



**DÜZGÜN OLMAYAN ANALİZDE
EXHAUSTERLARIN İNDİRGENMESİ
ÜZERİNE**

Yüksek Lisans Tezi

ÖMER COŞKUN

Eskişehir 2025

DÜZGÜN OLMAYAN ANALİZDE EXHAUSTERLARIN
İNDİRGENMESİ ÜZERİNE

Ömer COŞKUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Dr.Öğr.Üy. Didem TOZKAN

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Temmuz 2025

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Ömer COŞKUN'un "DÜZGÜN OLMAYAN ANALİZDE EXHAUSTERLARIN İNDİRGENMESİ ÜZERİNE" başlıklı tezi 07/07/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvanı Adı-Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Dr. Öğr. Üy. Didem TOZKAN	
Üye	: Doç. Dr. İlknur ATASEVER GÜVENÇ	
Üye	: Dr. Öğr. Üy. Mustafa SOYERTEM	

Prof. Dr. Harun BÖCÜK
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

07/07/2025

DANIşMAN ONAYI

Danişmanlığını yürüttüğüm yüksek lisans ęrencisi mer COşKUN, “DÜZ-GÜN OLMAYAN ANALİZDE EXHAUSTERLARIN İNDİRGENMESİ ÜZERİNE” başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımca incelenmiş ve öğrencinin tez savunma sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun grlmştir.

Tez Daniřmanı

Dr.Öğr.y. Didem TOZKAN

ÖZET

DÜZGÜN OLMAYAN ANALİZDE EXHAUSTERLARIN İNDİRGENMESİ ÜZERİNE

Ömer COŞKUN

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Temmuz 2025

Danışman: Dr. Öğr. Üy. Didem TOZKAN

Diferansiyellenebilir fonksiyonların analizinde kullanılan gradyan kavramı ve konveks analizde gradyanın yerine işlev gören subdiferansiyel kavramının yanı sıra, düzgün olmayan (nonsmooth) analizde yönlü türev ve (Dini, Hadamard yönlü türevler gibi) genelleştirmeleri ile Clarke subdiferansiyel, Michel-Penot subdiferansiyel ve kuasidiferansiyel gibi çeşitli genelleştirmeler kullanılmaktadır. Exhauster kavramı ise düzgün olmayan fonksiyonların analizi ve optimizasyonunda kullanılan etkin araçlardan biridir. Bu tez çalışmasında, öncelikle Dini, Hadamard yönlü türevler ve bunlarla verilen optimallik koşulları incelenmiştir. Daha sonra konveks analizdeki subdiferansiyel kavramı ve optimallik koşulları hatırlatılmıştır. Daha sonra, üst ve alt exhausterlar tanıtarak, bu dual kavramlar çok sayıda örnek üzerinde incelenmiştir. Üst ve alt exhausterlar ile verilen optimallik koşulları incelenmiş ve yönlü türevlerle bağlantısı açıklanmıştır. Bu incelemelerin sonrasında, bu teoride önemli bir role sahip olan exhausterların “indirgeme teknikleri” detaylı olarak araştırılıp, indirgeme yaklaşımlarına göre iki ayrı grupta derlenmiştir. İlk olarak, exhausterların kapsamaya göre daha küçük hale getirilmesi ya da kapsamaya göre minimal olması için çok sayıda teknik incelenmiş ve çeşitli örneklerle açıklanmıştır. Daha sonra, exhausterların şekle göre daha küçük hale getirilmesi ya da şekle göre minimal olması için literatürde var olan koşullar ve teknikler incelenmiş ve açıklayıcı örnekler üzerinde analiz edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Düzgün olmayan optimizasyon, Exhauster, Optimallik koşulu, Exhausterların indirgenmesi, Minimal exhauster

ABSTRACT

ON REDUCTION OF EXHAUSTERS IN NONSMOOTH ANALYSIS

Ömer COŞKUN

Department of Mathematics

Programme in Analysis and Theory of Functions

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, July 2025

Supervisor: Ass.Prof. Didem TOZKAN

In nonsmooth analysis and optimization, some generalizations of the concept of derivative such as directional derivatives (such as Dini, Hadamard directional derivatives), Clarke subdifferential, Michel-Penot subdifferential and quasidifferential are employed, in addition to the concept of gradient used in the analysis of differentiable functions and the concept of subdifferential, which is used instead of gradient in convex analysis. The concept of exhaustor is one of the effective tools used in the analysis and optimization of nonsmooth functions. In this thesis, firstly Dini, Hadamard directional derivatives and the optimality conditions given by them are examined. Then, the concept of the subdifferential in convex analysis and optimality conditions obtained by subdifferential are reminded. Then, upper and lower exhaustors are introduced and these dual concepts are examined on various examples. The optimality conditions given by upper and lower exhaustors are examined and their connection with directional derivatives is explained. After these studies, the “reduction techniques” of exhaustors, which have an important role in this theory, were investigated in detail and compiled into two separate groups according to their reduction approaches. First, some techniques for making exhaustors smaller by inclusion or minimal by inclusion are examined and these techniques are explained with various examples. Then, the conditions and techniques available in the literature for making exhaustors smaller by shape or minimal by shape are examined, and analyzed on illustrative examples.

Keywords: Nonsmooth optimization, Exhaustor, Optimality condition
Reduction of exhaustors, Minimal exhaustor

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması sırasında benden ilgisini ve desteğini hiç esirgemeyen, bana her zaman anlayışlı ve sabırlı yaklaşan hocam Dr.Öğr.Üy. Didem TOZKAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca tez yazım süreci boyunca bana destek olan aileme ve bana her zaman moral veren nişanlıma çok teşekkür ediyorum.

Ömer COŞKUN



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığımı ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Ömer COŞKUN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
DANIŞMAN ONAYI.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vii
İÇİNDEKİLER	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER	3
3. EXHAUSTERLAR, TEMEL ÖZELLİKLERİ VE KISITSIZ OPTİMİZASYONDA OPTİMALLIK KOŞULLARI.....	9
3.1. Üst ve Alt Exhausterların Tanımı ve Örnekler	9
3.2. Optimallik Koşulları	17
3.2.1 Yönlü türevlerle optimallik koşulları	18
3.2.2 Konvekslik durumunda subdiferansiyel ile optimallik koşulları.....	19
3.2.3 Exhausterlar ile optimallik koşulları.....	21
4. EXHAUSTERLARIN İNDİRGENMESİ VE MİNİMALİĞİ	24

4.1. Exhausterların Kapsamaya Göre İndirgenmesi ve Minimalliği	25
4.2. Exhausterların Şekle Göre İndirgenmesi ve Minimalliği.....	35
KAYNAKÇA.....	52
ÖZGEÇMİŞ	



ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1. $h(x) = x $ fonksiyonunun $\bar{h}_1$ ve $\bar{h}_2$ üstten konveks yaklaşımları	10
Şekil 3.2. Örnek 3.11’de verilen C_1, C_2, C_3 kümeleri	16
Şekil 3.3. Örnek 3.12’de verilen C_1, C_2, C_3 kümeleri	17
Şekil 3.4. Örnek 3.20’deki $f(x)$ fonksiyonunun grafiği	21
Şekil 4.1. Örnek 4.9’de ki C_i ve Q_i ; Örnek 4.13’deki B_i kümeleri	28
Şekil 4.2. Örnek 4.15’deki $C_2 \subset C_1$ olacak şekildeki C_1, C_2 kümeleri	30
Şekil 4.3. Örnek 4.18’deki C_1, C_2, C_3 kümeleri	31
Şekil 4.4. Örnek 4.20’deki C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 kümeleri	32
Şekil 4.5. Örnek 4.24’te verilen C_i ve $M^*(C_i)$ kümeleri	33
Şekil 4.6. Örnek 4.40’da verilen C_i ve $\hat{C}_i$ kümeleri	40
Şekil 4.7. Örnek 4.54’de verilen C_1, C_2, C_3, C_4 kümeleri	46
Şekil 4.8. Örnek 4.56’da verilen C kümesi ve $v_i(C)$ köşeleri	47

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	: n - boyutlu Öklidyen Uzay
$\bar{B}(x, r)$	: x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
$\mathbb{B}$	: Kapalı birim yuvar
S_1^n	: Kapalı birim yuvar yüzeyi
$\text{int}(A)$	: A kümesinin içi
$\text{cl}(A)$	: A kümesinin kapanışı
$\text{co}(A)$	: A kümesinin konveks zarfı
$p_A(x)$	: A kümesinin x noktasındaki destek fonksiyonu
$H(A, g)$	: A kümesinin g yönündeki destek hiperdüzlemi
$H_-(A, g)$	: A kümesinin g yönündeki negatif yarı-uzayı
$N_A(x)$	: A kümesinin x noktasındaki normal konisi
$f'_D(x, g)$	: f fonksiyonunun x noktası ve g yönündeki Dini Yönlü Türevi
$f'_H(x, g)$	: f fonksiyonunun x noktası ve g yönündeki Hadamard Yönlü Türevi
$f_D^\uparrow(x, g)$	: f fonksiyonunun x noktası ve g yönündeki Dini Üst Türevi
$f_D^\downarrow(x, g)$	: f fonksiyonunun x noktası ve g yönündeki Dini Alt Türevi
$f_H^\uparrow(x, g)$	: f fonksiyonunun x noktası ve g yönündeki Hadamard Üst Türevi
$f_H^\downarrow(x, g)$	: f fonksiyonunun x noktası ve g yönündeki Hadamard Alt Türevi
$\underline{\partial}f(x)$	: f 'nin x noktasındaki subdiferansiyeli
$\bar{\partial}f(x)$	: f 'nin x noktasındaki süperdiferansiyeli
$\Lambda^*(h)$	: h fonksiyonunun üst exhaustive ailesi
$\Lambda_*(h)$	: h fonksiyonunun alt exhaustive ailesi
$E^*(h)$	: h fonksiyonunun üst exhausteri
$E_*(h)$	: h fonksiyonunun alt exhausteri

1. GİRİŞ

Optimizasyon teorisi, bir fonksiyonun kısıtlı bir küme üzerinde ya da kısıtsız olarak fonksiyonun tanımlandığı tüm uzay üzerinde minimum ya da maksimum değerlerinin ve bu değerleri veren minimalleştirici ya da maksimalleştirici noktaların bulunmasını amaçlar. Bu teori, matematiksel analizin temel çalışma alanlarından biri olmakla birlikte, diğer temel bilimler, mühendislik, genetik, İktisadi bilimler ve bilgisayar bilimleri gibi bir çok dalda karşılaşılan problemlerin çözümüne katkı sağlar. Diferansiyellenebilir bir fonksiyonun bir optimal noktada türevinin sıfıra eşit olması Kalkülüste iyi bilinen bir optimallik koşuludur. Ancak, diferansiyellenebilirliğin şart koşulmadığı düzgün olmayan (nonsmooth) fonksiyonların analizi söz konusu olduğunda türev benzeri genelleştirilmiş araçlar kullanılmaktadır. Bu araçlardan ilki yönlü türev ve bunun çeşitli genelleştirmeleri olan Dini ve Hadamard gibi yönlü türevlerdir. Ancak, yönlü türev kavramının da optimallik koşullarını ifade etmek için uygun olmadığı durumlar vardır. Dolayısıyla, konveks analiz konsepti içinde Rockafellar [1] ve Moreau [2] tarafından verilen subdiferansiyel kavramı ve konveks olmayan fonksiyonlar için subdiferansiyelin çeşitli genelleştirmeleri önerilmiştir. Bunların yanında, düzgün olmayan fonksiyonların analizi ve optimallik koşullarının araştırılmasında, exhaustor kavramı diğer yaklaşımlara göre daha yeni ve güncel bir yaklaşımdır. Bir pozitif homojen fonksiyonun üst/alt exhausteri, konveks analizde iyi bilinen Minkowski dualite ve Pschenichnyi'nin [3] pozitif homojen fonksiyonlara üstten konveks/alttan konkav yaklaşımları temel alınarak [4] çalışmasında Demyanov tarafından tanımlanmıştır. Yukarıda bahsedilen yönlü türev ve tüm genelleştirmeleri yöne göre pozitif homojen olduklarından [5], bir fonksiyonun belirli bir noktasındaki (genelleştirilmiş) yönlü türevinin üst/alt exhausteri, optimallik koşullarının ifade edilmesinde ve en dik iniş ya da en dik çıkış yönlerinin elde edilmesinde kullanışlı bir araçtır [6, 7]. Exhaustor kavramı yardımıyla kısıtlı ve kısıtsız optimizasyon problemleri için verilen optimallik koşullarının yanı sıra, exhausterlarla, subdiferansiyel ve çeşitli genelleştirmeleri arasında ilişkiler kurulmuştur [8–10].

Pozitif homojen bir fonksiyonun bir üst ya da alt exhausteri, tek türlü tanımlı olmadığından ve hatta sonsuz sayıda kompakt konveks küme içerebileceğinden, exhausterların indirgenmesi bu teoremin önemli bir parçasıdır. İndirgeme teknikleri,

kapsamaya göre ya da şekle göre daha küçük bir exhauster ya da mümkünse bir minimal exhauster elde etmek anlamına gelir. Roshchina kapsamaya göre ve şekle göre daha küçük ya da minimal exhauster kavramlarını tanımlamış ve exhausterları her iki anlamda da indirgemek için bazı teknikler vermiştir [11, 12]. Grzybowski vd. [13], herhangi bir üst exhausterin bir sublineer fonksiyonun exhausteri olabilmesi için gölgeleyen küme kavramı yardımıyla bir ölçüt vermişlerdir. Ek olarak, sonlu üst exhausterların minimallığı için bir koşul vermiş; minimal exhausterların tek olmak zorunda olmadığını göstermişlerdir.

Öte yandan, Küçük vd. zayıf exhauster kavramını, bir fonksiyonun yönlü türevinin zayıf alt gradyanlarına karşılık gelen kompakt konveks kümelerden oluşturarak tanımladılar ve zayıf exhausterları indirgemek için bazı koşullar verdiler [14, 15]. Exhausterların indirgenmesine ilişkin en yeni çalışmalar, Abbasov [16] ve Tozkan [17] tarafından elde edilen sonuçlardır. Abbasov [16] çalışmasında exhausterların hem kapsamaya hem şekle göre indirgenmesine ilişkin bazı geometrik koşullar önermiş ve bir exhausterin minimallığının kontrol edilebilmesi için yeni bir koşul vermiştir. Tozkan [17] çalışmasında, bir exhaustera ait kompakt konveks kümelerin destek fonksiyonu temsillerini karşılaştırarak, kapsamaya göre daha küçük exhausterların elde edilebilmesi için çeşitli indirgeme teknikleri ve bunun yanında bir exhausterin kapsamaya göre minimallığı için bir gerek ve yeter koşul sunmuştur.

Bu çalışmada, pozitif homojen fonksiyonların üst ve alt exhauster kavramı tanıtılmış, exhausterlar cinsinden kısıtsız optimizasyon problemleri için optimallik koşulları incelenmiştir. Exhausterlara ilişkin temel incelemelerin ardından, exhausterların indirgenmesi ve minimallığına ilişkin literatürde var olan tüm çalışmalar detaylı olarak incelenerek, var olan tüm sonuçlar önce kapsamaya göre daha sonra da şekle göre indirgeme/minimallık kapsamında derlenerek ayrı ayrı gruplandırılarak sunulmuştur. Bu teknikler çeşitli örnekler üzerinde incelenmiş ve bu örnekler detaylı olarak açıklanmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, çalışma için gerekli olan temel kavramlar ve kanıtsız olarak bazı önemli özellikler verilecektir.

Bu çalışmada, genel olarak n -boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklidyen uzayında çalışılacaktır. Aksi belirtilmedikçe, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olmak üzere, $\bar{B}(x, r)$, x merkezli r yarıçaplı kapalı Öklidyen yuvarı, $\mathbb{B}$ kapalı birim Öklidyen yuvarı ve S_1^n kapalı birim yuvar yüzeyini ve 0_n , $\mathbb{R}^n$ 'nin sıfır vektörünü gösterecektir. Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi için, A 'nın içi $\text{int}(A)$ ile; A 'nın kapanışı $\text{cl}A$ ile gösterilecektir.

Öte yandan, her $x, y \in A$ ve her $0 \leq \lambda \leq 1$ sayısı için $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ oluyorsa, A 'ya **konveks küme** denir. Bir A kümesini içeren tüm konveks kümelerin arakesitine A 'nın **konveks zarfı** denir ve $\text{co}A$ ile gösterilir. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme ve $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in C$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye **konveks fonksiyon** denir. Benzer şekilde, her $x, y \in C$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye **konkav fonksiyon** denir.

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $x \in \mathbb{R}^n$ ve her $\lambda \geq 0$ için $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna (birinci mertebeden) **pozitif homojen (p.h.)** fonksiyon denir [4]. Ayrıca, her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ eşitsizliği sağlanıyorsa, f 'ye **alt toplamsal** fonksiyon; her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$ eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye **üst toplamsal** fonksiyon denir. Bir f fonksiyonu p.h. ve alt toplamsal ise f **sublineer** olarak; p.h. ve üst toplamsal ise **süperlineer** olarak adlandırılır.

Tanım 2.1. [1] $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, konveks bir küme olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$p_A(x) := \max_{a \in A} \langle a, x \rangle$$

ile tanımlanan $p_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna A 'nın **destek fonksiyonu** denir.

Tanım 2.2. [16] Keyfi bir $g \in \mathbb{R}^n$ ve bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi için $v_A = \underset{v \in A}{\operatorname{argmax}} \langle v, g \rangle$, ya da denk olarak $p_A(g) = \langle v_A, g \rangle$ olmak üzere

$$A \subseteq H_-(A, g) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - v_A, g \rangle \leq 0\}$$

oluyorsa, yani $H_-(A, g)$ **negatif kapalı yarı-uzayı** A kümesini tamamen kapsı-

yorsa

$$H(A, g) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - v_A, g \rangle = 0\}$$

kümesine A 'nın g yönündeki **destek hiperdüzlemi** denir.

Aşağıda, bir kümenin bir noktasındaki normal konisinin tanımı verilmiştir.

Tanım 2.3. [18] Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi verildiğinde bir $y^* \in A$ için

$$N_A(y^*) = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \langle y - y^*, s \rangle \leq 0, \forall y \in A\}$$

ile tanımlı kümeye A 'nın y^* 'daki **normal konisi** denir.

Süreklilik kavramının genelleştirmesi olarak alttan ve üstten yarı-süreklilik tanımları aşağıda hatırlatılmıştır.

Tanım 2.4. [18] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu her x için

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonu x_0 noktasında **alttan yarı-süreklidir** denir.

Tanım 2.5. [18] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ fonksiyonu her x için

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonu x_0 noktasında **üstten yarı-süreklidir** denir.

Düzgün olmayan (nonsmooth) fonksiyonlar sınıfı göz önüne alındığında, bir fonksiyonun diferansiyellenebilir olmadığı noktalardaki davranışını incelemek, en dik iniş-çıkış yönleri ve optimallik koşulları oluşturmak için yönlü türev kavramı ve çeşitli genelleştirmeleri oldukça kullanışlı bir araç olarak kullanılmaktadır. Aşağıda, bir fonksiyonun Dini ve Hadamard yönlü türevleri hatırlatılmıştır.

Tanım 2.6. [5] $X \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $x \in X$ noktası ve $g \in \mathbb{R}^n$ yönü verilsin. Buna göre

(a) $f'_D(x; g) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} [f(x + \alpha g) - f(x)]$ değerine f 'nin x noktasında g yönündeki **Dini yönlü türevi** denir.

(b) $f'_H(x; g) = \lim_{[\alpha, g'] \rightarrow [0^+, g]} \frac{1}{\alpha} [f(x + \alpha g') - f(x)]$ değerine f 'nin x noktasında g yönündeki **Hadamard yönlü türevi** denir.

Uyarı 2.7. Bir f fonksiyonu bir x noktasında Hadamard yönlü türevlenebilir ise Dini yönlü türevlenebilirdir ve $f'_H(x; g) = f'_D(x; g)$ 'dir. Ancak bu önermenin tersi doğru değildir. Aşağıdaki örnek bunu gösterecektir.

Örnek 2.8. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , y \geq x^2 \text{ veya } y \leq 0 \\ 1 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

fonksiyonu ele alınsın. $x_0 = (0, 0)$ noktası ve $g_0 = (1, 0)$ yönü için f 'nin Dini ve Hadamard yönlü türevleri araştırılacaktır.

$$f'_D(x_0; g_0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \alpha g_0) - f(x_0)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(\alpha, 0)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, f fonksiyonu x_0 noktasında g_0 yönünde Dini yönlü türevlenebilir. Öte yandan

$$f'_H(x_0; g_0) = \lim_{[\alpha, g'] \rightarrow [0^+, g_0]} \frac{f(x_0 + \alpha g') - f(x_0)}{\alpha}$$

limiti için $0 < \varepsilon < 1$ ve $\varepsilon \rightarrow 0$ olmak üzere herhangi bir $g' = (1, \varepsilon)$ dizisi seçilirse, her $\varepsilon > 0$ için yeterince büyük bir $\alpha > \varepsilon$ sayısı bulunabilir ve böylece $\varepsilon\alpha < \alpha^2$ olacağından $f(\alpha, \varepsilon\alpha) = 1$ olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} f'_H(x_0; g_0) &= \lim_{[\alpha, g'] \rightarrow [0^+, g_0]} \frac{f(x_0 + \alpha g') - f(x_0)}{\alpha} \\ &= \lim_{[\alpha, \varepsilon] \rightarrow [0^+, 0^+]} \frac{f(\alpha, \varepsilon\alpha)}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} = +\infty \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, f 'nin $x_0 = (0, 0)$ noktasında $g_0 = (1, 0)$ yönünde Hadamard yönlü türevi mevcut değildir.

Dini veya Hadamard yönlü türevlerin var olmadığı durumlarda bu türev yaklaşımlarının üst ve alt türev olarak genelleştirmeleri de uygun bir araç olarak kullanılabilir. Aşağıda bu genelleştirilmiş türevler verilecektir.

Tanım 2.9. [5] $X \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $x \in X$ noktası ve $g \in \mathbb{R}^n$ yönü verilsin. Buna göre

(a) $f_D^\uparrow(x; g) = \limsup_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} [f(x + \alpha g) - f(x)]$ değerine f 'nin x noktasında g yönündeki **Dini üst türevi** denir.

(b) $f_D^\downarrow(x; g) = \liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} [f(x + \alpha g) - f(x)]$ değerine f 'nin x noktasında g yönündeki **Dini alt türevi** denir.

(c) $f_H^\uparrow(x; g) = \limsup_{[\alpha, g'] \rightarrow [0^+, g]} \frac{1}{\alpha} [f(x + \alpha g') - f(x)]$ değerine f 'nin x noktasında g yönündeki **Hadamard üst türevi** denir.

(d) $f_H^\downarrow(x; g) = \liminf_{[\alpha, g'] \rightarrow [0^+, g]} \frac{1}{\alpha} [f(x + \alpha g') - f(x)]$ değerine f 'nin x noktasında g yönündeki **Hadamard alt türevi** denir.

Uyarı 2.10. Bir fonksiyonun Dini (Hadamard) anlamında yönlü türevlenebilir olmadığı, ancak Dini (Hadamard) üst ve/veya alt Dini (Hadamard) türevin mevcut olduğu çok sayıda düzgün olmayan fonksiyon vardır. Aşağıda, Dini yönlü türevlenebilir olmadığı halde Dini üst ve alt türeve sahip bir fonksiyon örneği verilmiştir.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu ele alınsın. $x_0 = 0$ noktası ve $g_0 = 1$ yönü için $f_D'(x_0, g_0)$ Dini yönlü türevi mevcut değildir. Gerçekten,

$$f_D'(x_0, g_0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(0+\alpha) - f(0)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\alpha \sin(\frac{1}{\alpha})}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sin(\frac{1}{\alpha})$$

elde edilir. $\alpha \rightarrow 0^+$ için $\sin(\frac{1}{\alpha})$ değeri -1 ile 1 arasında salındığından limit mevcut değildir. Öte yandan,

$$f_D^\downarrow(x_0, g_0) = -1 \text{ ve } f_D^\uparrow(x_0, g_0) = 1$$

şeklinde Dini alt ve üst türevler mevcuttur. Burada $f_D^\downarrow(x_0, g_0) = f_D^\downarrow(0, 1) = -1$ olduğu gösterilecektir; $f_D^\uparrow(x_0, g_0) = 1$ olduğu da benzer biçimde kanıtlanabilir. Öncelikle

$$f_D^\downarrow(x_0, g_0) = \liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \sin(\frac{1}{\alpha}) = \sup_{\delta > 0} \inf_{0 < \alpha < \delta} \sin(\frac{1}{\alpha})$$

olduğuna göre her $\delta > 0$ için $\sin(\frac{1}{\alpha})$ fonksiyonunun $(0, \delta)$ aralığındaki infimum değeri hesaplanmalıdır. Açıktır ki $\sin x$ fonksiyonu $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ değerleri için -1 değerini almaktadır. Buradan

$$x_n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \text{ ve } \alpha_n = \frac{1}{x_n}$$

dizileri oluşturulursa, $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow \infty$ ve böylece $\alpha_n \rightarrow 0^+$ olacaktır. Ayrıca

$$\sin\left(\frac{1}{\alpha_n}\right) = \sin(x_n) = -1$$

olduğu da açıktır. O halde $\alpha_n \rightarrow 0^+$ için $\sin(\frac{1}{\alpha_n}) \rightarrow -1$ 'dir. Her $\delta > 0$ sayısı için $0 < \alpha_n < \delta$ olacak şekilde $\exists n \in \mathbb{N}$ var olduğundan

$$\inf_{0 < \alpha < \delta} \sin\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq -1 \quad (2.1)$$

eşitsizliği elde edilir. Öte yandan sinüs fonksiyonu -1 'den daha küçük hiçbir değer almadığından

$$\forall \alpha > 0 \text{ için } \sin\left(\frac{1}{\alpha}\right) \geq -1$$

ve dolayısıyla

$$\inf_{0 < \alpha < \delta} \sin\left(\frac{1}{\alpha}\right) \geq -1, \quad \forall \delta > 0$$

olur. Bu da

$$\sup_{\delta>0} \inf_{0<\alpha<\delta} \sin\left(\frac{1}{\alpha}\right) \geq -1 \quad (2.2)$$

olduğunu verir. Sonuç olarak, (2.1) ve (2.2) eşitsizliklerinden

$$f_D^\perp(x_0, g_0) = \liminf_{\alpha \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -1$$

elde edilir.

Uyarı 2.11. Yukarıda tanımları verilen yönlü türev ve diğer genelleştirilmiş türevler, yönün pozitif homojen fonksiyonlarıdır.

Yukarıda hatırlatılan genelleştirilmiş yönlü türevler düzgün olmayan bazı fonksiyon örnekleri üzerinde incelenecektir.

Örnek 2.12. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ konveks fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Dini ve Hadamard yönlü türevleri hesaplanırsa

$$f'_D(x; g) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{|\alpha g| - 0}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{|\alpha g|}{\alpha} = |g|$$

elde edilir. Dolayısıyla, her $g \in \mathbb{R}$ için Dini yönlü türev vardır ve

$$f'_D(0; g) = |g|$$

elde edilir. Öte yandan

$$f'_H(x; g) = \lim_{[\alpha, g'] \rightarrow [0^+, g]} \frac{f(0 + \alpha g') - f(0)}{\alpha} = \lim_{[\alpha, g'] \rightarrow [0^+, g]} \frac{|\alpha g'|}{\alpha} = \lim_{g' \rightarrow g} |g'| = |g|$$

bulunur. Dolayısıyla, $f(x) = |x|$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında hem Hadamard hem de Dini anlamında yönlü türevlenebilirdir ve

$$f'_H(x; g) = f'_D(x; g) = |g| \text{ 'dir.}$$

Örnek 2.13. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = |x| - |y|$ fonksiyonunun $(x, y) = (0, 0)$ noktasındaki Dini ve Hadamard yönlü türevleri hesaplansın. f fonksiyonu ne konveks ne konkav bir fonksiyondur.

$$\begin{aligned} f'_D(x; g) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(\alpha g_1, \alpha g_2) - f(0, 0)}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(|g_1| - |g_2|)}{\alpha} = |g_1| - |g_2| \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} f'_H(x; g) &= \lim_{[\alpha, g'] \rightarrow [0^+, g]} \frac{f(\alpha g'_1, \alpha g'_2) - f(0, 0)}{\alpha} \\ &= \lim_{[\alpha, g'] \rightarrow [0^+, g]} \frac{\alpha(|g'_1| - |g'_2|)}{\alpha} \\ &= \lim_{(g'_1, g'_2) \rightarrow (g_1, g_2)} |g'_1| - |g'_2| = |g_1| - |g_2| \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak,

$$f'_D(x; g) = f'_H(x; g) = |g_1| - |g_2| = f(g_1, g_2)$$

bulunur.

Konveks fonksiyonlar söz konusu olduğunda, fonksiyonun diferansiyellenebilir olmadığı noktalar için subdiferansiyel kavramı türevin bir genelleştirmesi olarak önemli bir kavramdır.

Tanım 2.14. [1] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bir konveks fonksiyon, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle x^*, x - \bar{x} \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

eşitsizliğini sağlayan bir x^* vektörüne f 'nin $\bar{x}$ noktasındaki bir subgradienti denir. f 'nin $\bar{x}$ noktasındaki tüm subgradientlerinin kümesine f 'nin $\bar{x}$ noktasındaki **subdiferansiyeli** denir ve $\partial f(\bar{x})$ sembolü ile gösterilir.

Benzer şekilde, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konkav bir fonksiyon ve $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$f(x) \leq f(\bar{x}) + \langle x^*, x - \bar{x} \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

eşitsizliğini sağlayan bir x^* vektörüne f 'nin $\bar{x}$ noktasındaki bir süpergradienti denir. f 'nin $\bar{x}$ noktasındaki tüm süpergradientlerinin kümesine f 'nin $\bar{x}$ noktasındaki **süperdiferansiyeli** denir ve $\bar{\partial} f(\bar{x})$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 2.15. [18] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bir konveks fonksiyon, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun. Destek fonksiyonu $f'_D(\bar{x}, \cdot)$ yönlü türevi olan boştan farklı, konveks, kompakt kümeye f 'nin $\bar{x}$ noktasındaki **subdiferansiyeli** denir. Yani

$$\partial f(\bar{x}) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, d \rangle \leq f'_D(\bar{x}, d), \quad \forall d \in \mathbb{R}^n\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu küme Tanım 2.14'de verilen subdiferansiyel tanımı ile denktir.

Örnek 2.16. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu ve $\bar{x} = 0$ noktası için $\partial f(\bar{x}) = [-1, 1]$ kümesidir. Gerçekten, her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|x| \geq f(0) + \langle x^*, x - 0 \rangle$$

eşitsizliğini sağlayan yani,

$$|x| \geq x \cdot x^*$$

eşitsizliğini sağlayan tüm x^* subgradient vektörleri oluşturulsun.

- $x > 0$ iken $x \geq x \cdot x^* \Rightarrow x^* \leq 1$
- $x < 0$ iken $-x \leq x \cdot x^* \Rightarrow -1 \leq x^*$

olduğundan $x^* \in [-1, 1]$ 'dir.

3. EXHAUSTERLAR, TEMEL ÖZELLİKLERİ VE KISITSIZ OPTİMİZASYONDA OPTİMALLIK KOŞULLARI

Exhauster kavramı, ilk olarak Demyanov'un [4] çalışmasında önerilen, düzgün olmayan (nonsmooth) pozitif homojen fonksiyonların temsil ve analiz edilmesinde rol oynayan önemli bir araçtır. Genel olarak, düzgün olmayan fonksiyonların analizinde ve optimizasyonunda genelleştirilmiş türevler ve subdiferansiyel ve bunun bazı genelleştirmeleri olan Clarke subdiferansiyel, Michel-Penot subdiferansiyel, zayıf subdiferansiyel v.b. gibi çok sayıda araç inşa edilmiştir. Ancak bunların bazıları iyi hesap kurallarına sahip olmamak ya da hesaplama zorlukları gibi etmenlerden dolayı uygulamada çok kullanışlı olamamaktadır.

Öte yandan, bir fonksiyonun herhangi bir noktadaki (genelleştirilmiş) yönlü türevi p.h. olduğundan ve yalnızca (üstten ya da alttan) yarı-süreklilik koşulunu sağladığı durumda bir (üst ya da alt) exhaustera sahip olduğu gösterilmiştir. Exhauster yapısı, konveks analizde iyi bilinen Minkowski dualite kullanılarak oluşturulması sayesinde, hesap kolaylığı, geometrik yorum ve tekniklere elverişli olması, en dik iniş-çıkış yönlerinin verilebilmesi ve düzgün olmayan fonksiyonların optimizasyonunda, optimallik koşullarının kolayca ifade edilebilmesi açısından önemli bir araçtır.

Bu bölümde, exhausterların nasıl inşa edildiği, varlık teoremleri ile birlikte verilecek ve bazı fonksiyonların exhausterlarının hesaplanmasını inceleyen bir çok örnek sunulacaktır. Daha sonra, fonksiyonların herhangi bir noktada minimum ya da maksimum değerini alıp almadığını karakterize eden gerekli ve/veya yeterli optimallik koşulları hatırlatılacaktır. Optimallik koşulları, sırasıyla (genelleştirilmiş) yönlü türevler, konvekslik durumunda subdiferansiyel, daha genel durumlarda da exhausterlar cinsinden ifade edilecektir.

3.1. Üst ve Alt Exhausterların Tanımı ve Örnekler

Bu kesimde, bir pozitif homojen fonksiyonun üstten konveks ve alttan konkav yaklaşımları ve bu yaklaşımlar ile Minkowski dualite kullanılarak oluşturulan exhauster kavramı hatırlatılmıştır.

Tanım 3.1. [4] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir p.h. fonksiyon olsun.

a) Bir $\bar{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. ve konveks fonksiyonu için

$$h(g) \leq \bar{h}(g), \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

oluyorsa, $\bar{h}$ fonksiyonuna h 'nin bir **üstten konveks yaklaşımı (u.c.a.)** denir.

b) Bir $\underline{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. ve konkav fonksiyonu için

$$\underline{h}(g) \leq h(g), \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

oluyorsa, $\underline{h}$ fonksiyonuna h 'nin bir **alttan konkav yaklaşımı (l.c.a.)** denir.

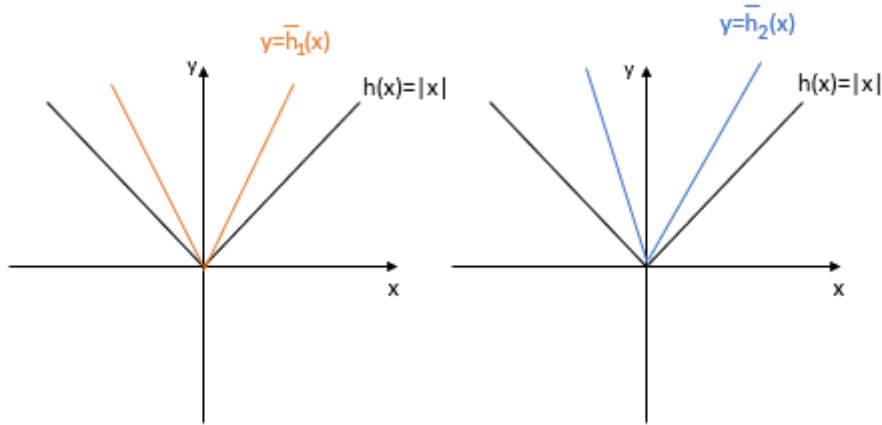
Örnek 3.2. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = |x|$ olsun.

a) h 'in kendisi sublineer olduğundan $\bar{h} = h$ bir üstten konveks yaklaşımdır.

b) $\alpha \geq 1$ olmak üzere $\bar{h}_\alpha = \alpha|x|$ fonksiyonlarının her biri h 'nin bir üstten konveks yaklaşımdır. Daha genel olarak, $\alpha \geq 1$ ve $\beta \leq -1$ olmak üzere

$$\bar{h}_{\alpha,\beta} = \begin{cases} \alpha x, & x \geq 0 \\ \beta x, & x \leq 0 \end{cases}$$

fonsiyonlarının her biri h 'nin bir üstten konveks yaklaşımdır. Örneğin, Şekil 3.1'de h fonksiyonunun; $\alpha = 2$ olmak üzere $\bar{h}_1 = 2|x|$ ve $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = -3$ olmak üzere $\bar{h}_2 = \bar{h}_{\frac{3}{2},-3}$ üstten konveks yaklaşımları gösterilmiştir.



Şekil 3.1: $h(x) = |x|$ fonksiyonunun $\bar{h}_1$ ve $\bar{h}_2$ üstten konveks yaklaşımları

Örnek 3.3. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y) = |x| + |y|$ fonksiyonu ele alınsın.

$h_1(x, y) = 2|x| + 4|y|$ fonksiyonu h 'nin bir üstten konveks yaklaşımdır. Daha genel olarak $\alpha \geq 1$ ve $\beta \geq 1$ olmak üzere $\bar{h}_{\alpha,\beta}(x, y) = \alpha|x| + \beta|y|$ fonksiyonlarının her biri h 'nin birer üstten konveks yaklaşımlarıdır.

Örnek 3.4. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y) = |x| - |y|$ fonksiyonu ele alınsın. Buna göre

$$\bar{h}_1(x, y) = |x|; \quad \bar{h}_2(x, y) = |x| - y; \quad \bar{h}_3(x, y) = |x| + y;$$

$$\bar{h}_4(x, y) = |x| + |y|; \quad \bar{h}_5(x, y) = 2|x| + 3|y|$$

şeklinde tanımlanan $\bar{h}_i$, $i = \overline{1 : 5}$ fonksiyonlarının her biri h 'nin farklı üstten konveks yaklaşımlarıdır.

Üstten konveks ve alttan konkav yaklaşımların exhaustive aileleri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

Tanım 3.5. [4] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir p.h. fonksiyon olsun.

a) h 'nin üstten konveks yaklaşımlarının bir Λ^* ailesi için

$$h(g) = \inf_{\bar{h} \in \Lambda^*} \bar{h}(g), \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

oluyorsa Λ^* ailesine h 'nin **üstten konveks yaklaşımlarının bir exhaustive ailesi** ya da kısaca **üst exhaustive ailesi (U.E.F.)** denir.

b) h 'nin alttan konkav yaklaşımlarının bir Λ_* ailesi için

$$h(g) = \sup_{\underline{h} \in \Lambda_*} \underline{h}(g), \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

oluyorsa Λ_* ailesine h 'nin **alttan konkav yaklaşımlarının bir exhaustive ailesi** ya da kısaca **alt exhaustive ailesi (L.E.F.)** denir.

Örnek 3.6. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(g) = |g|$ olsun.

a) $\Lambda_1^* = \{h\}$ ailesi h 'nin bir üst exhaustive ailesidir. Çünkü h 'in kendisi sublineerdur.

b) $\bar{h}_1 = \begin{cases} g, & g \geq 0 \\ -2g, & g \leq 0 \end{cases}$ ve $\bar{h}_2 = \begin{cases} 3g, & g \geq 0 \\ -g, & g \leq 0 \end{cases}$ olmak üzere $\Lambda_2^* = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$ ailesi göz önüne alınsın.

$$\min_{\bar{h} \in \Lambda_2^*} \bar{h}(g) = \begin{cases} \min\{g, 3g\}, & g \geq 0 \\ \min\{-2g, -g\}, & g \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} g, & g \geq 0 \\ -g, & g \leq 0 \end{cases} = |g| = h(g)$$

olduğundan, Λ_2^* ailesi h 'nin bir üst exhaustive ailesidir.

c) $r > 1$ ve

$$\bar{h}_r(g) = \begin{cases} rg, & g \geq 0 \\ -rg, & g \leq 0 \end{cases} \quad \text{olmak üzere} \quad \Lambda_3^* = \{\bar{h}_r \mid r > 1\}$$

ailesi oluşturulsun.

$$\begin{aligned} \inf_{\bar{h} \in \Lambda_3^*} \bar{h}_r(g) &= \inf_{r>1} \bar{h}_r(g) = \inf_{r>1} \begin{cases} rg, & g \geq 0 \\ -rg, & g \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \inf_{r>1} rg, & g \geq 0 \\ \inf_{r>1} -rg, & g \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} g, & g \geq 0 \\ -g, & g \leq 0 \end{cases} = |g| = h(g) \end{aligned}$$

olduğundan Λ_3^* ailesi h 'nin bir üst exhaustive ailesidir.

Örnek 3.7. Örnek 3.4'de ele alınan $h(x, y) = |x| - |y|$ fonksiyonu için $\Lambda^* = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3\}$ ailesi oluşturulsun.

$$\begin{aligned} \min\{\bar{h}_1(x, y), \bar{h}_2(x, y), \bar{h}_3(x, y)\} &= \min\{|x|, |x| - y, |x| + y\} \\ &= \begin{cases} \min\{x, x - y, x + y\} & , \quad x \geq 0, y \geq 0 \\ \min\{x, x - y, x + y\} & , \quad x \geq 0, y \leq 0 \\ \min\{-x, -x - y, -x + y\} & , \quad x \leq 0, y \geq 0 \\ \min\{-x, -x - y, -x + y\} & , \quad x \leq 0, y \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x - y & , \quad x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y & , \quad x \geq 0, y \leq 0 \\ -x - y & , \quad x \leq 0, y \geq 0 \\ -x + y & , \quad x \leq 0, y \leq 0 \end{cases} \\ &= |x| - |y| \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, Λ^* ailesi h 'nin üstten konveks yaklaşımlarının bir exhaustive ailesi ya da kısaca bir üst exhaustive ailesidir.

Bir pozitif homojen fonksiyonun exhaustive ailelerinin varlığı aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

Önerme 3.8. [19] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir p.h. fonksiyon olmak üzere

- a) h fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde üstten yarı sürekli ise, h 'nin üstten konveks yaklaşımlarının bir exhaustive ailesi vardır.
- b) h fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde alttan yarı sürekli ise, h 'nin alttan konkav yaklaşımlarının bir exhaustive ailesi vardır.

Şimdi, üstten konveks ve alttan konkav yaklaşımların exhaustive aileleri kavramı kullanılarak, sırasıyla üst ve alt exhausterların nasıl inşa edildiği incelenecektir.

h pozitif homojen fonksiyonu üstten yarı sürekli ise, h 'nin üstten konveks yaklaşımlarının

$$h(g) = \inf_{\bar{h} \in \Lambda^*} \bar{h}(g), \quad \forall g \in \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

eşitliğini sağlayan bir Λ^* exhaustive ailesi vardır. Bu aileden alınan her bir $\bar{h} \in \Lambda^*$ fonksiyonu sublineer olduğundan, Minkowski duallikten, öyle tek türlü belirli bir $C(\bar{h}) = \underline{\partial} \bar{h}(0_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt konveks kümesi vardır ki, $\bar{h}$ fonksiyonu

$$\bar{h}(g) = \max_{v \in C(\bar{h})} \langle v, g \rangle, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde ifade edilebilir. Dolayısıyla (3.1) eşitliği,

$$E^* = \{C \subseteq \mathbb{R}^n \mid C = C(\bar{h}), \bar{h} \in \Lambda^*\}$$

olmak üzere

$$h(g) = \inf_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Bu şekilde elde edilen E^* kümeler ailesine h 'nin bir **üst exhausteri** denir [4]. Benzer biçimde, h pozitif homojen fonksiyonu alttan yarı sürekli ise, h 'nin alttan konkav yaklaşımlarının

$$h(g) = \sup_{\underline{h} \in \Lambda_*} \underline{h}(g) \quad (3.3)$$

eşitliğini sağlayan bir Λ_* exhaustive ailesi vardır. Bu aileden alınan her bir $\underline{h} \in \Lambda_*$ fonksiyonu süperlineer olduğundan, Minkowski duallikten, öyle tek türlü belirli bir $C(\underline{h}) = \bar{\partial} \underline{h}(0_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt konveks kümesi vardır ki, $\underline{h}$ fonksiyonu

$$\underline{h}(g) = \min_{w \in C(\underline{h})} \langle w, g \rangle, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n.$$

biçiminde ifade edilebilir. Dolayısıyla,

$$E_* = \{C \subseteq \mathbb{R}^n \mid C = C(\underline{h}), \underline{h} \in \Lambda_*\}$$

olmak üzere (3.3) eşitliği

$$h(g) = \sup_{C \in E_*} \min_{w \in C} \langle w, g \rangle, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n \quad (3.4)$$

biçimine dönüşür. Böylelikle, h fonksiyonunun (3.4) formunda yazılmasını sağlayan E_* kümeler ailesine h 'nin bir **alt exhausteri** denir [4].

h fonksiyonu pozitif homojen ve $\mathbb{R}^n$ üzerinde sürekli ise, üstten ve alttan yarı sürekli olduğundan, hem E^* üst exhausteri hem de E_* alt exhausteri sahiptir ve $E = [E^*, E_*]$ çiftine h 'nin **biexhausteri** adı verilir.

Örnek 3.9. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(g) = |g|$ alalım.

- a) $\Lambda_1^* = \{h\}$ ailesinin h 'nin üstten konveks yaklaşımlarının bir exhaustive ailesi olduğu elde edilmişti. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\partial h(0) &= \{s \mid \forall y \in \mathbb{R} \text{ için } h(0) + \langle s, y - 0 \rangle \leq h(y)\} \\
&= \{s \mid \forall y \in \mathbb{R} \text{ için } \langle s, y \rangle \leq |y|\} \\
&= \{s \mid \forall y \in \mathbb{R} \text{ için } sy \leq |y|\}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $sy \leq |y|$ eşitsizliğini sağlayan $s \in \mathbb{R}$ 'ler hesaplanırsa

- $y > 0 \Rightarrow sy \leq y \Rightarrow s \leq 1$
- $y = 0 \Rightarrow 0 \leq 0 \Rightarrow s \in \mathbb{R}$
- $y < 0 \Rightarrow sy \leq -y \Rightarrow s \geq -1$

bulunur. Böylece, $\forall y \in \mathbb{R}$ için eşitsizliği sağlayan $s \in \mathbb{R}$ 'ler $[-1, 1]$ aralığını oluşturur. $C = \partial h(0) = [-1, 1]$ 'dir. Λ_1^* 'a karşılık gelen E_1^* ailesi $E_1^* = \{[-1, 1]\}$ 'dir. Gerçekten

$$\inf_{C \in E_1^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle = \inf_{C \in E_1^*} \max_{v \in [-1, 1]} v \cdot g = \inf\{|g|\} = |g| = h(g)$$

olduğundan, E_1^* , h 'nin bir üst exhausterıdır.

$$b) \quad \bar{h}_1(g) = \begin{cases} g, & g \geq 0 \\ -2g, & g \leq 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \bar{h}_2(g) = \begin{cases} 3g, & g \geq 0 \\ -g, & g \leq 0 \end{cases} \quad \text{olmak üzere } \Lambda_2^* = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$$

üst exhaustive ailesi ele alınsın. Bu fonksiyonlar için, Minkowski duallık kullanılarak, $\partial \bar{h}_1(0)$ ve $\partial \bar{h}_2(0)$ kümeleri hesaplanmalıdır.

$$\partial \bar{h}_1(0) = \{s \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R} \text{ için } sy \leq \bar{h}_1(y)\}$$

olduğundan $\forall y \in \mathbb{R}$ için $sy \leq \bar{h}_1(y)$ olan s 'ler bulunmalıdır.

- $y > 0 \Rightarrow sy \leq y \Rightarrow s \leq 1$
- $y = 0 \Rightarrow 0 \leq 0 \Rightarrow s \in \mathbb{R}$
- $y < 0 \Rightarrow sy \leq -2y \Rightarrow s \geq -2$

Dolayısıyla, $\partial \bar{h}_1(0) = [-2, 1] = C_1$ aralığıdır. Benzer şekilde $\partial \bar{h}_2(0) = [-1, 3] = C_2$ olur ki, böylece Λ_2^* 'a karşılık gelen E_2^* ailesi $E_2^* = \{C_1, C_2\} = \{[-2, 1], [-1, 3]\}$ h 'nin bir üst exhausterıdır. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\inf_{C \in E_2^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle &= \inf_{i=1,2} \max_{v \in C_i} \langle v, g \rangle = \inf \left\{ \max_{v \in C_1} vg, \max_{v \in C_2} vg \right\} \\
&= \inf \left\{ \max_{v \in [-2, 1]} vg, \max_{v \in [-1, 3]} vg \right\} = \inf \{ \bar{h}_1(g), \bar{h}_2(g) \} = \begin{cases} \inf\{g, 3g\}, & g \geq 0 \\ \inf\{-2g, -g\}, & g \leq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} g, & g \geq 0 \\ -g, & g \leq 0 \end{cases} = |g| = h(g) \text{ elde edilir. Bu eşitlik } E_2^* \text{ 'nin } h \text{ 'nin bir üst} \\
&\text{exhausteri olduğunu gösterir.}
\end{aligned}$$

c) $\Lambda_3^* = \{\bar{h}_r \mid r > 1\}$ ailesi ele alınsın. Her bir $r > 1$ sayısı için

$$\bar{h}_r(g) = \begin{cases} rg, & g \geq 0 \\ -rg, & g \leq 0 \end{cases}$$

olduğundan

$$\partial \bar{h}_r(0) = \{s \mid \forall y, \bar{h}_r(0) + \langle s, y - 0 \rangle \leq \bar{h}_r(y)\} = \{s \mid sy \leq \bar{h}_r(y)\}$$

kümesi hesaplanırsa

- $y > 0 \Rightarrow sy \leq ry \Rightarrow s \leq r$
- $y = 0 \Rightarrow s \in \mathbb{R}$
- $y < 0 \Rightarrow sy \leq -ry \Rightarrow s \geq -r$

bulunur, yani $\partial \bar{h}_r(0) = [-r, r]$ aralığıdır. Böylece $E_3^* = \{[-r, r] \mid r > 1\}$ ailesi elde edilir. Üstelik

$$\inf_{C_r \in E^*} \max_{v \in C_r} \langle v, g \rangle = \inf_{r > 1} \max_{v \in [-r, r]} vg = \inf_{r > 1} \begin{cases} rg, & g \geq 0 \\ -rg, & g \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} g, & g \geq 0 \\ -g, & g \leq 0 \end{cases} = h(g)$$

elde edilir. Sonuç olarak $E_1^* = \{[-1, 1]\}$, $E_2^* = \{[-2, 1], [-1, 3]\}$ ve $E_3^* = \{[-r, r] \mid r > 1\}$ aileleri $h(g) = |g|$ 'nin üç farklı üst exhaustividir.

Örnek 3.10. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y) = |x| + |y|$ sublineer fonksiyonu ele alınsın. Açık ki $\Lambda^* = \{h\}$ ailesi h 'nin bir üst exhaustive ailesidir. Üstelik $\partial h(0, 0) = [-1, 1] \times [-1, 1]$ 'dir. Gerçekten, $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

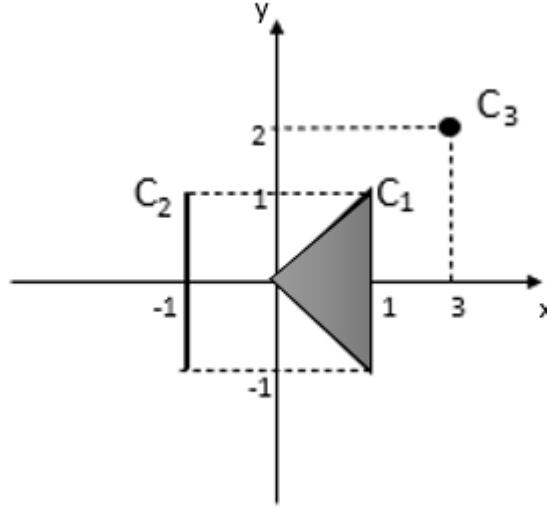
$$h(y_1, y_2) \geq h(0, 0) + \langle (s_1, s_2), (y_1, y_2) \rangle \iff |y_1| + |y_2| \geq s_1 y_1 + s_2 y_2$$

olan tüm $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ vektörleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 &\Rightarrow y_1 + y_2 \geq s_1 y_1 + s_2 y_2 \\ &\Rightarrow y_1(1 - s_1) + y_2(1 - s_2) \geq 0 \\ \bullet & \\ &\Rightarrow 1 - s_1 \geq 0, 1 - s_2 \geq 0 \\ &\Rightarrow s_1 \leq 1, s_2 \leq 1 \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} y_1 \leq 0, y_2 \geq 0 &\Rightarrow -y_1 + y_2 \geq s_1 y_1 + s_2 y_2 \\ &\Rightarrow -y_1(1 + s_1) + y_2(1 - s_2) \geq 0 \\ \bullet & \\ &\Rightarrow 1 + s_1 \geq 0, 1 - s_2 \geq 0 \\ &\Rightarrow s_1 \geq -1, s_2 \leq 1 \end{aligned}$$



Şekil 3.2: Örnek 3.11’de verilen C_1, C_2, C_3 kümeleri

$$\begin{aligned}
 y_1 \leq 0, y_2 \leq 0 &\Rightarrow -y_1 - y_2 \geq s_1 y_1 + s_2 y_2 \\
 &\Rightarrow -y_1(1 + s_1) - y_2(1 + s_2) \geq 0 \\
 &\Rightarrow 1 + s_1 \geq 0, 1 + s_2 \geq 0 \\
 &\Rightarrow s_1 \geq -1, s_2 \geq -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_1 \geq 0, y_2 \leq 0 &\Rightarrow y_1 - y_2 \geq s_1 y_1 + s_2 y_2 \\
 &\Rightarrow y_1(1 - s_1) - y_2(1 + s_2) \geq 0 \\
 &\Rightarrow 1 - s_1 \geq 0, 1 + s_2 \geq 0 \\
 &\Rightarrow s_1 \leq 1, s_2 \geq -1
 \end{aligned}$$

olur. Buradan $\partial h(0,0) = [-1, 1] \times [-1, 1]$ ’dir. Dolayısıyla, $E^* = \{[-1, 1] \times [-1, 1]\}$ ailesi h ’nin bir üst exhausterdir.

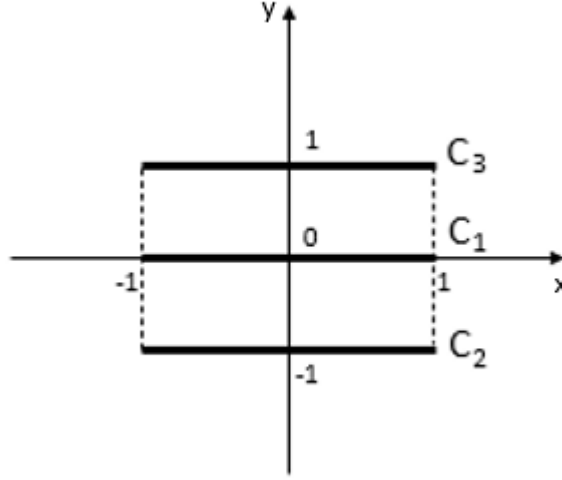
Örnek 3.11. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(g_1, g_2) = \min\{\max\{g_1 + g_2, g_1 - g_2, 0\}, \max\{-g_1 - g_2, -g_1 + g_2\}, 3g_1 + 2g_2\}$$

fonksiyonu verilsin. $C_1 = \text{co}\{(1, 1), (1, -1), (0, 0)\}$, $C_2 = \{(-1, 1), (-1, -1)\}$ ve $C_3 = \{(3, 2)\}$ olmak üzere , $E^* = \{C_1, C_2, C_3\}$ ailesi h ’nin bir üst exhausterdir (Şekil 3.2). Gerçekten,

$$\begin{aligned}
 p_{C_1}(g_1, g_2) &= \max_{v \in C_1} \langle v, g \rangle = \max\{\langle (1, 1), (g_1, g_2) \rangle, \langle (-1, 1), (g_1, g_2) \rangle, \langle (0, 0), (g_1, g_2) \rangle\} \\
 &= \max\{g_1 + g_2, g_1 - g_2, 0\}
 \end{aligned}$$

$$p_{C_2}(g_1, g_2) = \max\{-g_1 + g_2, -g_1 - g_2\} \quad \text{ve} \quad p_{C_3}(g_1, g_2) = \max\{3g_1 + 2g_2\}$$



Şekil 3.3: Örnek 3.12’de verilen C_1, C_2, C_3 kümeleri

olduğundan,

$$\begin{aligned}
 \inf_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle &= \min\{p_{C_1}(g_1, g_2), p_{C_2}(g_1, g_2), p_{C_3}(g_1, g_2)\} \\
 &= \min\{\max\{g_1 + g_2, g_1 - g_2, 0\}, \\
 &\quad \max\{-g_1 + g_2, -g_1 - g_2\}, 3g_1 + 2g_2\} \\
 &= h(g_1, g_2)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.12. Örnek 3.7’deki $h(g_1, g_2) = |g_1| - |g_2|$ fonksiyonu ele alınsın. h ’nin $\Lambda^* = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3\}$ üst exhaustive ailesi kullanılarak h ’nin bir üst exhausteri oluşturulacaktır. Bunun için her bir üstten konveks yaklaşımın $(0, 0)$ noktasındaki subdiferansiyeli Örnek 3.10’daki hesaplamalara benzer şekilde hesaplanırsa

$$\partial \bar{h}_1(0, 0) = [-1, 1] \times \{0\}; \quad \partial \bar{h}_2(0, 0) = [-1, 1] \times \{-1\}; \quad \partial \bar{h}_3(0, 0) = [-1, 1] \times \{1\}$$

elde edilir. Böylece $C_1 = [-1, 1] \times \{0\}$, $C_2 = [-1, 1] \times \{-1\}$ ve $C_3 = [-1, 1] \times \{1\}$ olmak üzere $E^* = \{C_1, C_2, C_3\}$ ailesi h ’nin bir üst exhausteri'dir. Bu exhausterdaki kümeler Şekil 3.3’de gösterilmiştir.

3.2. Optimallik Koşulları

Gerçel değerli fonksiyonların optimizasyonu söz konusu olduğunda, bir nokta-
nın yerel ya da global minimalleştirici ya da maksimalleştirici ya da kritik nokta
olup olmadığının belirlenmesini sağlayan optimallik koşullarının oluşturulması te-
oride önemli bir yer tutar. Klasik analizde diferansiyel kavramı ile verilen optimallik

koşulları, düzgün olmayan fonksiyonlar için yönlü türevler ve çeşitli genelleştirmeleri ya da konvekslik durumunda subdiferansiyel, daha genel durumlarda da subdiferansiyelin genelleştirmeleri ve kuasidiferansiyel gibi araçlar kullanılarak ifade edilmiştir [1, 5, 20–25]. Bu çerçevede, exhaustorlar cinsinden optimallik koşulları da Demyanov ve Roshchina tarafından incelenmiş, hem kısıtlı hem de kısıtsız optimizasyon problemleri için çok sayıda kullanışlı optimallik koşulları elde edilmiştir [4, 6, 7, 26]. Aşağıdaki kesimlerde kısıtsız optimizasyon problemleri için, bahsi geçen optimallik koşullarının bazıları kısaca incelenecektir.

3.2.1. Yönlü türevlerle optimallik koşulları

Bu kesimde, Dini ve Hadamard yönlü türevler ve bunların genelleştirmeleri ile oluşturulan optimallik koşulları verilecektir.

Yardımcı Teorem 3.13. [5] $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $X \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme olsun. $x^* \in X$ noktası f 'nin X üzerindeki yerel ya da global minimalleştiricisi ise

$$\begin{aligned} f'_D(x^*, g) &\geq 0, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n \\ f'_H(x^*, g) &\geq 0, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

koşulları sağlanır. Ayrıca

$$f'_H(x^*, g) > 0, \quad \forall g \neq 0_n \quad (3.5)$$

koşulu sağlanıyorsa $x^* \in X$ noktası f 'nin X üzerindeki **kesin yerel minimalleştiricisi**dir.

Kanıt. f fonksiyonu x^* noktasında Dini Yönlü Türevlenebilir olduğundan $\forall \alpha \geq 0$ ve $\forall g \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(x^* + \alpha g) = f(x^*) + \alpha f'(x^*, g) + o(\alpha)$$

olur. x^* , f 'nin bir minimum noktası olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) \geq f(x^*)$ 'dir.

Buradan özel olarak $x = x^* + \alpha g$ için de $f(x^* + \alpha g) \geq f(x^*)$ olduğundan

$$f(x^*) \leq f(x^* + \alpha g) = f(x^*) + \alpha f'(x^*, g) + o(\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha f'(x^*, g) + o(\alpha) \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x^*, g) + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{f'(x^*, g) + \frac{o(\alpha)}{\alpha}\} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x^*, g) \geq 0$$

elde edilir.

□

Yardımcı Teorem 3.14. [5] $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $X \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme olsun. $x^{**} \in X$ noktasının f 'nin X üzerindeki yerel ya da global maksimalleştiricisi ise

$$f'_D(x^{**}, g) \leq 0, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

koşulları sağlanır. Ayrıca

$$f'_H(x^{**}, g) \leq 0, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

$$f'_H(x^{**}, g) < 0, \quad \forall g \neq 0_n \quad (14)$$

koşulu sağlanıyorsa $x^{**} \in X$ noktası f 'nin X üzerindeki **kesin yerel maksimalleştiricisi**dir.

Kanıt. Yardımcı Teorem 3.13'dekine benzer şekilde kanıtlanır. □

Uyarı 3.15. Dini ya da Hadamard yönlü türevin hesaplanamadığı durumlarda, alt ve üst Dini/Hadamard yönlü türevler üzerinden optimallik koşulları kontrol edilebilir. Bu bağlamda, Yardımcı Teorem 3.13'de verilen minimallik için gerekli ve yeterli koşullar, Tanım 2.9 ile tanımlanan $f_{D/H}^\downarrow(x; g)$ Dini ve Hadamard alt yönlü türevler için de geçerlidir. Benzer şekilde, Yardımcı Teorem 3.14'de verilen maksimallik için gerekli ve yeterli koşullar, Tanım 2.9 ile tanımlanan $f_{D/H}^\uparrow(x; g)$ Dini ve Hadamard üst yönlü türevler için de geçerlidir.

3.2.2. Konvekslik durumunda subdiferansiyel ile optimallik koşulları

Konveks analizde temel bir işlev gören altdiferansiyel (subdiferansiyel) kavramı yardımıyla konveks fonksiyonların bir noktadaki optimallığı için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Konveks bir fonksiyonun, yapısı gereği en az bir global minimalleştiricisinin varlığı her zaman bilinmektedir [1, 18]. Bu minimalleştirici tek bir nokta olduğunda kesin global minimalleştirici olarak adlandırılır.

Teorem 3.16. [18] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

(i) f 'nin bir global minimalleştiricisi vardır: En az bir $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ 'dir.}$$

(ii) $0 \in \partial f(\bar{x})$ 'dir.

(iii) Her $g \in \mathbb{R}^n$ için $f'(x; g) \geq 0$ 'dır.

Kanıt. (i) $\iff$ (ii)

x noktası, f fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ 'deki global minimalleştiricisi olsun. O halde, $\forall y \in \mathbb{R}^n$

için $f(y) \geq f(x)$ 'dir. Buradan, $f(y) \geq f(x) + \langle 0, y-x \rangle$ olur ki bu $0 \in \partial f(x)$ olduğunu verir. Tersine $0 \in \partial f(x)$ olduğunda her $y \in \mathbb{R}^n$ için $f(y) \geq f(x)$ olacağı açıktır.

(ii) $\iff$ (iii)

$0 \in \partial f(x)$ olsun. Teorem 2.14 gereği her $d \in \mathbb{R}^n$ için, $\langle 0, d \rangle \leq f'(x, d)$ olur ki bu $f'(x, d) \geq 0$ olduğunu verir. Tersisi de benzer şekilde kolayca kanıtlanır. $\square$

Yardımcı Teorem 3.13'de görüldüğü gibi, Teorem 3.16'deki (iii) koşulu aslında $\bar{x}$ noktasının f 'nin minimalleştiricisi olması için bir gerekli koşuldur. Dolayısıyla, bu koşulu ve denk olarak (ii) koşulunu sağlayan bir $\bar{x}$ noktası f için bir kritik nokta olarak değerlendirilir. Aşağıdaki sonuç, bir noktanın f 'nin global minimalleştiricisi olması için bir yeterli koşul verecektir.

Teorem 3.17. [18] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

- (i) f 'nin bir kesin global minimalleştiricisi vardır: Bir ve yalnız bir $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ için $f(\bar{x}) < f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$.
- (ii) $0 \in \text{int}(\partial f(\bar{x}))$ 'dir.
- (iii) Her $0_n \neq g \in \mathbb{R}^n$ için $f'(x; g) > 0$ 'dır.

Kanıt. Teorem 3.16'dekine benzer şekilde kanıtlanır. $\square$

Uyarı 3.18. Teorem 3.16 ve Teorem 3.17'de konveks fonksiyonlar için verilen optimallik koşulları, simetrik olarak konkav fonksiyonların maksimalleştiricileri için de geçerlidir.

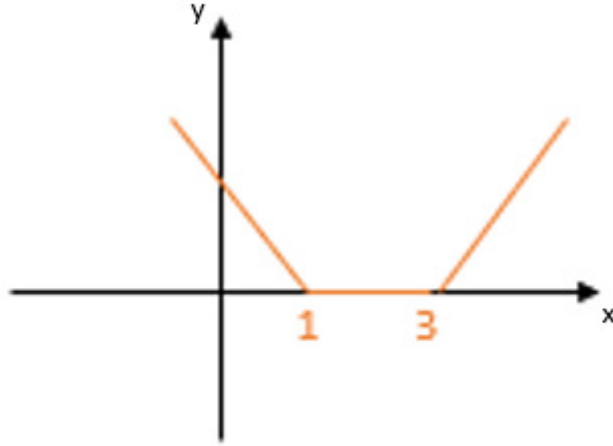
Şimdi, Teorem 3.16 ve Teorem 3.17'de verilen optimallik koşulları örnekler üzerinde incelenecektir.

Örnek 3.19. $f(x) = |x|$ fonksiyonu için $\bar{x} = 0$ noktası ele alındığında, $\partial f(\bar{x}) = [-1, 1]$ olduğu açıktır. $0 \in \text{int}(\partial f(\bar{x}))$ olduğundan Teorem 3.17 gereğince $\bar{x} = 0$ noktası f 'nin kesin global minimalleştiricisidir.

Örnek 3.20. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \leq 1 \\ 0, & 1 < x < 3 \\ x - 3, & 3 \leq x \end{cases}$$

fonksiyonu ve $\bar{x} = 1$ noktası ele alınsın. f 'nin grafiği Şekil 3.4'de gösterilmiştir. $\bar{x}$ noktasının minimalleştirici olup olmadığının incelenmesi için $\partial f(1)$ hesaplınsın.



Şekil 3.4: Örnek 3.20'deki $f(x)$ fonksiyonunun grafiği

$$\partial f(1) = \{s \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \geq f(1) + s \cdot (y - 1), \forall y \in \mathbb{R}\}$$

olduğundan her $y \in \mathbb{R}$ için

$$f(y) \geq s \cdot (y - 1)$$

eşitsizliğini sağlayan $s \in \mathbb{R}$ sayıları hesaplanırsa

$$y \leq 1 \text{ iken } -y + 1 \geq s \cdot (y - 1) \iff s \geq -1$$

$$1 \leq y \leq 3 \text{ iken } 0 \geq s \cdot (y - 1) \iff s \leq 0$$

$$y \geq 3 \text{ iken } y - 3 \geq s \cdot (y - 1) \iff s \leq 0$$

elde edilir. Buradan $\partial f(1) = [-1, 0]$ kümesidir. Dolayısıyla, $0 \in \partial f(1)$, ancak $0 \notin \text{int}(\partial f(1))$ 'dir. Yani $\bar{x} = 1$ noktası f 'nin global minimalleştiricisidir, ancak kesin global minimalleştiricisi değildir.

3.2.3. Exhausterlar ile optimallik koşulları

Önceki kesimde, subdiferansiyel yardımıyla konveks fonksiyonların optimallik koşullarının nasıl verildiği tartışıldı. Şimdi ise, diğer birçok genelleştirilmiş subdiferansiyel yaklaşımlarını incelemeksizin, exhauster kavramı kullanılarak bir fonksiyonun optimalliğine ilişkin bazı temel sonuçlar ele alınacaktır.

Bu çalışma boyunca exhausterlara ilişkin ifade edilecek tüm sonuçlar yalnızca üst exhausterlar cinsinden ifade edilecektir. Aynı sonuçların benzer formlarda alt exhausterlar için de geçerli olduğu açıktır.

Aşağıdaki iki teorem, düzgün olmayan (konveks de olmak zorunda olmayan)

bir f fonksiyonu ve $f'(\bar{x}; \cdot)$ Dini ya da Hadamard yönlü türev ya da bunların alt versiyonları olmak üzere $h(g) = f'(\bar{x}; g)$ p.h. fonksiyonu için ifade edilecektir. Böylece, $\bar{x}$ noktasının f 'nin bir yerel ya da global minimalleştiricisi olması için h 'nin bir üst exhausteri vasıtasıyla bir gerekli koşul ve daha sonra $\bar{x}$ noktasının f 'nin kesin yerel minimalleştiricisi olması için de bir yeter koşul elde edilmiş olacaktır.

Teorem 3.21. [22] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. bir fonksiyon olsun ve h 'nin bir üst exhausteri E^* var olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $\forall g \in \mathbb{R}^n$ için $h(g) \geq 0$ 'dır;
- (ii) $\forall C \in E^*$ için $0_n \in C$ 'dir;
- (iii) $0_n \in L^*(h) = \bigcap \{C \mid C \in E^*\}$.

Kanıt. (ii) $\iff$ (iii) olduğu açıktır.

(i) $\iff$ (ii) $\forall g \in \mathbb{R}^n$ için $h(g) = f'(x^*, g) \geq 0$ olsun.

$$\begin{aligned}
h(g) = f'(x^*, g) \geq 0 &\iff h(g) = \inf_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle, \forall g \in \mathbb{R}^n \\
&\iff \inf_{C \in E^*} \{ \max_{v \in C} \langle v, g \rangle \} \geq 0, \forall g \in \mathbb{R}^n, \forall C \in E^* \\
&\iff \max_{v \in C} \langle v, g \rangle \geq 0, \forall g \in \mathbb{R}^n, \forall C \in E^* \\
&\iff \sigma_C(g) \geq 0, \forall g \in \mathbb{R}^n, \forall C \in E^* \\
&\iff 0_n \in C, \forall C \in E^*
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.22. [22] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve p.h. bir fonksiyon olsun ve E^* , h 'nin bir üst exhausteri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) Her $0_n \neq g \in \mathbb{R}^n$ için $h(g) > 0$ 'dır.
- (ii) Bir $\delta > 0$ sayısı, her $C \in E^*$ için $B(0_n, \delta) \subset C$ olacak şekilde vardır;
- (iii) $0_n \in \text{int } L^*(h) = \bigcap \{C \mid C \in E^*\}$ 'dir.

Kanıt. (i) $\iff$ (ii):

$s \in \text{int } C \iff \langle 0_n, g \rangle < \sigma_s(g), \forall g \in \mathbb{R}^n, g \neq 0_n$ olduğundan,

$0_n \in \text{int } C \iff \langle 0_n, g \rangle < \sigma_s(g), \forall g \neq 0_n$. Yani $0_n \in \text{int } C \iff \sigma_s(g) > 0, \forall g \neq 0_n$ olur.

$$\begin{aligned}
(i) &\iff h(g) = f'(x^*, g) = \inf_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle, \forall g \in \mathbb{R}^n, g \neq 0_n \\
&\iff \max_{v \in C} \langle v, g \rangle > 0, \forall g \neq 0_n, \forall C \in E^* \\
&\iff \sigma_C(g) > 0, \forall g \neq 0_n, C \in E^* \\
&\iff 0_n \in \text{int } C, \forall C \in E^* \\
&\iff \exists \delta > 0 \ni B_\delta \subset C
\end{aligned}$$

(ii) $\iff$ (iii):

$$\begin{aligned}
(ii) &\iff 0_n \in \text{int}(C) \quad , \forall C \in E^* \\
&\iff 0_n \in \bigcap \{\text{int}(C) \mid C \in E^*\} \\
&\iff 0_n \in \text{int}(\bigcap \{C \mid C \in E^*\}) \\
&\iff 0_n \in \text{int}L^*(h)
\end{aligned}$$

□

Örnek 3.23. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu için $\bar{x} = 0$ noktasında $f'_D(0; g) = |g|$ olduğu Örnek 2.12 ile gösterilmişti. Örnek 3.9(c)'de incelenen $h(g) = |g|$ fonksiyonu ile

$$E_3^* = \{[-r, r] \mid r > 1\}$$

üst exhausteri göz önüne alındığında, her $r > 1$ için $C_r = [-r, r]$ kümelerinin her biri için $0 \in \text{int}(C_r)$ olduğundan, Teorem 3.17(iii) ve Teorem 3.22(ii)'den, $\bar{x} = 0$ f 'nin bir kesin global minimalleştiricisidir.

Örnek 3.24. Örnek 3.11'de verilen $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(g_1, g_2) = \min\{\max\{g_1 + g_2, g_1 - g_2, 0\}, \max\{-g_1 - g_2, -g_1 + g_2\}, 3g_1 + 2g_2\}$$

fonksiyonu ve $C_1 = \text{co}\{(1, 1), (1, -1), (0, 0)\}$, $C_2 = \{(-1, 1), (-1, -1)\}$ ve $C_3 = \{(3, 2)\}$ olmak üzere, h 'nin $E^* = \{C_1, C_2, C_3\}$ üst exhausteri ele alınsın. $f'_D(\bar{x}; g) = h(g)$ ya da $f'_H(\bar{x}; g) = h(g)$ olan bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bir $\bar{x}$ noktası göz önüne alınsın. h 'nin E^* üst exhausteri incelendiğinde $(0, 0) \notin C_1$ ve $(0, 0) \notin C_3$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, Teorem 3.21(ii) ve Yardımcı Teorem 3.13 gereğince $\bar{x}$ noktası, f 'nin bir yerel ya da global minimalleştiricisi olamaz.

Örnek 3.25. Örnek 3.12'de ele alınan $h(g_1, g_2) = |g_1| - |g_2|$ fonksiyonu ele alınsın. $f'_D(\bar{x}; g) = h(g)$ ya da $f'_H(\bar{x}; g) = h(g)$ olan bir $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bir $\bar{x}$ noktası göz önüne alınsın. h 'nin Örnek 3.12'de verilen $C_1 = [-1, 1] \times \{0\}$, $C_2 = [-1, 1] \times \{-1\}$ ve $C_3 = [-1, 1] \times \{1\}$ olmak üzere $E^* = \{C_1, C_2, C_3\}$ üst exhausteri incelendiğinde $(0, 0) \notin C_2$ ve $(0, 0) \notin C_3$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, Teorem 3.21(ii) ve Yardımcı Teorem 3.13 gereğince $\bar{x}$ noktası, f 'nin bir yerel ya da global minimalleştiricisi olamaz.

4. EXHAUSTERLARIN İNDİRGENMESİ VE MİNİMALLIĞI

Bu bölümde, exhausterların iki farklı açıdan indirgenmesi veya minimalliğinin araştırılmasını amaçlayan indirgeme teknikleri detaylı olarak ele alınacaktır. Bir üst veya alt exhausterın hem kapsamaya hem de şekle göre bir diğerinden daha küçük olması ve/veya minimal olması kavramları [11, 12] çalışmalarında tanımlanmıştır. Bir exhausterın kapsamaya göre indirgenmesine dair teknikler, gereksiz kümelerin exhausterdan çıkarılarak içerdiği kümelerin sayısının en aza indirgenmesini amaçlar-ken; şekle göre indirgeme teknikleri de exhausterdaki her bir kümenin, varsa gereksiz kısımlarının atılarak mümkün olabilecek en küçük forma getirilmesini hedeflemektedir. Bu indirgeme tekniklerinde en önemli nokta, gereksiz kümeleri exhausterdan çıkarırken ya da kümeleri kendi içinde küçültürken, yeni oluşan exhausterın başlan-ğıçta temsil edilen fonksiyonu temsil etmeye devam etmesidir.

Literatürde var olan indirgeme tekniklerinin bazıları uygulama açısından zor-luklara sahipken, bazıları da geometrik olarak açıkça yorumlanabilen ve kolay uy-gulanabilen tekniklerdir. Bu çalışmada sırasıyla Roshchina'nın [11, 12] ve Abba-sov'un [16] çalışmalarındaki sonuçlar incelenecek ve bu sonuçlar, açıklayıcı örnekler üzerinde tartışılacaktır.

Öncelikle, bir üst veya alt exhausterın hem kapsamaya hem de şekle göre bir diğerinden daha küçük olması ve minimal olması kavramları tanıtılsın.

Tanım 4.1. *[16] h bir p.h. fonksiyon, E_1 ve E_2 h 'nin üst (veya alt) exha-usterları olsun. Eğer $E_1 \subset E_2$ ise, E_1 **kapsamaya göre E_2 'den daha küçüktür** denir.*

Tanım 4.2. *[12] h bir p.h. fonksiyon, E h 'nin bir üst (veya alt) exhausterı olsun. Eğer E 'den kapsamaya göre daha küçük başka bir $\tilde{E}$ üst (veya alt) exhausterı yoksa, E 'ye **kapsamaya göre minimal exhauster** denir.*

Yukarıdaki kapsamaya göre daha küçük olma ya da kapsamaya göre minimal olma kavramlarının yalnızca exhausterdaki kümelerin sayısı ile ilgilendiği açıktır, kü-melerin şeklini küçültmekle ilgili bir yaklaşım söz konusu değildir. Aşağıda verilecek olan Örnek 4.3 bazı durumlarda bu yaklaşıma göre minimal olan bir exhausterın, aslında daha da küçültülebileceğini gösterecektir.

Örnek 4.3. [16] $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h_1(x) = |x|$ fonksiyonu ele alınsın. $E_1^* = \{[-2, 1], [-1, 2]\}$ ailesinin h 'nin bir üst exhausteri olduğu açıktır. Üstelik E_1^* 'daki kümelerden herhangi biri çıkarılırsa, geriye kalan küme h 'yi tek başına temsil edemeyeceğinden, E_1^* 'ın kapsamaya göre minimal bir exhausterdir. Ancak exhausterdaki kümelerin şekli küçültülebilir. Daha açık olarak E_1^* 'deki iki küme de $[-1, 1]$ aralığına indirgenebilir ki bu h_1 fonksiyonunun $\bar{x} = (0, 0)$ noktasındaki subdiferansiyelidir. Bu nedenle E_1^* 'daki her bir aralık $[-1, 1]$ aralığına indirgenerek yalnızca bu tek kümeden oluşan $E_2^* = \{[-1, 1]\}$ üst exhausteri elde edilir. Bu exhauster Tanım 4.2'yi sağlar ve E_1^* 'den çok daha küçüktür.

Tanım 4.4. [16] h bir p.h. fonksiyon, E_1 ve E_2 h 'nin üst (veya alt) exhausteri olsun. Eğer her $\tilde{C} \in E_1$ için en az bir $C \in E_2$ kümesi $\tilde{C} \subseteq C$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, E_1 **şekle göre E_2 'den daha küçüktür** denir.

Tanım 4.5. [12] h bir p.h. fonksiyon, E h 'nin bir üst (veya alt) exhausteri olsun. Eğer E 'den şekle göre daha küçük başka bir $\tilde{E}$ üst (veya alt) exhausteri yoksa, E 'ye **şekle göre minimal exhauster** denir. Daha açık olarak, h 'nin aşağıdaki özelliği sağlayacak biçimde başka hiçbir $\tilde{E}$ üst (veya alt) exhausteri yoksa E şekle göre minimaldir:

$$\forall \tilde{C} \in \tilde{E}, \exists C \in E : \tilde{C} \subseteq C.$$

Bir üst (ya da alt) exhauster şekle göre minimal ise kapsamaya göre de minimaldir, ancak bunun tersi her zaman doğru değildir [12]. Örnek 4.3 bu gerçeği de göstermektedir.

4.1. Exhausterların Kapsamaya Göre İndirgenmesi ve Minimalliği

Bu bölümde, bir üst (veya alt) exhausterin kapsamaya göre daha küçük bir exhaustera dönüştürülebilmesi için oluşturulan indirgeme tekniklerini ve kapsamaya göre minimallik şartları incelenmiştir. Dolayısıyla, bu bölümde incelenen teknikler, ele alınan p.h. bir h fonksiyonunu temsil eden bir exhausterdan, yine h 'yi temsil etmeye devam edecek şekilde hangi kümelerin atılabileceğine ilişkin koşullar önermektedir. Aşağıda verilen sonuçlar ve bazı örnekler [11, 12, 16] çalışmalarından derlenmiştir.

Aşağıdaki önerme bir üst exhausterdan bir kümenin atılabilmesine ilişkin bir yeterli koşul vermektedir.

Teorem 4.6. [11] E^* , $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ için bir p.h. fonksiyonunun bir üst exhausteri ve $C_0 \in E^*$ olsun. Eğer her $g \in S_1^n$ için E^* içinde C_0 'dan farklı bir C_g kümesi

$$P_{C_g}(g) = \max_{v \in C_g} \langle v, g \rangle \leq \max_{v \in C_0} \langle v, g \rangle = P_{C_0}(g)$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa, $\tilde{E}^* = E^* \setminus \{C_0\}$ küme ailesi yine h 'nin bir üst exhausterdir.

Kanıt. Her $g \in S_1^n$ için,

$$h(g) = \inf_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle = \min \left(\max_{v \in C_0} \langle v, g \rangle, \inf_{C \in \tilde{E}^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle \right)$$

Ancak,

$$\inf_{C \in \tilde{E}^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle \leq \max_{v \in C_g} \langle v, g \rangle \leq \max_{v \in C_0} \langle v, g \rangle$$

olduğundan,

$$h(g) = \inf_{C \in \tilde{E}^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle$$

yani $\tilde{E}^*$, h fonksiyonunun bir üst exhausterdir. □

Örnek 4.7. [16] $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(g_1, g_2) = \min \{ \max \{ g_1 + g_2, g_1 - g_2, -g_1 + g_2, -g_1 - g_2 \} ; 3g_1 + 2g_2 ; g_1 - 2g_2 ; -3g_1 + g_2 ; -2g_1 - g_2 \}$$

olsun. $C_1 = \text{co}\{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$, $C_2 = \{(3, 2)\}$, $C_3 = \{(-3, 1)\}$, $C_4 = \{(-2, -1)\}$, $C_5 = \{(1, -2)\}$ olmak üzere $E^* = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$, h 'nin bir üst exhausterdir. Buradan

$$\forall g \in \{(g_1, g_2) \mid g_1 \geq 0, g_2 \geq 0\} \text{ için } h(g) = p_{C_4}(g) < p_{C_1}(g)$$

$$\forall g \in \{(g_1, g_2) \mid g_1 \leq 0, g_2 \geq 0\} \text{ için } h(g) = p_{C_5}(g) < p_{C_1}(g)$$

$$\forall g \in \{(g_1, g_2) \mid g_1 \leq 0, g_2 \leq 0\} \text{ için } h(g) = p_{C_2}(g) < p_{C_1}(g)$$

$$\forall g \in \{(g_1, g_2) \mid g_1 \geq 0, g_2 \leq 0\} \text{ için } h(g) = p_{C_3}(g) < p_{C_1}(g)$$

olduğundan Teorem 4.6'den C_1 kümesi E^* 'dan çıkarılabilir.

Simetrik teorem alt exhausterlar için aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

Teorem 4.8. [11] E_* , $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ için bir p.h. fonksiyonunun bir alt exhausteri olsun. Eğer $C_0 \in E_*$ ve her $g \in S_1^n$ için E_* içinde C_0 'dan farklı bir C_g kümesi

$$\min_{v \in C_g} \langle v, g \rangle \geq \min_{v \in C_0} \langle v, g \rangle$$

koşulunu sağlayacak şekilde varsa, $\tilde{E}_* = E_* \setminus \{C_0\}$ küme ailesi yine h fonksiyonu için bir alt exhausterdir.

Şimdi [11] çalışmasında sunulan hem kapsamaya göre hem de daha sonra şekle göre indirgeme için kullanılacak olan bir yöntem tanıtılacaktır. Bu teknikte, bir

üst (ya da alt) exhaustera ait herhangi bir C kümesinin her bir $g \in S_1^n$ yönünde ortaya çıkan hiperdüzlemlerle kesilerek ve bu kesilmiş kümeler her yön üzerinden birleştirilerek oluşturulan bir yaklaşım kullanılmaktadır.

$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir p.h. fonksiyon ve $E^*(h)$, h 'nin bir üst exhausteri olsun. Her bir $g \in S_1^n = \{g \in \mathbb{R}^n \mid \|g\| = 1\}$ için

$$Q^*(C, g) := \{v \in C \mid \langle v, g \rangle \geq h(g)\}$$

kümesi tanımlansın. Aşağıdaki örnek $Q^*(C, g)$ kümelerinin nasıl oluşturulduğunu gösterecektir.

Örnek 4.9. [11] $E^*(h) = \{C_1, C_2, C_3\}$ ve $i = 1, 2, 3$ için $Q_i = Q^*(C_i, g_0)$ olmak üzere $Q^*(C, g_0)$ kümelerinin nasıl oluşabileceğine ilişkin farklı küme örnekleri Şekil 4.1'de gösterilmiştir.

Yardımcı Teorem 4.10. [11] Her bir $g_0 \in S_1^n$ ve $C_0 \in E^*(h)$ için $Q^*(C_0, g_0)$ kümesi boştan farklı, kompakt, konveks bir kümedir.

Kanıt. $Q^*(C_0, g_0)$ kümesinin tanımı gereği kapalı olduğu açıktır. Ayrıca sınırlı bir kümenin alt kümesi olduğu için sınırlıdır.

Her $g_0 \in S_1^n$ ve $C_0 \in E^*(h)$ için $v_1, v_2 \in Q^*(C_0, g_0)$, $\alpha \in [0, 1]$ alınsın. $v_\alpha = \alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2$ olarak tanımlansın. Buradan

$$(v_\alpha, g_0) = \alpha(v_1, g_0) + (1 - \alpha)(v_2, g_0) \geq \alpha h(g_0) + (1 - \alpha)h(g_0) = h(g_0)$$

elde edilir. Böylece v_α aynı zamanda $Q^*(C_0, g_0)$ 'a aittir ve bununla birlikte $Q^*(C_0, g_0)$ 'in konveks olduğu elde edilir.

Şimdi herhangi bir $C_0 \in E^*$ ve $g_0 \in S_1^n$ için $Q^*(C_0, g_0)$ kümesinin boş küme olduğu varsayalım. O halde her $v \in C_0$ için $(v, g_0) < h(g_0)$ olur. C_0 kompakt olduğundan $\max_{v \in C_0} \langle v, g_0 \rangle < h(g_0)$ olarak yazılabilir. Buradan

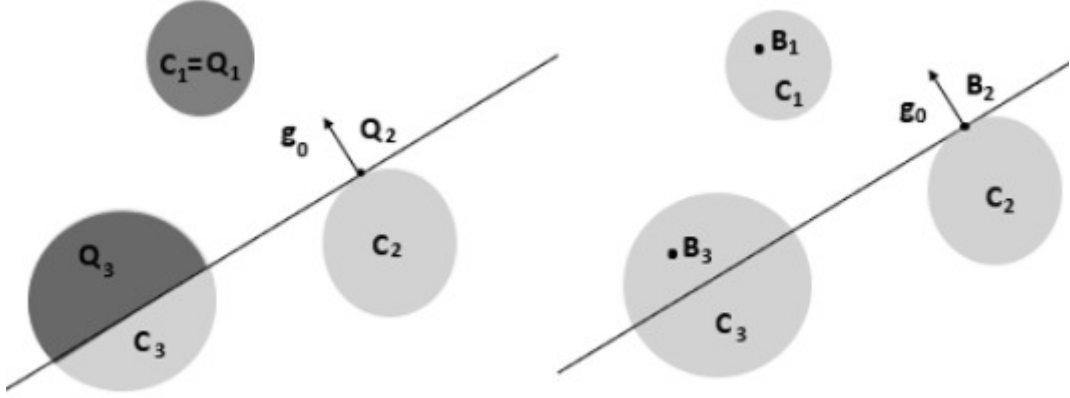
$$h(g_0) > \max_{v \in C_0} \langle v, g_0 \rangle \geq \inf_{c \in E^*} \max_{v \in C_0} \langle v, g_0 \rangle = h(g_0)$$

elde edilir ki bu imkansızdır. Dolayısıyla $Q^*(C_0, g_0)$ boştan farklıdır. $\square$

Örnek 4.11. Örnek 3.24'deki $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(g_1, g_2) = \min\{\max\{g_1 + g_2, g_1 - g_2, 0\}, \max\{-g_1 - g_2, -g_1 + g_2\}, 3g_1 + 2g_2\}$$

fonksiyonu ve $C_1 = \text{co}\{(1, 1), (1, -1), (0, 0)\}$, $C_2 = \{(-1, 1), (-1, -1)\}$ ve $C_3 = \{(3, 2)\}$ olmak üzere, h 'nin $E^* = \{C_1, C_2, C_3\}$ üst exhausteri ele alınsın. $g_0 = (1, 0)$ seçilirse $h(g_0) = -1$ olur. Buradan



Şekil 4.1: Örnek 4.9'de ki C_i ve Q_i ; Örnek 4.13'deki B_i kümeleri

$$Q^*(C_i, g_0) = \{(v_1, v_2) \in C_i \mid v_1 \geq -1\}$$

olduğundan $Q^*(C_1, g_0) = C_1$, $Q^*(C_2, g_0) = C_2$, $Q^*(C_3, g_0) = C_3$ elde edilir. Öte yandan $g_1 = (1, 1)$ seçilirse $h(g_1) = -1$ olur.

$$Q^*(C_i, g_0) = \{(v_1, v_2) \in C_i \mid v_1 + v_2 \geq -1\}$$

olduğundan $Q^*(C_1, g_0) = \text{co}\{(-1, 0), (-1, 1)\}$, $Q^*(C_2, g_0) = C_2$ ve $Q^*(C_3, g_0) = C_3$ olur.

$Q^*(C, g)$ kümesinin tanımlanışının ardından, her bir $g \in S_1^n$ ve $C \in E^*(h)$ için $B^*(C, g) \subseteq Q^*(C, g)$ olacak biçimde bir $B^*(C, g)$ kümesi seçilsin.

Uyarı 4.12. [11] Bu tanımlama anlamlıdır. Çünkü $B^*(C, g) = Q^*(C, g)$ olacak şekilde her zaman kurulabilir. Ancak elbette ki uygun olan daha küçük kümeler ve hatta tek nokta kümeleri seçmektir.

$Q^*(C, g)$ ve $B^*(C, g)$ kümelerini oluşturduktan sonra aşağıdaki kümeler oluşturulsun:

$$B^*(C) := \bigcup_{g \in S_1^n} B^*(C, g)$$

ve

$$\bar{B}^*(C) := \text{cl conv} B^*(C)$$

olsun.

Örnek 4.13. [11] $B^*(C, g_0)$ 'in kuruluşuna bir örnek olarak Şekil 4.1 göz önüne alınsın. $B_i := B^*(C_i, g_0)$ ile gösterilmiştir. Q_2 tek nokta kümesi olduğundan $B_2 = Q_2$ 'dir. Ancak B_1 ve B_3 için seçenekler daha fazladır. Bu örnekte $B^*(C, g)$ olarak uygun tek nokta kümeleri seçilmiştir.

Bu gerekli bilgilerden sonra aşağıdaki teorem, kapsamaya göre daha küçük bir exhauster elde etmek için bazı koşullar sunacaktır.

Teorem 4.14. [11] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. fonksiyon, E^* bir üst exhauster olsun.

Aşağıdaki teknikler E^* 'deki küme sayısını indirmek için kullanılabilir:

- (i) $C_0, C_1 \in E^*$ ve $C_1 \subseteq C_0$ ise C_0 exhausterden çıkarılabilir.
- (ii) Her $g \in S_1^n$ için $\max_{v \in C_0} \langle v, g \rangle > h(g)$ ise C_0 exhausterden çıkarılabilir.
- (iii) $\bar{B}^*(C_0) \subseteq \text{int}(C_0)$ ise C_0 exhausterden çıkarılabilir.

Kanıt. (i) $C_1 \subset C_0$ olsun. Bu durumda her $g \in S_1^n$ için $\max_{v \in C_1} \langle v, g \rangle \leq \max_{v \in C_0} \langle v, g \rangle$ olur ve Teorem 4.6'den C_0 exhausterden atılabilir.

(ii) Her $g \in S_1^n$ için $\max_{v \in C_0} \langle v, g \rangle > h(g)$ olsun. Herhangi bir $g \in S_1^n$ seçilip sabitlensin. $\alpha(g) = \max_{v \in C_0} \langle v, g \rangle - h(g)$ olarak alınsın. $\alpha(g) > 0$ 'dır. Açık ki

$$\max_{v \in C_g} \langle v, g \rangle \leq h(g) + \alpha(g) \iff \max_{v \in C_0} \langle v, g \rangle > \max_{v \in C_g} \langle v, g \rangle$$

olacak şekilde bir $C_g \in E^*$ kümesi vardır. Teorem 4.6'dan C_0 exhausterden atılabilir.

(iii) Herhangi bir $g \in S_1^n$ seçilip sabitlensin. $v_0 = \arg \max_{v \in \bar{B}^*(C_0)} \langle v, g \rangle$ alınsın. $\bar{B}^*(C_0)$ 'in tanımından $\langle v_0, g \rangle \geq h(g)$ olur. $v_0 \in \text{int}C$ olduğundan $v_\epsilon = v_0 + \epsilon g \in C_0$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ vardır. Buradan

$$\max_{v \in C_0} \langle v, g \rangle \geq \langle v_\epsilon, g \rangle = \langle v_0, g \rangle + \langle \epsilon g, g \rangle \geq h(g) + \epsilon > h(g)$$

elde edilir. g keyfi seçildiğinden ve bu teoremin (ii) şikkından C_0 exhausterden çıkarılabilir. $\square$

Örnek 4.15. Bir h fonksiyonunun bir üst exhausteri Şekil 4.2'te gösterilen $C_1 = \text{co}\{(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}$ ve $C_2 = \text{co}\{(-1, 0), (1, 0)\}$ kümeleri ile oluşturulan $E^*(h) = \{C_1, C_2\}$ olsun. Kolaylıkla görülmektedir ki $C_2 \subset C_1$ 'dir. Bu nedenle Teorem 4.14 gereğince C_1 exhausterden atılabilir.

Örnek 4.16. Örnek 4.7'de verilen $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(g_1, g_2) = \min\{\max\{g_1 + g_2, g_1 - g_2, -g_1 + g_2, -g_1 - g_2\} \\ ; 3g_1 + 2g_2 ; g_1 - 2g_2 ; -3g_1 + g_2 ; -2g_1 - g_2\}$$

fonksiyonu ve $C_1 = \text{co}\{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$ kümesi için

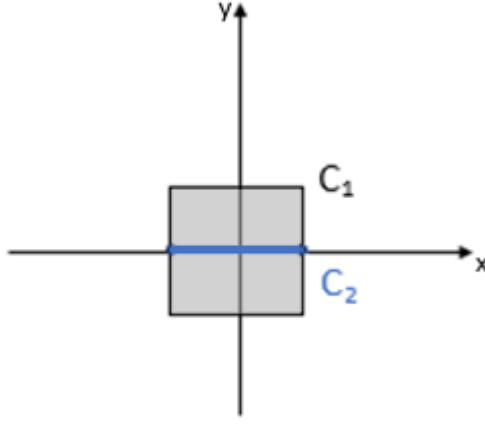
$$\max_{v \in C_1} \langle v, g \rangle = \max\{|g_1|, |g_2|\} > h(g)$$

olduğundan C_1 , E^* 'dan çıkarılabilir.

Benzer teorem alt exhausterlar için de ifade edilebilir.

Teorem 4.17. [11] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir p.h. fonksiyon, E_* bir alt exhauster olsun.

Aşağıdaki teknikler E_* 'deki küme sayısını indirmek için kullanılabilir:



Şekil 4.2: Örnek 4.15'deki $C_2 \subset C_1$ olacak şekildeki C_1, C_2 kümeleri

- (i) $C_0, C_1 \in E_*$ ve $C_1 \subseteq C_0$ ise C_0 exhausterdan çıkarılabilir.
- (ii) Her $g \in S_1^n$ için $\max_{v \in C_0} \langle v, g \rangle < h(g)$ ise C_0 exhausterdan çıkarılabilir.
- (iii) $\bar{B}_*(C_0) \subseteq \text{int}(C_0)$ ise C_0 exhausterdan çıkarılabilir.

Şimdi, Roshchina tarafından [12] çalışmasında önerilen, kapsamaya göre daha ileri indirgeme teknikleri incelenecektir. $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. bir fonksiyon ve E^* h 'nin bir üst exhausteri olmak üzere bir $C \in E^*$ için

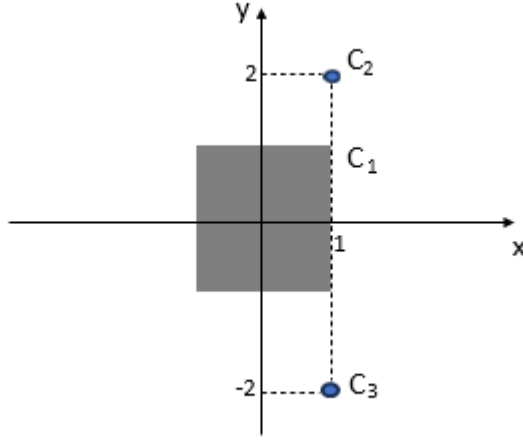
$$M^*(C) := \text{clco}\{v_0 \in C \mid \exists g \in S_1^n, v_0 = \operatorname{argmax}_{v \in C} \langle v, g \rangle, \langle v_0, g \rangle = h(g)\}$$

kümesi tanımlansın. Bu küme geometrik olarak C kümesinin en az bir g yönünde h fonksiyonunun $\inf_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle$ temsilindeki infimum değere katkıda bulunduğu ve C 'nin destek fonksiyonuna o yöndeki değeri veren vektörlerden oluşmaktadır. Daha açık olarak, $M^*(C)$ kümesi C 'nin aktif olarak h fonksiyonunun temsiline katıldığı destek noktalarının kümesidir. Böylece bir $C \in E^*$ kümesinin h 'nin temsilde aktif olduğu sınır noktalarının var olup olmadığı ve varsa hangileri olduğu bu yaklaşım ile belirlenmektedir.

Örnek 4.18. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(g_1, g_2) = \min\{\max\{g_1 + g_2, g_1 - g_2, -g_1 + g_2, -g_1 - g_2\}, g_1 + 2g_2, g_1 - 2g_2\}$$

fonksiyonu ele alınsın. $C_1 = \text{co}\{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$, $C_2 = \{(1, 2)\}$ ve $C_3 = \{(1, -2)\}$ olmak üzere $E^* = \{C_1, C_2, C_3\}$, h 'nin bir üst exhausterıdır. E^* 'a ait kümeler Şekil 4.3 ile gösterilmiştir. Buradan $M^*(C_1) = \text{co}\{(1, -1), (1, 1)\}$, $M^*(C_2) = C_2$, $M^*(C_3) = C_3$ elde edilir.



Şekil 4.3: Örnek 4.18'deki C_1, C_2, C_3 kümeleri

Aşağıdaki önerme, bir kümenin bir üst exhausterdan çıkarılabilmesi için $M^*(C)$ yardımıyla bir yeterli koşul sunmaktadır.

Teorem 4.19. [12] E^* bir p.h. bir h fonksiyonunun bir üst exhausteri olsun. Bir $C_0 \in E^*$ için $M^*(C_0) = \emptyset$ ise $\tilde{E}^* = E^* \setminus \{C_0\}$ ailesi de h 'nin bir üst exhausterıdır, yani C_0 kümesi E^* 'dan atılabilir.

Kanıt. $C_0 \in E^*$ kümesi için $M^*(C_0) = \emptyset$ olsun. Buna göre, her $g \in S_1^n$ için $\max_{v \in C} \langle v, g \rangle > h(g)$ 'dir. Dolayısıyla, her $g \in S_1^n$ için C_0 'dan farklı öyle bir $C_g \in E^*$ kümesi vardır ki $\max_{v \in C_0} \langle v, g \rangle = h(g) = \max_{v \in C_g} \langle v, g \rangle$ gerçekleşir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} h(g) &= \min \left\{ \inf_{C \in E^* \setminus \{C_0\}} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle, \max_{v \in C_0} \langle v, g \rangle \right\} \\ &= \inf_{C \in E^* \setminus \{C_0\}} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle, \quad \forall g \in S_1^n \end{aligned}$$

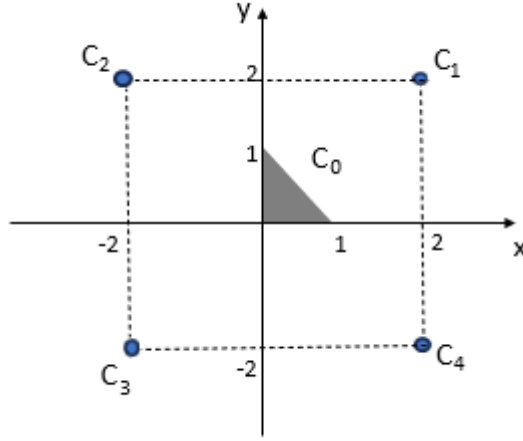
elde edilir ki bu C_0 'ın E^* 'dan atılabileceğini gösterir. Yani $\tilde{E}^* = E^* \setminus \{C_0\}$ ailesi de h 'nin bir üst exhausterıdır. $\square$

Örnek 4.20. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(g_1, g_2) = \min \{ \max \{ 0, g_1, g_2 \}, 2g_1 + 2g_2, 2g_1 - 2g_2, -2g_1 + 2g_2, -2g_1 - 2g_2 \}$$

fonksiyonu ele alınsın. $C_0 = \text{co}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$, $C_1 = \{(2, 2)\}$, $C_2 = \{(-2, 2)\}$, $C_3 = \{(-2, -2)\}$ ve $C_4 = \{(2, -2)\}$ olmak üzere $E^* = \{C_0, C_1, C_2, C_3, C_4\}$ h 'nin bir üst exhausterıdır. Burada $M^*(C_0) = \emptyset$ olduğundan Teorem 4.19 gereğince C_0 , E^* 'dan çıkarılabilir.

Sıradaki sonuç, $M^*(C)$ kümesini kullanarak bir üst exhausterin kapsamaya



Şekil 4.4: Örnek 4.20'deki C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 kümeleri

göre minimalliği için bir gerekli koşul sunmaktadır.

Teorem 4.21. [12] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir p.h. fonksiyon olsun. Eğer E^* , h 'nin kapsamaya göre minimal bir üst exhausteri ise her $C \in E^*$ için $M^*(C) \neq \emptyset$ 'dir.

Kanıt. E^* , h 'nin kapsamaya göre minimal bir üst exhausteri olsun ancak kabul edelim ki $\exists C_0 \in E^*$ için $M^*(C_0) = \emptyset$ olsun. Bu durumda Teorem 4.13 gereğince $E^* \setminus \{C_0\}$ ailesi de h 'nin bir üst exhausteri ve bu E^* 'dan kapsamaya göre daha küçüktür. Bu ise E^* 'ın kapsamaya göre minimal oluşu ile çelişir. Kabul yanlıştır, her $C \in E^*$ için $M^*(C) \neq \emptyset$ 'dir. $\square$

Örnek 4.22. [12] Örnek 4.3'de incelenen $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h_1(x) = |x|$ fonksiyonu ve h 'nin $E_1^* = \{C_1 = [-2, 1], C_2 = [-1, 2]\}$ üst exhausteri ele alınsın. E_1^* 'ın kapsamaya göre minimal olduğu gösterilmişti. C_1 ve C_2 kümeleri için

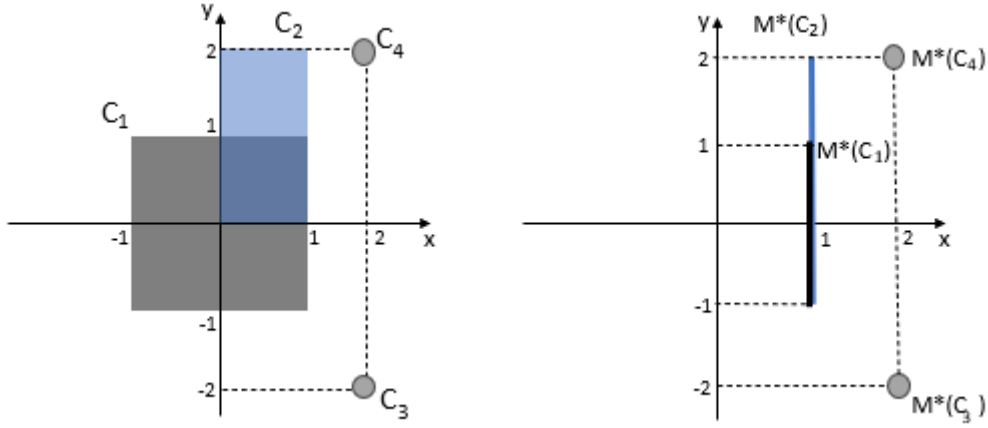
$$M^*(C_1) = \{1\} \text{ ve } M^*(C_2) = \{-1\}$$

kümeleri boştan farklıdır.

Uyarı 4.23. [12] Teorem 4.21 ile bir üst exhausterin kapsamaya göre minimalliği için verilen gerekli koşul, kapsamaya göre minimalliği için yeterli değildir. Aşağıdaki örnek ile bu durum incelenecektir.

Örnek 4.24. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x_1, x_2) = \min\{\max\{x_1 + x_2, -x_1 + x_2, -x_1 - x_2, x_1 - x_2\}, \\ \max\{x_1 + 2x_2, -x_2, x_1 - x_2\}, 2x_1 - 2x_2, 2x_1 + 2x_2\}$$



Şekil 4.5: Örnek 4.24'te verilen C_i ve $M^*(C_i)$ kümeleri

fonksiyonu ele alınsın.

$C_1 = \text{co}\{(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}$, $C_2 = \text{co}\{(1, 2), (0, 2), (0, -1), (1, -1)\}$, $C_3 = \{(2, -2)\}$, $C_4 = \{(2, 2)\}$ olmak üzere $E^* = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ h 'nin bir üst exhausterıdır. $M^*(C_1) = \text{co}\{(1, 1), (1, -1)\}$, $M^*(C_2) = \text{co}\{(1, 2), (1, -1)\}$, $M^*(C_3) = \{(2, -2)\} = C_3$, $M^*(C_4) = \{(2, 2)\} = C_4$ olduğu kolayca görülebilir. Üstelik C_2 kümesinin E^* 'dan çıkarılabilir olduğu açıktır. Dolayısıyla her $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ için $M^*(C_i) \neq \emptyset$ olduğu halde E^* kapsamaya göre minimal değildir.

Yukarıdaki sonuçlara simetrik olarak alt exhausterlar için aşağıdaki teoremler ifade edilebilir.

Teorem 4.25. [12] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. fonksiyon ve E_* , h 'nin bir alt exhausteri olsun. Bir $C_0 \in E_*$ için $M_*(C) = \emptyset$ ise $\widetilde{E}_* = E_* \setminus \{C_0\}$ ailesi de h 'nin bir alt exhausterıdır.

Teorem 4.26. [12] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. bir fonksiyon ve E_* , h 'nin kapsamaya göre minimal bir alt exhausteri ise her $C \in E_*$ için $M_*(C) \neq \emptyset$ 'dir.

Uyarı 4.27. [12] Bir exhausterin şekle göre minimalliği kapsamaya göre minimalliğini gerektirdiğinden Teorem 4.14 ve Teorem 4.18 ile verilen gerekli koşullar şekle göre minimallik için de gerekli koşullardır.

Şimdi Abbasov [16] tarafından sunulan bazı indirgeme teknikleri incelenecektir. Bu tekniklerin önemli bir kısmı, konveks analizin temel kavramlarından olan konveks kümelerin ayırma teoremlerine dayanacaktır. Abbasov, exhausterların hem kapsamaya hem de şekle göre indirgenmesi üzerine geometrik olarak yorumlanabilen teknikler vermiştir. Bu bölümde kapsamaya göre indirgemeye ilişkin sonuçlar

tartışılacaktır.

[16] çalışmasında $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. fonksiyonu Lipschitz sürekli kabul edilmiştir. Dolayısıyla, $\forall g \in \mathbb{R}^n$ için

$$h(g) = \min_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle$$

ve

$$h(g) = \max_{C \in E^*} \min_{v \in C} \langle v, g \rangle$$

şeklinde temsil edilebilmektedir.

Bu çalışmadaki tüm sonuçlar üst exhausterlar cinsinden ifade edilebilecek olup benzer sonuçların alt exhausterlar için de geçerli olduğu açıktır. Aşağıdaki ilk sonuç, bir exhausterden bir kümenin çıkarılabilmesine dair bir gerek ve yeter koşul önermektedir.

Teorem 4.28. [16] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h ve Lipschitz bir fonksiyon, E^* , h 'nin bir üst exhausteri ve $C_0 \in E^*$ olsun. Bu durumda $\tilde{E}^* = E^* \setminus \{C_0\}$ ailesinin h 'nin bir üst exhausteri olması için gerek ve yeter koşul;

$$\forall g \in S_1^n \text{ için } \exists C_g \in \tilde{E}^* : C_g \subseteq H_-(C_0, g)$$

olmasıdır. Daha açık olarak, bir C_0 kümesinin E^* 'dan çıkarılabilmesi için gerek ve yeter koşul, C_0 kümesinin herhangi bir uç noktasından geçen her destek hiperdüzlemine karşılık gelen kapalı yarı-uzayların, E^* 'a ait ve C_0 'dan farklı en az bir kümeyi içermesidir.

Kanıt. ($\Rightarrow$) Kabul edelim ki hem E^* hem de $\tilde{E}^*$ h 'nin üst exhausterları olsunlar, yani C_0 çıkarılabilir olsun. Keyfi bir $g \in S_1^n$ seçilip sabitlensin. Buna göre,

$$h(g) = \min_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle = \min \{ \min_{C \in \tilde{E}^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle, \max_{v \in C_0} \langle v, g \rangle \} = \min_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle \quad (4.1)$$

olduğu açıktır. Öte yandan her bir $g \in S_1^n$ için

$$\min_{C \in \tilde{E}^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle = \max_{v \in C_g} \langle v, g \rangle \quad (4.2)$$

olacak şekilde $\exists C_g \in \tilde{E}^*$ kümesi vardır. O halde, (4.1) ve (4.2)'den

$$\max_{v \in C_0} \langle v, g \rangle \geq \min_{C \in \tilde{E}^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle = \max_{v \in C_g} \langle v, g \rangle, \quad \forall g \in S_1^n$$

elde edilir. Dolayısıyla, her $v \in C_g$ için

$$\langle v, g \rangle \leq \max_{v \in C_g} \langle v, g \rangle \leq \max_{v \in C_0} \langle v, g \rangle = \langle v_{c_0}, g \rangle$$

eşitsizliği $v_{c_0} = \underset{v \in C_0}{\operatorname{argmax}} \langle v, g \rangle$ olmak üzere sağlanır. Buradan her $v \in C_g$ için $\langle v - v_{c_0}, g \rangle \leq 0$ elde edilir. Sonuç olarak, her $g \in S_1^n$ için $\exists C_g \in \tilde{E}^*$ kümesinin $C_g \subseteq H_-(C_0, g)$ olacak biçimde varlığı gösterilmiş olur.

($\Leftarrow$) Tersine kabul edelim ki, $\forall g \in S_1^n \exists C_g \in \tilde{E}^*: C_g \subseteq H_-(C_0, g)$ koşulu sağlansın. Bir $g \in S_1^n$ seçilip sabitlensin. O halde her $v \in C_g$ için $\langle v - v_{c_0}, g \rangle \leq 0$ eşitsizliği sağlanır. Yani her $v \in C_g$ için $\langle v, g \rangle \leq \langle v_{c_0}, g \rangle$ elde edilir ki bu (4.1) eşitsizliğini gerektirir. Dolayısıyla $\tilde{E}^*$ h'nin bir üst exhausterdir. $\square$

Örnek 4.29. [16] Örnek 4.7'de incelenen $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(g_1, g_2) = \min\{\max\{g_1 + g_2, g_1 - g_2, -g_1 + g_2, -g_1 - g_2\} ;$$

$$3g_1 + 2g_2 ; g_1 - 2g_2 ; -3g_1 + g_2 ; -2g_1 - g_2\}$$

fonksiyonu ele alınsın. $C_1 = \operatorname{co}\{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$, $C_2 = \{(3, 2)\}$, $C_3 = \{(-3, 1)\}$, $C_4 = \{(-2, -1)\}$, $C_5 = \{(1, -2)\}$ olmak üzere $E^* = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$, h'nin bir üst exhausteri olarak verilmiştir.

$$\forall g \in \{(g_1, g_2) \mid g_1 \geq 0, g_2 \geq 0\} \text{ için } C_4 \subseteq H_-(C_1, g)$$

$$\forall g \in \{(g_1, g_2) \mid g_1 \leq 0, g_2 \geq 0\} \text{ için } C_5 \subseteq H_-(C_1, g)$$

$$\forall g \in \{(g_1, g_2) \mid g_1 \leq 0, g_2 \leq 0\} \text{ için } C_2 \subseteq H_-(C_1, g)$$

$$\forall g \in \{(g_1, g_2) \mid g_1 \geq 0, g_2 \leq 0\} \text{ için } C_3 \subseteq H_-(C_1, g)$$

olduğundan Teorem 4.28 'den C_1 kümesi E^* 'dan çıkarılabilir.

Aşağıdaki sonuç E^* 'dan bir kümenin çıkarılamaması için bir gerek ve yeter koşul sunmaktadır. Bu sonuç, bir exhausterin kapsamaya göre minimalliğinin kontrol edilmesi amacıyla kullanılabilir.

Uyarı 4.30. [16] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. , Lipschitz bir fonksiyon ve E^* h'nin bir üst exhausteri, $C_0 \in E^*$ olsun. Bu durumda $\tilde{E}^* = E^* \setminus \{C_0\}$ ailesinin h'nin bir üst exhausteri olmaması, yani C_0 'ın E^* 'dan çıkarılamaması için gerek ve yeter koşul, $\exists g_0 \in S_1^n$ için $\forall C \in \tilde{E}^*, \exists v(C) \in C : v(C) \notin H_-(C_0, g_0)$ olmasıdır.

4.2. Exhausterların Şekle Göre İndirgenmesi ve Minimalliği

Bu bölümde, bir üst (veya alt) exhausterin şekle göre daha küçük bir exhaustera dönüştürülebilmesi için bazı indirgeme teknikleri ve şekle göre minimallik koşulları incelenmiştir. Dolayısıyla, bu bölümde incelenen teknikler, ele alınan p.h. bir h fonksiyonunu temsil eden bir exhausterde, yine h 'yi temsil etmeye devam edecek şekilde hangi kümelerin ne kadar daraltılabileceğine (küçültülebileceğine) ilişkin bazı

koşullar önermektedir. Aşağıda ifade edilen sonuçlar ve bazı örnekler [11, 12, 16] çalışmalarından derlenmiştir.

Önceki kesimde, bir E^* üst exhausteri ve bir $C \in E^*$ için $Q^*(C, g)$ ve $B^*(C, g)$ kümeleri ve bunlar yardımıyla da

$$B^*(C) := \bigcup_{g \in S_1^n} B^*(C, g)$$

ve

$$\bar{B}^*(C) := cl \ co B^*(C)$$

biçiminde $\bar{B}^*(C)$ kümesi tanımlanmıştı. Aşağıdaki önerme bu yaklaşımın, exhausterların şekle göre indirgenmesinde nasıl kullanıldığını gösterecektir.

Teorem 4.31. [11] $E^*(h)$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. fonksiyonunun bir üst exhausteri olsun. Bu durumda

$$\bar{E}^* = \{\bar{C} = \bar{B}^*(C) \subseteq C \mid C \in E^*(h)\}$$

şeklinde verilen küme ailesi de h fonksiyonunun bir üst exhausterıdır.

Kanıt. Her $C \in E^*(h)$ ve $g_0 \in \mathbb{R}^n$ için:

$$\max_{v \in C} \langle v, g_0 \rangle \geq \max_{v \in \bar{B}^*(C)} \langle v, g_0 \rangle = \sup_{g \in S_1^n} \sup_{v \in B^*(C, g)} \langle v, g_0 \rangle \geq \sup_{v \in B^*(C, g_0)} \langle v, g_0 \rangle \geq h(g_0)$$

Dolayısıyla, keyfi bir C için,

$$h(g_0) = \inf_{C \in E^*(h)} \max_{v \in C} \langle v, g_0 \rangle \geq \inf_{C \in E^*(h)} \max_{v \in \bar{B}^*(C)} \langle v, g_0 \rangle \geq h(g_0)$$

Buradan,

$$\inf_{C \in E^*} \max_{v \in \bar{B}^*(C)} \langle v, g_0 \rangle = h(g_0)$$

ya da denk olarak,

$$\inf_{\bar{C} \in \bar{E}^*} \max_{v \in \bar{C}} \langle v, g_0 \rangle = h(g_0)$$

elde edilir. Yani

$$\bar{E}^* = \{\bar{C} = \bar{B}^*(C) \mid C \in E^*\}$$

ailesi de h 'nin bir üst exhausterıdır. □

h bir p.h fonksiyon ve E^* üst exhausteri olsun. $C \in \mathbb{R}^n$ ve $g \in S_1^n$ için a , $\mathbb{R}^n$ 'de bir nokta olmak üzere;

$$B_a^*(C, g) = \{\arg \min_{v \in Q^*(C, g)} \|v - a\|\}$$

olarak tanımlansın. Açıktır ki $B^*(C, g) := B_a^*(C, g)$ alınabilir.

Aşağıdaki örnekler, Teorem 4.31 kullanılarak, şekle göre daha küçük exhausterların elde edilmesini açıklayacaktır.

Örnek 4.32. [11] Bir $h_3 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. fonksiyonunun E_3^* üst exhausteri, $\mathbb{R}^n$ 'de orjine teğet olan tüm birim yuvarlardan oluşsun. $B^*(C, g) := B_0^*(C, g)$ seçerek,

$B^*(C) = \bigcup_{g \in S_1^n} B_0(C, g)$ kümeleriyle $\bar{E}_3^*$ 'i oluşturursak, $\bar{E}_3^* = \{\{0_n\}\}$ (tekrarlananlar atılarak) olduğu kolayca görülür. Açıkthatır ki $\bar{E}_3^*$ minimal exhausterdir.

Örnek 4.33. [11] Şimdi vereceğimiz örnek biraz yapay görülebilir, ancak bu örnek indirgemenin nasıl işlediğini ve $B^*(C, g)$ 'nin uygun bir seçiminin neden önemli olduğunu açıkça göstermektedir. Keyfi $a \in \mathbb{R}^n$ seçilip, sabitlensin. $h_4(g) = \langle a, g \rangle$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda, $C_v := \text{co}\{a - v, a + v\}, v \in S_1^n$ olmak üzere $E_4^* = \{C_v \mid v \in S_1^n\}$ küme ailesi h_4 'ün bir üst exhausterdir. Buna göre $B^*(C, g) := B_a^*(C, g)$ kümelerini kullanarak $\bar{E}_4^*$ ailesini oluşturalım. Bir $v \in S_1^n$ alalım. Her $g \in S_1^n$ için

$$\begin{aligned} Q^*(C_v, g) &= \{w \in \text{co}\{a - v, a + v\} \mid \langle w, g \rangle \geq \langle a, g \rangle\} \\ &= \begin{cases} \text{co}\{a - v, a\}, \langle v, g \rangle < 0 \\ \text{co}\{a, a + v\}, \langle v, g \rangle > 0 \\ \text{co}\{a - v, a + v\}, \langle v, g \rangle = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

biçimindedir. Buradan, $\|(a + \alpha v) - a\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ elde ederiz. Bu ifade $\alpha = 0$ 'da minimum değerini alacağından, her $g \in S_1^n$ için $B_a^*(C_v, g) = \{a\}$ olur. Böylece, v keyfi olduğundan E_4^* 'daki tüm kümeler yalnızca $\{a\}$ 'ya indirgenmiş olur. Böylelikle, $\bar{E}_4^* = \{\{a\}\}$ olur. Ancak kolaylıkla gösterilebilir ki, $B_b^*(C, g)$ ($b \neq a$) seçilerek yapılan indirgeme çok daha geniş kümeler verecektir.

Örnek 4.34. [11] $h_5 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. fonsiyonunun bir üst exhausteri

$$C_1 = \text{co}\{(-1, 0), (1, 0), (0, 1)\} \text{ ve } C_2 = \text{co}\{(-1, 0), (1, 0), (0, -1)\}$$

olmak üzere $E_5^* = \{C_1, C_2\}$ olsun.

$$B^*(C, g_0) = \{ \underset{(x,y) \in Q^*(C, g_0)}{\text{argmin}} |y| \}$$

kullanılarak yapılan indirgemeyle $\tilde{E}_5^* = \{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2\}$ olacak şekilde $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = \text{co}\{(-1, 0), (1, 0)\}$ elde edilir. Tekrarlananlar atılarak,

$$\bar{E}_5^* = \{\text{co}\{(-1, 0), (1, 0)\}\}$$

üst exhausteri elde edilir. Açıkthatır ki $\bar{E}_5^*$ başlangıçtaki E_5^* 'dan şekle göre daha küçüktür.

Uyarı 4.35. [11] Yukarıdaki örneklerden görüldüğü gibi, verilen indirgeme tekniği sadece kümelerin büyüklüklerini indirgemekle kalmayıp, exhausterde bulunan küme sayısını da azaltabilmektedir.

Benzer şekilde bir alt exhausteri için de aynı sonuç elde edilebilir. $E_*(h)$, $h :$

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir alt exhausteri olsun. Her $g \in S_1^n$ için

$$Q_*(C, g) = \{v \in C \mid \langle v, g \rangle \leq h(g)\}, \quad B_*(C, g) \subset Q_*(C, g), \quad B_*(C, g) \neq \emptyset$$

olmak üzere

$$B_*(C) := \bigcup_{g \in S_1^n} B_*(C, g)$$

ve

$$\bar{B}_*(C) := clco B_*(C)$$

tanımlanır. Aşağıdaki sonuçlar üst exhauster için olanlarla simetriktr.

Yardımcı Teorem 4.36. [11] Her bir $g_0 \in S_1^n$ ve $C_0 \in E_*(h)$ için $Q_*(C_0, g_0)$ kümesi boştan farklı, kompakt ve konveks bir kümedir.

Teorem 4.37. [11] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir p.h. fonksiyon ve $E_*(h)$, h 'nin bir alt exhausteri olsun. Bu durumda,

$$\bar{E}_*(h) = \{\bar{C} = \bar{B}_*(C) \subseteq C \mid C \in E_*(h)\}$$

küme ailesi de h 'nin bir alt exhausterıdır.

Çalışmanın bu bölümünde, Roshchina'nın şekle göre indirgemeye ilişkin [12] çalışmasında elde ettiği sonuçlar tartışılacaktır. Bunun için, önceki kesimde tanımlanmış olan ve $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. bir fonksiyon ve E^* h 'nin bir üst exhausteri olmak üzere bir $C \in E^*$ için

$$M^*(C) := clco\{v_0 \in C \mid \exists g \in S_1^n, v_0 = \operatorname{argmax}_{v \in C} \langle v, g \rangle, \langle v_0, g \rangle = h(g)\}$$

kümesi hatırlatılsın. Öncelikle, sonraki temel teoremden kullanılmak üzere kompakt konveks kümelerle dair bir özellik verilecektir.

Yardımcı Teorem 4.38. [12] $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, konveks bir küme ve $a \in S_1^n$ olsun. Keyfi bir $d \in \mathbb{R}$ için $C_d = \{v \in C \mid \langle a, v \rangle \leq d\}$, $d^* = \max_{v \in C} \langle a, v \rangle$, $d_* = \min_{v \in C} \langle a, v \rangle$ ile tanımlı C_d kümesi ve d^* ile d_* sayıları göz önüne alınsın. Eğer $d_* < d^*$ ise ($d \rightarrow d^*$ ve $d_* < d < d^*$ iken) $\max_{v \in C_d} \langle v, g \rangle \rightarrow \max_{v \in C} \langle v, g \rangle$, $\forall g \in S_1^n$ gerçekleşir.

Kanıt. Kabul edelim ki $\exists g_0 \in S_1^n$, $d_n \in (d_*, d^*)$, $d_n \rightarrow d^*$ olan $\exists \{d_n\}$ dizisi ve $\exists c \in \mathbb{R}$ sabit sayısı için

$$\max_{v \in C} \langle v, g_0 \rangle - \max_{v \in C_d} \langle v, g_0 \rangle \geq c > 0, \quad \forall n \in 1 : \infty \quad (4.3)$$

eşitsizliği sağlansın. $v_0 = \operatorname{argmax}_{v \in C} \langle v, g_0 \rangle$ olan $v_0 \in C$ ve $w_0 \in C_{d_*}$ göz önüne alınsın. $\langle a, v_0 \rangle = d^*$ olduğu açıktır, aksi halde yeterince büyük bir n için $v_0 \in C_{d_n}$ ve $\max_{v \in C} \langle v, g_0 \rangle = \max_{v \in C_{d_n}} \langle v, g_0 \rangle$ olurdu ki bu (4.1) ile çelişirdi. Şimdi, $\alpha_n = \frac{d^* - d_n}{d^* - d_*}$ olmak üzere $v_n = (1 - \alpha_n)v_0 + \alpha_n w_0$ dizisi oluşturulsun. C konveks olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ ve her $\alpha \in (0, 1)$ için $v_n \in C$ olduğu açıktır. Üstelik,

$$\langle a, v_n \rangle = \langle a, (1 - \alpha_n)v_0 + \alpha_n w_0 \rangle = \langle a, v_0 \rangle + [\langle a, w_0 \rangle - \langle a, v_0 \rangle] = d^* + \alpha_n(d_* - d^*) = d_n$$

eşitliğinden $v_n \in C_{d_n}$ 'dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \langle v_0, g_0 \rangle - \langle v_n, g_n \rangle &= \langle v_0, g_0 \rangle - (1 - \alpha_n)\langle v_0, g_0 \rangle - \alpha_n\langle w_0, g_0 \rangle \\ &= \alpha_n\langle v_0, g_0 \rangle - \alpha_n\langle w_0, g_0 \rangle \\ &= \alpha_n\langle v_0 w_0, g_0 \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\max_{v \in C} \langle v, g_0 \rangle - \max_{v \in C_{d_n}} \langle v, g_0 \rangle \leq \langle v_0, g_0 \rangle - \langle w_0, g_0 \rangle - \langle v_n, g_n \rangle = \alpha_n \langle v_0 - w_0, g_0 \rangle$$

ve $n \rightarrow \infty$ için $\alpha_n \rightarrow 0$ olduğundan $\max_{v \in C} \langle v, g_0 \rangle \leq \max_{v \in C_{d_n}} \langle v, g_0 \rangle$ elde edilir ki bu (4.1) ile çelişir. Kabul yanlıştır, önerme sağlanır. □

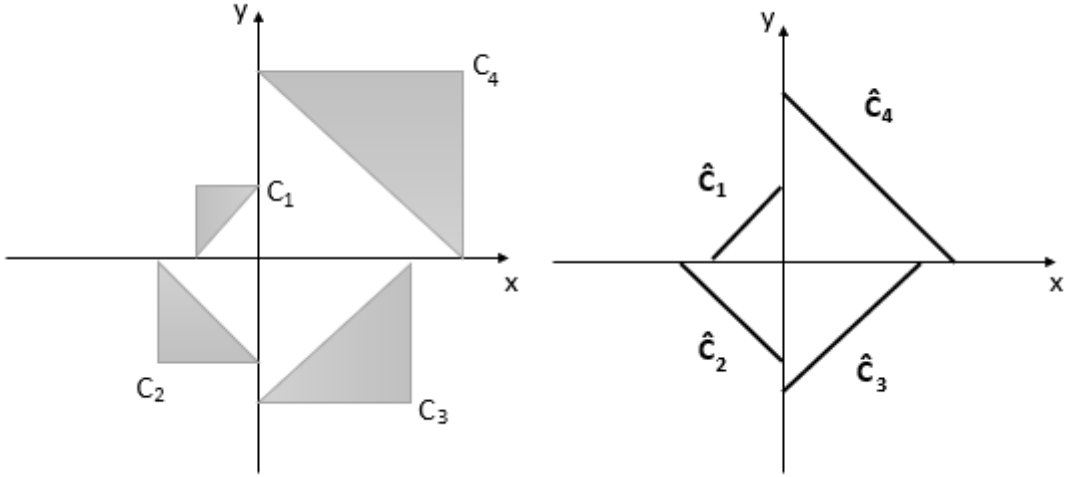
Aşağıdaki teorem, bir üst exhausterin bir kümesinin, kendisinden daha küçük bir kümeyle yer değiştirilebilmesi için bir yeterli koşul verecektir.

Teorem 4.39. [12] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. fonksiyon ve E^* h'nin bir üst exhausteri olsun. Eğer bir $C_0 \in E^*$ için $M^*(C_0) \neq C_0$ ve $M^*(C_0) \neq \emptyset$ ise öyle bir $C_1 \neq C_0$ ve $C_1 \subset C_0$ kümesi vardır ki $\widetilde{E^*} = (E^* \setminus \{C_0\}) \cup \{C_1\}$ h'nin bir üst exhausteri'dir. Yani şöyle göre E^* 'dan daha küçük olan bir $\widetilde{E^*}$ üst exhausteri vardır.

Kanıt. C kümesi $M^*(C) \neq C$ ve $M^*(C) \neq \emptyset$ koşulunu sağlasın. Keyfi bir $v_0 \in C \setminus M^*(C)$ alalım. $M^*(C)$ kompakt konveks bir küme olduğundan, ayırma teoremi gereğince $\exists d_0 \in \mathbb{R}$ ve $\exists a \in S_1^n$ vardır ki

$$\langle a, v \rangle < d_0 < \langle a, v_0 \rangle, \forall v \in M^*(C) \quad (4.4)$$

elde edilir. Yani, burada $M^*(C)$ kümesi ile ona ait olmayan v_0 vektörünü ayıran bir hiperdüzlem oluşturulmuştur. Şimdi, her $g \in S_1^n$ için $\max_{v \in C_{\tilde{d}}} \langle v, g \rangle \geq h(g)$ olacak biçimde bir $\tilde{d} < d^*$ sayısının varlığı kanıtlanacaktır. Böylece, $\widetilde{E^*} = (E^* \setminus \{C\}) \cup \{C_{\tilde{d}}\}$ ailesi h'nin bir üst exhausteri olarak elde edilecektir. Kabul edelim ki bu doğru olmasın, yani $d_n \rightarrow d^*$, $d_n \in (d_*, d^*)$ olan $\exists \{d_n\}$ dizisi, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\exists g_n \in S_1^n$ noktası $\max_{v \in C_{d_n}} \langle v, g_n \rangle < h(g_n)$ olacak biçimde var olsun. $v_n := \arg \max_{v \in C_{d_n}} \langle v, g_n \rangle$ olsun. $\{g_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizileri sınırlı ve C kompakt olduğundan genelliği bozmadan, $n \rightarrow \infty$ iken $g_n \rightarrow g^* \in S_1^n$, $v_n \rightarrow v^* \in C$ olduğu varsayalım. Buna göre iki durum söz konusudur: Ya $\langle a, v^* \rangle < d^*$ ya da $\langle a, v^* \rangle = d^*$ 'dir. İlk durum göz önüne alınsın, Bu durumda $\exists \tilde{d} < d^*$ vardır ki yeterince büyük $N_1 \in \mathbb{N}$ için



Şekil 4.6: Örnek 4.40'da verilen C_i ve $\hat{C}_i$ kümeleri

$$\langle a, v_n \rangle < \bar{d}, \forall n > N_1 \quad (4.5)$$

koşulu sağlanır. Üstelik yeterince büyük bir $N_2 \in \mathbb{N}$ sayısı ve her $n > N_2$ için $d_n > \bar{d}$ 'dir. Böylece (4.3)'ten $\forall n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$ için $\langle v_n, g_n \rangle = \max_{v \in C_{\bar{d}}} \langle v, g_n \rangle = \max_{v \in C_{d_n}} \langle v, g_n \rangle = \max_{v \in C} \langle v, g_n \rangle \geq h(g_n)$ elde edilir ki bu kabul ile çelişir. Dolayısıyla bahsedilen iki durumdan yalnızca $\langle a, v^* \rangle = d^*$ eşitliği doğru olur. Öte yandan $\langle v_n, g_n \rangle \leq h(g_n)$ ve h sürekli fonksiyonların infimumu olarak üstten yarı-sürekli olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle v_n, g_n \rangle = \langle v^*, g^* \rangle \leq h(g^*) \quad (4.6)$$

elde edilir. $u_n = \arg \max_{v \in C_{d_n}} \langle v, g^* \rangle$ denirse $\langle v_n, g_n \rangle - \max_{v \in C} \langle v, g^* \rangle = (\langle v_n, g_n \rangle - \langle u_n, g^* \rangle) + (\langle u_n, g^* \rangle - \max_{v \in C} \langle v, g^* \rangle)$ bulunur. Eşitliğin sağındaki ilk toplanan kısım (4.4)'ten $n \rightarrow \infty$ için 0'a yakınsar. İkinci kısım ise Yardımcı Teorem 4.27'den 0'a yakınsar. Dolayısıyla,

$$\langle v^*, g^* \rangle = \max_{v \in C} \langle v, g^* \rangle \geq h(g^*) \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.4) ve (4.5)'ten $\langle v^*, g^* \rangle = h(g^*)$ ve böylece $v^* \in M^*(C)$ elde edilir ki bu $\langle a, v^* \rangle = d^* > d_0$ oluşu ile çelişir. Sonuç olarak kabul yanlıştır; $\exists \tilde{d} < d^*$ sayısı

$$\widetilde{E^*} = (E^* \setminus \{C\}) \cup \{C_{\tilde{d}}\}$$

ailesi h 'nin bir üst exhausteri olacak şekilde vardır. □

Örnek 4.40. [16] $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$h(g_1, g_2) = \min\{\max\{-g_1, g_2, -g_1 + g_2\}; \max\{-2g_1, -2g_2, -2g_1 - 2g_2\}; \\ \max\{3g_1, -3g_2, 3g_1 - 3g_2\}; \max\{4g_1, 4g_2, 4g_1 + 4g_2\}\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$C_1 = \text{co}\{(-1, 0), (0, 1), (-1, 1)\}; C_2 = \text{co}\{(-2, 0), (0, -2), (-2, -2)\}$$

$$C_3 = \text{co}\{(3, 0), (0, -3), (3, -3)\}; C_4 = \text{co}\{(4, 0), (0, 4), (4, 4)\}$$

olmak üzere $E^* = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ ailesi h 'nin bir üst exhausterıdır. Bu kümelerin her biri için $M^*(C_i)$ kümeleri hesaplanırsa

$$M^*(C_1) = \text{co}\{(-1, 0), (0, 1)\}; M^*(C_2) = \text{co}\{(-2, 0), (0, -2)\}$$

$$M^*(C_3) = \text{co}\{(3, 0), (0, -3)\}; M^*(C_4) = \text{co}\{(4, 0), (0, 4)\}$$

elde edilir ki, her bir $i = \overline{1 : 4}$ için $M^*(C_i) \neq \emptyset$ ve $M^*(C_i) \neq C_i$ koşulları sağlandığından Teorem 4.39 gereğince bu kümelerin her biri kendinden daha küçük kümelerle yer değiştirilebilmesi mümkündür. Üstelik, burada $\tilde{E}^* = \{\hat{C}_i = M^*(C_i) \mid i = 1, 2, 3, 4\}$ ailesi h 'nin bir üst exhausteri olmaktadır. $\tilde{E}^*$ şekle göre E^* 'dan daha küçük bir üst exhausterdir. E^* ve $\tilde{E}^*$ ailelerine ait kümeler Şekil 4.6'da gösterilmiştir. Ayrıca $\tilde{E}^*$ 'ın h 'nin şekle göre bir minimal üst exhausteri olduğu kolayca gösterilebilir.

Yardımcı Teorem 4.28 ile verilen önerme simetrik olarak bir alt exhauster için de ifade edilebilir.

Yardımcı Teorem 4.41. [12] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. fonksiyon ve E_* h 'nin bir alt exhausteri olsun. Eğer bir $C_0 \in E_*$ için $M_*(C_0) \neq C_0$ ve $M_*(C_0) \neq \emptyset$ ise öyle bir $C_1 \neq C_0$ ve $C_1 \subset C_0$ kümesi vardır ki $\widetilde{E}_* = (E_* \setminus \{C_0\}) \cup \{C_1\}$ h 'nin bir alt exhausteri'dir. Yani şekle göre E_* 'dan daha küçük olan bir $\widetilde{E}_*$ alt exhausteri vardır.

Aşağıdaki teorem ile bir üst exhausterin şekle göre minimalliği için gerekli koşul elde edilmiştir.

Teorem 4.42. [12] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. bir fonksiyon ve E^* , h 'nin bir üst exhausteri olsun. E^* şekle göre minimal ise her $C \in E^*$ için $M^*(C) = C$ 'dir.

Kanıt. E^* şekle göre minimal olsun ancak kabul edelim ki $\exists C_0 \in E^*$ için $M^*(C_0) \neq C_0$ olsun. O halde $C_0 \setminus M^*(C_0) \neq \emptyset$ 'dir. E^* şekle göre minimal olduğundan Önerme 4.14'ten $M^*(C_0) \neq \emptyset$ 'dir. Dolayısıyla Lemma 4.28 gereğince E^* 'dan şekle göre daha küçük bir $\tilde{E}^*$ üst exhausteri vardır ki bu E^* 'ın şekle göre minimalliği ile çelişir. Kabul yanlıştır. Her $C \in E^*$ için $M^*(C) = C$ 'dir. $\square$

Örnek 4.43. Örnek 4.40'de incelenen h fonksiyonu ve örnekte elde edilen $\tilde{E}^*$ şekle göre minimal bir üst exhauster idi. Her bir $\hat{C}_i \in \tilde{E}^*$ için $M^*(\hat{C}_i) = \hat{C}_i$ olduğu açıktır. Bu da Teorem 4.42 ile verilen şekle göre minimallik için gerekli koşulun sağlandığını doğrular.

Teorem 4.44. [12] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. bir fonksiyon ve E_* , h 'nin bir alt exhausteri olsun. E_* şekle göre minimal ise her $C \in E_*$ için $M_*(C) = C$ 'dir.

Teorem 4.42 ve Teorem 4.44 ile ifade edilen gerekli koşulların şekle göre minimallik için yeterli koşullar olması beklense de bu doğru değildir. Aşağıdaki örnek bu gerçeği gösterecektir.

Örnek 4.45. [12] $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $h_2(x_1, x_2) = \max\{x_1, -x_1, x_2, -x_2\}$ fonksiyonu ele alınsın. Lineer fonksiyonların maksimumu formunda tanımlanan h_2 fonksiyonu konveks ve dolayısıyla subdiferansiyellenebilir.

$$\partial h_2 = \text{co}\{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\} := C_1$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla $E_1^* = \{C_1\}$ h 'nin bir üst exhausterıdır. Burada $M^*(C_1) = C_1$ gerekli koşulu sağlanmaktadır. Şimdi E^* üst exhausterına $C_2 = \text{co}\{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$ kümesi dahil edilsin. $C_1 \subseteq C_2$ olduğundan $\forall g \in S_1^2$ için

$$\max_{v \in C_2} \langle v, g \rangle \geq \max_{v \in C_1} \langle v, g \rangle = h_2(g)$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla $E_2^* = \{C_1, C_2\}$ ailesi de h 'nin bir üst exhausterıdır. E_2^* kapsamaya göre minimal olmadığından şekle göre de minimal değildir. Buna rağmen $M^*(C_1) = C_1$ ve $M^*(C_2) = C_2$ olduğu açıktır.

Uyarı 4.46. [12] Bir exhausterin indirgenmesi söz konusu olduğunda C kümesi yerine $M^*(C)$ 'yi kullanmak mantıklı görünse de bu yaklaşım beklenen sonucu vermemektedir. Aşağıdaki örnekle bu durum açıklanacaktır.

Örnek 4.47. [12] Örnek 4.45'deki h_2 fonksiyonu ele alınsın.

$C_1 = \text{co}\{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$ ve $C_3 = \text{co}\{(-1, 0), (1, 0), (0, -2), (0, 2)\}$ olmak üzere $E_3^* = \{C_1, C_3\}$ h_2 'nin bir üst exhausterıdır. $M^*(C_3) = \text{co}\{(-1, 0), (1, 0)\} \neq C_3$ olduğundan E_3^* şekle göre minimal değildir. Ancak $\{M^*(C_1), M^*(C_3)\}$ ailesi h_2 'nin bir üst exhausteri değildir.

Sonuç olarak, bir exhaustera ait olan C kümeleri için $M^*(C)$ yapısı, kümelerin şekle göre indirgenmesi için yeterli koşullar oluşturmaya imkan vermemektedir. Bu sebeple $M^*(C)$ yaklaşımı yeterli koşul oluşturmak amacıyla modifiye edilecektir.

h p.h. fonksiyonu ve onun bir E^* üst exhausteri ele alınsın. Bir $C \in E^*$ ve her bir $g \in S_1^n$ yönü için

$$m_c(g) = \{v_0 \in C \mid v_0 = \operatorname{argmax}_{v \in C} \langle v, g \rangle, \langle v_0, g \rangle = h(g)\}$$

kümesi yardımıyla

$$\widetilde{M}^*(C) = \operatorname{clco}\{m_c(g) \mid g \in S_1^n, m_c(g) \text{ bir tek nokta kümesidir.}\}$$

kümesi oluşturulsun. Aşağıda verilen örneklerle $M^*(C)$ ve $\widetilde{M}^*(C)$ yaklaşımları karşılaştırılacaktır.

Örnek 4.48. Örnek 4.18'de incelenen

$$h(g_1, g_2) = \min\{\max\{g_1 + g_2, g_1 - g_2, -g_1 + g_2, -g_1 - g_2\}, g_1 + 2g_2, g_1 - 2g_2\}$$

fonksiyonu ele alınsın. $C_1 = \operatorname{co}\{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$, $C_2 = \{(1, 2)\}$ ve $C_3 = \{(1, -2)\}$ olmak üzere $E^* = \{C_1, C_2, C_3\}$, h 'nin bir üst exhausteri olarak elde edilmişti. Ayrıca $M^*(C_1) = \operatorname{co}\{(1, -1), (1, 1)\}$, $M^*(C_2) = C_2$, $M^*(C_3) = C_3$ şeklinde bulunmuştu.

$\widetilde{M}^*(C_2) = M^*(C_2) = C_2$, $\widetilde{M}^*(C_3) = M^*(C_3) = C_3$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Ancak C_1 kümesinin $h(g)$ değerine katkıda bulunduğu tek yön $g = (1, 0)$ yönü olduğundan, boş olmayan tek $m_{C_1}(g)$ kümesi bu yönde ortaya çıkacaktır. Üstelik $m_{C_1}(g) = \operatorname{co}\{(1, 1), (1, -1)\}$ doğru parçası bir tek nokta kümesi olmadığından, $\widetilde{M}^*(C_1) = \emptyset \neq M^*(C_1)$ elde edilir.

Örnek 4.49. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ p.h., $C_1 = \operatorname{co}\{(-2, 3), (1, 0), (-1, 0), (-2, -3)\}$, $C_2 = \operatorname{co}\{(2, 3), (-1, 0), (2, -3)\}$ ve $C_3 = \operatorname{co}\{(1, 0), (0, 3), (-1, 0), (0, -3)\}$ olmak üzere, $E_1^* = \{C_1, C_2, C_3\}$, h 'nin bir üst exhausteri. $\widetilde{M}^*(C_1) = M^*(C_1) = C_1$, $\widetilde{M}^*(C_2) = M^*(C_2) = C_2$ 'dir, ancak $M^*(C_3) = C_3$ iken $\widetilde{M}^*(C_3) = \operatorname{co}\{(1, 0), (-1, 0)\} \neq C_3$ 'dir.

Şimdi oluşturulan $\widetilde{M}^*(C)$ kümesi kullanılarak, bir üst exhaustera ait bir kümenin daha küçük bir kümeyle değiştirilememesini garantileyen bir yeterli koşul ifade edilecektir.

Teorem 4.50. [12] h , p.h. bir fonksiyon ve E^* , h 'nin bir üst exhausteri olsun. Bir $C_0 \in E^*$ kümesi için $\widetilde{M}^*(C_0) = C_0$ ise $\widetilde{E}^* = (E^* \setminus \{C_0\}) \cup \{C_1\}$ ailesi h 'nin bir üst exhausteri olacak biçimde hiçbir $\emptyset \neq C_1 \subset C_0$ kümesi yoktur.

Kanıt. Bir $C_0 \in E^*$ kümesi için $\widetilde{M}^*(C_0) = C_0$ olsun ancak kabul edelim ki $\widetilde{E}^*$,

h 'nin bir üst exhausteri olacak şekilde $\exists C_1 \neq C_0$ ve $C_1 \subset C_0$ öz alt kümesi var olsun. Buna göre bir $v_0 \in C_0 \setminus C_1$ seçilsin. C_1 kompakt ve konveks bir küme olduğundan v_0 noktası ile $C_0 \setminus C_1$ kümesini kesin ayıran bir hiperdüzlem vardır. Daha açık olarak, öyle bir $a \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve bir $d \in \mathbb{R}$ sayısı vardır ki $\langle a, v_0 \rangle > d$ ve her $v \in C_1$ için $\langle a, v \rangle \leq d$ eşitsizlikleri sağlanır. Gösterim kolaylığı için

$$m(C) = \bigcup \{m_c(g) \mid g \in S_1^n, m_c(g) \text{ bir tek nokta kumesidir.}\}$$

$$\tilde{m}(C) = co\{m(C)\}$$

$$\widetilde{M}^*(C) = cl\tilde{m}(C)$$

kümelerini tanımlayalım. $v_0 \in \widetilde{M}^*(C_0) = C_0$ olduğundan v_0 'a yeterince yakın olan öyle bir $\bar{v} \in \tilde{m}(C)$ noktası vardır ki

$$\langle a, \bar{v} \rangle > d \quad (4.8)$$

olur. Buradan, Caratheodory Teoremi'nden $p \leq n+1$ olmak üzere öyle $v_1, v_2, \dots, v_p \in m(C)$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ vardır ki

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^p \alpha_i v_i, \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1, \quad \alpha_i > 0, \quad \forall i \in 1:p$$

olur. O halde en az bir $i_0 \in 1:p$ indeksi bulunabilir ki $\langle a, v_{i_0} \rangle > d$ 'dir. Çünkü aksi halde $\langle a, \bar{v} \rangle \leq d$ olurdu ki bu (4.6) ile çelişirdi. $u = v_{i_0}$ ile gösterilsin. $u \in m(C)$ olduğundan her $v \in C_0 \setminus \{u\}$ için $\langle u, g \rangle = h(g)$ ve $\langle g, v \rangle < h(g)$ olacak şekilde bir $g \in S_1^n$ yönü vardır. Dolayısıyla $C_1 \subset C_0 \setminus \{u\}$ ve C_1 kompakt olduğundan $\max_{v \in C_1} \langle v, g \rangle < h(g)$ elde edilir ki bu $\widetilde{E}^*$ 'ın h 'nin bir üst exhausteri olduğu kabulü ile çelişir. $\square$

Aşağıda verilen benzer kurulum yardımıyla bir alt exhauster için paralel bir sonuç elde edilmiştir.

Teorem 4.51. [12] h , $p.h.$ bir fonksiyon ve E_* , h 'nin bir alt exhausteri olsun. Bir $C_0 \in E_*$ kümesi için $\widetilde{M}_*(C_0) = C_0$ ise $\widetilde{E}_* = (E_* \setminus \{C_0\}) \cup \{C_1\}$ ailesi h 'nin bir alt exhausteri olacak biçimde hiçbir $\emptyset \neq C_1 \subset C_0$ kümesi yoktur.

Uyarı 4.52. [12] Teorem 4.50 ve Teorem 4.51'de verilen koşulların bir üst ya da alt exhausterin şekle göre minimalliği için gerekli bir koşul olup olmadığı sorusu hala açık bir sorudur.

Şimdi, [16] çalışmasında Abbasov tarafından şekle göre indirgemeye ilişkin elde edilen sonuçlar incelenecektir. Abbasov, şekle göre indirgeme konseptine dair sonuçlarını, incelenen exhausterin kapsamaya göre minimal olduğu kabulü üzerine inşa

etmiştir.

İlk olarak, p.h. bir h fonksiyonunun bir E^* üst exhausteri için $\bigcap_{C \in B} C = \widehat{C} \neq \emptyset$ olacak şekilde $\exists B \subseteq E^*$ alt ailesinin var olduğu kabul edilsin. Aşağıdaki teorem bu B ailesindeki tüm kümelerin E^* 'dan çıkarılıp yerine kesişimleri olan $\widehat{C}$ kümesinin konulabilmesi için bir yeterli koşul vermektedir.

Teorem 4.53. [16] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h. ve Lipschitz bir fonksiyon ve E^* h 'nin bir üst exhausteri olsun. Eğer her $g \in S_1^n$ için $C_g \subseteq H_-(\widehat{C}, g)$ olacak şekilde $\exists C_g \in B$ kümesi varsa, $\tilde{E}^* = (E^* \setminus B) \cup \{\widehat{C}\}$ ailesi h 'nin bir üst exhausteri'dir.

Kanıt. Keyfi bir $g \in S_1^n$ alınsın. Kabul edelim ki

$$\exists C_g \in B : C_g \subseteq H_-(\widehat{C}, g) \quad (4.9)$$

koşulu sağlansın. Buradan, $\widehat{v}(g) = \operatorname{argmax}_{v \in \widehat{C}} \langle v, g \rangle$ olmak üzere $\langle v - \widehat{v}(g), g \rangle \leq 0, \forall v \in C_g$ elde edilir. Bu ise her $v \in C_g$ için $\langle v, g \rangle \leq \langle \widehat{v}(g), g \rangle$ olduğu anlamına gelir. Buradan da $\max_{v \in C_g} \langle v, g \rangle \leq \langle \widehat{v}(g), g \rangle$ olur. Öte yandan $\widehat{v}(g) \in \widehat{C} = \bigcap_{C \in B} C \subseteq C_g$ olduğundan $\max_{v \in C_g} \langle v, g \rangle = \langle \widehat{v}(g), g \rangle$ elde edilir. $C_g \in B$ olduğu göz önüne alınarak $\min_{C \in B} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle \leq \max_{v \in C_g} \langle v, g \rangle = \langle \widehat{v}(g), g \rangle = \max_{v \in \widehat{C}} \langle v, g \rangle$ ve buradan

$$\begin{aligned} h(g) &= \min_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle = \min \left\{ \min_{C \in E^* \setminus B} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle, \min_{C \in B} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle \right\} \\ &\leq \min \left\{ \min_{C \in E^* \setminus B} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle, \max_{v \in \widehat{C}} \langle v, g \rangle \right\} \\ &= \min_{C \in \tilde{E}^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

bulunur. Diğer yandan, her $C \in B$ için $\widehat{C} \subseteq C$ olduğundan $\forall C \in B$ için $\max_{v \in \widehat{C}} \langle v, g \rangle \leq \max_{v \in C} \langle v, g \rangle$ ve böylelikle $\max_{v \in \widehat{C}} \langle v, g \rangle \leq \min_{C \in B} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle$ olur. Elde edilen son eşitsizlik de kullanılarak

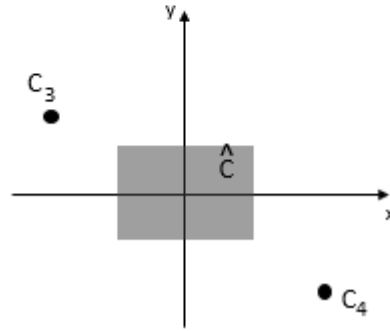
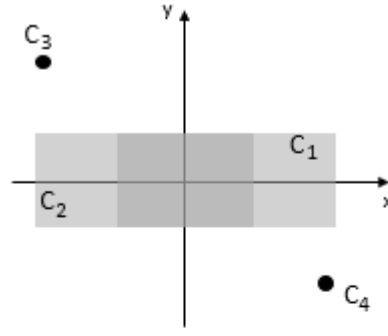
$$\begin{aligned} \min_{C \in \tilde{E}^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle &= \min \left\{ \min_{C \in E^* \setminus B} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle, \max_{v \in \widehat{C}} \langle v, g \rangle \right\} \\ &\leq \min_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle \\ &= \min \left\{ \min_{C \in E^* \setminus B} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle, \min_{C \in B} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle \right\} = h(g) \end{aligned} \quad (4.11)$$

bulunur. Sonuç olarak (4.10) ve (4.11) 'den

$$h(g) = \min_{C \in \tilde{E}^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle, \quad \forall g \in S_1^n$$

elde edilir ki bu kanıtı tamamlar. $\square$

Örnek 4.54. [16] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,



Şekil 4.7: Örnek 4.54’de verilen C_1, C_2, C_3, C_4 kümeleri

$$h(g_1, g_2) = \min\{\max\{-g_1 + g_2, -g_1 - g_2, 3g_1 + g_2, 3g_1 - g_2\}; \\ \max\{g_1 + g_2, g_1 - g_2, -3g_1 + g_2, -3g_1 - g_2\}; \\ -2g_1 + 2g_2; 2g_1 - 2g_2\}$$

fonksiyonu ele alınsın.

$$C_1 = \text{co}\{(-1, 1), (-1, -1), (3, 1), (3, -1)\},$$

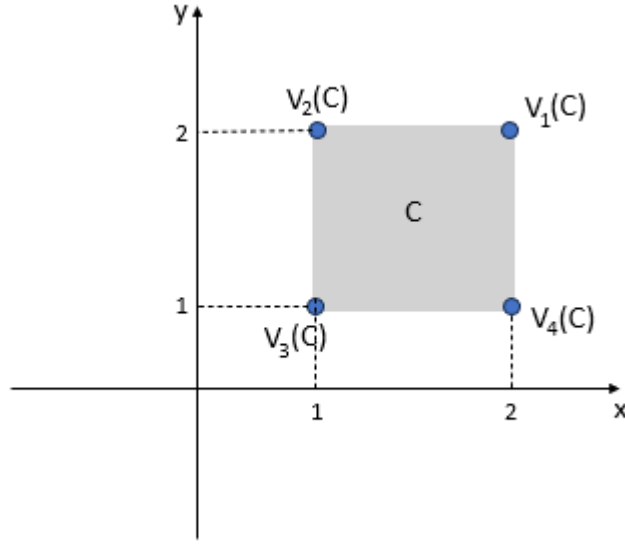
$$C_2 = \text{co}\{(1, 1), (1, -1), (-3, 1), (-3, -1)\},$$

$$C_3 = \{(-2, 2)\}, \quad C_4 = \{(2, -2)\}$$

olmak üzere $E^* = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, h ’nin bir üst exhausteri olsun. $\hat{C} = C_1 \cap C_2 = \text{co}\{(-1, 1), (-1, -1), (1, 1), (1, -1)\}$ alınsın. Şekil 4.7’te E^* ailesi ve $\hat{C}$ ’nin $(-1, 1)$ köşesinden geçen destek hiperdüzlemleri için C_1 böyle bir kümedir. $(1, -1)$ ve $(1, 1)$ köşelerinden geçen destek hiperdüzlemleri için de C_2 bu koşulu sağlayan kümedir. Teorem 4.53 gereği C_1 ve C_2 kümeleri $\hat{C}$ ile değiştirilebilir. Böylece $\tilde{E}^* = \{C_3, C_4, \hat{C}\}$ şekle göre daha küçük bir exhausterdir. Sonuç olarak,

$$h(g_1, g_2) = \min\{\max\{-g_1 + g_2, -g_1 - g_2, g_1 + g_2 - g_2\}; 2g_1 + 2g_2; 2g_1 - 2g_2\}$$

olur.



Şekil 4.8: Örnek 4.56’da verilen C kümesi ve $v_i(C)$ köşeleri

[11] numaralı kaynakta ele alınan tüm örneklerin, [16] ile önerilen geometrik koşullar kullanılarak da indirgenebileceği açıktır. Bunu göstermek için, aşağıdaki örnek ele alınsın.

Örnek 4.55. [16]’de h p.h. bir fonksiyon ve E_3^* orijine teğet olan tüm birim yuvarlardan oluşan bir üst exhausteri olsun. Teorem 4.53’in sağlandığı açıktır. Dolayısıyla $\bar{E}_3^* = \{\{0\}\}$ daha küçük bir üst exhausteri olarak elde edilir.

Şimdi bir E^* üst exhausterinin konveks politoplardan oluştuğu özel bir durum incelenecektir. Her bir politopun varsa gereksiz köşelerinin çıkarılarak, geriye kalan köşelerin konveks zarfı ile yer değiştirilmesi fikrine dayanan ve şekle göre daha küçük bir exhausteri elde edilmesini sağlayan bir teknik verilmiştir. $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h Lipschitz bir fonksiyon ve E^* ’nin bir üst exhausteri ve $C \in E^*$ keyfi bir küme olsun. I_C , C ’nin kaç tane köşesi olduğunu gösteren bir indeks kümesi ve her bir $i \in I_C$ için $v_i(C)$ noktaları C ’nin her bir köşesini temsil etsin. Böylece $C = \text{conv}\{v_i(C) \mid i \in I_C\}$ olduğu açıktır. Ek olarak, $\Gamma_{v_i(C)} := \{g \in \mathbb{R}^n \mid \max_{v \in C} \langle v, g \rangle = \langle v_i(C), g \rangle\}$ kümesi tanımlansın. Bu küme C ’nin $v_i(C)$ köşe noktasındaki destek hiperdüzlemlerinin normal vektörlerinden oluşmaktadır. Yani $\Gamma_{v_i(C)}$, C ’nin $v_i(C)$ köşesindeki normal konisidir. Ayrıca $\bigcup_{i \in I_C} \Gamma_{v_i(C)} = \mathbb{R}^n$ olduğu açıktır.

Örnek 4.56. Şekil 4.8’de verilen $C = \text{co}\{(2, 2), (1, 2), (1, 1), (2, 1)\}$ kümesi ve bu kümenin $v_1(C) = (2, 2)$, $v_2(C) = (1, 2)$, $v_3(C) = (1, 1)$, $v_4(C) = (2, 1)$ köşeleri göz önüne alındığında

$$\Gamma_{V_1}(C) = \{(g_1, g_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1 \geq 0, g_2 \geq 0\}$$

$$\Gamma_{V_2}(C) = \{(g_1, g_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1 \leq 0, g_2 \geq 0\}$$

$$\Gamma_{V_3}(C) = \{(g_1, g_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1 \leq 0, g_2 \leq 0\}$$

$$\Gamma_{V_4}(C) = \{(g_1, g_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1 \geq 0, g_2 \leq 0\} \text{ olur.}$$

$$\bigcup_{i \in I_C} \Gamma_{v_i}(C) = \mathbb{R}^2 \text{ olduğu da açıktır.}$$

Teorem 4.57. [16] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ p.h Lipschitz fonksiyon ve E^* h 'nin sonlu sayıda konveks politoplardan oluşan bir üst exhausteri olsun. Bir $\tilde{C} \in E^*$ için $\tilde{C} = \text{co}\{v_i(\tilde{C}) \mid i \in I_C \setminus \{\hat{i}\}\}$ ve bir $\hat{i} \in I_C$ için $\tilde{C}_0 = \text{co}\{v_i(C) \mid i \in I_C \setminus \{\hat{i}\}\}$ olsun. Bu durumda $\tilde{E}^* = (E^* \setminus \{\tilde{C}\}) \cup \{\tilde{C}_0\}$ ailesi h 'nin bir üst exhausteri ise yani $\tilde{C}$ politopu $\tilde{C}_0$ 'a indirgenebiliyorsa,

$$\forall g \in \Gamma_{v_i(C)}, \exists C_g \in E^*, C_g \in E^* : C_g \subseteq H_-(\tilde{C}, g) \quad (4.12)$$

koşulu sağlanır.

Kanıt. E^* ve $\tilde{E}^*$ ailelerinin her ikisi de h 'nin üst exhausteri olsun. Ancak kabul edelim ki 4.12 koşulu sağlanmasın. O halde $\max_{v \in \tilde{C}} \langle v, g_0 \rangle < \max_{v \in C} \langle v, g_0 \rangle$, $\forall C \in E^* \setminus \{\tilde{C}\}$ olacak şekilde $\exists g_0 \in \Gamma_{v_i(\tilde{C})}$ vektörü vardır. E^* sonlu sayıda kümeden oluştuğundan

$$\max_{v \in \tilde{C}} \langle v, g_0 \rangle - \max_{v \in C} \langle v, g_0 \rangle \leq -a < 0, \forall C \in E^* \setminus \{\tilde{C}\} \quad (4.13)$$

olacak şekilde $\exists a > 0$ sayısı vardır. Destek fonksiyonunun sürekliliği gereğince, genelliği bozmadan $\max_{v \in \tilde{C}} \langle v, g_0 \rangle > \max_{v \in \tilde{C}_0} \langle v, g_0 \rangle$ olduğu kabul edilebilir. Gerçekten, $\max_{v \in \tilde{C}} \langle v, g_0 \rangle = \max_{v \in \tilde{C}_0} \langle v, g_0 \rangle$ olsaydı, $\tilde{C}$ konveks politop olduğundan ve 4.13'ten g_0 'a yeterince yakın öyle bir $g \in \Gamma_{v_i(\tilde{C})}$ yönü var olurdu ki $\max_{v \in \tilde{C}} \langle v, g \rangle - \max_{v \in C} \langle v, g \rangle \leq -\frac{a}{2} < 0$, $\forall C \in E^* \setminus \{\tilde{C}\}$ ve böylece $\max_{v \in \tilde{C}} \langle v, g \rangle < \max_{v \in C} \langle v, g \rangle$ ilişkisi elde edilirdi. Sonuç olarak $h(g) = \min_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle = \max_{v \in \tilde{C}} \langle v, g \rangle > \max_{v \in \tilde{C}_0} \langle v, g \rangle \geq \max_{C \in \tilde{E}^*} \langle v, g \rangle$ bulunur ki bu $\tilde{E}^*$ 'in h 'nin bir üst exhausteri olmasıyla çelişir. $\square$

Uyarı 4.58. [16] Teorem 4.57'de ifade edilen 4.12 koşulu geometrik olarak şu anlama gelmektedir: $\tilde{C}$ 'nin $v_i(\tilde{C})$ köşesinden geçen her bir destek hiperdüzlemi için, hiperdüzlemin belirlediği negatif yarı-uzay tarafından tamamen kapsanan ve E^* 'a ait, $\tilde{C}$ 'dan farklı en az bir küme vardır.

Örnek 4.59. Örnek 4.40 'te verilen $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(g_1, g_2) = \min\{\max\{-g_1, g_2, -g_1 + g_2\}; \max\{-2g_1, -2g_2, -2g_1 - 2g_2\}; \\ \max\{3g_1, -3g_2, 3g_1 - 3g_2\}; \max\{4g_1, 4g_2, 4g_1 + 4g_2\}\}$$

fonksiyonu ve

$$C_1 = \text{co}\{(-1, 0), (0, 1), (-1, 1)\}; C_2 = \text{co}\{(-2, 0), (0, -2), (-2, -2)\}$$

$$C_3 = \text{co}\{(3, 0), (0, -3), (3, -3)\}; C_4 = \text{co}\{(4, 0), (0, 4), (4, 4)\}$$

olmak üzere $E^* = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ ailesi h 'nin bir üst exhausteri göz önüne alınsın.

Bu kümelerin her biri için $M^*(C_i)$ kümeleri

$$M^*(C_1) = \text{co}\{(-1, 0), (0, 1)\}; M^*(C_2) = \text{co}\{(-2, 0), (0, -2)\}$$

$$M^*(C_3) = \text{co}\{(3, 0), (0, -3)\}; M^*(C_4) = \text{co}\{(4, 0), (0, 4)\}$$

olarak bulunmuştu. Üstelik, Teorem 4.57 'te verilen koşul incelenirse, $v_1(C_1) = (-1, 1)$, $v_1(C_2) = (-2, -2)$, $v_1(C_3) = (3, -3)$ ve $v_1(C_4) = (4, 4)$ köşelerinin her biri için, bu köşelerden geçen her bir destek hiperdüzlemin belirlediği negatif yarı-uzay tarafından tamamen kapsanan ve E^* 'a ait, ilgili C_i 'den farklı en az bir küme var olduğu görülür. Dolayısıyla, bahsi geçen tüm köşelerin E^* 'daki ilgili kümelerden çıkarılabileceği ve her birinin Şekil 4.6'de gösterilen doğru parçalarına indirgenebileceği kolayca söylenebilir.

Uyarı 4.60. [16] (4.12) koşulu $\tilde{E}^*$ 'nın h 'nin bir üst exhausteri olması için bir yeterli koşul değildir. $h(g_1, g_2) = \min\{-x_1, x_1, \max\{x_2, -x_2\}\}$ fonksiyonu ele alınsın. $C_1 = \{(-1, 0)\}$, $C_2 = \{(1, 0)\}$ ve $C_3 = \text{co}\{(0, -1), (0, 1)\}$ olmak üzere $E^* = \{C_1, C_2, C_3\}$ h 'nin bir üst exhausteri'dir. C_3 'ün $v_1(C_3) = (1, 0)$ köşe noktası için $\Gamma_{v_1(C_3)} = \{(g_1, g_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g_2 \geq 0\}$ elde edilir. $v_1(C_3)$ köşesi için (4.12) koşulunun sağlandığı açıktır. Ancak $v_1(C_3)$ köşesi atılarak elde edilen $\tilde{C}_3 = \{(0, -1)\}$ kümesi düşünüldüğünde $\tilde{E}^* = \{C_1, C_2, C_3\}$ ailesi h 'nin bir üst exhausteri değildir. Çünkü örneğin $\bar{g} = (0, 1)$ yönü için,

$$\begin{aligned} h(\bar{g}) &= \min_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, \bar{g} \rangle \\ &= \min\{\langle (-1, 0), (0, 1) \rangle, \langle (0, 1), (0, 1) \rangle, \langle (1, 0), (0, 1) \rangle\} \\ &= \min\{0, 1, 0\} = 0 \end{aligned}$$

olduğu halde

$$\begin{aligned} \min_{C \in \tilde{E}^*} \max_{v \in C} \langle v, \bar{g} \rangle &= \min\{\langle (-1, 0), (0, 1) \rangle, \langle (0, -1), (0, 1) \rangle, \langle (1, 0), (0, 1) \rangle\} \\ &= \min\{0, -1, 0\} = -1 \end{aligned}$$

olduğundan h fonksiyonu $\bar{g}$ noktasında $\tilde{E}^*$ ile temsil edilemez.

KAYNAKÇA

- [1] Rockafellar, R.T. (1970). *Convex Analysis*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, New Jersey, A.B.D.
- [2] Moreau, J.J. (1962). *Fonctions convexes en dualité*. Faculte des Sciences, Seminaires de Mathematiques, Universite de Montpellier, Montpellier, Fransa.
- [3] Pschenichnyi, B.N. (1980). *Convex Analysis and Extremal Problems*. Nauka Publishers, Moskova, Rusya.
- [4] Demyanov, V.F. (1999). Exhausters of a positively homogeneous function. *Optimization*, 45, 13-29.
- [5] Demyanov, V.F. ve Rubinov, A.M. (1995). *Constructive nonsmooth analysis*, Verlag Peter Lang, Frankfurt, Almanya.
- [6] Demyanov, V.F. ve Roshchina, V.A. (2005). Constrained optimality conditions in terms of upper and lower exhausters. *Appl. Comput. Math.*, 4(2), 25-35.
- [7] Demyanov, V.F. ve Roshchina, V.A. (2006). Optimality conditions in terms of upper and lower exhausters. *Optimization*, 55(5-6), 525-540.
- [8] Demyanov, V.F. ve Roshchina, V.A. (2008). Exhausters and subdifferentials in non-smooth analysis. *Optimization*, 57(1), 41-56.
- [9] Roshchina, V.A. (2007). Relationships between upper exhausters and the basic subdifferential in variational analysis. *J. Math. Anal. Appl.*, 334, 261-272.
- [10] Demyanov, V.F. ve Roshchina, V.A. (2007). Generalized Subdifferentials and Exhausters in Nonsmooth Analysis. *Doklady Mathematics*, 76(2), 652-655.
- [11] Roshchina, V.A. (2008). Reducing exhausters. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 136(2), 261-273.
- [12] Roshchina, V.A. (2008). On conditions for minimality of exhausters. *J. Convex Anal.*, 15(4), 859-868.

- [13] Grzybowski J., Pallaschke D. ve Urbanski R. (2010). Reduction of Finite exhausters. *J. Global Optim.*, 46(4), 589-601.
- [14] Küçük, M., Urbanski, R., Grzybowski J., Küçük, Y., Atasever Güvenç, İ., Tozkan, D., Soyertem, M. (2015). Reduction of Weak Exhausters and Optimality Conditions via Reduced Weak Exhausters. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 165, 693–707.
- [15] Küçük, M., Urbanski, R., Grzybowski J., Küçük, Y., Atasever Güvenç, İ., Tozkan, D., Soyertem, M. (2015). Weak subdifferential/superdifferential, weak exhausters and optimality conditions. *Optimization*, 64(10), 2199-2212.
- [16] Abbasov, M.E. (2019). Geometric conditions of reduction of exhausters. *J. Global Optim.*, 74(4), 737-751.
- [17] Tozkan, D. (2022). On reduction of exhausters via a support function representation. *J. Global Optim.*, 82, 105-118.
- [18] Hiriart-Urruty, J.P. ve Lemarechal C. (2001). *Fundamentals of Convex Analysis*. Springer Grundlehren Text Editions, Berlin, Almanya.
- [19] Demyanov, V.F. (2000). Exhausters and convexifiers-new tools in nonsmooth analysis. Demyanov, V.F. ve Rubinov, A.M. (Editörler), *Quasidifferentiability and Related Topics* içinde, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 85-137.
- [20] Clarke, F.H. (1975). Generalized gradients and applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 205(2), 247-262.
- [21] Clarke, F.H. (1983). *Optimization and non-smooth analysis*. Wiley Interscience, New York, A.B.D.
- [22] Demyanov, V.F. ve Rubinov, A.M. (1980). On quasidifferentiable functionals. *Doklady of USSR Acad. of Sci.*, 250, 21-25.
- [23] Demyanov, V.F. ve Rubinov, A.M. (1982). Elements of quasidifferential calculus. Demyanov, V.F. (Editörler) *Nonsmooth Problems in the Theory of Optimization and Control* içinde, Leningrad University Press, Rusya, 5-127.

- [24] Demyanov, V.F. ve Dixon, L.C.W. (1986). *Quasidifferential calculus*, Mathematical Prog. Society Inc., Amsterdam, Hollanda.
- [25] Demyanov, V.F. (2000). An introduction to quasidifferential calculus. Demyanov, V.F. ve Rubinov, A.M. (Editörler), *Quasidifferentiability and Related Topics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1-32.
- [26] Küçük, M., Urbanski, R., Grzybowski J., Küçük, Y., Atasever Güvenç, İ., Tozkan, D., Soyertem, M. (2015). Weak subdifferential/superdifferential, weak exhausters and optimality conditions. *Optimization*, 64(10), 2199-2212.



ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Ömer Coşkun

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2015-2022, Anadolu Üniversitesi , Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Lisans
- 2022-2025, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü,
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi, Yüksek Lisans