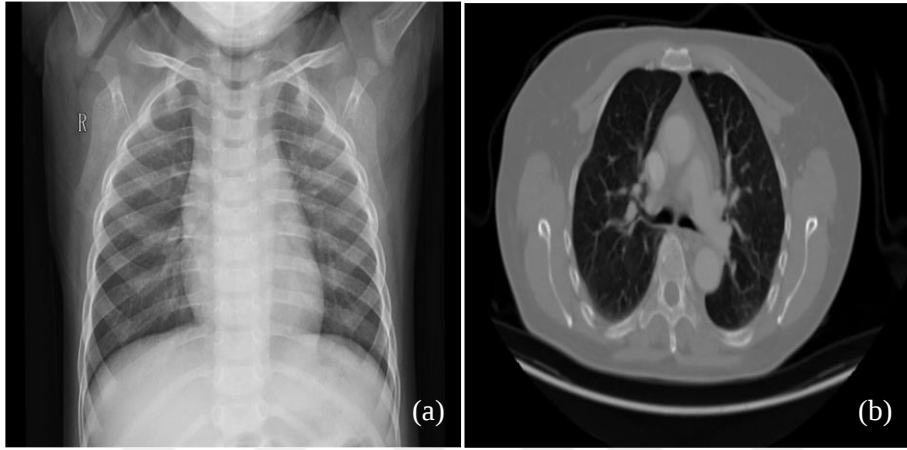
Burada renkli görüntülerdeki bulanıklık ve gürültü gibi istenmeyen etkilerin giderilmesi için, Tikhonov düzenlileştirilmesinin frekans bölgesindeki çözümünde görüntüdeki yapı bilgisinin korunması açısından daha büyük boyutlu Laplace süzgeci kullanılmış ve önerilen yöntemle başarılı sonuçlar elde edilmiştir (Dizdaroğlu ve Alkan Özdemir, 2022).

2.2.3. Düzenleştirme Yönteminin Bilgisayarlı Tomografi Görüntülerine Uygulanması

Bilgisayarlı tomografi görüntüleme tekniği ile üretilen görüntüler genelde gri düzeylelidir. Bu bağlamda renkli görüntüler için geliştirilen çalışma (Dizdaroğlu ve Alkan Özdemir, 2022) (57)'deki denklem dikkate alınarak bilgisayarlı tomografi görüntülerinin düzenlileştirilmesinde kullanılabilir. (57)'deki denklemin çözümünde de düzenlileştirilmiş PSF fonksiyonları olarak $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ matrisleri dikkate alınabilir.

Önerilen yöntemin bilgisayarlı tomografi görüntülerinin düzenlileştirilmesinde kullanılması açısından iki farklı veri setinden seçilen ve Şekil 9.a ve 9.b'de gösterilen 512×512 boyutlu göğüs ve akciğer görüntüleri dikkate alınmıştır (URL-6, 2024; URL-7, 2024). Burada da yöntemlerin performansını karşılaştırmak için literatürdeki Tikhonov FFT

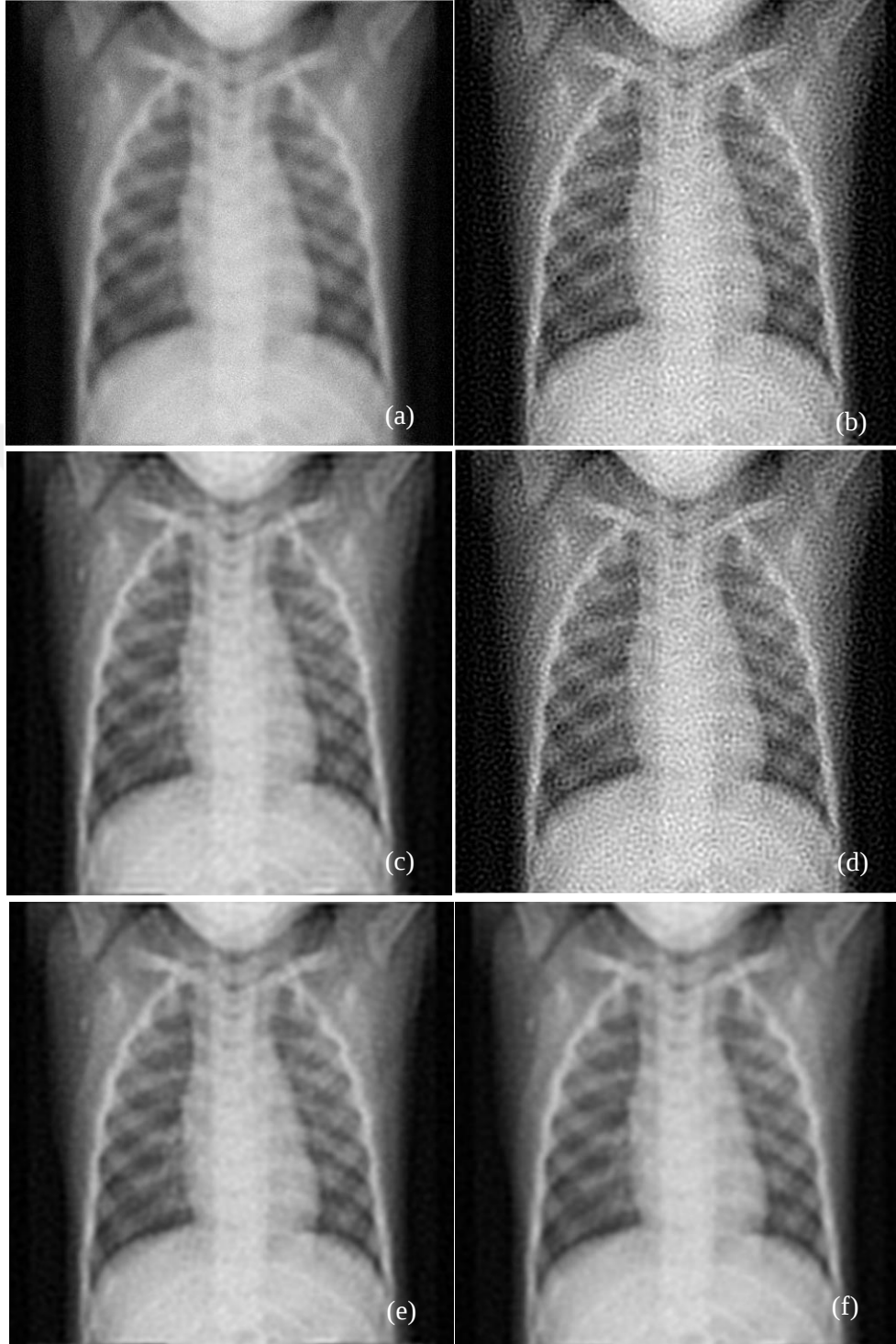
(Hansen, Nagy ve O'Leary, 2006), TSVD FFT (Hansen, Nagy ve O'Leary, 2006), Tikhonov Ayrılabilir Süzgeç (Hansen, Nagy ve O'Leary, 2006), P_1 süzgeci ile Genel Tikhonov FFT (Hansen, Nagy ve O'Leary, 2006) yaklaşımları göz önüne alınmıştır. Bu yöntemler önerilen yöntem olan P_2 süzgeci ile Genel Tikhonov FFT yaklaşımıyla karşılaştırılmıştır. İlk önce test görüntüleri standart sapmaları ($\sigma=3$) ve ($\sigma=5$) olan bir Gauss süzgeçleriyle konvolüsyona sokularak bulanıklaştırılmıştır. Daha sonra görüntülere yapay olarak beyaz Gauss gürültüleri ($\sigma=10$) ve ($\sigma=20$) ilave edilmiştir.



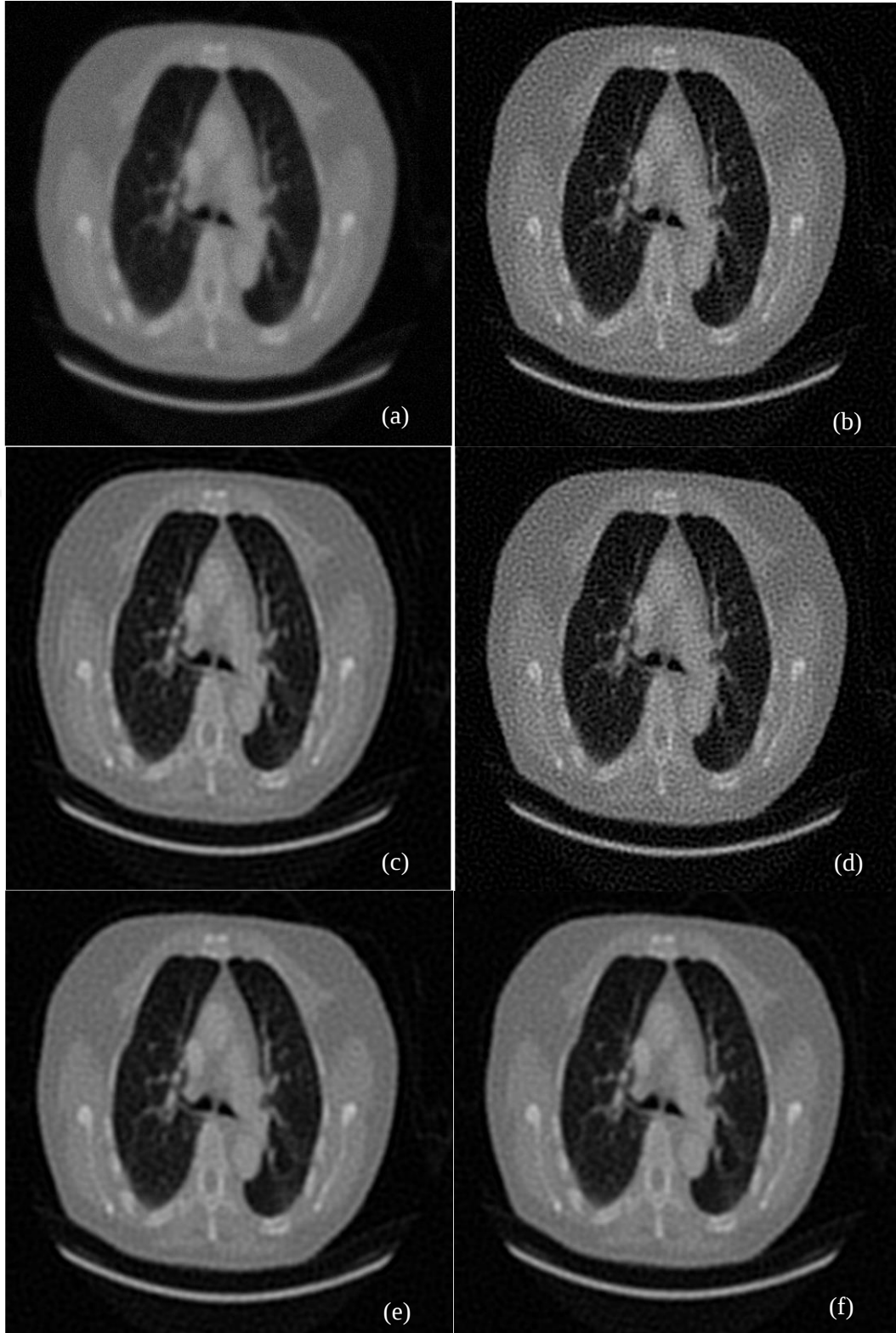
Şekil 9. BT test görüntüleri: a) Göğüs ve c) Akciğer

Göğüs ve Akciğer BT test görüntüleri için sırasıyla Şekil 10.a, 12.a, 11.a ve 13.a yapay olarak bulanıklıklar ve beyaz Gauss gürültüleri eklenmiş girdi görüntülerini 10.b, 12.b, 11.b ve 13.b Tikhonov FFT yöntemini, 10.c, 12.c, 11.c ve 13.c frekans bölgesinde kesilmiş SVD (TSVD) yaklaşımını, 10.d, 12.d, 11.d ve 13.d ayrılabilir süzgece ait Tikhonov yaklaşımının SVD ile çözümünü, 10.e-f, 12.e-f, 11.e-f ve 13.e-f Tikhonov yönteminin frekans bölgesinde P_1 düzenleme süzgecini kullanan yaklaşımını ve P_2 düzenleme süzgecini kullanan önerilen yaklaşımın sonuçlarını vermektedir. Sonuçlar incelendiğinde, BT görüntüleri için de hemen hemen en iyi sonuç önerilen yöntemle elde edilmiştir. Bu durumu destekleyen PSNR ve SSIM değerleri sonuçlar ise Tablo 2 ve Tablo 3'te verilmiştir. Fakat akciğer BT görüntüsü için en iyi sonuç, daha az bozulma eklendiğinde, P_1 düzenleme süzgecini kullanan yaklaşımla elde edilmiştir. Bu yöntemle en yakın sonuç ise, önerilen yöntemle ulaşılmıştır. Burada dikkat edilirse, akciğer BT görüntüsünde daha fazla ince ayrıntı vardır. Bu yüzden önerilen yöntemdeki P_2 düzenleme süzgeci daha geniş olduğundan sonuç görüntüsündeki bazı ince ayrıntılar, başka bir ifadeyle yapı bilgisi tam olarak korunamamıştır. Fakat görüntülerde bozulma yoğunluğu arttıkça önerilen yöntemin

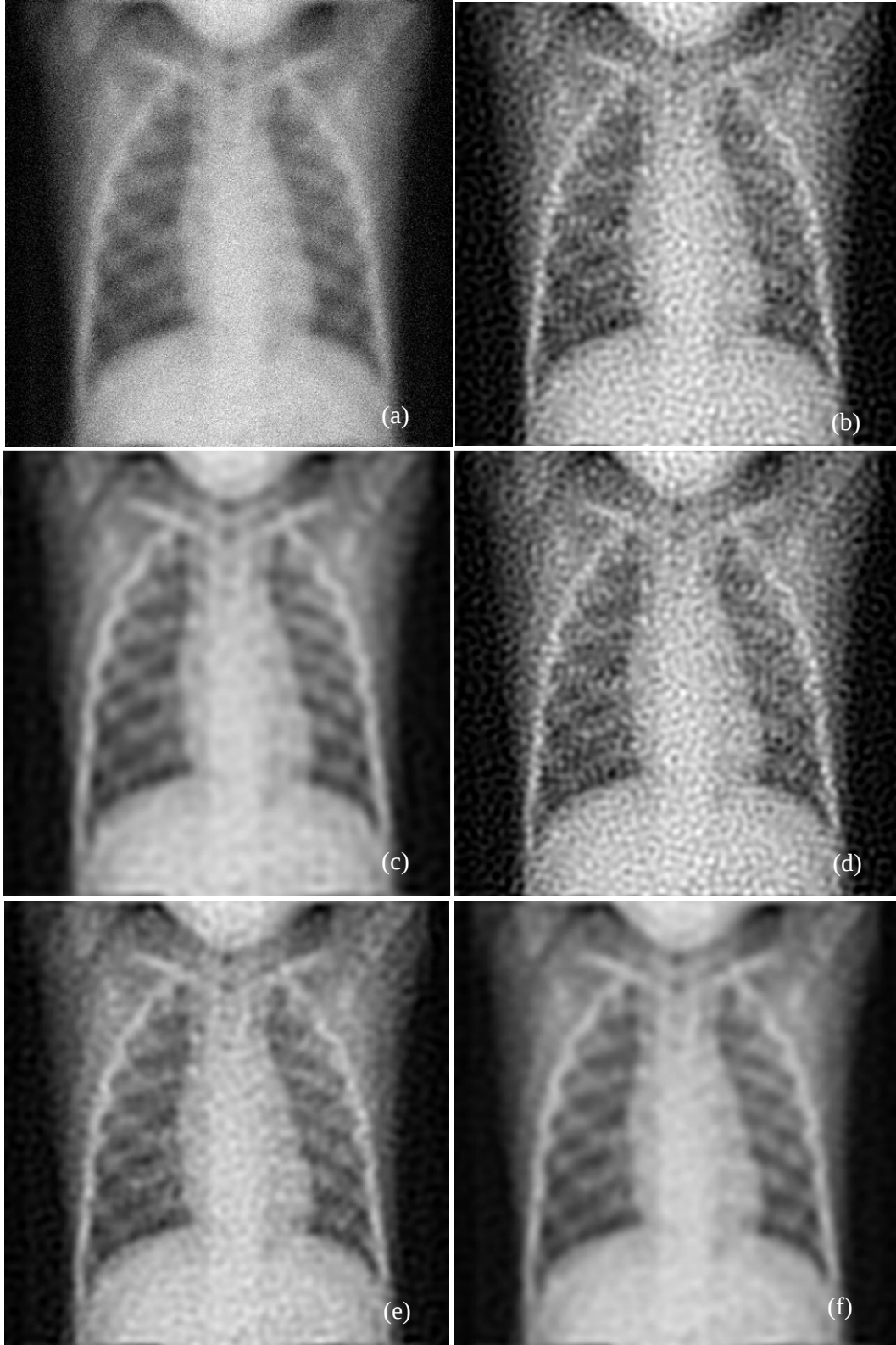
performansının en iyi olduğu Tablo 3'teki nicel sonuçlar dikkate alındığında açıkça görülebilir.



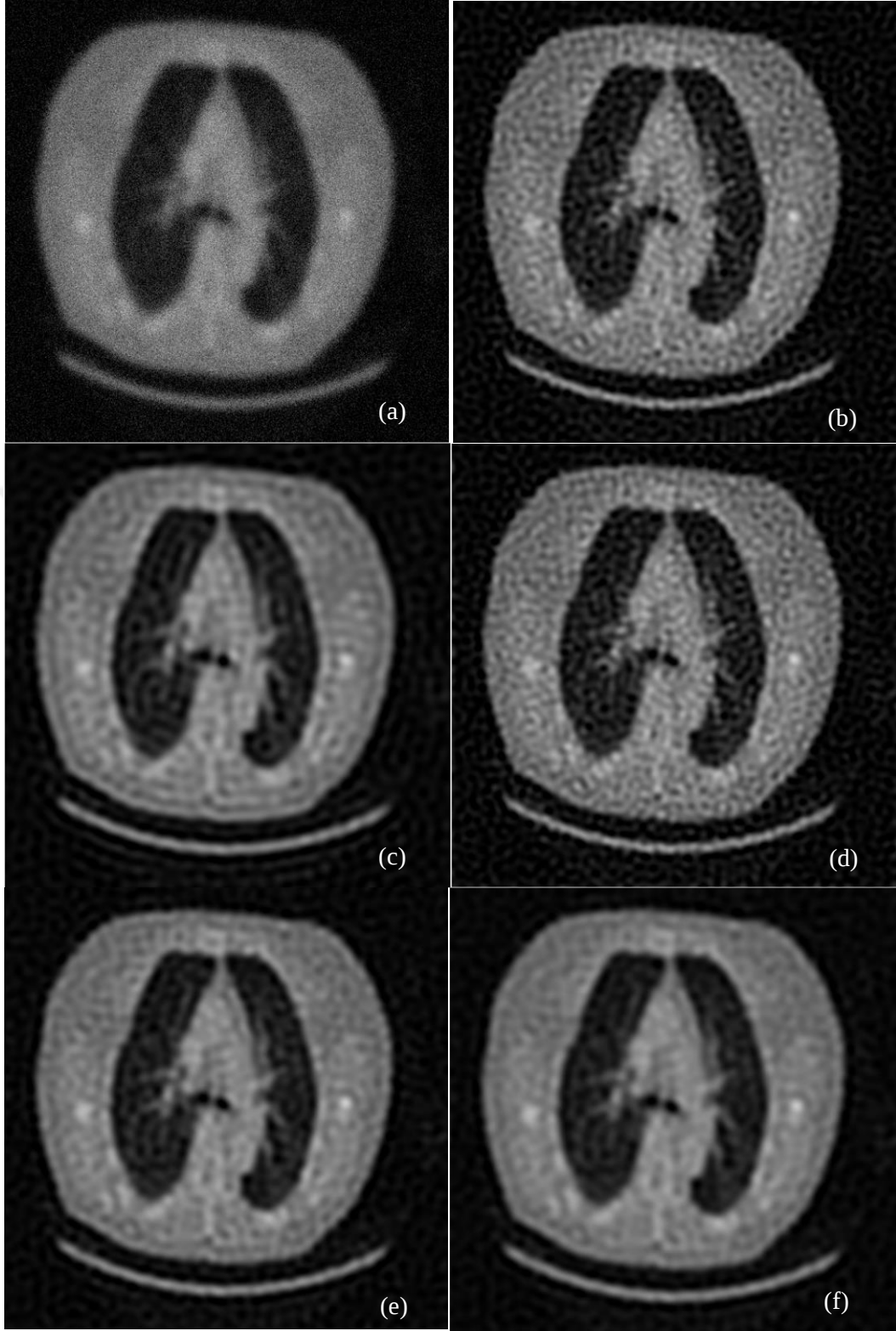
Şekil 10. Göğüs BT test görüntüsü için elde edilen düzenlileştirme sonuçları: a) Yapay olarak bulanıklık ($\sigma = 3$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 10$) eklenmiş görüntü, b) Tikhonov FFT yöntemi, c) TSVD FFT yöntemi, d) Tikhonov ayrılabilir süzgeç yöntemi, e) Genel Tikhonov FFT yöntemi (P1 matrisine göre) ve f) Önerilen yöntem (P2 matrisine göre)



Şekil 11. Akciğer BT test görüntüsü için elde edilen düzenleme sonuçları: a) Yapay olarak bulanıklık ($\sigma = 3$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 10$) eklenmiş görüntü, b) Tikhonov FFT yöntemi, c) TSVD FFT yöntemi, d) Tikhonov ayrılabilir süzgeç yöntemi, e) Genel Tikhonov FFT yöntemi (P1 matrisine göre) ve f) Önerilen yöntem (P2 matrisine göre)



Şekil 12.Göğüs BT test görüntüsü için elde edilen düzenlileştirme sonuçları: a) Yapay olarak bulanıklık ($\sigma = 5$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 20$) eklenmiş görüntü, b) Tikhonov FFT yöntemi, c) TSVD FFT yöntemi, d) Tikhonov ayrılabilir süzgeç yöntemi, e) Genel Tikhonov FFT yöntemi (P1 matrisine göre) ve f) Önerilen yöntem (P2 matrisine göre)



Şekil 13. Akciğer BT test görüntüsü için elde edilen düzenleme sonuçları: a) Yapay olarak bulanıklık ($\sigma = 5$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 20$) eklenmiş görüntü, b) Tikhonov FFT yöntemi, c) TSVD FFT yöntemi, d) Tikhonov ayrılabilir süzgeç yöntemi, e) Genel Tikhonov FFT yöntemi (P1 matrisine göre) ve f) Önerilen yöntem (P2 matrisine göre)

Tablo 2. Bulanıklık ($\sigma = 3$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 10$) ilave edilmiş Göğüs (G) ve Akciğer (A) BT test görüntüleri için yöntemlere ait sonuçlar

		Yöntem				
		Tikhonov FFT	TSVD FFT	Tikhonov Ayrılabilir Süzgeç	Genel Tikhonov FFT	Önerilen
PSNR	G	25.201	30.528	25.187	30.873	30.891
	A	27.576	31.183	27.554	31.891	31.861
SSIM	G	0.1582	0.3638	0.1580	0.3803	0.3849
	A	0.1912	0.2640	0.1914	0.2914	0.2896

Tablo 3. Bulanıklık ($\sigma = 5$) ve beyaz Gauss gürültüsü ($\sigma = 20$) ilave edilmiş Göğüs (G) ve Akciğer (A) BT test görüntüleri için yöntemlere ait sonuçlar

		Yöntem				
		Tikhonov FFT	TSVD FFT	Tikhonov Ayrılabilir Süzgeç	Genel Tikhonov FFT	Önerilen
PSNR	G	23.924	28.514	23.812	27.830	28.853
	A	25.186	26.607	25.067	27.101	27.219
SSIM	G	0.1386	0.2942	0.1379	0.2595	0.3082
	A	0.1404	0.1540	0.1406	0.1667	0.1672

Yaklaşımlara ait program kod parçaları, MATLAB betik dili kullanılarak Intel (R) Core (TM) i7-7700HQ CPU @ 2.80GHz işlemcili, 8 GB RAM bellekli ve Windows 10 işletim sistemli bir bilgisayarda çalıştırılmıştır.

3. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında, bilgisayarlı tomografi görüntülerindeki bulanıklığı gidermek ve gürültüyü azaltmak için hızlı çözümler üreten bazı matematiksel yaklaşımlar dikkate alınmıştır. Ayrıca bu görüntü iyileştirme yaklaşımlarından FFT algoritmasına bağlı Genel Tikhonov yönteminin performansı da artırılmıştır. Bu yöntem, görüntünün frekans bölgesindeki çözümünü düzenler ve istenmeyen etkileri minimize eder. Tikhonov düzenlileştirmesi, bir ters problem olarak kabul edilir ve görüntünün bozulmuş hali, bir bozulma operatörü tarafından orijinal görüntüye uygulanarak elde edilir.

Bu çalışmada, görüntüdeki yapı bilgisini korumak amacıyla daha büyük boyutlu Laplace süzgeci kullanılmıştır. Laplace süzgeci, görüntüdeki yüksek frekans bileşenlerini vurgular ve kenarları daha iyi korur. Bu sayede bulanıklığı azaltır ve görüntüyü daha net hale getirir.

Tikhonov düzenlileştirmesi özellikle medikal görüntüleme, görüntü restorasyonu ve görüntü işleme alanlarında yaygın olarak kullanılır. Ancak, her durumda en uygun parametreleri seçmek önemlidir. Bu parametreler, görüntünün özelliklerine ve bozulma türüne bağlı olarak ayarlanmalıdır.

4. ÖNERİLER

Bu çalışmada BT görüntülerindeki hem bulanıklaşmanın hem de gürültünün giderilmesi için iyileştirilmiş bir yöntem önerilmiştir. Elde edilen sonuçlardan da görülebileceği gibi önerilen yöntemle başarılı sonuçlar elde edilebilmektedir. Aslında bu çalışmadaki ana amaç, günümüzde derin öğrenmede özellikle görüntü işlemede kullanılan evrişimli sinir ağlarındaki evrişimsel işlemlerinin hızlı bir şekilde nasıl gerçekleştirilebileceğini araştırmaktır. Bu bağlamda frekans bölgesinde yapılan hızlı evrişimsel işlemlerin evrişimsel sinir ağlarının bloklarında gerçekleştirilen evrişimsel işlemlerde kullanılıp kullanılamayacağı üzerine bazı araştırmalar ileriki aşamalarında gerçekleştirilmeye çalışılacaktır. Ayrıca Kosinüs dönüşümüne bağlı yaklaşımlar performans açısından en kötü sonuçları ürettiği için bu tez çalışmasında kapsam dışı tutulmuştur, fakat ileriki araştırmalarda Kosinüs dönüşümüne bağlı olarak geliştirilebilecek düzenleme yöntemlerinin de daha iyi bir şekilde irdelenmesi yapılacaktır.

5. KAYNAKLAR

- Abuya, T. K., Rimiru, R. M. & Okeyo, G. O. (2023). An Image Denoising Technique Using Wavelet-Anisotropic Gaussian Filter-Based Denoising Convolutional Neural Network for CT Images. *Applied Sciences*, 13(21), 12069. doi:10.3390/app132112069
- Al-Ameen, Z. & Sulong, G. (2015). Deblurring Computed Tomography Medical Images Using a Novel Amended Landweber Algorithm. *Interdisciplinary Sciences – Computational Life Sciences*, 7(3), 319–325. doi:10.1007/s12539-015-0022-1
- Bhattacharyya, S., Maulik, U. & Dutta, P. (Ed.). (2017). *Quantum Inspired Computational Intelligence Research and Applications*. *Quantum Inspired Computational Intelligence*. Cambridge: Morgan Kaufmann. doi:10.1016/c2015-0-01859-7
- Björck, A. (1996). *Numerical Methods For Least Squares Problems*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Bovik, A. (2000). *Hand Book Of Image And Video Processing*. Canada: Academic Press.
- Cascarano, P., Piccolomini, E. L., Morotti, E. & Sebastiani, A. (2022). Plug-and-Play Gradient-Based Denoisers Applied to CT Image Enhancement. *Applied Mathematics and Computation*, 422. doi:10.1016/j.amc.2022.126967
- Choi, Y., Han, M., Jang, H., Shim, H. & Baek, J. (2022). Two-Phase Learning-based 3D Deblurring Method For Digital Breast Tomosynthesis Images. *PLOS ONE*, 17(1), 1–19. doi:10.1371/journal.pone.0262736
- Dizdaroğlu, B. & Alkan Özdemir, C. (2022). FFT Algoritmasına Bağlı Genel Tikhonov Yöntemi ni Kullanarak Renkli Görüntülerde Bulanıklık Giderme Deblurring in Color Images Using General Tikhonov Method Based on FFT Algorithm. *2022 30th Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU)*, 1–4. <https://ieeexplore.ieee.org/author/37089509580> adresinden erişildi.
- Fan, Y. W. (Daniel) & Nagy, J. G. (2011). Synthetic boundary conditions for image deblurring. *Linear Algebra and Its Applications*, 434(11), 2244–2268. doi:10.1016/J.LAA.2009.12.021
- Gonzalez, R. C. & Woods, R. E. (2018). *Digital Image Processing* (Fourth.). New York: Pearson.
- Hansen, P. C. (1998). *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Hansen, P. C. (2010). *Discrete Inverse Problems*. *Discrete Inverse Problems*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics. doi:10.1137/1.9780898718836
- Hansen, P. C., Nagy, J. G. & O’Leary, D. P. (2006). *Deblurring Images: Matrices, Spectra, and Filtering*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

- Lee, M.-H., Yun, C.-S., Kim, K. & Lee, Y. (2022). Image Restoration Algorithm Incorporating Methods To Remove Noise And Blurring From Positron Emission Tomography Imaging For Alzheimer's Disease Diagnosis. *Physica Medica*, 103(August), 181–189. doi:10.1016/j.ejmp.2022.10.016
- Li, C. & Fan, Q. (2018). A Modified Variational Model for Restoring Blurred Images with Additive Noise and Multiplicative Noise. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 37(6), 2511–2534. doi:10.1007/s00034-017-0675-6
- Lindfield, G. & Penny, J. (2019). *Numerical Methods Using Matlab* (Fourth.). Academic Press. doi:10.1016/C2016-0-00395-9
- Majee, S., Aslan, S., Gürsoy, D. & Bouman, C. A. (2022). CodEx: A Modular Framework for Joint Temporal De-Blurring and Tomographic Reconstruction. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, 8, 666–678. doi:10.1109/TCL.2022.3197935
- Nagare, M., Tang, J., Rahman, O., Nett, B., Melnyk, R., Sauer, K. D. & Bouman, C. A. (2022). A Noise Preserving Sharpening Filter for CT Image Enhancement. *2022 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)* içinde (ss. 2566–2570). Bordeaux, France: IEEE. doi:10.1109/ICIP46576.2022.9897227
- Ng, M. K., Chan, R. H. & Tang, W. (1999). A Fast Algorithm for Deblurring Models with Neumann Boundary Conditions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(3), 851–866.
- Petrova, T., Petrov, Z. & Petkova-Georgieva, S. (2021). Computer Tomography Blurred Images Recovery. *2021 IEEE 27th International Symposium for Design and Technology in Electronic Packaging, SIITME 2021 - Conference Proceedings*, 210–213. doi:10.1109/SIITME53254.2021.9663624
- Rader, C. M. & Maling, G. C. (1967). What Is the Fast Fourier Transform? *Proceedings of the IEEE*, 55(10), 1664–1674. doi:10.1109/PROC.1967.5957
- Rudin, L. I., Osher, S. & Fatemi, E. (1992). Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Physica D*, 60(1–4), 259–268. doi:10.1016/0167-2789(92)90242-F
- Sevgi, L. (2014). *Electromagnetic Modeling and Simulation*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons. doi:10.1002/9781118716410
- Sharif, S. M. A., Naqvi, R. A., Mehmood, Z., Hussain, J., Ali, A. & Lee, S. W. (2023). MedDeblur: Medical Image Deblurring With Residual Dense Spatial-Asymmetric Attention. *Mathematics*, 11(1), 1–16. doi:10.3390/math11010115
- Shi, M., Gu, Z., Gao, Y., Liu, X. & Chen, L. (2022). Optical Remote Sensing Image Deblurring Based on Deep Unfolding. *International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, 3295–3298. doi:10.1109/IGARSS46834.2022.9883092
- Strang, G. (2019). *Linear Algebra and Learning from Data*. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press.

- Tang, L. & Fang, Z. (2016). Edge and contrast preserving in total variation image denoising. *Eurasip Journal on Advances in Signal Processing*, 2016(1), 1–21. doi:10.1186/s13634-016-0315-5
- URL-1. (2022, Kasım 23). PSF Estimation and Image Restoration: <https://www.cosmostat.org/research-topics/psf> adresinden alınmıştır.
- URL-2. (2022, Kasım 23). Point Spread Function: [https://svi.nl/Point-Spread-Function-\(PSF\)](https://svi.nl/Point-Spread-Function-(PSF)) adresinden alınmıştır.
- URL-3. (2022, Kasım 19). Computed Tomography (CT): <https://www.nibib.nih.gov/science-education/science-topics/computed-tomography-ct> adresinden alınmıştır.
- URL-4. (2022, Kasım 19). Computerized Tomography: <https://www.cancer.gov/publications/dictionaries/cancer-terms/def/computerized-tomography> adresinden alınmıştır.
- URL-5. (2022, Kasım 20). Discrete Cosine Transform: [https://www.mathworks.com/help/images/discrete-cosine-transform.html?s_tid=srchtitle_discrete cosine transform_1](https://www.mathworks.com/help/images/discrete-cosine-transform.html?s_tid=srchtitle_discrete%20cosine%20transform_1) adresinden alınmıştır.
- URL-6. (2024, Şubat 13). Chest CT-Scan images Dataset: <https://www.kaggle.com/datasets/mohamedhanyyy/chest-ctscan-images> adresinden alınmıştır.
- URL-7. (2024, Şubat 13). COVID-19 Xray Dataset (Train & Test Sets): <https://www.kaggle.com/datasets/khoongweihao/covid19-xray-dataset-train-test-sets> adresinden alınmıştır.
- Verma, R. & Ali, J. (2013). A Comparative Study of Various Types of Image Noise and Efficient Noise Removal Techniques. *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering*, 3(10), 617–622. https://www.researchgate.net/publication/307545428_A_comparative_study_of_various_types_of_image_noise_and_efficient_noise_removal_techniques adresinden erişildi.
- Wu, D., Guerrero, P., Sinico, M. & Dewulf, W. (2022). L0 Regularized Image Deblurring Applied To Porosity Analysis In Industrial X-ray Computed Tomography. *11th Conference on Industrial Computed Tomography*, (2022–03), 3–8. www.ict-conference.com/2022 adresinden erişildi.
- Wu, W., Hu, D., Niu, C., Broeke, L. Vanden, Butler, A. P. H., Cao, P., ... Wang, G. (2021). Deep learning Based Spectral CT Imaging. *Neural Networks*, 144, 342–358. doi:10.1016/j.neunet.2021.08.026

- Yao, Z., Fan, S., Nakajima, Y. & Qu, X. (2020). A Combined Regularization Method Using Prior Structural Information for Sound-Speed Image Reconstruction of Ultrasound Computed Tomography. *IEEE Access*, 8, 106832–106842. doi:10.1109/ACCESS.2020.3000062
- Zifan, A. & Liatsis, P. (2011). Medical image deblurring via lagrangian pursuit in frame dictionaries. *Proceedings - 4th International Conference on Developments in eSystems Engineering, DeSE 2011*, 86–91. doi:10.1109/DeSE.2011.102



ÖZGEÇMİŞ

İlköğrenimini Giresun Mehmet Akif Ersoy Okulu'nda bitirdikten sonra lise eğitimini 2010 yılında Giresun Mimar Sinan Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2011 yılında İstanbul Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği'nde Lisans öğrenimine başladı ve 2016 yılında tamamladı. 2020 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı Bilgisayar Mühendisliği bölümünde yüksek lisansa başladı.

