

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



DÜZLEMSEL BÉZIER EĞRİLERİNİN EĞRİ ÇİFTLERİ

Merve KARA

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

KASIM 2021

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



DÜZLEMSEL BÉZIER EĞRİLERİNİN EĞRİ ÇİFTLERİ

Merve KARA

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

KASIM 2021

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZLEMSEL BÉZİER EĞRİLERİNİN EĞRİ ÇİFTLERİ

Merve KARA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

KASIM 2021

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZLEMSEL BÉZİER EĞRİLERİNİN EĞRİ ÇİFTLERİ

Merve KARA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

Bu tez 12/11/2021 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Ayşe YILMAZ CEYLAN (Danışman)

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Dr. Öğr. Üyesi Rahime DERE PAÇİN

ÖZET

DÜZLEMSEL BÉZIER EĞRİLERİNİN EĞRİ ÇİFTLERİ

Merve KARA

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ayşe YILMAZ CEYLAN

Kasım 2021; 71 sayfa

Bu tezin asıl amacı; E^2 Öklid uzayında doğrudan olmayan $P_0, P_1, \dots, P_n$ kontrol noktalarına sahip

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i \quad ; \forall t \in [0, 1]$$

parametrik denklemi ile verilen n-inci dereceden Bézier eğrisinin eğri çiftlerinin parametrik denklemlerini ve eğriliklerini araştırmaktır. Bu tezde ilk olarak düzlemsel Bézier eğrisinin sırasıyla; evolüt, involüt, paralel, pedal ve kontrapedal eğri çiftlerinin parametrik denklemleri elde edilmiştir. Ardından düzlemsel Bézier eğrisinin elde edilen her bir eğri çiftinin eğrilikleri hesaplanmıştır. Ayrıca; $t \in [0, 1]$ için elde edilen bu eğri çiftlerinin denklemlerinde ve eğrilik formüllerinde $t = 0$ ve $t = 1$ için nasıl sonuçlar verdiği araştırılmıştır. Ek olarak; verilen kontrol noktalarını bazı özel noktalar seçerek Bézier eğrisinin eğri çiftleri ve bu eğri çiftlerinin eğrilikleri üzerinde incelemeler yapılmıştır. Son olarak elde edilen sonuçlar, ilgili bölümde detaylı olarak aktarılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Bézier eğrisi, Evolüt eğrisi, İnvolut eğrisi, Kontrapedal eğrisi, Paralel eğrisi, Pedal eğrisi

JÜRİ: Dr. Öğr. Üyesi Ayşe YILMAZ CEYLAN

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Dr. Öğr. Üyesi Rahime DERE PAÇIN

ABSTRACT

CURVES COUPLES OF PLANAR BÉZIER CURVES

Merve KARA

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ayşe YILMAZ CEYLAN

November 2021, 71 pages

The scope of this thesis is to examine the parametric equations and curvatures of the curve couples of the n -th order Bézier curve in the E^2 Euclidean space given by the following

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i \quad ; \forall t \in [0, 1]$$

parametric equation with non-linear $P_0, P_1, \dots, P_n$ control points. In this thesis, firstly, the parametric equations of the planar Bézier curve for the evolute, involute, parallel, pedal and contrapedal curve couples are obtained respectively. Then, the curvatures of each pair of curves are calculated. Moreover, they have been investigated at $t = 0$ and $t = 1$. In addition; by choosing some special points from the control points, the curve couples of the Bézier curve and the curvatures of these curve couples are examined. Finally, the results are given in detail in the relevant section.

KEYWORDS: Bézier curve, Contrapedal curve, Evolute curve, Involute curve, Parallel curve, Pedal curve.

COMMITTEE: Asst. Prof. Dr. Ayşe YILMAZ CEYLAN

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Asst. Prof. Dr. Rahime DERE PAÇİN

ÖNSÖZ

Bézier eğrileri ilk olarak 1958–1960 yılları arasında Fransız bir mühendis olan Pierre Etienne Bézier ve Fransız bir matematikçi olan Paul de Faget de Casteljau tarafından farklı matematiksel yaklaşımlar ile birbirlerinden bağımsız olarak geliştirilmiştir. Bézier eğrisi üzerine iki bilim insanının da birbirlerinden habersiz bir şekilde aynı verileri elde etmelerine rağmen konu ile ilgili ilk makale Bézier tarafından yayınlandığından dolayı günümüzde bu eğri, Bézier eğrisi olarak bilinir hale gelmiştir. Bézier eğrilerinin hayatımıza girmesi ve üzerinde incelemeler yapılmaya başlanmasıyla yüzeylerin tasarımı ve programlanması daha pratik hale gelmiştir. Bu tür özelliklerinden dolayı Bézier eğrisi, günümüzde vektör temelli çizim, font tasarımı, endüstriyel ve bilgisayar destekli tasarım ve 3D modelleme gibi bir çok çeşitli alanda önemli bir yere sahiptir. Bununla birlikte, Bézier eğrileri çeşitli mühendislik alanlarında ve uygulamalı matematik dallarında önemli çalışmalara konu olmuştur.

Bu çalışmada da Bézier eğrilerinin gelişimine katkıda bulunmak ve literatürdeki araştırma alanını genişletmek adına Bézier eğrilerinin eğri çiftleri ve eğri çiftlerinin eğrilikleri elde edilmiştir. Bu tez çalışmasının Bézier eğrilerin eğri çiftleri konusunda yapılan çalışmalara katkı sağlayacağı ve bu alanda yeni araştırmalar yapılmasına teşvik edici nitelikte bir çalışma olacağı kanaatindeyim.

Son olarak; bu konuda çalışmamı öneren, bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşarak her zaman yardımcı olan, yol gösteren saygıdeğer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Ayşe YILMAZ CEYLAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca; bu süreçte benden maddi manevi desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan babam İbrahim KARA'ya, annem Birgül KARA'ya ve benimle değerli bilgilerini paylaşan sevgili dostum Güldane YILDIZ'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	vi
SİMGELER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	4
2.1. Temel Tanım ve Teoremler	4
2.2. Bézier Eğri Parçasının Oluşturulması	7
2.3. Bernstein Polinomlarının Özellikleri	13
2.3.1. Birimin Parçalanması Özelliği	13
2.3.2. Anti-negatiflik Özelliği	14
2.3.3. Simetri Özelliği	14
2.3.4. Rekürsiyon Özelliği	14
2.4. Bézier Eğrisinin Özellikleri	14
2.4.1. Son Nokta İnterpolasyon Özelliği	14
2.4.2. Son Nokta Teğet Özelliği	14
2.4.3. Konveks Kabuk Özelliği	15
2.5. Bézier Eğrisi için De Casteljaeu Algoritması	15
2.6. Bernstein Polinomlarının Türevi	16
2.7. Bézier Eğrisinin Türevi	17
3. MATERYAL VE METOT	21
3.1. E^2 Öklid Uzayında n-inci dereceden Bézier Eğrisi için Serret-Frenet Ele- manları	21
3.2. E^2 Öklid Uzayında Bir Eğrinin Eğri Çiftleri	22
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	25
4.1. Düzlemsel Bézier Eğrisinin Eğri Çiftleri	25
4.1.1. Düzlemsel Bézier Eğrisinin Evolüt Eğrisi	25
4.1.2. Düzlemsel Bézier Eğrisinin İnvolüt Eğrisi	32
4.1.3. Düzlemsel Bézier Eğrisinin Paralel Eğrisi	33
4.1.4. Düzlemsel Bézier Eğrisinin Pedal Eğrisi	37

4.1.5. Düzlemsel Bézier Eğrisinin Kontrapedal Eğrisi	51
5. SONUÇLAR	67
6. KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ	



AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Düzlemsel Bézier Eğrisinin Eğri Çiftleri” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

12/11/2021

Merve KARA



SİMGELER

Simgeler:

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^m$	: m-boyutlu iç çarpım uzayı
$\mathbb{E}^2$	: 2 boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^m$	: m-boyutlu Öklid uzayı
$\langle , \rangle$	: Öklid uzayında iç çarpım
$\ , \ $	: Öklid uzayında norm
d	: Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu
x_i	: Öklid koordinat fonksiyonları
$\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$	: Öklid koordinat sistemi
γ	: $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayında eğri
$\gamma'(s)$	: $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayındaki eğrinin türevi
$\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$	: Serret-Frenet r-ayaklı alanı
$\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$	: Serret-Frenet r-ayaklısı
V_i	: Serret-Frenet vektörü
J	: Lineer dönüşüm
$\mathbf{T}$	: Öklid düzlemindeki teğet vektör
$\mathbf{N}$	: Öklid düzlemindeki normal vektör
κ	: Öklid düzlemindeki Frenet eğriliği
$\mathbf{T}'$	: Öklid düzlemindeki teğet vektörün türevi
$\mathbf{N}'$	: Öklid düzlemindeki normal vektörün türevi
P_i	: Bézier eğrisinin kontrol noktası
$P(t)$	: Bézier eğrisi
$B_i^n(t)$	: Bernstein polinomu
$CH\{W\}$	: W Kümesinin konveks kabuğu
$(B_i^n(t))'$	: Bernstein polinomunun türevi
$(B_i^n(t))''$	: Bernstein polinomunun ikinci türevi

Δ	: Kontrol noktaları için ileri fark operatörü
ΔP_i	: $P_{i+1} - P_i$
$P'(t)$	: Bézier eğrisinin türevi
$\Delta^2 P_i$	: $\Delta P_{i+1} - \Delta P_i$
$P''(t)$	: Bézier eğrisinin ikinci türevi
$\Delta^3 P_i$	: $\Delta^2 P_{i+1} - \Delta^2 P_i$
$P'''(t)$	: Bézier eğrisinin üçüncü türevi
$\Delta^r P_i$	: $\Delta^{r-1} P_{i+1} - \Delta^{r-1} P_i$
$P^{(r)}(t)$	: Bézier eğrisinin r-inci türevi
γ^*	: Regüler eğrinin eğri çifti
κ_{γ^*}	: Eğri çiftinin eğriliği
Q	: Pedal noktası
$\overrightarrow{QP}$	: $P(t) - Q$

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	P_0, P_1 kontrol noktalarının oluşturduğu lineer Bézier eğrisi	7
Şekil 2.2.	$P_0 = (2, 2), P_1 = (1, 3)$ kontrol noktalarından geçen Bézier eğrisi . .	8
Şekil 2.3.	P_0, P_1 ve P_2 kontrol noktalarının oluşturduğu kuadratik Bézier eğrisi	9
Şekil 2.4.	P_0, P_1, P_2 ve P_3 kontrol noktalarının oluşturduğu kübik Bézier eğrisi	10
Şekil 2.5.	2., 3., 4., ve 5. dereceden Bernstein polinomları	11
Şekil 2.6.	Düzlemsel kuadratik Bézier eğrisi	12
Şekil 2.7.	Düzlemsel kübik Bézier eğrisi	13
Şekil 2.8.	Bir kübik Bézier eğrisinin konveks kabuk içinde yatması	15
Şekil 2.9.	Bézier eğrisinin De Casteljau algoritması	16

1. GİRİŞ

Literatürde bir çok bilim insanı Bézier eğrileri hakkında önemli çalışmalar yapmış ve bilim dünyasına katkıda bulunmuşlardır. Fikrin mucidi 1959 yılında Citroën firmasında çalışan bir Fransız otomotiv mühendisi Paul de Faget de Casteljau'dur. Eğri ve yüzey tasarımında kolaylık sağlaması için, Paul de Faget de Casteljau bir formül üzerinde çalışmaya başlamıştır. Aynı yıllarda Renault firmasında çalışan bir diğer Fransız otomotiv mühendisi Pierre Bézier Etienne, Paul de Faget de Casteljau'nun çalışmasından bağımsız olarak aynı formülü geliştirmiştir. Bézier'in 1968 yılında yayınlanan çalışmalarının bir sonucu olarak teori Bézier'in ismi ile bilinir hale gelmiştir. Bu çalışmaların bir sonucu olarak Bézier'in formülü, sıralı bir nokta kümesine ait olan $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ kontrol noktalarının kullanılmasıyla orijinal eğriye yaklaşımını sağlayan bir metoda dayanır. Dolayısıyla Bézier eğrisi, belirlenen kontrol noktalarına göre şekillenir. Uç noktalar ile eğri çakışırken geriye kalan kontrol noktaları eğrinin üzerinde olmak zorunda değildir.

Bézier eğrisi, özellikle bilgisayar destekli tasarım alanında sıklıkla kullanılan parametrik eğri biçimidir. Çünkü Bézier eğrisi, bu alanda kullanılan polinom bazları arasında nümerik olarak en kararlı yapıya sahip olandır ve parçalı polinom eğrileri için ideal bir geometrik gösterimi vardır. Parçalı polinom fonksiyonlar veya eğriler, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümünde yaklaşık çözümü vermesi için sıklıkla kullanılır. Bézier eğrileri; dinamik sistemleri, diferansiyel denklemleri ve ısı-dalga denklemlerini çözmede kullanılır. Ayrıca Bézier eğrileri, Tıp ve Mühendislik alanlarını içine alan çeşitli uygulamalarda yararlanılan sürekli eğriliğe sahip tipik parametrik eğrilerden biridir.

Optik alanındaki çalışmaları ile de tanınan C. Huygens, evolüt ve involüt kavramlarını araştırmıştır (Huygens 1966). Klasik diferansiyel geometride Öklid düzlemindeki regüler bir eğrinin evolütü, yalnızca tüm eğrilik merkezlerinin yeri tarafından değil, aynı zamanda regüler eğrinin normal doğrularının zarfı, yani paralel eğrilerin tekil yerleri tarafından verilir. Diğer tarafta regüler bir eğrinin involütü, doğru bir ucunda eğriye teğet olan bir doğru parçası ile değiştirirken, diğer ucu da involütün izini sürmektir. Regüler bir γ eğrisinin $c \in \mathbb{R}$ için, paralel eğrisi c birim uzaklığında olan bir eğridir. Yine Öklid düzleminde verilen regüler bir γ eğrisi ve Q noktası için, Q noktasının eğrinin $\gamma(t)$ noktalarındaki teğet doğruları üzerindeki dik izdüşüm noktalarının çizdiği eğriye, γ eğrisinin

Q pedal noktasına göre pedal eğrisi denir. Kontrapedal eğri ise; Q pedal noktasının $\gamma(t)$ noktalarındaki normal doğruları üzerindeki dik izdüşüm noktalarının çizdiği eğridir. Bu eğriye normal pedal eğrisi veya karşı pedal eğrisi de denmektedir (Özdemir 2020). Steede B. H. (1898), pedal ve kontrapedal eğrileri ile çalışmış, eğriliklerini araştırmıştır. Li Y. ve Pei D. (2018) ve Tuncer O. O. vd. (2018) makalelerinde Öklid düzlemindeki cephelerin pedal ve kontrapedal eğrilerini incelemiştir.

Son yıllarda Bézier eğrileri ile birçok matematikçi ilgilenmiş ve çalışmalar yapmıştır. Farin G. (2002) eserinde Bézier eğrilerinin, özel bir şeklin burulması ve eğriliği gibi birçok özelliklerinin belirlenip şeklinin oluşturulmasında kullanışlı bir yapıya sahip olduğundan bahsetmiştir. Ayrıca, Farin G. (2002) , Marsh D. (2005) ve David S. (2006) çalışmalarında Bézier eğrileri için uç noktalarda tanımlanan eğrilik ve burulma formüllerinin diferansiyel geometri açısından geometrik anlamlarına da yer vererek Bézier eğrileri ile yapılan çalışmalara katkı sağlamıştır. Yılmaz A. (2009) yüksek lisans tezinde Bézier eğrileri ve Bézier yüzeylerinin temel özelliklerinden bahsetmiştir. İncesu M. ve Gürsoy O. (2004)'de Bézier eğrisinin eğriliklerini ve temel formunu incelemiştir. Georgiev G. H. (2006) ve (2007) eserlerinde düzlemsel ve kübik Bézier eğrisinin şekilleri üzerinde çalışmıştır. Ueda K. (1997) ve (2000)' de bir pedal noktası aracılığı ile klasik bir sinuso-idal spiral ailesi tanıtılmıştır ve daha sonra Sánchez-Reyes J. (2002)'de p -Bézier eğrileri olarak adlandırılan rasyonel Bézier eğrilerinin özel bir alt kümesine ait olarak tanımlanmıştır. Erkan E. ve Yüce S. (2018) makalesinde ve Erkan E. (2019) doktora tezinde düzlemde birim hızlı olmayan n -inci dereceden Bézier eğrilerinin Serret-Frenet çatısını kurmuş ve eğriliklerini hesaplamıştır. Samancı H. K. vd. (2015) eserinde E^3 Öklid uzayında Bézier eğrisinin bazı diferansiyel geometrik özelliklerini ve Bishop çatısını elde etmiştir. Kılıçoğlu ve Şenyurt (2020), E^3 Öklid uzayında matris formu olan kontrol noktalarına dayanan kübik Bézier eğrisinin, involütünü ve involütünün Frenet elemanlarıyla birlikte eğriliğini incelemiştir. Duman Z. (2021)'de E^3 Öklid uzayındaki Bézier eğrilerinin evolüt-involüt eğri çiftlerini araştırmıştır. Çalışmasında Bézier eğrisinin involüt – evolüt eğri çiftinin Frenet elemanlarının birbiri cinsinden yazımlarına da yer vermiştir. Ceylan A.Y. (2021) makalesinde E^2 Öklid uzayındaki Bézier eğrilerinin evolüt-involüt ve paralel eğri çiftlerini karakterize etmiş ve eğriliklerini vermiştir. Ceylan A.Y. ve Kara M. (2021) makalesinde E^2 Öklid uzayındaki Bézier eğrilerinin pedal ve kontrapedal eğri

çiftlerini araştırmış, $t = 0$ ve $t = 1$ durumlarını incelemiştir.

Literatür incelemesi detaylı olarak yapıldığında incelenen konuyla ilgili tez ve makalelerde düzlemsel Bézier eğrilerinin eğri çiftleri alanında yapılan çalışmalarda bazı eksiklikler olduğu fark edilmiştir. Bu tezin asıl hedefi; hem bu eksikliği gidermeye çalışmak adına hem de gelecek çalışmalara ışık tutması amacıyla birim hızlı olmayan düzlemsel Bézier eğrilerinin eğri çiftleri konusunu çalışmak ve elde edilen bulguları ve sonuçları aktarmaktır.

Bu tez çalışması; giriş ve kaynaklar bölümleri hariç dört ana bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölüm olan kaynak taraması kısmında bu çalışma için gerekli olan ön bilgiler, temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölüm olan materyal ve metot kısmında tezin orijinal kısmı için alt yapı oluşturulmuştur. Bu bölümde; düzlemde birim hızlı olmayan n -inci dereceden Bézier eğrilerinin Serret-Frenet çatısı ve yine düzlemde verilen bir eğrinin eğri çiftlerinin tanımları verilmiştir.

Dördüncü bölüm olan bulgular ve tartışma kısmı beş ayrı alt bölümden oluşmaktadır. Bu bölümlerde sırasıyla n -inci dereceden birim hızlı olmayan düzlemsel Bézier eğrisinin evolüt, involüt, paralel, pedal ve kontrapedal eğri çiftlerinin parametrik denklemleri elde edilmiştir ve elde edilen bu eğri çiftlerinin Frenet eğrilikleri hesaplanmıştır.

Son olarak; sonuçlar kısmında ise elde edilen bulgular ışığında ulaşılan sonuçlar derlenmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde ilk olarak, diferansiyel geometrinin ve bu çalışmanın dayandığı temel kavramlar m -boyutlu reel Öklid uzayında verilmiş olup; bu tezde tüm durumlar $m=2$ için uyarlanmıştır. Ayrıca, $m=2$ özel durumunda bu çalışma için temel olan teoremler ispatsız olarak verilmiştir.

İkinci olarak; bu tez çalışması Bézier eğrileri üzerine kurulu olduğu için bu bölümde yapılan kaynak taramasıyla Bézier eğrileri tanıtılmıştır. Bilgisayar destekli geometrik tasarım (CAGD) için büyük önem taşıyan Bézier eğrileri, Bernstein polinomları yardımıyla tanımlanmış ve hem Bézier eğrilerinin hem de Bernstein polinomlarının temel özelliklerinden bahsedilmiştir. Ayrıca daha anlaşılır ve somut olması açısından Bézier eğrileri örnekler ile desteklenmiştir. Bunun yanı sıra Bézier eğrisi için De Casteljau algoritması verilmiştir.

Son olarak Bernstein polinomlarının ve Bézier eğrilerinin türevlerinden bahsedilmiştir.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1. Bir reel afin uzay X olmak üzere X ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V vektör uzayında;

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i, \quad \begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases}$$

şeklinde bir Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, X afin uzayına m – boyutlu Öklid uzayı denir ve E^m ile gösterilir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.2. m -boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olmak üzere V ile birleşen bir Öklid uzayı E^m olsun. V vektör uzayı üzerindeki norm $\|\cdot\|$ olmak üzere;

$$d : E^m \times E^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d(x, y) = \|xy\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - x_i)^2}, \quad \begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona $m -$ boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu denir. Her $x, y \in E^m$ için $d(x, y)$ değerine de x ile y noktaları arasındaki uzaklık adı verilir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.3. p ve $q \in E^2$ de sıfırdan farklı vektörler olmak üzere;

$$\cos \alpha = \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \|q\|} \quad (2.1)$$

$$\sin \alpha = \frac{\langle p, Jq \rangle}{\|p\| \|q\|}$$

$0 \leq \alpha \leq 2\pi$ olacak şekilde bir tek α vardır (Gray, Abbena ve Salamon 2016).

Tanım 2.4. $I, \mathbb{R}$ uzayında açık bir aralık olmak üzere;

$$\begin{aligned} \gamma &: I \rightarrow E^m \\ s &\rightarrow \gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \dots, \gamma_m(s)) \end{aligned}$$

biçiminde düzgün diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\gamma(s), E^m$ Öklid uzayında bir alt küme olmak üzere (I, γ) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olarak adlandırılır. $I \subset \mathbb{R}$ aralığına, γ eğrisinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine de $\gamma(s)$ eğrisinin parametresi denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.5. m -boyutlu Öklid uzayında M eğrisi (I, γ) koordinat komşuluğu ile verilsin ve $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \dots, \gamma_m(s))$ olsun. Böylece;

$$\frac{d\gamma}{ds}_{\gamma(s)} = \gamma'(s)_{\gamma(s)} = \left(\frac{d\gamma_1}{ds}, \frac{d\gamma_2}{ds}, \dots, \frac{d\gamma_m}{ds} \right)$$

tanjant vektörüne, M eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki hız vektörü denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.6. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir. Yani;

$$\begin{aligned} \gamma &: I \rightarrow E^m \\ \forall s \in I &\text{ için } \gamma'(s) \neq 0 \end{aligned}$$

ise γ eğrisi regüler eğridir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.7. $\gamma : I \rightarrow E^m$, regüler bir eğri olmak üzere, $c \in I$ başlangıç noktası alınarak;

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du$$

şeklinde tanımlanan $s(t) = f(t)$ fonksiyonu t nin diferansiyellenebilir fonksiyonudur. Genellikle başlangıç noktası olarak $t_0 = 0$ alınır. Eğer γ eğrisi için; $\|\gamma'(t)\| = 1$ ise eğriye birim hızlı eğri veya yay parametresine göre verilmiş eğri denir (Özdemir 2020).

Tanım 2.8. Aşağıdaki gibi tanımlanan J lineer dönüşümü

$$J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(p_1, p_2) \rightarrow (-p_2, p_1)$$

geometrik olarak orijin etrafında saat yönünün tersine $\frac{\pi}{2}$ açılı bir dönmedir. $p, q \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere J lineer dönüşümü;

$$\begin{aligned} \langle Jp, Jq \rangle &= \langle p, q \rangle \\ \langle Jp, p \rangle &= 0 \\ \langle Jp, q \rangle &= -\langle p, Jq \rangle \end{aligned} \tag{2.2}$$

özelliklerine sahiptir (Gray, Abbena ve Salamon 2016).

Teorem 2.9. $\gamma : I \rightarrow E^2$ birim hızlı olmayan düzlemsel regüler bir eğri olsun. $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ Serret-Frenet çatısı ve $\forall t \in I$ için γ eğrisinin κ eğriliği;

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

$$N(t) = \frac{J\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

$$\kappa(t) = \frac{\langle \gamma''(t), J\gamma'(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^3} \tag{2.3}$$

şeklinde elde edilir (Gray, Abbena ve Salamon 2016).

Teorem 2.10. $\mathbb{R}^2$ de verilen bir γ eğrisinin Frenet vektörleri $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{N}$ eğriliği ise κ olsun. Bu durumda $v = \|\gamma'(t)\|$ olmak üzere;

$$\mathbf{T}' = v\kappa\mathbf{N} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{N}' = -v\kappa\mathbf{T}$$

eşitlikleri vardır. Matrisler yardımıyla;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v\kappa \\ -v\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edilir (Özdemir 2020).

2.2. Bézier Eğri Parçasının Oluşturulması

Tanım 2.11. E^m ($m = 2, 3$) Öklid uzayında P_0, P_1 noktaları verildiğinde $\overline{P_0P_1}$ doğru parçası üzerinde herhangi bir nokta $P_0^1(t)$ ile gösterilirse;

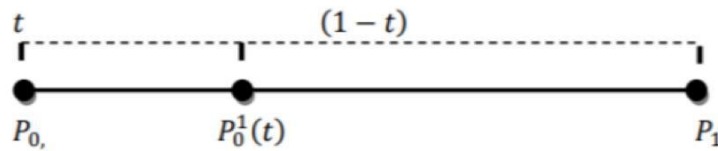
$$P(t) = P_0^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1 ; t \in [0, 1]$$

denklemini bir lineer eğri parçasının bir parametrizasyonunu oluşturur. Burada;

$$B_0^1(t) = (1-t)$$

$$B_1^1(t) = t$$

1. dereceden Bernstein polinomları ve P_0, P_1 kontrol noktaları olarak adlandırılır (Kaplan ve Mann 2006, Marsh 2005). Bakınız Şekil 2.1.

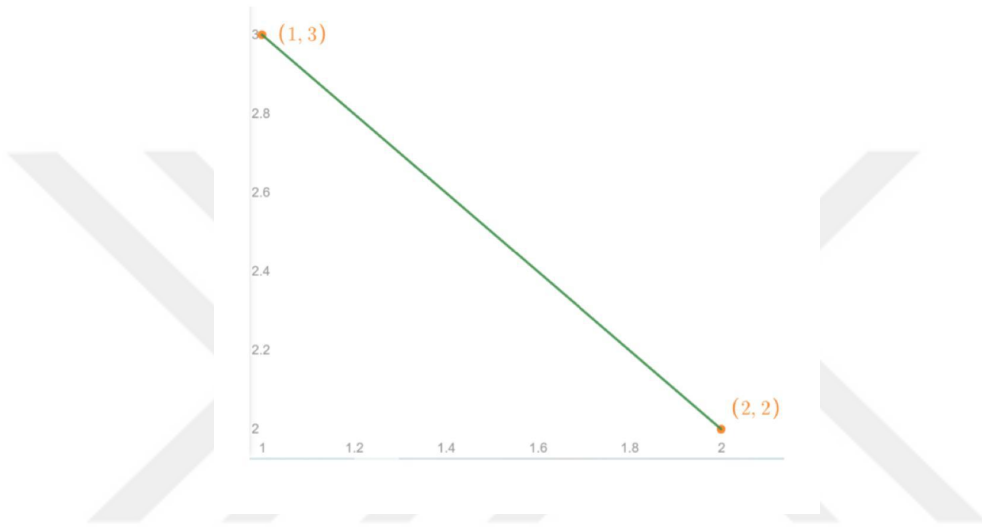


Şekil 2.1. P_0, P_1 kontrol noktalarının oluşturduğu lineer Bézier eğrisi

Örnek 2.12. E^2 de $P_0 = (2, 2)$, $P_1 = (1, 3)$ kontrol noktarından geçen $\overline{P_0P_1}$ doğru parçası;

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0^1(t) = (1-t)(2, 2) + t(1, 3) \\ &= (2-t, 2+t) \quad ; t \in [0, 1] \end{aligned}$$

elde edilir. Bakınız Şekil 2.2.



Şekil 2.2. $P_0 = (2, 2)$, $P_1 = (1, 3)$ kontrol noktarından geçen Bézier eğrisi

Tanım 2.13. E^m ($m = 2, 3$) Öklid uzayında P_0 , P_1 ve P_2 noktaları verildiğinde $t \in [0, 1]$ için;

$$\begin{aligned} P_0^1(t) &= (1-t)P_0 + tP_1 \\ P_1^1(t) &= (1-t)P_1 + tP_2 \\ P_0^2(t) &= (1-t)P_0^1 + tP_1^1 \end{aligned}$$

denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0^2(t) \\ &= (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)t P_1 + t^2 P_2 \\ &= \sum_{i=0}^2 P_i B_i^2(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

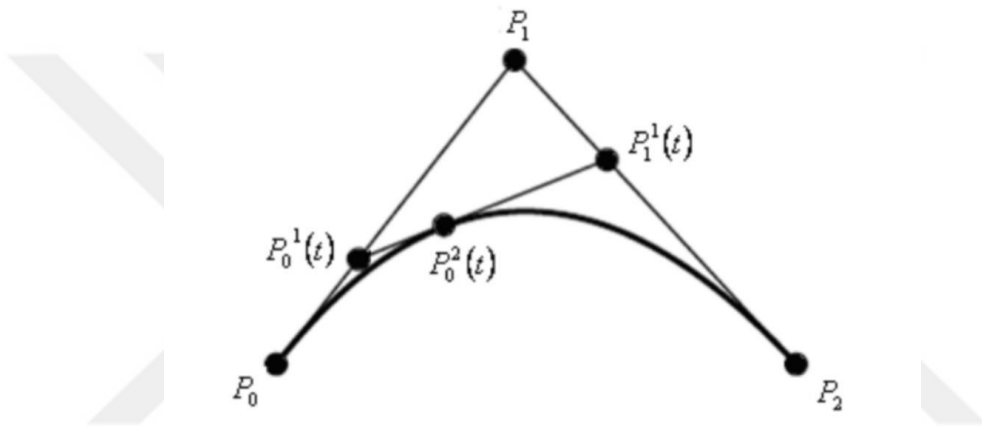
kuadratik Bézier eğrisi tanımlanır. Burada;

$$B_0^2(t) = (1-t)^2$$

$$B_1^2(t) = 2(1-t)t$$

$$B_2^2(t) = t^2$$

2. dereceden Bernstein polinomları; P_0 , P_1 ve P_2 noktaları ise kontrol noktaları olarak adlandırılır (Kaplan ve Mann 2006, Marsh 2005). Bakınız Şekil 2.3.



Şekil 2.3. P_0 , P_1 ve P_2 kontrol noktalarının oluşturduğu kuadratik Bézier eğrisi

Tanım 2.14. E^m ($m = 2, 3$) Öklid uzayında P_0, P_1, P_2 ve P_3 noktaları verildiğinde $t \in [0, 1]$ için;

$$P_0^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$

$$P_1^1(t) = (1-t)P_1 + tP_2$$

$$P_2^1(t) = (1-t)P_2 + tP_3$$

$$P_0^2(t) = (1-t)P_0^1(t) + tP_1^1(t)$$

$$P_1^2(t) = (1-t)P_1^1(t) + tP_2^1(t)$$

$$P_0^3(t) = (1-t)P_0^2(t) + tP_1^2(t)$$

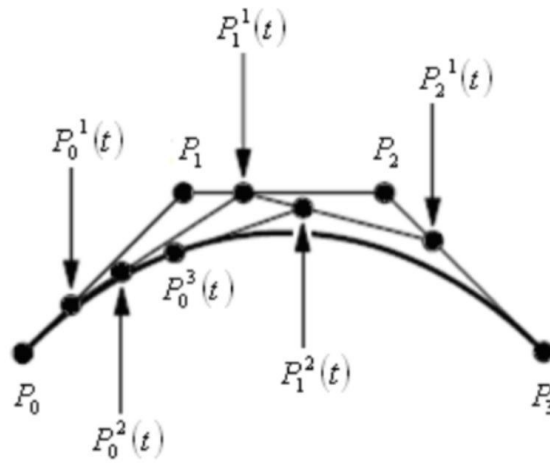
denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
 P(t) &= P_0^3(t) \\
 &= (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3 \\
 &= \sum_{i=0}^3 P_i B_i^3(t)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

kübik Bézier eğrisi tanımlanabilir. Burada;

$$\begin{aligned}
 B_0^3(t) &= (1-t)^3 \\
 B_1^3(t) &= 3(1-t)^2 t \\
 B_2^3(t) &= 3(1-t)t^2 \\
 B_3^3(t) &= t^3
 \end{aligned}$$

3. dereceden Bernstein polinomları; P_0, P_1, P_2 ve P_3 noktalarıda kontrol noktaları olarak adlandırılır (Kaplan ve Mann 2006, Marsh 2005). Bakınız Şekil 2.4.



Şekil 2.4. P_0, P_1, P_2 ve P_3 kontrol noktalarının oluşturduğu kübik Bézier eğrisi

Tanım 2.15. E^m ($m = 2, 3$) Öklid uzayında $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ kontrol noktaları verildiğinde $\forall t \in [0, 1]$ için;

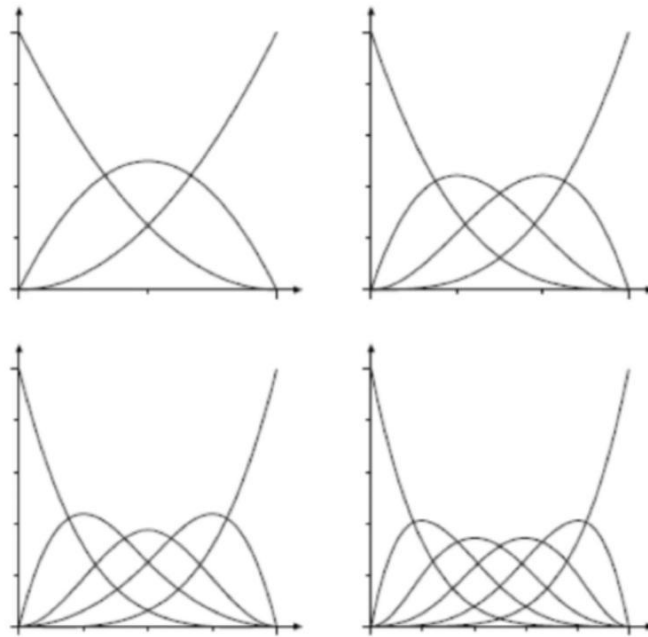
$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) \tag{2.7}$$

parametrik eşitliği bu kontrol noktalarının oluşturduğu Bézier eğrisi adını alır. Burada;

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i ; \quad 0 \leq i \leq n \quad (2.8)$$

$n - \text{inci}$ dereceden Bernstein polinomları olarak adlandırılır. $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ kontrol noktalarının öngörölmüş sırayla oluşturulan doğru parçaları yardımıyla elde edilen poligona kontrol poligonu denir (David 2006, Marsh 2005).

Şekil 2.5 de sırasıyla 2., 3., 4. ve 5. dereceden Bernstein polinomları verilmiştir.



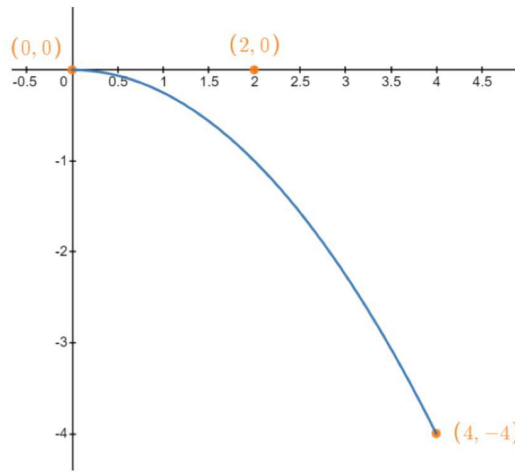
Şekil 2.5. 2., 3., 4., ve 5. dereceden Bernstein polinomları

Örnek 2.16. $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (2, 0)$ ve $P_2 = (4, -4)$ kontrol noktalarının oluşturduğu

düzlemsel kuadratik Bézier eğrisinin parametrik denklemi (2.5) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \sum_{i=0}^2 P_i B_i^2(t) \\
 &= (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)t P_1 + t^2 P_2 \\
 &= (1-t)^2 (0,0) + 2(1-t)t (2,0) + t^2 (4,-4) \\
 &= (0,0) + (4t(1-t), 0) + (4t^2, -4t^2) \\
 &= (4t, -4t^2) ; t \in [0,1]
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bakınız Şekil 2.6.



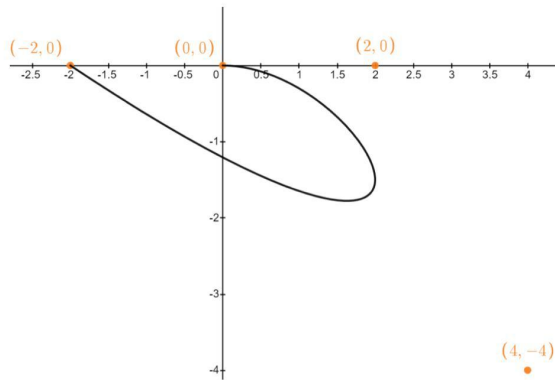
Şekil 2.6. Düzlemsel kuadratik Bézier eğrisi

Örnek 2.17. $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (2,0)$, $P_2 = (4,-4)$ ve $P_3 = (-2,0)$ kontrol noktalarının oluşturduğu düzlemsel kübik Bézier eğrisinin parametrik denklemi (2.6) eşitliği yardımıyla

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i^3(t)$$

$$\begin{aligned}
&= (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t) t^2 P_2 + t^3 P_3 \\
&= (1-t)^3 (0,0) + 3(1-t)^2 t (2,0) + 3(1-t) t^2 (4,-4) + t^3 (-2,0) \\
&= (0,0) + (6t(1-t)^2, 0) + (12(1-t)t^2, -12(1-t)t^2) + (-2t^3, 0) \\
&= (6t(1-t)^2 + 12(1-t)t^2 - 2t^3, -12(1-t)t^2) \\
&= (6t - 8t^3, 12t^3 - 12t^2) ; \quad t \in [0,1]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bakınız Şekil 2.7.



Şekil 2.7. Düzlemsel kübik Bézier eğrisi

2.3. Bernstein Polinomlarının Özellikleri

2.3.1. Birimin Parçalanması Özelliği

Bernstein polinomları $B_i^n(t)$ için;

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$$

elde edilir (Marsh 2005, Farin 2002).

2.3.2. Anti-negatiflik Özelliği

$$\forall t \in [0, 1] \text{ için } B_i^n(t) \geq 0$$

şeklindedir (Marsh 2005).

2.3.3. Simetri Özelliği

Bernstein polinomları $B_i^n(t)$ için;

$$B_{n-i}^n(t) = B_i^n(1-t)$$

eşitliği geçerlidir (Marsh 2005).

2.3.4. Rekürsion Özelliği

n -inci dereceden Bernstein polinomları $B_i^n(t)$ $i = 0, \dots, n$ için $(n-1)$ -inci dereceden polinomlar ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$B_i^n(t) = (1-t) B_i^{n-1}(t) + t B_{i-1}^{n-1}(t) \quad (2.9)$$

Burada; $B_{-1}^{n-1}(t) = 0$ ve $B_n^{n-1}(t) = 0$ dır (Marsh 2005, Farin 2002).

2.4. Bézier Eğrisinin Özellikleri

2.4.1. Son Nokta İnterpolasyon Özelliği

(2.7) eşitliği ile verilen $P(t)$ Bézier eğrisi,

$t = 0$ için;

$$P(0) = P_0 \quad (2.10)$$

$t = 1$ için;

$$P(1) = P_n \quad (2.11)$$

şeklindedir (David 2006, Marsh 2005).

2.4.2. Son Nokta Teğet Özelliği

(2.7) eşitliği ile verilen $P(t)$ Bézier eğrisi için;

$$P'(0) = n(P_1 - P_0) \text{ ve } P'(1) = n(P_n - P_{n-1})$$

şeklindedir (Marsh 2005).

2.4.3. Konveks Kabuk Özelliği

Tanım 2.18. m - boyutlu reel Öklid uzayı $\mathbb{R}^m$ de $W = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ noktalar kümesi verilsin. Bu W kümesinin konveks kabuğu;

$$CH(W) = \left\{ \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_m x_m \mid \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

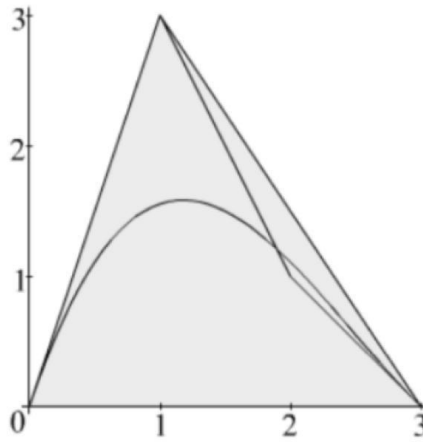
şeklinde tanımlanır ve $CH(W)$ ile gösterilir (Marsh 2005).

Teorem 2.19. (2.7) parametrik denklemiyle verilen bir Bézier eğrisi $P(t)$ olmak üzere $\forall t \in [0, 1]$ için;

$$P(t) \in CH\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$$

şeklindedir (Marsh 2005).

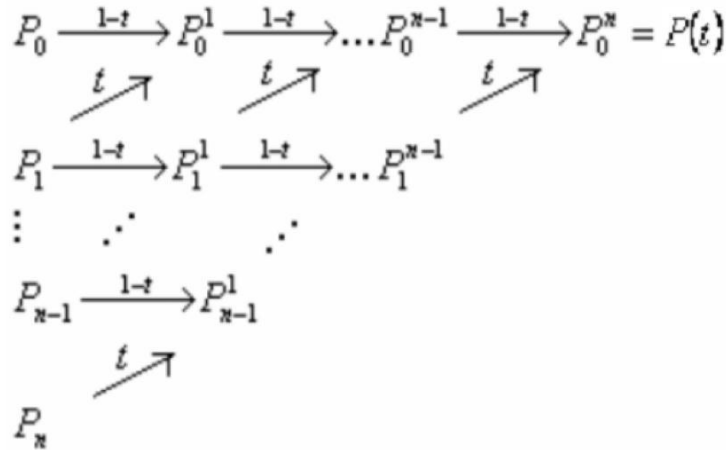
Şekil 2.8. de kübik bir Bézier eğrisinin konveks kabuk içinde yattığı gösterilmiştir.



Şekil 2.8. Bir kübik Bézier eğrisinin konveks kabuk içinde yatması

2.5. Bézier Eğrisi için De Casteljau Algoritması

(2.7) eşitliği ile verilen Bézier eğrisi kontrol noktaları yardımıyla aşağıdaki şekilde oluşturulur.



Şekil 2.9. Bézier eğrisinin De Casteljau algoritması

Bu ifade Bézier eğrisi için De Casteljau algoritmasını verir. De Casteljau algoritması, bir Bézier eğrisinin üzerindeki bir noktanın hesaplanması için bir metod sağlar. Aşağıdaki teorem De Casteljau algoritmasını ifade eder (Marsh 2005).

Teorem 2.20. $P_0, P_1, \dots, P_n$ kontrol noktalarının oluşturduğu bir Bézier eğrisi $P(t)$ olsun. Bu takdirde;

$$P_i^j(t) = (1-t) P_i^{j-1}(t) + t P_{i+1}^{j-1}(t) \quad ; \quad i = 0, \dots, n-j, \quad j = 1, \dots, n$$

ve $P_i^0 = P_i$ olmak üzere $P(t) = P_0^n$ ($0 \leq t \leq 1$) şeklindedir (Marsh 2005).

2.6. Bernstein Polinomlarının Türevi

Teorem 2.21. n -inci dereceden Bernstein polinomunun birinci ve ikinci türevi aşağıda verilmiştir;

$$(B_i^n(t))' = \frac{(i-nt)}{t(1-t)} B_i^n(t) \quad (2.12)$$

ve

$$(B_i^n(t))'' = \left(\frac{i(i-1) - 2i(n-1)t + n(n-1)t^2}{t^2(1-t)^2} \right) B_i^n(t) \quad (2.13)$$

ya da

$$(B_i^n(t))' = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \quad (2.14)$$

şeklindedir (Kaplan ve Mann 2006, Marsh 2005).

2.7. Bézier Eğrisinin Türevi

Teğetleri ve normaleri belirleme gibi eğrileri kapsayan bir çok uygulama, türevlerin hesabını gerektirir. Bézier eğrilerinin türevleri Bernstein polinomlarının türevlerinden elde edilir. n -inci dereceden Bézier eğrileri için türev formülünün genelleştirilmesi aşağıdaki teorem ile ifade edilir (Marsh 2005).

Teorem 2.22. n -inci dereceden bir Bézier eğrisinin birinci türevi, $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$ olmak üzere;

$$P'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i \quad (2.15)$$

şeklindedir.

İspat Teorem (2.21) ve (2.14) eşitliği ve $B_{-1}^{n-1}(t) = B_n^{n-1}(t) = 0$ olduğu gerçeği kullanılarak;

$$\begin{aligned} P'(t) &= \sum_{i=0}^n (B_i^n(t))' P_i \\ &= \sum_{i=0}^n n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) P_i \\ &= \sum_{i=0}^n n \cdot B_{i-1}^{n-1}(t) P_i - \sum_{i=0}^n n \cdot B_i^{n-1}(t) P_i \\ &= \sum_{i=0}^n n \cdot B_{i-1}^{n-1}(t) P_i - \sum_{i=0}^{n-1} n \cdot B_i^{n-1}(t) P_i \end{aligned}$$

elde edilir. Son satırın ilk toplamı tekrar numaralandırılarak;

$$P'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} n \cdot B_i^{n-1}(t) P_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} n \cdot B_i^{n-1}(t) P_i$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} n \cdot B_i^{n-1}(t)(P_{i+1} - P_i) \\
&= n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Burada $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$ olup *ileri fark operatörü* olarak adlandırılır. $\square$

$P(t)$ Bézier eğrisinin ikinci ve daha yüksek mertebeden türevleri, birinci türev formülünün tekrarlı uygulanmasıyla elde edilir. Bu formül düzlemsel Bézier eğrilerinde olduğu gibi E^3 teki Bézier eğrileri için de geçerlidir (Marsh 2005).

Sonuç 2.23. n -nci dereceden bir Bézier eğrisinin ikinci türevi, $\Delta^2 P_i = \Delta P_{i+1} - \Delta P_i = P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i$ olmak üzere;

$$P''(t) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \Delta^2 P_i \quad (2.16)$$

şeklindedir (Marsh 2005).

Sonuç 2.24. n -inci dereceden bir Bézier eğrisinin r -inci türevi;

$$\Delta^r P_i = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} P_{i+j}$$

fark denklemi olmak üzere;

$$P^{(r)}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r P_i B_i^{n-r}(t) \quad (2.17)$$

şeklindedir. Ayrıca ; $\Delta^r P_j = \Delta^{r-1} P_{j+1} - \Delta^{r-1} P_j$ eşitliği vardır (Marsh 2005).

Sonuç 2.25. n -ici dereceden bir Bézier eğrisinin r -inci türevinin $t = 0$ ve $t = 1$ başlangıç ve bitiş noktalarındaki değerleri;

$$P^{(r)}(t) \mid_{t=0} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r P_i B_i^{n-r}(t) \mid_{t=0} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r P_0$$

$$P^{(r)}(t) \mid_{t=1} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r P_i B_i^{n-r}(t) \mid_{t=1} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r P_{n-r}$$

şeklindedir (Marsh 2005).

İspat (2.17) eşitliği daha açık olarak;

$$\begin{aligned} P^{(r)}(t) &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r P_i B_i^{n-r}(t) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} (\Delta^r P_0 B_0^{n-r}(t) + \Delta^r P_1 B_1^{n-r}(t) + \dots + \Delta^r P_{n-r} B_{n-r}^{n-r}(t)) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \left(\Delta^r P_0 \binom{n-r}{0} (1-t)^{n-r} t^0 + \Delta^r P_1 \binom{n-r}{1} (1-t)^{n-r-1} t^1 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \Delta^r P_{n-r} \binom{n-r}{n-r} (1-t)^0 t^{n-r} \right) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece; $t = 0$ ve $t = 1$ değerleri son ifadede yazılarak;

$$P^{(r)}(t) \mid_{t=0} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r P_i B_i^{n-r}(t) \mid_{t=0} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r P_0$$

$$P^{(r)}(t) \mid_{t=1} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r P_i B_i^{n-r}(t) \mid_{t=1} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r P_{n-r}$$

elde edilir. Sonuç (2.25) ile $t = 0$ başlangıç noktasındaki birinci, ikinci ve üçüncü türevler;

$$P'(t) \mid_{t=0} = \frac{n!}{(n-1)!} \Delta P_0 = n \Delta P_0$$

$$\begin{aligned}
P''(t) \big|_{t=0} &= \frac{n!}{(n-2)!} \Delta^2 P_0 = n(n-1)(\Delta P_1 - \Delta P_0) \\
P'''(t) \big|_{t=0} &= \frac{n!}{(n-3)!} \Delta^3 P_0 = n(n-1)(n-2)(\Delta^2 P_1 - \Delta^2 P_0) \quad (2.18) \\
&= n(n-1)(n-2)(\Delta P_2 - 2\Delta P_1 + \Delta P_0)
\end{aligned}$$

$t = 1$ bitiş noktasındaki birinci, ikinci ve üçüncü türevler;

$$\begin{aligned}
P'(t) \big|_{t=1} &= \frac{n!}{(n-1)!} \Delta P_{n-1} = n \Delta P_{n-1} \\
P''(t) \big|_{t=1} &= \frac{n!}{(n-2)!} \Delta^2 P_{n-2} = n(n-1)(\Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2}) \\
P'''(t) \big|_{t=1} &= \frac{n!}{(n-3)!} \Delta^3 P_{n-3} = n(n-1)(n-2)(\Delta^2 P_{n-2} - \Delta^2 P_{n-3}) \quad (2.19) \\
&= n(n-1)(n-2)(\Delta P_{n-1} - 2\Delta P_{n-2} + \Delta P_{n-3})
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir (Marsh 2005). □

Sonuç 2.26. n -inci dereceden bir Bézier eğrisinin üçüncü türevi;

$$\begin{aligned}
\Delta^3 P_i &= \Delta^2 P_{i+1} - \Delta^2 P_i = (\Delta P_{i+2} - \Delta P_{i+1}) - (\Delta P_{i+1} - \Delta P_i) \\
&= \Delta P_{i+2} - 2\Delta P_{i+1} + \Delta P_i
\end{aligned}$$

olmak üzere;

$$P'''(t) = n(n-1)(n-2) \sum_{i=0}^{n-3} B_i^{n-3}(t) \Delta^3 P_i \quad (2.20)$$

şeklinde elde edilir (Marsh 2005).

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde; tezin orijinal kısmının çerçevesi niteliğinde olan tanım ve teoremler ispatlarıyla birlikte detaylı bir şekilde verilmiştir. E^2 Öklid uzayında n -inci dereceden Bézier eğrileri için Serret-Frenet çatısı oluşturulmuş, Frenet eğriliği hesaplanmış ve Bézier eğrilerinin uç noktalarında incelenmiştir.

3.1. E^2 Öklid Uzayında n -inci dereceden Bézier Eğrisi için Serret-Frenet Elemanları

Teorem 3.27. *Öklid uzayında (2.7) denkleminde sahip birim hızlı olmayan n -inci dereceden düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisinin her $t \in [0, 1]$ için; $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ eğriliği;*

$$T(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.21)$$

$$N(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) J \Delta P_i}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.22)$$

$$\kappa(t) = \frac{n-1}{n} \frac{\sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n-1} B_i^{n-2}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.23)$$

eşitlikleriyle verilir (Erkan ve Yüce 2018, Erkan 2019, Duman 2021).

Sonuç 3.28. *Öklid uzayında (2.7) denkleminde sahip birim hızlı olmayan n -inci dereceden düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisinin $t = 0$ başlangıç noktasındaki $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ eğriliği;*

$$T(t) \mid_{t=0} = \frac{\Delta P_0}{\|\Delta P_0\|}$$

$$N(t) \mid_{t=0} = \frac{J\Delta P_0}{\|\Delta P_0\|} \quad (3.24)$$

$$\kappa(t) \mid_{t=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta P_1, J\Delta P_0 \rangle}{\|\Delta P_0\|^3} \quad (3.25)$$

eşitlikleriyle verilir (Erkan ve Yüce 2018, Erkan 2019).

Sonuç 3.29. Öklid uzayında (2.7) denkleminde sahip birim hızlı olmayan n -inci dereceden düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisinin $t = 1$ bitiş noktasındaki $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ Serret-Frenet çatısı ve κ eğriliği;

$$\begin{aligned} T(t) \mid_{t=1} &= \frac{\Delta P_{n-1}}{\|\Delta P_{n-1}\|} \\ N(t) \mid_{t=1} &= \frac{J\Delta P_{n-1}}{\|\Delta P_{n-1}\|} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\kappa(t) \mid_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta P_{n-1}, J\Delta P_{n-2} \rangle}{\|\Delta P_{n-1}\|^3} \quad (3.27)$$

eşitlikleriyle verilir (Erkan ve Yüce 2018, Erkan 2019).

3.2. E^2 Öklid Uzayında Bir Eğrinin Eğri Çiftleri

Bu bölümde; Öklid uzayında verilen herhangi bir eğrinin eğri çiftlerinin tanımları ve bazı eğri çiftlerinin eğriliklerinin formüllerini veren teoremler ispatsız olarak verilmiştir.

Tanım 3.30. Eğriliği her noktada sıfırdan farklı olan ($\kappa \neq 0$) regüler düzlemsel γ eğrisinin eğriliği κ , normal vektör alanı da $\mathbf{N}_\gamma$ olmak üzere;

$$\gamma^*(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{N}_\gamma(t) \quad (3.28)$$

şeklinde tanımlanan γ^* eğrisine γ eğrisinin evolüt eğrisi denir (O' Neill 2006).

Tanım 3.31. γ , eğriliği her noktada sıfırdan farklı ($\kappa \neq 0$) regüler bir düzlem eğrisi olsun.

$\mathbf{T}_\gamma, \gamma$ eğrisinin teğet vektör alanı olmak üzere $t \in [t_1, t_2]$ ve $a \in (t_1, t_2)$ için;

$$\begin{aligned}\gamma^*(t) &= \gamma(t) - \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \int_a^t \|\gamma'(u)\| du \\ &= \gamma(t) - T_\gamma(t) \int_a^t \|\gamma'(u)\| du\end{aligned}\quad (3.29)$$

şeklinde tanımlanan γ^* eğrisine γ eğrisinin involüt eğrisi denir (Rutter 2000).

Tanım 3.32. γ regüler bir düzlem eğrisi olsun. γ eğrisinin normal vektör alanı $\mathbf{N}_\gamma$ olmak üzere $c \in \mathbb{R}$ için;

$$\gamma^*(t, c) = \gamma(t) + c\mathbf{N}_\gamma(t) \quad (3.30)$$

şeklinde tanımlanan γ^* eğrisine γ eğrisinin paralel eğrisi denir. Bu eğri γ eğrisine c birim uzaklığında olan bir eğridir (Rutter 2000).

Tanım 3.33. $\gamma : I \rightarrow E^2$ eğrisi ve $Q \in \mathbb{R}^2$ noktası için γ eğrisinin Q pedal noktasına göre pedal eğrisinin parametrik denklemi;

$$\gamma^*[\gamma, Q](t) = Q + \frac{\langle \gamma(t) - Q, J\gamma'(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} J\gamma'(t) \quad (3.31)$$

ile tanımlanır (Gray, Abbena ve Salamon 2016).

Tanım 3.34. $\gamma : I \rightarrow E^2$ eğrisi ve $Q \in \mathbb{R}^2$ noktası için γ eğrisinin Q pedal noktasına göre kontrapedal eğrisinin parametrik denklemi;

$$\gamma^*[\gamma, Q](t) = Q + \frac{\langle \gamma(t) - Q, \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} \gamma'(t) \quad (3.32)$$

ile tanımlanır (Gray, Abbena ve Salamon 2016).

Teorem 3.35. Düzlemde eğriliği κ , Frenet vektörleri $\mathbf{T}_\gamma$ ve $\mathbf{N}_\gamma$ olan regüler bir $\gamma : I \rightarrow E^2$ eğrisi verilsin. γ eğrisinin (3.28) denklemi ile verilen evolüt eğrisinin eğriliğinde $v = \|\gamma'(t)\|$ ve $\in_\kappa$ ile κ eğriliğinin işaretini göstermek üzere;

$$\kappa_{\gamma^*} = \in_\kappa \left| \frac{v\kappa^3}{\kappa'} \right| \quad (3.33)$$

şeklindedir (Özdemir 2020).

Teorem 3.36. *Düzlemde eğriliği κ , Frenet vektörleri $\mathbf{T}_\gamma$ ve $\mathbf{N}_\gamma$ olan regüler bir $\gamma : I \rightarrow E^2$ eğrisi verilsin. $s(t)$, γ eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu olmak üzere; γ eğrisinin (3.29) denklemi ile verilen involüt eğrisinin eğriliğinde ϵ_κ ile κ eğriliğinin işaretini göstermek üzere;*

$$\kappa_{\gamma^*}(t) = \frac{\epsilon_\kappa}{s(t)} \quad (3.34)$$

şeklindedir (Özdemir 2020).

Teorem 3.37. *Eğriliği her noktada sıfırdan farklı ($\kappa \neq 0$) olan regüler bir γ eğrisinin (3.30) denklemi ile verilen paralel eğrisinin eğriliği*

$$\kappa_{\gamma^*}(t) = \frac{\kappa(t)}{1 - c\kappa(t)} \quad (3.35)$$

eşitliği ile belirlidir (Özdemir 2020).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde materyal ve metotta hazırlanan bilgileri kullanarak; Öklid düzleminde herhangi bir eğrinin eğri çiftleri için verilen tanım ve teoremlerin Bézier eğrileri üzerine uygulanmasıyla tezin orijinal kısmı olan düzlemsel Bézier eğrisinin eğri çiftleri elde edilmiştir. Bu eğri çiftleri; evolüt eğrisi, involüt eğrisi, paralel eğrisi, pedal ve kontrapedal eğrisidir. Ayrıca; bu denklemler için bazı özel durumlar incelenmiştir. Bunun yanı sıra; sırasıyla denklemleri verilen Bézier eğrisinin eğri çiftlerinin eğrilikleri hesaplanmış ve hem eğri çiftlerinin hem de eğriliklerinin $t = 0$ ve $t = 1$ iken nasıl sonuçlar verdiği araştırılmıştır.

4.1. Düzlemsel Bézier Eğrisinin Eğri Çiftleri

Bu bölümde düzlemsel Bézier eğrisinin evolüt, involüt, paralel, pedal ve kontrapedal eğri çiftleri ele alınmıştır.

4.1.1. Düzlemsel Bézier Eğrisinin Evolüt Eğrisi

Bu bölümde düzlemsel Bézier eğrisinin evolüt eğrisi incelenmiştir.

Teorem 4.38. $\forall t \in [0, 1]$ için (2.7) denklemi ile tanımlanan $P_0, P_1, \dots, P_n$ kontrol noktalarına sahip birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisinin evolüt eğrisinin parametrik denklemi $P^*(t)$ olmak üzere;

$$P^*(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) + \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle}{\sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle} \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) J \Delta P_i$$

şeklindedir (Ceylan 2021).

İspat Düzlemsel Bézier eğrisinin evolüt eğrisinin denklemini hesaplamak için; Tanım (3.30) gereği Bézier eğrisinin N normal vektör alanına ve κ eğriliğine ihtiyaç duyulmaktadır. (3.28) denkleminde γ eğrisinin yerine (2.7) denklemi ile verilen düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisini yazarsak;

$$P^*(t) = P(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t)$$

elde edilir. Elde edilen bu son eşitlikte (3.22) ve (3.23) denklemleri yerlerine yazılarak;

$$P^*(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) + \frac{n}{n-1} \frac{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{3}{2}}}{\sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) J \Delta P_i}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.36)$$

elde edilir. □

Sonuç 4.39. $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayında doğrudan olmayan $(n+1)$ tane kontrol noktası ile verilen (2.7) denkleminde sahip $P(t)$ Bézier eğrisinin evolüt eğrisi $t = 0$ için;

$$P^*(0) = P_0 + \frac{n}{n-1} \frac{\|\Delta P_0\|^2 J \Delta P_0}{\langle \Delta P_1, J \Delta P_0 \rangle}$$

şeklinde bulunur (Ceylan 2021).

İspat (4.36) denkleminde $t = 0$ yazılırsa $P(0) = P_0$ ve (3.24) , (3.25) denklemleri yardımıyla;

$$P^*(0) = P_0 + \frac{n}{n-1} \frac{\langle \Delta P_0, \Delta P_0 \rangle J \Delta P_0}{\langle \Delta^2 P_0, J \Delta P_0 \rangle}$$

bulunur. $\Delta^2 P_0 = \Delta P_1 - \Delta P_0$ ve $\langle \Delta P_0, J\Delta P_0 \rangle = 0$ olduğundan dolayı;

$$\begin{aligned} P^*(0) &= P_0 + \frac{n}{n-1} \frac{\|\Delta P_0\|^2 J\Delta P_0}{\langle \Delta P_1 - \Delta P_0, J\Delta P_0 \rangle} \\ &= P_0 + \frac{n}{n-1} \frac{\|\Delta P_0\|^2 J\Delta P_0}{\langle \Delta P_1, J\Delta P_0 \rangle} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.40. $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayında doğrudan olmayan $(n+1)$ tane kontrol noktası ile verilen (2.7) denkleminde sahip $P(t)$ Bézier eğrisinin evolüt eğrisi $t = 1$ için;

$$P^*(1) = P_n + \frac{n}{n-1} \frac{\|\Delta P_{n-1}\|^2 J\Delta P_{n-1}}{\langle \Delta P_{n-1}, J\Delta P_{n-2} \rangle}$$

şeklinde bulunur (Ceylan 2021).

İspat (4.36) denkleminde $t = 1$ yazılırsa; $P(1) = P_n$ ve (3.26) ve (3.27) denklemleri yardımıyla;

$$P^*(1) = P_n + \frac{n}{n-1} \frac{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1} \rangle J\Delta P_{n-1}}{\langle \Delta^2 P_{n-2}, J\Delta P_{n-1} \rangle}$$

bulunur. $\Delta^2 P_{n-2} = \Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2}$ ve $\langle \Delta P_{n-1}, J\Delta P_{n-1} \rangle = 0$ olduğundan dolayı;

$$\begin{aligned} P^*(1) &= P_n + \frac{n}{n-1} \frac{\|\Delta P_{n-1}\|^2 J\Delta P_{n-1}}{\langle \Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2}, J\Delta P_{n-1} \rangle} \\ &= P_n + \frac{n}{n-1} \frac{\|\Delta P_{n-1}\|^2 J\Delta P_{n-1}}{\langle \Delta P_{n-1}, J\Delta P_{n-2} \rangle} \end{aligned}$$

ede edilir. □

Teorem 4.41. $\forall t \in [0, 1]$ için (2.7) denklemi ile tanımlanan $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayındaki kontrol noktalarına sahip birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisinin evolüt eğrisi olan $P^*(t)$ 'nin eğriliği $\kappa^*(t)$ ve $\in_{\kappa}$ ile κ eğriliğinin işareti gösterilmek üzere;

$$\kappa^* = \in_{\kappa} \left| \frac{\left(n^2 (n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle \right)^3}{n^3 \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

$$\cdot \left[n^4 (n-1) (n-2) \sum_{i=0}^{n-3} B_i^{n-3}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^3 P_i, J \Delta P_j \rangle \right.$$

$$\cdot \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right) - 3n^4 (n-1)^2 \left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta_x P_i \right.$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{n-2} B_j^{n-2}(t) \Delta_x^2 P_j + \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta_y P_i \cdot \sum_{j=0}^{n-2} B_j^{n-2}(t) \Delta_y^2 P_j \Bigg)$$

$$\cdot \left(\sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle \right) \Bigg] \quad (4.37)$$

şeklindedir. Burada; $\Delta_x P_i = (P_{i+1})_x - (P_i)_x$ ve $\Delta_y P_i = (P_{i+1})_y - (P_i)_y$ 'dir (Ceylan 2021).

İspat (4.36) denklemi ile verilen Bézier eğrisinin evolüt eğrisinin eğriliğini Teorem (3.35) yardımıyla;

$$\kappa^* = \in_{\kappa} \left| \frac{v \kappa^3}{\kappa'} \right|$$

denkleminde Bézier eğrisinin eğriliğini ve eğriliğinin türevini yerine yazarak hesaplanır.

Öncelikle $\kappa'(t)$ yi hesaplanarak başlanırsa (2.3) eşitliğinden $\kappa(t)$ nin türevi alınarak;

$$\kappa'(t) = \frac{[\langle P''(t), J P'(t) \rangle]' \|P'(t)\|^3 - \langle P''(t), J P'(t) \rangle (\|P'(t)\|^3)'}{\|P'(t)\|^6}$$

elde edilir. Şimdi $(\|P'(t)\|^3)'$ ifadesini hesaplamak için;

$$P'(t) = (P'_1(t), P'_2(t)) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i = \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) (\Delta_x P_i, \Delta_y P_i)$$

olduğunu kabul edersek;

$$\begin{aligned}
 \|P'(t)\|^3 &= \left(\sqrt{(P'_1(t))^2 + (P'_2(t))^2} \right)^3 \\
 (\|P'(t)\|^3)' &= \frac{3}{2} \left(\sqrt{(P'_1(t))^2 + (P'_2(t))^2} \right) [2P'_1(t)P''_1(t) + 2P'_2(t)P''_2(t)] \\
 &= 3\|P'(t)\| [P'_1(t)P''_1(t) + P'_2(t)P''_2(t)] \\
 (\|P'(t)\|^3)' &= 3 \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)B_j^{n-1}(t)\langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)\Delta_x P_i \right. \\
 &\quad \cdot \sum_{j=0}^{n-2} B_j^{n-2}(t)\Delta_x^2 P_j + \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)\Delta_y P_i \cdot \sum_{j=0}^{n-2} B_j^{n-2}(t)\Delta_y^2 P_j \left. \right)
 \end{aligned}$$

bulunur. Şimde de $\langle p, Jp \rangle = 0$ yardımıyla $[\langle P''(t), JP'(t) \rangle]'$ türevi;

$$[\langle P''(t), JP'(t) \rangle]' = \langle P'''(t), JP'(t) \rangle + \langle P''(t), JP''(t) \rangle = \langle P'''(t), JP'(t) \rangle$$

şeklinde bulunur. Bulunan türevler yukarıdaki $\kappa'(t)$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$\kappa'(t) = \frac{\langle P'''(t), JP'(t) \rangle \|P'(t)\|^2 - 3[P'_1(t)P''_1(t) + P'_2(t)P''_2(t)] \langle P''(t), JP'(t) \rangle}{\|P'(t)\|^5} \quad (4.38)$$

elde edilir.

$$\kappa^3(t) = \frac{[\langle P''(t), JP'(t) \rangle]^3}{\|P'(t)\|^9}$$

elde edilir ve

$$v = \|P'(t)\| = \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)B_j^{n-1}(t)\langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{1}{2}}$$

olduğu kullanılarak;

$$v\kappa^3(t) = \frac{[\langle P''(t), JP'(t) \rangle]^3}{\|P'(t)\|^8} \quad (4.39)$$

bulunur. (3.33) denklemde (4.38) ve (4.39) eşitlikleri yerine yazılırsa;

$$\kappa^*(t) = \epsilon_\kappa \left| \frac{[\langle P''(t), JP'(t) \rangle]^3}{\|P'(t)\|^3 \left[\langle P'''(t), JP'(t) \rangle \|P'(t)\|^2 - 3[P_1'(t)P_1''(t) + P_2'(t)P_2''(t)] \langle P''(t), JP'(t) \rangle \right]} \right| \quad (4.40)$$

elde edilir. Son olarak; (4.40) denklemde (2.15), (2.16) ve (2.20) eşitlikleri yerlerine yazılırsa; teoremdeki (4.37) deklemini elde edilir. $\square$

Sonuç 4.42. Birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden (2.7) denkleminde sahip düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisinin evolüt eğrisinin $\kappa^*(t)$ eğrilinde sırasıyla $t = 0$ ve $t = 1$ için;

$$\kappa^*(0) = \epsilon_\kappa \left| \frac{(n-1)^2 \langle \Delta P_1, J \Delta P_0 \rangle^3}{n \|\Delta P_0\|^3 \left[(n-2) \langle \Delta^3 P_0, J \Delta P_0 \rangle \|\Delta P_0\|^2 - 3(n-1) (\Delta_x P_0 \Delta_x^2 P_0 + \Delta_y P_0 \Delta_y^2 P_0) \langle \Delta P_1, J \Delta P_0 \rangle \right]} \right|$$

ve

$$\kappa^*(1) = \epsilon_\kappa \left| \frac{(n-1)^2 \langle \Delta P_{n-1}, J \Delta P_{n-2} \rangle^3}{n \|\Delta P_{n-1}\|^3 \left[(n-2) \langle \Delta P_{n-3} - 2\Delta P_{n-2}, J \Delta P_{n-1} \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 - 3(n-1) (\Delta_x P_{n-1} \Delta_x^2 P_{n-2} + \Delta_y P_{n-1} \Delta_y^2 P_{n-2}) \langle \Delta P_{n-1}, J \Delta P_{n-2} \rangle \right]} \right|$$

şeklinde elde edilir.

İspat Öncelikle (4.40) denklemde $t = 0$ yazarsak (2.10) denklemi ile verilen son nokta interpolasyon özelliğinin, (2.18) denklemlerinin ve

$$\langle Jp, q \rangle = -\langle p, Jq \rangle \text{ ve } \langle Jp, p \rangle = 0$$

eşitliğinin yardımıyla;

$$\begin{aligned}
\kappa^*(0) &= \epsilon_\kappa \left| \frac{[\langle P''(0), JP'(0) \rangle]^3}{\|P'(0)\|^3 \left[\frac{\langle P'''(0), JP'(0) \rangle \|P'(0)\|^2 - 3[P_1'(0)P_1''(0) + P_2'(0)P_2''(0)] \langle P''(0), JP'(0) \rangle}{(n^2(n-1) \langle \Delta^2 P_0, J\Delta P_0 \rangle)^3} \right]} \right| \\
&= \epsilon_\kappa \left| \frac{(n^2(n-1) \langle \Delta^2 P_0, J\Delta P_0 \rangle)^3}{n^3 \|\Delta P_0\|^3 \left[\frac{n^4(n-1)(n-2) \langle \Delta^3 P_0, J\Delta P_0 \rangle \|\Delta P_0\|^2 - 3n^4}{(n-1)^2 (\Delta_x P_0 \Delta_x^2 P_0 + \Delta_y P_0 \Delta_y^2 P_0) \langle \Delta^2 P_0, J\Delta P_0 \rangle} \right]} \right| \\
&= \epsilon_\kappa \left| \frac{(n-1)^2 \langle \Delta P_1, J\Delta P_0 \rangle^3}{n \|\Delta P_0\|^3 \left[\frac{(n-2) \langle \Delta^3 P_0, J\Delta P_0 \rangle \|\Delta P_0\|^2 - 3(n-1)}{(\Delta_x P_0 \Delta_x^2 P_0 + \Delta_y P_0 \Delta_y^2 P_0) \langle \Delta P_1, J\Delta P_0 \rangle} \right]} \right|
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi de (4.40) denkleminde $t = 1$ yazılırsa; (2.11) denklemi ile verilen son nokta interpolasyon özelliğinin, (2.19) denklemlerinin ve

$$\langle Jp, q \rangle = -\langle p, Jq \rangle \text{ ve } \langle Jp, p \rangle = 0$$

eşitliğinin yardımıyla;

$$\begin{aligned}
\kappa^*(1) &= \epsilon_\kappa \left| \frac{[\langle B''(1), JP'(1) \rangle]^3}{\|P'(1)\|^3 \left[\frac{\langle P'''(1), JP'(1) \rangle \|P'(1)\|^2 - 3[(P_1'(1)P_1''(1) + P_2'(1)P_2''(1))] \langle P''(1), JP'(1) \rangle}{(n^2(n-1) \langle \Delta^2 P_{n-2}, J\Delta P_{n-1} \rangle)^3} \right]} \right| \\
&= \epsilon_\kappa \left| \frac{(n^2(n-1) \langle \Delta^2 P_{n-2}, J\Delta P_{n-1} \rangle)^3}{n^3 \|\Delta P_{n-1}\|^3 \left[\frac{n^4(n-1)(n-2) \langle \Delta^3 P_{n-3}, J\Delta P_{n-1} \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 - 3n^4(n-1)^2 (\Delta_x P_{n-1} \Delta_x^2 P_{n-2} + \Delta_y P_{n-1} \Delta_y^2 P_{n-2})}{\langle \Delta^2 P_{n-2}, J\Delta P_{n-1} \rangle} \right]} \right|
\end{aligned}$$

$$= \epsilon_{\kappa} \left| \frac{(n-1)^2 \langle \Delta P_{n-1}, J \Delta P_{n-2} \rangle^3}{n \|\Delta P_{n-1}\|^3 \left[\begin{array}{c} (n-2) \langle \Delta P_{n-3} - 2\Delta P_{n-2}, J \Delta P_{n-1} \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 \\ -3(n-1) (\Delta_x P_{n-1} \Delta_x^2 P_{n-2} + \Delta_y P_{n-1} \Delta_y^2 P_{n-2}) \\ \langle \Delta P_{n-1}, J \Delta P_{n-2} \rangle \end{array} \right]} \right|$$

şeklinde elde edilir. $\square$

4.1.2. Düzlemsel Bézier Eğrisinin İnvolut Eğrisi

Bu bölümde düzlemsel Bézier eğrisinin involüt eğrisi ele alınmıştır.

Teorem 4.43. $\forall t \in [0, 1]$ için (2.7) denklemi ile tanımlanan $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayındaki kontrol noktalarına sahip birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisinin involüt eğrisinin parametrik denklemi $P^*(t)$ olmak üzere;

$$P^*(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) - \frac{n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{1}{2}}} \int_a^t \left\| \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(u) \Delta P_i \right\| du$$

şeklinde (Ceylan 2021).

İspat Düzlemsel Bézier eğrisinin involüt eğrisinin denklemini hesaplamak için Tanım (3.31) gereği Bézier eğrisinin $\mathbf{T}$ teğet vektör alanına ihtiyaç duyulmaktadır. (3.29) denkleminde γ eğrisinin yerine (2.7) denklemi ile verilen düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisini yazılırsa. $\forall t \in [t_1, t_2]$ ve $a \in (t_1, t_2)$ için;

$$P^*(t) = P(t) - T(t) \int_a^t \|P'(u)\| du$$

elde edilir. Elde edilen bu son eşitlikte (2.15) ve (3.21) denklemleri yerine yazılarak;

$$P^*(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) - \frac{n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{1}{2}}} \int_a^t \left\| \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(u) \Delta P_i \right\| du$$

şeklinde elde edilir. $\square$

Teorem 4.44. $\forall t \in [0, 1]$ için (2.7) denklemi ile tanımlanan $P_0, P_1, \dots, P_n \in E^2$ uzayındaki kontrol noktalarına sahip birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisinin involüt eğrisi olan $P^*(t)$ 'nin eğriliği $\kappa^*(t)$ ve $\in_\kappa$ ile κ eğriliğinin işareti gösterilmek üzere;

$$\kappa^*(t) = \in_\kappa \frac{1}{n \int_a^t \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(u) B_j^{n-1}(u) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{1}{2}} du} \quad (4.41)$$

şeklindedir (Ceylan 2021).

İspat Teorem (3.36) gereğince Bézier eğrisinin involütünün eğriliğini hesaplamak için (3.34) denkleminde γ eğrisi yerine $P(t)$ Bézier eğrisi yazılırsa ve $P(t)$ Bézier eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu;

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_a^t \|P'(u)\| du \\ &= n \int_a^t \left\| \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(u) \Delta P_i \right\| du \end{aligned}$$

olduğu kullanılarak;

$$\begin{aligned} \kappa^*(t) &= \frac{\in_\kappa}{s(t)} \\ &= \in_\kappa \frac{1}{n \int_a^t \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(u) B_j^{n-1}(u) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{1}{2}} du} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $\square$

4.1.3. Düzlemsel Bézier Eğrisinin Paralel Eğrisi

Bu bölümde düzlemsel Bézier eğrisinin paralel eğrisi çalışılmıştır.

Teorem 4.45. $\forall t \in [0, 1]$ için (2.7) denklemi ile tanımlanan $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayındaki kontrol noktalarına sahip birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisinin paralel eğrisinin parametrik denklemi $c \in \mathbb{R}$ için $P^*(t, c)$ olmak üzere;

$$P^*(t, c) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) + \frac{c \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) J \Delta P_i}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{1}{2}}}$$

şeklindedir (Ceylan 2021).

İspat Düzlemsel Bézier eğrisinin paralel eğrisinin denklemini hesaplamak için Tanım (3.32) gereği Bézier eğrisinin N normal vektör alanına ihtiyaç duyulmaktadır. (3.30) denkleminde γ eğrisinin yerine (2.7) denklemi ile verilen düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisini yazılırsa;

$$P^*(t, c) = P(t) + cN(t)$$

elde edilir. Elde edilen bu son eşitlikte (3.22) denklemi yerine yazılarak;

(4.42)

$$P^*(t, c) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) + \frac{c \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) J \Delta P_i}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{1}{2}}}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.46. $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayında doğrudan olmayan $(n + 1)$ tane kontrol noktası ile verilen (2.7) denkleminde sahip $P(t)$ Bézier eğrisinin paralel eğrisinde sırasıyla $t = 0$ ve $t = 1$ için;

$$P^*(0, c) = P_0 + c \frac{J \Delta P_0}{\|\Delta P_0\|}$$

$$P^*(1, c) = P_n + c \frac{J \Delta P_{n-1}}{\|\Delta P_{n-1}\|}$$

şeklinde elde edilir (Ceylan 2021).

İspat (4.42) denkleminde sırasıyla $t = 0$ ve $t = 1$ yazılarak $P(0) = P_0$, (3.24) ve $P(1) = P_n$, (3.26) denklemi yardımıyla;

$$P^*(0, c) = P(0) + cN(0)$$

$$= P_0 + c \frac{J\Delta P_0}{\|\Delta P_0\|}$$

ve

$$P^*(1, c) = P(1) + cN(1)$$

$$= P_n + c \frac{J\Delta P_{n-1}}{\|\Delta P_{n-1}\|}$$

şeklinde elde edilir. □

Teorem 4.47. $\forall t \in [0, 1]$ ve $c \in \mathbb{R}$ için (2.7) denklemi ile tanımlanan $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayındaki kontrol noktalarına sahip birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisinin paralel eğrisi olan $P^*(t, c)$ 'nin eğriliği $\kappa^*(t)$ olmak üzere;

(4.43)

$$\kappa^*(t) = \frac{(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J\Delta P_j \rangle}{\left[n \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{3}{2}} - c(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J\Delta P_j \rangle \right]}$$

şeklindedir (Ceylan 2021).

İspat Düzlemdeki bir eğrinin paralel eğrisinin eğriliği (3.35) denkleminde verilmiştir. Burada; $\kappa(t)$ düzlemsel Bézier eğrisinin eğriliği olmak üzere, bu denklemi Bézier eğrisi

için düzenlenirse (3.23) dekleminin yardımı ile $\kappa(t)$ yerine ilgili eşitlik yazılarak;

$$\begin{aligned} \kappa^*(t) &= \frac{\kappa(t)}{1 - c\kappa(t)} \\ &= \frac{\frac{n-1}{n} \frac{\sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{3}{2}}}}{1 - c \frac{(n-1)}{n} \frac{\sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{3}{2}}}} \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik düzenlenirse;

$$\kappa^*(t) = \frac{(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle}{\left[n \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{3}{2}} - c(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle \right]}$$

şeklinde elde edilir. □

Sonuç 4.48. Birim hızlı olmayan $n - inci$ dereceden (2.7) denkleminde sahip düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisinin $c \in \mathbb{R}$ için paralel eğrisinin $\kappa^*(t)$ eğrilinde sırasıyla; $t = 0$ ve $t = 1$ için;

$$\kappa^*(0) = \frac{(n-1) \langle \Delta P_1, J \Delta P_0 \rangle}{n \|\Delta P_0\|^3 - c(n-1) \langle \Delta P_1, J \Delta P_0 \rangle}$$

$$\kappa^*(1) = \frac{(n-1) \langle \Delta P_{n-1}, J \Delta P_{n-2} \rangle}{n \|\Delta P_{n-1}\|^3 - c(n-1) \langle \Delta P_{n-1}, J \Delta P_{n-2} \rangle}$$

şeklindedir.

İspat Öncelikle (4.43) denkleminde $t = 0$ yazarsak (3.35) denkleminin yardımıyla;

$$\kappa^*(0) = \frac{\kappa(0)}{1 - c\kappa(0)}$$

elde edilir. O halde; (3.25) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \kappa^*(0) &= \frac{\frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta P_1, J\Delta P_0 \rangle}{\|\Delta P_0\|^3}}{1 - c \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta P_1, J\Delta P_0 \rangle}{\|\Delta P_0\|^3}} \\ &= \frac{(n-1) \langle \Delta P_1, J\Delta P_0 \rangle}{n\|\Delta P_0\|^3 - c(n-1) \langle \Delta P_1, J\Delta P_0 \rangle} \end{aligned}$$

olarak bulunur. (4.43) denkleminde $t = 1$ yazarsak; (3.35) denkleminin yardımıyla;

$$\kappa^*(1) = \frac{\kappa(1)}{1 - c\kappa(1)}$$

elde edilir. (3.27) denklemini kullanarak;

$$\begin{aligned} \kappa^*(1) &= \frac{\frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta P_{n-1}, J\Delta P_{n-2} \rangle}{\|\Delta P_{n-1}\|^3}}{1 - c \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta P_{n-1}, J\Delta P_{n-2} \rangle}{\|\Delta P_{n-1}\|^3}} \\ &= \frac{(n-1) \langle \Delta P_{n-1}, J\Delta P_{n-2} \rangle}{n\|\Delta P_{n-1}\|^3 - c(n-1) \langle \Delta P_{n-1}, J\Delta P_{n-2} \rangle} \end{aligned}$$

olarak bulunur. □

4.1.4. Düzlemsel Bézier Eğrisinin Pedal Eğrisi

Bu bölümde düzlemsel Bézier eğrisinin pedal eğrisi incelenmiştir.

Teorem 4.49. $\forall t \in [0, 1]$ için (2.7) denklemi ile tanımlanan $P_0, P_1, \dots, P_n$ kontrol noktalarına sahip birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q \in \mathbb{R}^2$ pedal noktasına göre pedal eğrisinin parametrik denklemi $P^*[P, Q](t)$ olmak üzere;

$$P^*[P, Q](t) = Q + \frac{\langle \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i - Q, \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) J \Delta P_j \rangle}{\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle} \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) J \Delta P_k$$

şeklindedir (Ceylan ve Kara 2021).

İspat (2.7) denkleminde sahip düzlemsel Bézier eğrisinin $Q \in \mathbb{R}^2$ pedal noktasına göre pedal eğrisini hesaplamak için Tanım (3.33) deki (3.31) denkleminde γ eğrisi yerine $P(t)$ Bézier eğrisini alarak işlem yapılır. Bunun için;

$$P'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i$$

eşitliğine ihtiyaç duyulmaktadır. $P^*[P, Q](t)$ pedal eğrisinin parametrik denklemi;

$$P^*[P, Q](t) \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned} &= Q + \frac{\langle P(t) - Q, JP'(t) \rangle}{\|P'(t)\|^2} JP'(t) \\ &= Q + \frac{\langle \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i - Q, J \left(n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \Delta P_j \right) \rangle}{\|n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i\|^2} J \left(n \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) \Delta P_k \right) \\ &= Q + \frac{\langle \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i - Q, \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) J \Delta P_j \rangle}{\langle \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i, \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i \rangle} \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) J \Delta P_k \\ &= Q + \frac{\langle \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i - Q, \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) J \Delta P_j \rangle}{\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle} \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) J \Delta P_k \end{aligned} \tag{4.45}$$

şeklinde elde edilir. □

Sonuç 4.50. $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayında doğrudan olmayan $(n + 1)$ tane kontrol noktası ile verilen birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden (2.7) denkleminde $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q \in \mathbb{R}^2$ pedal noktasına göre pedal eğrisi $P^*[P, Q](t)$ denkleminde $t = 0$ için;

(4.46)

$$P^*[P, Q](0) = Q + \frac{\langle P_0 - Q, J\Delta P_0 \rangle}{\langle \Delta P_0, \Delta P_0 \rangle} J\Delta P_0$$

şeklindedir (Ceylan ve Kara 2021).

İspat Şimdi düzlemsel Bézier eğrisinin pedal eğrisini $t = 0$ da incelemek için (4.44) denkleminde t yerine 0 yazılırsa, $P(0) = P_0$ ve $P'(0) = n\Delta P_0$ olduğunda kullanılarak;

$$\begin{aligned} P^*[P, Q](0) &= Q + \frac{\langle P(0) - Q, JP'(0) \rangle}{\|P'(0)\|^2} JP'(0) \\ &= Q + \frac{\langle P_0 - Q, J(n\Delta P_0) \rangle}{\|n\Delta P_0\|^2} J(n\Delta P_0) \\ &= Q + \frac{\langle P_0 - Q, J\Delta P_0 \rangle}{\langle \Delta P_0, \Delta P_0 \rangle} J\Delta P_0 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. □

Sonuç 4.51. $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayında doğrudan olmayan $(n + 1)$ tane kontrol noktası ile verilen birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden (2.7) denkleminde $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q \in \mathbb{R}^2$ pedal noktasına göre pedal eğrisi $P^*[P, Q](t)$ denkleminde $t = 1$ için;

(4.47)

$$P^*[P, Q](1) = Q + \frac{\langle P_n - Q, J\Delta P_{n-1} \rangle}{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1} \rangle} J\Delta P_{n-1}$$

şeklindedir (Ceylan ve Kara 2021).

İspat Şimdi düzlemsel Bézier eğrisinin pedal eğrisini $t = 1$ de incelemek.için (4.44) denkleminde t yerine 1 yazarsak, $P(1) = P_n$ ve $P'(1) = n\Delta P_{n-1}$ olduğuda kullanılarak;

$$\begin{aligned} P^*[P, Q](1) &= Q + \frac{\langle P(1) - Q, JP'(1) \rangle}{\|P'(1)\|^2} JP'(1) \\ &= Q + \frac{\langle P_n - Q, J(n\Delta P_{n-1}) \rangle}{\|n\Delta P_{n-1}\|^2} J(n\Delta P_{n-1}) \\ &= Q + \frac{\langle P_n - Q, J\Delta P_{n-1} \rangle}{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1} \rangle} J\Delta P_{n-1} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. □

Sonuç 4.52. $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayında doğrudan olmayan $(n+1)$ tane kontrol noktası ile verilen birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden (2.7) denkleminde sahip $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q = P_0$ pedal noktasına göre $P^*[P, Q](t)$ pedal eğrisi denkleminde sırasıyla $t = 0$ ve $t = 1$ için, (4.46) ve (4.47) denklemlerinde $Q = P_0$ yazılarak;

$$\begin{aligned} P^*[P, P_0](0) &= P_0 + \frac{\langle P_0 - P_0, J\Delta P_0 \rangle}{\langle \Delta P_0, \Delta P_0 \rangle} J\Delta P_0 = P_0 \\ P^*[P, P_0](1) &= P_0 + \frac{\langle P_n - P_0, J\Delta P_{n-1} \rangle}{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1} \rangle} J\Delta P_{n-1} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir (Ceylan ve Kara 2021).

Sonuç 4.53. $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayında doğrudan olmayan $(n+1)$ tane kontrol noktası ile verilen birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden (2.7) denkleminde sahip $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q = P_n$ pedal noktasına göre $P^*[B, P](t)$ pedal eğrisi denkleminde sırasıyla $t = 0$ ve $t = 1$ için, (4.46) ve (4.47) denklemlerinde $Q = P_n$ yazılarak;

$$P^*[P, P_n](0) = P_n + \frac{\langle P_0 - P_n, J\Delta P_0 \rangle}{\langle \Delta P_0, \Delta P_0 \rangle} J\Delta P_0$$

$$P^*[P, P_n](1) = P_n + \frac{\langle P_n - P_n, J\Delta P_{n-1} \rangle}{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1} \rangle} J\Delta P_{n-1} = P_n$$

şeklinde elde edilir (Ceylan ve Kara 2021).

Teorem 4.54. $\forall t \in [0, 1]$ için (2.7) denklemi ile tanımlanan $P_0, P_1, \dots, P_n$ kontrol noktalarına sahip birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q = (0, 0) = \mathbf{0}$ pedal noktasına göre pedal eğrisinin parametrik denklemi $P^*[P, \mathbf{0}](t)$ olmak üzere;

$$P^*[P, \mathbf{0}](t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle P_i, J\Delta P_j \rangle}{\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle} \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) J\Delta P_k$$

şeklindedir (Ceylan ve Kara 2021).

İspat Özel olarak $Q = (0, 0) = \mathbf{0}$ pedal noktasına göre düzlemsel Bézier eğrisinin pedal eğrisini (4.44) denkleminde Q noktasını yerine koyarak hesaplırsak;

$$P^*[P, \mathbf{0}](t) = \frac{\langle P(t), JP'(t) \rangle}{\|P'(t)\|^2} JP'(t) \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} P^*[P, \mathbf{0}](t) &= \frac{\langle \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) J\Delta P_j \rangle}{\langle \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i, \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i \rangle} \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) J\Delta P_k \\ &= \frac{\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle P_i, J\Delta P_j \rangle}{\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle} \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) J\Delta P_k \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. □

Sonuç 4.55. $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayında doğrudan olmayan $(n + 1)$ tane kontrol noktası ile verilen birim hızlı olmayan $n -$ inci dereceden (2.7) denklemine sahip $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q = (0, 0) = \mathbf{0}$ pedal noktasına göre $P^*[P, \mathbf{0}](t)$ pedal eğrisi denkleminde sırasıyla $t = 0$ ve $t = 1$ için;

$$P^*[P, \mathbf{0}](0) = \frac{\langle P_0, J\Delta P_0 \rangle}{\langle \Delta P_0, \Delta P_0 \rangle} J\Delta P_0$$

$$P^*[P, \mathbf{0}](1) = \frac{\langle P_n, J\Delta P_{n-1} \rangle}{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1} \rangle} J\Delta P_{n-1}$$

şeklindedir (Ceylan ve Kara 2021).

İspat (4.48) denkleminde sırasıyla $t = 0$ ve $t = 1$ yazılarak; $P(0) = P_0$, $P'(0) = n\Delta P_0$, $P(1) = P_n$ ve $P'(1) = n\Delta P_{n-1}$ olduğunda kullanılarak;

$$\begin{aligned} P^*[P, \mathbf{0}](0) &= \frac{\langle P(0), JP'(0) \rangle}{\|P'(0)\|^2} JP'(0) \\ &= \frac{\langle P_0, J\Delta P_0 \rangle}{\langle \Delta P_0, \Delta P_0 \rangle} J\Delta P_0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} P^*[P, \mathbf{0}](1) &= \frac{\langle P(1), JP'(1) \rangle}{\|P'(1)\|^2} JP'(1) \\ &= \frac{\langle P_n, J\Delta P_{n-1} \rangle}{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1} \rangle} J\Delta P_{n-1} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. □

Teorem 4.56. (4.45) denklemi ile verilen $n -$ inci dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q \in \mathbb{R}^2$ pedal noktasına göre pedal eğrisinin eğriliği $\kappa_{P^*[P, Q]}^*(t)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
& n \left\langle \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i - Q, \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) J \Delta P_j \right\rangle \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \cdot \right. \\
& \left. \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right) + 2(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle \\
& \cdot \left(\sum_{i,j=0}^n B_i^n(t) B_j^n(t) \langle P_i, P_j \rangle - 2 \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \langle P_i, Q \rangle + \|Q\|^2 \right) \\
\kappa_{P^*[P,Q]}^*(t) = & \frac{\left(\sum_{i,j=0}^n B_i^n(t) B_j^n(t) \langle P_i, P_j \rangle - 2 \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \langle P_i, Q \rangle + \|Q\|^2 \right)}{(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle} \\
& \cdot \left(\sum_{i,j=0}^n B_i^n(t) B_j^n(t) \langle P_i, P_j \rangle - 2 \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \langle P_i, Q \rangle + \|Q\|^2 \right)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

şeklindedir.

İspat (4.44) denklemini

$$N(t) = \frac{JP'(t)}{\|P'(t)\|}$$

olduğundan;

$$P^*[P, Q](t) = Q + \langle P(t) - Q, N(t) \rangle N(t) \tag{4.50}$$

şeklinde düzenlenebilir. Düzlemsel Bézier eğrisinin Q pedal noktasına göre pedal eğrisinin eğriliğini hesaplamak için düzlemde eğrilik formülü kullanılarak;

$$\kappa_{P^*[P,Q]}^*(t) = \frac{\langle (P^*[P, Q](t))'', J(P^*[P, Q](t))' \rangle}{\|(P^*[P, Q](t))'\|^3} \tag{4.51}$$

eşitliğinde ilgili türevler hesaplanmalıdır. (4.50) denkleminin türevini alırsak;

$$(P^*[P, Q](t))' = [\langle P'(t), N(t) \rangle + \langle P(t) - Q, N'(t) \rangle] N(t) + \langle P(t) - Q, N(t) \rangle N'(t) \tag{4.52}$$

elde edilir. (4.52) denkleminde (2.3) ve (2.4) eşitlikleri ilgili yerlere yazılırsa;

$$(P^*[P, Q](t))' = -v\kappa [\langle P(t) - Q, T(t) \rangle N(t) + \langle P(t) - Q, N(t) \rangle T(t)]$$

ve (2.2) eşitliği ile verilen J lineer dönüşümü tanımından

$$JN(t) = -T(t) \quad , \quad JT(t) = N(t)$$

olması gerektiği anlaşılır ve bu eşitlikler yardımıyla;

$$\begin{aligned} J(P^*[P, Q](t))' &= -v\kappa [\langle P(t) - Q, T(t) \rangle JN(t) + \langle P(t) - Q, N(t) \rangle JT(t)] \\ &= v\kappa \langle P(t) - Q, T(t) \rangle T(t) - v\kappa \langle P(t) - Q, N(t) \rangle N(t) \quad (4.53) \end{aligned}$$

bulunur. (4.52) denkleminin türevini alırsak;

$$\begin{aligned} (P^*[P, Q](t))'' &= -(\kappa'v + \kappa v') [\langle P(t) - Q, T(t) \rangle N(t) + \langle P(t) - Q, N(t) \rangle T(t)] \\ &\quad - \kappa v \cdot [\langle P(t) - Q, T(t) \rangle N(t) + \langle P(t) - Q, N(t) \rangle T(t)]' \end{aligned} \quad (4.54)$$

elde edilir. Şimdi (4.54) denklemindeki türevler hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} &[\langle P(t) - Q, T(t) \rangle N(t) + \langle P(t) - Q, N(t) \rangle T(t)]' \\ &= [\langle P'(t), T(t) \rangle + \langle P(t) - Q, T'(t) \rangle] N(t) + \langle P(t) - Q, T(t) \rangle N'(t) + \\ &\quad [\langle P'(t), N(t) \rangle + \langle P(t) - Q, N'(t) \rangle] T(t) + \langle P(t) - Q, N(t) \rangle T'(t) \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte ilgili yerlere (2.4) denklemindeki eşitlikler yazılırsa (2.3) denklemi ve $\langle T, T \rangle = 1$ olduğu da kullanılarak;

$$\begin{aligned} &[\langle P(t) - Q, T(t) \rangle N(t) + \langle P(t) - Q, N(t) \rangle T(t)]' \\ &= \langle P'(t), T(t) \rangle N(t) + 2v\kappa \langle P(t) - Q, N(t) \rangle N(t) - 2v\kappa \langle P(t) - Q, T(t) \rangle T(t) \\ &= vN(t) + 2v\kappa \langle P(t) - Q, N(t) \rangle N(t) - 2v\kappa \langle P(t) - Q, T(t) \rangle T(t) \quad (4.55) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.38) denkleminde $\kappa'(t)$ hesaplanmıştır. Şimdi $v' = (\|P'(t)\|)'$ türevi hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} P'(t) &= (P'_1(t), P'_2(t)) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) (\Delta_x P_i, \Delta_y P_i) \\ \|P'(t)\| &= \sqrt{(P'_1(t))^2 + (P'_2(t))^2} \end{aligned}$$

$$v' = (\|P'(t)\|)' = \frac{1}{\sqrt{(P'_1(t))^2 + (P'_2(t))^2}} [P'_1(t) P''_1(t) + P'_2(t) P''_2(t)]$$

$$= \frac{1}{v} [P'_1(t) P''_1(t) + P'_2(t) P''_2(t)] \quad (4.56)$$

şeklinde bulunur. Son olarak, (4.54) denklemindeki $-(\kappa'v + \kappa v')$ ifadesi (4.56) ve (4.38) denklemlerinin yardımıyla;

$$\begin{aligned} -(\kappa'v + \kappa v')(t) &= - \left(\frac{v^4 \langle P'''(t), N(t) \rangle}{v^5} - \frac{3v^2 [P'_1(t) P''_1(t) + P'_2(t) P''_2(t)] \langle P''(t), N(t) \rangle}{v^5} + \right. \\ &\quad \left. \frac{[P'_1(t) P''_1(t) + P'_2(t) P''_2(t)] \langle P''(t), JP'(t) \rangle}{v \cdot v^3} \right) \\ &= \frac{2v^2 [P'_1(t) P''_1(t) + P'_2(t) P''_2(t)] \langle P''(t), N(t) \rangle}{v^5} \\ &\quad - \frac{v^4 \langle P'''(t), N(t) \rangle}{v^5} \\ &= \frac{-\langle P'''(t), N(t) \rangle}{v} + \frac{2\kappa [P'_1(t) P''_1(t) + P'_2(t) P''_2(t)]}{v} \quad (4.57) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.54) dekleminde (4.55) ve (4.57) denklemleri yerlerine yazılırken notasyonlarda kısalık olması açısından

$$\langle P(t) - Q, T(t) \rangle = a, \quad \langle P(t) - Q, N(t) \rangle = b \quad (4.58)$$

$$\langle P'''(t), N(t) \rangle = c, \quad [P'_1(t) P''_1(t) + P'_2(t) P''_2(t)] = A$$

olarak adlandıırırsak (4.54) denklemini;

$$\begin{aligned} (P^*[P, Q](t))'' &= \left(\frac{-c}{v} + \frac{2A\kappa}{v} \right) \cdot [aN(t) + bT(t)] \\ &\quad - \kappa v \cdot [vN(t) + 2v\kappa bN(t) - 2v\kappa aT(t)] \\ &= \frac{-ca}{v} N(t) - \frac{cb}{v} T(t) + \frac{2A\kappa a}{v} N(t) + \frac{2A\kappa b}{v} T(t) \\ &\quad - \kappa v^2 N(t) - 2\kappa^2 v^2 bN(t) + 2\kappa^2 v^2 aT(t) \end{aligned} \quad (4.59)$$

şeklinde elde edilir. Şimdi (4.53) denklemini (4.58) eşitlikleri yardımıyla;

$$J(P^*[P, Q](t))' = v\kappa aT(t) - v\kappa bN(t) \quad (4.60)$$

şeklinde düzenlersek, kısalık olması açısından

$$\langle (P^*[P, Q](t))'', J(P^*[P, Q](t))' \rangle$$

iç çarpımı için (4.59) ve (4.60) denklemleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \langle (P^*(t))'', J(P^*(t))' \rangle &= \left\langle \left(\frac{2A\kappa b}{v} - \frac{cb}{v} + 2\kappa^2 v^2 a \right) T(t) + \left(\frac{2A\kappa a}{v} - \frac{ca}{v} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \kappa v^2 - 2\kappa^2 v^2 b \right) N(t), v\kappa aT(t) - v\kappa bN(t) \right\rangle \\ &= \kappa^2 v^3 b + 2\kappa^3 v^3 (a^2 + b^2) \end{aligned} \quad (4.61)$$

elde edilir. Son olarak, eğrilik için $\|(P^*[P, Q](t))'\|^3$ ifadesini (4.52) ve (4.58) eşitlikleri yardımıyla hesaplırsak;

$$\begin{aligned} (P^*[P, Q](t))' &= -\kappa v [aN(t) + bT(t)] \\ \|(P^*[P, Q](t))'\|^3 &= (\kappa v \|aN(t) + bT(t)\|)^3 \\ &= \left(\kappa v \sqrt{\langle aN(t) + bT(t), aN(t) + bT(t) \rangle} \right)^3 \\ &= \kappa^3 v^3 (a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (4.62)$$

bulunur. Şimdi (4.58) denklemini yardımıyla ve

$$\|\vec{T}\| = 1 \text{ ve } \|\vec{N}\| = 1$$

olduğunu da kullanarak $a^2 + b^2$ ifadesi hesaplanırsa; burada

$P(t) - Q = \overrightarrow{QP}$ ve α , $\overrightarrow{QP}$ vektörü ile $\vec{T}$ vektörü arasındaki açı olmak üzere;

$$a^2 = [\langle P(t) - Q, T(t) \rangle]^2 = \left[\|\overrightarrow{QP}\| \|\vec{T}\| \cos \alpha \right]^2 = \|\overrightarrow{QP}\|^2 \cos^2 \alpha$$

$$b^2 = [\langle P(t) - Q, N(t) \rangle]^2 = \left[\|\overrightarrow{QP}\| \|\vec{N}\| \cos (90 - \alpha) \right]^2 = \|\overrightarrow{QP}\|^2 \sin^2 \alpha$$

bulunur. $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ olduğundan;

$$a^2 + b^2 = \|\overrightarrow{QP}\|^2 \quad (4.63)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{QP}\|^2 &= \|P(t) - Q\|^2 = \langle P(t) - Q, P(t) - Q \rangle \\ &= \langle P(t), P(t) \rangle - 2\langle P(t), Q \rangle + \langle Q, Q \rangle \\ &= \sum_{i,j=0}^n B_i^n(t) B_j^n(t) \langle P_i, P_j \rangle - 2 \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \langle P_i, Q \rangle + \|Q\|^2 \end{aligned} \quad (4.64)$$

şeklinde dir. Eğrilik için (4.51) denkleminde (4.61) , (4.62) eşitlikleri ilgili yerlere yazılırken (4.63) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \kappa_{P^*[P,Q]}^*(t) &= \frac{\kappa^2 v^3 b + 2\kappa^3 v^3 (a^2 + b^2)}{\kappa^3 v^3 (a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{b + 2\kappa \|\overrightarrow{QP}\|^2}{\kappa \|\overrightarrow{QP}\|^3} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada;

$$\langle P(t) - Q, N(t) \rangle = b \quad \text{ve} \quad \kappa(t) = \frac{\langle P''(t), JP'(t) \rangle}{\|P'(t)\|^3}$$

olduğundan

$$\kappa_{P^*[P,Q]}^*(t) = \frac{\langle P(t) - Q, JP'(t) \rangle \|P'(t)\|^2 + 2\langle P''(t), JP'(t) \rangle \|\overrightarrow{QP}\|^2}{\langle P''(t), JP'(t) \rangle \|\overrightarrow{QP}\|^3} \quad (4.65)$$

bulunur. (4.65) denkleminde Bézier eğrisinin türevlerinin (2.15) , (2.16) denklemlerinde ki açık formülleri ve (4.64) eşitliği ilgili yerlere yazılırsa (4.49) denklemi elde edilir. $\square$

Sonuç 4.57. $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayında doğrudan olmayan $(n + 1)$ tane kontrol noktası ile verilen birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden (2.7) denkleminde $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q = (0, 0) = \mathbf{0}$ pedal noktasına göre $P^*[P, \mathbf{0}](t)$ pedal eğrisinin eğriliği $\kappa_{P^*[P, \mathbf{0}]}^*(t)$ olmak üzere;

$$\kappa_{P^*[P, \mathbf{0}]}^*(t) = \frac{n \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle P_i, J \Delta P_j \rangle \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \cdot \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right) + 2(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle \cdot \left(\sum_{i,j=0}^n B_i^n(t) B_j^n(t) \langle P_i, P_j \rangle \right)}{(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle \cdot \left(\sum_{i,j=0}^n B_i^n(t) B_j^n(t) \langle P_i, P_j \rangle \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.66)$$

olarak bulunur.

İspat (4.49) denkleminde $Q = (0, 0) = \mathbf{0}$ yazılırsa (4.66) eşitliği elde edilir. $\square$

Sonuç 4.58. (4.49) denklemi ile verilen $n - \text{inci}$ dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q \in \mathbb{R}^2$ pedal noktasına göre pedal eğrisinin sırasıyla $t = 0$ ve $t = 1$ için eğriliği;

$$\kappa_{P^*[P, Q]}^*(0) = \frac{n \langle P_0 - Q, J \Delta P_0 \rangle \|\Delta P_0\|^2 + 2(n-1) \langle \Delta P_1, J \Delta P_0 \rangle \cdot (\|P_0\|^2 - 2 \langle P_0, Q \rangle + \|Q\|^2)}{(n-1) \langle \Delta P_1, J \Delta P_0 \rangle (\|P_0\|^2 - 2 \langle P_0, Q \rangle + \|Q\|^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ve

$$\kappa_{P^*[P, Q]}^*(1) = \frac{n \langle P_n - Q, J \Delta P_{n-1} \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 + 2(n-1) \langle \Delta P_{n-1}, J \Delta P_{n-2} \rangle (\|P_n\|^2 - 2 \langle P_n, Q \rangle + \|Q\|^2)}{(n-1) \langle \Delta P_{n-1}, J \Delta P_{n-2} \rangle (\|P_n\|^2 - 2 \langle P_n, Q \rangle + \|Q\|^2)^{\frac{3}{2}}}$$

olarak bulunur.

İspat (4.65) denkleminde $t = 0$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{QP}\| &= (\langle P(t), P(t) \rangle - 2\langle P(t), Q \rangle + \langle Q, Q \rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|P(t)\|^2 - 2\langle P(t), Q \rangle + \|Q\|^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

olduğundan (2.10) , (2.18) denklemlerinin ve

$$\langle Jp, q \rangle = -\langle p, Jq \rangle \text{ ve } \langle Jp, p \rangle = 0$$

eşitliğinin yardımıyla;

$$\begin{aligned}\kappa_{P^*[P,Q]}^*(0) &= \frac{\langle P(0) - Q, JP'(0) \rangle \|P'(0)\|^2 + 2\langle P''(0), JP'(0) \rangle \\ &\quad \cdot (\|P(0)\|^2 - 2\langle P(0), Q \rangle + \|Q\|^2)}{\langle P''(0), JP'(0) \rangle (\|P(0)\|^2 - 2\langle P(0), Q \rangle + \|Q\|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{n^3 \langle P_0 - Q, J\Delta P_0 \rangle \|\Delta P_0\|^2 + 2n^2(n-1) \\ &\quad \cdot \langle \Delta^2 P_0, J\Delta P_0 \rangle (\|P_0\|^2 - 2\langle P_0, Q \rangle + \|Q\|^2)}{n^2(n-1) \langle \Delta^2 P_0, J\Delta P_0 \rangle (\|P_0\|^2 - 2\langle P_0, Q \rangle + \|Q\|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{n \langle P_0 - Q, J\Delta P_0 \rangle \|\Delta P_0\|^2 + 2(n-1) \langle \Delta P_1, J\Delta P_0 \rangle \\ &\quad \cdot (\|P_0\|^2 - 2\langle P_0, Q \rangle + \|Q\|^2)}{(n-1) \langle \Delta P_1, J\Delta P_0 \rangle (\|P_0\|^2 - 2\langle P_0, Q \rangle + \|Q\|^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

elde edilir. (4.65) denkleminde $t = 1$ yazılırsa yine (2.11) , (2.19) denklemlerinin

$$\langle Jp, q \rangle = -\langle p, Jq \rangle \text{ ve } \langle Jp, p \rangle = 0$$

ve eşitliğinin yardımıyla;

$$\begin{aligned}\kappa_{P^*[P,Q]}^*(1) &= \frac{\langle P(1) - Q, JP'(1) \rangle \|P'(1)\|^2 + 2\langle P''(1), JP'(1) \rangle \\ &\quad \cdot (\|P(1)\|^2 - 2\langle P(1), Q \rangle + \|Q\|^2)}{\langle P''(1), JP'(1) \rangle (\|P(1)\|^2 - 2\langle P(1), Q \rangle + \|Q\|^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& n^3 \langle P_n - Q, J\Delta P_{n-1} \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 + 2n^2 (n-1) \\
& \cdot \langle \Delta^2 P_{n-2}, J\Delta P_{n-1} \rangle (\|P_n\|^2 - 2\langle P_n, Q \rangle + \|Q\|^2) \\
= & \frac{n^3 \langle P_n - Q, J\Delta P_{n-1} \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 + 2n^2 (n-1) \cdot \langle \Delta^2 P_{n-2}, J\Delta P_{n-1} \rangle (\|P_n\|^2 - 2\langle P_n, Q \rangle + \|Q\|^2)}{n^2 (n-1) \langle \Delta^2 P_{n-2}, J\Delta P_{n-1} \rangle (\|P_n\|^2 - 2\langle P_n, Q \rangle + \|Q\|^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& n \langle P_n - Q, J\Delta P_{n-1} \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 + 2(n-1) \\
& \cdot \langle \Delta P_{n-1}, J\Delta P_{n-2} \rangle (\|P_n\|^2 - 2\langle P_n, Q \rangle + \|Q\|^2) \\
= & \frac{n \langle P_n - Q, J\Delta P_{n-1} \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 + 2(n-1) \cdot \langle \Delta P_{n-1}, J\Delta P_{n-2} \rangle (\|P_n\|^2 - 2\langle P_n, Q \rangle + \|Q\|^2)}{(n-1) \langle \Delta P_{n-1}, J\Delta P_{n-2} \rangle (\|P_n\|^2 - 2\langle P_n, Q \rangle + \|Q\|^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.59. (4.66) denkleminde verilen *Bézier eğrisinin orijine göre pedal eğrisinin eğriliğinde sırasıyla $t = 0$ ve $t = 1$ için;*

$$\kappa_{P^*[P,0]}^*(0) = \frac{n \langle P_0, J\Delta P_0 \rangle \|\Delta P_0\|^2 + 2(n-1) \langle \Delta P_1, J\Delta P_0 \rangle \|P_0\|^2}{(n-1) \langle \Delta P_1, J\Delta P_0 \rangle \|P_0\|^3}$$

ve

$$\kappa_{P^*[P,0]}^*(1) = \frac{n \langle P_n, J\Delta P_{n-1} \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 + 2(n-1) \langle \Delta P_{n-1}, J\Delta P_{n-2} \rangle \|P_n\|^2}{(n-1) \langle \Delta P_{n-1}, J\Delta P_{n-2} \rangle \|P_n\|^3}$$

şeklindedir.

İspat (4.66) denklemine denk olan

$$\kappa_{P^*[P,0]}^*(t) = \frac{\langle P(t), JP'(t) \rangle \|P'(t)\|^2 + 2\langle P''(t), JP'(t) \rangle \|P(t)\|^2}{\langle P''(t), JP'(t) \rangle \|P(t)\|^3} \quad (4.67)$$

denklemini (4.65) denkleminde $Q = (0, 0) = \mathbf{0}$ yazılarak elde edilebilir. Şimdi (4.67) denkleminde $t = 0$ için (2.10), (2.18) eşitliklerinin yardımıyla;

$$\kappa_{P^*[P,0]}^*(0) = \frac{\langle P(0), JP'(0) \rangle \|P'(0)\|^2 + 2\langle P''(0), JP'(0) \rangle \|P(0)\|^2}{\langle P''(0), JP'(0) \rangle \|P(0)\|^3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n^3 \langle P_0, J\Delta P_0 \rangle \|\Delta P_0\|^2 + 2n^2 (n-1) \langle \Delta^2 P_0, J\Delta P_0 \rangle \|P_0\|^2}{n^2 (n-1) \langle \Delta^2 P_0, J\Delta P_0 \rangle \|P_0\|^3} \\
&= \frac{n \langle P_0, J\Delta P_0 \rangle \|\Delta P_0\|^2 + 2(n-1) \langle \Delta P_1, J\Delta P_0 \rangle \|P_0\|^2}{(n-1) \langle \Delta P_1, J\Delta P_0 \rangle \|P_0\|^3}
\end{aligned}$$

elde edilir ve (4.67) denkleminde $t = 1$ için (2.11) , (2.19) eşitliklerinin yardımıyla;

$$\begin{aligned}
\kappa_{P^*[P,0]}^*(1) &= \frac{\langle P(1), JP'(1) \rangle \|P'(1)\|^2 + 2 \langle P''(1), JP'(1) \rangle \|P(1)\|^2}{\langle P''(1), JP'(1) \rangle \|P(1)\|^3} \\
&= \frac{n^3 \langle P_n, J\Delta P_{n-1} \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 + 2n^2 (n-1) \langle \Delta^2 P_{n-2}, J\Delta P_{n-1} \rangle \|P_n\|^2}{n^2 (n-1) \langle \Delta^2 P_{n-2}, J\Delta P_{n-1} \rangle \|P_n\|^3} \\
&= \frac{n \langle P_n, J\Delta P_{n-1} \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 + 2(n-1) \langle \Delta P_{n-1}, J\Delta P_{n-2} \rangle \|P_n\|^2}{(n-1) \langle \Delta P_{n-1}, J\Delta P_{n-2} \rangle \|P_n\|^3}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

4.1.5. Düzlemsel Bézier Eğrisinin Kontrapedal Eğrisi

Bu bölümde düzlemsel Bézier eğrisinin kontrapedal eğrisi çalışılmıştır.

Teorem 4.60. $\forall t \in [0, 1]$ için (2.7) denklemi ile tanımlanan $P_0, P_1, \dots, P_n$ kontrol noktalarına sahip birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q \in \mathbb{R}^2$ pedal noktasına göre kontrapedal eğrisinin parametrik denklemi $P^*[P, Q](t)$ olmak üzere;

$$P^*[P, Q](t) = Q + \frac{\langle \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i - Q, \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \Delta P_j \rangle}{\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle} \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) \Delta P_k \quad (4.68)$$

şeklindedir (Ceylan ve Kara 2021).

İspat (2.7) denklemine sahip düzlemsel Bézier eğrisinin $Q \in \mathbb{R}^2$ pedal noktasına göre kontrapedal eğrisini hesaplamak için (3.32) denklemine γ eğrisi yerine $P(t)$ Bézier eğrisi alınarak işlem yapılabilir. Buna göre (2.7) ve (2.15) denklemleri yardımıyla;

(4.69)

$$\begin{aligned}
 P^*[P, Q](t) &= Q + \frac{\langle P(t) - Q, P'(t) \rangle}{\|P'(t)\|^2} P'(t) \\
 &= Q + \frac{\langle \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i - Q, n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \Delta P_j \rangle}{\|n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i\|^2} n \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) \Delta P_k \\
 &= Q + \frac{\langle \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i - Q, \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \Delta P_j \rangle}{\langle \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i, \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i \rangle} \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) \Delta P_k
 \end{aligned}$$

bulunur ve (4.68) denklemi elde edilmiş olur. $\square$

Sonuç 4.61. $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayında doğrudan olmayan $(n+1)$ tane kontrol noktası ile verilen birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden (2.7) denklemine sahip $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q \in \mathbb{R}^2$ pedal noktasına göre kontrapedal eğrisi $P^*[P, Q](t)$ denklemine $t = 0$ için;

$$P^*[P, Q](0) = Q + \frac{\langle P_0 - Q, \Delta P_0 \rangle}{\langle \Delta P_0, \Delta P_0 \rangle} \Delta P_0 \quad (4.70)$$

şeklinde bulunur (Ceylan ve Kara 2021).

İspat Şimdi düzlemsel Bézier eğrisinin kontrapedal eğrisini $t = 0$ da incelemek için (4.69) denklemine t yerine 0 yazarsak, $P(0) = P_0$ ve $P'(0) = n\Delta P_0$ olduğu da kullanılarak;

$$\begin{aligned}
 P^*[P, Q](0) &= Q + \frac{\langle P(0) - Q, P'(0) \rangle}{\|P'(0)\|^2} P'(0) \\
 &= Q + \frac{\langle P_0 - Q, n\Delta P_0 \rangle}{\|n\Delta P_0\|^2} n\Delta P_0
 \end{aligned}$$

$$= Q + \frac{\langle P_0 - Q, \Delta P_0 \rangle}{\langle \Delta P_0, \Delta P_0 \rangle} \Delta P_0$$

şeklinde elde edilir. □

Sonuç 4.62. $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayında doğrudan olmayan $(n + 1)$ tane kontrol noktası ile verilen birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden (2.7) denkleminde sahip $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q \in \mathbb{R}^2$ pedal noktasına göre kontrapedal eğrisi $P^*[P, Q](t)$ denkleminde $t = 1$ için;

$$P^*[P, Q](1) = Q + \frac{\langle P_n - Q, \Delta P_{n-1} \rangle}{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1} \rangle} \Delta P_{n-1} \quad (4.71)$$

şeklinde bulunur (Ceylan ve Kara 2021).

İspat Şimdi düzlemsel Bézier eğrisinin kontrapedal eğrisini $t = 1$ de incelemek için (4.69) denleminde t yerine 1 yazarsak, $P(1) = P_n$ ve $P'(1) = n\Delta P_{n-1}$ olduğunda kullanılarak;

$$\begin{aligned} P^*[P, Q](1) &= Q + \frac{\langle P(1) - Q, P'(1) \rangle}{\|P'(1)\|^2} P'(1) \\ &= Q + \frac{\langle P_n - Q, n\Delta P_{n-1} \rangle}{\|n\Delta P_{n-1}\|^2} n\Delta P_{n-1} \\ &= Q + \frac{\langle P_n - Q, \Delta P_{n-1} \rangle}{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1} \rangle} \Delta P_{n-1} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. □

Sonuç 4.63. $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayında doğrudan olmayan $(n + 1)$ tane kontrol noktası ile verilen birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden (2.7) denkleminde sahip $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q = P_0$ pedal noktasına göre $P^*[P, Q](t)$ kontrapedal eğrisi denkleminde sırasıyla $t = 0$ ve $t = 1$ için (4.70) ve (4.71) denklemlerinde $Q = P_0$ yazılarak;

$$P^*[P, P_0](0) = P_0 + \frac{\langle P_0 - P_0, \Delta P_0 \rangle}{\langle \Delta P_0, \Delta P_0 \rangle} \Delta P_0 = P_0$$

$$P^*[P, P_0](1) = P_0 + \frac{\langle P_n - P_0, \Delta P_{n-1} \rangle}{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1} \rangle} \Delta P_{n-1}$$

şeklinde bulunur (Ceylan ve Kara 2021).

Sonuç 4.64. $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayında doğrudan olmayan $(n + 1)$ tane kontrol noktası ile verilen birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden (2.7) denkleminde sahip $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q = P_n$ pedal noktasına göre $P^*[P, Q](t)$ kontrapedal eğrisi denkleminde sırasıyla $t = 0$ ve $t = 1$ için (4.70) ve (4.71) denklemlerinde $Q = P_n$ yazılarak;

$$P^*[P, P_n](0) = P_n + \frac{\langle P_0 - P_n, \Delta P_0 \rangle}{\langle \Delta P_0, \Delta P_0 \rangle} \Delta P_0$$

$$P^*[P, P_n](1) = P_n + \frac{\langle P_n - P_n, \Delta P_{n-1} \rangle}{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1} \rangle} \Delta P_{n-1} = P_n$$

şeklinde bulunur (Ceylan ve Kara 2021).

Teorem 4.65. $\forall t \in [0, 1]$ için (2.7) denklemi ile tanımlanan $P_0, P_1, \dots, P_n$ kontrol noktalarına sahip birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q = (0, 0) = \mathbf{0}$ pedal noktasına göre kontrapedal eğrisinin parametrik denklemi $P^*[P, \mathbf{0}](t)$ olmak üzere;

$$P^*[P, \mathbf{0}](t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle P_i, \Delta P_j \rangle}{\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle} \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) \Delta P_k \quad (4.72)$$

şeklindedir (Ceylan ve Kara 2021).

İspat Özel olarak $Q = (0, 0) = \mathbf{0}$ pedal noktasına göre düzlemsel Bézier eğrisinin kontrapedal eğrisini (4.69) denkleminde Q noktası ilgili yere koyularak işlem yapılırsa;

$$\begin{aligned} P^*[P, \mathbf{0}](t) &= \frac{\langle P(t), P'(t) \rangle}{\|P'(t)\|^2} P'(t) \\ &= \frac{\langle \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \Delta P_j \rangle}{\langle n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i, n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i \rangle} n \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) \Delta P_k \end{aligned} \quad (4.73)$$

bulunur ve gerekli sadeleştirme yapılırsa (4.72) denklemi elde edilmiş olur. $\square$

Sonuç 4.66. $P_0, P_1, \dots, P_n$ E^2 uzayında doğrudan olmayan $(n + 1)$ tane kontrol noktası ile verilen birim hızlı olmayan $n - \text{inci}$ dereceden (2.7) denkleminde $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q = (0, 0) = \mathbf{0}$ pedal noktasına göre $P^*[P, \mathbf{0}](t)$ kontrapedal eğrisi denkleminde sırasıyla $t = 0$ ve $t = 1$ için;

$$P^*[P, \mathbf{0}](0) = \frac{\langle P_0, \Delta P_0 \rangle}{\langle \Delta P_0, \Delta P_0 \rangle} \Delta P_0$$

$$P^*[P, \mathbf{0}](1) = \frac{\langle P_n, \Delta P_{n-1} \rangle}{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1} \rangle} \Delta P_{n-1}$$

şeklinde bulunur (Ceylan ve Kara 2021).

İspat (4.73) denkleminde sırasıyla $t = 0$ ve $t = 1$ yazılarak, $P(0) = P_0$, $P'(0) = n\Delta P_0$, $P(1) = P_n$ ve $P'(1) = n\Delta P_{n-1}$ olduğunda kullanılarak;

$$\begin{aligned} P^*[P, \mathbf{0}](0) &= \frac{\langle P(0), P'(0) \rangle}{\|P'(0)\|^2} P'(0) \\ &= \frac{\langle P_0, \Delta P_0 \rangle}{\langle \Delta P_0, \Delta P_0 \rangle} \Delta P_0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} P^*[P, \mathbf{0}](1) &= \frac{\langle P(1), P'(1) \rangle}{\|P'(1)\|^2} P'(1) \\ &= \frac{\langle P_n, \Delta P_{n-1} \rangle}{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1} \rangle} \Delta P_{n-1} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $\square$

Teorem 4.67. (4.69) denklemi ile verilen $n - \text{inci}$ dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q \in \mathbb{R}^2$ pedal noktasına göre kontrapedal eğrisinin eğriliği $\kappa_{P^*[P, Q]}^*(t)$ olmak üzere;

$$\kappa_{P^*[P, Q]}^*(t) = t_1 + t_2$$

şeklinde olup burada t_1 ve t_2 aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
 t_1 = & \frac{n \left(\sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i - Q, \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \Delta P_j \right) \cdot \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)}{\left[(n-1)(n-2) \sum_{i=0}^{n-3} B_i^{n-3}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^3 P_i, J \Delta P_j \rangle \right.} \\
 & \cdot \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right) - 3(n-1)^2 \cdot \\
 & \left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta_x P_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-2} B_j^{n-2}(t) \Delta_x^2 P_j \right) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta_y P_i \right) \cdot \right. \\
 & \left. \left(\sum_{j=0}^{n-2} B_j^{n-2}(t) \Delta_y^2 P_j \right) \right) \cdot \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle \left. \right] \\
 & \left[\left((n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle \right)^2 \left(\sum_{i,j=0}^n B_i^n(t) B_j^n(t) \langle P_i, P_j \rangle \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2 \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \langle P_i, Q \rangle + \|Q\|^2 \right) + 2n(n-1) \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right) \right. \\
 & \left(\sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle \right) \left(\langle \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i - Q, \right. \\
 & \left. \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) J \Delta P_j \rangle \right) + n^2 \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^3 \left. \right]^{\frac{3}{2}} \\
 t_2 = & \frac{2(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle}{\left[\left((n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle \right)^2 \left(\sum_{i,j=0}^n B_i^n(t) B_j^n(t) \cdot \right. \right.} \\
 & \langle P_i, P_j \rangle - 2 \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \langle P_i, Q \rangle + \|Q\|^2 \left. \right) + 2n(n-1) \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \cdot \right. \\
 & \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \left. \right) \left(\sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle \right) \left(\langle \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i - Q, \right. \\
 & \left. \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) J \Delta P_j \rangle \right) + n^2 \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^3 \left. \right]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Ayrıca; $\Delta_x P_i = (P_{i+1})_x - (P_i)_x$ ve $\Delta_y P_i = (P_{i+1})_y - (P_i)_y$ 'dir.

İspat (4.69) denklemi

$$T(t) = \frac{P'(t)}{\|P'(t)\|}$$

olduğundan ;

$$P^*[P, Q](t) = Q + \langle P(t) - Q, T(t) \rangle T(t) \quad (4.74)$$

şeklinde düzenlenebilir. Düzlemsel Bézier eğrisinin Q pedal noktasına göre kontrapedal eğrisinin eğriliğini hesaplamak için düzlemde eğrilik formülü kullanılarak;

$$\kappa_{P^*[P, Q]}^*(t) = \frac{\langle (P^*[P, Q](t))'', J(P^*[P, Q](t))' \rangle}{\|(P^*[P, Q](t))'\|^3} \quad (4.75)$$

eşitliğinde ilgili türevler hesaplanmalıdır. (4.74) denkleminin türevi alınırsa;

$$\begin{aligned} & (P^*[P, Q](t))' \\ &= [\langle P'(t), T(t) \rangle + \langle P(t) - Q, T'(t) \rangle] T(t) + \langle P(t) - Q, T(t) \rangle T'(t) \end{aligned} \quad (4.76)$$

elde edilir. (4.76) denkleminde $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = 1$ yardımıyla, (2.4) eşitlikleri ilgili yerlere yazılırsa;

$$(P^*[P, Q](t))' = v\kappa [\langle P(t) - Q, N(t) \rangle T(t) + \langle P(t) - Q, T(t) \rangle N(t)] + vT(t)$$

ve

$$JN(t) = -T(t) \quad , \quad JT(t) = N(t)$$

olduğu da kullanılarak;

$$\begin{aligned} & J(P^*[P, Q](t))' \\ &= v\kappa [\langle P(t) - Q, N(t) \rangle JT(t) + \langle P(t) - Q, T(t) \rangle JN(t)] + vJT(t) \\ &= v\kappa \langle P(t) - Q, N(t) \rangle N(t) - v\kappa \langle P(t) - Q, T(t) \rangle T(t) + vN(t) \end{aligned} \quad (4.77)$$

bulunur. (4.76) denkleminin türevi alınırsa;

$$\begin{aligned} (P^*[P, Q](t))'' &= (\kappa'v + \kappa v') [\langle P(t) - Q, T(t) \rangle N(t) + \langle P(t) - Q, N(t) \rangle \cdot \\ & \quad T(t)] + \kappa v \cdot [\langle P(t) - Q, N(t) \rangle T(t) + \langle P(t) - Q, T(t) \rangle N(t)]' \\ & \quad + v'T(t) + vT'(t) \end{aligned} \quad (4.78)$$

elde edilir. (4.78) denklemindeki

$$[\langle P(t) - Q, T(t) \rangle N(t) + \langle P(t) - Q, N(t) \rangle T(t)]'$$

türevi (4.55) denkleminde verilmiştir. (4.38) denkleminde $\kappa'(t)$ ve (4.56) denkleminde de $v'(t)$ hesaplanmıştır. Ayrıca; $(\kappa'v + \kappa v')$ ifadesi (4.57) denkleminin eksi ile çarpılmasıyla

$$(\kappa'v + \kappa v') = \frac{\langle P'''(t), N(t) \rangle}{v} - \frac{2\kappa [P_1'(t) P_1''(t) + P_2'(t) P_2''(t)]}{v} \quad (4.79)$$

şeklinde elde edilir. (4.78) denkleminde (4.55), (4.56) ve (4.79) eşitlikleri ilgili yerlere yazılırken notasyonlarda kısalık olması açısından yine (4.58) eşitlikleri göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned} (P^*[P, Q](t))'' &= \left(\frac{c}{v} - \frac{2A\kappa}{v} \right) [aN(t) + bT(t)] + \\ &\quad \kappa v \cdot [vN(t) + 2v\kappa bN(t) - 2v\kappa aT(t)] + \frac{A}{v}T(t) + v^2\kappa N(t) \\ &= \left[\frac{cb}{v} - \frac{2A\kappa b}{v} + \frac{A}{v} - 2\kappa^2 v^2 a \right] T(t) \\ &\quad + \left[\frac{ca}{v} - \frac{2A\kappa a}{v} + 2\kappa v^2 + 2\kappa^2 v^2 b \right] N(t) \end{aligned} \quad (4.80)$$

elde edilir. Şimdi (4.77) denklemini (4.58) eşitlikleri yardımıyla;

$$J(P^*[P, Q](t))' = -v\kappa aT(t) + (v\kappa b + v)N(t) \quad (4.81)$$

elde edilir.

$$\langle (P^*[P, Q](t))'', J(P^*[P, Q](t))' \rangle$$

iç çarpımı (4.80), (4.81) denklemleri ilgili yerlere yazılarak ve

$$\langle T(t), T(t) \rangle = 1, \langle N(t), N(t) \rangle = 1 \text{ ve } \langle T(t), N(t) \rangle = 0$$

olduğu da göz önünde bulundurularak;

$$\begin{aligned}
\langle (P^*(t))'', J(P^*(t))' \rangle &= \left\langle \left(\frac{cb}{v} - \frac{2A\kappa b}{v} + \frac{A}{v} - 2\kappa^2 v^2 a \right) T(t) + \left(-\frac{2A\kappa a}{v} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{ca}{v} + 2\kappa v^2 + 2\kappa^2 v^2 b \right) N(t), (v + v\kappa b) N(t) - v\kappa a T(t) \right\rangle \\
&= ca - 3A\kappa a + 4\kappa^2 v^3 b + 2\kappa^3 v^3 (a^2 + b^2) + 2\kappa v^3 \\
&= a(c - 3A\kappa) + 2\kappa v^3 (2\kappa b + 1) + 2\kappa^3 v^3 (a^2 + b^2) \quad (4.82)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\|(P^*[P, Q](t))'\|^3$ ifadesi (4.76) ve (4.58) eşitlikleri yardımıyla yeniden düzenlenirse;

$$(P^*[P, Q](t))' = \kappa v [aN(t) + bT(t)] + vT(t)$$

elde edilir. Son olarak eğrilik için $\|(P^*[P, Q](t))'\|^3$ ifadesi

$$\begin{aligned}
\|(P^*[P, Q](t))'\|^3 &= (v\|\kappa aN(t) + (\kappa b + 1)T(t)\|)^3 \\
&= \left(v\sqrt{\langle \kappa aN(t) + (\kappa b + 1)T(t), \kappa aN(t) + (\kappa b + 1)T(t) \rangle} \right)^3 \\
&= v^3 (\kappa^2 (a^2 + b^2) + 2\kappa b + 1)^{\frac{3}{2}} \quad (4.83)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Eğriliği hesaplamak için (4.75) denkleminde (4.82) ve (4.83) eşitlikleri ilgili yerlere yazılırken $a^2 + b^2 = \|\overrightarrow{QP}\|^2$ olduğu da göz önünde bulundurulursa;

$$\begin{aligned}
\kappa_{P^*[P, Q]}^*(t) &= \frac{a(c - 3A\kappa) + 2\kappa v^3 (2\kappa b + 1) + 2\kappa^3 v^3 (a^2 + b^2)}{v^3 (\kappa^2 (a^2 + b^2) + 2\kappa b + 1)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{a(c - 3A\kappa)}{v^3 (\kappa^2 \|\overrightarrow{QP}\|^2 + 2\kappa b + 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\kappa}{(\kappa^2 \|\overrightarrow{QP}\|^2 + 2\kappa b + 1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= t_1 + t_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, burada t_1 ve t_2 denklemlerinin açık hallerini yazarsak t_1 için (2.3) , (4.58) ve (4.64) denklemlerinin yardımıyla;

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{a(c - 3A\kappa)}{v^3 \left(\kappa^2 \|\vec{Q\dot{P}}\|^2 + 2\kappa b + 1 \right)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{\langle P(t) - Q, T(t) \rangle \left[\langle P'''(t), N(t) \rangle - 3[P_1'(t)P_1''(t) + P_2'(t)P_2''(t)] \frac{\langle P''(t), JP'(t) \rangle}{v^3} \right]}{v^3 \left[\frac{\langle P''(t), JP'(t) \rangle^2}{v^6} \|\vec{Q\dot{P}}\|^2 + 2 \frac{\langle P''(t), JP'(t) \rangle}{v^4} \langle P(t) - Q, JP'(t) \rangle + 1 \right]^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{\langle P(t) - Q, P'(t) \rangle \|P'(t)\|^2 \cdot [\langle P'''(t), JP'(t) \rangle \|P'(t)\|^2 - 3[P_1'(t)P_1''(t) + P_2'(t)P_2''(t)] \langle P''(t), JP'(t) \rangle]}{[\langle P''(t), JP'(t) \rangle^2 (\|P(t)\|^2 - 2\langle P(t), Q \rangle + \|Q\|^2) + 2\|P'(t)\|^2 \cdot \langle P''(t), JP'(t) \rangle \langle P(t) - Q, JP'(t) \rangle + \|P'(t)\|^6]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.84)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde t_2 için (2.3) ve (4.58) denklemlerinin yardımıyla;

$$\begin{aligned}
 t_2 &= \frac{2\kappa}{\left(\kappa^2 \|\vec{Q\dot{P}}\|^2 + 2\kappa b + 1 \right)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{2\langle P''(t), JP'(t) \rangle}{[\langle P''(t), JP'(t) \rangle^2 (\|P(t)\|^2 - 2\langle P(t), Q \rangle + \|Q\|^2) + 2\|P'(t)\|^2 \cdot \langle P''(t), JP'(t) \rangle \langle P(t) - Q, JP'(t) \rangle + \|P'(t)\|^6]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.85)
 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde; Bézier eğrisinin $Q \in \mathbb{R}^2$ pedal noktasına göre kontrapedal eğrisinin eğriliğini

$$\kappa_{P^*[P,Q]}^*(t) = t_1 + t_2$$

eşitliğinde sırasıyla (4.84) ve (4.85) denklemleri ile verilen t_1 ve t_2 ifadelerinde (2.15) , (2.16) , (2.20) ve (4.64) eşitlikleri ilgili yerlere yazılarak teoremdaki ifade elde edilir. $\square$

Sonuç 4.68. $P_0, P_1, \dots, P_n \in E^2$ uzayında doğrudan olmayan $(n+1)$ tane kontrol noktası ile verilen birim hızlı olmayan n -inci dereceden (2.7) denkleminde sahip $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q = (0, 0) = \mathbf{0}$ pedal noktasına göre $P^*[P, \mathbf{0}](t)$ kontrapedal eğrisinin eğriliği $\kappa_{B^*[P, \mathbf{0}]}^*(t)$ olmak üzere;

$$\kappa_{P^*[P, \mathbf{0}]}^*(t) = k_1 + k_2$$

şeklinde olup burada k_1 ve k_2 ifadeleri;

$$k_1 = \frac{n \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle P_i, \Delta P_j \rangle \cdot \sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \cdot \left[(n-1)(n-2) \sum_{i=0}^{n-3} B_i^{n-3}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^3 P_i, J \Delta P_j \rangle \cdot \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right) - 3(n-1)^2 \cdot \left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta_x P_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-2} B_j^{n-2}(t) \Delta_x^2 P_j \right) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta_y P_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-2} B_j^{n-2}(t) \Delta_y^2 P_j \right) \right) \cdot \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle \right]}{\left[\left((n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle \right)^2 \sum_{i,j=0}^n B_i^n(t) B_j^n(t) \langle P_i, P_j \rangle + 2n(n-1) \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle \right) \left(\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle P_i, J \Delta P_j \rangle \right) + n^2 \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^3 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$k_2 = \frac{2(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle}{\left[\left((n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle \right)^2 \sum_{i,j=0}^n B_i^n(t) B_j^n(t) \langle P_i, P_j \rangle \right.} \\ \left. + 2n(n-1) \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle \right) \left(\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle P_i, J \Delta P_j \rangle \right) \right. \\ \left. + n^2 \left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^3 \right]^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde elde edilir.

İspat Teorem (4.67) de $Q = (0, 0)$ alınırsa teoremdaki ifade elde edilir. $\square$

Sonuç 4.69. Teorem (4.67) ile verilen $n - \text{inci dereceden } P(t)$ Bézier eğrisinin $Q \in \mathbb{R}^2$ pedal noktasına göre kontrapedal eğrisinin eğriliğinde $t = 0$ için;

$$\kappa_{P^*[P,Q]}^*(0) = \frac{n(n-1) \langle P_0 - Q, \Delta P_0 \rangle \|\Delta P_0\|^2 [(n-2) \langle \Delta^3 P_0, J \Delta P_0 \rangle \|\Delta P_0\|^2 - 3(n-1) (\Delta_x P_0 \cdot \Delta_x^2 P_0 + \Delta_y P_0 \cdot \Delta_y^2 P_0) \langle \Delta^2 P_0, J \Delta P_0 \rangle]}{[(n-1)^2 \langle \Delta^2 P_0, J \Delta P_0 \rangle^2 (\|P_0\|^2 - 2\langle P_0, Q \rangle + \|Q\|^2) + 2n(n-1) \cdot \|\Delta P_0\|^2 \langle \Delta^2 P_0, J \Delta P_0 \rangle \langle P_0 - Q, J \Delta P_0 \rangle + n^2 \|\Delta P_0\|^6]^{\frac{3}{2}}} \\ + \frac{2(n-1) \langle \Delta^2 P_0, J \Delta P_0 \rangle}{[(n-1)^2 \langle \Delta^2 P_0, J \Delta P_0 \rangle^2 (\|P_0\|^2 - 2\langle P_0, Q \rangle + \|Q\|^2) + 2n \cdot (n-1) \|\Delta P_0\|^2 \langle \Delta^2 P_0, J \Delta P_0 \rangle \langle P_0 - Q, J \Delta P_0 \rangle + n^2 \|\Delta P_0\|^6]^{\frac{1}{2}}}$$

ve $t = 1$ için;

$$\kappa_{P^*[P,Q]}^*(1) = \frac{2(n-1) \langle \Delta^2 P_{n-2}, J \Delta P_{n-1} \rangle}{[(n-1)^2 \langle \Delta^2 P_{n-2}, J \Delta P_{n-1} \rangle^2 (\|P_n\|^2 - 2\langle P_n, Q \rangle + \|Q\|^2) + 2n(n-1) \|\Delta P_{n-1}\|^2 \langle \Delta^2 P_{n-2}, J \Delta P_{n-1} \rangle \cdot \langle P_n - Q, J \Delta P_{n-1} \rangle + n^2 \|\Delta P_{n-1}\|^6]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
& n(n-1) \langle P_n - Q, \Delta P_{n-1} \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 \\
& \cdot [(n-2) \langle \Delta^3 P_{n-3}, J\Delta P_{n-1} \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 - 3(n-1) \cdot \\
& (\Delta_x P_{n-1} \cdot \Delta_x^2 P_{n-2} + \Delta_y P_{n-1} \cdot \Delta_y^2 P_{n-2}) \langle \Delta^2 P_{n-2}, J\Delta P_{n-1} \rangle] \\
& + \frac{[(n-1)^2 \langle \Delta^2 P_{n-2}, J\Delta P_{n-1} \rangle^2 (\|P_n\|^2 - 2\langle P_n, Q \rangle + \|Q\|^2) \\
& + 2n(n-1) \|\Delta P_{n-1}\|^2 \langle \Delta^2 P_{n-2}, J\Delta P_{n-1} \rangle \\
& \cdot \langle P_n - Q, J\Delta P_{n-1} \rangle + n^2 \|\Delta P_{n-1}\|^6]^{\frac{3}{2}}}{}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca; $t = 0$ iken $Q = P_0$ ise;

$$\kappa_{P^*[P, P_0]}^*(0) = \frac{2(n-1) \langle \Delta^2 P_0, J\Delta P_0 \rangle}{n \|\Delta P_0\|^3}$$

ve $t = 1$ iken $Q = P_n$ ise;

$$\kappa_{P^*[P, P_n]}^*(1) = \frac{2(n-1) \langle \Delta^2 P_{n-2}, J\Delta P_{n-1} \rangle}{n \|\Delta P_{n-1}\|^3}$$

şeklinde elde edilir.

İspat n -inci dereceden $P(t)$ Bézier eğrisinin $Q \in \mathbb{R}^2$ pedal noktasına göre kontrapedal eğrisinin eğriliği, Teorem (4.67) de

$$\kappa_{P^*[P, Q]}^*(t) = t_1 + t_2$$

olarak ifade edilmiştir. Sırasıyla t_1 ve t_2 eşitliklerini veren (4.84) ve (4.85) denklemlerinde $t = 0$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\kappa_{P^*[P, Q]}^*(0) &= \frac{\langle P(0) - Q, P'(0) \rangle \|P'(0)\|^2 \cdot [\langle P'''(0), JP'(0) \rangle \|P'(0)\|^2 \\
& - 3[P_1'(0)P_1''(0) + P_2'(0)P_2''(0)] \langle P''(0), JP'(0) \rangle]}{[\langle P''(0), JP'(0) \rangle^2 (\|P(0)\|^2 - 2\langle P(0), Q \rangle + \|Q\|^2) + 2\|P'(0)\|^2 \\
& \cdot \langle P''(0), JP'(0) \rangle \langle P(0) - Q, JP'(0) \rangle + \|P'(0)\|^6]^{\frac{3}{2}}} \\
& + \frac{2\langle P''(0), JP'(0) \rangle}{[\langle P''(0), JP'(0) \rangle^2 (\|P(0)\|^2 - 2\langle P(0), Q \rangle + \|Q\|^2) + 2\|P'(0)\|^2 \\
& \cdot \langle P''(0), JP'(0) \rangle \langle P(0) - Q, JP'(0) \rangle + \|P'(0)\|^6]^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada (2.18) ve (2.10) eşitliklerinin de yardımıyla;

$$\kappa_{P^*[P,Q]}^*(0) = \frac{n^3 \langle P_0 - Q, \Delta P_0 \rangle \|\Delta P_0\|^2 [n^4 (n-1)(n-2) \langle \Delta^3 P_0, J\Delta P_0 \rangle \|\Delta P_0\|^2 - 3n^4 (n-1)^2 (\Delta_x P_0 \cdot \Delta_x^2 P_0 + \Delta_y P_0 \cdot \Delta_y^2 P_0) \langle \Delta^2 P_0, J\Delta P_0 \rangle]}{[(n^2 (n-1) \langle \Delta^2 P_0, J\Delta P_0 \rangle)^2 (\|P_0\|^2 - 2\langle P_0, Q \rangle + \|Q\|^2) + 2n^5 (n-1) \|\Delta P_0\|^2 \langle \Delta^2 P_0, J\Delta P_0 \rangle \langle P_0 - Q, J\Delta P_0 \rangle + n^6 \|\Delta P_0\|^6]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.86)$$

$$+ \frac{2n^2 (n-1) \langle \Delta^2 P_0, J\Delta P_0 \rangle}{[(n^2 (n-1) \langle \Delta^2 P_0, J\Delta P_0 \rangle)^2 (\|P_0\|^2 - 2\langle P_0, Q \rangle + \|Q\|^2) + 2n^5 (n-1) \|\Delta P_0\|^2 \langle \Delta^2 P_0, J\Delta P_0 \rangle \langle P_0 - Q, J\Delta P_0 \rangle + n^6 \|\Delta P_0\|^6]^{\frac{1}{2}}}$$

elde edilir. Uygun sadeleştirmeler yapılırsa sonuçtaki ifade bulunur. Aynı şekilde $t = 1$ için $\kappa_{P^*[P,Q]}^*(t)$ ifadesini hesaplamak için sırasıyla t_1 ve t_2 eşitliklerini veren (4.84) ve (4.85) denklemlerinde $t = 1$ yazılırsa;

$$\kappa_{P^*[P,Q]}^*(1) = \frac{\langle P(1) - Q, P'(1) \rangle \|P'(1)\|^2 \cdot [\langle P''(1), JP'(1) \rangle \|P'(1)\|^2 - 3[P'_1(1)P''_1(1) + P'_2(1)P''_2(1)] \langle P''(1), JP'(1) \rangle]}{[\langle P''(1), JP'(1) \rangle^2 (\|P(1)\|^2 - 2\langle P(1), Q \rangle + \|Q\|^2) + 2\|P'(1)\|^2 \cdot \langle P''(1), JP'(1) \rangle \langle P(1) - Q, JP'(1) \rangle + \|P'(1)\|^6]^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{2\langle P''(1), JP'(1) \rangle}{[\langle P''(1), JP'(1) \rangle^2 (\|P(1)\|^2 - 2\langle P(1), Q \rangle + \|Q\|^2) + 2\|P'(1)\|^2 \cdot \langle P''(1), JP'(1) \rangle \langle P(1) - Q, JP'(1) \rangle + \|P'(1)\|^6]^{\frac{1}{2}}}$$

elde edilir. Burada (2.19) ve (2.11) eşitliklerinin de yardımıyla;

$$\begin{aligned}
& n^3 \langle P_n - Q, \Delta P_{n-1} \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 [n^4 (n-1) (n-2) \\
& \quad \cdot \langle \Delta^3 P_{n-3}, J \Delta P_{n-1} \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 - 3n^4 (n-1)^2 \\
& \quad \cdot (\Delta_x P_{n-1} \cdot \Delta_x^2 P_{n-2} + \Delta_y P_{n-1} \cdot \Delta_y^2 P_{n-2}) \langle \Delta^2 P_{n-2}, J \Delta P_{n-1} \rangle] \\
\kappa_{P^*[P,Q]}^*(1) = & \frac{[(n^2 (n-1) \langle \Delta^2 P_{n-2}, J \Delta P_{n-1} \rangle)^2 (\|P_n\|^2 - 2 \langle P_n, Q \rangle + \|Q\|^2) \\
& + 2n^5 (n-1) \|\Delta P_{n-1}\|^2 \langle \Delta^2 P_{n-2}, J \Delta P_{n-1} \rangle \langle P_n - Q, J \Delta P_{n-1} \rangle \\
& + n^6 \|\Delta P_{n-1}\|^6]^{\frac{3}{2}}}{(4.87)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2n^2 (n-1) \langle \Delta^2 P_{n-2}, J \Delta P_{n-1} \rangle}{[(n^2 (n-1) \langle \Delta^2 P_{n-2}, J \Delta P_{n-1} \rangle)^2 (\|P_n\|^2 - 2 \langle P_n, Q \rangle + \|Q\|^2) \\
& + 2n^5 (n-1) \|\Delta P_{n-1}\|^2 \langle \Delta^2 P_{n-2}, J \Delta P_{n-1} \rangle \langle P_n - Q, J \Delta P_{n-1} \rangle \\
& + n^6 \|\Delta P_{n-1}\|^6]^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse sonuçtaki ifade bulunur. Son olarak; $t = 0$ iken $Q = P_0$ ise (4.86) denkleminde $Q = P_0$ yazılarak ve $t = 1$ iken $Q = P_n$ ise (4.87) denkleminde $Q = P_n$ yazılarak sonuçta verilen ifade elde edilir. $\square$

Sonuç 4.70. *Sonuç (4.68) de verilen $n - \text{inci dereceden } P(t)$ Bézier eğrisinin orijine göre kontrapedal eğrisinin eğriliğinde $t = 0$ için;*

$$\begin{aligned}
& n (n-1) \langle P_0, \Delta P_0 \rangle \|\Delta P_0\|^2 [(n-2) \langle \Delta^3 P_0, J \Delta P_0 \rangle \|\Delta P_0\|^2 \\
& \quad - 3 (n-1) (\Delta_x P_0 \cdot \Delta_x^2 P_0 + \Delta_y P_0 \cdot \Delta_y^2 P_0) \langle \Delta^2 P_0, J \Delta P_0 \rangle] \\
\kappa_{P^*[P,0]}^*(0) = & \frac{[(n-1)^2 \langle \Delta^2 P_0, J \Delta P_0 \rangle^2 \|P_0\|^2 + 2n (n-1) \|\Delta P_0\|^2 \\
& \quad \langle \Delta^2 P_0, J \Delta P_0 \rangle \langle P_0, J \Delta P_0 \rangle + n^2 \|\Delta P_0\|^6]^{\frac{3}{2}}}{+ \frac{2 (n-1) \langle \Delta^2 P_0, J \Delta P_0 \rangle}{[(n-1)^2 \langle \Delta^2 P_0, J \Delta P_0 \rangle^2 \|P_0\|^2 + 2n (n-1) \|\Delta P_0\|^2 \\
& \quad \langle \Delta^2 P_0, J \Delta P_0 \rangle \langle P_0, J \Delta P_0 \rangle + n^2 \|\Delta P_0\|^6]^{\frac{1}{2}}}}
\end{aligned}$$

ve $t = 1$ için;

$$\begin{aligned}
& n(n-1) \langle P_n, \Delta P_{n-1} \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 \\
& \cdot [(n-2) \langle \Delta^3 P_{n-3}, J \Delta P_{n-1} \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 - 3(n-1) \cdot \\
& (\Delta_x P_{n-1} \cdot \Delta_x^2 P_{n-2} + \Delta_y P_{n-1} \cdot \Delta_y^2 P_{n-2}) \langle \Delta^2 P_{n-2}, J \Delta P_{n-1} \rangle] \\
\kappa_{P^*[P,0]}^*(1) = & \frac{[(n-1)^2 \langle \Delta^2 P_{n-2}, J \Delta P_{n-1} \rangle^2 \|P_n\|^2 + 2n(n-1) \\
& \|\Delta P_{n-1}\|^2 \langle \Delta^2 P_{n-2}, J \Delta P_{n-1} \rangle \langle P_n, J \Delta P_{n-1} \rangle + n^2 \|\Delta P_{n-1}\|^6]^{\frac{3}{2}}}{} \\
& + \frac{2(n-1) \langle \Delta^2 P_{n-2}, J \Delta P_{n-1} \rangle}{[(n-1)^2 \langle \Delta^2 P_{n-2}, J \Delta P_{n-1} \rangle^2 \|P_n\|^2 + 2n(n-1) \\
& \|\Delta P_{n-1}\|^2 \langle \Delta^2 P_{n-2}, J \Delta P_{n-1} \rangle \langle P_n, J \Delta P_{n-1} \rangle + n^2 \|\Delta P_{n-1}\|^6]^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

İspat Sonuç (4.69) de $Q = (0, 0)$ yazılırsa sonuçtaki ifadeler elde edilir. □

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, öncelikle

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i$$

denklemleri ile verilen $P_0, P_1, \dots, P_n$; E^2 uzayında doğrudan olmayan $(n + 1)$ tane kontrol noktası yardımıyla tanımlanan birim hızlı olmayan $n - inci$ dereceden düzlemsel $P(t)$ Bézier eğrisinin eğri çiftlerinin parametrik denklemleri elde edilmiştir. Ayrıca; elde edilen bu eğri çiftleri için $t = 0$ ve $t = 1$ durumları da araştırılmıştır. Bu bölümde genel olarak elde edilen sonuçlar verilecek olup, ayrıntılı sonuçlar için tezin bulgular ve tartışma kısmı incelenebilir.

Bézier eğrisinin evolüt eğrisinin parametrik denklemi;

$$P^*(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) + \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle}{\sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t) \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \langle \Delta^2 P_i, J \Delta P_j \rangle} \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) J \Delta P_i$$

ile verilir.

Bézier eğrisinin involüt eğrisinin parametrik denklemi;

$$P^*(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) - \frac{n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{1}{2}}} \int_a^t \left\| \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(u) \Delta P_i \right\| du$$

şeklinde elde edilmiştir.

Bézier eğrisinin $c \in \mathbb{R}$ için paralel eğrisinin parametrik denklemi;

$$P^*(t, r) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) + \frac{c \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) J \Delta P_i}{\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle \right)^{\frac{1}{2}}}$$

olarak bulunmuştur.

Bézier eğrisinin $Q \in \mathbb{R}^2$ pedal noktasına göre pedal eğrisinin parametrik denklemi;

$$P^*[P, Q](t) = Q + \frac{\langle \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i - Q, \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) J \Delta P_j \rangle}{\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle} \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) J \Delta P_k$$

şeklinde ifade edilir.

Bézier eğrisinin $Q \in \mathbb{R}^2$ pedal noktasına göre kontrapedal eğrisinin parametrik denklemi;

$$P^*[P, Q](t) = Q + \frac{\langle \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i - Q, \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \Delta P_j \rangle}{\sum_{i,j=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) B_j^{n-1}(t) \langle \Delta P_i, \Delta P_j \rangle} \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) \Delta P_k$$

şeklinde elde edilmiştir.

Daha sonrasında elde edilen bu eğri çiftlerinin eğrilikleri hesaplanmış ve bu eğrilikler için $t = 0$ ve $t = 1$ durumları incelenmiştir. Eşitliklerin uzun olmasından dolayı ve bu bölümün daha fazla uzamaması adına Bézier eğrisinin evolüt, involüt, paralel, pedal ve kontrapedal eğrilerinin eğrilikleri için sırasıyla; (4.37), (4.41), (4.43) denklemlerine ve (4.56), (4.67) teoremlerine bakılabilir.

Literatüre katkı sağlamak ve bu alandaki çalışmaları arttırıp teşvik etmek amacıyla düzlemsel Bézier eğrisinin eğri çiftleri 3 veya daha yüksek boyutlu Öklid uzaylarında araştırılıp, eğrilikleri hesaplanabilir.

6. KAYNAKLAR

- Ceylan, A.Y. 2021. *Curve Couples of Bézier Curves in Euclidean 2-Space. Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 4 (4) , 245-250.
- Ceylan, A.Y. and Kara, M. 2021. *On Pedal and Contrapedal Curves of Bézier Curves. Konuralp Journal of Mathematics*, 9(2): 217-221.
- David, S. 2006. *Curves and Surfaces for Computer Graphics*. Springer Science+Business Media, Inc., USA, pp.460.
- Duman, Z. 2021. *Bézier Eğrilerinin İnvolut-Evolüt Eğri Çiftleri*. Yüksek lisans tezi, Sakarya Üniversitesi, Sakarya, 69 s.
- Erkan, E. 2019. *Öklid Düzleminde ve Öklid Uzayında Bézier Eğrileri*. Doktora tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 163 s.
- Erkan, E. and Yüce, S. 2018. *Serret-Frenet Frame and Curvatures of Bézier Curves. Mathematics*, 6(12), 321: 1-20.
- Farin, G. 2002. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, USA, pp.429.
- Georgiev, G. H. 2006. *Shapes of Plane Bézier Curves in Curve and Surface Design*, Avignon, edited by P. Chenin, T. Lyche and L.L Schumaker, Nashboro Press, Brentwood, TN, 143-152.
- Georgiev, G. H. 2007. *On the Shape of the Cubic Bézier Curve. Pure and Applied Differential Geometry*. Ber. Math. Shaker Verlag, Aachen, 98-106.
- Gray, A., Abbena, E. and Salamon, S. 2016. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Chapman and Hall/CRC: Boca Raton, FL, USA.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1983. *Diferensiyel Geometri*. Gazi Üniversitesi, Ankara, 895 s.
- Huygens, H. 1666. *Horologium Oscillatorium Sive de Motu Pendulorum ad Horologia Aptato Demonstrationes Geometriae*, 1673.

- İncesu, M. ve Gürsoy, O. 2004. Bezier Eğrilerinde Esas Formlar ve Eğrilikler. XVII Ulusal Matematik Sempozyumu, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, 146-157.
- Kaplan, C.S. and Mann, S. 2006. Introduction to Computer Graphics. Lecture notes CS 488/688 of University of Waterloo, pp.245.
- Kılçoğlu, Ş. and Şenyurt, S. 2020. *On the involute of the cubic Bézier curve by using matrix representation in E^3* . *Eur. J. Pure Appl. Math.*, 13(2): 216-226.
- Li, Y. and Pei, D. 2018. *Pedal curves of frontals in the Euclidean plane*. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(5), 1988-1997.
- Marsh, D. 2005. Applied Geometry for Computer Graphics and CAD. Springer-Verlag London Berlin Heidelberg, London, pp.350.
- Özdemir, M. 2020. Diferensiyel Geometri. Altın Nokta Yayınevi, İzmir, 448.
- O'Neill, B., 2006. Elementary Differential Geometry. Academic Press, Rev. 2nd.ed., Elsevier, USA.
- Rutter, John W. 2000. Geometry of Curves. Chapman & Hall/CRC.
- Samancı, H. K., Celik, S. and İncesu, M. (2015). *The Bishop Frame of Bezier Curves*. *Life Science Journal*, 12(6).
- Sánchez-Reyes, J. 2002. *p-Bézier curves, spirals, and sectrix curves*. *Computer Aided Geometric Design*, 19(6), 445-464.
- Steede, B. H. 1898. *Note on Curvature of Pedal and Reciprocal Curves*. *Proceedings of the Royal Irish Academy (1889-1901)*, 5, 124–127.
- Tuncer, O. O., Ceyhan, H., Gök, İ. and Ekmekci, F. N. 2018. *Notes on pedal and contrapedal curves of fronts in the Euclidean plane*. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(13), 5096-5111.
- Ueda, K. 1997. A sequence of Bézier curves generated by successive pedal-point constructions. In *Curves and Surfaces with Applications in CAGD*. Vanderbilt University Press Nashville, pp. 427-434.

Ueda, K. 2000. Pedal curves and surfaces. In Mathematical Methods for Curves and Surfaces: Oslo 2000 pp. 497-506.

Yılmaz, A. 2009. Bézier Eğrileri ve Bézier Yüzeyleri. Yüksek Lisans tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 57 s.



ÖZGEÇMİŞ

Merve KARA

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2019-2021	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya
Lisans 2015-2019	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya