

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

COVID-19 MODELİNİN DİNAMİK ANALİZİ

DOKTORA

Pınar AÇIKGÖZ

EKİM-2025
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

COVID-19 MODELİNİN DİNAMİK ANALİZİ

DYNAMIC ANALYSIS OF COVID-19

DOKTORA

Pınar AÇIKGÖZ

**EKİM-2025
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

COVID-19 MODELİNİN DİNAMİK ANALİZİ

DYNAMIC ANALYSIS OF COVID-19

DOKTORA

Pınar AÇIKGÖZ

Danışman: Prof. Dr. Mehmet MERDAN

**EKİM-2025
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Doktora Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Covid-19 Modelinin Dinamik Analizi**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğum intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

15/10/2025

Pınar AÇIKGÖZ

TEŞEKKÜR

Ciddi emek ve özveriyle hazırlamış olduğum doktora tezimin tamamlamanın heyecanını ve gururunu yaşıyorum. Bu bölümü bendenize yardımlarını esirgememiş ve teşvik etmiş insanlara teşekkür etmek için bir fırsat olarak kullanacağım.

Öncelikle bu tezin oluşma sürecindeki çalışmalarımın her anında bana yardımcı olan, fikir vermekle kalmayıp bana örnek ve öncü olan değerli danışman hocam Prof. Dr. Mehmet MERDAN’a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Lisans eğitimim boyunca bana ışık tutan, yüreklendirici sözleriyle bana akademik yolda yürüme şevki kazandıran Cumhuriyet Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarıma ve yüksek lisans eğitimimde desteklerini esirgemeyen Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği bölümü hocalarıma sonsuz teşekkür ederim.

Çalışma süresince hayatımda olan, bana destek veren , o süreçte okul yöneticim olan ve aynı zamanda çok değerli dostum Duygu KÖKSAL’a ve öğrencilerime teşekkür ederim. Yazılım konusunda desteğini esirgemeyen kuzenim Semih ORAL’ a da ayrıca teşekkür ederim.

Hayatım boyunca beni destekleyen, haklarını asla ödeyemeyeceğim annem, babam, abilerim ve ablama teşekkürlerimi sunarım.

En önemlisi de her zaman yanımda olan ve bu süreci rahat atlatmamda yardımcı olan sevgili eşim Mete AÇIKGÖZ’e en derin şükranlarımı sunarım.

Son olarak süreçteki tikanıklığı, hayatımıza katılmasıyla açtığına ve büyük şanslar getirdiğine inandığım şuan dünyaya gelmesine çok az bir süre kalan oğlum Tuna AÇIKGÖZ’e ve evimdeki başka bir değerli varlığa, kedim Mia’ya da sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunarım.

Pınar AÇIKGÖZ
GÜMÜŞHANE – 2025

ÖZET

Bu tez çalışmasında, Covid-19 pandemisinin yayılım dinamikleri matematiksel modelleme yöntemleri ile incelenmiştir. Çalışmada öncelikle klasik deterministik modellerden SIR ve türevleri ele alınmış, bu modellerin temel üreme sayısı (R_0), denge noktaları ve kararlılık analizleri gerçekleştirilmiştir. Daha sonra, Covid-19 için geliştirilen matematiksel modellerin analizi yapılmış, çözümün pozitifliği, sınırlılığı ve değişmez bölgeleri araştırılmıştır.

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler kullanılarak salgının hafıza etkisi ve uzun vadeli bağımlılık yapısı incelenmiş; Caputo, Uyumlu ve Grünwald-Letnikov türevleri temelinde oluşturulan kesirli modeller, analitik ve nümerik yöntemlerle çözülmüştür. Bu kapsamda, Homotopi Analiz Metodu (HAM), q-HATM, Varyasyonel İterasyon Yöntemi (VIM) ve Standart Olmayan Sonlu Fark (NSFD) şemaları uygulanmış, elde edilen çözümler karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiştir.

Ayrıca, stokastik diferansiyel denklemler kullanılarak Covid-19'un belirsizlik içeren yayılım süreci modellenmiş ve Euler–Maruyama, Milstein ve Runge–Kutta yöntemleriyle nümerik çözümler elde edilmiştir. Bunun yanı sıra, zaman gecikmeli diferansiyel denklemlerle bağışıklık ve kuluçka süresi gibi etkilerin modele yansması sağlanmıştır.

Elde edilen sonuçlar, Covid-19'un yayılım sürecinin yalnızca deterministik modellerle değil, kesirli mertebeden ve stokastik modellerle de daha gerçekçi bir şekilde açıklanabileceğini göstermektedir. Bu yönüyle tez, hem epidemiyolojik modelleme literatürüne hem de kesirli analiz ve nümerik yöntemlerin uygulamalarına katkı sağlamaktadır.

Anahtar Kelimeler: Covid-19, Homotopi analiz metodu, Kesirli diferansiyel denklemler, Matematiksel modelleme, Nümerik çözümler, Stokastik modeller

SUMMARY

In this thesis, the spread dynamics of the Covid-19 pandemic were investigated using mathematical modeling methods. The study first addressed the SIR and its derivatives, which are classical deterministic models, and conducted analyses of the fundamental reproduction number (R_0), equilibrium points, and stability of these models. Subsequently, mathematical models developed for Covid-19 were analyzed, investigating the positivity, boundedness, and invariant regions of the solution.

The memory effect and long-term dependency structure of the epidemic were investigated using fractional-order differential equations. Fractional models based on Caputo, Conformal, and Grünwald-Letnikov derivatives were solved using analytical and numerical methods. In this context, the Homotopy Analysis Method (HAM), q-HATM, Variational Iteration Method (VIM), and Non-Standard Finite Difference (NSFD) schemes were applied, and the resulting solutions were comparatively evaluated. Additionally, the uncertain spread of Covid-19 was modeled using stochastic differential equations, and numerical solutions were obtained using the Euler–Maruyama, Milstein, and Runge–Kutta methods. Furthermore, time-delay differential equations were used to incorporate effects such as immunity and incubation period into the model.

The results demonstrate that the spread of Covid-19 can be more realistically explained not only with deterministic models but also with fractional-order and stochastic models. In this respect, the thesis contributes to both the epidemiological modeling literature and the applications of fractional analysis and numerical methods.

Keywords: Covid-19, Homotopy analysis method, Fractional differential equations, Mathematical modeling, Numerical solutions, Stochastic models

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLolar DİZİNİ	XI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XV
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Bulaşıcı Hastalıklarda Deterministik Modeller.....	1
1.2.1. Tarihi Gelişimi	1
1.2.2. Matematiksel Epidemiyoloji	2
1.2.3. Matematiksel Modelleme.....	3
1.3. SIR Modeli ve Kompartmanlı Modeller	3
1.3.1. SIR Modeli	4
1.3.2. SIR Modelinin çözümleri.....	6
1.3.3. Gelişmiş modeller: SIRS ve SEIR modelleri	8
1.4. Literatür Araştırması	9
1.5. Tez İçeriği	10
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	11
2.1. Covid-19.....	11
2.1.1. Enfeksiyon Zinciri.....	13
2.1.2. Dünyada Covid-19	16
2.1.3. Türkiye’de Covid-19.....	17
2.2. Covid-19 Modeli	18
2.3. Covid-19 Modelinin Analizi	21
2.3.1. Çözümün Pozitifliği	21
2.3.2. Çözümün Sınırlılığı.....	22
2.3.3. Modelin Değişmez Bölgesi	22
2.3.4. Covid-19 Modeli İçin Denge Noktasının Varlığı	23

2.4. Temel Üreme Sayısı R_0	24
2.4.1. R_0 Hesaplamaları	27
2.4.2. R_0 hesaplama fomülleri:.....	28
2.4.3. Covid-19 için R_0 hesaplanması	28
2.4.4. Covid-19 İçin Tahmini R_0 Değerleri	30
2.4.5. Covid-19 Modelinin Temel Üreme Katsayısı (R_0).....	31
2.5. COVID-19 ‘un Serbest Denge Kararlılığı (CFE).....	33
2.6. Yerel Dengenin Global Kararlılık Analizi	33
2.7. En Küçük Kareler Yöntemi.....	37
2.7.1. Polinomial En Küçük Kareler Fonksiyonu	40
2.7.2. En Küçük Kareler Probleminin Doğrusallaştırılması	41
2.8. Kesirli Mertebeden Analizler.....	44
2.8.1. Kesirli Hesapların Tarihi.....	44
2.8.2. Kesirli Mertebeden Analizde Kullanılan Bazı Özel Fonksiyonlar	46
2.8.2.1. Gamma Fonksiyonu Γ	46
2.8.2.2. Beta Fonksiyonu β	46
2.8.3. Kesirli Mertebeden Covid-19 Modeli	47
2.8.4. Kesirli Mertebeden Covid-19 Modelinin Analizi	48
2.8.4.1. Denge.....	49
2.9. Homotopi Analiz Metodu (HAM)	51
2.9.1. Covid-19 Modeli İçin Optimal q-HATM (q-Homotopy Analiz Dönüşüm Metodu)	52
2.9.1.1. Temel Tanımlar.....	52
2.9.1.2. q-HATM nin Temel Çözüm Prosedürü.....	52
2.9.2. Kesirli Mertebeden Covid -19 Modeli için q-HATM.....	55
2.9.3. Varyasyonel İterasyon Yönteminin Uygulanması	78
2.10. CFDTM ve VIM Yöntemlerinin Karşılaştırılması.....	81
2.11. Covid-19 Modelinin Nümerik Çözümleri ve Analizi	82
2.11.1. Grünwald-Letnikov Kesirli İntegral ve Türevler	82
2.11.2. Kesirli Mertebeden Covid-19 Modeli İçin Standart Olmayan Sonlu Fark	85
2.11.2.1. Kesirli Salgın Modelleri İçin Nsfed Şemalarının Oluşturulması.....	88
2.12. Kesirli Hesaplama Kavramını Kullanarak Model (11)’in Sayısal Analizi.....	91
2.13. Stokastik Modelleme.....	97
2.13.1. Stokastik Covid-19 Modeli	99
2.13.1.1. Euler-Maruyama Yöntemi	100

2.13.1.2. Milstein Yöntemi	100
2.13.1.3. Runge-Kutta Yöntemi	100
2.14. Matematiksel Biyolojide Gecikmeli Diferansiyel Denklemler	105
2.14.1. Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Temel Özellikleri	106
2.14.2. Zaman Gecikmeli (Delay) Covid-19 Modeli	107
2.14.3. Zaman Gecikmeli Stokastik Covid-19 Modeli	109
3. İRDELEME	112
4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	113
5. ÖNERİLER	115
KAYNAKÇA	116
ÖZGEÇMİŞ	130



TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Cov-19 modelinin kompartmanları.....	20
Tablo 2. Cov-19 modelinin kontrol mekanizmaları.....	20
Tablo 3. Modelin parametreleri ve değişkenlerinin tanımı.....	20
Tablo 4. Modelin parametrelerinin gerçek değerleri.....	21
Tablo 5. 30 Mayıs-27 Kasım 2022 arası haftalık Covid-19 verileri	41
Tablo 6. LT-HPM ile $\beta = 0.9$ için Covid-19 modelinin sayısal çözümleri	70
Tablo 7. $h = -1$ ve $n = 1$ olduğunda q-HATM ile $\beta = 0,9$ için Covid-19 modelinin sayısal çözümleri	71
Tablo 8. CFDTM ile $q = 0,9$ için Covid-19 modelinin sayısal çözümlerine ait tablo...	81

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. SIR modelinin akış şeması.....	4
Şekil 2. SIR modelinin sayısal çözümleri.	7
Şekil 3. SEIR Modeli Akış Şeması	8
Şekil 4. Cov-19 virüsünün mikroskop altındaki görüntüsü	12
Şekil 5. Covid-19'un akciğerlere etkisi isimli görsel.....	13
Şekil 6. Enfeksiyon Zinciri akış şeması	14
Şekil 7. Dünya'da Cov-19 salgını	16
Şekil 8. Dünya genelinde Cov-19 bulaşan kişi sayısı	17
Şekil 9. Covid-19 yeni olgu ve ölüm dağılımı	18
Şekil 10. İllere göre Covid-19 risk haritası	18
Şekil 11. Covid-19 modelinin akış şeması.....	20
Şekil 12. Covid-19 modelinde R_0 değerinin üç boyutlu gösterimi	32
Şekil 13. Covid-19 modelinin R_0 temsiline kontur grafiği.....	32
Şekil 14. Covid-19 modelinin zamana bağlı değişimi	35
Şekil 15. Covid-19 modelinin faz diyagramı; (a) $S(t) - E(t)$, (b) $I(t) - Q(t)$, (c) $I(t) - R(t)$, (d) $Q(t) - R(t)$	36
Şekil 16. Covid-19 modelinin faz portreleri	37
Şekil 17. En Küçük Kareler Yöntemi (URL-5, 2022)	40
Şekil 18. 30 Mayıs-27 Kasım 2022 arası haftalık vaka sayıları.....	42
Şekil 19. 30 Mayıs-27 Kasım 2022 arası haftalık vefat sayıları	43
Şekil 20. 30 Mayıs-27 Kasım 2022 arası haftalık iyileşen sayıları.....	43
En küçük kareler yöntemi kullanılarak elde edilen 5. mertebeden polinom.....	43
Şekil 21. $\beta = 1, \beta = 0.95, \beta = 0.9$ iken S, E, I, Q ve R nin değişimi	63
Şekil 22. Kesirli Covid-19 modelinin faz diyagramı; (a) $S(t) - E(t)$, (b) $I(t) - Q(t)$, (c) $I(t) - R(t)$, (d) $Q(t) - R(t)$	63
Şekil 23. Kesirli Covid-19 modelinin faz portresi	64
Şekil 24. $t = 0.1$ olduğunda β nın farklı değerleri için $S(t)$ nin h eğrileri: (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 4$,.....	64
Şekil 25. $t = 0.1$ olduğunda β nın farklı değerleri için $E(t)$ nin h eğrileri: (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 4$,.....	65
Şekil 26. $t = 0.1$ olduğunda β nın farklı değerleri için $I(t)$ nin h eğrileri: (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 4$,.....	65

Şekil 27. $t = 0.1$ olduğunda β nın farklı değerleri için $Q(t)$ nin h eğrileri: (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 4$,.....	66
Şekil 28. $t = 0.1$ olduğunda β nın farklı değerleri için $R(t)$ nin h eğrileri: (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 4$,.....	66
Şekil 29. $h = -1$ ve $n = 1$ olduğunda β nın farklı değerleri için Covid-19 modelinin nümerik çözümleri: (a) Hassas bireyler $-S(t)$, (b) hastalığa maruz kalan bireyler $-E(t)$, (c) enfekte olmuş bireyler $-I(t)$, (d) karantinada olan bireyler $-Q(t)$ ve (e) iyileşen bireyler $-R(t)$	67
Şekil 33. NSFD tekniği ile, incelenen modelin duyarlı $S(t)$ sınıfı Λ ve ϕ_c 'nin farklı değerlerindeki dinamik hareketleri.....	89
Şekil 34. NSFD tekniği ile, incelenen modelin hastalığa maruz kalanlar $E(t)$ sınıfı Λ ve ϕ_c 'nin farklı değerlerindeki dinamik hareketleri	89
Şekil 35. NSFD tekniği ile, incelenen modelin enfekte bireyler $I(t)$ sınıfı Λ ve ϕ_c 'nin farklı değerlerindeki dinamik hareketleri	90
Şekil 36. NSFD tekniği ile, incelenen modelin karantinadaki bireyler $Q(t)$ sınıfı Λ ve ϕ_c 'nin farklı değerlerindeki dinamik hareketleri	90
Şekil 37. NSFD tekniği ile, incelenen modelin iyileşen bireyler $R(t)$ sınıfı Λ ve ϕ_c 'nin farklı değerlerindeki dinamik hareketleri	90
Şekil 38. Payda fonksiyonu ile ve payda fonksiyonu olmadan açık Euler ($\beta = 1$), Grünwald-Letnikov ve NSFD şemaları kullanılarak Covid-19 kesirli modelinin sayısal çözümleri	95
Şekil 39. $[0, 100]$ zaman aralığında, adım uzunluğu $h = 5$ ve $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 =$ $\beta_4 = \beta_5 = \beta = 1, 0.95$ ve 0.9 seçildiğinde kesirli Covid19 modelinin davranışı	96
Şekil 40. Kesirli Covid-19 modelinin adım uzunluğu $h = 5$ ve $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 =$ $\beta_4 = \beta_5 = \beta = 1, 0.95$ ve 0.9 seçildiğinde nümerik çözüm için faz diagramı; (a) $S(t) - E(t)$, (b) $I(t) - Q(t)$, (c) $I(t) - R(t)$, (d) $Q(t) -$ $R(t)$	96
Şekil 41. Kesirli Covid-19 modelinin, adım uzunluğu $h = 5$ ve $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 =$ $\beta_4 = \beta_5 = \beta = 1, 0.95$ ve 0.9 seçildiğinde nümerik çözüm için faz portresi.....	97
Şekil 42. Stokastik Covid-19 modelinin Euler-Maruyama yöntemiyle çözümleri.....	102
Şekil 43. Stokastik Covid-19 modelinin Milstein Yöntemi ile çözümü	103
Şekil 44. Stokastik Covid-19 modelinin Runge-Kutta-2 Yöntemi ile çözümü.....	104

Şekil 45. Stokastik Covid-19 modelinin Runge-Kutta-2 Yöntemi ile S, E, I, Q, R kompartmanlarının birlikte çözümü.	104
Şekil 46. Stokastik Covid-19 modelinin Runge-Kutta-4 Yöntemi ile çözümü.....	105
Şekil 47. Stokastik Covid-19 modelinin Runge-Kutta-4 Yöntemi ile S, E, I, Q, R kompartmanlarının birlikte çözümü.	105
Şekil 48. Gecikmeli Covid-19 Modelinin kompartmanlarının zamana bağlı değişimi	108
Şekil 49. Gecikmeli Covid-19 Modelinin faz diyagramı	108
Şekil 50. Gecikmeli Covid-19 Modelinin faz portresi	109
Şekil 51. Stokastik Gecikmeli Covid-19 modelinin Runge-Kutta-2 Yöntemi ile çözümü	110
Şekil 52. Stokastik Gecikmeli Covid-19 modelinin Runge-Kutta-2 Yöntemi ile S, E, I, Q, R kompartmanlarının birlikte çözümü	110
Şekil 53. Stokastik Gecikmeli Covid-19 modelinin Runge-Kutta-4 Yöntemi ile çözümü	111
Şekil 54. Stokastik Gecikmeli Covid-19 modelinin Runge-Kutta-4 Yöntemi ile S, E, I, Q, R kompartmanlarının birlikte çözümü.	111

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\%$	: Yüzde sembolü
$\binom{p}{m}$	: p nin m li kombinasyonu
D^α	: Alt limiti 0 olan α . mertebeden türev operatörü
L^{-1}	: Ters Laplace dönüşümü
${}_aD^\alpha$	: Alt limiti a olan α . mertebeden türev operatörü
$f^k(x)$	: $f(x)$ fonksiyonun k. mertebeden türevi
$>, <, \geq, \leq$	: Büyüktür, küçüktür, büyük eşit, küçük eşit
$\in$	: Elemanı
Σ	: Toplam sembolü
$\int$	: İntegral sembolü
$\cong$	: Yaklaşık olarak eşit
∞	: Sonsuz
Cov-19	: Covid-19
D	: Türev operatörü
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
Γ	: Gamma fonksiyonu
L	: Laplace dönüşümü
$arg(\lambda)$	: Argüman
$det(A)$	: A matrisinin determinanı
exp	: Üstel fonksiyon
lim	: Doğal limit fonksiyonu
ln	: Doğal logaritma fonksiyonu
$n!$	: Faktöriyel $n = (1.2 \dots n)$
sup	: Supremum
ε	: Epsilon
∂	: Kısmi türev

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Son yıllarda matematik ve biyoloji arasındaki etkileşim belirgin bir şekilde yoğunlaşmıştır (Allman ve Rhodes, 2004). Biyoloji, matematikçiler için değerli ve ilgi çekici araştırma alanları sunmuştur (Murray, 2002). Matematiksel modelleme, karmaşık biyolojik olayları matematiksel çerçeveler kullanarak hassas bir şekilde temsil etmek için kullanılan bir yöntemdir.

Matematiksel modelleme, sağlık, mühendislik ve temel bilimlerin yanı sıra ekonomi, sosyoloji, psikoloji, matematiksel sosyoloji ve matematiksel psikoloji gibi sosyal bilimlerde yaygın olarak kullanılan önemli bir disiplin olarak ortaya çıkmıştır.

Matematiksel modeller önemli ölçüde farklılık gösterebilir. Örnekler arasında diferansiyel denklemler, istatistiksel modeller ve dinamik sistemler bulunur. Matematiksel modeller, olayların etkilerini ve sonuçlarını açıklayabilir ve sistemlerin davranışlarını analiz edebilir.

Malthus, Verhulst, Lotka ve Volterra tarafından formüle edilen diferansiyel denklemler, tarihsel olarak biyolojik olayları temsil etmek için kullanılmıştır (Forde, 2005). Bu diferansiyel denklemler, popülasyon genişlemesi (Murray, 2002), ilaç uygulaması (Jones ve Sleeman, 2003), kemostat modelleri (Zhao, 1995) ve tümör büyümesi (Villasana ve Radunskaya, 2003) dahil olmak üzere çeşitli biyolojik süreçlerin karakterizasyonunda kullanılmıştır.

1.2. Bulaşıcı Hastalıklarda Deterministik Modeller

1.2.1. Tarihi Gelişimi

Ölüm istatistiklerinin ilk örneği, 17. yüzyılın başlarından 1830'lara kadar Londra'da hastalıktan kaynaklanan haftalık ölüm sayılarını belgeleyen "Ölüm Raporları"dır (Akpınar, 2012). 1592 veba salgını sırasında Londra'da başlatılan kayıtlar, 1603 salgınından sonraki ölüm oranlarındaki dalgalanmaları hassas bir şekilde belgelemek için kilise katipleri tarafından haftalık olarak sistematik bir şekilde derlenip analiz edilmiştir (Akpınar, 2012). Öncü bir demograf olarak kabul edilen John Graunt, II. Charles döneminde Londra'da bir sistem oluşturulmasını savunmuş ve 1662 tarihli "Ölüm Raporları Üzerine Doğal ve Politik Gözlemler" adlı yayınında, vebanın salgına dönüşmekte olduğunu belirtmiştir (Petty, 1899). Bulaşıcı hastalıklarla ilgili

ilk matematik modeli, 1766 yılında Daniel Bernoulli tarafından "Çiçek Hastalığının Neden Olduğu Ölüm Oranının Yeni Bir Analizi ve Aşılanmanın Bunu Önlemedeki Avantajları" (Akpınar, 2012) başlıklı bir çalışmayla oluşturulmuştur. 1906 yılında Hamer, kızamık salgınlarının tekrarını araştırmak için ayrık zamanlı bir model geliştirip değerlendirmiştir (Akpınar, 2012). Bu model, birim zaman başına düşen yeni vaka sayısının, hastalığa duyarlı ve enfekte kişi sayısına bağlı olduğunu varsayan ilk model olması nedeniyle önemlidir (Hamer, 1906). 1911 yılında Ross, yeni sıtma vakalarının görülme sıklığını ve düzenlenmesini analiz etmek için bir diferansiyel denklem modeli oluşturmuştur (Ross, 1974).

1.2.2. Matematiksel Epidemiyoloji

Epidemiyoloji, salgın hastalıkları inceleyen bilim olarak kabul edilir ve halk sağlığı alanında önemli bir alandır. Epidemiyoloji, hastalıkların kökenine, bulaşmasına ve yayılmasına katkıda bulunan faktörleri belirli bir zamansal ve çevresel bağlamda incelemeye odaklanan bir disiplindir.

Tarihsel olarak salgın hastalıklar insan sağlığı ve ekonomik istikrar için önemli bir tehdit oluşturmuş ve bu nedenle bu hastalıklarla mücadele tüm bilim insanları için hayati bir çaba haline gelmiştir.

Çağdaş matematiksel epidemiyoloji, salgınların tekrarını ve yayılmasını, insidans ve ölüm oranlarını tahmin etmek ve hastalıkların etiyolojilerini incelemek için değerli bir disiplin haline gelmiştir.

Çağdaş matematiksel modelleme araştırmalarının önemli bir bölümü salgınlarla ilgili modellerle ilgilidir. Dünya Sağlık Örgütü, Bulaşıcı Hastalıkların Matematiksel Modelleme Merkezi (Birleşik Krallık) ve BC Hastalık Kontrol Merkezi (Kanada) dahil olmak üzere çok sayıda kurum, hastalık modellemesi üzerine kapsamlı araştırmalar yürütmektedir (Bekiryazici, 2017). Matematiksel epidemiyoloji, bu alandaki modellerin çoğunu doğrulamak için testler yürütmenin olanaksızlığı nedeniyle birçok disiplin arasında benzersiz olarak kabul edilir. Deneyler yapılmasına rağmen, etik dışı kalmaktadırlar. Bu durum, beklenen salgın veya pandemileri ele alma araçları olarak matematiksel modellerin önemini vurgular (Çetin, Kiremitçi ve Yurt, 2009). Matematiksel epidemiyolojinin kapsamlı bir tarihsel geçmişi vardır. İlk araştırma, Daniel Bernoulli'nin 1760 tarihli çiçek hastalığı salgını modeli olarak kabul edilir.

Çağdaş matematiksel salgın modelinin öncüleri olarak kabul edilen A. G. McKendrick ve W. O. Kermack, toplumda üç temel bireysel bileşenin bulunduğunu öne sürmüşlerdir. İlk grup, doğum veya ölümlerin olmadığı bir popülasyondaki sağlıklı

bireylerden, ikincisi hasta olanlardan ve üçüncüsü ise hastalığa yatkın olanları, yani bağışıklık kazanmış bireyleri içerir. Bu iki bilim insanı, bu özellikleri içeren bir dizi modeli analiz etmiş ve doğrudan deterministik yaklaşımlar kullanarak çeşitli salgınların dinamiklerini simüle etmiştir. Matematiksel epidemiyolojide, SIR (duyarlı-enfeksiyonlu-iyileşen) ve SIS (duyarlı-enfeksiyonlu-duyarlı) modelleri temel çerçevelerdir. SIR modelinin basitleştirilmiş bir yinelemesi ve örnek bir uygulaması aşağıda sunulmaktadır.

1.2.3. Matematiksel Modelleme

Matematiksel modelleme, sistemlerin işleyiş sürecini ve sistemlerin davranışlarını denklemlerle incelemektir. Matematiksel modelleme; kimyasal, biyolojik, fiziksel ve tıbbi süreçlerin yanına ek olarak ekonomik, sosyolojik süreçlerin daha iyi ifade edilmesi için oluşturulmuş denklem veya denklem sistemleridir. Deney ve gözlemlere dayalı olarak oluşturulan matematiksel modeller daha çok sistem şeklinde oluşturulmaktadır.

Bir bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerinden birini veya birden fazlasını olan diferansiyel denkleme adi, iki veya daha fazla değişkenden oluşmuş diferansiyel denkleme ise kısmi diferansiyel denklem denir. Diferansiyel denklemlerle oluşturulan modellerin birbirine bağlı olup olmadığına göre lineer ve lineer olmayan (nonlinear) diferansiyel denklem olarak adlandırılma yapılmaktadır. Modelin rastgele etkiler altında incelenmesine göre ise stokastik ve deterministik ifadeleri kullanılmaktadır. Rastgeler etki altında değilse deterministik rastgele etki altında olan denklem ise stokastik diferansiyel denklem olarak verilmektedir. Zamana göre ise dinamik ve statik denklem sistemi olarak adlandırılırlar. Av-avcı modeli, nüfus modeli, SIR salgın hastalık modeli bu adı verilen modeller bu denklem sistemleriyle oluşturulmuş modellerin birkaçıdır.

Aşağıda bazı salgın hastalık modelleri ile ilgili bilgiler verilmektedir.

1.3. SIR Modeli ve Kompartmanlı Modeller

Epidemiyoloji için kompartman modelleri 1900'lerin başında çalışılmaya başlanan ve bulaş dinamiğini inceleyen modellerdir (Abbey, 1952; Hethcote, 2000; Kermack ve McKendrick, 1927). Bu modeller birçok salgın hastalık için oldukça makul tahminlerde bulunulmuş (Anderson, 2013; Brauer ve Castillo-Chavez, 2012; Murray, 2007) günümüzde ise Covid-19 pandemisi için de bu modeller kullanılmaktadır (Abou-Ismael, 2020). Bölme(kompartman) modelleri, kapalı bir toplumu bölmeler olarak adlandırılan segmentlere ayırır. Her bölme büyük harfle gösterilir: örneğin, S potansiyel olarak enfekte olmuş ancak henüz bulaşıcı olmayan toplam birey sayısını, E enfekte (ve bulaşıcı) toplam birey sayısını, I enfekte (ve bulaşıcı) toplam birey sayısını ve R iyileşen toplam birey

sayısını belirtir. Kavram, adını bireylerin hastalıkla ilgili durumlarına göre belirlenen bölmelerden alır.

Geleneksel bölmeli model olarak bilinen SIR modeli, çeşitli hastalıklar ve bozukluklar için yeni modeller geliştirmek amacıyla kullanılabilir. Örneğin, bir birey henüz ortaya çıkmamış bir hastalığa maruz kalmışsa, bir SEIR modeli oluşturmak için maruz kalan bir bölme olan E dahil edilir. Benzer şekilde, çeşitli durumlar dahil edilerek, SIS, SEIR, SEIRS ve MSEIR gibi farklı bölmelerden oluşan salgın hastalık modelleri formüle edilebilir.

1.3.1. SIR Modeli

Bölme modelleri, kapalı bir toplumu bölmeler olarak adlandırılan farklı alanlara ayırır. Her bölme büyük harfle gösterilir; örneğin, S, SIS, SEIR, SEIRS ve MSEIR gibi çeşitli bölmelerden oluşan hastalık modellerinde toplam nüfusu ifade eder. Popülasyondaki hastalığa duyarlı toplam birey sayısının $N(t)$ (sabit) olduğunu varsayalım. SIR modeli olarak adlandırılan modelin varsayımları aşağıdaki gibi sıralanmıştır.

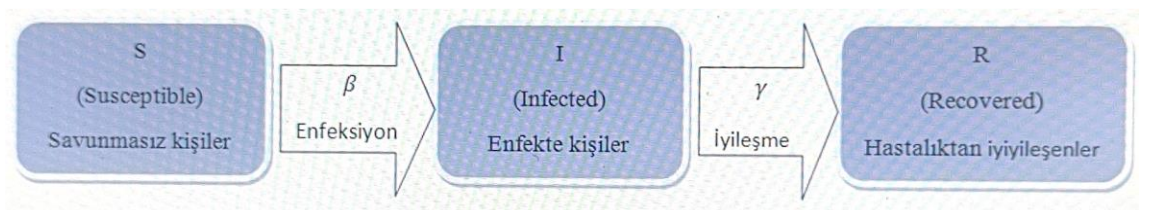
Her t anında, popülasyondaki her üye üç harften biriyle gösterilir.

$S(t)$ (Duyarlı) - Hastalığa yakalanmamış ve enfeksiyon riski altında olan sağlıklı kişiler.

$I(t)$ (Enfekte) - Enfekte veya hasta olan bireyler.

$R(t)$ (İyileşen/Kaldırılan) - İyileşen, hastalığa karşı bağışıklık geliştiren veya hastalığa yenik düşen bireyler. Bu grupların popülasyonu zaman içinde dalgalanacaktır, ancak herhangi bir anda $S(t) + I(t) + R(t) = N(t)$ olacaktır.

SIR modelinin iki aşaması vardır. İlk aşamada, sağlıklı bireyler $S(t)$ hastalığı β hızında yakalayacak, sonraki aşamada ise enfekte kişiler $I(t)$ γ hızında iyileşecek veya yenik düşecektir.



Şekil 1. SIR modelinin akış şeması

Savunmasız kişiler $S(t)$, hastalığa β oranında yakalanır ve enfekte bireyler $I(t)$ haline gelirken, bireyler $I(t)$ hastalıktan γ oranında iyileşir veya ölür ve $R(t)$ bireylerine dönüşür. Parametreler, bilinen olgularla bağlantılı olarak tanımlanabilir.

β = birim zaman başına kişi başına ortalama temas sayısı (a) ile hastalık bulaşma olasılığının (b) çarpımı

• $\gamma \approx 1 / \text{hastalığın süresi}$

β ve γ parametrelerinin ikisi de sıfırdan büyük ve kolayca hesaplanabilmektedir.

SIR modelini uygulayabilmek için aşağıdaki birkaç varsayımı açıklamamız gerekmektedir.

1. Nüfus dış etkenlerden etkilenmez; doğum, ölüm (COVID-19 hariç) ve göç gibi olaylara karşı duyarsızdır.

2. Hastalığın sınırlı bir süresi vardır.

3. Hastalıktan iyileşen bireyler tam bağışıklık kazanır.

4. Virüsün kuluçka süresi yoktur. Bu, enfekte olmuş herhangi bir kişinin enfeksiyondan kısa bir süre sonra hastalığı başkalarına bulaştırabileceği anlamına gelir.

Şekil 1’de verilen SIR modeli akış şeması ve varsayımlar ışığında aşağıdaki denklem sistemi ile ifade edilir:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I. \quad (1)$$

Öncelikle, bu denklemlerin diferansiyel denklemler olarak adlandırıldığını kabul etmek önemlidir. Diferansiyel denklemlerin tanımlayıcı bir özelliği, değişkenlerin değişim oranlarının bunlara bağlı olmasıdır. Sol taraftaki $dS/dt, dI/dt$ ve dR/dt ifadeleri, S, I ve R ’nin düzenli zaman aralıklarında ölçülerek belirlenebilen değişim oranlarını ifade eder. Türev olarak adlandırılan bu ifadeler, pozitif olduğunda bir artışı, negatif olduğunda ise bir düşüşü ifade eder.

Başlangıç şartları $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$ şeklinde modellenecek duruma göre k keyfi sabiti için $S(t) + I(t) + R(t) = N(t) = k$ şartını sağlayacak şekilde verilmektedir (1). Denklem sisteminde β parametresi hastalık bulaşma oranı, γ ise iyileşme oranını ifade etmektedir.

Popülasyondaki S, I ve R gruplarının oranları için bu denklemleri yazmak, hesaplama prosedürünü kolaylaştıracaktır. Bunları $s = S/N, i = I/N$ ve $r = R/N$ ve $s + i + r = 1$ olacak şekilde yeniden düzenlenirse,

$$\frac{dS}{dt} = -\beta Si, \frac{dI}{dt} = \beta Si - \gamma I, \frac{dR}{dt} = \gamma I. \quad (2)$$

şeklinde yazılır.

1.3.2. SIR Modelinin çözümleri

(2) denklem sistemindeki ilk iki denklemi kullanılırsa;

$$\frac{1}{s} \frac{ds}{dt} = -\frac{\beta}{\gamma} \frac{dr}{dt} \quad (3)$$

denklemi elde edilir. Salgının başlangıcı olarak her iki tarafın da kabul edildiği ($t = 0$) anından başlayarak, sonraki denklemler integrasyon kullanılarak türetilmiştir ve buradan

$$\ln s(t) - \ln s_0 = -\frac{\beta}{\gamma} [r(t) - r_0] \Rightarrow s(t) = s_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} r(t)} \quad (4)$$

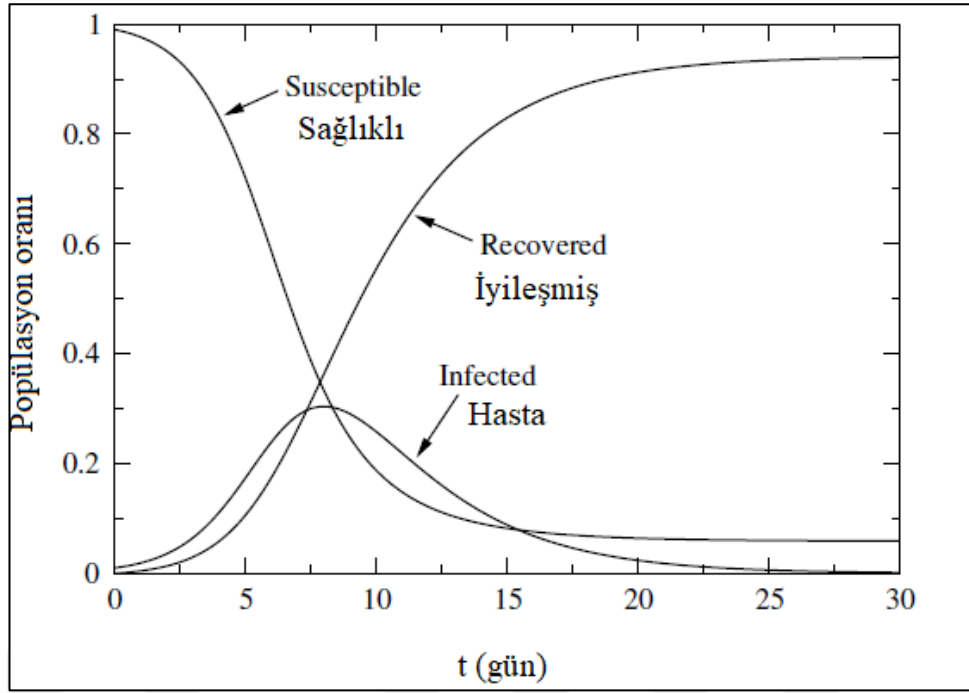
sonuçları elde edilmektedir.

Başlangıç anındaki ($t = 0$) değerler s_0 ve r_0 olarak gösterilmiştir. Burada, başlangıç anında r grubunda hiç kimsenin olmadığı varsayılarak, yani $r_0 = 0$ olduğu varsayılarak alınmaktadır.

Hatırlatılırsa $s + i + r = 1$, yani $i = 1 - r - s$ dir. Bu durum (4)' te yerine konulursa;

$$\frac{dr}{dt} = \gamma [1 - r(t) - s(t)] = \gamma \left[1 - r(t) - s_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} r(t)} \right] \quad (5)$$

olur. Bu durumda sadece $r(t)$ için bir denklem elde edilmiş olur. Bu denklem çözüldüğünde r 'nin zaman içindeki değişimi gözlemlenecektir.



Şekil 2. SIR modelinin sayısal çözümleri.

Grafik, hastalığın ortaya çıkmasından sonra, bu model içerisinde sabit olan S, I ve R/N değişkenlerinin oranlarındaki zamansal değişimleri göstermektedir. Bu grafiğin parametreleri $\beta = 1, \gamma = 0,4, s_0 = 0,99, i_0 = 0,01$ ve $r_0 = 0$ 'dır. $t = 0$ anında nüfusun yalnızca %1'i etkilenmektedir. Şekil 2, S (duyarlı) kişilerin I (enfekte) bireylere dönüştüğünde, nüfus içerisindeki S oranının sürekli olarak azaldığını, R oranının ise arttığını açıkça göstermektedir. Enfekte kişilerin oranı önce yükselir, ancak daha sonra zamanla azalır. Dahası, S oranı sıfıra yakınsamaz çünkü belirli bir süreden sonra hiçbir kişi hastalanmaz ve nüfus hastalıklı üyelerini tükettikçe başka enfeksiyon meydana gelmez. Nüfusun bir kesimi enfekte olmadan hastalıktan iyileşebilir. R (iyileşme) sayısının kalıcı önemi çok önemlidir, çünkü hastalığın başlangıcından itibaren herhangi bir anda hastalığa yakalanan ve şu anda enfekte olan kişilerin sayısı (I) salgın bilançosunu oluşturur.

Uzun zaman sonunda $dr/dt = 0$ olacaktır, yani artık bu evrede sayılar asla değişmemektedir. (5) denklemi kullanılarak epideminin bilançosu aşağıdaki gibi bulunabilmektedir.

$$r_B = 1 - S_0 e^{\frac{-\beta r_B}{\gamma}} \quad (6)$$

Aşırı büyük nüfuslar (örneğin, küresel nüfus) için, N sonsuza yaklaştıkça s_0 neredeyse 1'e eşit olur. Sonuç olarak, salgın bilançosu için aşağıdaki formül türetilir.

$$r_B = 1 - e^{\frac{-\beta r_B}{\gamma}} \quad (7)$$

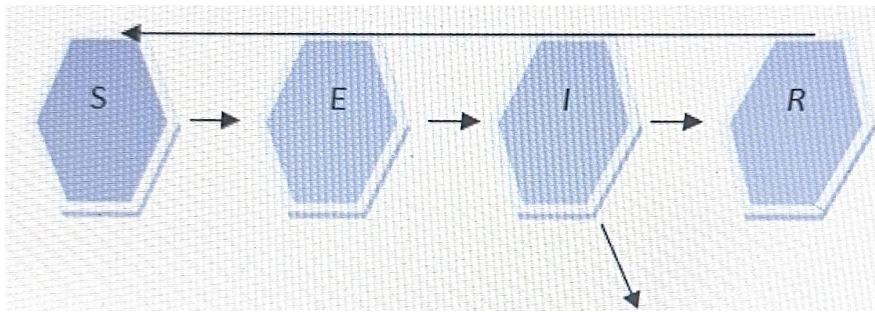
Bireylerin başlangıçtaki iyileşme oranı katlanarak artar. Nihayetinde, katlanarak azalan bir süreçle, r_B miktarı iyileşen bireylerin bilançosuna ulaşır. Hasta sayısı önce önemli ölçüde artar. Sonunda ise önemli ölçüde azalarak geçiş döneminde en yüksek değerine ulaşır.

1.3.3. Gelişmiş modeller: SIRS ve SEIR modelleri

SIR modelindeki varsayımlardan biri, R (iyileşmiş kişiler) olarak sınıflandırılan kişilerin yeniden enfeksiyon yaşamayacağı ve iyileşmenin ardından hastalığa karşı tam bağışıklık kazanacağıdır. Bu makalenin yayınlandığı tarihte, Covid-19 ile ilgili bu varsayımın doğruluğu hala şüphelidir. SIRS modeli, iyileşen kişilerin geçici bağışıklığa rağmen hastalığa tekrar yakalanabileceği durumlar için kullanılır. SIR modeli için belirlenen parametrelere, hastalıktan iyileşen kişilerin bağışıklıklarını kaybetme hızı olarak tanımlanan yeni bir parametre olan δ eklenecektir. Sonuç olarak, SIRS modeli aşağıdaki üç diferansiyel denklemle açıklanacaktır.

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \delta r - \beta s \\ \frac{di}{dt} &= \beta si - \gamma i \\ \frac{dr}{dt} &= \gamma i - \delta r \end{aligned} \quad (8)$$

Burada SIR modelinde olduğu gibi $s + i + r = 1$ eşitliği SIRS modeli için de geçerlidir. Aşağıda (Şekil 3) SEIR modelinin akış şeması gösterilmektedir. Buradan da görüldüğü gibi iyileşenler (R) tekrar hasta olabilmektedirler.



Şekil 3. SEIR Modeli Akış Şeması

1.4. Literatür Araştırması

Salgın hastalıkların matematiksel olarak incelenmesi, Daniel Bernoulli'nin 1766'da çiçek hastalığı ve aşılama üzerine yaptığı araştırmalardan sonra önemli ölçüde ilerlemiştir (Bekiryazici, 2017).

Abioye, Peter, Ogunseye ve ark. (2021) çalışmasında Covid-19 modeli oluşturup modelin kararlılık analizi, çözümün pozitifliği, modelin denge noktaları ve denge noktalarının kararlılığını, serbest denge kararlılığını araştırmışlardır. Ayrıca model için R_0 (Temel üreme sayısı) ile ilgili analizler yapmışlardır. Ve makalenin son kısmında modelin optimal kontrolünü incelemişlerdir.

Djillai, Atangana ve ark. (2021) tarihinde yayınlanan makalede Caputo türev yardımıyla Covid-19 modelini kesirli mertebeden model haline getirmişler ve yeni model için kararlılık analizi, denge noktalarını incelemişlerdir. Hopf dallanmasıyla modelin lokal kararlılığının analizini yapmışlardır. Ve makalenin sonunda denge noktalarıyla bulunan sonuçları simülasyonlarla desteklemişlerdir.

Rihan ve Alsakaji (2021) tarafından hazırlanan makalede zaman gecikmeli stokastik epidemik model incelenmiştir. Bu makalede Covid-19 modeline hem stokastik hem de delay terimleri eklenerek analizler yapılmıştır. Makalenin sonunda ise modelin hem stokastik hem de deterministik simülasyonları matlab yardımıyla çizdirilmiş ve karşılaştırmalar yapılmıştır. Ayrıca model için yoğunluk fonksiyonları da çizdirilmiştir.

Merdan, Bekiryazici ve ark. (2017) çalışmalarında, Hepatit C modeli için lokal ve global kararlılık analizi yapmışlardır. Modelin rastgele davranışlar etkisi altındaki incelemesi de yapılmıştır.

Khan vd., (2021) tarafından yazılan makalede zaman gecikmeli Covid-19 modeline stokastik terimler eklenerek analizler yapmışlardır. Stokastik kararlılık için deterministik ve stokastik durum eğrileri matlab yardımıyla çizdirilmiş olup bu durumlar için analizler yapılmıştır.

Zafar vd., (2020) tarihinde yayınlanan makalede kesirli mertebeden Vallis system için analizler yapılmıştır. Modelin nümerik analizi için Grünwald-Letnikov algoritması kullanılmıştır. Kaotik sistem olan Vallis sistem için faz diyagramları çizdirilmiştir ve analizler yapılmıştır.

Atangana ve Araz (2020), makalede model için oldukça fazla geniş bir analiz yapılmıştır. Model için tüm grafikler ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir.

Okposo ve Jonathan (2020), çalışmalarında Caputo ve Riemann-Liouville türevleri yardımıyla ve q-Homotopy yöntemiyle modelin analizi yapılmıştır.

Merdan (2013), tarafından yazılan makalede yine kesirli mertebeden Vallis sistem için analizler yapılmıştır.

Arqub, El-Ajou ve ark. (2013), makalede homotopy analiziyle ilgili teorik bilgiler verilmiş olup SIR modeli homotopy yöntemiyle çözümleri elde edilmiştir.

Gul, Ali, Shah ve ark. (2021), makalede kısmi diferansiyel denklem sistemine homotopy yöntemi uygulanmıştır ve geniş çapta simülasyon analizi yapılmıştır.

Çakır ve Savaş (2020), ‘İran’daki Covid-19 pandemisi için matematiksel modelleme’ adlı makalede İran ve Türkiye için kısa bir çalışma yapmışlardır.

1.5. Tez İçeriği

Bu tez, deterministik diferansiyel denklem sistemlerinden oluşan bölmeli bir COVID-19 modelinin kararlılığını incelemeyi, stokastik ve gecikme faktörlerinin dahil edilmesi üzerine davranışını değerlendirmeyi ve kesirli ve sayısal çalışmalar yapmayı amaçlamaktadır. Her inceleme için geliştirilen modellerin dinamik bir çalışması gerçekleştirilecek ve hem yaklaşık hem de kesin cevaplar araştırılacaktır. Yaklaşık ve kesin cevaplar, okuyucunun değerlendirmesi için simülasyon bulguları ve deterministik sonuçlarla yan yana getirilecektir. Stokastik gürültü ve gecikme terimlerini deterministik modellere dahil ederek yeni modeller geliştirilecek ve gecikme teriminin dahil edilmesiyle hastalığın stokastik davranışını analiz etmek için stokastik çözümler kullanılacaktır. Ek olarak, modelde homotopi analizi kullanılacak ve sonuçlar simülasyonlarla doğrulanacaktır.

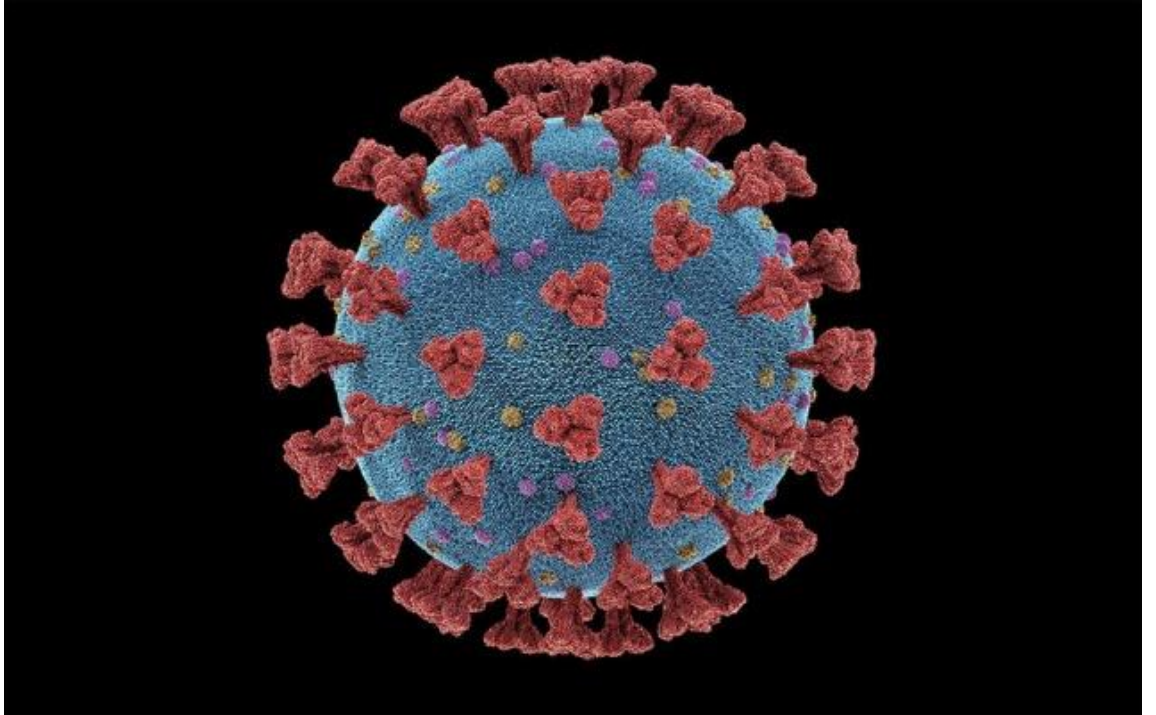
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde tez çalışması için gerekli olan yöntemler model (11)'e uygulanacak ve Matlab yardımıyla sonuçlar grafik olarak yorumlanacaktır. Covid-19 modeli için dinamik analiz yapılacaktır.

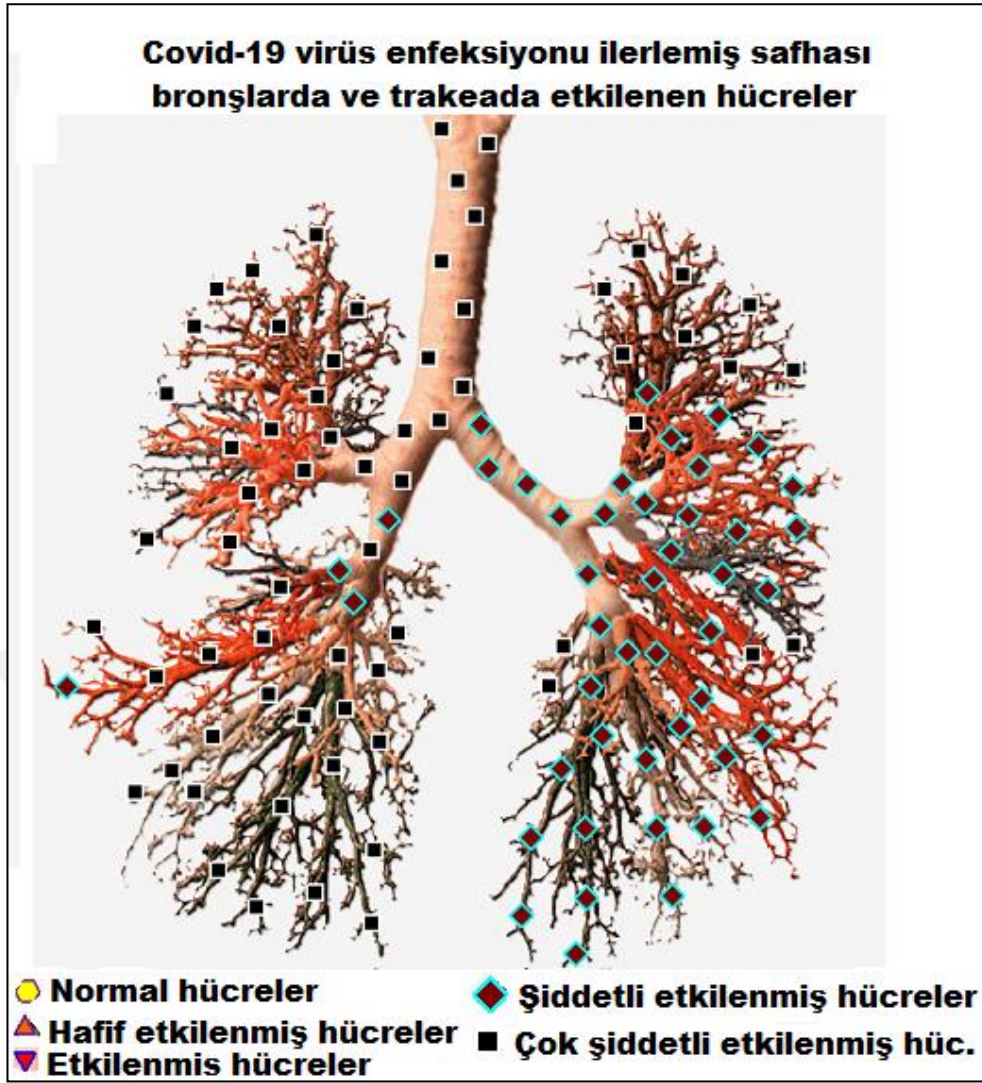
2.1. Covid-19

Koronavirüsler [coronaviruses (CoVs)], toplumda yaygın görülen, hafif enfeksiyon belirtileri gibi bir klinikten, Orta Doğu solunum yolu sendromu (Middle East respiratory syndrome (MERS)) ve şiddetli akut solunum yolu sendromu [severe acute respiratory syndrome (SARS)] gibi daha ciddi enfeksiyonlara neden olabilen bir virüs ailesidir (Channappanavar ve Perlman, 2017). (Şekil 4). CoV'lerin insanlarda bulunan, insandan insana rahatlıkla bulaşabilen çeşitli alt tipleri (HCoV-229E, HCoV-OC43, HCoV-NL63 ve HKU1-CoV) bulunmaktadır (Şirin ve Özkan, 2020). İnsanlar arasında dolaşan bu alt türler çoğunlukla soğuk algınlığına sebep olan virüsler olarak bilinir. Bunun yanı sıra hayvanlarda saptanmış birçok CoV alt türü de mevcuttur ve bu virüslerin hayvanlardan insanlara geçerek insanlarda ağır hastalıklara neden olabildiği bilinmektedir. Araştırmalar sonucunda, SARS-CoV'nin misk kedilerinden, MERSCoV'nin ise tek hörgüçlü develerden insanlara bulaştığı ortaya çıkmıştır (Cui vd., 2019; Su vd., 2016). SARS-CoV, 2003 yılında 21. yüzyılın ilk uluslararası sağlık acil durumu olarak daha önceden bilinmeyen bir virüs hâlinde ortaya çıkmış olup, birçok insanın ölümüne sebep olmuştur (Perlman, 2020). 2012 yılında ise yine CoV ailesinden, önceden hayvan ya da insanlarda varlığı gösterilmemiş olan MERS-CoV ortaya çıkmıştır. Dünya Sağlık Örgütü (DSÖ) Çin Ülke Ofisi, 31 Aralık 2019 tarihinde, Çin'in Hubei eyaletinin Vuhan şehrinde ortaya çıkan ve etiyolojisi bilinmeyen pnömoni vakalarını bildirmiştir (Şirin ve Özkan, 2020). Vuhan Güney Çin Deniz Ürünleri Şehir Pazarı çalışanlarında vakalar olduğu belirtilmiştir. Vakalarda ateş, nefes darlığı ve radyolojik olarak bilateral akciğer pnömonik infiltrasyonu ile uyumlu bulgular tespit edilmiştir (Şekil 5). Ölüm vakaları genellikle ileri yaştaki ya da eşlik eden sistemik hastalığı (hipertansiyon, diyabet, kardiyovasküler hastalık, kanser, kronik akciğer hastalıkları başta olmak üzere diğer immünsupresif durumlar) olan bireyler olmuştur (Haung ve Wang 2020). Etken, yeni bir CoV [novel CoV (2019-nCoV)] olarak 7 Ocak 2020 tarihinde tanımlanmıştır. Daha sonra 2019-nCoV, CoV hastalığı [CoV disease (COVID-19)] olarak kabul edilmiş; virüs, SARS CoV'ye yakın benzerliğinden dolayı

SARS-CoV-2 olarak adlandırılmıştır (URL-1, 2022). DSÖ, COVID-19 salgını 30 Ocak 2020 tarihinde “Uluslararası Boyutta Halk Sağlığı Acil Durumu” olarak sınıflandırmış; salgının ilk başladığı Çin dışında 113 ülkede COVID-19 vakalarının görülmesi, virüsün yayılımı ve şiddeti nedeni ile 11 Mart 2020’de küresel salgın (pandemi) olarak tanımlamıştır. Bugüne kadar dünyada Antarktika dışındaki tüm kıtalarda teyit edilmiştir. (URL-2, 2022). Vaka sayıları ve kümülatif insidans, gerek ülkeler gerekse kıtalarda değişkenlikler göstermektedir. Bu değişkenlikler nüfus yoğunluğuna ve demografik yapısına, test yapma-raporlama kapasitesine ve hastalığı kontrol etme yöntemleri gibi bir grup faktöre bağlıdır. Özellikle uzun süreli toplu yaşam yerlerinden yaşlı bakımevlerinde ve sosyoekonomik düzeyi düşük kesimlerde riskin daha fazla olduğu gözlenmektedir (McMichael vd., 2020). Ülkemizde ise 10 Ocak 2020 tarihinde, T. C. Sağlık Bakanlığı COVID-19 Bilim Kurulu oluşturulmuş, alınan önlemler ile ilk COVID-19 vakası, Avrupa ve İran gibi komşu olduğumuz ülkelere göre oldukça sonra, 11 Mart 2020’de görülmüştür. 20 Mayıs 2020 tarihinde dünyada 4.731.458 vaka, 316.169 ölüm; Türkiye’de ise 151615 vaka, 4199 ölüm bildirilmiştir (URL-1: 2020).



Şekil 4. Cov-19 virüsünün mikroskop altındaki görüntüsü



Şekil 5. Covid-19'un akciğerlere etkisi isimli görsel

2.1.1. Enfeksiyon Zinciri

Enfeksiyon zinciri: Sağlıklı bir bireyin enfeksiyonundan önce gerçekleşen bir dizi olay sırasında, organizmada enfeksiyona yol açan bir döngü ortaya çıkar. Enfeksiyon zinciri altı aşamadan oluşur.

Etken Enfeksiyon: Vücudun farklı bölgelerinde bulunan mikroorganizmalar, organizmanın temel savunma mekanizmalarına entegre olur. Patojenik organizmalar enfeksiyona neden olur. Mikroorganizmalar canlı ve cansız olmak üzere iki sınıfa ayrılır. Canlılar, insanları, hayvanları ve bitkileri kapsar. Cansız ortamlar ise toprak, su, masa ve benzeri varlıkları kapsar.

Bakteriler, ikiye bölünerek çoğalan tek hücreli organizmalardır. Üremek için ısıya, neme, besine, asiditeye veya uygun bir yaşam alanına ihtiyaç duyarlar. Vücuda girdikten sonra mikroplar zararlı hale gelir ve ardından antibiyotiklerle tedavi edilirler.

Virüsler, DNA ve RNA olmak üzere iki yapısal sınıfa ayrılır. Üreme ve çoğalma için canlı dokuya ihtiyaç duymalarına rağmen, hücreler içinde parazit olarak da

bulunurlar. Solunum ve sindirim sistemleri yoluyla vücuda sızan virüsler, antibiyotiklere karşı dirençlidir, ancak dış çevresel faktörlere duyarlı hale gelirler.

Mantarlar, uygun ortamlarda organik olarak çoğalırlar. İnsanlar için patojenik olduğu bilinen yaklaşık 100 mantar türü hastalığa neden olur. Mikozis olarak adlandırılan bu rahatsızlık, doğrudan temas ve ağız yoluyla tüketim yoluyla bulaşır.

Parazitler, diğer canlılarda yaşayan ve hayatta kalmak için onların kaynaklarına bağımlı olan canlılardır. Hem hayvansal hem de bitkisel kaynaklardan gelen bu zararlı tür, organların içinde yaşadığında endoparazitizme, dışında yaşadığında ise ektoparazitizme neden olur.

Kaynak: Enfeksiyonun yerleşip çoğaldığı, zincirin sonunu belirten biyotik ve abiyotik varlıklar. Daha önce hastalık geçirmiş bir birey bile bir kaynak görevi görebilir.

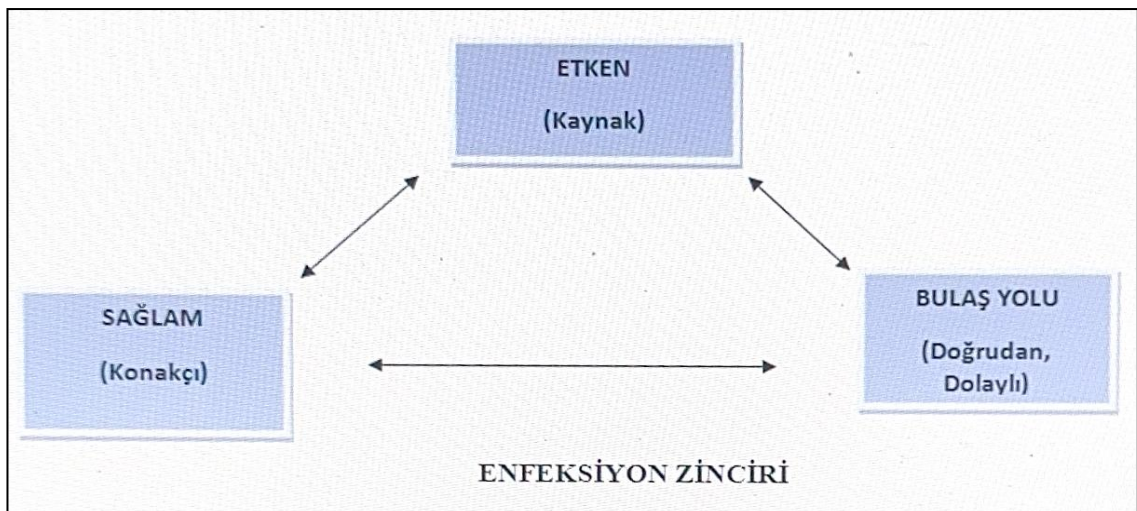
Çıkış Kapısı: Mikropların vücuttan çıkış yolu. Sinüs akıntısı, dışkı ve kulak akıntısı kaçış kapıları olarak adlandırılır. Birçok hastalıktan korunmak için hayati önem taşıyan bu prosedür, Enfeksiyon Zincirini etkili bir şekilde bozar.

Bulaşma Yöntemi: Enfeksiyon, enfekte bir birey ile enfekte olmayan bir birey arasında el sıkışma, öpüşme, bardak paylaşma veya cinsel ilişki gibi eylemler dahil olmak üzere doğrudan temas yoluyla bulaşır.

Giriş Kapısı: Enfeksiyonların yayılmasının başlıca yerleri. Ağız, burun, boğaz, gözler ve cilt giriş noktaları olarak işlev görür.

Uygun Konak: Bireylerin vücut direnci zayıflamış veya mikroplarla savaşmak için yeterince güçlü olmayan bağışıklık sistemleri vardır.

Bulaşıcı hastalıklardaki enfeksiyon zinciri, enfeksiyon kaynağını (rezervuar), bulaşma yolunu ve konakçıyı içerir.



Şekil 6. Enfeksiyon Zinciri akış şeması

Mevcut kanıtlar, SARS-CoV-2'nin hayvansal kökenli olduğunu göstermektedir. Kesin olmamakla birlikte, deniz ürünleri pazarlarında satılan vahşi hayvanlardan kaynaklandığı anlaşılmaktadır. Daha sonra, hem semptomatik hem de asemptomatik COVID-19 pozitif kişilerin kaynak olarak hizmet verdiği insandan insana bulaşma gerçekleşmiştir (Huang vd.,2019). Hastalık ilk olarak Aralık 2019'da Çin'in Wuhan kentindeki bir deniz ürünleri pazarında çalışan ve bu pazara gelen kişilerde tespit edilmiş ve daha sonra deniz ürünleri tüketenlerin dışındaki kişileri de etkilediği gösterilmiştir. Pandemi dünya çapında yayıldıkça, insandan insana bulaşma baskın bulaşma yolu olarak ortaya çıkmıştır.

10 ila 12 SARS-CoV-2'nin kişiden kişiye bulaşma yolu henüz bilinmemektedir; ancak kanıtlar, grip gibi solunum damlacıkları yoluyla gerçekleştiğini göstermektedir. COVID-19 ile enfekte kişilerin öksürmesi, hapşırması veya konuşması sırasında damlacıklar yoluyla yayılan virüs, mukoza zarlarıyla doğrudan temas yoluyla veya kontamine yüzeylere dokunulduktan sonra ağız, burun veya oral mukozaya dokunulması yoluyla başka bir kişiye bulaşabilir (Wu vd., 2020). Vakaların ortalama kuluçka süresinin 5-6 gün (2 ila 14 gün arasında) olduğu, bazı durumlarda ise 14 güne kadar uzadığı kaydedilmiştir. COVID-19 virüsü ile enfekte kişilerde bulaşıcılık süresi henüz net değildir.

Koronavirüsler, influenza, SARS-CoV ve rinovirüs dahil olmak üzere çok sayıda solunum yolu virüsü, yüzeylerde birkaç gün boyunca canlı kalabilir. Cansız yüzeylerde canlı kalma süresi, viral yüke ve sıcaklık ve nem gibi çevresel faktörlere bağlı olarak dakikalardan bir aya kadar değişmektedir. (Şirin vd., 2020)SARS-CoV-2, bulaşıcılığını koruyarak havalandırılmayan kapalı otobüslerin havasında en az 30 dakika kalabilir.Bununla birlikte, benzer çalışmaların sistematik incelemesinde, çeşitli dezenfektanların (%62-71 konsantrasyonlarda etanol dâhil), 1 dakika içinde SARS-CoV-2 ile ilgili birtakım virüsleri inaktive ettiği ispatlanmıştır (Kampf vd., 2020). Bu durum da çevresel dezenfeksiyonun önemini vurgulamaktadır. Dezenfektanlar ve el yıkama bu durumda önem kazanmıştır.

Tüm bireyler COVID-19'a karşı savunmasızdır; ancak erkekler, 50 yaş üstü kişiler ve kronik rahatsızlıkları (kalp hastalığı, hipertansiyon, kronik obstrüktif akciğer hastalığı, kanser ve diyabet gibi) olanlar dahil olmak üzere belirli demografik grupların yüksek risk altında olduğunu kabul ediyoruz (Wu vd., 2020). Enfeksiyon oranının çocuklar ve genç yetişkinler arasında önemli ölçüde daha düşük olduğu görülmüştür. Bu bireylerde asemptomatik enfeksiyonların yaygınlığı belirgin şekilde yüksektir.

2.1.2. Dünyada Covid-19

Salgının başlangıcından bu yana neredeyse beş yıl geçmiştir. Ocak 2019'un sonunda pandemi İran'da yayılmaya başlamış ve ardından Avrupa'ya yayılmıştır. Avrupa'daki ilk örnekler İtalya'da ortaya çıkmış, ardından Almanya, İspanya ve Fransa'ya ve en son Amerika Birleşik Devletleri'ne yayılmıştır. Bu ülkelerden sonra Birleşik Krallık, Hollanda, Belçika, İsviçre ve Avusturya'da da örnekler görüldü. Nisan 2020'den bu yana Rusya'da vaka sayısında önemli bir artış yaşanmıştır. Her ikisi de önemli Asya ülkeleri olan Hindistan ve Bangladeş'te vaka sayıları artarken, Güney Amerika ülkelerinde, özellikle Brezilya'da da vakalarda dramatik bir artış görülmüştür. Mayıs ayı yaklaşırken, Avrupa ülkelerindeki vaka insidansında küçük bir düşüş başlamıştır. Bu dönem boyunca Avusturya ve İsviçre salgını yönetmede en etkili ülkeler olmuştur; Almanya daha kalabalık ülkeler arasında yer almıştır. İspanya salgını yönetmede zorluklar yaşamıştır. Bu arada Birleşik Krallık, hastalığa maruz kalarak bağışıklık kazanma (sürü bağışıklığı) yaklaşımı nedeniyle salgını kontrol altına almakta başlangıçta zorlanan ülkelerden biri olarak açıklanmıştır. Benzer şekilde, Amerika Birleşik Devletleri de salgını ihmal ederek ve karantina önlemlerini geç uygulayarak salgını yönetmekte zorluklarla karşılaşmıştır.

Şekil 7 ve 8'de de dünyadaki Cov-19 verilerinden bazıları gösterilmiştir.



Şekil 7. Dünya'da Cov-19 salgını

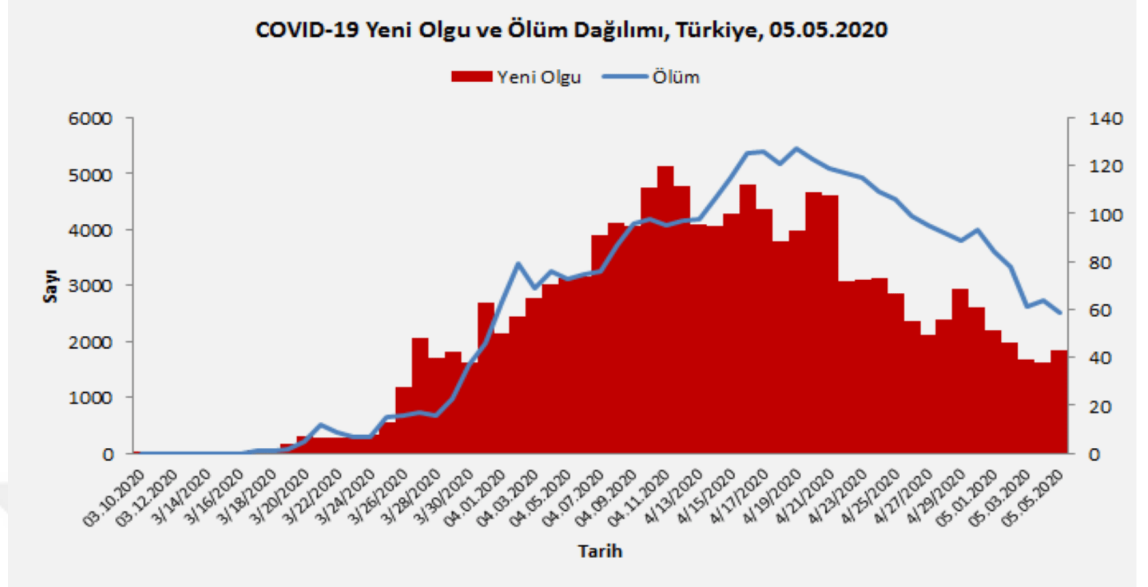


Şekil 8. Dünya genelinde Cov-19 bulaşan kişi sayısı

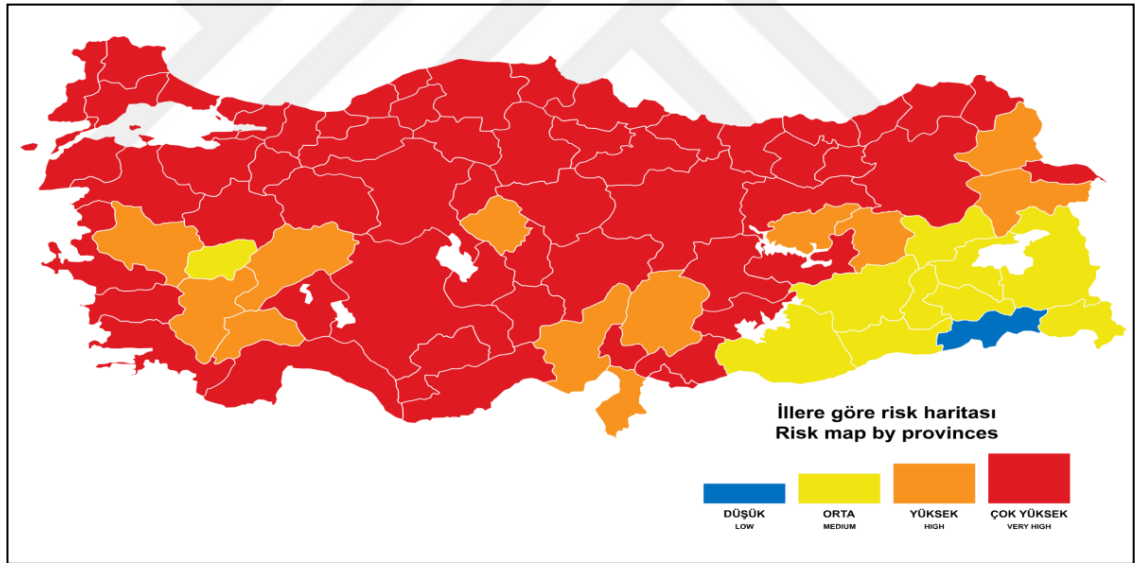
2.1.3. Türkiye’de Covid-19

Ülkemizde ilk vaka 11 Mart 2020’de bildirilmiştir. Sağlık Bakanlığı Pandemi Bilim Kurulu tarafından oluşturulan ulusal yönergeler doğrultusunda koruyucu önlemler, temas takibi, koruyucu stratejiler ve tedavi edici tedaviler yürütülmektedir (URL-3: 2022). Şekil 9 (URL-4: 2022), Türkiye’deki günlük COVID-19 vaka ve ölüm sayılarını göstermektedir. Salgın eğrisi, vaka sayısının 11 Nisan 2020’de zirveye ulaştığını göstermektedir. Daha sonra, salgın eğrisindeki dalgalanmalara rağmen, vaka sayılarında belirgin bir düşüş kaydedilmiştir. Benzer düşüşler ölüm oranında da görülmüştür. Şekil 10 (URL-4: 2022), Türkiye’deki illere göre Covid-19 vakalarının dağılımını göstermektedir. Bu tablo, riskin hemen hemen tüm illerde yüksek olmasına rağmen, Şırnak ve Hakkari’de ülke ortalamasına göre çok daha düşük olduğunu göstermektedir. Ülkemizde uygulamaya konulan müdahaleler, özellikle "okulları kapatarak ve gençlere evde kalmalarını tavsiye ederek bulaşma riskini azaltmak" ve "en savunmasız demografik grup olan 65 yaş üstü bireylerin evde kalmasını zorunlu kılmak", benzer nüfusa sahip birçok Avrupa ülkesine kıyasla vaka ve ölüm oranlarının düşük kalmasına önemli ölçüde katkıda bulunmuştur. Ayrıca, esnek çalışma düzenlemeleri, vaka sayılarının yüksek olduğu yerlerde erişim ve izin kısıtlamaları, hafta sonu sokağa çıkma yasakları ve halka açık alanlarda zorunlu maske kullanımı gibi önlemler COVID-19 bulaşının azaltılmasına katkıda bulunmuştur. Bu önlemlerin ardından Türkiye, 11 Mayıs 2020’de yeni normale

geçiş sürecini başlatmıştır. Bu sürecin etkili bir şekilde kontrol altına alınması, sosyal mesafe, el hijyeni ve maske kullanımına uyum sağlanması olumlu sonuçlar vermiştir.



Şekil 9. Covid-19 yeni olgu ve ölüm dağılımı



Şekil 10. İllere göre Covid-19 risk haritası

Tüm bu Covid-19 teorik bilgileri ışığında aşağıdaki Covid-19 modeli oluşturulmuştur.

2.2. Covid-19 Modeli

$N(t)$ t zamandaki toplam popülasyonu temsil eder ve toplam popülasyon beş bölmeye ayrılmaktadır. Bunlar;

$S(t)$ hastalığa duyarlı insanlar, $E(t)$ hastalığa maruz kalan insanlar, $I(t)$ Cov-19 ile enfekte olan insanlar, $Q(t)$ karantinada olan insanlar ve $R(t)$ iyileşen insanlar olarak verilmektedir. Bu yüzden;

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) \quad (9)$$

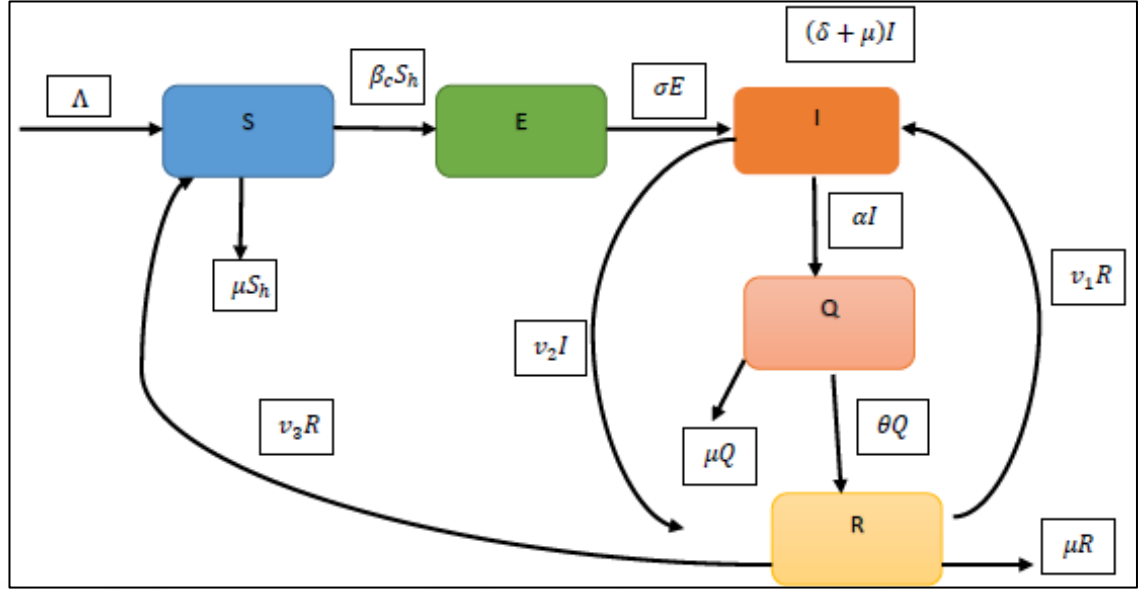
şeklinde yazılabilmektedir

Λ insanların iyileşme oranı, ϕ_c Cov-19 temas oranı olarak verilsin. Aynı zamanda v_1 ve θ sırasıyla $I(t)$ ve $Q(t)$ 'den kurtulan insanların oranı, μ doğal ölüm oranı δ ise Cov-19 hastalığından ölen insanların oranı, α virüse enfekte olan insanların tespit oranı ve v_2 virüsün yeniden nüksettiği insanların oranıdır. Bu yüzden hassas insanlar Covid-19 enfektesini $\beta_c = \frac{\phi_c I}{N}$ oranında iletirler. Tüm bunlar kullanılarak oluşturulmuş diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \frac{\phi_c IS}{N} - \mu S + v_3 R, \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\phi_c IS}{N} - (\sigma + \mu)E, \\ \frac{dI}{dt} &= \sigma E - (\alpha + v_2 + \delta + \mu)I + v_1 R, \\ \frac{dQ}{dt} &= \alpha I - (\theta + \mu)Q \\ \frac{dR}{dt} &= \theta Q - (v_1 + v_3 + \mu)R + v_2 I \end{aligned} \quad (10)$$

$S = S/N, E = E/N, I = I/N, Q = Q/N, R = R/N$ kullanılarak (10) denklemi normalize edilir ve aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \phi_c IS - \mu S + v_3 R, \\ \frac{dE}{dt} &= \phi_c IS - (\sigma + \mu)E, \\ \frac{dI}{dt} &= \sigma E - (\alpha + v_2 + \delta + \mu) \\ &\quad + v_1 R, \\ \frac{dQ}{dt} &= \alpha I - (\theta + \mu)Q \\ \frac{dR}{dt} &= \theta Q - (v_1 + v_3 + \mu)R + v_2 I \end{aligned} \quad (11)$$



Şekil 11. Covid-19 modelinin akış şeması

Modelde kullanılan kompartmanlar, tüm parametreler ve yardımcı fonksiyonlar tanımlarıyla birlikte Tablo 1, Tablo 2, Tablo 3 ve Tablo 4’te gösterilmiştir.

Tablo 1. Cov-19 modelinin kompartmanları

Değişken	Tanımı
$S(t)$	t zamandaki duyarlı insanların sayısı
$E(t)$	t zamandaki maruz kalan insanların sayısı
$I(t)$	t zamandaki enfekte olan insanların sayısı
$Q(t)$	t zamandaki karantinada olan insanların sayısı
$R(t)$	t zamandaki iyileşen insanların sayısı
$N(t)$	t zamandaki toplam insanların sayısı

Tablo 2. Cov-19 modelinin kontrol mekanizmaları

Kontrol	Tanımı
$u_1(t)$	t zamanda sosyal mesafe, el dezenfektanı ve maske kullanımı
$u_2(t)$	t zamanda testle aktif tarama, Covid-19 hastalarının tedavisi
$u_3(t)$	t zamanda Covid-19 dan iyileşen insanların yeniden enfekte olmasına karşı kontrol

Tablo 3. Modelin parametreleri ve değişkenlerinin tanımı

Parametre	Tanımı
Λ	Bireylerin iyileşme oranı
ϕ_c	Covid-19 bulaşı için temas oranı
σ	Bireylerin maruz kalma oranı
μ	Doğal ölümlerin oranı
v_2	Bireylerin nüksetme oranı

Tablo 3. (Devamı).

δ	Covid-19'dan ölüm oranı
θ	Karantinada olan bireylerin iyileşme oranı
α	Bulaşıcı bireylerin tespit oranı
v_1	Bulaşıcı bireylerden iyileşme oranı
v_3	İyileşen bireylerin duyarlı sınıfa dönme oranı

Tablo 4. Modelin parametrelerinin gerçek değerleri

Parametre	Değeri	Referans
Λ	750	[10]
ϕ_c	0.0000124	Tahmini
σ	0.000011618	Tahmini
μ	0.00324588	Uygun
v_2	0.001466848	Uygun
δ	0.00286	Tahmini
θ	0.0766169	Uygun
α	0.010939586	Uygun
v_1	0.1109289	Uygun
v_3	0.0022927	Uygun
R_0	0.523984	Hesaplanmış

2.3. Covid-19 Modelinin Analizi

Bu bölümde modelin denge noktalarının varlığını, değişmez bölgesini, çözümlerinin sınırlılığını ve pozitifliğini içeren nicel çalışmalar yapmaya devam edilecektir. Diğer incelenecekler arasında ise Covid-19 modelinin temel üreme katsayısı R_0 , Covid-19 modelinin serbest ve yerel denge kararlılığı yer almaktadır.

2.3.1. Çözümün Pozitifliği

Teorem 1. Negatif olmayan başlangıç şartları $S(0), E(0), I(0), Q(0), R(0)$ olarak alınsın. O halde (11) modelinin $(S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t))$ çözümleri her $t > 0$ tüm pozitif değerler için pozitiftir.

İspat. $t^* = \sup(t > 0: (S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t)) > 0)$ olarak alınsın. Buradan $t^* > 0$ olur. (11) modelinin ilk denkleminde,

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \phi_c IS - \mu S + v_3 R \geq (\phi_c I + \mu) S \quad (12)$$

(12) denklemini integral faktörü kullanılarak,

$$\frac{d}{dt} \left[S(t) e^{\int_0^t \phi_c I(s) ds + \mu t} \right] \geq \Lambda \left(e^{\int_0^t \phi_c I(s) ds + \mu t} \right) \quad (13)$$

olarak elde edilir. İntegral sınırlarını $t = 0$ dan $t = t^*$ a olarak alırsak

$$S(t^*) \geq S(0) \left(e^{-\int_0^{t^*} \phi_c I(s) ds - \mu t^*} \right) + \left(e^{-\int_0^{t^*} \phi_c I(s) ds - \mu t^*} \right) \int_0^{t^*} \Lambda \left(e^{\int_0^t \phi_c I(x) dx + \mu y} \right) dy > 0 \quad (14)$$

olarak elde edilmiş olur.

Sonuç olarak, $S(t^*)$ pozitif terimlerin toplamından büyük veya eşittir. Benzer argümanlar kullanılarak her $t^* > 0$ için $E(t), I(t), Q(t), R(t)$ çözümlerinin de sıfırdan büyük olduğu gösterilebilir.

2.3.2. Çözümün Sınırlılığı

Teorem 2. (11) diferansiyel denklem sisteminin $S(0), E(0), I(0), Q(0), R(0)$ çözümlerinin hepsi sınırlıdır. Yani eğer $\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ ise $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$ dir.

İspat. $0 < I(t) \leq N(t)$, çözümün sınırlılığını ispat etmek için (11) modelindeki denklemlerin tümünü toplanırsa,

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N - \delta I \quad (15)$$

denklemini elde edilir. (11) denklem sistemindeki çözümler sınırlıdır. Bu yüzden (15) denkleminde, $\Lambda - (\mu + \delta)N(t) \leq \frac{dN(t)}{dt} \leq \Lambda - \mu N(t)$ dir ve

$$\frac{\Lambda}{\mu + \delta} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} \quad (16)$$

olarak yazılabilir.

2.3.3. Modelin Değişmez Bölgesi

Pozitif başlangıç şartlarıyla (11) Covid-19 modelini düşünüldüğünde, tüm durum değerleri Ω bölgesinde uygulanabilir olmalıdır.

Teorem 3. $\Omega \subset R_+^5$ bölgesi negatif olmayan başlangıç şartlarıyla (11) modeli için negatif olmayan değişmez bir bölgedir.

İspat: (11) Covid-19 modelinin uygulanabilir bölgesi Ω olarak alalım. Bu yüzden (11) modelinin uygulanabilir bölgesi

$$\Omega = \left\{ (S, E, I, Q, R) \in R_+^5 : S + E + I + Q + R \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\} \quad (17)$$

ile ifade edilebilir. Ω 'nın pozitif değişmezliğini doğrulamak için aşağıdaki adımlar dikkate alınır, yani Ω bölgesindeki çözüm yine her $t > 0$ için Ω bölgesinde kalır. Buradan alınır ki $\frac{dN(t)}{dt} \leq \Lambda - \mu N(t)$ dir. Standart karşılaştırma teoreminden,

$$N(t) \leq N(0)e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t}) \quad (18)$$

elde ederiz.

Özel olarak eğer $N(0) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ ise $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ dir. Bu yüzden Ω pozitif değişmez bölgedir.

2.3.4. Covid-19 Modeli İçin Denge Noktasının Varlığı

Bu bölümde, (11) Covid-19 modelinin denge noktasının varlığı şartlarıyla birlikte incelenecektir. Denge noktasının varlığını doğrulamak için, Covid-19 Serbest Denge (CFE) noktası (11) modelindeki denklemlerin sağ taraftan türevleri sıfıra eşitlenerek elde edilir. Aynı zamanda Covid-19 I ile enfekte olmuş insanları sıfır alarak değiştirerek elde edilir. Böylece

$$E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right) \quad (19)$$

olur.

Benzer şekilde Covid-19 modelinin (11) sağ tarafındaki türevleri sıfır alınır ve $S = S^*, E = E^*, I = I^*, S = S^*, Q = Q^*$ ve $R = R^*$ yerine yazılır. Yerel denge noktası E_1 I sıfır olmadığında ortaya çıkar ve,

$$\begin{aligned}
S^* &= \frac{\Lambda + v_3 R^*}{\phi_c I^* + \mu} \\
E^* &= \frac{\phi_c + I^* S^*}{(\sigma + \mu)} \\
I^* &= \frac{\sigma E^* + v_1 R^*}{(\alpha + v_2 + \delta + \mu)} \\
Q^* &= \frac{\alpha I^*}{\theta + \mu} \\
R^* &= \frac{\theta Q^* + v_2 I^*}{(v_1 + v_3 + \mu)}
\end{aligned} \tag{20}$$

elde edilir. (20) denklemindeki denklemlerin her birini sadeleştirerek;

$$\begin{aligned}
S^* &= \frac{a_2(a_1 a_3 a_4 - a \theta v_1 - a_3 v_1 v_2)}{\phi_c \sigma a_3 a_4} \\
E^* &= \frac{(\Lambda \phi_c \sigma a_3 a_4 + a \mu \theta a_2 v_1 - \mu a_1 a_2 a_3 a_4 + \mu a_2 a_3 v_1 v_2)}{(a \sigma \theta v_3 + a \theta a_2 v_1 + \sigma a_3 v_2 v_3 - a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 v_1 v_2)} \frac{(a \theta v_1 - a_1 a_3 a_4 + a_3 v_1 v_2)}{\phi_c \sigma a_3 a_4} \\
I^* &= \frac{\mu a_1 a_2 a_3 a_4 - \Lambda \phi_c \sigma a_3 a_4 - a \mu \theta a_2 v_1 - \mu a_2 a_3 v_1 v_2}{\phi_c (a \sigma \theta v_3 + a \theta a_2 v_1 + \sigma a_3 v_2 v_3 - a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 v_1 v_2)} \\
Q^* &= \frac{a(\mu a_1 a_2 a_3 a_4 - \Lambda \phi_c \sigma a_3 a_4 - a \mu \theta a_2 v_1 - \mu a_2 a_3 v_1 v_2)}{\phi_c (a \sigma \theta v_3 + a \theta a_2 v_1 + \sigma a_3 v_2 v_3 - a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 v_1 v_2) a_3} \\
R^* &= \frac{(\mu a_1 a_2 a_3 a_4 - \Lambda \phi_c \sigma a_3 a_4 - a \mu \theta a_2 v_1 - \mu a_2 a_3 v_1 v_2)}{(a \sigma \theta v_3 + a \theta a_2 v_1 + \sigma a_3 v_2 v_3 - a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 v_1 v_2)} x \frac{(a \theta + a_3 v_2)}{\phi_c a_3 a_4}
\end{aligned} \tag{21}$$

denklemleri elde edilir. Burada $a_1 = (\alpha + v_2 + \delta + \mu)$, $a_2 = (\sigma + \mu)$, $a_3 = (\theta + \mu)$ ve $a_4 = (v_1 + v_3 + \mu)$ dür.

2.4. Temel Üreme Sayısı (R_0)

"R sıfır" olarak ifade edilen R_0 , bulaşıcı bir hastalığın bulaşıcılığını ifade eden matematiksel bir kavramdır. Temel Üreme Sayısı olarak adlandırılan R_0 , adi diferansiyel denklemlerden türetilen enfeksiyon modellerinde kullanılan bir ölçüttür.

R_0 , yeni nesil matrisin spektral yarıçapı olarak tanımlanır. Bu değer, adi diferansiyel denklemlerle temsil edilen homojen olmayan popülasyon modelleri için uygundur.

R_0 , bulaşıcı bir hastalığa tamamen duyarlı bir toplumdaki tek bir hastadan kaynaklanan ikincil vakaların ortalama sayısını ifade eder. Bu, özellikle daha önce enfekte olmamış veya aşılanmamış bir popülasyon için geçerlidir. R_0 değeri bir tam sayı 2 veya sayısal bir aralık (1,5-6,2) olarak gösterilir. Bir hastalığın R_0 değeri 2 ise, enfekte bir birey ortalama olarak hastalığı 2 kişiye daha bulaştıracaktır. Bir hastalığın R_0 değeri, yalnızca tüm popülasyonun hastalığa tamamen duyarlı olduğu durumlarda geçerlidir. Bu, hiçbir bireyin aşılanmadığını, daha önce hiç kimsenin hastalığa yakalanmadığını ve hastalığın bulaşmasını yönetmenin zor olduğunu göstermektedir. Tüm bu nedenlerin bir arada görülme olasılığı, tıptaki çağdaş gelişmeler sayesinde azalmıştır. Eskiden ölümcül olan birçok hastalık artık yönetilebilir ve tedavi edilebilir durumdadır.

Enfeksiyöz ajan, konak ve çevresel faktörler olmak üzere üç epidemiyolojik değişken, tahmini R_0 değerini hesaplamak için kritik öneme sahiptir.

Bir hastalığın R_0 değerini hesaplamak için aşağıdaki faktörler dikkate alınır.

a) Enfeksiyon dönemi: Bazı hastalıklar diğerlerine göre daha uzun süreli bulaşıcılık gösterebilir. Örneğin grip olan yetişkinler 5-7 güne kadar bulaştıracılıkları devam eder. Çocuklar ve bağışıklık sistemi zayıf kişiler ise 7 günden daha uzun süre bulaştırıcı diğer insanlara bulaştırma olasılığı o kadar yüksektir. Uzun bir bulaştıracılık süresi daha yüksek bir R_0 değerine neden olmaktadır.

b) Temas oranı: Bulaşıcı bir hastalığın bulaşması, etkilenen bir bireyin enfekte olmayan veya aşılanmamış çok sayıda kişiyle etkileşime girmesiyle hızlanır. Kişi evde, hastanede veya enfekte iken izole edilmişse, hastalığın bulaşması daha düşük bir oranda gerçekleşir. Yüksek bir temas oranı, R_0 değerinin artmasına neden olur.

c) Yayılım şekli ve temas yoğunluğu, temas süresi: En hızlı ve zahmetsizce bulaşan hastalıklar, COVID-19 gibi hava yoluyla bulaşan (damlacık yoluyla bulaşan) hastalıklardır. Enfekte bir kişiden bulaşma fiziksel temas gerektirmez. Tersine, Ebola veya HIV gibi vücut sıvılarıyla yayılan enfeksiyonların edinilmesi veya yayılması daha zordur. Kirlenmiş kan, tükürük veya diğer vücut sıvılarıyla temas gereklidir. Hava yoluyla bulaşan enfeksiyonlar, doğrudan temasla bulaşanlara kıyasla daha yüksek bir R_0 değerine sahiptir. Uzun süreli veya sık etkileşim, hava yoluyla bulaşan hastalıkların yayılmasını teşvik eder. R_0 , epidemiyolojik özellikler (bulaşma şekli, kuluçka süresi, bulaşıcı dönem, toplum bağışıklık seviyeleri), patojenin biyolojik özellikleri (bulaşıcılık, virülans, patojenite) ve sosyodemografik faktörler (enfekte ve sağlıklı bireyler arasındaki çevresel özellikler, risk, yoğunluk ve temas süresi) dahil olmak üzere çok sayıda faktöre bağlı olarak dalgalanabilir. R_0 'ı birçok faktör etkileyebilir. R_0 , hastalığa yakalanmamış

veya aşılanmamış, tamamen savunmasız bir nüfus için tanımlanır. Bir nüfus belirli bir oranda bağışıklığa sahipse, R_0 daha karmaşık hesaplamalarla belirlenebilir.

d) R_0 Değerinin Anlamı

R_0 değerine bağlı olarak, bir hastalığın potansiyel olarak bulaşması veya azalması için üç olasılık vardır ve bu olasılıklar aşağıda sıralanmıştır.

1- R_0 1'den küçükse, mevcut her enfeksiyon birden az yeni enfeksiyona neden olur. Bu durumda, hastalık azalır ve sonunda biter.

2- R_0 1'e eşitse, mevcut her fonksiyon yeni bir enfeksiyona neden olur. Hastalık canlı ve stabil kalır ancak bir salgına neden olmaz.

3- R_0 1'den büyükse, mevcut her enfeksiyon birden fazla yeni enfeksiyona neden olur. Hastalık insanlar arasında yayılır ve salgına neden olur.

R_0 değeri bir hastalığın hasta bir kişiden kaç kişiye yayıldığını gösterir. Sadece R_0 değeri ile hastalığın ciddiyeti ve toplumda yayılım hızı arasında bir ilişki yoktur. Örneğin iki enfeksiyon etkeninin R_0 değeri 3 olarak düşünölsün, eğer bir etkenin inkübasyon (kuluçka) süresi uzun veya latent enfeksiyon süresi uzun ise salgın yapma potansiyeli daha düşüktür (Örneğin: Tüberküloz).

Ayrıca tıpta meydana gelen gelişmeler yayılımı ve sonuçları değiştirebilmektedir. Örneğin 1918'de dünya çapında 50 milyon insanı öldüren İspanyol gribi salgını yaşanmıştır. 1918 pandemisinin R_0 değerinin 1. 4 ile 2. 8 arasında olduğu tahmin edilmektedir. Ancak H1N1 virüsünün 2009'da yaptığı salgında R_0 değerinin 1. 4 ile 1. 6 arasında olduğu belirtilmektedir. Aşıların ve antiviral ilaçların varlığının salgının boyutunu değiştirdiği düşünülmektedir.

R_0 1'in altındaysa, mevcut her enfeksiyon birden az yeni enfeksiyona neden olur. Bu durumda hastalık azalır ve sonunda sona erer.

R_0 1'e eşitse, mevcut her enfeksiyon bir yeni enfeksiyona neden olur. Hastalık yaşayabilir ve stabil bir durumda devam eder, ancak bir salgına yol açmaz.

R_0 1'i aşarsa, mevcut her enfeksiyon birçok yeni enfeksiyona neden olur. Hastalık bireyler arasında yayılır ve bir salgına yol açar.

R_0 değeri, enfekte bir kişinin hastalığı bulaştırdığı birey sayısını ifade eder. R_0 değeri, hastalığın şiddeti veya toplum bulaşma oranlarıyla ilişkili değildir. Örneğin, iki patojenik etkenin R_0 değerinin 3 olduğunu varsayalım. Uzun kuluçka veya gizli enfeksiyon süresine sahip bir etkenin salgın başlatma yeteneği azalır (örneğin, tüberküloz).

Ayrıca, tıptaki gelişmeler yayılmayı ve sonuçları değiştirebilir. İspanyol gribi salgını, 1918'de dünya çapında 50 milyon kişinin ölümüne neden oldu. 1918 salgını

sırasında R_0 değerin 1,4 ila 2,8 arasında olması bekleniyor. 2009'daki H1N1 virüsü salgını için R_0 değerin 1,4 ila 1,6 arasında olduğu tahmin edilmektedir. Aşıların ve antiviral ilaçların bulunabilirliğinin salgının şiddetini değiştirdiği düşünülmektedir.

2.4.1. R_0 Hesaplamaları

Matematiksel modeller, sağlık sorunlarını yönetmek ve uygulanan önlemleri değerlendirmek için giderek daha fazla kullanılmakta ve bu modellere olan güven her geçen gün artmaktadır. Matematiksel yayılma modellemesinde temel bir parametre, temel üreme sayısıdır (R_0). R_0 değeri, bir salgının tehlikesini ve uygulanan kontrol önlemlerinin etkinliğini değerlendirmek için önemli bir ölçüt görevi görür. R_0 değerin kesin olarak belirlenmesi, enfeksiyon kontrolü stratejilerinin belirlenmesi için hayati önem taşır. Covid-19 gibi yeni ortaya çıkan hastalıklar söz konusu olduğunda, salgının yayılmasına ilişkin mevcut anlayışımız, günlük yeni vaka sayısı ile sınırlıdır. Yeni vakaların görülme sıklığı, salgının erken döneminde önemli ölçüde artar. Salgın modelleme ve hesaplamalarında çok sayıda temel fikir kullanılmaktadır. Bunlar şunlardır:

R_0 (temel üreme sayısı): Enfekte bir birey tarafından oluşturulan ortalama ikincil enfeksiyon sayısı. Covid-19 için ortalama R_0 değeri 2,2'dir (%95 GA: 1,4-3,9).

Nesil aralığı: Bir bireyin enfeksiyonu ile ardından ikincil bir vakanın enfeksiyonu arasındaki ortalama süre. COVID-19 için ortalama jenerasyon aralığı 5,20 gündür (%95 GA: 3,78-6,78).

Seri aralığı: Enfekte bir bireyde semptomların ortaya çıkması ile enfeksiyonu aktardığı sekonder bir hastada semptomların başlaması arasındaki ortalama süre. COVID-19 için ortalama seri aralığı 7,5 gündür (%95 GA: 5,5-19).

Kuluçka dönemi: Enfeksiyondan semptomların ortaya çıkmasına kadar geçen tipik süre. COVID-19 için kuluçka süresi 2 ila 14 gün arasında değişir ve ortalama süre 5 ila 6 gündür.

Büyüme hızı (r): Birim zaman başına birey başına yeni vaka insidansındaki değişim.

Eğer yayılma primer vakanın semptomatik dönemi boyunca olursa seri aralığı ve üreme aralığı inkübasyon süresinden daha uzun olur. Ancak bulaşma pre-semptomatik dönemde olursa bu ilişki tersine dönebilir. Hatta primer vaka hastalık geliştirmeden sekonder vaka hastalık geliştirebilir.

Üreme aralığının ve üreme popülasyonunun dağılımının tahmin edilmesi, hastalığın yayılma hızının belirlenmesine yardımcı olur. Kuluçka süresinin dağılımının tahmin

edilmesi, uygun karantina sürelerinin belirlenmesine yardımcı olabilir. Bu bağlantıya dayanarak R_0 'ı belirlemek için çok sayıda algoritma geliştirilmiştir.

2.4.2. R_0 hesaplama fomülleri:

a) $R_0 = 1 + rT_c$: Bu formüle göre R_0 1, 30 dur.

T_c : ortalama üreme aralığı

R: büyüme hızı (growth rate)

Covid-19 için R_0 hesaplanması;

TC: 6 gün r (büyüme hızı): 0. 05 (%5)

$$R_0 = 1 + rT_c \text{ için } 1+6 \times 0.05=1.30$$

b) $R_0 = \exp(rT_c)$: Bu formüle göre R_0 1, 34'tür.

Covid-19 için R_0 hesaplanması;

r (büyüme hızı): 0. 05 (%5)

$$R_0 = \exp(rT_c) \text{ için } \exp(6 \times 0.05)=1.34$$

c) $R_0 = 1 + r/b$: Bu formüle göre R_0 1, 30'dur.

Temel bir salgın modeli, bir konak popülasyonunu enfeksiyon durumlarına göre duyarlı, bulaşıcı veya iyileşmiş olarak sınıflandırır. Bu, duyarlı-enfeksiyöz-iyileşmiş (SIR) kategorileriyle karakterize edilen salgın modelini verir. Bulaşıcı evreden iyileşme oranı b ile gösterilir ve sabit olduğu varsayılır. Bu bulaşıcı evre boyunca temas oranının da sabit olduğu varsayılır. Üreme aralığının uzunluğu, $T_c = 1/b$ formülüyle örtük olarak üstel bir dağılım olarak gösterilir. Verilerin sadeleştirilmesi, büyüme hızı r ile üreme sayısı R_0 arasında doğrusal bir korelasyon olduğunu ortaya koymaktadır.

2.4.3. Covid-19 için R_0 hesaplanması

$$R_0 = 1 + r/b$$

$$b = 1/T_c$$

$$R_0 = 1 + 0.05 \left(\frac{1}{6} \right) = 1.30$$

Bu lineer ilişki ancak $r > -b$ olduğunda sağlanır.

d) $R_0 = \left(1 + \frac{r}{b_1} \right) \left(1 + \frac{r}{b_2} \right)$: Bu formüle göre R_0 1, 32 dir.

Salgın modellerinin gerçekçiliğini artırmak için, SIR modeline bir evre (enfekte olmuş ancak henüz enfeksiyöz olmayan) dahil edebiliriz. Bu, SEIR duyarlı-maruz kalmış-enfeksiyöz-iyileşmiş salgın modelini verir. Maruz kalmış evreden iyileşme oranı b_1 ile gösterilirken, enfekte evreden iyileşme oranı b_2 ile gösterilir; her iki oranın da sabit

olduğu varsayılır. Üreme aralığı dağılımı $T_c = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}$, iki üstel dağılımın dolaylı ortalaması olarak ifade edilir. Dağılım sağa eğiktir. Yeniden düzenleme sonucunda, $r > \min(-b_1, -b_2)$ kısıtı altında bağlantıyı elde ederiz. Bu bağlantı, ikinci dereceden yükselen bir fonksiyonla karakterize edilir.

$$R_0 = \left(1 + \frac{r}{b_1}\right) \left(1 + \frac{r}{b_2}\right)$$

$$R_0 = 0.05 \quad b_1 = \frac{1}{4} \quad b_2 = \frac{1}{2} \quad \text{için } R_0 = 1,32$$

e) $e^{rT_c - (\frac{1}{2})r^2\sigma^2}$: Bu formüle göre R_0 1,34 tür.

Ortalama üreme aralığı T_c ve standart sapma σ ile karakterize edilen enfeksiyonlar, normal dağılımlı üreme aralıkları sergileyebilir. Üreme aralığının normal dağılım gösterdiği varsayıldığında, büyüme hızı (r) ile R_0 arasındaki ilişki türetilir.

Covid-19 için R_0 hesaplanması;

$\sigma = T_c$ 'nin standart sapması,

$T_c = 6 \quad \sigma = 2 \quad r=0.05$ için $R_0=1,34$ tür.

f) R_0 'ın alt ve üst sınırlarının belirlenmesi

	Büyüme (r)	R_0
Azalma	$r < 0$	$0 \leq R \leq e^{rT_c}$
Stabil	$r = 0$	$R = 1$
Artma	$r > 0$	$1 < R \leq e^{rT_c}$

$r = 0.05$ için COVID-19 R_0 sınırları $r > 0$ (0.05) olduğu için $1 < R \leq e^{rT_c} = 1 < R \leq 1,34$ aralığındadır.

Yukarıda hesaplamaları yapılan formüller dışında R_0 hesaplamalarında kullanılan başka formüller ve bilgisayar yazılımları mevcuttur.

g) Alternatif formüller ve hesaplama teknikleri

$$R_0 = r / \sum_t^n y_i (e^{-ra_{t-1}} - e^{-rat}) / (at - a_{t-1})$$

$$R_0 = \frac{\left(1 + \frac{r}{b_1}\right)^x}{\sum_{i=1}^y \left(1 + \frac{r}{b_2}\right)^{-i}}$$

Bilgisayar yazılımı kullanarak R_0 programlama: Aşağıdaki R_0 programlama yazılımına erişilebilir. Yazılım içinde R_0 programlamak mümkündür.

- 1- Atak hızına bağlı R_0 hesaplanması
- 2- Üstel yayılma
- 3- Maksimum olabilirlik tahmini
- 4- Ardışık Bayes metodolojisi
- 5- Zamana bağlı R_0 izleme tahmini

h) Salgın İki Katına Çıkma Süresi

İki katına çıkma süresi, $\ln(2)$ 'nin 0,69'a eşit olduğu $td = \ln 2/r$ formülü kullanılarak hesaplanabilir. Bu değerin büyüme oranına bölümü, iki katına çıkma süresini verir.

COVID-19 için bu süre;

$$r = 0.03 \text{ için } td = \frac{0,69}{0,03} = 23 \text{ gündür.}$$

2.4.4. Covid-19 İçin Tahmini R_0 Değerleri

Çin'de ve uluslararası alanda 1 Ocak 2020 ile 7 Şubat 2020 arasında yapılan 12 incelemeyi içeren bir araştırma, salgının ilk aşamalarında Covid-19 için temel üreme sayısını belirlemeyi amaçlamıştır. Covid-19 için ortalama R_0 'ın 3,28 olduğu belirlenirken, medyan 2,79'du (aralığı: 1,4-6,4). Ayrı bir araştırma, Covid-19 için R_0 'ı değerlendirmiş ve 2,24 (95% CI: 1,95-2,55) ile 5,71 (95% CI: 4,24-7,54) arasında değiştiğini tahmin etmiştir; bu da bildirim oranındaki artışa karşılık gelmektedir. Tüm R_0 hesaplamaları, Covid-19 için R_0 'ın 1'den çok daha büyük olduğunu göstermektedir. Dünya Sağlık Örgütü, Covid-19 için temel üreme sayısının (R_0) 1,4 ile 2,5 arasında değiştiğini tahmin etmektedir. Bir başka çalışma da salgının erken safhasında Covid-19 için R_0 'ın Maksimum Olabilirlik Yöntemi kullanılarak R_0 değeri 2.28 olarak bulunmuş, R_0 'ın %95 güven aralığı ortanca değeri 2, 28 (2.06-2.52) olarak hesaplanmıştır. 11 Avrupa ülkesinden alınan verileri kullanan bir araştırma COVID-19'un R_0 değerinin 3,87 (95% CI: 3,01-4,66) olduğunu belirlemiştir. Bu çalışma, birçok Avrupa ülkesinde ilaçla olmayan önlemlerin (sosyal mesafe, maske kullanımı ve karantina gibi) eş zamanlı kullanımının R_0 'da önemli bir azalmaya yol açtığını vurgulamaktadır. COVID-19 hastalığından sorumlu olan SARS-CoV-2 virüsünün R_0 değeri ortalama 2,6 civarındadır. Sonuç olarak, COVID-19'un hızlı bulaşma kapasitesine sahip olduğu ileri sürülebilir. 2,6'lık R_0 değeri, bir COVID-19 hastasının bir bulaşma döngüsünden sonra (ortalama 5 gün, 2-14 gün aralığında) 2,6 kişiyi enfekte etmesinin beklendiğini ve 7 bulaşma döngüsü

boyunca (yaklaşık 35 gün) potansiyel olarak 368 kişiyi enfekte edebileceğini göstermektedir.

2.4.5. Covid-19 Modelinin Temel Üreme Katsayısı (R_0)

$R_0 < 1$ olduğunda, ortalama olarak enfekte olan insandan daha düşük olanı taburcu olur ya da özgürlüğüne kavuşur, ardından Covid-19 etkisini yitirir. Aksi taktirde Covid-19'un endemik olduğu ortaya çıkar veya nüfusu göze çarpacak kadar etkiler. Yeni nesil matris yaklaşımını (Liu vd., 2020; van den Driessche ve Watmough, 2002) kullanarak Covid-19'un serbest dengesinin (CFE) R_0 'ını türetilir. Bu yüzden,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\phi_c \Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

ve

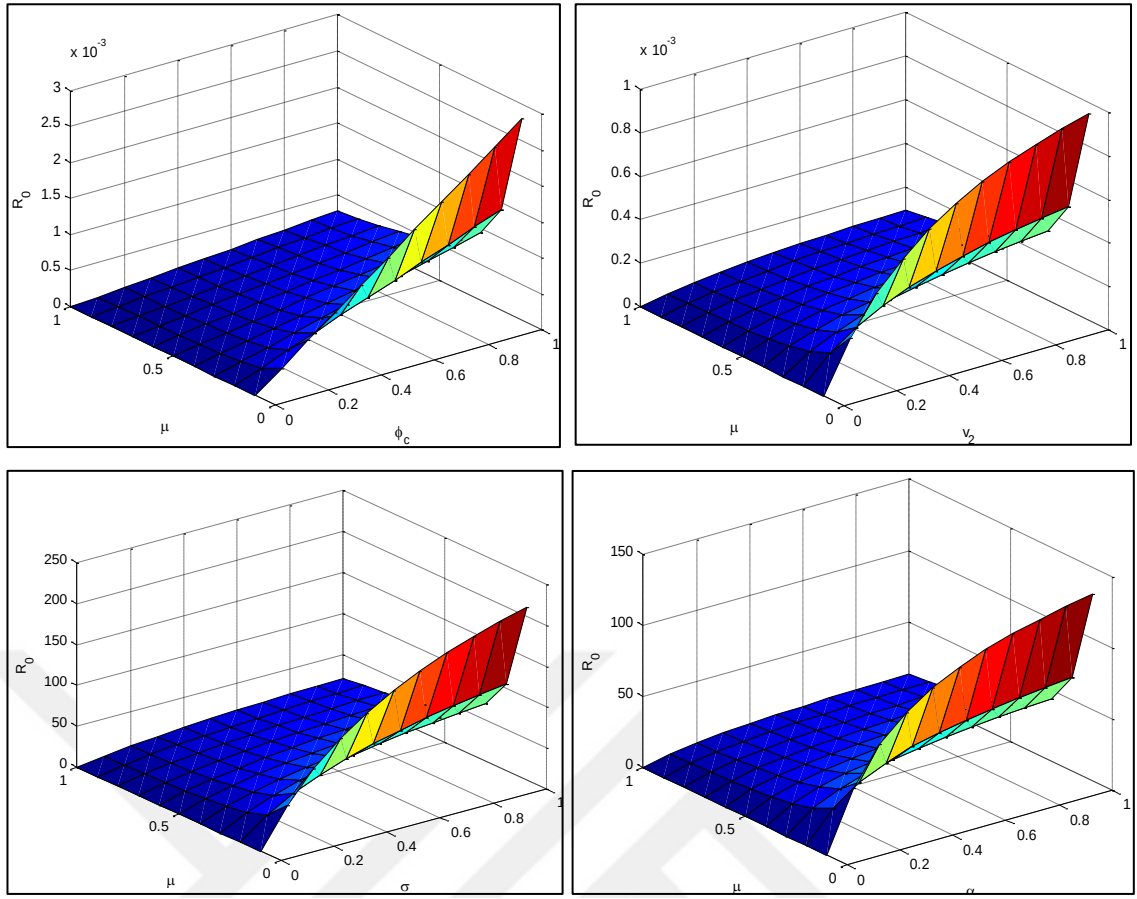
$$V = \begin{pmatrix} (\sigma + \mu) & 0 & 0 \\ -\sigma & (\alpha + v_2 + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & -\alpha & (\theta + \mu) \end{pmatrix} \quad (23)$$

matrisleri alınır.

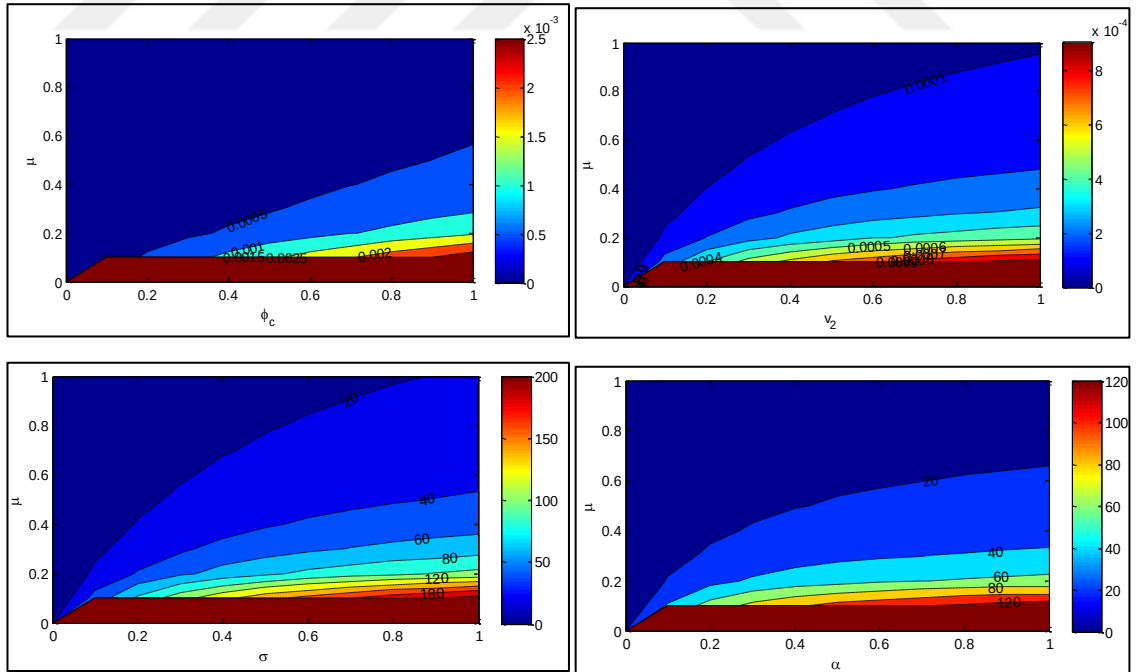
R_0 temel üreme sayısı, V 'nin ters matrisiyle F 'yi çarparak (FV^{-1}) matrisinin spektral çapına karşılık gelen baskın veya en büyük özdeğerdir. Bu $R_0 = \rho(FV^{-1})$ tarafından tanımlanır. Burada ρ spektral yarıçaptır. Bu yüzden R_0 temel üreme sayısı,

$$R_0 = \frac{\phi_c \Lambda \sigma}{\mu(\sigma + \mu)(\alpha + v_2 + \delta + \mu)} \quad (24)$$

olarak verilir.



Şekil 12. Covid-19 modelinde R_0 değerinin üç boyutlu gösterimi



Şekil 13. Covid-19 modelinin R_0 temsiline kontur grafiği

Parametre değişikliklerinin Temel Üreme Sayısı üzerindeki etkisi, ileri normalleştirilmiş hassasiyet endeksi kullanılarak analiz edilmiştir. Kontur çizimi, Temel Üreme Sayısı sonuçlarını sunmak için sıklıkla kullanılan değerli ve etkili bir grafik

yöntemidir. Bu çizimler, özellikle şokların ve ani değişikliklerin yayılımını belirlemek ve analiz etmek için değerlidir.

2.5. COVID-19 ‘un Serbest Denge Kararlılığı (CFE)

Teorem 4: Eğer $R_0 < 1$ ise (19) denkleminde serbest denge noktası global asimptotik kararlıdır. Aksi taktirde kararsızdır.

İspat: Lyapunov fonksiyon tanımından,

$\mathfrak{J} = x_1 E + x_2 I$ dir. Burada $x_1 = \frac{\sigma}{(\alpha + v_2 + \delta + \mu)(\sigma + \mu)}$ ve $x_2 = \frac{1}{(\alpha + v_2 + \delta + \mu)}$ dir. Bu denklem kolayca yazılabilir çünkü x_1 ve x_2 pozitifdir. Bu denklem zamana göre diferansiyellenirse,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}' &= x_1 E' + x_2 I' \\ \mathfrak{J}' &= \frac{\sigma}{(\alpha + v_2 + \delta + \mu)(\sigma + \mu)} \left(\phi_c IS - ((\sigma + \mu)E) + \left(\frac{1}{(\alpha + v_2 + \delta + \mu)} \right) (\sigma E - bI + v_1 R) \right) \end{aligned} \quad (25)$$

elde edilir. (25) denklemini basitleştirerek

$$\mathfrak{J}' = \frac{\sigma \phi_c IS}{(\alpha + v_2 + \delta + \mu)(\sigma + \mu)} + \frac{v_1 R}{(\alpha + v_2 + \delta + \mu)} - I \leq \frac{\sigma \phi_c IS}{(\alpha + v_2 + \delta + \mu)(\sigma + \mu)} - I \quad (26)$$

elde edilir. Bu,

$$\mathfrak{J}' = (R_0 - 1)I \quad (27)$$

olarak yazılır. (27) de elde edilen sonuçtan görüyoruz ki $R_0 = 1$ ya da $I = 0$ şartıyla $\mathfrak{J}' = 0$ dir. Bunun yanı sıra $\mathfrak{J}' \leq 0$, $R_0 \leq 0$ sağlanmıştır. Bu da gösterir ki en büyük değişmezlik $\{(S, E, I, Q, R) \in R_+^5\}$ tekil DFE (E_0) dir ve DFE (E_0) global asimptotik kararlıdır. (Akinyemi ve İsiugo, 2014; La Salle, 1974) Epidemolojik olarak Teorem 4’ün ispatı gösterir ki Covid-19 $R_0 \leq 0$ iken bitecektir, sona erecektir.

2.6. Yerel Dengenin Global Kararlılık Analizi

Teorem 5. Eğer $R_0 > 1$ ise (11) modeli tek yerel dengeye (E_1) sahiptir.

İspat. $E_1 = (E^*, S^*, I^*, Q^*, R^*)$ yerel denge noktalarının varlığı (20) ve (21) denklemlerinde tanımlanmıştır, burada I,

$$I^* = - \frac{\Lambda \phi_c \sigma a_3 a_4 + a \mu \theta a_2 v_1 - \mu a_1 a_2 a_3 a_4 + \mu a_2 a_3 v_1 v_2}{\phi_c (a \sigma \theta v_3 + a \theta a_2 v_1 + \sigma a_3 v_2 v_3 - a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 v_1 v_2)} \quad (28)$$

olarak yazılır. Yerine koyma metodu ve I formülünden (28) denklemi

$$\mathcal{A}I^* + \mathcal{B} = 0 \quad (29)$$

olur.

Burada, $\mathcal{A} = \phi_c(a\sigma\theta v_3 + a\theta a_2 v_1 + \sigma a_3 v_2 v_3 - a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 v_1 v_2)$ ve $\mathcal{B} = \mu(a_1 a_2 a_3 a_4(R_0 - 1) + \alpha\theta a_2 v_1 + a_2 a_3 v_1 v_2)$ dir. Bu yüzden eğer $R_0 \leq 1$ de $\mathcal{B} \geq 0$ ise $I_h^* = -\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$ olarak tanımlanabilir ve bu durumda yerel denge yoktur. Dahası eğer $R_0 > 1$ iken $\mathcal{B} < 0$ ise $I_h^* = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} > 0$ dır. Bu yüzden $R_0 > 1$ iken tek yerel denge vardır. Bu da gösterir ki (11) modeli $R_0 > 1$ olduğunda tek ve pozitif yerel dengeye sahiptir.

Teorem 6. Eğer $R_0 > 1$ ise (11) modelinin $E_1 = (E^*, S^*, I^*, Q^*, R^*)$ olarak verilen yerel dengesi R_+^5 bölgesinin içinde global asimptotik kararlıdır.

İspat: (Abioye ve Peter,2020; Peter vd.,2020) çalışmalarından ilham alınarak, aşağıdaki denklem Lyapunov fonksiyon tipi olan Goh-Volterra'dan yapılmıştır.

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} = & S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} + E - E^* \ln \frac{E}{E^*} + k_1 \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right) \\ & + k_2 \left(Q - Q^* - Q^* \ln \frac{Q}{Q^*} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

Burada $k_1 = \frac{\phi_c I^* S^*}{\sigma E^*}$ ve $k_2 = \frac{\phi_c I^* S^*}{\alpha I^*}$ dır. (30) denklemi zamana göre diferansiyellenirse;

$$\mathfrak{J} \cdot = \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) S \cdot + \left(1 - \frac{E^*}{E}\right) E \cdot + \frac{\phi_c I^* S^*}{\sigma E^*} \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) I \cdot + \frac{\phi_c I^* S^*}{\alpha I^*} \left(1 - \frac{Q^*}{Q}\right) Q \cdot \quad (31)$$

elde edilir.

Eğer (31) denkleminde $t \rightarrow \infty$ iken $R_h \rightarrow R_h^*$ modeli basitleştirerek ve yerine koyma metodunu kullanarak,

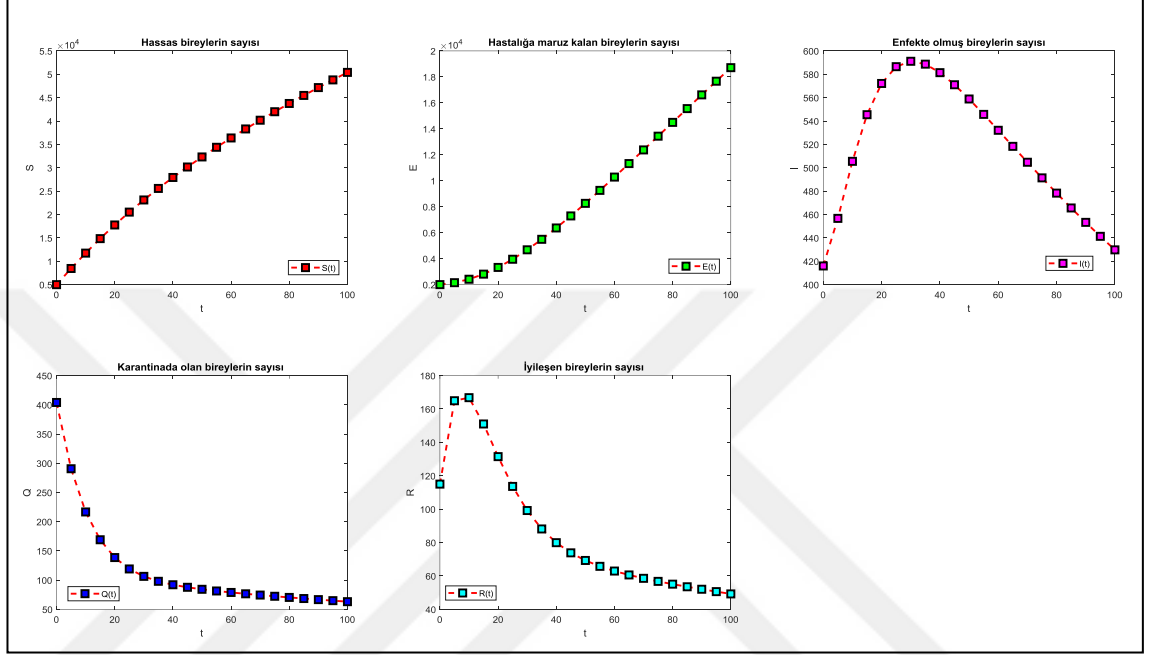
$$\mathfrak{J} \cdot = \mu S^* \left(2 - \frac{S^*}{S} - \frac{S}{S^*}\right) + \phi_c I^* S^* \left(4 - \frac{S^*}{S} - \frac{I^* E}{I E^*} - \frac{S E^* I}{S^* E I^*} - \frac{I}{I^*} - \frac{Q}{Q^*} - \frac{I Q^*}{I^* Q}\right) \leq 0 \quad (32)$$

elde ederiz.

Son olarak, aritmetik ortalama geometrik ortalamadan daha büyüktür bu yüzden aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz.

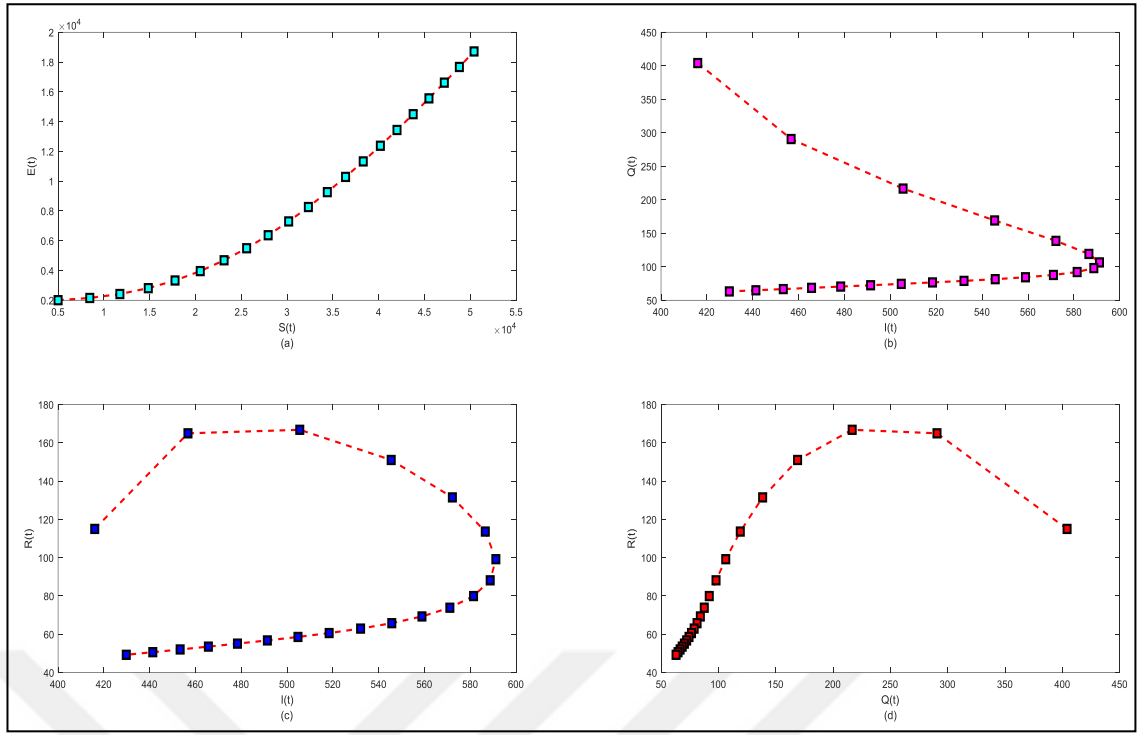
$$2 - \frac{S^*}{S} - \frac{S}{S^*} \leq 0 \text{ ve } 4 - \frac{S^*}{S} - \frac{I^*E}{IE^*} - \frac{SE^*I}{S^*EI^*} - \frac{I}{I^*} - \frac{Q}{Q^*} - \frac{IQ^*}{I^*Q} \leq 0 \text{ dir.}$$

Aşağıda Covid-19 verileri kullanılarak zamana bağlı kompartmanların değişimlerini gösteren grafikler Matlab yazılımı yardımıyla simülasyonlar eşliğinde gösterilmektedir.



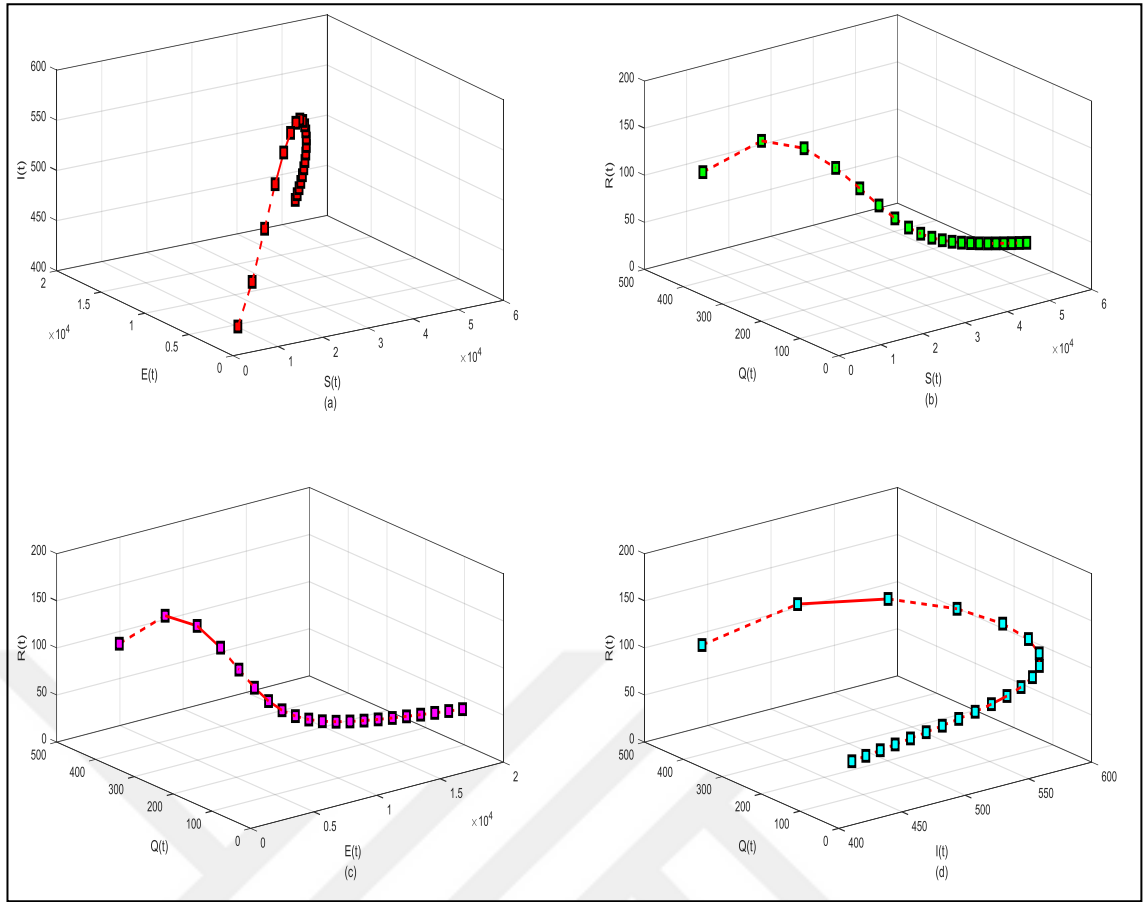
Şekil 14. Covid-19 modelinin zamana bağlı değişimi

t zamanında hassas bireyler (S) ve hastalığa maruz kalan bireyler (E) zamanla artarken enfekte olmuş bireyler (I) 40. güne kadar hızla artarken 20-40 günleri arasında zirve yaparak daha sonra zamanla azalmaktadır. Karantinadaki bireyler (Q) önce zirveyle başlayıp daha sonra azalmaktadır. İyileşen bireyler ise (R) önce artış göstermiş olup daha sonra azalma yaşanmıştır. Şekil daha detaylı yorumlanacak olursa enfekte olmuş insanlar ile iyileşenler arasında ters orantı olması durumunu şekil de destekler niteliktedir.



Şekil 15. Covid-19 modelinin faz diyagramı; (a) $S(t) - E(t)$, (b) $I(t) - Q(t)$, (c) $I(t) - R(t)$, (d) $Q(t) - R(t)$

(a) Grafiğine göre hassas bireylerin sayısı arttıkça enfekte olmuş bireylerin sayısı da artacaktır ki bu da beklenen bir sonuçtur. (b) grafiğine göre enfekte olmuş bireyler ile karantinada bireyler arasındaki bağlantı ise örneğin başlangıçta 430 kişi enfekte olmuşsa 370 kişi karantinada, 520 kişi enfekte ise yaklaşık 200 kişi karantinada ve 590 kişi enfekte ise 100 kişi karantinada olduğu gözlemlenmektedir. Aslında burada doğru bir orantı beklerken ters orantı olması da bazı bireylerin asemptotik özellikler gösterebilmesi olarak yorumlanmaktadır. (c) grafiği içinse enfekte olmuş bireyler ile iyileşenler bireyler arasında ters orantı beklendiği gibi şekilde de gerçeği yansıtır niteliktedir. Son (d) grafiği içinse, karantinada kalındıkça iyileşme oranının arttığı gözlemlenmektedir. Bu da salgının seyri için önemli bir analiz olmaktadır.



Şekil 16. Covid-19 modelinin faz portreleri

(a)'da hassas bireyler, hastalığa maruz kalmış bireyler ve enfekte olmuş bireylerin arasındaki bağı gösteren şekil gösterilmiştir. (b) de hassas bireyler, karantinadaki bireyler ve iyileşen bireyler; (c)'de hastalığa maruz kalan bireyler, karantinada olan bireyler ve iyileşen bireyler; (d)'de ise enfekte olmuş bireyler, karantinada olan bireyler ve iyileşen bireyler birlikte çizilmiştir.

2.7. En Küçük Kareler Yöntemi

İstatistik biliminde genellikle iki değişken arasındaki ilişki (özellik ve vasıf açısından); birinin değişimi diğerinin değişimine etki ettiğinde meydana gelmektedir. X değerlerinin değişimine bağlı Y değerleri de değişiyorsa burada bir ilişki olduğundan söz edilebilir. İlişki araştırılırken değişkenlerden birine bağımsız (X), diğerine bağımlı (Y) olarak bakılmaktadır.

Matematik olarak, iki değişken arasındaki ilişkiyi belirleyen durum bu değişkenlerin fiziki değişimi durumudur. Yani, birbirleriyle yakınlığı olmayan iki değişken, sadece sayısal durumları itibarıyla aralarında ilişki olabilir. Bunun için olabildiğince bu ilişkinin doğrusal olmasına dikkat edilmelidir. Aksi halde, iki değişken

arasında kurulan fonksiyonel ilişki, çok iyi bir matematik model ortaya çıkarmasına rağmen, modelden yararlanarak bir tahminde bulunmak rasyonel olamaz.

Literatürde, en iyi eğrinin elde edilmesi söz konusu olduğunda, genellikle o eğriye uyan denklem bir polinom olarak ele alınmakta ve polinomun katsayıları tahmin edilmeye çalışılmaktadır. Bu şekildeki düşünce ancak veriler arasında bir tahmin yapmak, önsezide bulunmak için etkin olabilmektedir. Ancak giderek verilerin dışında tahmin yapmak, sağlıklı olamamaktadır. Bunun için doğrusal olmayan denklemler daha sağlıklı sonuca götürmektedir. Doğrusal olmayan bir denklemin katsayıları tahmin edilmek istendiğinde En Küçük Kareler Yöntemi kullanılmaktadır.

En küçük kareler yaklaşımı, iki birbirine bağımlı fiziksel parametre arasındaki matematiksel ilişkiyi mümkün olduğunca doğru bir denklem aracılığıyla ifade etmek için kullanılan geleneksel bir regresyon tekniğidir. En küçük kareler yaklaşımı, regresyon analizinde en sık kullanılan tekniklerden biridir. Ünlü matematikçi C. F. Gauss tarafından 1795 yılında 18 yaşındayken formüle edilen bu yaklaşım, ilk olarak 1801 yılında Ceres asteroitinin yörüngesini belirlemek için kullanılmış ve daha sonra 1809'da Gauss'un toplu eserlerinin ikinci cildinde yayınlanmıştır. 1805 ve 1808'de Fransız matematikçi A. Legendre ve Amerikalı matematikçi R. Adrain, Gauss'un farkında olmadan aynı yaklaşımı ayrı ayrı bulmuşlardır. En küçük kareler yaklaşımı, tıp, ekonomi, mühendislik, tarım, biyoloji ve sosyoloji dahil olmak üzere çeşitli bilimsel disiplinlerdeki çeşitli değişkenler arasındaki korelasyonları açıklamak için önemli bir araçtır.

Her $k = 1, 2, 3, \dots, n$ için, x_k değerlerinin farklı olduğundan emin olarak (x_k, y_k) değerleri belirtsin. Bu değerler kullanılarak $y_k = f(x_k)$ olacak şekilde bir $f(x)$ fonksiyonu oluşturulur. $f(x)$ fonksiyonu, $y = f(x) = a + bx$ şeklinde ifade edilen doğrusal bir fonksiyon olarak kabul edilir ve verilen noktalar bu fonksiyonla hizalanır. Bu uydurum yapılırken $f(x)$ fonksiyonunun a ve b katsayıları;

$$T(f) = \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f(x_k) - y_k| \right]^{\frac{1}{2}} \quad (33)$$

hata değeri minimum olacak şekilde belirlenir. Bundan dolayı,

$$T(a, b) = T(f) = \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |y - y_k| \right]^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

alınır ve $T(a, b)$ fonksiyonunu en aza indiren a ve b değerleri belirlenir. Buna göre;

$$T(a, b) = nT(a, b)^2 = \sum_{k=1}^n |a + bx_k - y_k|^2 \quad (35)$$

fonksiyonun minimumu belirlenmiştir. Sonuç olarak, $T(a, b)$ fonksiyonunun a ve b 'ye göre kısmi türevleri hesaplanır ve sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial T}{\partial a} = \sum_{k=1}^n 2(a + bx_k - y_k) = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial T}{\partial b} = \sum_{k=1}^n 2x_k(a + bx_k - y_k) = 0 \quad (37)$$

Buradan,

$$0 = an + b \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n y_k \quad (38)$$

olur ve

$$0 = a \sum_{k=1}^n x_k + b \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad (39)$$

Şeklinde iki bilinmeyenli iki adet doğrusal denklem bulunur. Cramer kuralını kullanarak a ve b değerlerini

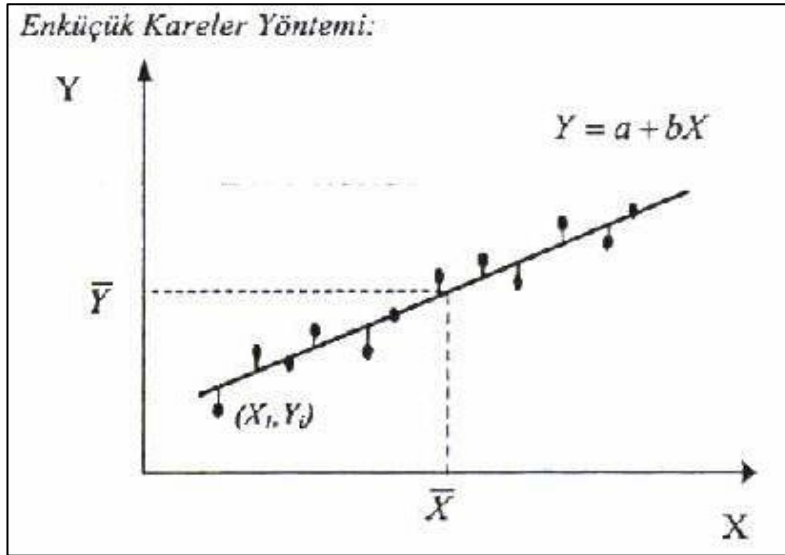
$$\begin{bmatrix} n & \sum x_k \\ \sum x_k & \sum x_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_k \\ \sum x_k y_k \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_k & \sum x_k \\ \sum x_k y_k & \sum x_k^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x_k \\ \sum x_k & \sum x_k^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum y_k \sum x_k^2 - \sum x_k \sum x_k y_k}{-(\sum x_k)^2 + n \sum x_k^2}$$

ve

$$b = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum y_k \\ \sum x_k & \sum x_k y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x_k \\ \sum x_k & \sum x_k^2 \end{vmatrix}} = \frac{-\sum x_k \sum y_k + n \sum x_k y_k}{-(\sum x_k)^2 + n \sum x_k^2}$$

olarak buluruz.



Şekil 17. En Küçük Kareler Yöntemi (URL-5, 2022)

2.7.1. Polinomiyal En Küçük Kareler Fonksiyonu

Doğrusal bir fonksiyon kullanılarak verilerin uygun hale getirilmesi yanı sıra, m . mertebeden polinom şeklinde fonksiyonlar kullanılarak veriler için uygun fonksiyonlar geliştirilebilir. Yapılacak işlemler doğrusal fonksiyon için yapılan işlemlerin aynısıdır. Yani S değerini minimum yapacak katsayı değerleri bulunmalıdır.

$$S = \sum_{j=1}^n (f_j - g_j)^2 = \sum_{j=1}^n \left((b_0 + b_1x_j + b_2x_j^2 + \dots + b_mx_j^m) - g_j \right)^2 \quad (40)$$

S değerini minimum yapmak ve $m + 1$ değişkenli fonksiyonu kurmak için $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$ katsayılarının elde edilmesi gerekmektedir. $m + 1$ tane kısmi türevli denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial S}{\partial b_0} = \sum_{j=1}^n 2(b_0 + b_1x_j + b_2x_j^2 + \dots + b_mx_j^m - g_j) = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b_1} = \sum_{j=1}^n 2x_j(b_0 + b_1x_j + b_2x_j^2 + \dots + b_mx_j^m - g_j) = 0 \quad (42)$$

⋮

$$\frac{\partial S}{\partial b_m} = \sum_{j=1}^n 2x_j^m(b_0 + b_1x_j + b_2x_j^2 + \dots + b_mx_j^m - g_j) = 0 \quad (43)$$

Böylece $m + 1$ tane çizgisel denklemler elde edilmektedir.

$$b_0n + b_1 \sum x_j + b_2 \sum x_j^2 + \dots + b_m \sum x_j^m - \sum g_j = 0$$

$$\begin{aligned}
& b_0 \sum x_j + b_1 \sum x_j^2 + b_2 \sum x_j^3 + \dots \\
& \quad + b_m \sum x_j^{m-1} - \sum x_j g_j = 0 \\
& b_0 \sum x_j^2 + b_1 \sum x_j^3 + b_2 \sum x_j^4 + \dots + b_m \sum x_j^{m-2} - \sum x_j^2 g_j = 0 \\
& \quad \vdots \\
& b_0 \sum x_j^m + b_1 \sum x_j^{m-1} + b_2 \sum x_j^{m-2} + \dots \\
& \quad + b_m \sum x_j^{m-m} - \sum x_j^m g_j = 0
\end{aligned} \tag{44}$$

Yukarıdaki denklemlerdeki $\sum$ işareti $j = 1$ den n ye kadar değiştiğini göstermektedir. Bu bilgilerden ve Tablo 5'ten faydalanarak sistem çözülüp $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$ katsayıları hesaplanmıştır ve simülasyonlarla (Şekil 18-19-20) gösterilmiştir.

2.7.2. En Küçük Kareler Probleminin Doğrusallaştırılması

$g(x) = ae^{bx}$ şeklinde verilen yaklaşım fonksiyonu, logaritması alınarak $\ln g = \ln a + bx \rightarrow g^* = a^* + bx$ ($g^* = \ln g$ ve $a^* = \ln a$ 'dır.) şeklinde doğrusallaştırılır. Bulunan g^* ifadesi a^* ve b 'ye doğrusal bağlıdır. En küçük kareler kriteri $g^* = a^* + bx$ üzerine uygulanarak a^* ve b değerleri bulunur. $g(x) = ax/(b + x)$ yaklaşım fonksiyonu aşağıdaki gibi doğrusallaştırılır.

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a} \frac{1}{x} \rightarrow g^* = a^* + b^* x^* \left(g^* = \frac{1}{g}; a^* = \frac{1}{a}, b^* = \frac{b}{a}, x^* = \frac{1}{x} \right)$$

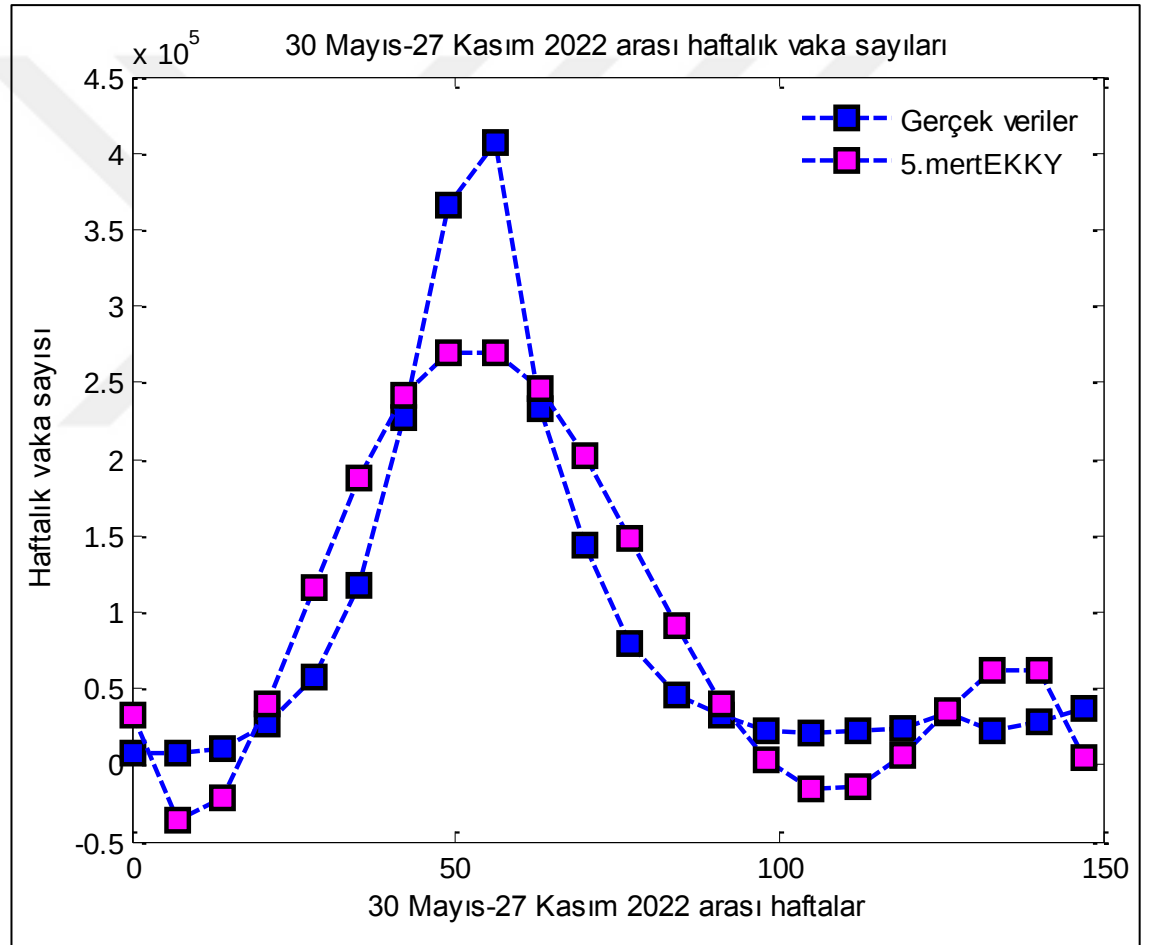
Aşağıda verilen Covid-19 verilerine göre (URL-6, 2022) Beşinci mertebeden en küçük kareler yöntemi kullanılarak çözümlere yaklaşık eğriler bulunacak ve simülasyonlarla gösterilecektir. Tabloda 30 Mayıs-27 Kasım tarihleri arasındaki haftalık Covid-19 vaka, vefat, iyileşen, toplam vaka ve toplam vefat sayıları verilmektedir.

Tablo 5. 30 Mayıs-27 Kasım 2022 arası haftalık Covid-19 verileri

Tarih	Vaka Sayısı	Vefat Sayısı	İyileşen Sayısı	Toplam Vaka Sayısı	Toplam Vefat Sayısı
14 - 27 Kasım 2022	37.185	92	21.052	17.042.722	101.492
31 Ekim - 13 Kasım 2022	28.808	73	16.897	17.005.537	101.400
17- 30 Ekim 2022	22.887	64	23.101	16.976.729	101.327
3 Ekim - 16 Ekim 2022	34.204	60	34.627	16.953.842	101.263
26 Eylül - 2 Ekim 2022	23.116	24	19.364	16.919.638	101.203
19 - 25 Eylül 2022	22.729	40	18.015	16.896.522	101.179
12 - 18 Eylül 2022	21.411	71	17.647	16.873.793	101.139

Tablo 5. (Devamı).

5 - 11 Eylül 2022	22.441	89	25.143	16.852.382	101.068
29 Ağustos 4 Eylül 2022	32.191	139	40.102	16.829.941	100.979
22 - 28 Ağustos	45.882	209	57.265	16.797.750	100.840
15 - 21 Ağustos 2022	80.020	231	102.231	16.751.868	100.631
8 - 14 Ağustos 2022	143.778	342	209.102	16.671.848	100.400
01 - 07 Ağustos 2022	232.253	380	447.132	16.528.070	100.058
25 - 31 Temmuz 2022	406.322	337	387.653	16.295.817	99.678
18 -24 Temmuz 2022	365.424	157	265.962	15.889.495	99.341
11 - 17 Temmuz 2022	226.532	96	124.732	15.524.071	99.184
4 - 10 Temmuz 2022	117.095	31	61.047	15.297.539	99.088
27 Haziran - 03 Temmuz 2022	57.113	25	30.478	15.180.444	99.057
20- 26 Haziran 2022	26.635	17	11.256	15.123.331	99.032
13- 19 Haziran 2022	10.954	19	7.653	15.096.696	99.015
06 -12 Haziran 2022	7.556	20	7.241	15.085.742	98.996
30 Mayıs - 05 Haziran 2022	7.322	19	7.843	15.078.186	98.976

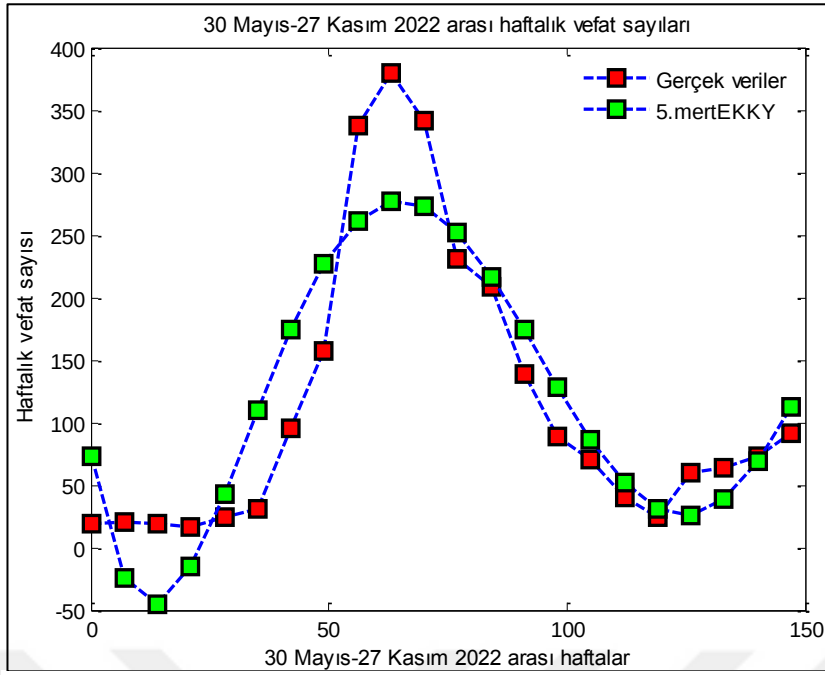


Şekil 18. 30 Mayıs-27 Kasım 2022 arası haftalık vaka sayıları

En küçük kareler yöntemi kullanılarak elde edilen 5. mertebeden polinom

$$y = -0.000534297039x^5 + 0.204377917x^4 - 26.922913x^3 + 1360.947778x^2 - 18194.436016x + 33246.333084$$

ve $r = 0.8909$ korelasyon katsayısı elde edilmiştir.

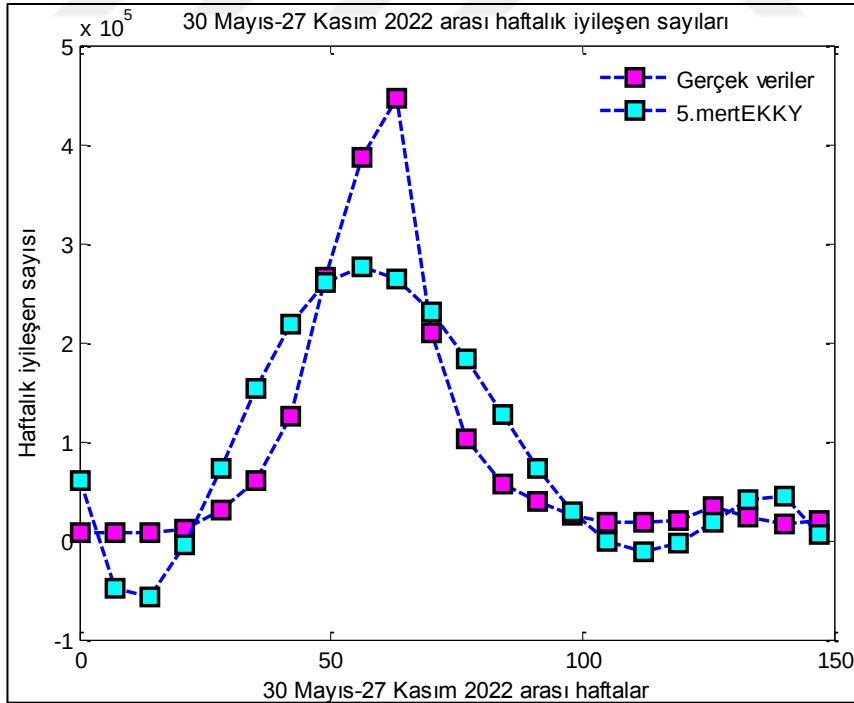


Şekil 19. 30 Mayıs-27 Kasım 2022 arası haftalık vefat sayıları

En küçük kareler yöntemi kullanılarak elde edilen 5. mertebeden polinom

$$y = -0.000000239415x^5 + 0.000111457x^4 - 0.017923x^3 + 1.131461x^2 - 20.997311x + 72.441289$$

ve $r = 0.8947$ korelasyon katsayısı elde edilmiştir.



Şekil 20. 30 Mayıs-27 Kasım 2022 arası haftalık iyileşen sayıları

En küçük kareler yöntemi kullanılarak elde edilen 5. mertebeden polinom

$$y = -0.000527112027x^5 + 0.209029797x^4 - 28.902957x^3 + 1575.450519x^2 - 25251.810567x + 60011.211689$$

ve $r = 0.8528$ korelasyon katsayısı elde edilmiştir.

2.8. Kesirli Mertebeden Analizler

2.8.1. Kesirli Hesapların Tarihi

Kesirli hesabın kökenleri, 30 Eylül 1965'te, saygın matematikçi L'Hospital'ın, diferansiyel ve türev hesabının öncüsü Leibniz'e 1/2. mertebeden türevin önemini sormasıyla başlar. Leibniz, "Bu ikilem şu anda karmaşık ve aşılmaz görünebilir, ancak şüphesiz gelecekte faydalı olacaktır." diye yanıtladı. Her ne kadar keyfi mertebeden türev ve integrallerin daha kesin olacağı zamanla anlaşılmış olsa da, konu L'Hospital'dan beri kesirli hesap olarak bilinmektedir.

1738'de, ünlü matematikçi Euler, x^a fonksiyonunun Gamma fonksiyonu aracılığıyla kesirli türevini açıklayarak kesirli hesabın keşfini başlattı.

1820'de Lacroix, Euler'in kavramlarını kullanarak, x^a fonksiyonlarının 1/2. mertebeden türevlerini bir formülle açıkladı. Bir fonksiyonun negatif olmayan ve keyfi türevi kavramı ilk olarak 1822 yılında Fourier tarafından ortaya atılmıştır türev

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^\alpha d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\left(\lambda x - t\lambda + \alpha \frac{\pi}{2}\right) dt \quad (45)$$

biçiminde tanımlamıştır.

1823'te Abel tarafından 'Brachistochrone Problemi' olarak bilinen problem formülize edilerek

'Brachistochrone Problemi' olarak adlandırılan problem 1823 yılında Abel tarafından ortaya atılmıştır.

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = f(x), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (46)$$

İntegral denklemi türetilmiştir yukarıdaki gibidir ve bu problemin çözümü şudur:

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} du \quad (47)$$

1832' de Liouville, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}$ şeklindeki üstel fonksiyonların kesirli türevini

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^\alpha e^{a_k x}, \quad (a \text{ keyfi kompleks sayı}) \quad (48)$$

şeklinde, integralini ise,

$$D^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(x+t) t^{\alpha-1} dt, \quad -\infty < x < \infty, \operatorname{Re} \alpha > 0 \quad (49)$$

şeklinde göstermiştir. Bu durumda, Liouville'in kesirli diferansiyel denklemleri çözmeye çalışan öncü kişi olduğu, bu formülleri kullanmasından da anlaşılacağı üzere, söylenebilir. 1847'de Riemann, Liouville denklemlerini formüle etmiştir.

$$D^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \right) dt, \quad x > 0 \quad (50)$$

Riemann-Liouville tanımı ortaya çıkmıştır. (Butzser ve Westphal, 2000).

Daha sonra Sonin (1869), Letnikov (1872), Laurent (1884), Nekrasove (1888), Nishimoto (1987) gibi matematikçiler,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt \quad (51)$$

denklemini kullanarak

$$D^\alpha f(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi i} \int_c^{x^+} \frac{f(t)}{(t-z)^{\alpha+1}} dt \quad (52)$$

Cauchy kesirli türev denklemini de kullanmışlardır.

1967 yılında Caputo tarafından fiziksel uygulamalarda sıkça kullanılan

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \quad (n-1 \leq \alpha < n) \quad (53)$$

kesirsel türevi ortaya konulmuştur (Dalir ve Bashour, 2010).

Mevcut literatüre göre, kesirli diferansiyel denklemler 300 yılı aşkın süredir incelenen bir konudur. Bununla birlikte, konunun karmaşıklığı ve çağdaş matematikte önemli ve anlamlı bir korelasyonun keşfi oldukça yenidir. Kesirli diferansiyel denklemlerin çeşitli bilim dallarında olumlu sonuçlar üretmesi, önemini artırmıştır. Kesirli diferansiyel denklemlerin çok sayıda bilim dalında çeşitli olgular için bir model teşkil ettiği kabul edilerek, bu denklemlerin dinamiklerini çözmek ve anlamak için yöntemler geliştirme çabaları başlamıştır. Kesirli diferansiyel denklemlerin her geçen gün yeni uygulamaları ortaya çıkmaktadır. Mühendislik, fizik bilimleri, biyoloji, kimya,

ekonomi, genetik, tıp ve istatistik dahil olmak üzere çeşitli bilim dallarında kapsamlı uygulamaları vardır.

2.8.2. Kesirli Mertebeden Analizde Kullanılan Bazı Özel Fonksiyonlar

2.8.2.1. Gamma Fonksiyonu (Γ)

Γ fonksiyonu kesirli mertebeden türev ve integral hesaplamalarında kullanılan bir fonksiyondur. Bundan dolayı bu fonksiyon bu konu için çok önemlidir.

Tanım 1: Gamma fonksiyonunun ilk tanımı,

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \quad (54)$$

şeklindedir ve bu tanım ilk kez Gauss tarafından yapılmıştır. Bu tanıma limit tanımı denilmektedir.

Tanım 2: Gamma fonksiyonunun,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \operatorname{Re} z > 0 \quad (55)$$

şeklinde integral tanımını ilk Euler yapmıştır.

2.8.2.2. Beta Fonksiyonu (β)

Kesirli analizde, Gamma fonksiyonu değerlerinin belirli kombinasyonlarını kullanmaktan ziyade Beta fonksiyonunu kullanmak çoğu zaman daha uygun olabilir.

Tanım 3:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0 \quad (56)$$

şeklinde beta fonksiyonu tanımlanmıştır.

Kesirli mertebeye ilgili diğer tüm bilgiler bir sonraki bölümde de anlatılmaya devam edilecektir. Şimdi tüm bu bilgiler ışığında (11) denklem sisteminin kesirli mertebeden analizi aşağıda yapılacaktır.

2.8.3. Kesirli Mertebeden Covid-19 Modeli

Bu bölümde kesirli mertebeden Covid-19 modelini incelenecektir. Aşağıda kesirli mertebeden denklem sistemi

$$\begin{aligned}
\frac{D^q S}{dt} &= \Lambda - \phi_c IS - \mu S + v_3 R, \\
\frac{D^q E}{dt} &= \phi_c IS - (\sigma + \mu) E, \\
\frac{D^q I}{dt} &= \sigma E - (\alpha + v_2 + \delta + \mu) I + v_1 R, \\
\frac{D^q Q}{dt} &= \alpha I - (\theta + \mu) Q \\
\frac{D^q R}{dt} &= \theta Q - (v_1 + v_3 + \mu) R + v_2 I
\end{aligned} \tag{57}$$

şeklinde verilmiştir. Burada D^q Caputo Türev operatörüdür. Gelecek bölümde Caputo Türev tanımını verilecektir. S, E, I, Q, R sırasıyla hassas bireyler, hastalığa maruz kalmış bireyler, enfekte olmuş bireyler, karantinada olanlar ve iyileşenleri t zamanda temsil etmektedir. Denklem sistemindeki parametrelerin ifade ettiği durumlar Tablo 1 ve 2’de verilmiştir.

Tanım 4: (Caputo, 1969; Miler vd., 2006; Kilbas vd., 2006) Caputo türevin tanımında $\omega \in C_{-1}^\mu (\mu \geq 1)$ fonksiyonunun $q > 0$ mertebeden kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$D_t^q \omega(t) = \frac{1}{\Gamma(m-q)} \int_0^t (t-\vartheta)^{m-q-1} \omega^m(\vartheta) d\vartheta \tag{58}$$

Burada $m-1 < q < m \in \mathbb{N}$ dir. Eğer $q = m \in \mathbb{N}$ ise bu durumda

$$D_t^q \omega(t) = \frac{d^m \omega(t)}{dt^m} \tag{59}$$

olur.

Buradan alırsanız ki

$$\begin{aligned}
D^q X(t) &= AX(t) + g(X), X(0) = X_0 \in \mathbb{R} \\
\delta &\in (0, 1), g \in C^1(\mathbb{R}^{n \times n}), Dg(0) = 0 \text{’dir}
\end{aligned} \tag{60}$$

Kesirli diferansiyel denklem sistemi için lokal kararlılık aşağıdaki teoremlerle verilecektir.

Teorem 7: Kabul edelim ki orjin (60) denkleminin denge noktası olsun. Orjinin lineer kararlılığı, eğer A nın λ ile tanımlanan her bir özdeğeri $|\arg(\lambda)| > \frac{\delta\pi}{2}$ ise kararlı, $|\arg(\lambda)| < \frac{\delta\pi}{2}$ ise kararsızdır.

Şimdi $\mu \in \mathbb{R}$ parametresiyle kesirli mertebeden türev için Hopf dallanması

$$\frac{D^q X}{dt} = A(\mu)X(t) + g(X, \mu), X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^n \quad (61)$$

olarak tanımlanır.

Burada, $\delta \in (0, 1)$, $A(\mu) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $g(X, \mu) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $Dg(0, \mu) = 0$ dir. İyi bilinir ki birinci mertebeden türev halinde (34) sistemi için Hopf dallanması şartları

$$\operatorname{Re}\{\lambda(0) = 0\}, \operatorname{Im}\{\lambda(0) \neq 0\}, \frac{d\operatorname{Re}\{\lambda(\mu)\}}{d\mu} \mu = 0 \text{ için } \neq 0 \quad (62)$$

şeklindedir. Ama kesirli mertebeden türev için Hopf dallanması şartları aşağıdaki gibidir.

$$|\arg(\lambda(0))| = \frac{\delta\pi}{2}, \frac{d\{\lambda(\mu)\}}{d\mu} \mu = 0 \text{ için } \neq 0 \quad (63)$$

Buradan kesirli mertebeden türevin periyodik çözümleri olmadığı görülür. Bu yüzden kesirli mertebeden türev halinde Hopf dallanmasının varlığının ispatı periyodik çözümü var anlamına gelmez. Buradaki durumda salınım vardır diyebiliriz.

2.8.4. Kesirli Mertebeden Covid-19 Modelinin Analizi

Bu bölümde (57) sisteminin çözümünün niteliksel bir analizini sağlamakla ilgileneceğiz. İlk başta, (57) sisteminin ilk üç denklemini ele alacağız. Son iki denklemden bağımsız çalışacağız. Q ve R den bağımsız olan sistem aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \frac{D^q S}{dt} &= \Lambda - \phi_c IS - \mu S + v_3 R, \\ \frac{D^q E}{dt} &= \phi_c IS - (\sigma + \mu) E, \\ \frac{D^q I}{dt} &= \sigma E - (\alpha + v_2 + \delta + \mu) I + v_1 R \end{aligned} \quad (64)$$

(64) denklem sisteminin sağ tarafı Lipshitz şartları gerçeğine dayanarak süreklidir, buradan çözümün varlığı ve tekliğini ortaya çıkarmış oluruz.

2.8.4.1. Denge

(64) sistemindeki her denklemi sıfıra eşitleyelim.

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda - \phi_c IS - \mu S + v_3 R, \\ 0 &= \phi_c IS - (\sigma + \mu)E, \\ 0 &= \sigma E - (\alpha + v_2 + \delta + \mu)I + v_1 R \end{aligned} \quad (65)$$

(65) denklem sisteminin hastalık denge noktası (DFE) $\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right)$ şeklindedir. $E = (S, E, I)$ için Jacobian matris aşağıdaki gibidir.

$$J = \begin{bmatrix} -\phi_c I - \mu & 0 & -\phi_c S \\ \phi_c I & -(\sigma + \mu) & \phi_c S \\ 0 & \sigma & -(\alpha + v_2 + \delta + \mu) \end{bmatrix} \quad (66)$$

$E^0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right)$ için Jacobian matris

$$J(E^0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\phi_c \frac{\Lambda}{\mu} \\ 0 & -(\sigma + \mu) & \phi_c \frac{\Lambda}{\mu} \\ 0 & \sigma & -(\alpha + v_2 + \delta + \mu) \end{bmatrix} \quad (67)$$

şeklinde olur. Burada $K = -(\alpha + v_2 + \delta + \mu)$, $L = \phi_c \frac{\Lambda}{\mu}$ dir.

Özdeğerler $\det(J(E^0) - \lambda I) = 0$ karakteristik denkleminin çözülmesiyle bulunabilir. (67) matrisiyle verilen $J(E^0)$ için karakteristik denklem

$$(\lambda + \mu)(\lambda^2 + (-K + \mu + \sigma)\lambda - (K + L)\sigma) = 0$$

şeklindedir.

Bu matrisin öz değerleri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}(\sigma + \mu - K) + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 2\mu\sigma + 2\sigma K + \mu^2 + 2\mu K + K^2 + 4L\sigma} \end{aligned}$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2}(\sigma + \mu - K) - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 2\mu\sigma + 2\sigma K + \mu^2 + 2\mu K + K^2 + 4L\sigma}$$

şeklinde bulunmuş olur.

Burada

$$\lambda_1 = -\mu,$$

$$\lambda_2 = -A + B$$

$$\lambda_3 = -A - B$$

(68)

şeklinde alınabilir.

Burada

$$A = \frac{1}{2}(\sigma + \mu + K), B = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 2\mu\sigma - 2\sigma K + \mu^2 - 2\mu K + K^2 + 4L\sigma} \text{ dir.}$$

Eğer $A > B$ ise (39) karakteristik denkleminin üç kökünün reel kısımları negatif olur. Bu yüzden $E^0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right)$ denge noktası asimptotik kararlı olur.

Eğer $A = B$ ise bir özdeğer sıfır geri kalan iki özdeğer negatif reel kısma sahip olur. Burada transcritical dallanması olur.

Eğer $A < B$ ise en az bir özdeğer pozitif reel köke sahip olur. Bu nedenle $E^0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right)$ denge noktası kararsız semer düğüm noktası olur.

Tablo 4'teki gerçek değerleri yerine yazdığımızda özdeğerler,

$$\lambda_1 = -0.0032$$

$$\lambda_2 = -0.0013$$

$$\lambda_3 = -0.0205$$

şeklinde bulunur.

$$|\arg(\lambda)| = \frac{q\pi}{2}, \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=0} \neq 0$$

$$|\arg(\lambda_1)| = \pi > \frac{q\pi}{2}, |\arg(\lambda_2)| = \pi > \frac{q\pi}{2}, |\arg(\lambda_3)| = \pi > \frac{q\pi}{2}.$$

bu yüzden DFE lokal kararlıdır şeklinde bulunur.

Diğer taraftan pozitif denge noktası (PE) $E^1 = (S^*, E^*, I^*)$ denge noktasını alalım. E^1 de lineerleştirilmiş sistemi düşünelim. E^1 için Jacobian matris,

$$J = \begin{bmatrix} -\phi_c I^* - \mu & 0 & -\phi_c S^* \\ \phi_c I^* & -(\sigma + \mu) & \phi_c S^* \\ 0 & \sigma & -(\alpha + v_2 + \delta + \mu) \end{bmatrix}$$

Burada $K = -(\alpha + v_2 + \delta + \mu)$, $M = \phi_c S^*$, $N = \phi_c I^*$ dır. E^1 denge noktası Jacobian matriste yerine yazılarak

$$J(E^1) = \begin{bmatrix} -N - \mu & 0 & -M \\ N & -(\sigma + \mu) & M \\ 0 & \sigma & K \end{bmatrix} \quad (69)$$

elde edilir. Ve matrisin öz değerleri $\det(J(E^1) - \lambda I) = 0$ karakteristik denkleminin çözülmesiyle bulunabilir. (69) matrisiyle elde edilen karakteristik denklem

$$\begin{aligned} \lambda^3 + \lambda^2(N + 2\mu + \sigma - K) + \lambda(-NK + \mu + \mu^2 - 2\mu K - \sigma K - M\sigma) + N\sigma K \\ + N\mu K + \mu\sigma K + \mu M\sigma + \mu^2 K \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu denge noktası için benzer işlemler yapılarak ve parametre değerleri yerine yazılarak özdeğerler,

$$\lambda_1 = -0.000000019166200$$

$$\lambda_2 = -0.0032574974998000001$$

$$\lambda_3 = -0.018512314000440$$

şeklinde bulunmuş olur. Yine buradan $|\arg(\lambda_1)| = \pi > \frac{q\pi}{2}$, $|\arg(\lambda_2)| = \pi > \frac{q\pi}{2}$, $|\arg(\lambda_3)| = \pi > \frac{q\pi}{2}$ dir. Bu da pozitif denge noktasının da lokal karalı olduğunu gösterir.

2.9. Homotopi Analiz Metodu (HAM)

Doğrusal olmayan denklemlerin kesin çözümlerini elde etmek bazen mümkün olmayabilir. 1992 yılında Shijun Liao, homotopi fikrine dayanan homotopi analizi yaklaşımını literatüre tanıtmış ve bu yaklaşımı doğrusal ve doğrusal olmayan denklemler için yaklaşık çözümler türetmek için kullanmıştır. Cebirsel, diferansiyel ve integro-diferansiyel denklemler de dahil olmak üzere, doğal olayların matematiksel

modellemesinden ortaya çıkan çok sayıda doğrusal olmayan denklem için yaklaşık çözümler türetilmiştir (Abbasbandy, 2006; Tasbozan vd., 2012; Esen vd., 2012; Esen vd., 2013; Abbasbandy vd., 2013). Türetilmiş seri çözümlerinin yakınsama alanı, bu yaklaşımda kullanılan yardımcı parametrelerin kullanımıyla düzenlenebilir. Yardımcı doğrusal operatörün kullanımıyla başlangıç yaklaşımından sorunun kesin çözümüne geçiş yapan sürekli bir dönüşüm oluşturulur. İncelenen doğrusal olmayan denklemler, Homotopi Analizi yaklaşımının (Liao, 2003) uygulanmasıyla süresiz doğrusal problemlere dönüştürülür.

Modelin çözümünü q-HATM (q-Homotopi Analiz Dönüşüm Yöntemi) kullanarak belirleyeceğiz. Sonraki bölümde q-HATM'nin ayrıntılı bir açıklaması sunulmaktadır.

2.9.1. Covid-19 Modeli İçin Optimal q-HATM (q-Homotopy Analiz Dönüşüm Metodu)

Bu bölümde önce genel teorik bilgi verilecektir ve modelin yaklaşık çözümünü bulmak için q-Ham'dan yardım alınacaktır. Ve çözümün grafikleri matlab yardımıyla çizdirilip, grafikler yorumlanacaktır.

2.9.1.1. Temel Tanımlar

Tanım 5: (Podlubny, 1999a) $\omega \in C_\mu (\mu \geq 1)$ fonksiyonun $\alpha > 0$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli integral fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$J_t^\alpha \omega(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \vartheta)^{\alpha-1} \omega(\vartheta) d\vartheta & \alpha > 0, t > 0 \\ \omega(t) & \alpha = 0, t = 0 \end{cases} \quad (70)$$

Burada $\Gamma(\cdot)$ Gamma fonksiyonudur.

Tanım 6: (Caputo, 1969; Kilbas vd., 2006) $D_t^\alpha \omega(t)$ Caputo kesirli türevin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathcal{L}[D_t^\alpha \omega(t)] = s^\alpha \mathcal{L}[\omega(t)](s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} \omega^{(k)}(0^+) \quad (71)$$

Burada $\alpha > 0, m - 1 < \alpha < m$ ve $\mathcal{L}$ Laplace dönüşüm operatörüdür.

2.9.1.2. q-HATM nin Temel Çözüm Prosedürü

q-HATM' nin genel çözümünü göstermek için aşağıdaki genel nonlinear zaman-kesirli parçalı diferansiyel denklemi ele alalım.

$$D_t^\alpha U(x, t) + \mathcal{R}U(x, t) + NU(x, t) = g(x, t), (\alpha > 0, m - 1 < \alpha < m \in \mathbb{N}) \quad (72)$$

Burada $D_t^\alpha U(x, t)$, $U(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonun Caputo kesirli türevini, $\mathcal{R}, \delta > 0$ için $\|\mathcal{R}U\| \leq \delta \|U\|$ şartını sağlayan sınırlı parçalı diferansiyel operatördür. N ise Lipschitz şartını yani $\lambda > 0$ için $\|\mathcal{R}U_1 - \mathcal{R}U_2\| \leq \lambda \|U_1 - U_2\|$ sağlayan nonlineer (lineer olmayan) parçalı diferansiyel operatörüdür. $g(x, t)$ gömme parametresidir. Önce (71) denklemini kullanarak (72) denkleminin Laplace dönüşümünü alalım. Buradan,

$$\mathcal{L}(U(x, t)) - \frac{1}{s^\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} U^{(k)}(x, 0) + \frac{1}{s^\alpha} (\mathcal{L}[\mathcal{R}U(x, t)] + \mathcal{L}[NU(x, t)] - \mathcal{L}[g(x, t)]) = 0 \quad (73)$$

olur.

$$N[\Phi(x, t; q)] = \mathcal{L}[\Phi(x, t; q)] \frac{1}{s^\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} \Phi^{(k)}(x, t; q)(0^+) + \frac{1}{s^\alpha} (\mathcal{L}[\Phi U(x, t)] + \mathcal{L}[\Phi NU(x, t)] - \mathcal{L}[g(x, t)]) \quad (74)$$

burada $g \in [0, \frac{1}{n}]$, ($n \geq 1$) gömme parametresi ve $\Phi(x, t; q)$ q ve x, t nin bilinmeyen gerçek değerli fonksiyonudur. q -HAM $q \in [0, \frac{1}{n}]$, ($n \geq 1$) parametresinin yorumlanmasıyla bir klasik homotopy analiz yönteminin genişletilmiş halidir. q -ATM çözümünde $(\frac{1}{n})^m$ teriminin varlığı klasik HAM 'dan daha hızlı yakınsamayı garanti eder. $H(x, t)$ sıfır olmayan yardımcı fonksiyon sayesinde aşağıdaki gibi bir homotopy oluşturulabilir.

$$(1 - nq)\mathcal{L}[\Phi(x, t; q) - U_0(x, t)] = hqH(x, t)N\Phi(x, t; q) \quad (75)$$

Burada h sıfır olmayan yardımcı parametre ve $U_0(x, t)$, U fonksiyonunun başlangıç varsayımıdır. Buradan açıkça alırız ki,

$$\begin{cases} \Phi(x, t; 0) = U_0(x, t) & q = 0 \\ \Phi(x, t; \frac{1}{n}) = U(x, t) & q = \frac{1}{n} \end{cases} \quad (76)$$

şeklinde. $\Phi(x, t; q)$ fonksiyonunu q ya göre Taylor Serisi'ne açarsak;

$$\Phi(x, t; q) = U_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} U_m(x, t)q^m \quad (77)$$

olur. Burada

$$U_m(x, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \Phi(x, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (78)$$

şeklindedir. $H(x, t)$ yardımcı fonksiyon ve h yardımcı parametresi, $U_0(x, t)$ ilk tahminin uygun seçimleri için (77) serisi $q = \frac{1}{n}$ ye yakınsar ve

$$\Phi(x, t; q) = U_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} U_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (79)$$

bu da (77) denkleminin en az bir çözümünü buldurur.

$$\vec{U}_m(x, t) = \{U_0(x, t), U_1(x, t), \dots, U_m(x, t)\} \quad (80)$$

vektörlerini tanımlayalım. q ya bağlı n -zamanlı (75) denkleminin türevi alınarak $q = 0$ dan $\frac{1}{m}$ ye kadar sonuçları toplanarak aşağıdaki m . mertebeden deformasyon denklemi elde edilir.

$$\mathcal{L}[U_m(x, t) - k_m U_{m-1}(x, t)] = hH(x, t)\mathcal{R}_m(\vec{U}_{m-1}(x, t)) \quad (81)$$

Burada

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(\vec{U}_{m-1}) &= \mathcal{L}U_{m-1}(x, t)h\left(1 - \frac{k_m}{n}\right)\left(\frac{1}{s^\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} U^{(k)}(x, 0) + \right. \\ &\left. \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[g(x, t)]\right) + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}(\mathcal{R}_m U_{m-1} + H_{m-1}) \end{aligned} \quad (82)$$

ve

$$k_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ n & m \geq 1 \end{cases} \quad (83)$$

dir. (82) denkleminde H_m homotopy polinomu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$H_m = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \Phi(x, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \text{ ve } \Phi(x, t; q) = \Phi_0 + q\Phi_1 + q^2\Phi_2 + \dots \quad (84)$$

(81) denklemine ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$U_m(x, t) = k_m U_m(x, t) + h\mathcal{L}^{-1} \left[H(x, t) \mathcal{R}_m \left(\vec{U}_{m-1}(x, t) \right) \right] \quad (85)$$

elde edilir. (85) denklemini (82) de yerine yazarsak;

$$U_m(x, t) = (k_m + h) \vec{U}_{m-1}(x, t) - h \left(1 - \frac{k_m}{n} \right) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} U^{(k)}(x, 0) + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[g(x, t)] \right] + h\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}(\mathcal{R}_m U_{m-1} + H_{m-1}) \right] \quad (86)$$

bulunur. Sonuç olarak (72) denkleminin yaklaşık analitik çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$U_m(x, t) = U_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} U_m(x, t) \left(\frac{1}{n} \right)^m \quad (87)$$

(87) q-HATM çözümünde $\left(\frac{1}{n} \right)^m$ faktörünün varlığı standart HAM ' dan daha hızlı çözüme yakınsar. Ek olarak $n = 1$ özel durumu için q-HATM, standart homotopy analiz dönüşüm metoduna (HATM) dönüşür.

2.9.2. Kesirli Mertebeden Covid -19 Modeli için q-HATM

Önce fractional Covid-19 modelini ele alalım.

$$\begin{aligned} D_t^{\beta_1} S(t) &= \Lambda - \phi_c IS - \mu S + v_3 R \\ D_t^{\beta_2} E(t) &= \phi_c IS - (\sigma + \mu) E \\ D_t^{\beta_3} I(t) &= \sigma E - (\alpha + v_2 + \delta + \mu) I + v_1 R \\ D_t^{\beta_4} Q(t) &= \alpha I - (\theta + \mu) Q \\ D_t^{\beta_5} R(t) &= \theta Q - (v_1 + v_3 + \mu) R + v_2 I \end{aligned} \quad (88)$$

(88) denklem sistemindeki tüm denklemlerin her iki tarafından Laplace dönüşümü alınır,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[S(t)] &= \frac{S_0}{s} + \frac{1}{s\beta_1} \mathcal{L}[-\Lambda + \phi_c IS + \mu S - v_3 R] \\
\mathcal{L}[E(t)] &= \frac{E_0}{s} + \frac{1}{s\beta_2} \mathcal{L}[-\phi_c IS + (\sigma + \mu)E] \\
\mathcal{L}[I(t)] &= \frac{I_0}{s} + \frac{1}{s\beta_3} \mathcal{L}[-\sigma E + (\alpha + v_2 + \delta + \mu)I - v_1 R] \\
\mathcal{L}[Q(t)] &= \frac{Q_0}{s} + \frac{1}{s\beta_4} \mathcal{L}[-\alpha I + (\theta + \mu)Q] \\
\mathcal{L}[R(t)] &= \frac{R_0}{s} + \frac{1}{s\beta_5} \mathcal{L}[-\theta Q + (v_1 + v_3 + \mu)R - v_2 I]
\end{aligned} \tag{89}$$

olarak yazılır. Burada $S(0) = S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, Q(0) = Q_0, R(0) = R_0$ başlangıç şartlarıdır ve gerçek değerleri $S(0) = 5000, E(0) = 2003, I(0) = 416, Q(0) = 404, R(0) = 115$ olarak verilmiştir.

Şimdi çözüm bulabilmek için kullanmamız olması gereken aşağıdaki denklemleri (90) oluşturabiliriz.

$$\begin{aligned}
N_1[\Phi(x, t; q)] &= N_1[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5] \\
&= \mathcal{L}[\Phi_1(x, t; q)] - \frac{S_0}{s} \\
&\quad + \frac{1}{s\beta_1} \mathcal{L}[-\Lambda + \phi_c \Phi_3(x, t; q) \Phi_1(x, t; q) + \mu \Phi_1(x, t; q) \\
&\quad - v_3 \Phi_5(x, t; q)] \\
N_2[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5] &= \mathcal{L}[\Phi_2(x, t; q)] \\
&\quad - \frac{E_0}{s} \frac{1}{s\beta_2} \mathcal{L}[-\phi_c \Phi_3(x, t; q) \Phi_1(x, t; q) - (\sigma + \mu) \Phi_2(x, t; q)] \\
N_3[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5] &= \mathcal{L}[\Phi_3(x, t; q)] - \frac{I_0}{s} \\
&\quad + \frac{1}{s\beta_3} \mathcal{L}[-\sigma \Phi_2(x, t; q) + (\alpha + v_2 + \delta + \mu) \Phi_3(x, t; q) \\
&\quad - v_1 \Phi_5(x, t; q)] \\
N_4[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5] &= \mathcal{L}[\Phi_4(x, t; q)] - \frac{Q_0}{s} \\
&\quad + \frac{1}{s\beta_4} \mathcal{L}[-\alpha \Phi_3(x, t; q) + (\theta + \mu) \Phi_4(x, t; q)]
\end{aligned}$$

$$N_5[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5] = \mathcal{L}[\Phi_5(x, t; q)] - \frac{R_0}{s} + \frac{1}{s\beta_5} \mathcal{L}[-\theta\Phi_4(x, t; q) + (v_1 + v_3 + \mu)\Phi_5(x, t; q) - v_2\Phi_3(x, t; q)] \quad (90)$$

$H(x, t) = 1$ alınarak aşağıdaki m. mertebeden deformasyon denklemlerini

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[S_m(t) - k_m S_{m-1}(t)] &= h\mathcal{R}_m^S[\vec{S}_{m-1}] \\ \mathcal{L}[E_m(t) - k_m E_{m-1}(t)] &= h\mathcal{R}_m^E[\vec{E}_{m-1}] \\ \mathcal{L}[I_m(t) - k_m I_{m-1}(t)] &= h\mathcal{R}_m^I[\vec{I}_{m-1}] \\ \mathcal{L}[Q_m(t) - k_m Q_{m-1}(t)] &= h\mathcal{R}_m^Q[\vec{Q}_{m-1}] \\ \mathcal{L}[R_m(t) - k_m R_{m-1}(t)] &= h\mathcal{R}_m^R[\vec{R}_{m-1}] \end{aligned} \quad (91)$$

Burada,

$$k_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ n & m \geq 1 \end{cases} \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m^S[\vec{S}_{m-1}] &= \mathcal{L}[\vec{S}_{m-1}(t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{S_0}{s} + \frac{1}{s\beta_1} \mathcal{L}[-\Lambda + \phi_c \sum_{i=0}^{m-1} S_i I_{m-1-i} + \mu S_{m-1} - v_3 R_{m-1}] \\ \mathcal{R}_m^E[\vec{E}_{m-1}] &= \mathcal{L}[\vec{E}_{m-1}(t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{E_0}{s} + \frac{1}{s\beta_2} \mathcal{L}[-\phi_c \sum_{i=0}^{m-1} S_i I_{m-1-i} + (\sigma + \mu) E_{m-1}] \\ \mathcal{R}_m^I[\vec{I}_{m-1}] &= \mathcal{L}[\vec{I}_{m-1}(t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{I_0}{s} + \frac{1}{s\beta_3} \mathcal{L}[-\sigma E_{m-1} + (\alpha + v_2 + \delta + \mu) I_{m-1} - v_1 R_{m-1}] \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m^Q[\vec{Q}_{m-1}] &= \mathcal{L}[\vec{Q}_{m-1}(t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{Q_0}{s} + \frac{1}{s\beta_4} \mathcal{L}[-\alpha I_{m-1} + (\theta + \mu) Q_{m-1}] \\ \mathcal{R}_m^R[\vec{R}_{m-1}] &= \mathcal{L}[\vec{R}_{m-1}(t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{R_0}{s} + \frac{1}{s\beta_5} \mathcal{L}[-\theta Q_{m-1} + (v_1 + v_3 + \mu) R_{m-1} - v_2 I_{m-1}] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (92) ifadeleri (91) de yerine yazılıp ters Laplace alınır;

$$\begin{aligned} S_m - k_m S_{m-1} &= h S_{m-1} - h \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{S_0}{s} \right] + h \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s\beta_1} \mathcal{L}[-\Lambda + \phi_c \sum_{i=0}^{m-1} S_i I_{m-1-i} + \mu S_{m-1} - v_3 R_{m-1}] \right\} \end{aligned}$$

$$S_m = (k_m + h)S_{m-1} - h \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{S_0}{s} \right] + h \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\beta_1}} \mathcal{L}[-\Lambda + \phi_c \sum_{i=0}^{m-1} S_i I_{m-1-i} + \mu S_{m-1} - v_3 R_{m-1}] \right\} \quad (91.1)$$

$$E_m - k_m E_{m-1} = h E_{m-1} - h \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{E_0}{s} \right] + h \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\beta_2}} \mathcal{L}[-\phi_c \sum_{i=0}^{m-1} S_i I_{m-1-i} + (\sigma + \mu) E_{m-1}] \right\} \\ E_m = (k_m + h) E_{m-1} - h \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{E_0}{s} \right] + h \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\beta_2}} \mathcal{L}[-\phi_c \sum_{i=0}^{m-1} S_i I_{m-1-i} + (\sigma + \mu) E_{m-1}] \right\} \quad (91.2)$$

$$I_m = (k_m + h) I_{m-1} - h \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{I_0}{s} \right] + h \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\beta_3}} \mathcal{L}[-\sigma E_{m-1} + (\alpha + v_2 + \delta + \mu) I_{m-1} - v_1 R_{m-1}] \right\} \quad (91.3)$$

$$Q_m = (k_m + h) Q_{m-1} - h \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{Q_0}{s} \right] + h \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\beta_4}} \mathcal{L}\{-\alpha I_{m-1} + (\theta + \mu) Q_{m-1}\} \right\} \quad (91.4)$$

$$R_m = (k_m + h) R_{m-1} - h \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R_0}{s} \right] + h \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\beta_5}} \mathcal{L}[-\theta Q_{m-1} + (v_1 + v_3 + \mu) R_{m-1} - v_2 I_{m-1}] \right\} \quad (91.5)$$

denklemleri elde edilir.

Buradan;

$$S(t) = S_0 + \sum_{m=1}^{\infty} S_m(t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \\ E(t) = E_0 + \sum_{m=1}^{\infty} E_m(t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \\ I(t) = I_0 + \sum_{m=1}^{\infty} I_m(t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \\ Q(t) = Q_0 + \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \\ R(t) = S_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m(t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (93)$$

genel çözüm (93)' teki gibi bulunur.

(91.1), (91.2), (91.3), (91.4), (91.5) denklemlerinden $i = 0, m = 1$ için (91.1) denklemi için, (83) özelliğini kullanıp gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
S_1 &= (k_1 + h)S_0 - h \left(1 - \frac{k_1}{n}\right) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{S_0}{s} \right] + h \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\beta_1}} \mathcal{L}[-\Lambda + \phi_c S_0 I_0 + \mu S_0 - v_3 R_0] \right\} \\
S_1 &= (0 + h)S_0 - h \left(1 - \frac{0}{n}\right) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{S_0}{s} \right] + h \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\beta_1}} \mathcal{L}[-\Lambda + \phi_c S_0 I_0 + \mu S_0 - v_3 R_0] \right\} \\
S_1 &= h \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\beta_1}} \mathcal{L} \left[(-\Lambda + \phi_c S_0 I_0 + \mu S_0 - v_3 R_0) \cdot \frac{1}{s} \right] \right\} \\
S_1 &= h(-\Lambda + \phi_c S_0 I_0 + \mu S_0 - v_3 R_0) \frac{t^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1 + 1)} \tag{94}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$i = 1, m = 1$ için (91.2), (91.3), (91.4) ve (91.5) denkleminde gerekli işlemler yapılarak ve yine (78) özelliği kullanılarak S_1 işlemlerine benzer şekilde E_1, I_1, Q_1 ve R_1 de aşağıdaki gibi bulunur.

$$E_1 = h(-\phi_c S_0 I_0 + (\sigma + \mu)E_0) \frac{t^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2 + 1)} \tag{95}$$

$$I_1 = h(-\sigma E_0 + (\alpha + v_2 + \delta + \mu)I_0 - v_1 R_0) \frac{t^{\beta_3}}{\Gamma(\beta_3 + 1)} \tag{96}$$

$$Q_1 = h(-\alpha I_0 + (\theta + \mu)Q_0) \frac{t^{\beta_4}}{\Gamma(\beta_4 + 1)} \tag{97}$$

$$R_1 = h(\theta Q_0 - (v_1 + v_3 + \mu)R_0 - v_2 I_0) \frac{t^{\beta_5}}{\Gamma(\beta_5 + 1)} \tag{98}$$

$m = 2$ için (91. 1) denkleminde ve (83) özelliğinden;

$$\begin{aligned}
S_2 &= (k_2 + h)S_1 - h \left(1 - \frac{k_2}{n}\right) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{S_1}{s} \right] + h \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\beta_1}} \mathcal{L}[-\Lambda + \phi_c (S_0 I_1 + S_1 I_0 + \mu S_1 - v_3 R_1)] \right\}
\end{aligned}$$

(94), (96), (98) ifadeleri yerine yazılırsa;

$$S_2 = (n+h)h(-\Lambda + \phi_c S_0 I_0 + \mu S_0 - v_3 R_0) \frac{t^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1+1)} + h\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\beta_1}} \mathcal{L} \left[A \frac{t^{\beta_3}}{\Gamma(\beta_3+1)} + B \frac{t^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1+1)} + C \frac{t^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1+1)} + D \frac{t^{\beta_5}}{\Gamma(\beta_5+1)} \right] \right\} \quad (99)$$

$$S_2 = (n+h)h(-\Lambda + \phi_c S_0 I_0 + \mu S_0 - v_3 R_0) \frac{t^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1+1)} + h\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\beta_1}} \left[A \frac{1}{s^{\beta_3+1}} + B \frac{1}{s^{\beta_1+1}} + C \frac{1}{s^{\beta_1+1}} + \frac{1}{s^{\beta_5+1}} \right] \right\} \quad (100)$$

$$S_2 = (n+h)h(-\Lambda + \phi_c S_0 I_0 + \mu S_0 - v_3 R_0) \frac{t^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1+1)} + h \left(A \frac{t^{\beta_3+\beta_1}}{\Gamma(\beta_3+\beta_1+1)} + B \frac{t^{2\beta_1}}{\Gamma(2\beta_1+1)} + C \frac{t^{2\beta_1}}{\Gamma(2\beta_1+1)} + D \frac{t^{\beta_1+\beta_5}}{\Gamma(\beta_1+\beta_5+1)} \right) \quad (101)$$

olarak S_2 bulunmuş olur. Burada

$$\begin{aligned} A &= -\Lambda + \phi_c S_0 h \left(\sigma E_0 + ((\alpha + v_2 + \delta + \mu) I_0 - v_1 R_0) \right) \\ B &= \left((\phi_c I_0 h (-\Lambda + \phi_c S_0 I_0 + \mu S_0 - v_3 R_0)) \right) \\ C &= \left(\mu h ((-\Lambda + \phi_c S_0 I_0 + \mu S_0 - v_3 R_0)) \right) \\ D &= -v_3 h ((\theta Q_0 - (v_1 + v_3 + \mu) R_0 - v_2 I_0)) \end{aligned}$$

şeklindedir. Yine $m = 2$ için S_2 yi bulduran işlemlere benzer olarak E_2, I_2, Q_2, R_2 aşağıdaki gibi bulunmuş olur.

$$E_2 = (n+h)h(-\phi_c S_0 I_0 + (\sigma + \mu) E_0) \frac{t^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2+1)} + h \left(E_* \frac{t^{\beta_3+\beta_2}}{\Gamma(\beta_3+\beta_2+1)} + F \frac{t^{\beta_2+\beta_1}}{\Gamma(\beta_2+\beta_1+1)} + G \frac{t^{2\beta_2}}{\Gamma(2\beta_2+1)} \right) \quad (102)$$

Burada

$$\begin{aligned} E_* &= -\phi_c S_0 h (-\sigma E_0 + (\alpha + v_2 + \delta + \mu) I_0 - v_1 R_0) \\ F &= -\phi_c I_0 h ((-\Lambda + \phi_c S_0 I_0 + \mu S_0 - v_3 R_0)) \\ G &= (\sigma + \mu) h (-\phi_c S_0 I_0 + (\sigma + \mu) E_0) \end{aligned}$$

şeklindedir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
I_2 &= (n+h)h \left((-\sigma E_0 + (\alpha + v_2 + \delta + \mu)I_0 - v_1 R_0) \frac{t^{\beta_3}}{\Gamma(\beta_3+1)} \right) + \\
&h \left(H \frac{t^{\beta_3+\beta_2}}{\Gamma(\beta_3+\beta_2+1)} + I_1 \frac{t^{2\beta_3}}{\Gamma(2\beta_3+1)} + K \frac{t^{\beta_3+\beta_5}}{\Gamma(\beta_3+\beta_5+1)} + L \frac{t^{2\beta_3}}{\Gamma(2\beta_3+1)} \right)
\end{aligned} \tag{103}$$

burada;

$$\begin{aligned}
H &= -\sigma h(-\phi_c S_0 I_0 + (\sigma + \mu)E_0) \\
I_1 &= (\alpha + v_2 + \delta + \mu)h(-\sigma E_0 + (\alpha + v_2 + \delta + \mu)I_0 - v_1 R_0) \\
K &= -v_1 h(\theta Q_0 - (v_1 + v_3 + \mu)R_0 - v_2 I_0)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Benzer şekilde

$$Q_2 = (n+h)h(-\alpha I_0 + (\theta + \mu)Q_0) \frac{t^{\beta_4}}{\Gamma(\beta_4+1)} + h \left(M \frac{t^{\beta_3+\beta_4}}{\Gamma(\beta_3+\beta_4+1)} + N \frac{t^{2\beta_4}}{\Gamma(2\beta_4+1)} \right) \tag{104}$$

olarak bulunur. Burada,

$$\begin{aligned}
M &= -\alpha h(-\sigma E_0 + (\alpha + v_2 + \delta + \mu)I_0 - v_1 R_0) \\
N &= (\theta + \mu)h(-\alpha I_0 + (\theta + \mu)Q_0)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
R_2 &= (n+h)h(\theta Q_0 + (v_1 + v_3 + \mu)R_0 - v_2 I_0) \frac{t^{\beta_5}}{\Gamma(\beta_5+1)} + h \left(O \frac{t^{\beta_4+\beta_5}}{\Gamma(\beta_4+\beta_5+1)} + \right. \\
&\ddot{O} \frac{t^{2\beta_5}}{\Gamma(2\beta_5+1)} + P \frac{t^{\beta_3+\beta_5}}{\Gamma(\beta_3+\beta_5+1)} \left. \right)
\end{aligned} \tag{105}$$

şeklindedir. Burada,

$$\begin{aligned}
O &= (\theta h(-\alpha I_0 + (\theta + \mu)Q_0)) \\
\ddot{O} &= (v_1 + v_3 + \mu)h(\theta R_0 - (v_1 + v_3 + \mu)R_0 - v_2 I_0) \\
P &= -v_2 h(-\sigma E_0 + (\alpha + v_2 + \delta + \mu)I_0 - v_1 R_0)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

(93) denklemlerinden faydalananarak çözüm,

$$\begin{aligned}
S(t) &= S_0 + S_1(t) \left(\frac{1}{n}\right) + S_2(t) \left(\frac{1}{n}\right)^2 \\
S(t) &= S_0 + \left(h(-\Lambda + \phi_c S_0 I_0 + \mu S_0 - v_3 R_0) \frac{t^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1+1)} \right) \left(\frac{1}{n}\right) + \left[(n+h)h(-\Lambda + \right. \\
&\phi_c S_0 I_0 + \mu S_0 - v_3 R_0) \frac{t^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1+1)} + h \left(A \frac{t^{\beta_3+\beta_1}}{\Gamma(\beta_3+\beta_1+1)} + B \frac{t^{2\beta_1}}{\Gamma(2\beta_1+1)} + C \frac{t^{2\beta_1}}{\Gamma(2\beta_1+1)} + \right. \\
&\left. \left. D \frac{t^{\beta_1+\beta_5}}{\Gamma(\beta_1+\beta_5+1)} \right) \right] \left(\frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned} \tag{106}$$

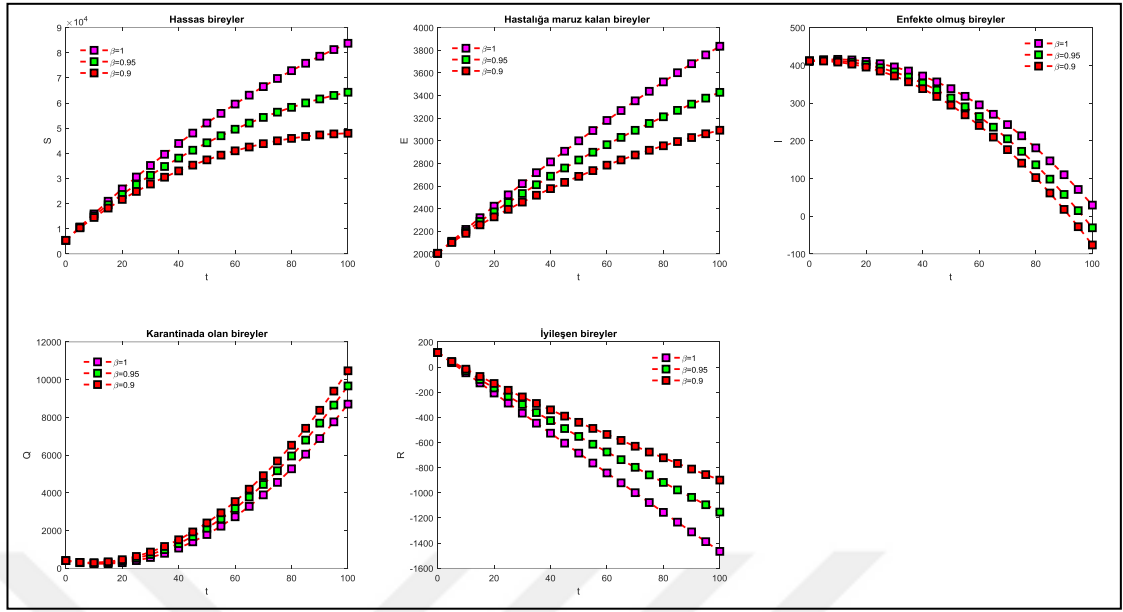
$$\begin{aligned}
E(t) &= E_0 + E_1(t) \left(\frac{1}{n}\right) + E_2(t) \left(\frac{1}{n}\right)^2 \\
E(t) &= E_0 + \left(h(-\phi_c S_0 I_0 + (\sigma + \mu)E_0) \frac{t^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2+1)} \right) \left(\frac{1}{n}\right) + \left[(n+h)h(-\phi_c S_0 I_0 + \right. \\
&(\sigma + \mu)E_0) \frac{t^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2+1)} + h \left(E_* \frac{t^{\beta_3+\beta_2}}{\Gamma(\beta_3+\beta_2+1)} + F \frac{t^{\beta_2+\beta_1}}{\Gamma(\beta_2+\beta_1+1)} + G \frac{t^{2\beta_2}}{\Gamma(2\beta_2+1)} \right) \right] \left(\frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned} \tag{107}$$

$$\begin{aligned}
I(t) &= I_0 + I_1(t) \left(\frac{1}{n}\right) + I_2(t) \left(\frac{1}{n}\right)^2 \\
I(t) &= I_0 + \left(h(-\sigma E_0 + (\alpha + v_2 + \delta + \mu)I_0 - v_1 R_0) \frac{t^{\beta_3}}{\Gamma(\beta_3+1)} \right) \left(\frac{1}{n}\right) + \left[(n+h)h \left((-\sigma E_0 + (\alpha + v_2 + \delta + \mu)I_0 - v_1 R_0) \frac{t^{\beta_3}}{\Gamma(\beta_3+1)} \right) + h \left(H \frac{t^{\beta_3+\beta_2}}{\Gamma(\beta_3+\beta_2+1)} + \right. \right. \\
&\left. \left. I_1 \frac{t^{2\beta_3}}{\Gamma(2\beta_3+1)} + K \frac{t^{\beta_3+\beta_5}}{\Gamma(\beta_3+\beta_5+1)} + L \frac{t^{2\beta_3}}{\Gamma(2\beta_3+1)} \right) \right] \left(\frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned} \tag{108}$$

$$\begin{aligned}
Q(t) &= Q_0 + Q_1(t) \left(\frac{1}{n}\right) + Q_2(t) \left(\frac{1}{n}\right)^2 \\
Q(t) &= Q_0 + \left(h(-\alpha I_0 + (\theta + \mu)Q_0) \frac{t^{\beta_4}}{\Gamma(\beta_4+1)} \right) \left(\frac{1}{n}\right) + \left[(n+h)h(-\alpha I_0 + (\theta + \right. \\
&\mu)Q_0) \frac{t^{\beta_4}}{\Gamma(\beta_4+1)} + h \left(M \frac{t^{\beta_3+\beta_4}}{\Gamma(\beta_3+\beta_4+1)} + N \frac{t^{2\beta_4}}{\Gamma(2\beta_4+1)} \right) \right] \left(\frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned} \tag{109}$$

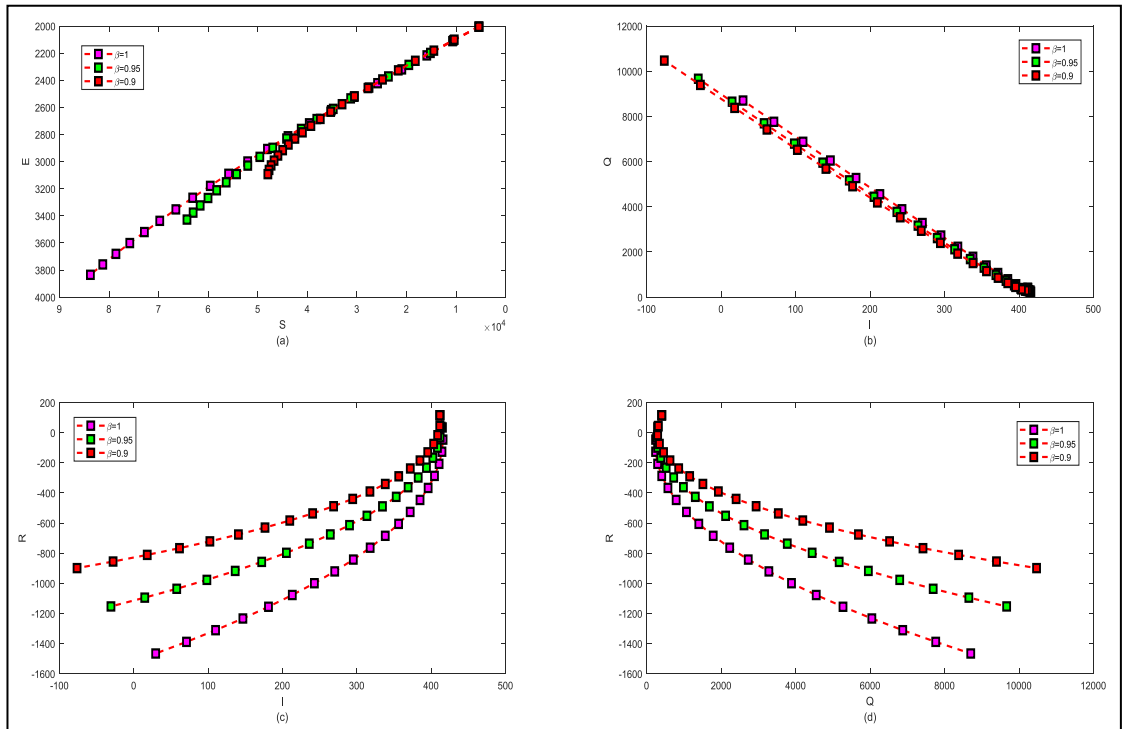
$$\begin{aligned}
R(t) &= R_0 + R_1(t) \left(\frac{1}{n}\right) + R_2(t) \left(\frac{1}{n}\right)^2 \\
R(t) &= R_0 + \left(h(\theta Q_0 - (v_1 + v_3 + \mu)R_0 - v_2 I_0) \frac{t^{\beta_5}}{\Gamma(\beta_5+1)} \right) \left(\frac{1}{n}\right) + \left[(n+h)h(\theta Q_0 + (v_1 + v_3 + \mu)R_0 - v_2 I_0) \frac{t^{\beta_5}}{\Gamma(\beta_5+1)} + h \left(O \frac{t^{\beta_4+\beta_5}}{\Gamma(\beta_4+\beta_5+1)} + \ddot{O} \frac{t^{2\beta_5}}{\Gamma(2\beta_5+1)} + \right. \right. \\
&\left. \left. P \frac{t^{\beta_3+\beta_5}}{\Gamma(\beta_3+\beta_5+1)} \right) \right] \left(\frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned} \tag{110}$$

olarak bulunur.

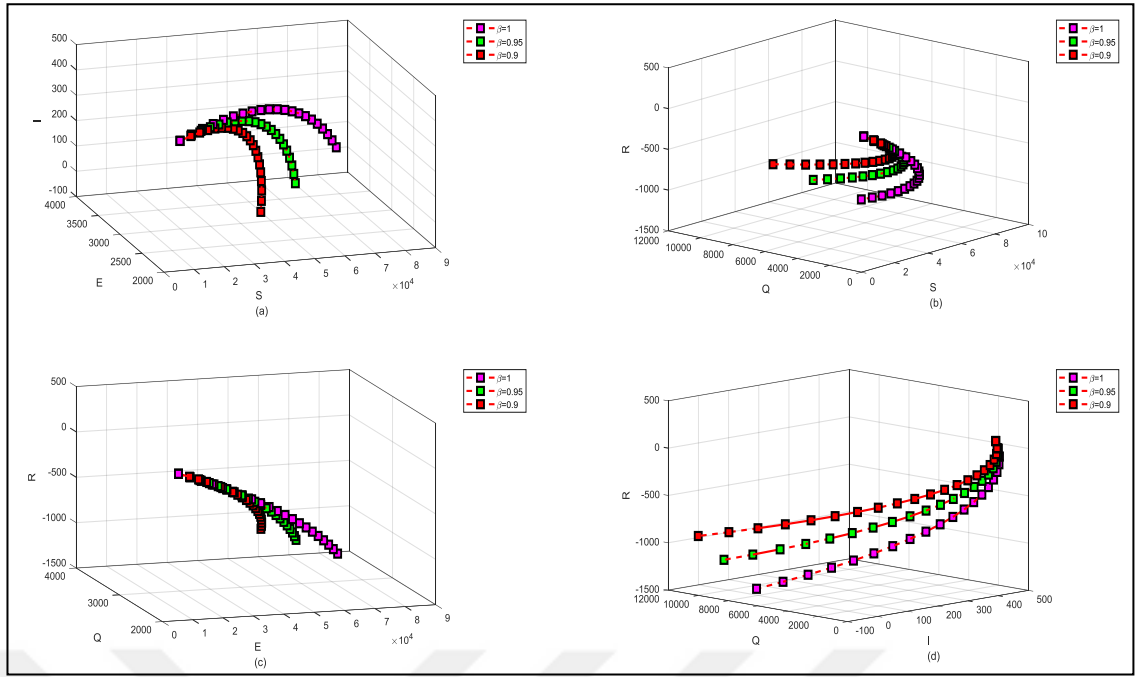


Şekil 21. $\beta = 1, \beta = 0.95, \beta = 0.9$ iken S, E, I, Q ve R nin değişimi

Grafikten de görüldüğü gibi kesirli türevin mertebesi değiştiğinde çözüm de ona bağlı değişmiştir. Hassas bireyler (S), hastalığa maruz kalan bireyler (E) ve enfekte olmuş bireyler (I) merteye azaldıkça çözümler de azalmıştır fakat karantinada olan bireyler (Q) ve iyileşen bireyler (R) merteye azaldıkça çözümler artmıştır. Yani S, E, I çözümle doğru orantılı, Q ve R çözümle ters orantılıdır.

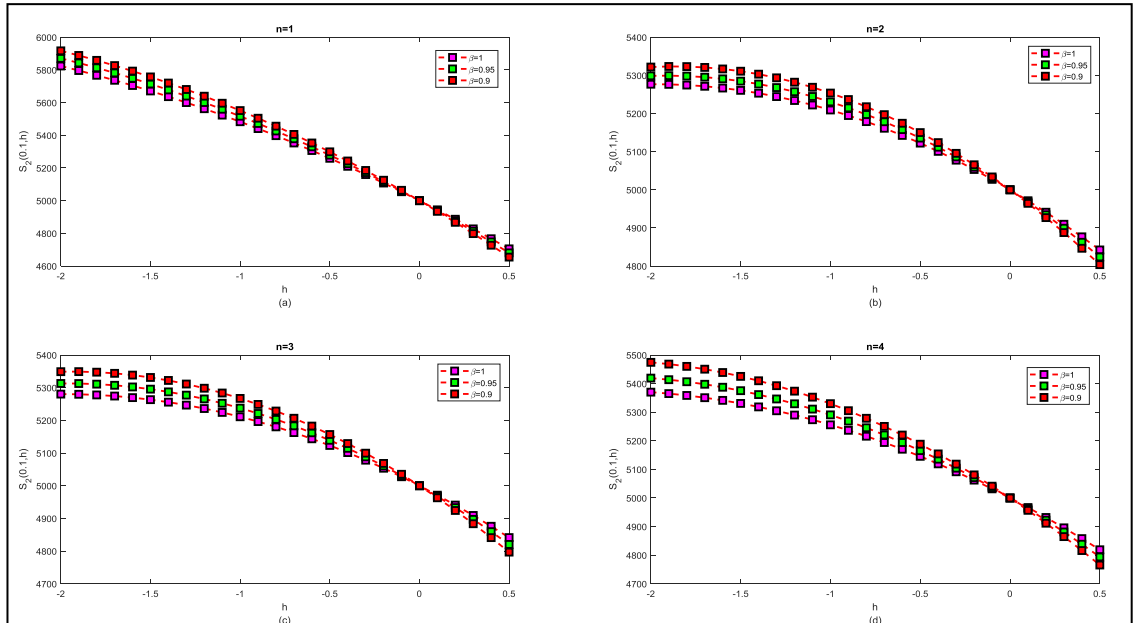


Şekil 22. Kesirli Covid-19 modelinin faz diyagramı; (a) $S(t) - E(t)$, (b) $I(t) - Q(t)$, (c) $I(t) - R(t)$, (d) $Q(t) - R(t)$

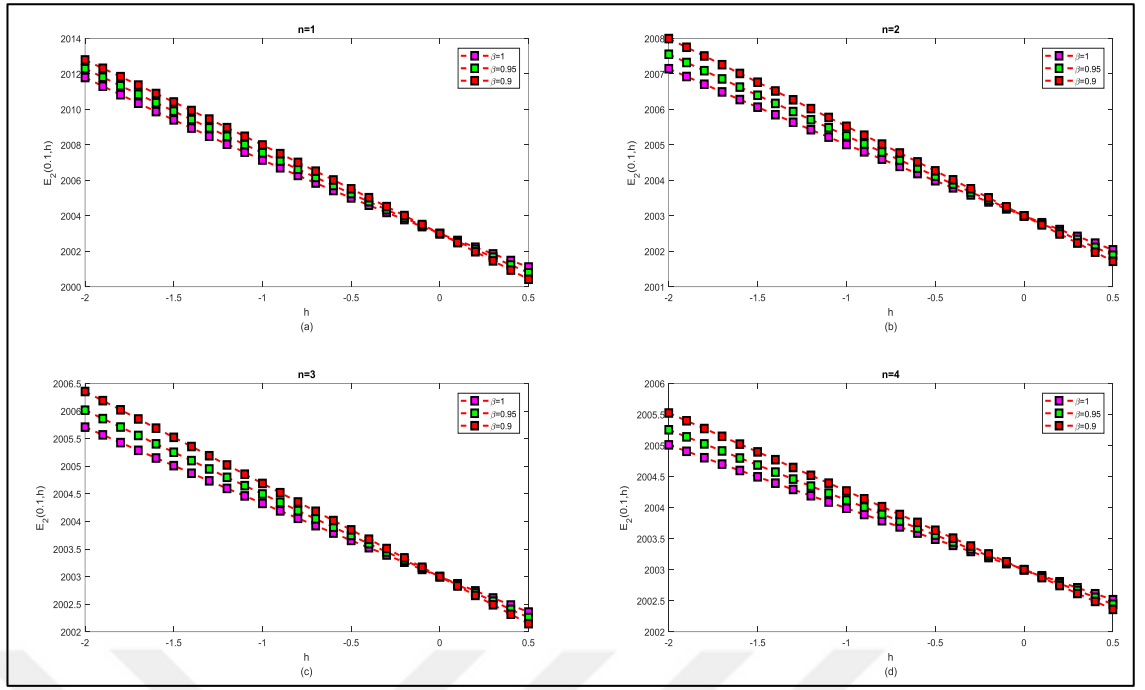


Şekil 23. Kesirli Covid-19 modelinin faz portresi

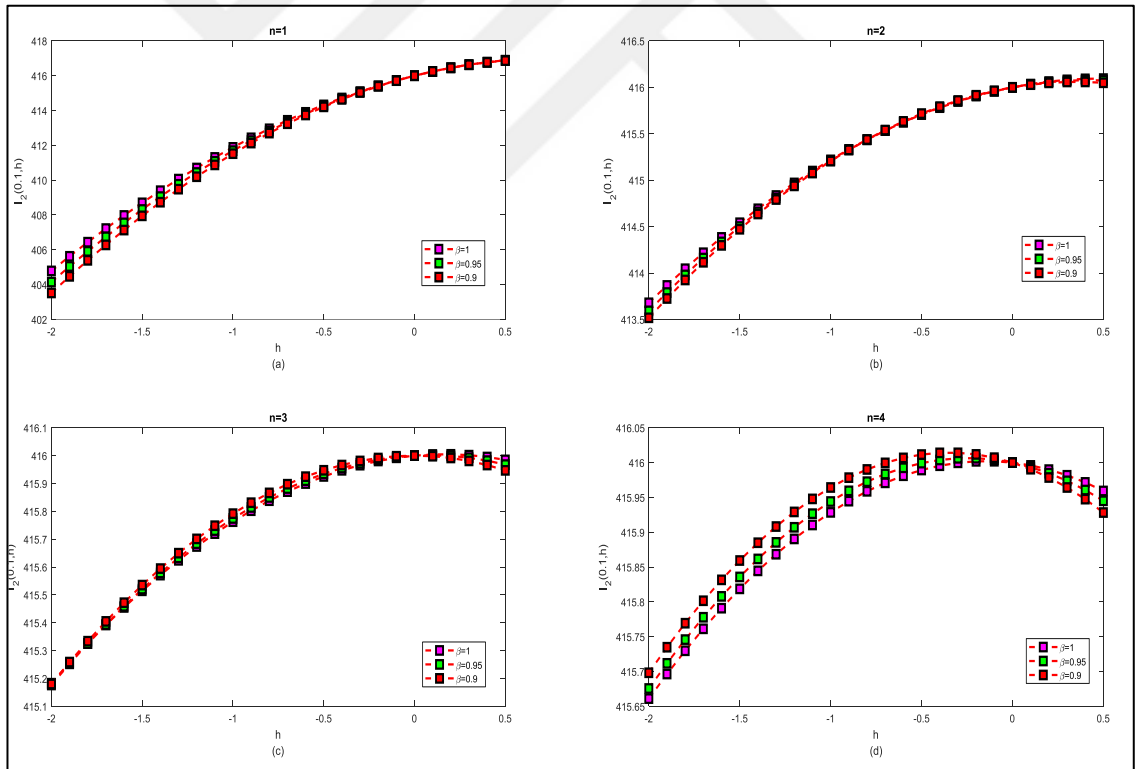
(a) grafiğinde hassas bireyler arttıkça ve merteye azaldıkça enfekte olmuş bireyler de artmaktadır, (b) grafiğinde hassas bireyler arttıkça ve merteye azaldıkça enfekte olmuş bireyler de azalmaktadır, (c) grafiğinde hassas bireyler arttıkça ve merteye azaldıkça karantinada olan bireyler önce azalıp sonra artmaktadır, (d) grafiğinde hassas bireyler arttıkça ve merteye azaldıkça iyileşenler de azalmaktadır.



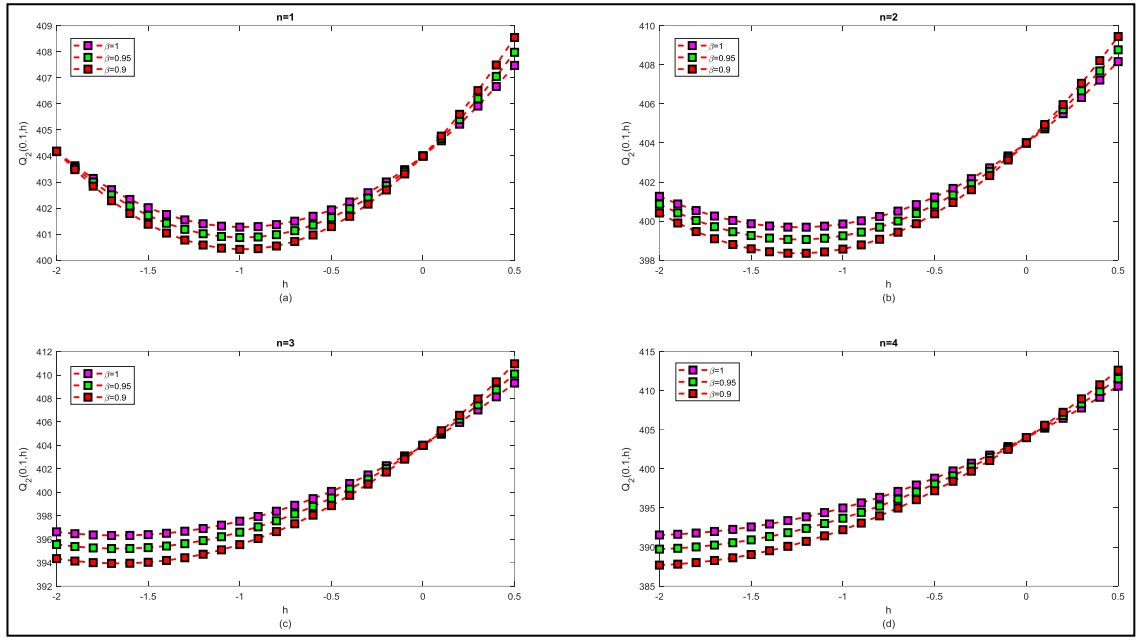
Şekil 24. $t = 0.1$ olduğunda β nın farklı değerleri için $S(t)$ nin h eğrileri: (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 4$,



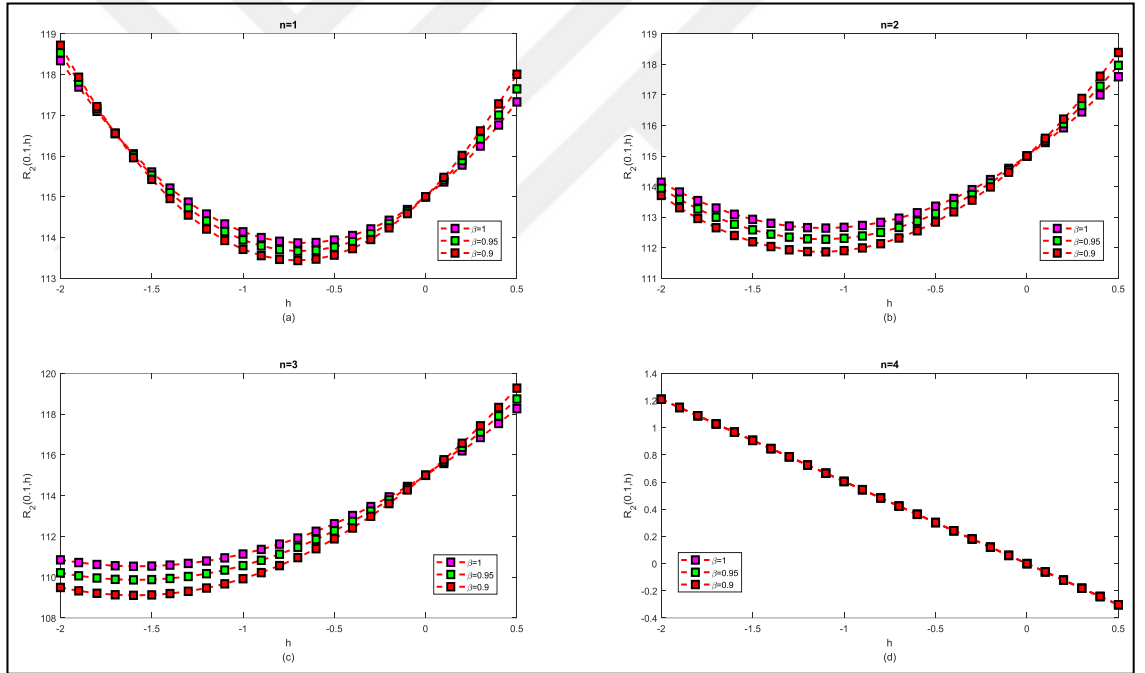
Şekil 25. $t = 0.1$ olduğunda β nın farklı değerleri için $E(t)$ nin h eğrileri: (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 4$,



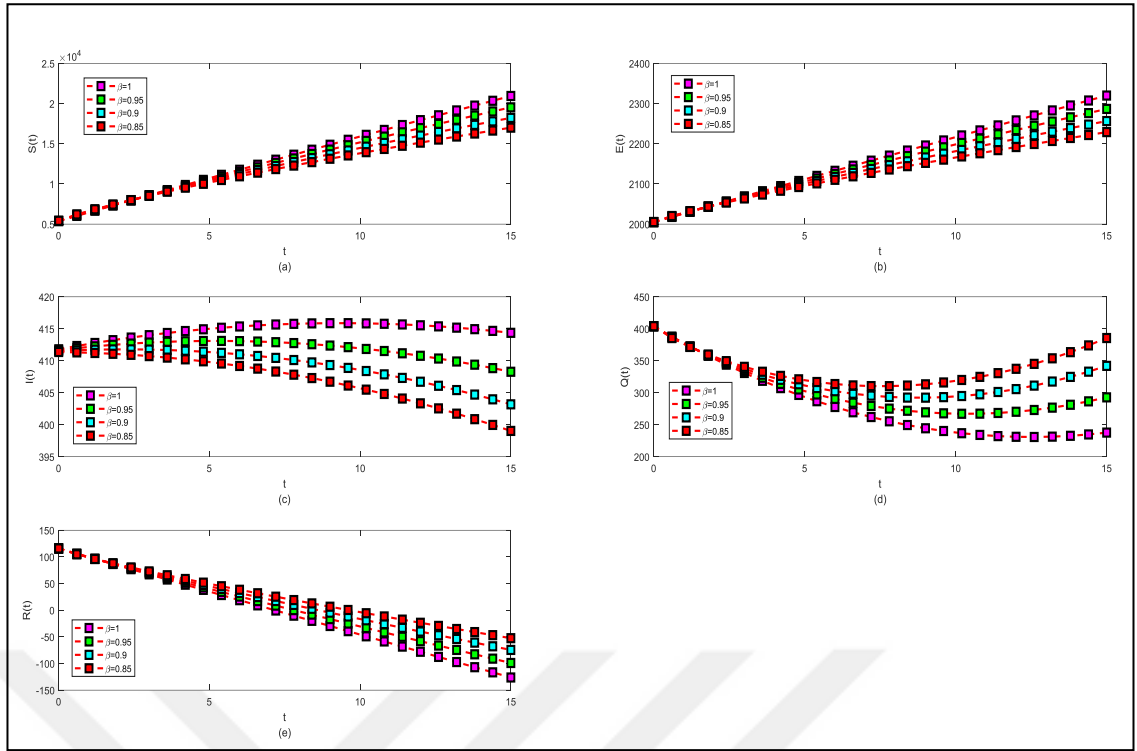
Şekil 26. $t = 0.1$ olduğunda β nın farklı değerleri için $I(t)$ nin h eğrileri: (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 4$,



Şekil 27. $t = 0.1$ olduğunda β nın farklı değerleri için $Q(t)$ nin h eğrileri: (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 4$,



Şekil 28. $t = 0.1$ olduğunda β nın farklı değerleri için $R(t)$ nin h eğrileri: (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 4$,



Şekil 29. $\hbar = -1$ ve $n = 1$ olduğunda β nın farklı değerleri için Covid-19 modelinin nümerik çözümleri: (a) Hassas bireyler $-S(t)$, (b) hastalığa maruz kalan bireyler $-E(t)$, (c) enfekte olmuş bireyler $-I(t)$, (d) karantinede olan bireyler $-Q(t)$ ve (e) iyileşen bireyler $-R(t)$

2.9.2.1. Laplace Dönüşümü Homotopi Pertürbasyon Yöntemi (LT-HPM)

(LH-HPM)'nin işlevselliğini göstermek için, aşağıdaki gibi gösterilen genel bir doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklem sistemi varsayalım:

$$D_*^\beta x(t) = f(t) - Rx(t) - Nx(t); \quad (111)$$

Burada, $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$ ve sınır koşullarıyla

$$B(x; \frac{dx}{dt}) \quad (112)$$

şeklinde dir.

Burada R doğrusal bir operatör, N doğrusal olmayan bir operatör, $f(t)$ iyi bilinen bir analitik fonksiyon ve D_*^β Caputo anlamında kesirli türevi temsil eder. $x(t)$ çözümünün iyi bilinen bir fonksiyon ve B 'nin sınır operatörü olduğu varsayılır.

Öncelikle bir homotopi,

$$(1 - p)[D_*^\beta x(t) - D_*^\beta x_0(t)] + p[D_*^\beta x_0(t) - f(t) + Rx(t) + Nx(t)] \quad (113)$$

ya da

$$D_*^\beta x(t) = D_*^\beta x_0(t) + p \left[-D_*^\beta x_0(t) + f(t) - Rx(t) - Nx(t) \right] \quad (114)$$

biçiminde formülize edilir.

$p, p \in [0,1]$ olan bir homotopi parametresi olsun ve x_0 sınır koşulunu sağlayan (111) çözümü için başlangıç yaklaşımını temsil etsin.

Şimdi, Laplace dönüşümünü (114) denkleminin her iki tarafına da uygulanır ve aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\mathfrak{L} \left(D_*^\beta x(t) \right) = \mathfrak{L} \left[D_*^\beta x_0(t) + p \left[-D_*^\beta x_0(t) + f(t) - Rx(t) - Nx(t) \right] \right] \quad (115)$$

(115) denkleminde Laplace dönüşümü formülü uygulanır ve

$$s^\beta \mathfrak{L}[x(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1} f^{(k)}(0) = \mathfrak{L} \left[D_*^\beta x_0(t) + p \left[-D_*^\beta x_0(t) + f(t) - Rx(t) - Nx(t) \right] \right] \quad (116)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$m - 1 < \beta < m, \text{ ya da}$$

$$\mathfrak{L}[x(t)] = \frac{1}{s^\beta} \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1} f^{(k)}(0) + \frac{1}{s^\beta} \mathfrak{L} \left[D_*^\beta x_0(t) + p \left[-D_*^\beta x_0(t) + f(t) - Rx(t) - Nx(t) \right] \right] \quad (117)$$

biçimindedir.

(114) denkleminin her iki tarafında ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\beta} \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1} f^{(k)}(0) + \frac{1}{s^\beta} \mathfrak{L} \left[D_*^\beta x_0(t) + p \left[-D_*^\beta x_0(t) + f(t) - Rx(t) - Nx(t) \right] \right] \right] \quad (118)$$

elde edilir.

(118)'in çözümü, p cinsinden bir kuvvet serisi olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n x_n \quad (119)$$

Daha sonra (119)'u (118) denkleminde yerine koyarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n x_n = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\beta} \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1} f^{(k)}(0) + \frac{1}{s^\beta} \mathfrak{L} \left[D_*^\beta x_0(t) + p \left[-D_*^\beta x_0(t) + f(t) - R[\sum_{n=0}^{\infty} p^n x_n] - N[\sum_{n=0}^{\infty} p^n x_n] \right] \right] \right] \quad (120)$$

Terimleri p 'nin eşdeğer kuvvetleriyle eşitleyerek aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} p^0: x_0(t) &= \mathfrak{L}^{-1} \left[\left[\frac{1}{s^\beta} \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1} f^{(k)}(0) \right] + \frac{1}{s^\beta} \mathfrak{L} \left[D_*^\beta x_0(t) \right] \right] \\ p^1: x_1(t) &= \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\beta} \mathfrak{L} \left[-D_*^\beta x_0(t) + f(t) - R(x_0) - N(x_0) \right] \right] \\ p^2: x_2(t) &= \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\beta} \mathfrak{L} \left[-R(x_0, x_1) - N(x_0, x_1) \right] \right] \\ p^3: x_3(t) &= \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\beta} \mathfrak{L} \left[-R(x_0, x_1, x_2) - N(x_0, x_1, x_2) \right] \right] \end{aligned} \quad (121)$$

...

$$x(0) = \gamma_0, x'(0) = \gamma_1, \dots, x^{(m-1)}(0) = \gamma_{m-1} \quad \text{başlangıç} \quad \text{yaklaşımlarını}$$

varsayalım. Sonuç olarak,

$$x = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} p^n x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots \quad (122)$$

Başlangıçta, (120)'yi değiştirerek ve seçerek LT-HPM'yi kullanarak başlangıç şartları ele alınır ve çözümler aşağıdaki gibi bulunur.

$$s_0(t) = 5000, e_0(t) = 2003, \iota_0(t) = 416, q_0(t) = 404, r_0(t) = 115,$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p^n s_n &= s_0 + \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{p}{s^{\beta_1}} \mathfrak{L} \left[\Lambda - \phi_c \sum_{n=0}^{\infty} p^n l_n \sum_{n=0}^{\infty} p^n s_n - \mu \sum_{n=0}^{\infty} p^n s_n + v_3 \sum_{n=0}^{\infty} p^n r_n \right] \right] \\
\sum_{n=0}^{\infty} p^n e_n &= e_0 + \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{p}{s^{\beta_2}} \mathfrak{L} \left[\phi_c \sum_{n=0}^{\infty} p^n l_n \sum_{n=0}^{\infty} p^n s_n - (\sigma + \mu) \sum_{n=0}^{\infty} p^n e_n \right] \right] \\
\sum_{n=0}^{\infty} p^n l_n &= l_0 + \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{p}{s^{\beta_3}} \mathfrak{L} \left[\sigma \sum_{n=0}^{\infty} p^n e_n - (\alpha + v_2 + \delta + \mu) \sum_{n=0}^{\infty} p^n l_n + v_1 \sum_{n=0}^{\infty} p^n r_n \right] \right] \\
\sum_{n=0}^{\infty} p^n q_n &= q_0 + \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{p}{s^{\beta_1}} \mathfrak{L} \left[\alpha \sum_{n=0}^{\infty} p^n l_n - (\theta + \mu) \sum_{n=0}^{\infty} p^n q_n \right] \right] \\
\sum_{n=0}^{\infty} p^n r_n &= r_0 + \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{p}{s^{\beta_1}} \mathfrak{L} \left[\theta \sum_{n=0}^{\infty} p^n q_n - (v_1 + v_3 + \mu) \sum_{n=0}^{\infty} p^n r_n + v_2 \sum_{n=0}^{\infty} p^n l_n \right] \right]
\end{aligned}$$

$$S(t) = 5000 + 1516.213419t^{\frac{9}{10}} - 0.01938357757t^{\frac{27}{10}} - 1.346390957t^{\frac{9}{5}}$$

$$E(t) = 2003 + 20.03318362t^{\frac{9}{10}} + 0.01938357757t^{\frac{27}{10}} - 0.03743710883t^{\frac{9}{5}}$$

$$I(t) = 416 + 5.280834026t^{\frac{9}{10}} + 1.146277267t^{\frac{9}{5}}$$

$$Q(t) = 404 - 28.81526129t^{\frac{9}{10}} + 1.353320950t^{\frac{9}{5}}$$

$$R(t) = 115 + 18.89187572t^{\frac{9}{10}} - 2.524332158t^{\frac{9}{5}}$$

2.9.2.2. q-HATM ve LT-HPM yöntemlerinin karşılaştırılması

q-HATM ve LT-HPM ile elde edilen sonuçların doğruluklarını karşılaştırmak amacıyla Tablo 6,7 aşağıda verilmiştir.

Tablo 6. LT-HPM ile $\beta = 0.9$ için Covid-19 modelinin sayısal çözümleri

	$S(t)$	$E(t)$	$I(t)$	$Q(t)$	$R(t)$
0.0	5000.	2003.	416.	404.	115.
0.1	5190.858582	2005.521474	416.6829849	400.3938222	117.3383382
0.2	5356.120044	2007.704456	417.3038556	397.3052983	119.2988352
0.3	5512.906629	2009.775362	417.9181995	394.4043519	121.1036538
0.4	5664.422246	2011.776651	418.5353209	391.6279520	122.7967567
0.5	5812.129021	2013.727749	419.1591106	388.9469232	124.3989815
0.6	5956.864980	2015.639824	419.7916089	386.3443237	125.9226853
0.7	6099.172362	2017.520127	420.4340179	383.8090547	127.3761218
0.8	6239.430012	2019.373748	421.0870970	381.3332687	128.7652329
0.9	6377.917112	2021.204447	421.7513479	378.9111153	130.0945239
1.0	6514.847644	2023.015131	422.4271113	376.5380596	131.3675435

Tablo 7. $h = -1$ ve $n = 1$ olduğunda q-HATM ile $\beta = 0,9$ için Covid-19 modelinin sayısal çözümleri

t	$S(t)$	$E(t)$	$I(t)$	$Q(t)$	$R(t)$
0.0	5000	2003	416	404	115
0.1	5099.7381	2005.5589	416.5845	400.3848	117.3928
0.2	5197.4811	2007.8348	416.9608	397.2800	119.4884
0.3	5299.9824	2010.0456	417.2065	394.3601	121.4969
0.4	5408.0820	2012.2299	417.3408	391.5643	123.4568
0.5	5522.0261	2014.4045	417.3742	388.8648	125.3853
0.6	5641.8827	2016.5787	417.3133	386.2457	127.2921
0.7	5767.6499	2018.7583	417.1632	383.6965	129.1835
0.8	5899.2955	2020.9472	416.9276	381.2102	131.0637
0.9	6036.7735	2023.1480	416.6095	378.7814	132.9357
1.0	6180.0314	2025.3628	416.2115	376.4060	134.8021

Şekil 21 ve Tablo 6, Duyarlı bireyler- $S(t)$, maruz kalan bireyler- $E(t)$, enfekte bireyler- $I(t)$, karantinaya alınan bireyler- $Q(t)$ ve iyileşen bireyler- $R(t)$ için benzer sonuçların elde edildiğini göstermektedir. Şekil 29 ve Tablo 7, Duyarlı bireyler- $S(t)$, maruz kalan bireyler- $E(t)$, enfekte bireyler- $I(t)$, karantinaya alınan bireyler- $Q(t)$ ve iyileşen bireyler- $R(t)$ için benzer sonuçların elde edildiğini göstermektedir.

Laplace Dönüşümü Homotopi Pertürbasyon Yöntemi'nin q-homotopi analiz dönüşüm yöntemi ile karşılaştırıldığında tutarlı sonuçlar verdiği bir kez daha görülmüştür.

2.9.2.3. Uyumlu (Comformable) Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Tanım 6. $p \in (0,1]$ mertebesindeki $\aleph: [\zeta_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun uyumlu türevi verilmiştir (Chung, 2015; Ünal ve Gökdoğan, 2017; Hanert, 2010; Khan vd., 2023)

$\forall \zeta > \zeta_0$ için $T_{\zeta_0}^p \aleph(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} D_p^{\zeta_0} \aleph(\zeta)$ olması koşuluyla

$$T_{\zeta_0}^p \aleph(\zeta) = \lim_{h \rightarrow \zeta_0} \frac{\aleph(\zeta + h\zeta^{1-p}) - \aleph(\zeta)}{h} \text{ dir.}$$

Tanım 7. $p \in (0,1]$ mertebesinde bir fonksiyon fonksiyonu $\aleph: [\zeta_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 'nin uyumlu kesirli integrali aşağıdaki şekilde verilir:

$\forall \zeta > \zeta_0$ için $I_{\zeta_0}^{\zeta} \aleph(\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\Phi - \zeta_0)^p \aleph(\Phi) d\Phi$ integrali mevcuttur.

Lemma 1. $\aleph: [\zeta_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekliliği altında

$$T_{\zeta_0}^p [I_{\zeta_0}^{\zeta} \aleph(\zeta)] = \aleph(\zeta), p \in (0,1], \forall \zeta > \zeta_0 \text{ sonuçlarına varılır.}$$

Lemma 2. Ayrıca

$$I_{\zeta_0}^{\zeta} [T_{\zeta_0}^p \aleph(\zeta)] = \aleph(\zeta) - \aleph(\zeta_0), p \in (0,1]$$

sonucuna da varılır.

$\mathcal{F}$ 'nin $0 < q \leq 1$ olan bir q için sonsuz derecede türevlenebilir bir fonksiyon olduğunu varsayalım. $F(w)$ 'nin $w = 0$ noktası etrafındaki kesirli kuvvet serisi açılımı aşağıdaki gibidir (El-Shaded ve Alsaedi, 2011; Birs vd., 2009; Chen vd., 2013).

$$\mathcal{F}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^{qk}}{q^k k!} \left[(T_q \mathcal{F})^{(k)} \right]_{w=0}, 0 < w < \mathcal{R}^{1/q}, \mathcal{R} > 0. \quad (123)$$

burada, $\left[(T_q \mathcal{F})^{(k)} \right]_{w=0}$ kesirli türevin k kez uygulanmasını ifade eder. $\mathcal{F}(w)$ 'nin uyumlu kesirli diferansiyel dönüşümü şu şekilde tanımlanır:

$$\mathcal{H}_q(k) = \frac{1}{q^k k!} \left[(T_q \mathcal{F})^{(k)} \right]_{w=0} \quad (124)$$

$\mathcal{H}(k)$ 'nin ters uyumlu kesirli diferansiyel dönüşümünün tanımı aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{F}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} w^{qk} \mathcal{H}_q(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^{qk}}{q^k k!} \left[(T_q \mathcal{F})^{(k)} \right]_{w=0} \quad (125)$$

Uyumlu diferansiyel dönüşüm yaklaşımı temel matematiksel işlemlerin gerçekleştirilmesini içerir.

(i) Eğer $\mathcal{F}(w) = (w - w_0)^p$ ise $\mathcal{H}_q(k) = \delta(k - (p/\alpha))$ dir. Burada,

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (126)$$

(ii) Eğer $\mathcal{F}(w) = T_q u(w)$ ise $\mathcal{H}_q(k) = q(k + 1)U_q(k + 1)$ dir.

Covid-19 Modeli için Uyumlu Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin Uygulanması

Denklem (11) yeniden aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} T_{\zeta_0}^q S(t) &= \Lambda - \phi_c I(t)S(t) - \mu S(t) + v_3 R(t), \\ T_{\zeta_0}^q E(t) &= \phi_c I(t)S(t) - (\sigma + \mu)E(t), \\ T_{\zeta_0}^q I(t) &= \sigma E(t) - (\alpha + v_2 + \delta + \mu)I(t) + v_1 R(t), \\ T_{\zeta_0}^q Q(t) &= \alpha I(t) - (\theta + \mu)Q(t), \\ T_{\zeta_0}^q R(t) &= \theta Q(t) - (v_1 + v_3 + \mu)R(t) + v_2 I(t), \end{aligned} \quad (127)$$

Ek olarak, başlangıç koşulları şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$S(0) = S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, Q(0) = Q_0, R(0) = R_0 \text{ ve}$$

$$\begin{cases} S(0) = S_0 \geq 0 \\ E(0) = E_0 \geq 0 \\ I(0) = I_0 \geq 0 \\ Q(0) = Q_0 \geq 0 \\ R(0) = R_0 \geq 0 \end{cases} \quad (128)$$

Kesirli uyumlu diferansiyel dönüşüm yöntemi (83) denklemine uygulanırsa;

$$\begin{aligned} q(k+1)S_q(k+1) &= \Lambda S(k) - \phi_c \sum_{r=0}^k I_q(r)S_q(k-r) - \mu S_q(k) + v_3 R_q(k) \\ q(k+1)E_q(k+1) &= \phi_c \sum_{r=0}^k I_q(r)S_q(k-r) - (\sigma + \mu)E_q(k) \\ q(k+1)I_q(k+1) &= \sigma E_q(k) - (\alpha + v_2 + \delta + \mu)I_q(k) + v_1 R_q(k) \\ q(k+1)Q_q(k+1) &= \alpha I_q(k) - (\theta + \mu)Q_q(k) \\ q(k+1)R_q(k+1) &= \theta Q_q(k) - (v_1 + v_3 + \mu)R_q(k) + v_2 I_q(k) \end{aligned} \quad (129)$$

elde edilir. Buradan dolayısıyla, tekrarlama ilişkisi şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} S_q(k+1) &= \frac{1}{q(k+1)} \left[\Lambda S(k) - \phi_c \sum_{r=0}^k I_q(r)S_q(k-r) - \mu S_q(k) + v_3 R_q(k) \right] \\ E_q(k+1) &= \frac{1}{q(k+1)} \left[\phi_c \sum_{r=0}^k I_q(r)S_q(k-r) - (\sigma + \mu)E_q(k) \right] \\ I_q(k+1) &= \frac{1}{q(k+1)} [\sigma E_q(k) - (\alpha + v_2 + \delta + \mu)I_q(k) + v_1 R_q(k)] \\ Q_q(k+1) &= \frac{1}{q(k+1)} [\alpha I_q(k) - (\theta + \mu)Q_q(k)] \\ R_q(k+1) &= \frac{1}{q(k+1)} [\theta Q_q(k) - (v_1 + v_3 + \mu)R_q(k) + v_2 I_q(k)] \end{aligned} \quad (130)$$

Modelin başlangıç şartları $S(0) = 5000, E(0) = 2003, I(0) = 416, Q(0) = 404, R(0) = 115$ olup ve parametre değerleri Tablo 4'te verilmiştir.

2.9.2.4. Varyasyonel İterasyon Yöntemi (VIM)

Varyasyonel iterasyon yönteminin temel kavramını açıklamak için, verilen doğrusal olmayan diferansiyel denklemi operatör formunda inceleyelim:

$$H(u(t)) + N(u(t)) = h(t). \quad (131)$$

H doğrusal operatörü, N doğrusal olmayan operatörü ve h ise homojen olmayan terim olarak adlandırılan herhangi bir reel fonksiyonu temsil eder. Denklem (79)'a karşılık gelen düzeltme fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \{Hu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - h(s)\} ds, \quad (132)$$

Burada, λ , varyasyonel teori (Sinan vd.,2023) tarafından en iyi şekilde tanımlanan genel Lagrange çarpanıdır (Yadav vd.,2021; Inokuti,1978; He,2006; Bildil,2017) ve $N\tilde{u}_n$, kısıtlanmış varyasyondur, yani $\delta N\tilde{u}_n = 0$.

Teorem 8. Normu $\|\cdot\|$ ile donatılmış bir Banach uzayı B düşünölsün. $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ serisinin B' de tanımlandığını varsayalım. Başlangıç tahmini $y_0 = u_0$ 'ın $y(x)$ çözüm küresi içinde bulunduğunu varsayalım. $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ serisinin çözümü, $\|u_{n+1}\| \leq r\|u_n\|$ eşitsizliğinin sağlandığı bir r değeri varsa yakınsar. (Yadav vd., 2021)

Teorem 9. İkinci uyumlu diferansiyel denklem incelenirse varyasyonel iterasyon formölü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} S_{n+1}(t) &= S_n(t) - I_q \{T_q S_n(t) - \Lambda + \phi_c I_n(t) S_n(t) + \mu S_n(t) - v_3 R_n(t)\}, \\ E_{n+1}(t) &= E_n(t) - I_q \{T_q E_n(t) - \phi_c I_n(t) S_n(t) + (\sigma + \mu) E_n(t)\}, \\ I_{n+1}(t) &= I_n(t) - I_q \{T_q I_n(t) - \sigma E_n(t) + (\alpha + v_2 + \delta + \mu) I_n(t) - v_1 R_n(t)\}, \\ Q_{n+1}(t) &= Q_n(t) - I_q \{T_q I_n(t) - \alpha I_n(t) + (\theta + \mu) Q_n(t)\}, \\ R_{n+1}(t) &= R_n(t) - I_q \{T_q R_n(t) - \theta Q_n(t) + (v_1 + v_3 + \mu) R_n(t) - v_2 I_n(t)\} \end{aligned} \quad (133)$$

Burada S_n, E_n, I_n, Q_n, R_n n 'inci yaklaşım, T_q q mertebesinden uyumlu türev ve I_q $q \in (0,1)$ mertebesinden kesirli integraldir.

İspat. Denklem (11) eşdeğer olarak şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned}
T_q S(t) - \Lambda + \phi_c I(t) S(t) + \mu S(t) - v_3 R(t) &= 0, \\
T_q E(t) - \phi_c I(t) S(t) + (\sigma + \mu) E(t) &= 0, \\
T_q I(t) - \sigma E(t) + (\alpha + v_2 + \delta + \mu) I(t) - v_1 R(t) &= 0, \\
T_q Q(t) - \alpha I(t) + (\theta + \mu) Q(t) &= 0, \\
T_q R(t) - \theta Q(t) + (v_1 + v_3 + \mu) R(t) - v_2 I(t) &= 0,
\end{aligned} \tag{134}$$

Denklem (134)'ün genel bir Lagrange çarpanı olan $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t)$ ve $\lambda_5(t)$ ile çarptığımızda şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) \{T_q S(t) - \Lambda + \phi_c I(t) S(t) + \mu S(t) - v_3 R(t)\} &= 0, \\
\lambda_2(t) \{T_q E(t) - \phi_c I(t) S(t) + (\sigma + \mu) E(t)\} &= 0, \\
\lambda_3(t) \{T_q I(t) - \sigma E(t) + (\alpha + v_2 + \delta + \mu) I(t) - v_1 R(t)\} &= 0, \\
\lambda_4(t) \{T_q Q(t) - \alpha I(t) + (\theta + \mu) Q(t)\} &= 0, \\
\lambda_5(t) \{T_q R(t) - \theta Q(t) + (v_1 + v_3 + \mu) R(t) - v_2 I(t)\} &= 0,
\end{aligned} \tag{135}$$

Şimdi, I_q 'yu (135) denkleminin her iki tarafına uyguladığımızda şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
I_q [\lambda_1(t) \{T_q S(t) - \Lambda + \phi_c I(t) S(t) + \mu S(t) - v_3 R(t)\}] &= 0, \\
I_q [\lambda_2(t) \{T_q E(t) - \phi_c I(t) S(t) + (\sigma + \mu) E(t)\}] &= 0, \\
I_q [\lambda_3(t) \{T_q I(t) - \sigma E(t) + (\alpha + v_2 + \delta + \mu) I(t) - v_1 R(t)\}] &= 0, \\
I_q [\lambda_4(t) \{T_q Q(t) - \alpha I(t) + (\theta + \mu) Q(t)\}] &= 0, \\
I_q [\lambda_5(t) \{T_q R(t) - \theta Q(t) + (v_1 + v_3 + \mu) R(t) - v_2 I(t)\}] &= 0,
\end{aligned} \tag{136}$$

Daha sonra (11) denklemin düzeltme fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilecektir.

$$\begin{aligned}
S_{n+1}(t) &= S_n(t) + I_q [\lambda_1(t) \{T_q S_n(t) - \Lambda + \phi_c \widetilde{S}_n(t) \widetilde{I}_n(t) + \mu \widetilde{S}_n(t) - v_3 \widetilde{R}_n(t)\}] \\
E_{n+1}(t) &= E_n(t) + I_q [\lambda_2(t) \{T_q E_n(t) - \phi_c \widetilde{I}_n(t) \widetilde{S}_n(t) + (\sigma + \mu) \widetilde{E}_n(t)\}], \\
I_{n+1}(t) &= I_n(t) + I_q [\lambda_3(t) \{T_q I_n(t) - \sigma \widetilde{E}_n(t) + (\alpha + v_2 + \delta + \mu) \widetilde{I}_n(t) - v_1 \widetilde{R}_n(t)\}], \\
Q_{n+1}(t) &= Q_n(t) + I_q [\lambda_4(t) \{T_q Q_n(t) - \alpha \widetilde{I}_n(t) + (\theta + \mu) \widetilde{Q}_n(t)\}],
\end{aligned}$$

$$R_{n+1}(t) = R_n(t) + I_q [\lambda_5(t) \{T_q R_n(t) - \theta \widetilde{Q}_n(t) + (v_1 + v_3 + \mu) \widetilde{R}_n(t) - v_2 \widetilde{I}_n(t)\}], \quad (137)$$

Bu durumda, kesirli integral fonksiyonel olan (137) denkleminde $i = \{1,2,3,4,5\}$ için $\lambda_i(t)$, değerini hesaplamak zordur. Bu yüzden (137) denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} S_{n+1}(t) &= S_n(t) \\ &+ \int_0^t \tau^{q-1} \left[\lambda_1(\tau) \left\{ \tau^{1-q} \frac{d}{d\tau} S_n(\tau) - \Lambda + \phi_c \widetilde{S}_n(\tau) \widetilde{I}_n(\tau) + \mu \widetilde{S}_n(\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - v_3 \widetilde{R}_n(\tau) \right\} \right] d\tau \\ E_{n+1}(t) &= E_n(t) + \int_0^t \tau^{q-1} \left[\lambda_2(\tau) \left\{ \tau^{1-q} \frac{d}{d\tau} E_n(\tau) - \phi_c \widetilde{I}_n(\tau) \widetilde{S}_n(\tau) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (\sigma + \mu) \widetilde{E}_n(\tau) \right\} \right] d\tau \\ I_{n+1}(t) &= I_n(t) \\ &+ \int_0^t \tau^{q-1} \left[\lambda_3(\tau) \left\{ \tau^{1-q} \frac{d}{d\tau} I_n(\tau) - \sigma \widetilde{E}_n(\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\alpha + v_2 + \delta + \mu) \widetilde{I}_n(\tau) - v_1 \widetilde{R}_n(\tau) \right\} \right] d\tau \\ Q_{n+1}(t) &= Q_n(t) \\ &+ \int_0^t \tau^{q-1} \left[\lambda_4(\tau) \left\{ \tau^{1-q} \frac{d}{d\tau} Q_n(\tau) - \alpha \widetilde{I}_n(\tau) + (\theta + \mu) \widetilde{Q}_n(\tau) \right\} \right] d\tau \\ R_{n+1}(t) &= R_n(t) + \int_0^t \tau^{q-1} \left[\lambda_5(\tau) \left\{ \tau^{1-q} \frac{d}{d\tau} R_n(\tau) - \theta \widetilde{Q}_n(\tau) + (v_1 + v_3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mu) \widetilde{R}_n(\tau) - v_2 \widetilde{I}_n(\tau) \right\} \right] d\tau \end{aligned} \quad (138)$$

Burada $\widetilde{S}_n, \widetilde{E}_n, \widetilde{I}_n, \widetilde{Q}_n$, ve $\widetilde{R}_n$, $\delta \widetilde{S}_n = 0, \delta \widetilde{E}_n = 0, \delta \widetilde{I}_n = 0, \delta \widetilde{Q}_n = 0$ ve $\delta \widetilde{R}_n = 0$ olan kısıtlı varyasyonlardır. Denklem (130)'dan şu elde edilir:

$$\begin{aligned} \delta S_{n+1}(t) &= \delta S_n(t) + \delta \int_0^t \left[\lambda_1(\tau) \left\{ \frac{d}{d\tau} S_n(\tau) - \Lambda \tau^{q-1} + \phi_c \tau^{q-1} \widetilde{S}_n(\tau) \widetilde{I}_n(\tau) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mu \tau^{q-1} \widetilde{S}_n(\tau) - v_3 \tau^{q-1} \widetilde{R}_n(\tau) \right\} \right] d\tau \end{aligned} \quad (139)$$

$$\begin{aligned} \delta E_{n+1}(t) &= \delta E_n(t) + \delta \int_0^t \left[\lambda_2(\tau) \left\{ \frac{d}{d\tau} E_n(\tau) - \phi_c \tau^{q-1} \widetilde{I}_n(\tau) \widetilde{S}_n(\tau) + (\sigma + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mu) \tau^{q-1} \widetilde{E}_n(\tau) \right\} \right] d\tau \end{aligned} \quad (140)$$

$$\delta I_{n+1}(t) = \delta I_n(t) + \delta \int_0^t \left[\lambda_3(\tau) \left\{ \frac{d}{d\tau} I_n(\tau) - \sigma \tau^{q-1} \widetilde{E}_n(\tau) + (\alpha + v_2 + \delta + \mu) \tau^{q-1} \widetilde{I}_n(\tau) - v_1 \tau^{q-1} \widetilde{R}_n(\tau) \right\} \right] d\tau \quad (141)$$

$$\delta Q_{n+1}(t) = \delta Q_n(t) + \delta \int_0^t \left[\lambda_4(\tau) \left\{ \frac{d}{d\tau} Q_n(\tau) - \alpha \tau^{q-1} \widetilde{I}_n(\tau) + (\theta + \mu) \tau^{q-1} \widetilde{Q}_n(\tau) \right\} \right] d\tau \quad (142)$$

$$\delta R_{n+1}(t) = \delta R_n(t) + \delta \int_0^t \left[\lambda_5(\tau) \left\{ \frac{d}{d\tau} R_n(\tau) - \theta \tau^{q-1} \widetilde{Q}_n(\tau) + (v_1 + v_3 + \mu) \tau^{q-1} \widetilde{R}_n(\tau) - v_2 \tau^{q-1} \widetilde{I}_n(\tau) \right\} \right] d\tau \quad (143)$$

Parçalara göre entegrasyon kullanılarak, denklem (139) denklemi (140), (141), (142) ve (143) denklemleri için denklem (139)'un ispatına benzer hale gelir.

$$\begin{aligned} \delta S_{n+1}(t) &= \delta S_n(t) + \delta \left(\lambda_1(t) S_n(t) - \int_0^t \lambda'_1(\tau) S_n(\tau) d\tau \right) \\ &= \left(1 + \lambda_1(t) \delta S_n(t) - \delta \int_0^t \lambda'_1(\tau) S_n(\tau) d\tau \right) \\ \delta E_{n+1}(t) &= \left(1 + \lambda_2(t) \delta E_n(t) - \delta \int_0^t \lambda'_2(\tau) E_n(\tau) d\tau \right) \\ \delta I_{n+1}(t) &= \left(1 + \lambda_3(t) \delta I_n(t) - \delta \int_0^t \lambda'_3(\tau) I_n(\tau) d\tau \right) \\ \delta Q_{n+1}(t) &= \left(1 + \lambda_4(t) \delta Q_n(t) - \delta \int_0^t \lambda'_4(\tau) Q_n(\tau) d\tau \right) \\ \delta R_{n+1}(t) &= \left(1 + \lambda_5(t) \delta R_n(t) - \delta \int_0^t \lambda'_5(\tau) R_n(\tau) d\tau \right) \end{aligned} \quad (144)$$

Lagrange çarpanları $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t)$ ve $\lambda_5(t)$, tüm $i = \{1,2,3,4,5\}$ için $\lambda'_i(\tau) = 0$ ile elde edilebilir ve sınır koşulu şudur: Tüm $i = \{1,2,3,4,5\}$ için $1 + \lambda_i(t) = 0$. Tüm $i = \{1,2,3,4,5\}$ için λ_i için son başlangıç değeri problemini çözerek, genel Lagrange çarpanı λ_i 'nin şu şekilde olduğu bulunur:

$$\lambda_i = -1, i = \{1,2,3,4,5\} \quad (145)$$

Bu nedenle λ_i (137) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki iterasyon fonksiyonu elde edilir:

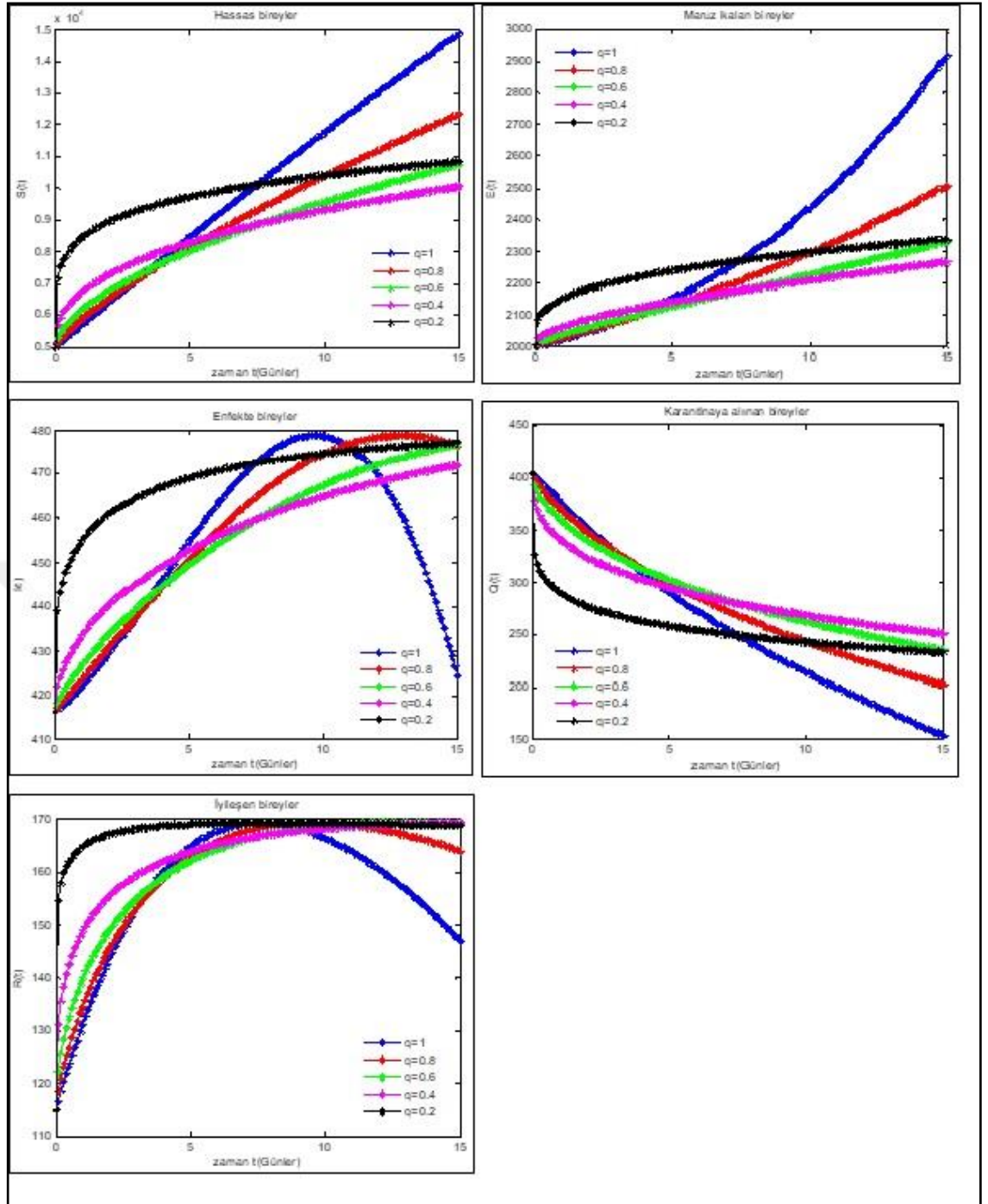
$$\begin{aligned}
S_{n+1}(t) &= S_n(t) - I_q \{ T_q S_n(t) - \Lambda + \phi_c \widetilde{S}_n(t) \widetilde{I}_n(t) + \mu \widetilde{S}_n(t) - v_3 \widetilde{R}_n(t) \} \\
E_{n+1}(t) &= E_n(t) - I_q \{ T_q E_n(t) - \phi_c \widetilde{I}_n(t) \widetilde{S}_n(t) + (\sigma + \mu) \widetilde{E}_n(t) \} \\
I_{n+1}(t) &= I_n(t) - I_q \{ T_q I_n(t) - \sigma \widetilde{E}_n(t) + (\alpha + v_2 + \delta + \mu) \widetilde{I}_n(t) - \\
&v_1 \widetilde{R}_n(t) \} \\
Q_{n+1}(t) &= Q_n(t) - I_q \{ T_q Q_n(t) - \alpha \widetilde{I}_n(t) + (\theta + \mu) \widetilde{Q}_n(t) \} \\
R_{n+1}(t) &= R_n(t) - I_q \{ T_q R_n(t) - \theta \widetilde{Q}_n(t) + (v_1 + v_3 + \mu) \widetilde{R}_n(t) - v_2 \widetilde{I}_n(t) \} \quad (146)
\end{aligned}$$

2.9.3. Varyasyonel İterasyon Yönteminin Uygulanması

Teorem 9'u kullanarak varyasyonel iterasyon yöntemini uygulayarak,

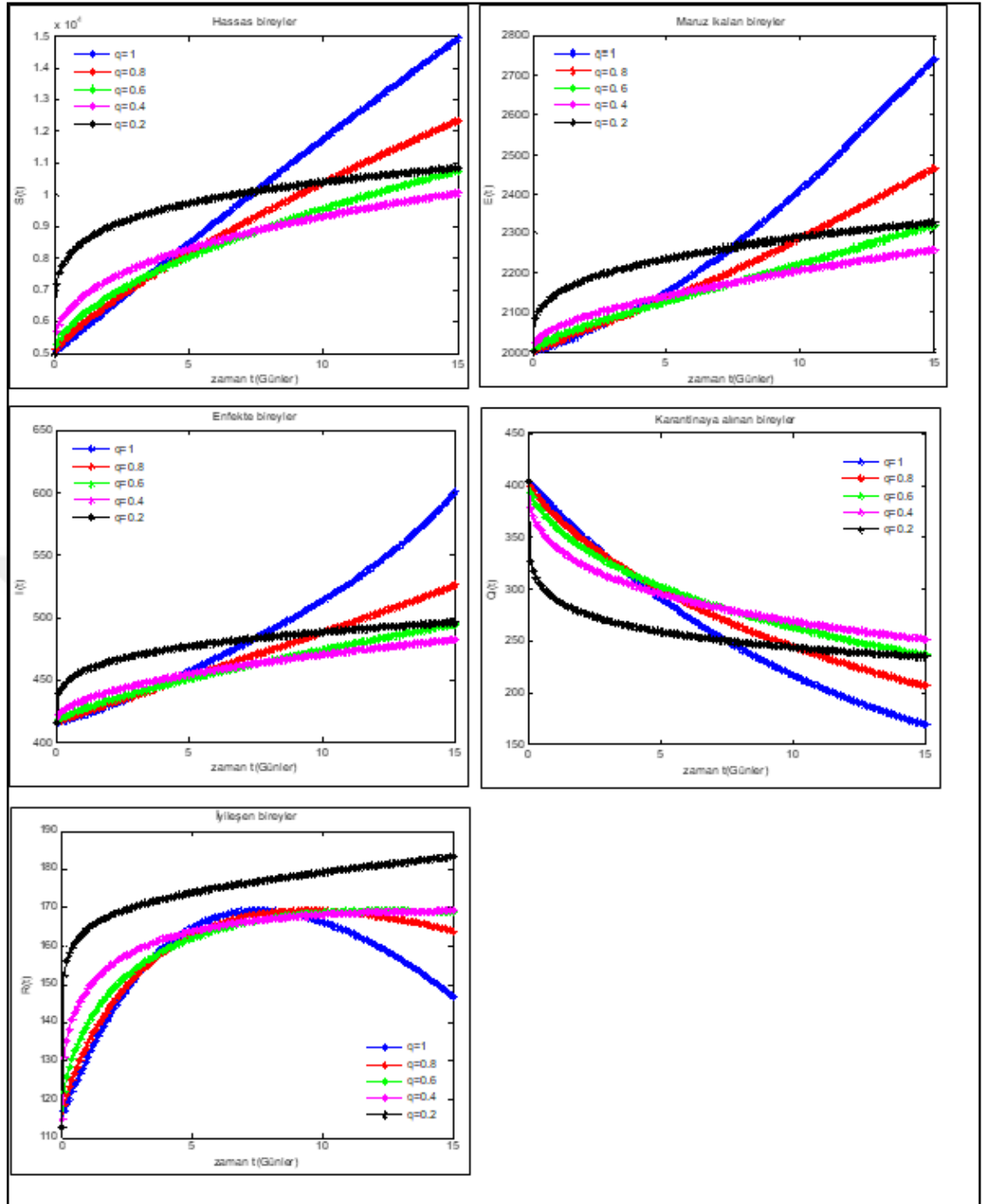
$$\begin{aligned}
S_{n+1}(t) &= S_n(t) \\
&\quad - \int_0^t \tau^{q-1} \left\{ \tau^{1-q} \frac{d}{d\tau} S_n(\tau) - \Lambda + \phi_c I_n(t) S_n(t) + \mu S_n(t) \right. \\
&\quad \left. - v_3 R_n(t) \right\} d\tau \\
E_{n+1}(t) &= E_n(t) - \int_0^t \tau^{q-1} \left\{ \tau^{1-q} \frac{d}{d\tau} E_n(\tau) - \phi_c I(t) S(t) + (\sigma + \mu) E(t) \right\} d\tau \\
I_{n+1}(t) &= I_n(t) - \int_0^t \tau^{q-1} \left\{ \tau^{1-q} \frac{d}{d\tau} I_n(\tau) - \sigma E_n(t) + (\alpha + v_2 + \delta + \mu) I_n(t) - \right. \\
&\quad \left. v_1 R_n(t) \right\} d\tau \\
Q_{n+1}(t) &= Q_n(t) - \int_0^t \tau^{q-1} \left\{ \tau^{1-q} \frac{d}{d\tau} Q_n(\tau) - \alpha I_n(t) + (\theta + \mu) Q_n(t) \right\} d\tau \\
R_{n+1}(t) &= R_n(t) - \int_0^t \tau^{q-1} \left\{ \tau^{1-q} \frac{d}{d\tau} R_n(\tau) - \theta Q_n(t) + (v_1 + v_3 + \mu) R_n(t) - \right. \\
&\quad \left. v_2 I_n(t) \right\} d\tau \quad (147)
\end{aligned}$$

elde edilir ve başlangıç şartları ve gerçek değerler kullanılarak Matlab uygulamasıyla aşağıdaki simülasyonlar verilir.



Şekil 30. Sistem (130) için farklı q değerlerinde CDTM çözümleri

Şekil 30, ilk yedi gün boyunca kesirli türev düştükçe duyarlı, maruz kalan ve enfekte bireylerin sayısının arttığını göstermektedir. Ancak bu sürenin ardından bu kategorilerdeki birey sayısı azalmaktadır. İyileşen birey sayısı zamanla artarken, kesirli türev azalırken yine bir artış gözlemlenmektedir.



Şekil 31. Sistem (147) için farklı q değerlerinde VIM çözümleri.

Şekil 31, sistem (139) için çeşitli q değerlerinde VIM çözümlerini göstermektedir. Denklem (127)'nin salgın sisteminin sonucu, uyumlu kesirli diferansiyel dönüşüm yaklaşımının sonucuyla tamamen uyumludur, Şekil 30-31. Şekil 31, kesirli mertbe türevi azaldıkça, ilk 7 gün boyunca duyarlı, maruz kalmış ve enfekte bireylerin sayısında bir artış olduğunu, ardından 7 gün sonra bir azalma olduğunu göstermektedir. Kesirli mertbe türevinin değeri azaldıkça, zamanla iyileşen kişi sayısında gözlemlenen bir artış olurken, karantinadaki kişi sayısında bir azalma olmaktadır. Şekil 30'daki CFDTM'den elde edilen

çözüm ile Şekil 31'deki VIM yönteminden üretilen çözümlerin, kesirli mertebe q 'nın çeşitli değerleri için uyumlu olduğu açıktır.

Aşağıda, VIM yönteminden elde edilen yaklaşık analitik $S(t)$ çözümü ve bu çözüme ilişkin yakınsama analizi verilmektedir.

$$\begin{aligned} S(t) = & 5000. + 708.2422605t - 0.02762284236t^3 - 3.112751154t^2 \\ & - .4759874044e - 6t^6 + .1590043949e - 3t^5 \\ & - .6340772020e - 3t^4 - .1437275197e - 20t^{11} \\ & + .3080875470e - 14t^{10} + .8428734232e - 12t^9 \\ & - .2762956380e - 9t^8 - .7677240689e - 9t^7 \end{aligned}$$

Yakınsama $t = 1, q = 1$ seçerek incelenirse,

$$\begin{aligned} r_1: \frac{\|S_2\|}{\|S_1\|} &= \frac{\|-3.112751154t^2\|}{\|708.2422605t\|} = 0.0044 < 1 \\ r_2: \frac{\|S_3\|}{\|S_2\|} &= \frac{\|-0.02762284236t^3\|}{\|-3.112751154t^2\|} = 0.0089 < 1 \\ r_3: \frac{\|S_4\|}{\|S_3\|} &= \frac{\|-.6340772020e - 3t^4\|}{\|-0.02762284236t^3\|} = 0.0230 < 1 \\ r_4: \frac{\|S_5\|}{\|S_4\|} &= \frac{\|+.1590043949e - 3t^5\|}{\|-.6340772020e - 3t^4\|} = 0.2508 < 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

değerleri 1'den küçük olduğu için yakınsar (Yadav vd., 2021; Inokuti, 1978).

2.10. CFDTM ve VIM Yöntemlerinin Karşılaştırılması

CFDTM ve VIM ile elde edilen sonuçların doğruluğunu karşılaştırmak amacıyla Tablo 8 ve 9'da sunulmuştur.

Tablo 8. CFDTM ile $q = 0,9$ için Covid-19 modelinin sayısal çözümlerine ait tablo

t	$S(t)$	$E(t)$	$I(t)$	$Q(t)$	$R(t)$
0.0	5000.	2003.	416.	404.	115.
0.1	5.096.186.981	2.005.678.857	4.167.191.853	4.002.668.463	1.174.063.418
0.2	5.181.260.454	2.008.163.002	4.174.071.349	3.970.205.933	1.194.249.899
0.3	5.262.087.376	2.010.629.044	4.181.047.249	3.939.860.365	1.212.472.211
0.4	5.340.155.114	2.013.111.987	4.188.165.406	3.911.008.331	1.229.215.621
0.5	5.416.169.854	2.015.627.333	4.195.424.076	3.883.340.727	1.244.747.571
0.6	5.490.546.773	2.018.183.646	4.202.805.261	3.856.667.078	1.259.251.287
0.7	5.563.559.537	2.020.786.264	4.210.283.768	3.830.855.310	1.272.867.593

Tablo 8. (Devamı).

0.8	5.635.402.119	2.023.438.816	4.217.830.748	3.805.806.647	1.285.712.595
0.9	5.706.219.127	2.026.143.916	4.225.415.349	3.781.443.197	1.297.886.583
1.0	5.776.122.446	2.028.903.568	4.233.005.544	3.757.701.077	1.309.479.015

Tablo 9. VIM ile $q = 0,9$ için Covid-19 modelinin sayısal çözümlerine ait tablo

t	$S(t)$	$E(t)$	$I(t)$	$Q(t)$	$R(t)$
0.0	5000.	2003.	416.	404.	115.
0.1	5099.008371	2005.733396	416.7290149	400.1455378	117.5004699
0.2	5184.657369	2008.162796	417.3897214	396.8428549	119.6005287
0.3	5265.844571	2010.521633	418.0410085	393.7391713	121.5381523
0.4	5344.237772	2012.851421	418.6923496	390.7670265	123.3608975
0.5	5420.598995	2015.170437	419.3474747	387.8951332	125.0915734
0.6	5495.365463	2017.488820	420.0081702	385.1052755	126.7438936
0.7	5568.820372	2019.812931	420.6753546	382.3854843	128.3271556
0.8	5641.161773	2022.147076	421.3494972	379.7272671	129.8481617
0.9	5712.535743	2024.494343	422.0308120	377.1242679	131.3121552
1.0	5783.054353	2026.857034	422.7193594	374.5715396	132.7233368

Bir kez daha, Uyumlu Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile elde edilen çözümün, varyasyonel iterasyon yöntemi ile elde edilen çözümle tutarlı olduğu görülmüştür.

2.11. Covid-19 Modelinin Nümerik Çözümleri ve Analizi

Bu bölümde fractional (kesir) mertebeli Covid-19 modelinin nümerik çözümlerini elde etmek için Grünwald-Letnikov kesirli türev algoritması kullanılacaktır. Aşağıda Grünwald-Letnikov kesirli türev’de kullanılan temel integral ve türev formülleri verilecektir.

2.11.1. Grünwald-Letnikov Kesirli İntegral ve Türevler

$f(t)$ sürekli fonksiyonunu verilmiş olsun. Öncelikle geri fark türev

$$\frac{d}{dt}f(t) \equiv f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (148)$$

olarak türevin genel tanımı ifade edilir. Türevin genel tanımını kullanarak $f(t)$ fonksiyonunun ikinci türevi aşağıdaki formda yazılır.

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) \equiv f''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \quad (149)$$

1. türev ve 2. türev yardımıyla $f(t)$ fonksiyonunun üçüncü türevi aşağıdaki formda yazılır.

$$\frac{d^3}{dt^3} f(t) \equiv f'''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \quad (150)$$

Bu kurallara göre $n \in \mathbb{N}, j > n$ için $f(t)$ fonksiyonunun n . mertebeden türevinin genel formu aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \equiv f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh) \quad (151)$$

n nin pozitif değerleri için değişken işaretler ile binom katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-j+1)}{j!} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (152)$$

n nin negatif olması durumunda,

$$\binom{-n}{j} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)\dots(-n-j+1)}{j!} = (-1)^j \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right] \quad (153)$$

olur. Burada

$$\left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right] = \frac{n(n+1)\dots(n+j-1)}{j!} \quad (154)$$

dir. (140) denkleminde $-n$ yerine yazılırsa aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\frac{d^{-n}}{dt^{-n}} f(t) \equiv f^{(-n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right] f(t - jh) \quad (155)$$

Burada n pozitif tamsayıdır. Türevin genel tanımlarından ve (151) denkleminde göre $\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$ mertebeden türev tanımından kesirli mertebeye türevi,

$$D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^\infty (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \quad (156)$$

formunda yazılabilir. Binom katsayılarını hesaplamak için faktöriyel ve Euler Gamma fonksiyonu arasındaki ilişki kullanılabilir. Buradan alırsanız ki $\binom{\alpha}{0} = 1$ için,

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)} \quad (157)$$

olur. $n = \frac{t-\alpha}{h}$ olduğunu düşünürsek, burada α reel sabit, ki burada ifade edilen limit değeri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t-\alpha}{h}} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (158)$$

Önce fractional Covid-19 modelini ele alalım.

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^{\beta_1} S(t) &= \Lambda - \phi_c I(t) S(t) - \mu S(t) + v_3 R(t) \\ {}_0 D_t^{\beta_2} E(t) &= \phi_c I(t) S(t) - (\sigma + \mu) E(t) \\ {}_0 D_t^{\beta_3} I(t) &= \sigma E(t) - (\alpha + v_2 + \delta + \mu) I(t) + v_1 R(t) \\ {}_0 D_t^{\beta_4} Q(t) &= \alpha I(t) - (\theta + \mu) Q(t) \\ {}_0 D_t^{\beta_5} R(t) &= \theta Q(t) - (v_1 + v_3 + \mu) R(t) + v_2 I(t) \end{aligned} \quad (159)$$

Burada $0 < \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5 \leq 1$ dir.

Kesir mertebeli Covid-19 modelinin nümerik çözümü aşağıdaki formda yazılabilir.

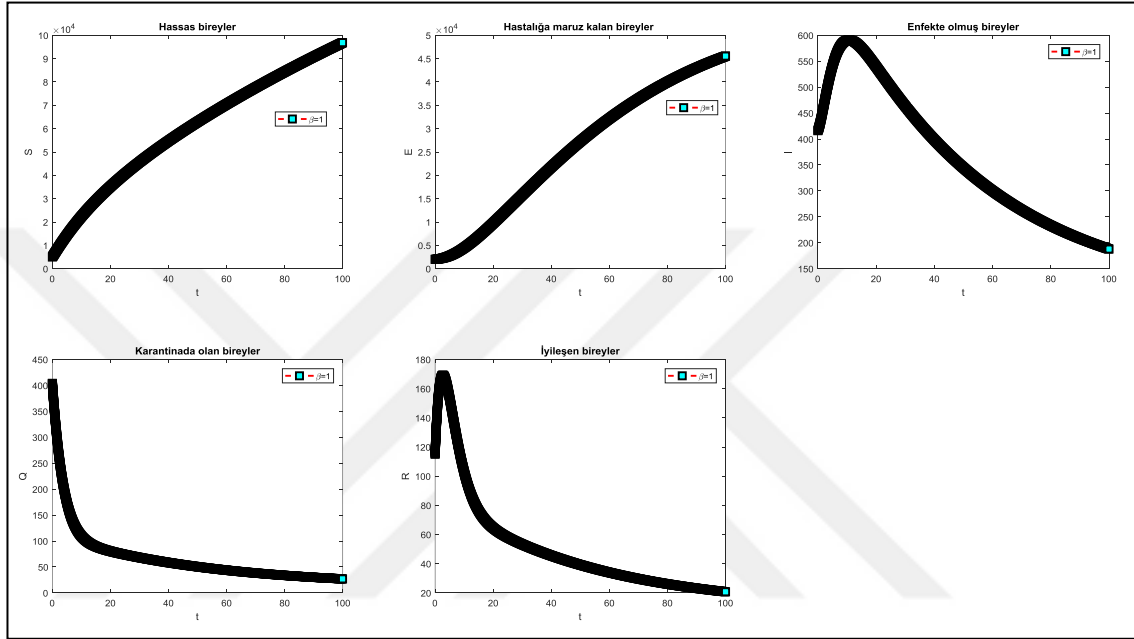
$$\begin{aligned} S(t_k) &= (\Lambda - \phi_c I(t_{k-1}) S(t_{k-1}) - \mu S(t_{k-1}) + v_3 R(t_{k-1})) h^{\beta_1} - \\ &\sum_{j=v}^k c_j^{(\beta_1)} S(t_{k-j}) \\ E(t_k) &= (\phi_c I(t_{k-1}) S(t_k) - (\sigma + \mu) E(t_{k-1})) h^{\beta_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{(\beta_2)} E(t_{k-j}) \\ I(t_k) &= (\sigma E(t_k) - (\alpha + v_2 + \delta + \mu) I(t_{k-1}) + v_1 R(t_{k-1})) h^{\beta_3} - \\ &\sum_{j=v}^k c_j^{(\beta_3)} I(t_{k-j}) \\ Q(t_k) &= (\alpha I(t_k) - (\theta + \mu) Q(t_{k-1})) h^{\beta_4} - \sum_{j=v}^k c_j^{(\beta_4)} Q(t_{k-j}) \end{aligned} \quad (160)$$

$$R(t_k) = \theta Q(t_k) - (v_1 + v_3 + \mu)R(t_{k-1}) + v_2 I(t_k) h^{\beta_5} - \sum_{j=v}^k c_j^{(\beta_5)} R(t_{k-j})$$

şeklindedir.

Burada T_{sim} simülasyon zamanı, $N = [T_{sim}/h]$ $k = 1, 2, 3, \dots, N$ için ve $(S(0), E(0), I(0), Q(0), R(0))$ başlangıç şartlarıdır. $c_j^{(\beta_1)}$, her i için binom katsayılarıdır.

Bu çözümle ve matlab yardımıyla elde ettiğimiz grafikler aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 32. $[0, 100]$ zaman aralığında, adım uzunluğu $h = 0.001$ ve $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta = 1$ seçildiğinde kesirli Covid19 modelinin davranışı

2.11.2. Kesirli Mertebeden Covid-19 Modeli İçin Standart Olmayan Sonlu Fark

Kesirli mertebeden analiz genellikle geleneksel tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlerle temsil edilmeyen, hafıza etkileri ve yerel olmayan davranışlar sergileyen sistem ve süreçlerin modellenmesi için sağlam bir matematiksel çerçeve sunar. Bu yöntem, klasik hesabın genellemeleri olan kesirli türev ve integralleri dahil ederek, geçmişe bağlı dinamiklere sahip sistemlerin modellenmesini kolaylaştırır. Tamsayı olmayan DE yapıları, hafıza etkisini modele entegre etme ve daha yüksek serbestlik derecelerine olanak sağlama avantajı sağlar. Kesirli mertebeli Covid-19 matematiksel modelinde Binom katsayılı kesirli Grünwald-Letnikov (GL) tekniği (Zafar vd., 2020; Scherer vd., 2011; Huang, 2015) kullanılır. GL operatörlerinin önemi, tarihsel ve teorik değerlendirmelerin ötesine uzanır ve bir ayrıştırma şeması sağlamaları yoluyla sayısal hesaplamalarda doğrudan uygulama potansiyelini de kapsar. Bu bölümde zaman alanında

Covid-19 modellerini nicel olarak çözmek için kesirli mertebeden standart dışı sonlu farklar (NSFD) tekniği kullanılacaktır.

Modeli uygulamak ve karmaşık davranışını incelemek için verimli bir standart dışı sonlu farklar (NSFD) şeması tasarlanır. Yine bu bölümde kesirli Covid-19 modeli için yaklaşık çözümler üretecek sayısal bir şema oluşturulur. Burada, kesirli hesaplamada yaygın olarak kullanılan bir operatör ailesi olan Grünwald-Letnikov (GL) operatörlerinin doğal bir uzantısı olarak görülebilecek kesirli farkları kullanan bir yöntem sunulacaktır. Bu çalışma, yeni Covid-19 viral enfeksiyonunun sürekli topluluk bulaşmasından ilham alarak enfeksiyon eğrisini düzleştirmeyi amaçlayan bir matematiksel model kullanmaktadır. Bu amaca ulaşmak için, insanların epidemiyolojik durumuna dayanan yeni bir beş bölmeli kesirli matematiksel model kullanılmaktadır.

Son zamanlarda, Kesirli Epidemiyolojik modeller üzerinde çok sayıda çalışma yapılmıştır (Chen vd., 2021; Hanert ve Schumacher, 2011). Caputo ve Riemann-Liouville kesirli türevleri (Podlubny, 1998; Kilbas vd., 2006; Caputo ve Fabrizio, 2015) kesirli türevin en önemli tanımlarıdır. Son zamanlarda, kesirli türevler, COVID-19 ve yukarıda belirtilen gerçek yaşam problemleri hakkındaki modelleme ve literatür arasındaki ilişki ve karşılaştırma sonuçları ilgili önerilen makalelerde verilmiştir (Ouazi vd., 2024; Joshi ve Yavuz, 2023; Kamrujjaman vd., 2024; Joshi vd., 2023; Atede vd., 2023; Yavuz ve Haydar, 2022; Ahmad vd., 2022; Evirgen vd., 2023; Özköse, 2023; Özköse vd., 2023; Özköse ve Yavuz, 2022; Özköse vd., 2022). Matematiksel modellerin kararlılık analizi, uygulamalı matematik alanlarında yaygın olarak önemli olarak kabul edilmektedir. Gerçek yaşam problemlerindeki noktaların ayrık doğası nedeniyle, kararlılık analizinde modelleri ayırıklaştırmak çok önemlidir. Benzer şekilde, bu tür sorunları ele almak için geleneksel sayısal tekniklerin kullanılması sayısal kararsızlığa neden olabilir. Bu nedenle, alışılmadık yaklaşımlar çok önemlidir. Ayrık yaklaşımlar arasında Mickens (Mickens, 2000; Mickens, 1994; Mickens, 2007; Mickens, 2002; Patidar, 2005) tarafından oluşturulan Standart Dışı Sonlu Farklar (NSFD) yöntemi, oldukça verimlidir ve uygulanması kolaydır. Dahası, daha büyük adım boyutları kullanıldığında bile yakınsamaya dair kanıtlar sunar. NSFD şemalarının kapsamlı bir literatür incelemesi, Patidar'ın yayınlarında bulunabilir (Patidar, 2005; Patidar, 2016; Baleanu vd., 2021). NSFD sistemleri, pratik matematiğin çeşitli alanlarında kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. NSFD şemaları ve kararlılık analizi, son zamanlarda yapılan birçok çalışmanın konusu olmuştur (Baleanu vd., 2021; Dang ve Hoang, 2018; Dang ve Hoang; 2020; Kocabıyık vd., 2020; Özdoğan ve Ongun, 2022; Kocabıyık ve Ongun, 2021; Ongun ve Aslan, 2018).

Tanım 8: $f: (0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonunun $\beta > 0$ mertebesinden Caputo kesirli türevi şu şekilde verilir:

$${}_0^C D_t^\beta [f(t)] = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^t (t-\eta)^{n-\beta-1} f(\eta)^{(n)} d\eta, 0 \leq n-1 < \alpha < n, n = [\beta], n \in \mathbb{N} \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t), \beta = n, n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (161)$$

Tanım 9: Grünwald-Letnikov yaklaşımıyla kesirli türevin ayrıklaştırılması

$${}_0^C D_t^\beta [f(t)]|_{t=t^\zeta} = \frac{1}{t^\alpha} (f_{\zeta+1} - \sum_{i=1}^{\zeta+1} u_i f_{\zeta+1-i} - v_{\zeta+1} f_0) \quad (162)$$

burada $\zeta=1,2,\dots,N_\zeta$ ve her bir ağ noktasının koordinatı $t^\zeta = \zeta \Delta t, \Delta t = \frac{T_k}{N_\zeta}, u_i = (-1)^{i-1} \binom{\beta}{i}, u_1 = \beta, v_i = \frac{i^\beta}{\Gamma(1-\beta)}$ ve $i = 1, 2, 3, \dots, \zeta + 1$.

Ayrıca

$$0 < u_{i+1} < u_i < \dots < u_1 = \beta < 1, 0 < v_{i+1} < v_i < \dots < v_1 = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}. \quad (163)$$

olduğunu varsayalım.

Tanım 10: Bir fonksiyonun $0 < \beta < 1$ mertebesindeki Riemann-Liouville kesirli türevi şu şekilde tanımlanır (Podlubny, 1998):

$${}^{RL}_0 D_x^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\beta} f(t) dt. \quad (164)$$

burada $\Gamma(.)$ Gamma fonksiyonunu belirtir.

Aşağıda doğrusal olmayan sistem, Covid-19 kesirli dereceli bölümlü salgın modelini verelim.

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^\beta S(t) &= \Lambda^\beta - \phi_c^\beta I(t) S(t) - \mu^\beta S(t) + v_3^\beta R(t), \\ {}_0 D_t^\beta E(t) &= \phi_c^\beta I(t) S(t) - (\sigma^\beta + \mu^\beta) E(t), \\ {}_0 D_t^\beta I(t) &= \sigma^\beta E(t) - (\alpha^\beta + v_2^\beta + \delta^\beta + \mu^\beta) I(t) + v_1^\beta R(t), \\ {}_0 D_t^\beta Q(t) &= \alpha^\beta I(t) - (\theta^\beta + \mu^\beta) Q(t), \end{aligned}$$

$${}_0D_t^\beta R(t) = \theta^\beta Q(t) - (v_1^\beta + v_3^\beta + \mu^\beta)R(t) + v_2^\beta I(t). \quad (165)$$

2.11.2.1. Kesirli Salgın Modelleri İçin Nsfd Şemalarının Oluşturulması

Bu bölümde, kesirli mertebeden salgın modeli (165) için sayısal çözümler elde etmek amacıyla NSFD şemaları oluşturulacaktır. Kesirli türevler, Grünwald-Letnikov yöntemi kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanacaktır. Sürekli kesirli mertebeden salgın modelinin çözümdeki sabit noktaları, önerilen NSFD yöntemleriyle sabit ve pozitif tutulmaktadır.

Aşağıdaki kriterlerden bir veya daha fazlası sağlanıyorsa, sayısal şemaya NSFD ayırıklaştırma denir:

1. Yerel olmayan bir yaklaşım kullanılır (Mickens 2007; Mickens, 2008).
2. Türevsel ayırıklaştırma, geleneksel ve negatif olmayan bir fonksiyon değildir (Patidar, 2005).

$\psi(h) = h + O(h^2)$, payda fonksiyonu olarak adlandırılır (Mickens,1994) kullanılır.

$$\psi(h) = \frac{1-e^{-\lambda h}}{\lambda}; \quad \psi(h) = (1 - \cos \lambda h) \quad (166)$$

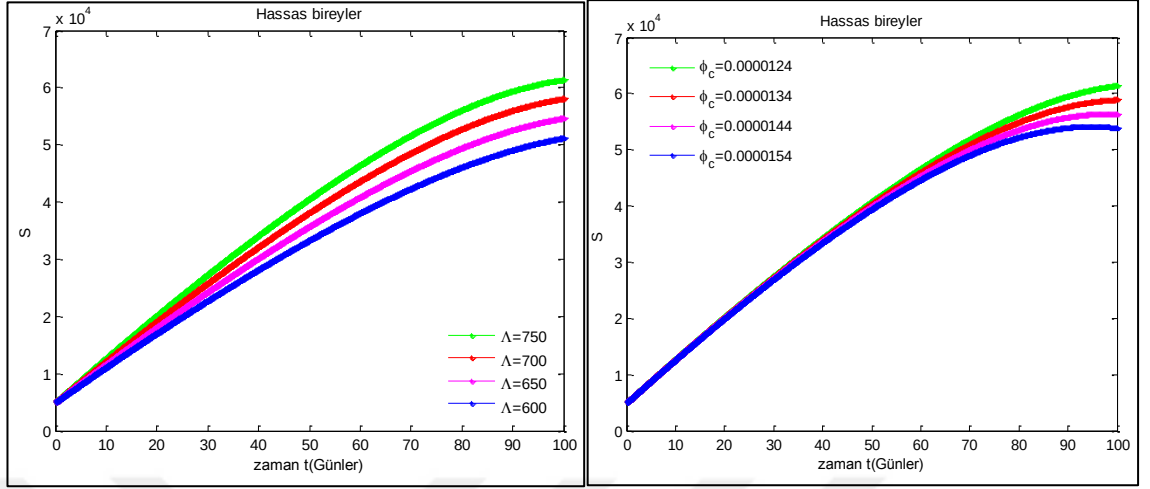
Kesirli mertebeli salgın modelinin (165) sağ tarafındaki elemanlar, dinamik olarak tutarlı bir NSFD şeması oluşturmak için S_n ve S_{n+1} biçiminde terimlerini içerir. NSFD (Mickens, 1994; Mickens, 2000; Mickens, 2002, Mickens, 2007; Patidar, 2005; Patidar 2016; Anguelov vd., 2003; Anguelou ve Lubuma, 2001; Arenasa vd., 2011) şemaları yerel olmayan yaklaşım kullanarak bu şekilde oluşturulur. Bu, NSFD ayırık şemasından türetilen çözümlerin de orijinal diferansiyel denklem sisteminin veya çözümlerinin temel özelliklerini karşılaması gerektiği anlamına gelir.

Daha önce belirtildiği gibi, modeldeki S, E, I, Q ve R değişkenleri alt popülasyonları gösterir ve her zaman pozitif değerlere sahip olmalıdır. Ayrıca, $N(t)$, alt popülasyonların toplamına eşit olmalıdır (ölçekli model için $N(t) = 1$). Uygun şema yapısını oluşturabilmemiz için bu özelliklerin NSFD şemasında da korunması gerekir.

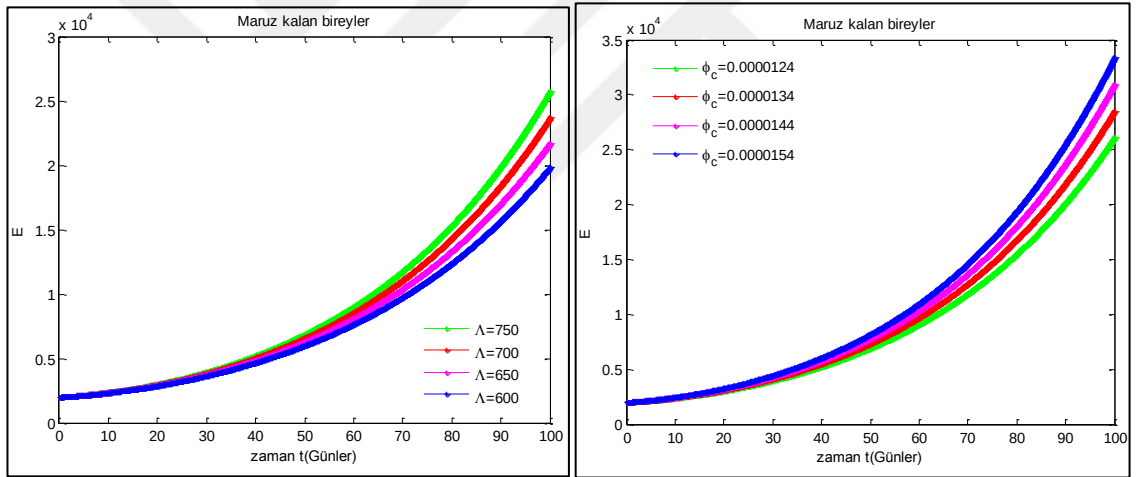
$N_0 \in N$ ve $[0, T]$ sonlu bir aralık olsun. Ayırıklaştırmanın zaman adımı boyutu $h = \Delta t = \frac{T}{N_0}$ ile gösterilsin,

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_0} = T = N_0 h, \quad (167)$$

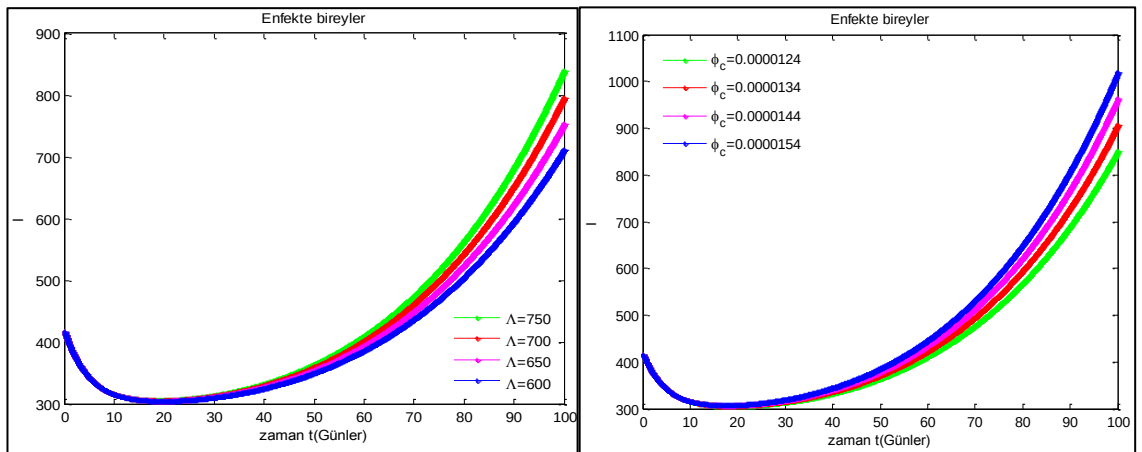
ve $t_n = nh$ olsun, burada $n \in \{0,1,2,\dots,N_0\}$ olsun. O zaman, S_n, E_n, I_n, Q_n ve R_n sırasıyla $S(t_n), E(t_n), I(t_n), Q(t_n)$ ve $R(t_n)$ 'nin yaklaşık değerlerine karşılık gelir.



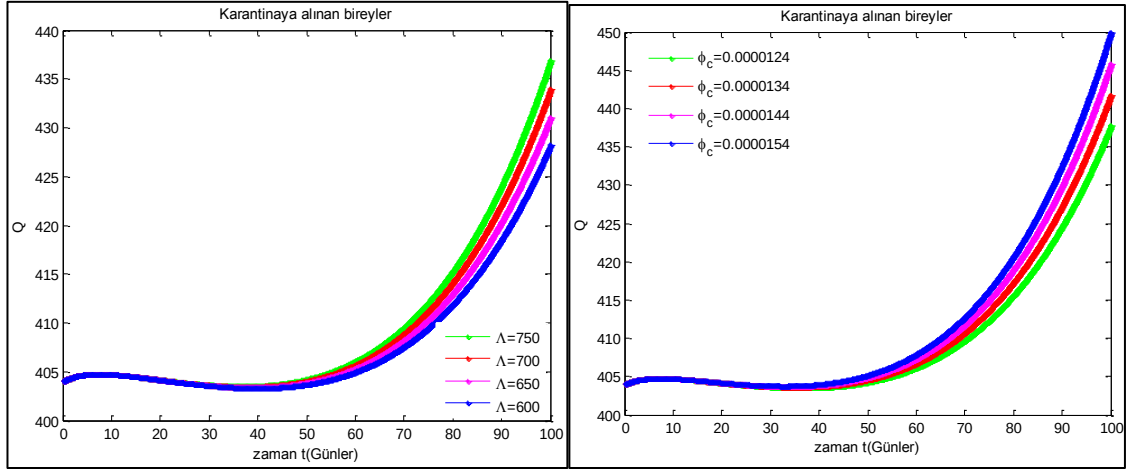
Şekil 33. NSFD tekniği ile, incelenen modelin duyarlı $S(t)$ sınıfı Λ ve ϕ_c 'nin farklı değerlerindeki dinamik hareketleri



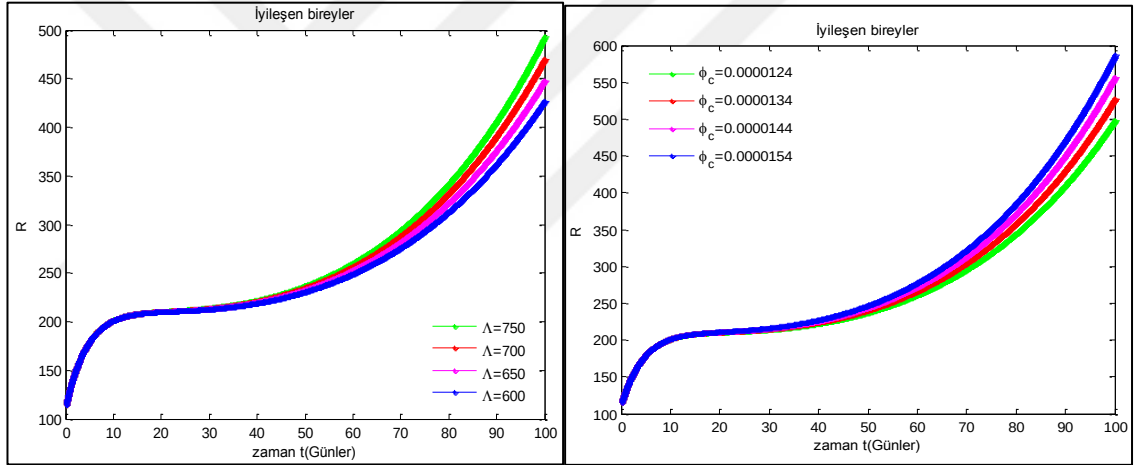
Şekil 34. NSFD tekniği ile, incelenen modelin hastalığa maruz kalanlar $E(t)$ sınıfı Λ ve ϕ_c 'nin farklı değerlerindeki dinamik hareketleri



Şekil 35. NSFD tekniği ile, incelenen modelin enfekte bireyler $I(t)$ sınıfı Λ ve ϕ_c 'nin farklı değerlerindeki dinamik hareketleri



Şekil 36. NSFD tekniği ile, incelenen modelin karantinadaki bireyler $Q(t)$ sınıfı Λ ve ϕ_c 'nin farklı değerlerindeki dinamik hareketleri



Şekil 37. NSFD tekniği ile, incelenen modelin iyileşen bireyler $R(t)$ sınıfı Λ ve ϕ_c 'nin farklı değerlerindeki dinamik hareketleri

Tablo 4'teki değerleri kullanarak (165) sistemi çizilmiştir. NSFD şemasını kullanarak, Şekil 33-37'de, Covid-19 modelinin farklı Λ ve ϕ_c değerlerinde bulaşma dinamiği araştırılmıştır. Burada grafiksel yorumlama için, (165)'te verilen 28 Şubat 2020'deki $(S_0, E_0, I_0, Q_0, R_0) = (5000, 2003, 416, 404, 115)$ başlangıç verileri alınmıştır. Şimdi, farklı Λ ve ϕ_c değerlerine karşılık gelen farklı bölmelerin sayısal sonuçlarını simüle edilecektir. Şekil 33-37'deki λ parametresinin tüm bölmeler üzerindeki etkisi aynıdır, parametre azaldıkça bölmeler de azalır.

Tanım 11: Caputo anlamında $\omega \in C_{-1}^{\mu} (\mu \geq 1)$ fonksiyonunun $\beta > 0$ mertebesinden Caputo kesirli türevi şu şekilde tanımlanır:

$${}_0^C D_x^\beta \omega(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^t (t-\vartheta)^{m-\beta-1} \omega^m(\vartheta) d\vartheta, \quad (168)$$

burada $m-1 < \beta < m \in \mathbb{N}$. If $\beta = m \in \mathbb{N}$ dır. Bu yüzden

$$D_t^\beta \omega(t) = \frac{d^m \omega(t)}{dt^m} \quad (169)$$

dir.

Tanım 12: Fonksiyonun Laplace dönüşümü eğer integral varsa tüm $t \geq 0$ reel sayılar için şu şekilde tanımlanır.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \quad (170)$$

Tanım 13: Caputo kesirli türevi $D_t^\beta \omega(t)$ 'nin Laplace dönüşümü şu şekilde tanımlanır (Podlubny, 1998).

$$\mathcal{L}[D_t^\beta \omega(t)] = s^\beta \mathcal{L}[\omega(t)](s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1} \omega^k(0^+), \quad (171)$$

Burada $\alpha > 0$, $m-1 < \alpha < m$ ve $\mathcal{L}$, Laplace dönüşüm operatörünü ifade eder.

2.12. Kesirli Hesaplama Kavramını Kullanarak Model (11)'in Sayısal Analizi

Bu bölümde, kesirli Covid-19 modelinin sayısal modeli için Grunwald-Letnikov kesirli türev algoritması kullanılarak çözümler elde edilmektedir. GL operatörlerinin önemi, tarihsel ve teorik değerlendirmelerin ötesine uzanır; ayrıca, bir ayrıklaştırma yöntemi sunarak sayısal hesaplamalarda doğrudan kullanımlarını da kolaylaştırır. Elde edilen kesirli mertbe sistemini simüle etmek için Grunwald-Letnikov standart dışı ağırlıklı ortalama sonlu farklar yöntemi geliştirilmiştir. Grunwald-Letnikov kesirli türevinde kullanılan temel integral ve türev formülleri aşağıda verilmiştir.

2.12.1. Grünwald-Letnikov kesirli integrali ve türevleri

$\varphi(t)$ 'nin sürekli fonksiyon olsun ve öncelikle, geri fark türevi aşağıdaki gibi verilsin.

$$\frac{d}{dt} \varphi(t) \equiv \varphi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t-h)}{h} \quad (172)$$

Türevin genel tanımını kullanarak, $g(t)$ fonksiyonunun ikinci türevi aşağıdaki biçimde yazılır.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} g(t) &\equiv g''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(t) - g'(t-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{g(t) - g(t-h)}{h} - \frac{g(t-h) - g(t-2h)}{h} \right\} = \\ &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t) - 2g(t-h) + g(t-2h)}{h^2}. \end{aligned} \quad (173)$$

$g(t)$ fonksiyonunun birinci, ikinci ve üçüncü dereceden türevlerinin yardımıyla,

$$\frac{d^3}{dt^3} g(t) \equiv g'''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t) - 3g(t-h) + 3g(t-2h) - g(t-3h)}{h^3} \quad (174)$$

elde edilir.

Bu kurallara göre $f(t)$ fonksiyonunun $n \in N, j > n$ için n 'inci mertebeden türevinin genel biçimi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d^n}{dt^n} g(t) \equiv g^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} g(t - jh) \quad (175)$$

n 'nin pozitif değerleri için değişken işaretleri ve binom katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-j+1)}{j!} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (176)$$

eğer n negatif ise

$$\binom{-n}{j} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)\dots(-n-j+1)}{j!} = (-1)^j \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right], \quad (177)$$

mümkündür. Burada

$$\left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right] = \frac{n(n+1)\dots(n+j-1)}{j!} \quad (178)$$

şeklindedir. Denklem (175)'te $-n$ yerine konulursa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{d^{-n}}{dt^{-n}} \mathcal{G}(t) \equiv \mathcal{G}^{(-n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{G}(t - jh). \quad (179)$$

Burada n pozitif bir tam sayıdır. Kesirli türev, türevin genel tanımlarından ve denklem (171)'e göre $\beta (\beta \in R)$ mertebesindeki türevin tanımından elde edilir.

$$D_t^\beta \mathcal{G}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\beta} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\beta}{j} \mathcal{G}(t - jh), \quad (180)$$

şeklinde yazılabilir. Faktöriyel ve Euler Gama fonksiyonu arasındaki ilişki, binom katsayılarını hesaplamak için kullanılabilir. Buradan $\binom{\beta}{0} = 1$ için aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\binom{\beta}{j} = \frac{\beta!}{j!(\beta-j)!} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta-j+1)}. \quad (181)$$

$n = \frac{t-\beta}{h}$, olduğu düşünüldüğünde, β gerçekte sabittir, burada ifade edilen limit değeri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$${}_t D_t^\beta \mathcal{G}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\beta} \sum_{j=0}^{\frac{t-\beta}{h}} (-1)^j \binom{\beta}{j} \mathcal{G}(t - jh). \quad (182)$$

Şimdi kesirli Covid-19 modelini ele alalım.

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^\beta S(t) &= \Lambda^\beta - \phi_c^\beta I(t)S(t) - \mu^\beta S(t) + v_3^\beta R(t), \\ {}_0 D_t^\beta E(t) &= \phi_c^\beta I(t)S(t) - (\sigma^\beta + \mu^\beta)E(t), \\ {}_0 D_t^\beta I(t) &= \sigma^\beta E(t) - (\alpha^\beta + v_2^\beta + \delta^\beta + \mu^\beta)I(t) + v_1^\beta R(t), \\ {}_0 D_t^\beta Q(t) &= \alpha^\beta I(t) - (\theta^\beta + \mu^\beta)Q(t), \\ {}_0 D_t^\beta R(t) &= \theta^\beta Q(t) - (v_1^\beta + v_3^\beta + \mu^\beta)R(t) + v_2^\beta I(t). \end{aligned} \quad (183)$$

burada, $0 < \beta \leq 1$.

$S(0) = S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, Q(0) = Q_0, R(0) = R_0$ başlangıç şartları ve gerçek değerleri $S(0) = 5000, E(0) = 2003, I(0) = 416, Q(0) = 404, R(0) = 115$ olarak verilir (Evirgen vd., 2023).

Kesirli mertebeden Covid-19 modelinin sayısal çözümü aşağıdaki formda yazılabilir.

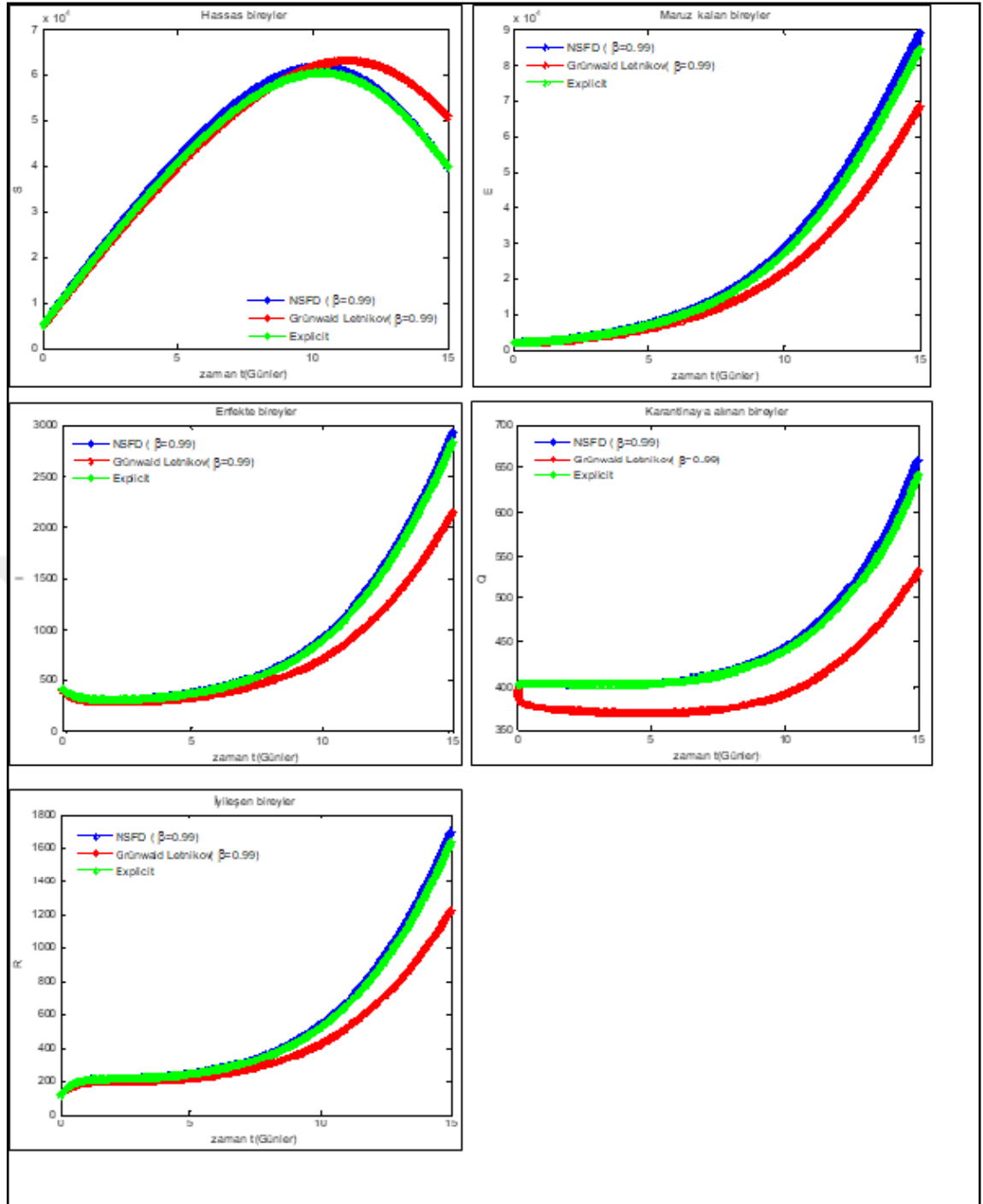
$$S(t_k) = \left(\Lambda^\beta - \phi_c^\beta I(t_{k-1})S(t_{k-1}) - \mu^\beta S(t_{k-1}) + v_3^\beta R(t_{k-1}) \right) h^\beta - \sum_{j=v}^k c_j^{(\beta)} S(t_{k-j}), \quad (184)$$

$$E(t_k) = \left(\phi_c^\beta I(t_{k-1})S(t_k) - (\sigma^\beta + \mu^\beta)E(t_{k-1}) \right) h^\beta - \sum_{j=v}^k c_j^{(\beta)} E(t_{k-j}), \quad (185)$$

$$I(t_k) = \left(\sigma^\beta E(t_k) - (\alpha^\beta + v_2^\beta + \delta^\beta + \mu^\beta)I(t_{k-1}) + v_1^\beta R(t_{k-1}) \right) h^\beta - \sum_{j=v}^k c_j^{(\beta)} I(t_{k-j}), \quad (186)$$

$$Q(t_k) = \left(\alpha^\beta I(t_k) - (\theta^\beta + \mu^\beta)Q(t_{k-1}) \right) h^\beta - \sum_{j=v}^k c_j^{(\beta)} Q(t_{k-j}), \quad (187)$$

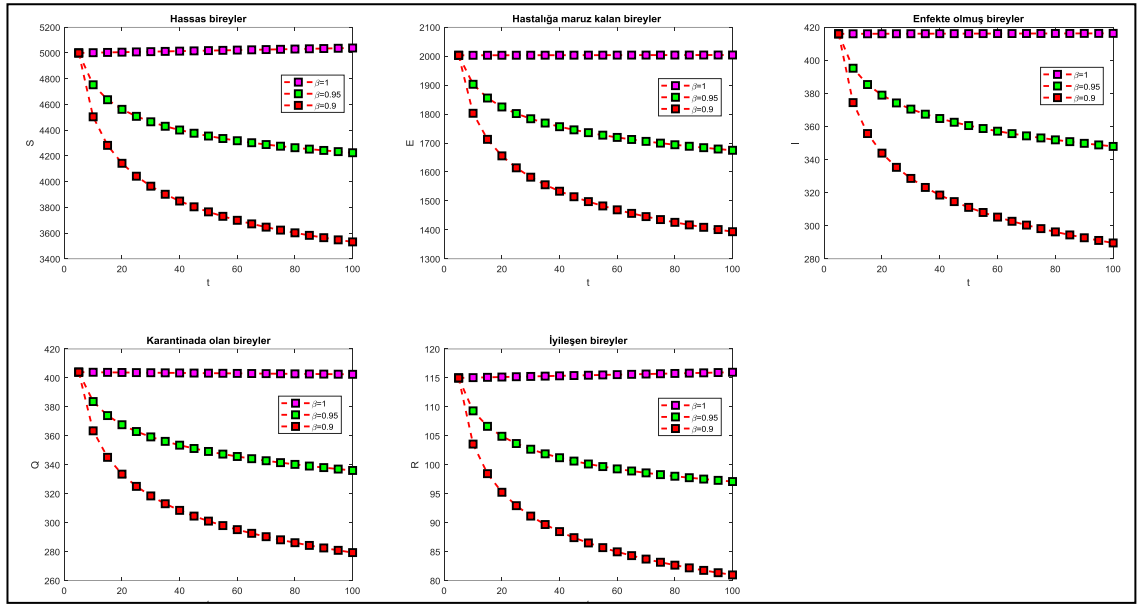
$$R(t_k) = \theta^\beta Q(t_k) - \left(v_1^\beta + v_3^\beta + \mu^\beta \right) R(t_{k-1}) + v_2^\beta I(t_k) h^\beta - \sum_{j=v}^k c_j^{(\beta)} R(t_{k-j}). \quad (188)$$



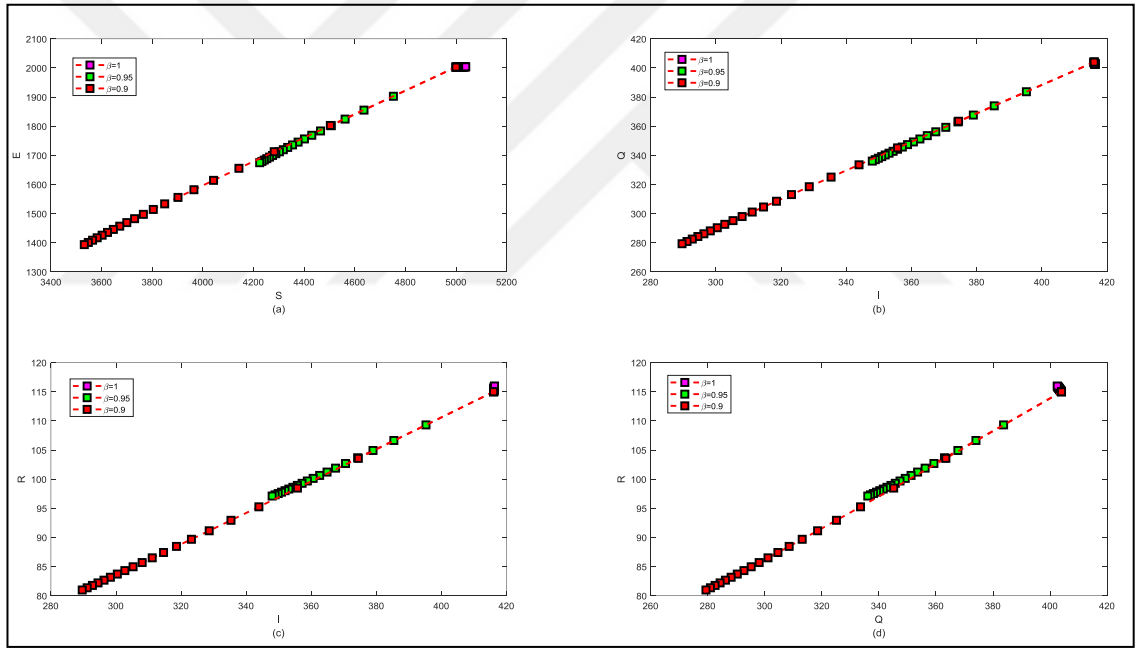
Şekil 38. Payda fonksiyonu ile ve payda fonksiyonu olmadan açık Euler ($\beta = 1$), Grünwald-Letnikov ve NSFD şemaları kullanılarak Covid-19 kesirli modelinin sayısal çözümleri

$$\Psi(h) = (1 - \exp(-h)) \text{ for } \beta = 0.99 \text{ and } h = 0.001$$

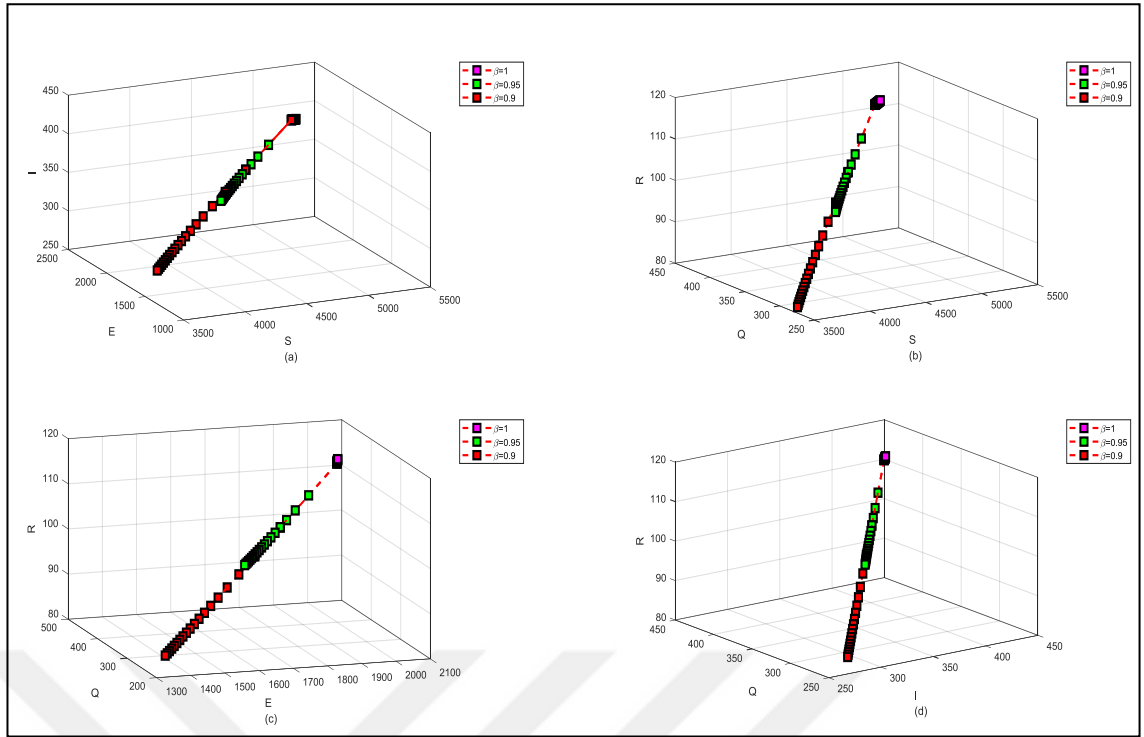
Burada T_{sim} simülasyon süresi $N = \left\lceil \frac{T_{sim}}{h} \right\rceil, k = 1, 2, 3, \dots, N$ ve $(S(0), E(0), I(0), Q(0), R(0))$ için başlangıç koşullarıdır. $c_j^{(\beta_1)}$ her i için binom katsayılarıdır.



Şekil 39. $[0, 100]$ zaman aralığında, adım uzunluğu $h = 5$ ve $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta = 1, 0.95$ ve 0.9 seçildiğinde kesirli Covid19 modelinin davranışı



Şekil 40. Kesirli Covid-19 modelinin adım uzunluğu $h = 5$ ve $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta = 1, 0.95$ ve 0.9 seçildiğinde nümerik çözüm için faz diyagramı; (a) $S(t) - E(t)$, (b) $I(t) - Q(t)$, (c) $I(t) - R(t)$, (d) $Q(t) - R(t)$



Şekil 41. Kesirli Covid-19 modelinin, adım uzunluğu $h = 5$ ve $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta = 1, 0.95$ ve 0.9 seçildiğinde nümerik çözüm için faz portresi

2.13. Stokastik Modelleme

Stokastik modelleme, bir dereceye kadar rastgelelik veya öngörülemezlik içeren verileri temsil etmek veya sonuçları tahmin etmek için kullanılan bir tekniktir. Sigorta sektörü, hasar ödemelerine yol açan öngörülemeyen olaylardan etkilenebilecekleri için, işletme bilançolarının gelecekteki durumunu tahmin etmek için ağırlıklı olarak stokastik modellemeye güvenir. Günümüzde, modellemede stokastik diferansiyel denklemlerin kullanımı sadece matematiksel finans ve ekonomide değil, aynı zamanda fizik, oyun teorisi, elektrik mühendisliği ve meteoroloji gibi diğer temel bilimler ve mühendislik disiplinlerinde de önemlidir. Stokastik diferansiyel denklemlerden yararlanmak, gerçek olayları minimum hatayla hassas bir şekilde simüle etmek için etkili bir yaklaşım olsa da, belirli içsel sorunların ele alınması da aynı derecede zorlu olabilir. Birçok stokastik diferansiyel denklemin açık çözümleri olmayabilir veya açık çözümler mevcut olsa bile nihai çözüme ulaşmak için daha fazla süreç veya prosedüre ihtiyaç duyabilir. Simülasyon tabanlı sayısal yaklaşımlar tam da bu noktada öne çıkmaktadır. Sonuç olarak, özünde karmaşık olan stokastik diferansiyel denklemler, Lie simetri yöntemi ile daha anlaşılır ve tanınabilir bir forma sadeleştirilebilir. Bu sadeleştirilmiş form, ilgili stokastik denklemin çözümünün veya çözüm uzayının daha kapsamlı bir şekilde anlaşılmasını da kolaylaştırır.

"Stokastik süreç" ifadesi, rastgele bir fonksiyonu ifade eder. Rastgele değişkenlerin bir koleksiyonu olarak tanımlanan stokastik bir süreç, olasılık uzayında ölçülebilir bir

fonksiyondur ve indeks kümesi genellikle zamanı gösterir. İki değişkenin bir fonksiyonu olarak tanımlanan stokastik bir süreç, şans unsuru ortadan kaldırıldığında yalnızca zamanın bir fonksiyonu haline gelir ve belirli bir andaki rastgele bir değişkeni temsil eder. Botanikçi Robert Brown, küçük bir polen tanesinin suya atıldığında düzensiz ve öngörülemez bir yol izlediğini belirtmiştir (Brown,1828). Einstein (1905), bu süreci polenin keyfi yönlerde su molekülleri tarafından bombardımana tabi tutulması olarak açıklamıştır. Stokastik bir kuvvet alanından geçen bir parçacığın hızını yöneten denklem ilk olarak 1908'de Langevin tarafından önerilmiştir. 1923'te Wiener, Brown Hareket Süreci'ni (BHS) tanımlamıştır (Wiener, 1923). SDD'nin sistematik olarak ele alınması, 1940'ların başlarında Japon matematikçi Kazufumi Itô ile başlamıştır (Itô, 1951). SDD için analitik cevaplar elde etmek genellikle zordur. Bu durumda, stokastik Taylor açılımlarını (STA) kullanan sayısal yaklaşımlar doğru yaklaşımlar sağlayabilir. STA ile ilgili temel zorluk, her yineleme boyunca katsayıların daha yüksek mertebeden türevlerinin hesaplanması gerekliliğidir. Daha yüksek mertebeden yaklaşımlar hızla karmaşıklık kazanır. Düşük gürültülü Stokastik Diferansiyel Denklemler (SDE'ler), küçük değişikliklerden etkilenen birçok fiziksel sistemi temsil etmek için kullanılır. Düşük gürültülü bir stokastik sistemin, farklı bir analitik yapıya sahip olmasına rağmen, deterministik çözüme nispeten "yakın" bir çözüm üretmesi beklenir (Sickenberger vd., 2009).

Daha önce de belirtildiği gibi, Brown hareketi 1900'lerin başında Einstein tarafından keşfedildi. Bu hareketin diferansiyel denklemler kullanan dinamik bir modeli, fizikçiler Langevin ve Smoluchovsky tarafından oluşturuldu.

Onlar $\frac{dx}{dt} = p(t, x)$ deterministik diferansiyel denklem yerine,

$$\frac{dX(t)}{dt} = p(t, X(t)) + q(t, X(t))\zeta_1 \quad (189)$$

biçimindeki gürültülü diferansiyel denklemini elde etmişlerdir. Burada $p(t, X(t))$ deterministik ve $q(t, X(t))$ yoğunluk çarpımı, ζ_1 standart Gauss rastgele değişkeni, $q(t, X(t))\zeta_1$ ise gürültü terimini ifade etmektedir.

Tipik Gauss rastgele değişkeni ζ_1 'in türevi, her yerde sürekli olan ve hiçbir yerde türevlenebilir olmayan bir Wiener sürecidir ve $d\zeta_1(w) = dW(w(t))$ şeklinde ifade edilir.

SDD'ler genellikle

$$dX_t = p(t, X_t)dt + q(t, X_t)dW_t \quad (190)$$

şeklinde sembolik olarak gösterilebilir. İntegral denklemi de

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t p(t, X_s)ds + \int_{t_0}^t q(t, X_s)dW_s \quad (191)$$

şeklinde. İlk integral Riemann çerçevesinde, ikinci integral ise Itô çerçevesinde değerlendirilir. Araştırma iki sayısal tekniği incelemektedir: EM yaklaşımı (Maruyama, 1955) ve Milstein yöntemi (Milstein, 1994).

Bu bölümde, Covid-19 modeline beyaz gürültünün (Wiener süreci) dahil edilmesi incelenecektir. Bu modele yaklaşık çözümler sağlamak için Euler-Maruyama ve Milstein sayısal teknikleri kullanılacaktır. Stokastik modellerin çözümleri, stokastik beyaz gürültü varlığında deterministik sonuçlarla karşılaştırılacaktır. Her iki stratejiden elde edilen sonuçlar, her iki durumda da anlamayı kolaylaştırmak için karşılaştırılacaktır.

2.13.1. Stokastik Covid-19 Modeli

$$\begin{aligned} dS &= [\Lambda - \phi_c IS - \mu S + v_3 R]dt + Y_1 S(t)dW_1(t) \\ dE &= [\phi_c IS - (\sigma + \mu)E]dt + Y_2 E(t)dW_2(t) \\ dI &= [\tau E - (\alpha + v_2 + \delta + \mu)I + v_1]dt + Y_3 I(t)dW_3(t) \\ dQ &= [\alpha I - (\theta + \mu)Q]dt + Y_4 Q(t)dW_4(t) \\ dR &= [\theta Q - (v_1 + v_3 + \mu)R + v_2 I]dt + Y_5 R(t)dW_5(t) \end{aligned} \quad (192)$$

şeklinde yazılır. Burada $W_i(t)$; $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ler serbest Brownian ya da gürültü hareketleri (Wiener süreçleri)dir. Y_i^2 ; $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ve $Y_i > 0$ ise çevresel dış beyaz gürültülerin yoğunluğudur.

Stokastik modellerin çözümlerine ulaşmanın mümkün olmadığı durumlarda yaklaşık analitik yöntemlerin yanında kullanılan diğer yöntemler de sayısal çözüm yöntemleridir. Euler yöntemi (Birinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi-RK1), Milstein yöntemi, İkinci Mertebeden Runge-Kutta yöntemi-RK2 (Orta nokta yöntemi), RK4, RK6 gibi yöntemler bunlardan bazılarıdır.

Şimdi Stokastik Covid-19 modelinin çözümleri için kullanılan yöntemler anlatılacak ve elde edilen sonuçlar simülasyon şeklinde aşağıda gösterilecektir.

2.13.1.1. Euler-Maruyama Yöntemi

$[0, T]$ aralığının bir bölümü, tüm $n = 0, 1, \dots, N - 1$ için adım boyutu $h = t_{n+1} - t_n$ seçilerek, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ olacak şekilde X_{t_n} sürecini Z_n olarak yaklaştıran sayısal bir çözümdür. Bu yöntemler arasında en basit ve en bilineni:

$$Z_{n+1} = Z_n + f(t_n, Z_n)h + g(t_n, Z_n)\Delta B_n, \quad (193)$$

iteratif eşitliğiyle verilen EM yöntemidir. Burada $\Delta B_n = B_{n+1} - B_n \sim N(0, h)$ şeklinde hesaplayınca bulunur.

2.13.1.2. Milstein Yöntemi

Milstein yaklaşımı, Euler-Maruyama yaklaşımındaki hatayı en aza indirmek için difüzyon teriminin türevini kullanır. Aşağıdaki eşitlikle ifade edilen yöntem

$$Z_{n+1} = Z_n + f(t_n, Z_n)h + g(t_n, Z_n)\Delta B_n + \frac{1}{2}g(t_n, Z_n)\frac{\partial g(t_n, x)}{\partial x}\bigg|_{x=Z_n}((\Delta B_n)^2 - h) \quad \forall n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (194)$$

Milstein yöntemi olarak adlandırılır. Bu eşitlikteki $\frac{((\Delta B_n)^2 - h)}{2}$ terimi aslında STA'da kullanılan karışık stokastik integralden biridir ve

$$\int_{u=0}^h \int_{s=0}^h B_u dB_u = \int_{s=0}^h B_u dB_u = \frac{B_h^2 - h}{2} \quad (195)$$

şeklinde hesaplanmıştır.

2.13.1.3. Runge-Kutta Yöntemi

Bu yaklaşım, $\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t))$ şeklinde ifade edilen adi diferansiyel denklemin çözümü olan $y(t)$ için bir yaklaşık değer türetmeyi amaçlamaktadır. Hesaplanan yaklaşık değer $y^*(t)$ ile gerçek değer $y(t)$ arasındaki tutarsızlık, yaklaşık değerlerin hesaplanmasında kullanılan yöntemle ilgili olarak dalgalanır. Sonuç olarak, dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi (RK4), en sık kullanılan sayısal teknikler arasındadır. Bu yaklaşım, başlangıç koşulu $y(t_0) = y_0$ verildiğinde, adım boyutu h olan dört test noktasındaki artışların ağırlıklı ortalamasını kullanarak tahmini değer $y^*(t_0 + h)$ değerini

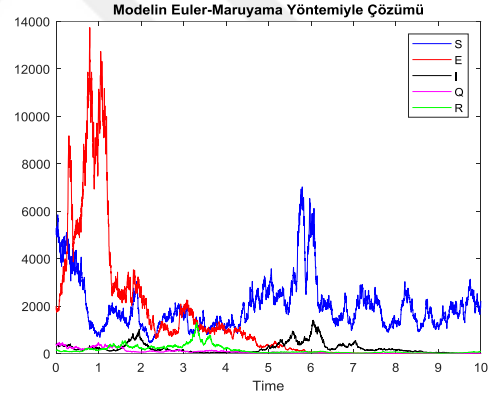
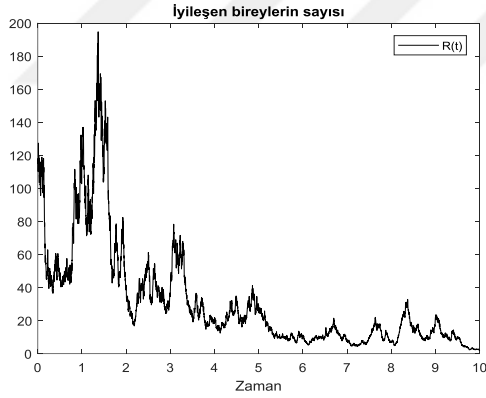
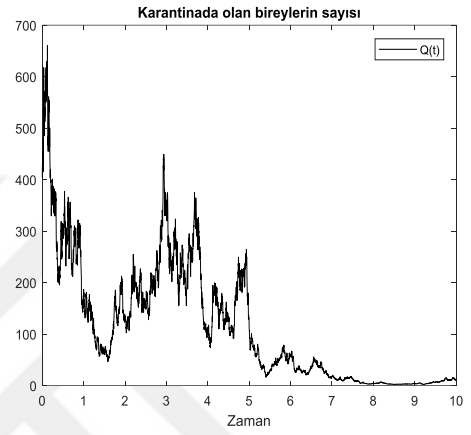
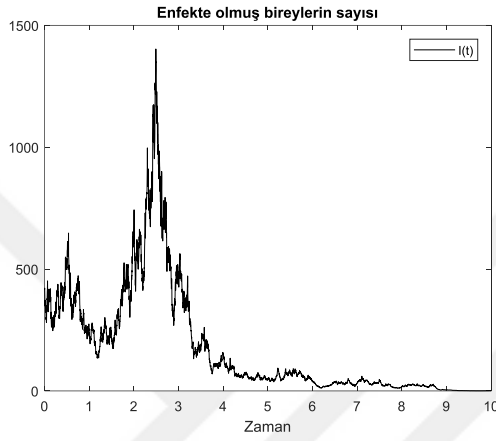
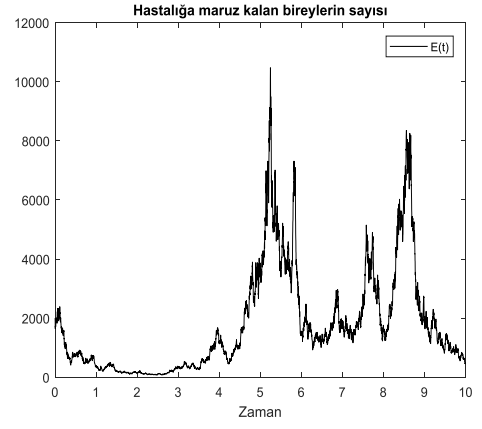
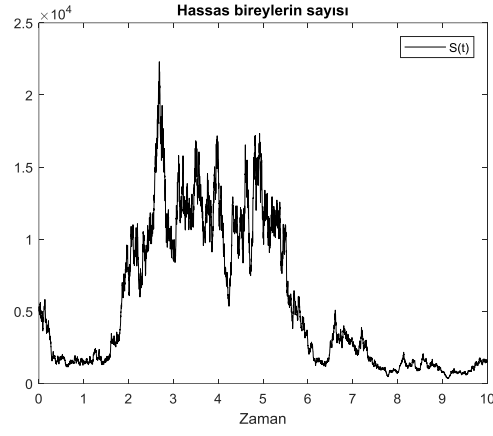
hesaplar. Sonuç olarak, RK4 tekniğinde hesaplama dört test noktası kullandığından, hata terimi $O(h^5)$ mertebesinde (Press vd., 1992).

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad (196)$$

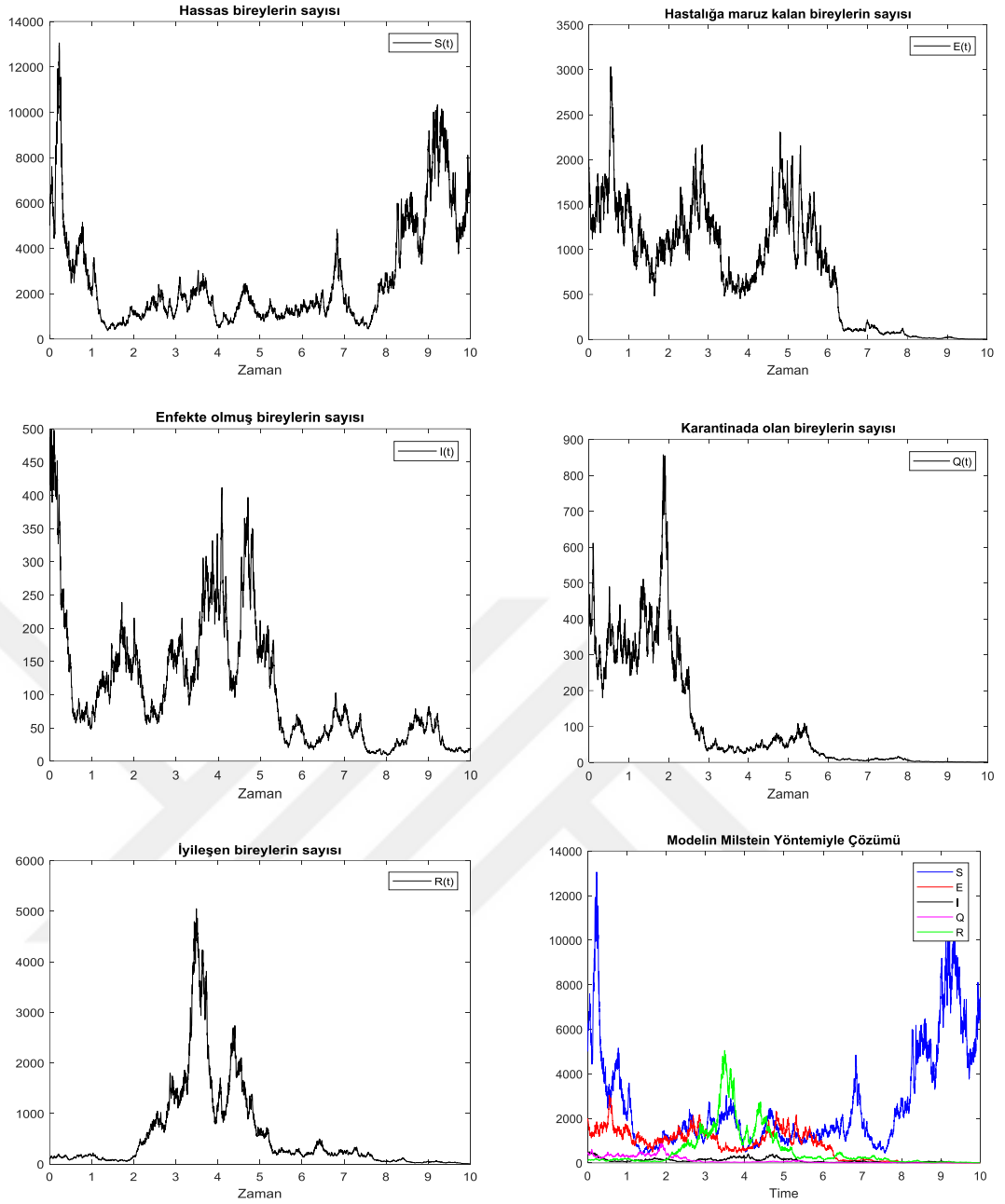
şeklindeki adi diferansiyel denklem için $y_{n+1} = y(t_{n+1})$ ve $t_{n+1} = t_n + h$ olmak üzere y_{n+1}^* yaklaşık sayısal çözümü RK4 yöntemi aşağıdaki gibi iteratif formülle hesaplanır:

$$\begin{aligned} y_{n+1}^* &= y_n^* + \frac{1}{6}(K_1 + K_2 + K_3 + K_4)h, \\ K_1 &= f(y_n^*, t_n), \\ K_2 &= f\left(y_n^* + \frac{1}{2}h, t_n + \frac{1}{2}hK_1\right), \\ K_3 &= f\left(y_n^* + \frac{1}{2}h, t_n + \frac{1}{2}hK_2\right), \\ K_4 &= f(y_n^* + h, t_n + hK_3) \end{aligned} \quad (197)$$

Azaltılmış adım süreleriyle yinelemeli olarak uygulanabilen RK4 yaklaşımı, bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler sayesinde günümüzde de yaygınlığını korumaktadır. 20. yüzyılın başlarında Alman matematikçiler C. Runge ve M.W. Kutta tarafından önerilen bu teknik, bu tezde, özellikle stokastik diferansiyel denklem sistemlerinin simülasyonu için kullanılacaktır.

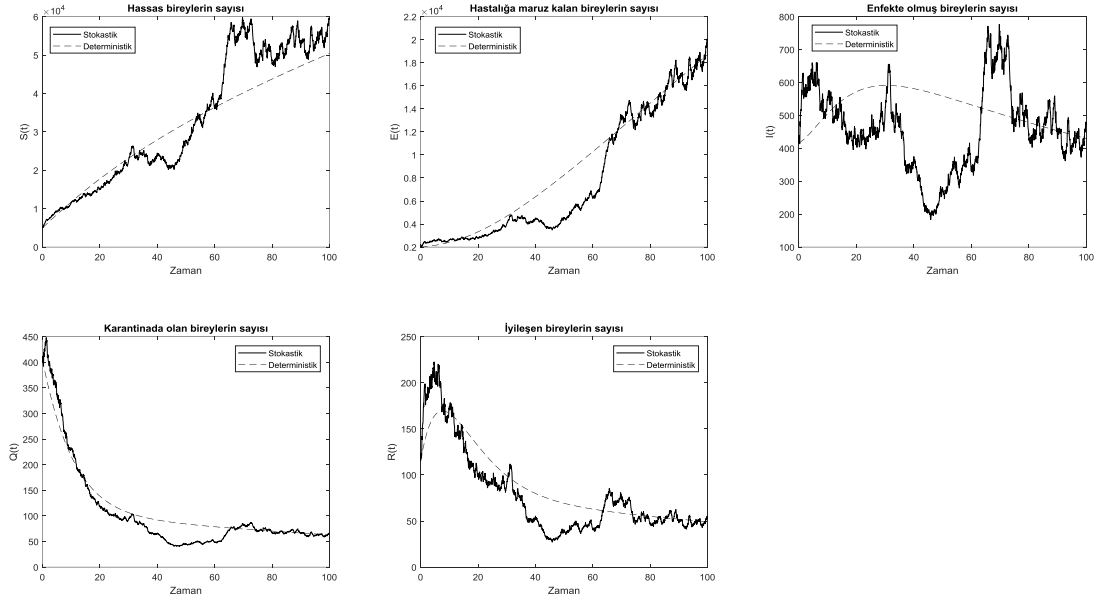


Şekil 42. Stokastik Covid-19 modelinin Euler-Maruyama yöntemiyle çözümleri

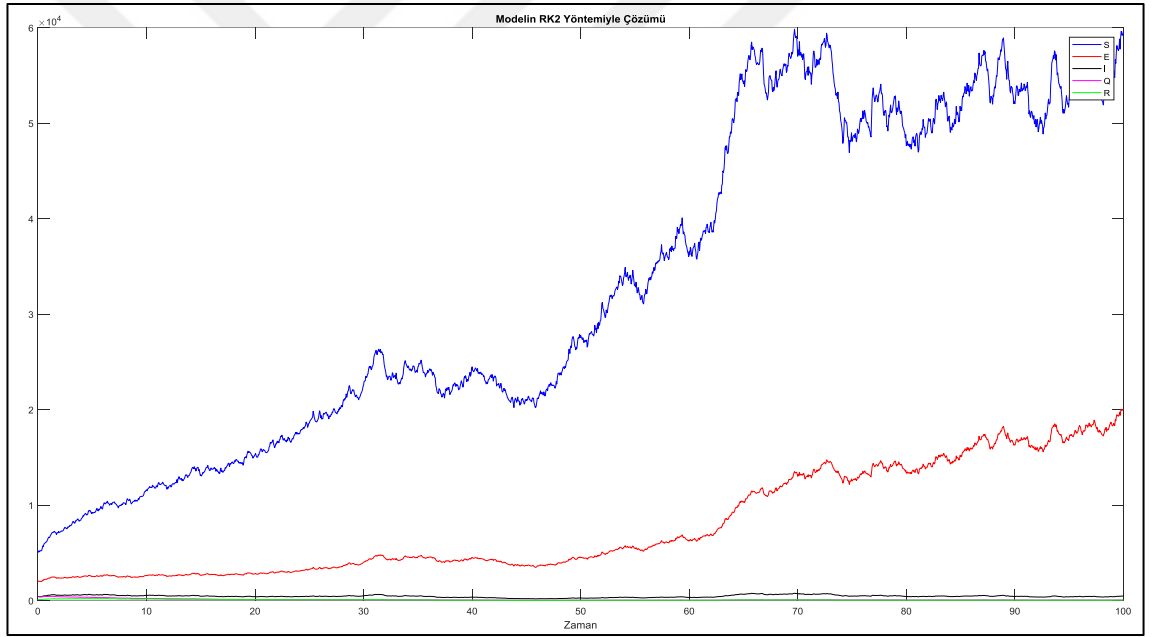


Şekil 43. Stokastik Covid-19 modelinin Milstein Yöntemi ile çözümü

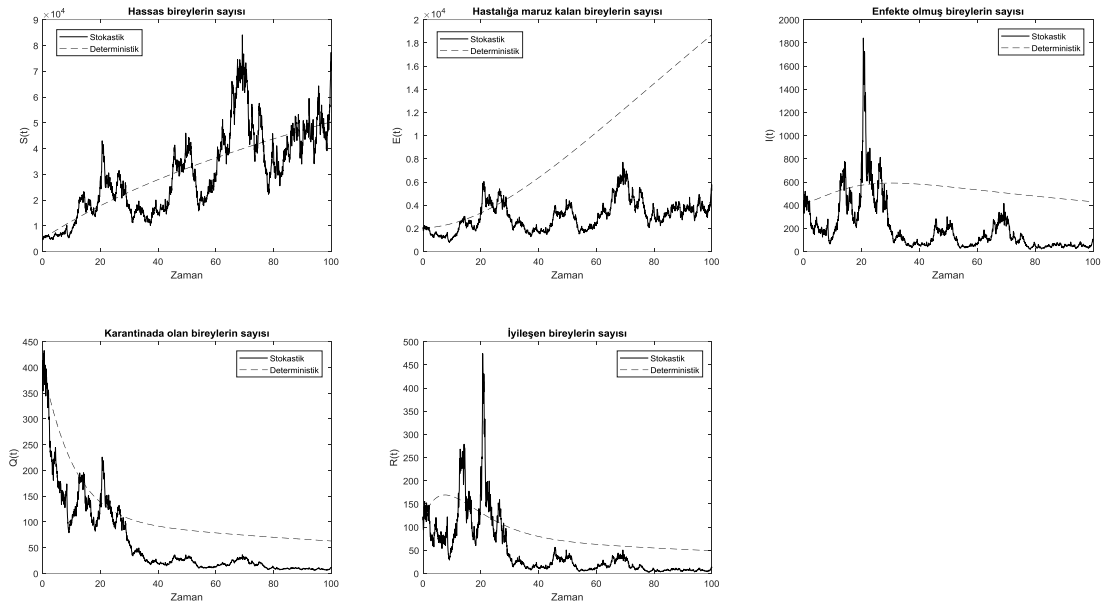
Şimdi aşağıda Covid-19 Modeli için Euler-Maruyama ve Milstein yöntemlerinden daha iyi sonuç veren Runge-Kutta-2 ve Runge-Kutta-4 yaklaşım yöntemleriyle elde edilen simülasyonları gösterilecektir. Bu çözümlerin deterministik çözümle olan paralelliğini inceleme fırsatı sağlanacaktır. Burada $[0,100]$ zaman aralığında h (adım uzunluğu) 0.05 iken elde edilen simülasyonlar gösterilecektir.



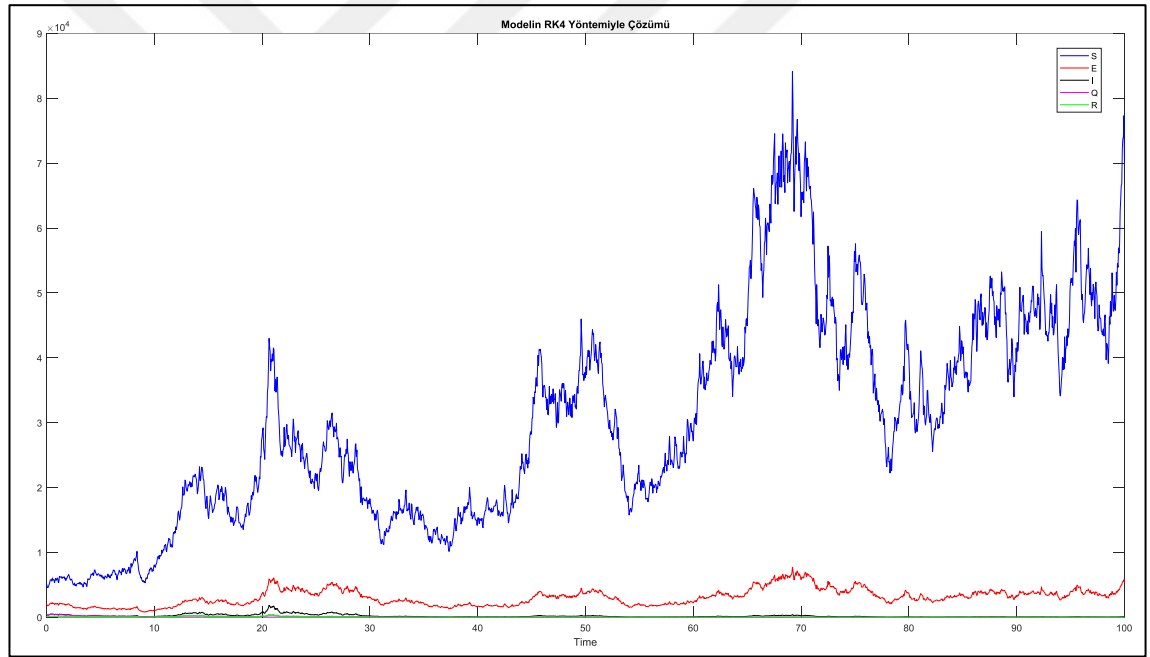
Şekil 44. Stokastik Covid-19 modelinin Runge-Kutta-2 Yöntemi ile çözümü



Şekil 45. Stokastik Covid-19 modelinin Runge-Kutta-2 Yöntemi ile S, E, I, Q, R kompartmanlarının birlikte çözümü.



Şekil 46. Stokastik Covid-19 modelinin Runge-Kutta-4 Yöntemi ile çözümü



Şekil 47. Stokastik Covid-19 modelinin Runge-Kutta-4 Yöntemi ile S, E, I, Q, R kompartmanlarının birlikte çözümü.

2.14. Matematiksel Biyolojide Gecikmeli Diferansiyel Denklemler

Malthus, Verhulst, Lotka ve Volterra bir araya gelerek biyolojik sistemler modelinde basit ve kısmi diferansiyel denklemlerin kullanımıyla uzun yıllar boyunca ilgilenmişlerdir. Çünkü bu modeller karmaşık ve anlaşılmayan olayları daha iyi anlamamız için kullanılmaktadır. Buradan da açıkça anlaşılır ki doğal sistemlerde gözlemlenen zengin dinamik çeşitlilik, basit modellerle yakalanmaz. Bu karmaşıklıklarla ilgilenen çok sayıda yaklaşımlar vardır. Yaklaşımlarla kısmi ve adi diferansiyel

denklemlerin en geniş sistemleri oluşturulabilir. Bu sistemler, gözlemlenen davranışa yaklaşımda oldukça iyi olabilir fakat çok sayıda parametre içerdiğinden deneysel olarak ifade edilmeyen miktarları bulmakta zorluk çekilebilir.

Bu yüzden diğer bir yaklaşım olan diferansiyel denklemlerde zaman gecikmeli terimin eklendiği yaklaşım önemlidir. Gecikme (delay ya da lag) kuluçka dönemleri, gebelik sürelerini temsil edebilir ya da karmaşık biyolojik süreçleri basitçe bir araya getirebilir. Bu modellerin olumsuz tarafı ise karmaşık biyolojik sistemlerin işleyiş ayrıntısını tam olarak ortaya çıkarmaz, halbuki bazen bu işleyişi bilmek daha önemli olabilmektedir. Gecikmeli modeller daha çok biyolojik modellerde daha yaygın kullanım alanına sahiptir. Gecikmeli modeller enfeksiyon hastalık dinamiklerinin birkaçını tanımlamak için kullanılmıştır. Bunlar Birincil enfeksiyon (Ciupe vd., 2006), ilaç tedavisi (Nelson vd., 2000), ve bağışıklık tepkisi (Cooke vd., 1998) bu dinamiklerin bazılarıdır. Gecikmeler aynı zamanda chemostat modelleri (Zhao, 1995), sirkadiyen ritimler (Smalton vd., 2002), salgın hastalık bilimi (Cooke, 1999), solunum sistemi (Vielle ve Chauvet, 1998), tümör büyümesi (Villasana ve Radunskaya, 2003) ve sinir ağları (Campbell vd., 2004) gibi çalışmalarda kullanılmıştır.

Turchin, 1990; Turchin ve Taylor, 1992 tarafından yapılmış çevresel verilerin istatistiksel analizi çoğu insan nüfusu dinamiklerinde de gecikme etkilerinin kullanıldığına dair çalışma kanıtları vardır.

2.14.1. Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Temel Özellikleri

Adi diferansiyel denklemlere görünüş itibari ile benzeyen gecikmeli diferansiyel denklemler daha karmaşık özelliklere sahiptir. Aşağıdaki form bir örnek olarak alınabilir.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau)) \quad (198)$$

Başlangıçta, başlangıç değer problemi gecikmesiz sıradan bir diferansiyel denklemden daha fazla bilgi gerektirir. Adi diferansiyel denklem sistemi için, tek çözüm t_0 başlangıç zamanında Öklid uzayında başlangıç noktası tarafından belirlenir. Gecikmeli diferansiyel denklem sistemi için $[t_0 - \tau, t_0]$ aralığının tamamında tanımlanması gereklidir. Açıkçası t_0 daki değişim oranını bilmek için $x(t_0)$ ve $x(t_0 - \tau)$ ve $x(t_0 + \epsilon)$ için ise $x(t_0 + \epsilon)$ ve $x(t_0 + \epsilon - \tau)$ oranlarını bilmek gerekir. Bu yüzden, başlangıç değer değer problemini anlamlandırmak $[-\tau, 0]$ aralığında bir başlangıç fonksiyonuna yani $x(t)$ 'ye ihtiyaç olacaktır. Bu tür bir başlangıç fonksiyonu bir gecikmeli diferansiyel denklemin tek çözümüdür. Eğer bu sürekli olan başlangıç fonksiyonuna ihtiyaç

duyulursa, o zaman çözüm uzayı $C([t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R})$ dir. Başka bir deyişle çözüm sonsuz boyutludur.

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin bu sonsuz boyutlu olma durumları lineer sistemlerin çalışmasında açıkça görülmektedir. Adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi burada da üstel çözümler aranır ve karakteristik bir denklem hesaplanır. Bir polinom denkleminde ziyade, aşağıdaki formdaki gibi bir denkleme ulaşılır.

$$P_0(\lambda) + P_1(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (199)$$

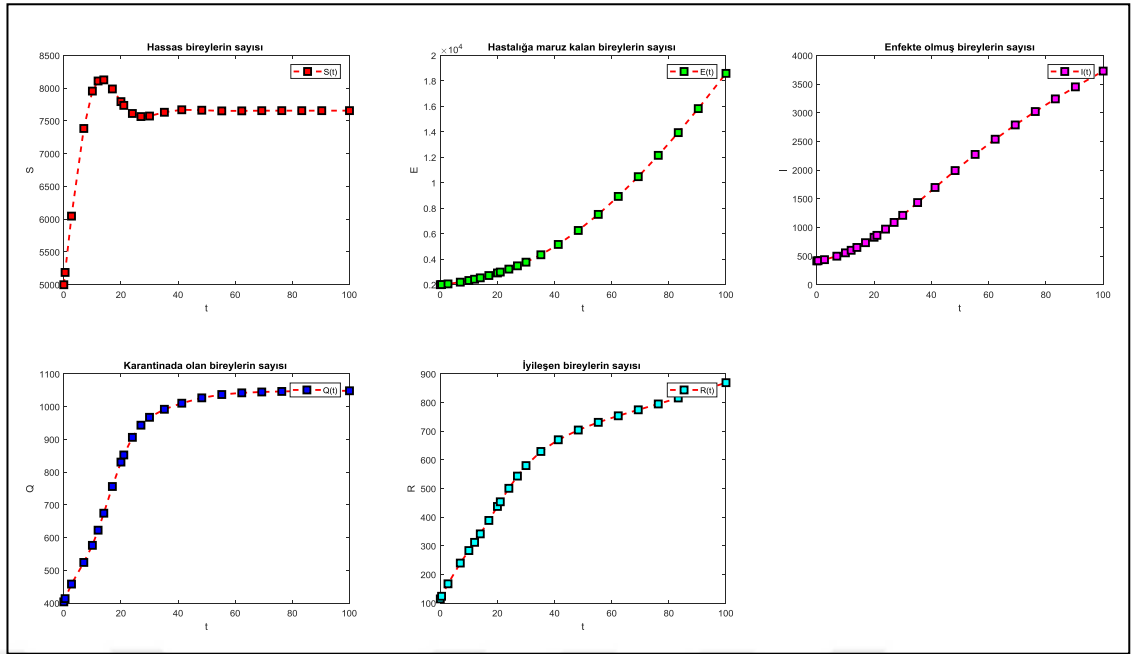
Burada P_0 ve P_1, λ içeren bir polinomdur. Genel olarak bu denklem, lineer diferansiyel denklemin sonsuz bir bağımsız çözüm ailesine karşılık gelen sonsuz sayıda çözüme sahiptir. Lineer kararlılık analizi bu denklem sistemlerinde bu yüzden daha zordur. Bu polinom için standart metotlarla (Routh-Hurwitz kriteri gibi) kararlılık analizi yapılamaz. Bu yüzden sisteme gecikme (delay) terimleri ekleyerek sistemi incelemek bu bölümde çözümler için yardımcı olacaktır.

2.14.2. Zaman Gecikmeli (Delay) Covid-19 Modeli

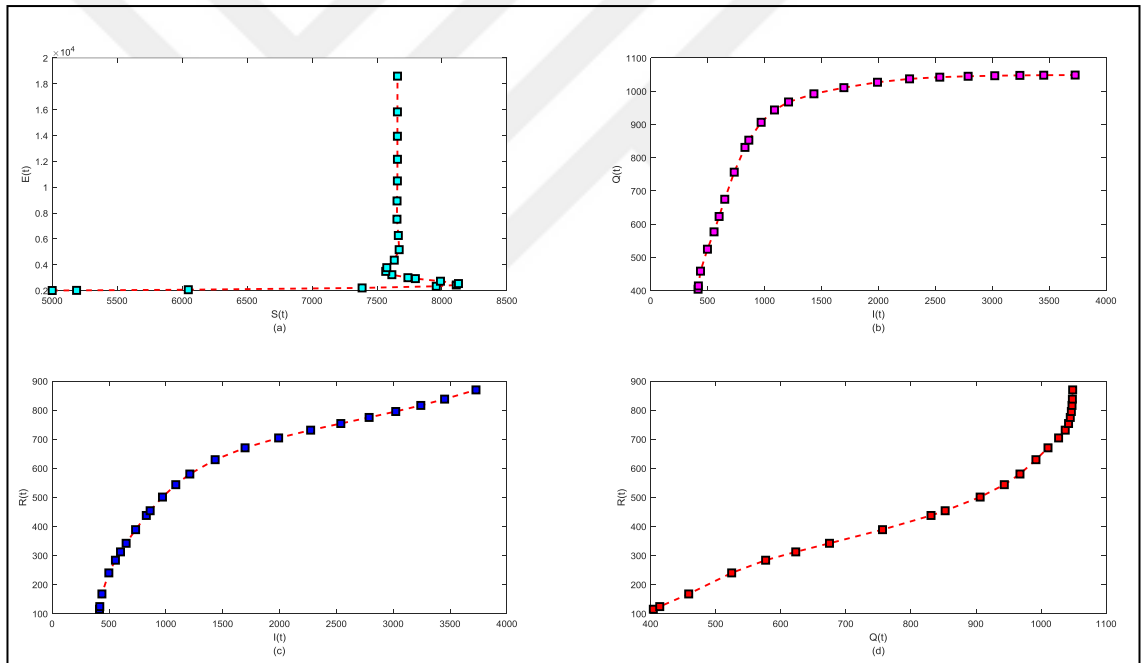
(11) modeline τ_1 ve τ_2 zaman gecikmesi eklenerek elde edilen zaman gecikmeli (delay) Covid-19 modeli aşağıdaki gibidir. Gecikme terimi enfeksiyonlu bireylere eklenmiştir.

$$\begin{aligned} S'(t) &= \Lambda - \phi_c SI(t - \tau_1) - \mu S + v_3 R \\ E'(t) &= \phi_c IS - (\sigma + \mu) E \\ I'(t) &= \tau E - (\alpha + v_2 + \delta + \mu) I + v_1 \\ Q'(t) &= \alpha I(t - \tau_1) - (\theta + \mu) Q \\ R'(t) &= \theta Q - (v_1 + v_3 + \mu) R + v_2 I(t - \tau_2) \end{aligned} \quad (200)$$

Bu modelde $\tau_1 = 7, \tau_2 = 10$ alınarak çözümler aşağıdaki gibi bulunmuş olur.

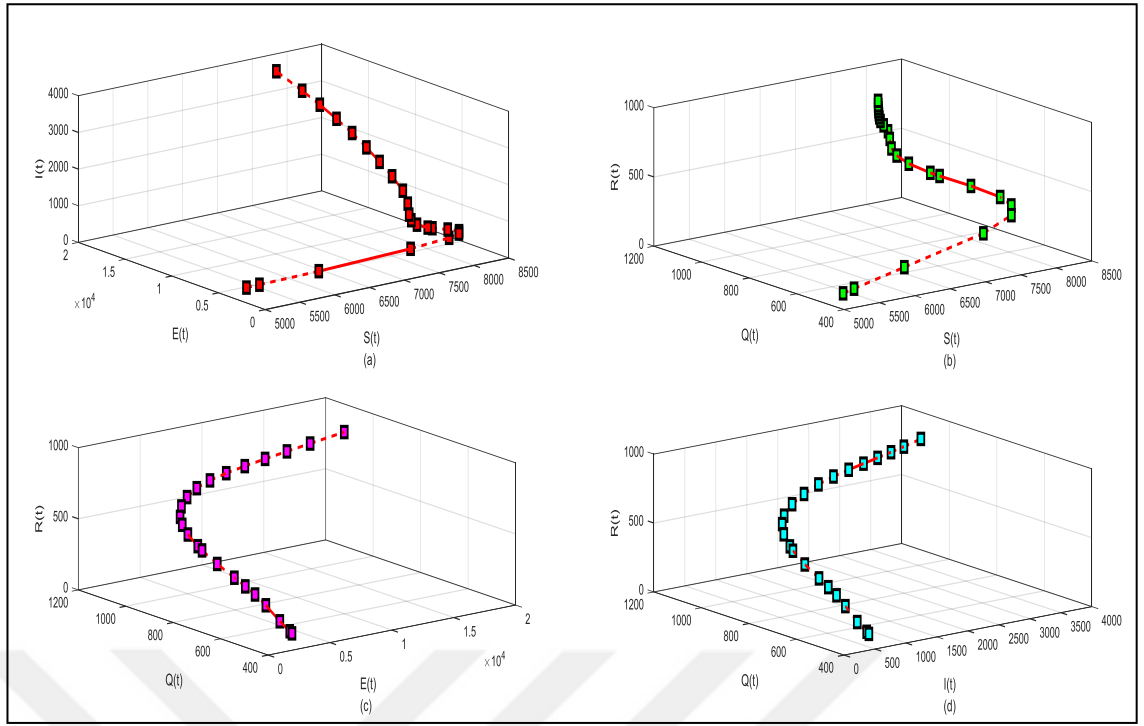


Şekil 48. Gecikmeli Covid-19 Modelinin kompartmanlarının zamana bağlı değişimi



Şekil 49. Gecikmeli Covid-19 Modelinin faz diyagramı

Grafiklerden görüldüğü gibi Hassas bireyler arttıkça hastalığa maruz kalan bireyler bir zamana kadar sabit kalıp daha sonra hassas bireyler sabit kaldığında hastalığa maruz kalan bireyler artış göstermektedir (a), enfekte olan bireyler arttıkça karantinada olan bireyler önce artış göstermiş olup sonra sabit ilerlemektedir (b), enfekte olmuş bireyler arttıkça iyileşen bireyler de artmaktadır (c), karantinada olan bireyler arttıkça iyileşen bireylerin de arttığı gözlemlenmektedir (d).



Şekil 50. Gecikmeli Covid-19 Modelinin faz portresi

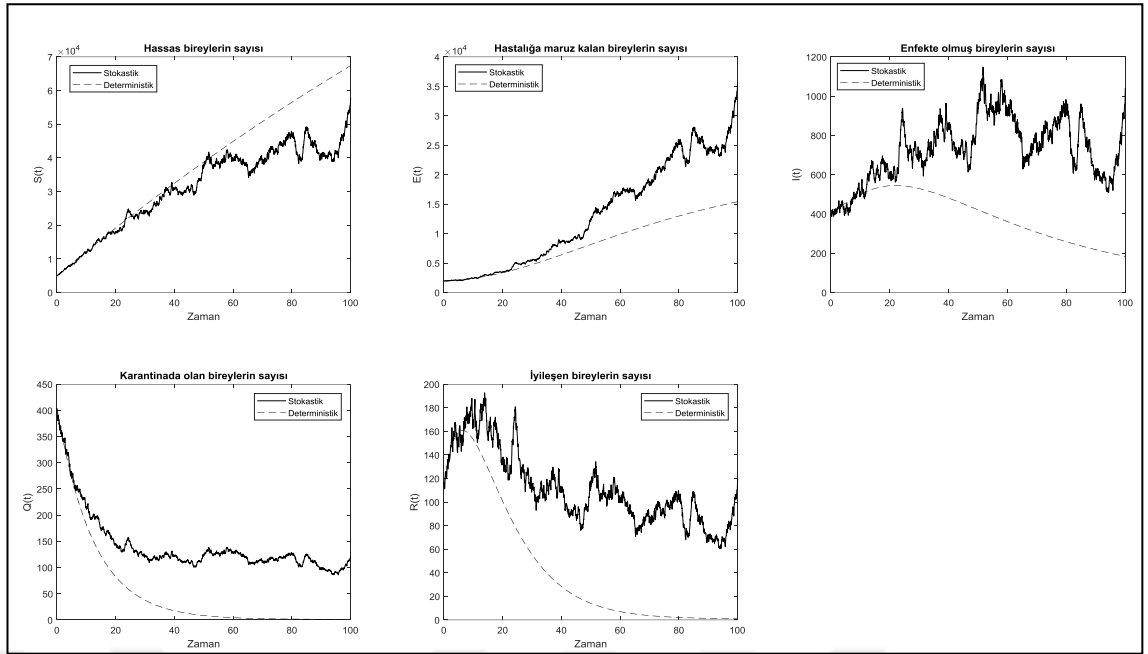
2.14.3. Zaman Gecikmeli Stokastik Covid-19 Modeli

$N(t)$ t zamandaki toplam popülasyon, $S(t)$ hastalığa duyarlı insanlar, $E(t)$ hastalığa maruz kalan insanlar, $I(t)$ Cov-19 ile enfekte olan insanlar, $Q(t)$ karantinada olan insanlar ve $R(t)$ iyileşen insanlar olarak verilmiştir. Modifiye edilmiş Covid-19 zaman gecikmeli stokastik diferansiyel denklem (DDEs) aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
 S'(t) &= \Lambda - \phi_c S(t)I(t - \tau_1) - \mu S(t) + v_3 R(t) + Y_1 S(t) dW_1(t) \\
 E'(t) &= \phi_c I S - (\sigma + \mu) E + Y_2 S(t) dW_2(t) \\
 I'(t) &= \tau E - (\alpha + v_2 + \delta + \mu) I + v_1 + Y_3 S(t) dW_3(t) \\
 Q'(t) &= \alpha I(t - \tau_1) - (\theta + \mu) Q + Y_4 S(t) dW_4(t) \\
 R'(t) &= \theta Q - (v_1 + v_3 + \mu) R + v_2 I(t - \tau_2) + Y_5 S(t) dW_5(t)
 \end{aligned} \tag{201}$$

Burada $W_i(t)$; $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ler serbest Brownian ya da gürültü hareketleri (Wiener süreçleri)dir. Y_i^2 ; $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ve $Y_i > 0$ ise çevresel dış beyaz gürültülerin yoğunluğudur.

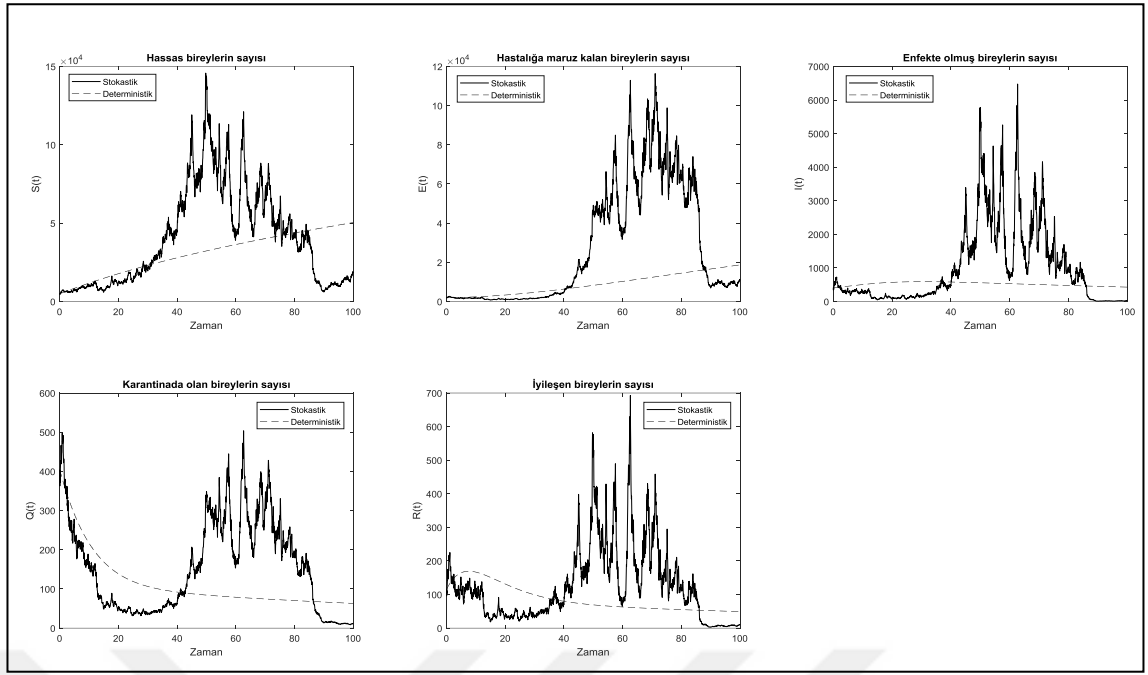
Stokastik Zaman Gecikmeli (Delay) Covid-19 modelinin ikinci ve dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile çözümleri sonucu elde edilen simülasyonlar aşağıda verilmiştir. Bu modelde $\tau_1 = 7, \tau_2 = 10$ alınarak çözümler aşağıdaki gibi bulunmuş olur.



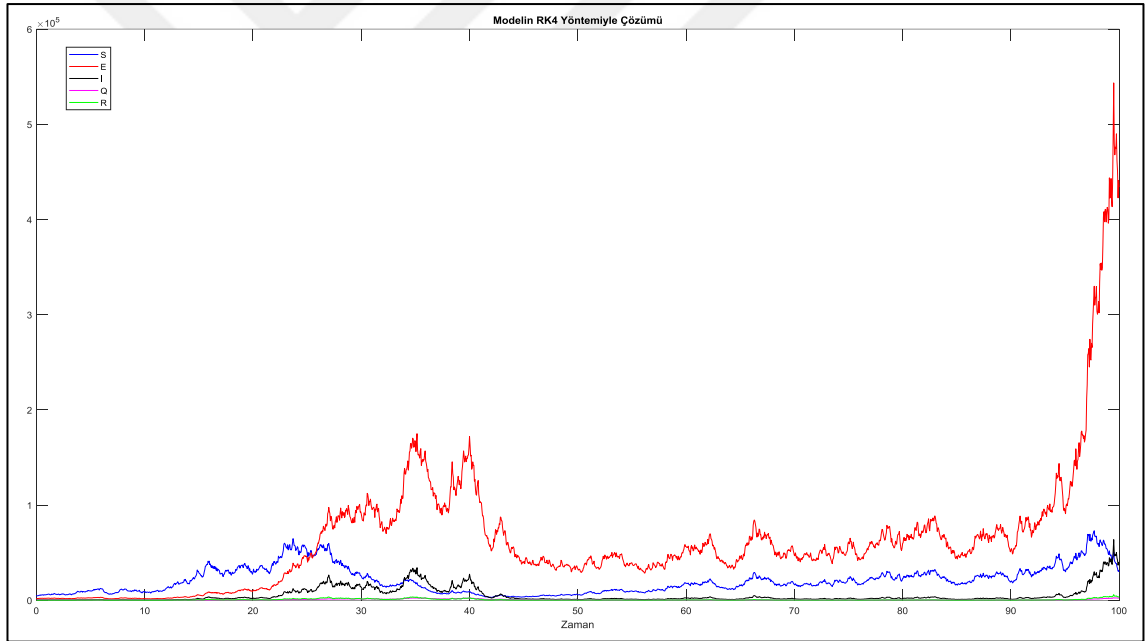
Şekil 51. Stokastik Gecikmeli Covid-19 modelinin Runge-Kutta-2 Yöntemi ile çözümü



Şekil 52. Stokastik Gecikmeli Covid-19 modelinin Runge-Kutta-2 Yöntemi ile S, E, I, Q, R kompartmanlarının birlikte çözümü.



Şekil 53. Stokastik Gecikmeli Covid-19 modelinin Runge-Kutta-4 Yöntemi ile çözümü



Şekil 54. Stokastik Gecikmeli Covid-19 modelinin Runge-Kutta-4 Yöntemi ile S, E, I, Q, R kompartmanlarının birlikte çözümü.

3. İRDELEME

Bu tez çalışmasında elde edilen bulgular doğrultusunda, Covid-19'un kesirli türevler kullanılarak oluşturulan salgın modelinin dinamikleri incelenmiştir. Önerilen model, konformable (uyumlu) türev kavramını temel almakta olup, kesirli türevlerin tekdüze ve evrensel nitelikleri sayesinde çeşitli pratik problemlerin çözümünde sağladığı avantajlardan yararlanmaktadır. Modelin yaklaşık çözümlerini elde etmek amacıyla, uyumlu diferansiyel dönüşüm yöntemi ve varyasyonel yineleme yöntemi olmak üzere iki farklı sayısal yaklaşım kullanılmıştır.

Covid-19'un matematiksel modeli, göç, önleme stratejileri, ölüm oranı, maruziyet, tedavi süreci ile enfekte ve sağlıklı bireyler arasındaki etkileşimlerin nüfus üzerindeki etkilerini dikkate alarak analiz edilmiştir. Çalışmada, toplum beş kategoriye ayrılmıştır: maruz kalan, savunmasız, yayıcı, karantinaya alınan ve iyileşen bireyler. Modelin hem sayısal hem de kesirli analizleri gerçekleştirilmiştir. Sayısal analizlerde standart dışı sonlu farklar (NSFD) yöntemi, kesirli analizlerde ise Grunwald–Letnikov dijital metodolojisi uygulanmıştır.

Bunlara ek olarak, zaman kesirli mertebeden Covid-19 modeli için yaklaşık analitik çözümler elde etmek amacıyla q -homotopi analiz dönüşümü (q -HATM) ve Laplace dönüşümü homotopi pertürbasyon yöntemi (LT-HPM) kullanılmıştır. Covid-19 modeli, beş boyutlu doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemlerden oluşan bir sistem şeklinde tasarlanmış, Caputo kesirli türevi yardımıyla genelleştirilmiş ve Laplace dönüşümü uygulanarak yaklaşık çözümler elde edilmiştir.

Ayrıca, modele stokastik terimler eklenerek stokastik Covid-19 modeli oluşturulmuş ve bu model Euler–Maruyama (EM), Milstein ve dördüncü mertebe Runge-Kutta (RK4) yöntemleri ile çözülerek analiz edilmiştir. Son aşamada ise, zaman gecikmeli stokastik Covid-19 modelinin çözümleri incelenmiştir.

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tez çalışmasında, Covid-19 salgınının dinamiklerini açıklamak amacıyla kesirli türev kavramına dayalı yeni matematiksel modeller geliştirilmiş ve bu modellerin farklı analitik ve sayısal yöntemlerle çözümleri araştırılmıştır. Çalışmada, klasik türevlerin ötesine geçen kesirli türevlerin özellikle biyolojik süreçlerde ortaya çıkan belirsizlik, hafıza etkisi ve uzun menzilli bağımlılık gibi özellikleri daha iyi yansıttığı ortaya konulmuştur.

Öncelikle, konformable türev yaklaşımı kullanılarak kesirli Covid-19 modeli oluşturulmuş ve bu modelin yaklaşık çözümleri uyumlu diferansiyel dönüşüm yöntemi ile varyasyonel yineleme yaklaşımı yardımıyla elde edilmiştir. Bu yöntemlerin hem analitik hem de nümerik çözümler için etkili ve hızlı bir şekilde uygulanabilir olduğu görülmüştür.

Sayısal analizlerde, standart dışı sonlu fark (NSFD) yöntemi ve Grunwald-Letnikov yaklaşımı kullanılarak modelin kesirli mertebeye sahip versiyonlarının çözümleri incelenmiş; bu yöntemlerin özellikle uzun dönemli dinamikleri yakalamada ve çözümün kararlılığını korumada avantaj sağladığı tespit edilmiştir. Ayrıca q-homotopi analiz dönüşüm yöntemi (q-HATM) ile Laplace dönüşümü homotopi bozulma yöntemi (LT-HPM) kullanılarak zaman kesirli mertebeli Covid-19 modelinin yaklaşık analitik çözümleri türetilmiştir. Bu sonuçlar, kullanılan yöntemlerin çözüm doğruluğu ve yakınsama hızları bakımından birbirini tamamlayıcı özellikler taşıdığını göstermektedir.

Çalışmada ayrıca Caputo kesirli türevine dayalı bir sistem kurulmuş ve Laplace dönüşümü kullanılarak bu sistemin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Bu yaklaşım, modelin daha geniş bir matematiksel çerçevede ele alınmasını sağlamış ve çözümün genel davranışlarının ayrıntılı incelenmesine olanak tanımıştır.

Bunun yanı sıra, modele stokastik terimler eklenerek salgının rastlantısal doğası dikkate alınmıştır. Elde edilen stokastik Covid-19 modeli Euler-Maruyama, Milstein ve RK4 yöntemleri ile çözümlenmiş ve çözümler karşılaştırmalı olarak analiz edilmiştir. Bu yöntemlerin, özellikle rastgelelikten kaynaklanan belirsizlikleri modellemede farklı hassasiyetler sunduğu gözlemlenmiştir. Son aşamada, zaman gecikmeli stokastik Covid-19 modeli geliştirilmiş ve gecikme etkilerinin salgın dinamikleri üzerindeki kritik rolü vurgulanmıştır. Tüm bu bulgular bir araya getirildiğinde, kesirli türevlerin Covid-19 ve benzeri epidemiyolojik modellerde güçlü bir araç olduğu; nüfus dinamiklerini, bulaşma

süreçlerini ve belirsizlikleri klasik modellerden daha doğru yansıttığı sonucuna varılmıştır. Çalışma, yalnızca Covid-19 özelinde değil, genel olarak epidemik hastalıkların modellenmesinde kesirli ve stokastik yaklaşımların daha geniş ölçekte kullanılabileceğini göstermektedir.

Bu tez, epidemiyolojik modelleme literatürüne hem metodolojik hem de uygulamalı açıdan katkı sunmakta; gelecekte, daha büyük ölçekli epidemik verilerin analizinde, parametre optimizasyonunda ve politika belirleme süreçlerinde kullanılabilecek sağlam matematiksel ve sayısal bir çerçeve önermektedir. HPM gibi farklı sayısal-analitik yöntemler uygulanmış ve karşılaştırmalı analizleri yapılmıştır.



5. ÖNERİLER

Bu çalışmada kullanılan kesirli türev yaklaşımları, ileride farklı bulaşıcı hastalık modellerine uygulanarak genelleştirilebilir. Modelde ele alınan parametreler (göç, tedavi, karantina vb.) gerçek epidemiyolojik verilerle kalibre edilerek daha gerçekçi tahminler elde edilebilir. Stokastik terimler farklı dağılımlar kullanılarak modellenabilir ve sonuçların duyarlılık analizi yapılabilir. Zaman gecikmeli stokastik modeller daha karmaşık sosyal davranış dinamiklerini içerecek biçimde geliştirilebilir. Kullanılan sayısal yöntemler, yüksek boyutlu problemlere ölçeklenerek hesaplama verimlilikleri karşılaştırılabilir. Farklı kesirli türev tanımları (Atangana–Baleanu, Caputo-Fabrizio vb.) aynı modele uygulanarak sonuçlar kıyaslanabilir. Modelin çıktıları sağlık politikası planlamasında (aşılama, karantina, sosyal mesafe stratejileri) kullanılabilir. Hesaplama hızını artırmak için paralel hesaplama veya yapay zekâ tabanlı yaklaşımlar kullanılabilir. Kesirli modellerin doğruluğu, klasik deterministik modellerle sahadan toplanan epidemiyolojik veriler üzerinde test edilmelidir. Bu çalışma, ileri araştırmalarda iklim, çevre ve sosyo-ekonomik faktörler eklenerek daha bütüncül modellerin geliştirilmesine temel oluşturabilir.

KAYNAKÇA

- Abbasbandy, S. (2006). Numerical solutions of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 173(1), 493-500.
- Abbasbandy, S. Hashemi, M.S. ve Hashim, I (2013). On convergence of homotopy analysis method and its application to fractional integro-differential equations. *Quaestiones Mathematicae*, 36(1),93-105.
- Abbey, H. (1952). An examination of the ReedFrost theory of epidemics. *Human Biology*, 24(3), 201.
- Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.
- Abioye, A. I., Peter, O. J., Ogunseye, H. A., Oguntolu F. A., Oshinubi, K., Ibrahim A. A. ve Khan I. (2021). Mathematical model of Covid-19 in Nigeria with optimal control. *Result in Physics*, 28, 104598.
- Abou-Ismaïl, A. (2020). Compartmental models of the COVID-19 pandemic for physicians and physician scientists. *SN Comprehensive Clinical Medicine*, 1.
- Abu Arqub, O., El-Ajou, A., Bataineh, A. S. ve Hashim, I. (2013) A representation of the exact solution of generalized lane-emden equations using a new analytical method. *Abstract and Applied Analysis*, 2013(11).
- Ahmad, S. ve Saifullah, S. (2023). Analysis of the seventh-order Caputo fractional KdV equation: Applications to the Sawada-Kotera-Ito and Lax equations. *Communications in Theoretical Physics*, 75, 085002.
- Ahmad, S., Qiu, D. ve Rahman, M. Ur. (2022). Dynamics of a fractional-order COVID-19 model under the nonsingular kernel of Caputo-Fabrizio operatör. *Mathematical Modelling and Numerical Simulation with Applications*, 2(4), 228-243.
- Akinyemi, A. I. ve Isiugo-Abanihe, U. C. (2014). Demographic dynamics and development in Nigeria. *African Population Studies*, 27, 239-248.
- Akpınar, İ. Ö. (2012). Ülkemizve dünya denizlerinde koruma altındaki denizati popülasyonlarının mevcut durumu. *Aquaculture Studies*, 2012(2), 24-31.
- Allen, L. J. S. (2007). *An Introduction to mathematical biology, department of mathematics and statistics*. Texas: Texas Tech University, 348.
- Allman, E. S. ve Rhodes, J. A. (2004) *Mathematical models in biology: An introduction*. New York: Cambridge University Press.

- Alqarni, M. S., Alghamdi, M., Muhammad, T., Alshomrani, A. S. ve Khan, M. A. (2020). Mathematical modeling for novel coronavirus (COVID-19) and control. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 26-38(4), 760-776.
- Anaç, H., Merdan, M. ve Bekiryazıcı, Z. (2019). Global stability in a pathogen-specific Cd8 immune response prediction model. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 10, 325-42.
- Anderson, R. M. (2013). *The population dynamics of infectious diseases: Theory and applications*. London: Springer.
- Anderson, R. M. ve May, R. M. (1991). *Infectious diseases of humans: Dynamics and control*. Oxford: Oxford University Press.
- Anguelov, R. ve Lubuma, J. S. (2001). Contributions to the mathematics of the nonstandard finite difference method and applications. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 17(5), 518-543,
- Anguelov, R., Lubuma, J. S. ve Mahudu S., (2003). Qualitatively stable finite difference schemes for advection-reaction equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 158, 19-30,
- Araz, S. I. (2021). Analysis of a COVID-19 model: optimal control, stability and simulations. *Alexandria Engineering Journal*, 60(1), 647-658
- Arenasa, J. A., Parrab, G. G. ve Chen-Charpentier, B. M. (2011). Construction of nonstandard finite difference schemes for the SI and SIR epidemic models of fractional order. *Mathematics and Computers in Simulation*, 121, 48-63.
- Atangana, A. ve Araz, S. I. (2020). Mathematical model of COVID-19 spread in Turkey and South Africa: theory methods and applications. *medRxiv*, <https://doi.org/10.1101/2020.05.08.20095588>.
- Atangana, A. ve Baleanu, D. (2018). New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model. *arXiv preprint arXiv*, 1602. 03408.
- Atangana, A. ve Jain, S. (2018). A new numerical approximation of the fractal ordinary differential equation. *The European Physical Journal Plus*, 133(2), 1-15.
- Atangana, A. ve Jain, S. (2020). Models of fluid flowing in non-conventional media: new numerical analysis. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*, 13(3), 467.
- Atangana, A. ve Koca, I. (2016). Chaos in a simple nonlinear system with Atangana-Baleanu derivatives with fractional order. *Chaos Solitons Fractals*, 89, 447-454.

- Atede, A. O., Omame, A. ve Inyama, S. C. A. (2023). Fractional order vaccination model for COVID-19 incorporating environmental transmission: A case study using Nigerian data. *Bulletin of Biomathematics*, 1(1), 78-110,
- Awais, M., Alshammari, F. S., Ullah, S., Khan, M. A. ve Islam, S. (2020). Modeling and simulation of the novel coronavirus in Caputo derivative. *Results in Physics*, 103588.
- Bailey, T. J. (1975). *The mathematical theory of infectious diseases and its application*. New York: Hafner Press.
- Baleanu, D., Jajarmi, A., Bonyah, E. ve Hajipour, M. (2018). New aspects of poor nutrition in the life cycle within the fractional calculus. *Advances in Difference Equations*, (1), 1.
- Baleanu, D., Jajarmi, A., Mohammadi, H. ve Rezapour, S. (2020). A new study on the mathematical modelling of human liver with Caputo-Fabrizio fractional derivative. *Chaos Solitons Fractals*, 134, 109705.
- Baleanu, D., Zibaei, S., Namjoo, M. ve Jajarmi, A. (2021). A Nonstandard finite difference scheme for the modeling and nonidentical synchronization of a novel fractional chaotic system. *Advances in Difference Equations*, 308(1), 19.
- Bekiryazici, Z. (2017). *Bazı kompartmanlı modellerin rastgele etkiler altında incelenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.
- Bîrs, I., Muresan, C., Nascu, I. ve Ionescu, C. (2009). A survey of recent advances in fractional order control for time delay systems. *IEEE Access*, (99), 1-1.
- Bildik, N. (2017). General convergence analysis for the perturbation iteration technique. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 6, 1-9.
- Brauer, F. ve Castillo-Chavez, C. (2012). *Mathematical models in population biology and epidemiology*. (2. Baskı). New York: Springer.
- Breda, D., Diekmann, O., de Graaf, W. F., Pugliese, A. ve Vermiglio, R. (2012). On the formulation of epidemic models (An appraisal of Kermack and McKendrick). *Journal of Biological Dynamics*, 6(2), 103-117.
- Brown, R. (1828). A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August 1827 on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Philosophical Magazine*, 4, 161–173.
- Campbell, S. A. Edwards, R. ve van den Driessche, P. (2004). Delayed coupling between two neural network loops. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 65(1), 316-335.

- Caputo, M. (1969). *Elasticita e dissipazione*. Bologna: Zanichelli
- Caputo, M. ve Fabrizio, M. A. (2015). New definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation & Applications*, 1(2), 73-85.
- Carvalho, A. R. ve Pinto, C. M. (2018). Non-integer order analysis of the impact of diabetes and resistant strains in a model for TB infection. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 61, 104-126
- Channappanavar, R. ve Perlman, S. (2017). Pathogenic human coronavirus infections: causes and consequences of cytokine storm and immunopathology. *Semin Immunopathol*, 39(5), 529-39.
- Chen, L., Chai, Y., Wu, R., Ma, T. ve Zhai H. (2013). Dynamic analysis of a class of fractional-order neural networks with delay. *Neurocomputing*, 111(2), 190-194.
- Chen, Y., Liu F., Yu Q. ve Li T. (2021). Review of fractional epidemic models. *Applied Mathematical Modelling*, 97, 281-307.
- Chung, W. S. (2015) Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 290, 150-158.
- Ciupe, S. M., de Bivort, B. L., Bortz, D. M. ve Nelson, P. W. (2006). Estimates of kinetic parameters from HIV patient data during primary infection through the eyes of three different models. *Mathematical Biosciences*, 200(1), 1-27.
- Cooke, K. L., van den Driessche, P. ve Zou, X. (1999). Interaction of maturation delay and nonlinear birth in population and epidemic models. *Journal of Mathematical Biology*, 39, 332-352, 1999.
- Cooke, K., Kuang, Y. ve Li, B. (1998). Analyses of an antiviral immune response model with time delays. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, 6(4), 321-354.
- Cui, J., Li, F. ve Shi, Z. L. (2019). Origin and evolution of pathogenic coronaviruses. *Nature Reviews Microbiology*, 17(3), 181-92
- Çakır, Z. ve Savaş, H. B. (2020). A mathematical modelling approach in the spread of the novel 2019 coronavirus SARS-CoV-2 (COVID-19) pandemic. *Electronic Journal of General Medicine*, 17(4), 205.
- Çetin, E., Kiremitci, B. ve Yurt, İ. D. (2009). Matematiksel epidemiyoloji: Pandemik A/H1N1 gribi vakası. *İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi Dergisi*, 38(2), 197-209.
- Dalir, M. ve Bashour, M. (2010). Applications of fractional calculus. *Applied Mathematical Sciences*, 4(21), 1021-1032.

- Dang, Q. A. ve Hoang, M. T. (2018). Lyapunov direct method for investigating stability of nonstandard finite difference schemes for metapopulation models. *Journal of Difference Equations and Applications*, 24(1), 15-47.
- Dang, Q. A. ve Hoang, M. T. (2020). Numerical dynamics of nonstandard finite difference schemes for a computer virus propagation model. *International Journal of Dynamics and Control*, 8(3), 772-778.
- Diethelm, K. ve Freed, A. D. (1998). *The FracPECE subroutine for the numerical solution of differential equations of fractional order*. Forschung und wissenschaftliches Rechnen 1999 içinde (ss. 57-71). Cleveland: NASA Lewis Research Center.
- EI-Shahed, M. ve Alsaedi, A. (2011). The fractional SIAC model and influenza a. *Mathematical Problems in Engineering*, 4, 480378.
- Esen, A, Taşbozan, O and Yağmurlu, N.M.(2012). Approximate Analytical Solutions of the Fractional Sharma-Tasso-Olver Equation Using Homotopy Analysis Method and a Comparison with Other Methods. *Çankaya University Journal of Science and Engineering* ,9(2), 139-147.
- Esen, A, Yağmurlu, N.M ve Taşbozan, O. (2013). Approximate analytical solution to time-fractional damped Burger and Cahn-Allen equations. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 7(5), 1951-1956.
- Evirgen, F., Özköse, F., Yavuz, M. ve Özdemir, N. (2023). Real data-based optimal control strategies for assessing the impact of the Omicron variant on heart attacks. *AIMS Bioengineering*, 10(3), 218-239.
- Fanelli, D. ve Piazza, F. (2020). Analysis and forecast of COVID-19 spreading in China, Italy and France. *Chaos Solitons Fractals*, 134, 109761.
- Forde, Kieran. (2005). *A corpus-based lexico-grammatical analysis of the Limerick Corpus of Irish English (L-CIE): Some nominal and verbal features*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Limerick Üniversitesi, İrlanda.
- Hamer, W. H. (1906) The milroy lectures on epidemic disease in England-The evidence of variability and persistence of type. *The Lancet Infectious Diseases*, 1, 733-739.
- Hanert, E. (2010). A comparison of three Eulerian numerical methods for fractional-order transport models. *Environmental Fluid Mechanics*, 10, 7-20.
- Hanert, E. ve Schumacher, E. (2011). Front dynamics in fractional-order epidemic modes. *Journal of Theoretical Biology*, 279, 9-16.
- He, J. H. (2006). Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations. *International Journal of Modern Physics B*, 20(10), 1141-1199.

- He, Q., Rahman, M. ve Xie, C. (2023). Information over flow between monetary policy transparency and inflation expectations using multivariate stochastic volatility models. *Applied Mathematics in Science and Engineering*, 31(1), 2253968.
- Hethcote, H. W. (2000). The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*, 42(4), 599-653.
- Hethcote, H., Zhien, M. ve Shengbing, L. (2002). Effects of quarantine in six endemic models for infectious diseases. *Mathematical Biosciences*, 180, 141160.
- Huang, C., Wang, Y., Li, X., Ren, L., Zhao, J. ve Hu, Y. (2020). Clinical features of patients infected with 2019 novel coronavirus in Wuhan, China. *The Lancet Infectious Diseases Infectious Diseases*, 395(10223), 497-506.
- Hui, D. S., Azhar, E. I., Kim, Y. J., Memish, Z. A., Oh, M. D. ve Zumla, A. (2018). Middle East respiratory syndrome coronavirus: Risk factors and determinants of primary, household, and nosocomial transmission. *The Lancet Infectious Diseases Infectious Diseases*, 18(8), 217-227.
- Inokuti, M. (1978). General use of the lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics *Variational Method in the Mechanics of Solids*, (S. Nemat-Nassed, Edt.) içinde (ss. 156-162), Oxford: Pergemon Press.
- Itô, K. (1951). On stochastic differential equations. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 4, 1-51.
- Ivorra, B., Ferrandez, M. R. vela-Perez, M. ve Ramos, A. (2020). Mathematical modeling of the spread of the coronavirus disease 2019 (COVID-19) taking into account the undetected infections. The case of China. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 88, 105303.
- Jacobs, B. A. (2015). A New Grünwald-Letnikov derivative derived from a second-order scheme. *Abstract and Applied Analysis*, 952057, 9.
- Jain, S. (2018). Numerical analysis for the fractional diffusion and fractional Buckmaster equation by the two-step Laplace Adam-Bashforth method. *The European Physical Journal Plus*, 133(1), 1-11.
- Jones, D. S. ve Sleeman, B. D. (2003). *Differential equations and mathematical biology*. New York: Chapman and Hall/CRC.
- Joshi, H. ve Yavuz, M. (2023). Transition dynamics between a novel coinfection model of fractional-order for COVID-19 and tuberculosis via a treatment mechanism. *The European Physical Journal Plus*, 138(5), 468.

- Joshi, H., Yavuz, M., Townley, S. ve Jha, B. K. (2023). Stability analysis of a non-singular fractional-order covid-19 model with nonlinear incidence and treatment rate. *Physica Scripta*, 98(4), 045216.
- Kampf, G., Todt, D., Sfaender, S. ve Steinmann, E. (2020). Persistence of coronaviruses on inanimate surfaces and their inactivation with biocidal agents. *Journal of Hospital Infection*, 105(3), 587.
- Kamrujjaman, M., Sinje, S. S., Nandi, T. R., Islam, F., Rahman, M. A., Akhi, A. A., ... Alam, M. S. (2024). The impact of the COVID-19 pandemic on education in Bangladesh and its mitigation. *Bulletin of Biomathematics*, 2(1), 57-84.
- Kermack, W. O. ve McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics: Proceedings of the royal society of London. *Series A, Containing Papers Of A Mathematical and Physical Character*, 115(772), 700-721.
- Khalil, R., Horani, M. A., Yousef, A. ve Sababhehb, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational Mathematics*, 264, 65-70.
- Khan, A., Gomez-Aguilar, J. F., Khan, T.S. ve Khan, H. (2019). Stability analysis and numerical solutions of fractional order HIV/AIDS model. *Chaos, Solitons & Fractals*, 122, 119-128.
- Khan, H., Alam, K., Gulzar, H., Etemad, S. ve Rezapour, S. (2022). A case study of fractal fractional tuberculosis model in China: Existence and stability theories along with numerical simulations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 198, 455-473.
- Khan, H., Alzabut, J., Shah, A, He, Z. Y., Etemad, S., Rezapour, S. ve Zada A. (2023). On fractal fractional waterborne disease model: A study on theoretical and numerical aspects of solutions via simulations. *Fractals*, 31(3), 2340055.
- Khan, M. A. ve Atangana, A. (2020). Modeling the dynamics of novel coronavirus (2019-nCoV) with fractional derivative. *Alexandria Engineering Journal*, 59(4), 2379-2389
- Khan, M. A., Atangana, A., Alzahrani, E. ve Fatmawati, F. (2020). The dynamics of COVID-19 with quarantined and isolation. *Advances in Difference Equations*, (1), 1.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. ve Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. Amerika Birleşik Devletleri: Elsevier Science.
- Kizito, M. ve Tumwiine, J. (2018). A mathematical model of treatment and vaccination interventions of pneumococcal pneumonia infection dynamics. *Journal of Applied Mathematics*, 1, 2539465.

- Kocabiyik, M. ve Ongun, M. Y. (2021). Construction a distributed order smoking model and its nonstandard finite difference discretization. *AIMS Mathematics*, 7(3), 4636-4654.
- Kocabiyik, M., Özdoğan, N. ve Ongun, M. Y. (2020). Nonstandard finite difference scheme for a computer virus model. *Journal of Innovative Science and Engineering*, 4(2), 96-108.
- Kojabad, E. A. ve Rezapour, S. (2017). Approximate solutions of a sum-type fractional integro-differential equation by using Chebyshev and Legendre polynomials. *Advances in Difference Equations*, (1), 1.
- Köksal, S. S. (2008). *Epidemiyoloji: Halk sağlığı ders kitabı*. (Baltaş, Z., Edt). İstanbul: İstanbul Üniversitesi Yayınları, 46-144.
- Kucharski, A. J., Russel, T. W., Diamond, C., Liu, Y., Edmunds, J., Funk, S., Eggo, R. M. (2020). Early dynamics of transmission and control of COVID-19: a mathematical modelling study. *The Lancet Infectious Diseases Infectious Diseases*, 20(5), 553-558.
- La Salle, J. P. (1976). *The stability of dynamical systems*. Philadelphia: SIAM.
- Li, B. ve Eskandari, Z. (2023). Dynamical analysis of a discrete-time SIR epidemic model. *Journal of the Franklin Institute*, 360(12), 7989-8007.
- Li, B., Zhang, T. ve Zhang C. (2023). Investigation of financial bubble mathematical model under fractal-fractional caputo derivative. *Fractals*, 31(5), 2350050.
- Liao , S. J. (2003). *Beyond perturbation: Introduction to homotopy analysis method*. Londra: Chapman & Hall.
- Lin, W. (2007). Global existence theory and chaos control of fractional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 332(1), 709-726.
- Liu, X., Takeuchi, Y., Iwami, S., Liu, X., Takeuchi, Y. ve Iwami, S. (2008). SVIR epidemic models with vaccination strategies. *Journal of Theoretical Biology*, 253, 1-11.
- Liu, Y., Gayle, A. A., Wilder-Smith, A. ve Rocklov, J. (2020). The reproductive number of COVID-19 is higher compared to SARS coronavirus. *Journal of Travel Medicine*, 27(2).
- Maruyama, G. (1955). Continuous Markov processes and stochastic equations. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 4(1), 48–90.
- McMichael, T. M., Clark, S., Pogosjans, S., Kay, M., Lewis, J. ve Baer, A. (2020). COVID-19 in a long-term care facility-king county. *Morbidity And Mortality Weekly Report*, 69(12), 339-42.

- Merdan M., Bekiryazici Z., Kesemen T. ve Khaniyev T. (2017). Comparison of stochastic and random models for bacterial resistance. *Advances in Difference Equations*, 1, 133.
- Merdan, M. (2013). Numerical solution of the fractional-order Vallis systems using multi-step differential transformation method. *Applied Mathematical Modelling*, 37(8), 6025-6036
- Merdan, M., Anaç, H. ve Kesemen, T. (2019). The new Sumudu transform iterative method for studying the random component time-fractional Klein-Gordon equation. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 10(3), 343-354.
- Mickens, R. E. (1994). *Nonstandard finite difference models of differential equations*. Singapore: World Scientific.
- Mickens, R. E. (2000). *Application of nonstandard finite difference scheme's*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Mickens, R. E. (2002). Nonstandard Finite difference schemes for differential equations. *Journal of Difference Equations and Applications*, 8(9), 823-847.
- Mickens, R. E. (2007). Calculation of denominator functions for nonstandard finite difference schemes for differential equations satisfying a positivity condition. *Numerical Methods Partial Differential Equations*, 23, 672-691.
- Mishra, B. K. ve Jha, N. (2010). SEIQRS model for the transmission of malicious objects in computer network. *Applied Mathematical Modelling*, 34, 710-715.
- Mohammadnezhad, V., Eslami, M. ve Rezazadeh, H. (2020). Stability analysis of linear conformable fractional differential equations system with time delays. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*, 38(6), 159-171.
- Mostafa, E. ve Rezazadeh, H. (2015). The first integral method for Wu-Zhang system with conformable time-fractional derivative. *Calcolo*, 53(3), 1-11.
- Muroya, Y., Enatsu, Y. ve Nakata, Y. (2011). Global stability of a delayed SIRS epidemic model with a non-monotonic incidence rate. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 377, 1-14.
- Murray, C. ve Pianta, R. C. (2007). The importance of teacher-student relationships for adolescents with high incidence disabilities. *Theory Into Practice*, 46(2), 105-112
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical biology: I. An introduction*. (17. Baskı). New York: Springer Science & Business Media.
- Nawaz, Y., Arif, M. S. ve Shatanawi, W. (2022). A new numerical scheme for time fractional diffusive seair model with non-linear incidence rate: an application to computational biology. *Fractal and Fractional*, 6(2), 78.

- Nelson, P. W., Murray, J. D. ve Perelson, A. S. (2000). A model of HIV-1 pathogenesis that includes an intracellular delay. *Mathematical Biosciences*, 163, 201-215.
- Odibat Z. M. (2010). A study on the convergence of variational iteration method. *Mathematical and Computer Modelling*, 51, 1181-1192.
- Odibat, Z. M. ve Shawagfeh, N. T. (2007). Generalized Taylor's formula. *Applied Mathematics and Computation*, 186(1), 286-293.
- Okposo, N. I. ve Jonathan, A.M. (2020). Application of the q-homotopy analysis transform method (Q-hatm) to the solution of a fractional attraction keller-segel chemotaxis model. *Science World Journal*, 15(3).
- Oliveira, G. (2020). Refined compartmental models, asymptomatic carriers and COVID-19. *arXiv preprint arXiv*, 14780.
- Ongun, M. Y. ve Arslan, D. (2018). Explicit and implicit schemes for fractional-order hantavirus model. *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 8(2), 75-94.
- Ouazi, S-Id. ve El Khomssi, M. (2024). Mathematical approaches to controlling COVID-19: Optimal control and financial benefits. *Mathematical Modelling and Numerical Simulation with Applications*, 4(1), 1-36.
- Özdoğan, N. ve Ongun, M. Y. (2022). Dynamical behaviours of a discretized model with Michaelis-Menten harvesting rate. *Journal of Universal Mathematics*, 5(2), 159-176.
- Özköse, F. (2023). Long-term side effects: A mathematical modeling of COVID-19 and stroke with real data. *Fractal and Fractional*, 7(10), 719.
- Özköse, F., Habbireeh, R. ve Şenel, M. T. (2023). A novel fractional order model of SARS-CoV-2 and Cholera disease with real data. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 423, 114969.
- Özköse, F., Yavuz, M., Şenel, M. T. ve Habbireeh, R. (2022). Fractional order modelling of omicron SARS-CoV-2 variant containing heart attack effect using real data from the United Kingdom. *Chaos, Solitons and Fractals*, 157, 111954.
- Patidar, K. C. (2005). On the use of nonstandard finite difference methods. *Journal of Difference Equations and Applications*, 11(8), 735-758.
- Patidar, K. C. (2016). Nonstandard finite difference methods: recent trends and further developments. *Journal of Difference Equations and Applications*, 22(6), 817-849.
- Paul S. K. ve Mishra, L. N. (2024). Approximation of solutions through the Fibonacci wavelets and measure of noncompactness to nonlinear Volterra-Fredholm fractional integral equations. *Korean Journal of Mathematics*, 32(1), 137-162.

- Paul S. K. ve Mishra, L. N. (2024). Stability analysis through the Bielecki metric to nonlinear fractional integral equations of n-product operators. *AIMS Mathematics*, 9(4), 7770-7790.
- Paul, S. K., Mishra, L. N., Mishra, V. N. ve Baleanu, D. (2023). Analysis of mixed type nonlinear Volterra-Fredholm integral equations involving the Erdélyi-Kober fractional operator. *Journal of King Saud University - Science*, 35(10), 102949.
- Perlman, S. (2020). Another decade, another coronavirus. *The New England Journal of Medicine*, 382(8), 760-762.
- Petty, W. (1899). *The Economic Writings of Sir William Petty; together with the Observations upon the Bills of Mortality, more probably by Captain John Graunt.* (Charles Henry Edt.). Hull: Cambridge University Press,
- Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications.* Amsterdam: Elsevier.
- Podlubny, I. (1999a). An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. *Mathematics in Science and Engineering*, 198, 340.
- Podlubny, I. (1999b). *Fractional differential equations, mathematics in science and engineering.* New York: Academic Press.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. ve Vetterling, W. T. (1992). *Numerical methods in c: The art of scientific computing.* (2. Baskı). New York: Cambridge University Press.
- Rihan, F. A. ve Alsakaji, H. J. (2021). Analysis of a stochastic HBV infection model with delayed immune response. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 18(5), 5194-5220.
- Roser, M., Ortiz-Ospina, E., Ritchie, H. ve Hasell, J. (2020). *Coronavirus Pandemic (COVID-19).* Our World in Data, <https://ourworldindata.org/coronavirus>.
- Ross, B. (1974). *Fractional calculus and its applications.* London: Springer Verlag.
- Samko, S., Kilbas, A. ve Marichev O. (1993). *Fractional integrals and derivatives: theory and applications.* Switzerland: Gordon & Breach Science Publishers.
- Scherer, R., Kalla, S. L., Tangc, Y. ve Huang, J. (2011). The Grünwald-Letnikov method for fractional differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 902-917.

- Shah, S. T. A., Mansoor, M., Mirza, A. F., Dilshad, M., Khan, M. I., Farwa, R. ve Khan, M. A. (2020). Predicting COVID-19 spread in Pakistan using the SIR Model. *Journal of Pure and Applied Microbiology*, 14(2), 1423-1430.
- Shehzada, K., Ullah, A., Saifullah, S. ve Akgül A. (2023). Fractional generalized perturbed KdV equation with a power Law kernel: A computational study. *Results in Control and Optimization*, 12, 100298.
- Sher, M., Shah, K., Sarwar, M. ve Alqudah, M. A. (2023). Mathematical analysis of fractional order alcoholism model, *Alexandria Engineering Journal*, 78, 281-291.
- Sinan, M., Ali, A., Shah, K. ve Assiri, T. A. N. (2021). Stability analysis and optimal control of COVID-19 pandemic SEIQR fractional mathematical model with harmonic mean type incidence rate and treatment. *Results in Physics*, 22, 103873.
- Sinan, M., Leng, J., Shah, K. ve Abdeljawad, T. (2023). Advances in numerical simulation with a clustering method based on K-means algorithm and Adams Bashforth scheme for fractional order laser chaotic system. *Alexandria Engineering Journal*, 75, 165-179.
- Smolen, P., Baxter, D. ve Byrne, J. (2022). A reduced model clarifies the role of feedback loops and time delays in the Drosophila circadian oscillator. *Biophysical Journal*, 83, 2349-2359.
- Su, S., Wong, G., Shi, W., Liu, J., Lai, A. C. K. ve Zhou, J. (2016). Epidemiology, genetic recombination, and pathogenesis of coronaviruses. *Trends Microbiolgy*, 24(6), 490-502.
- Şirin, H. ve Özkan, S. (2020). Dünyada ve Türkiye’de COVID-19 epidemiyolojisi. *Kulak Burun Boğaz ve Baş Boyun Cerrahisi Dergisi*, 28(6), 13.
- Şişman, Ş. ve Merdan, M. (2021). Global stability of Susceptible Diabetes Complication (SDC) model in discrete time. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 39(3), 290-312.
- Tasbozan, O.,Esen, A. ve Yagmurlu, N. M.(2012). Approximate analytical solutions of fractional coupled mKdV equation by homotopy analysis method. *Open Journal of Applied Sciences*,2(3), 193-197.
- Trawicki, M. B. (2017). Deterministic seirs epidemic model for modeling vital dynamics, vaccinations and temporary immunity. *Mathematics*, 5, 7.
- Tuan, N. H., Mohammadi, H. ve Rezapour, S. (2020). A mathematical model for COVID-19 transmission by using the Caputo fractional derivative. *Chaos Solitons Fractals*, 140, 110107.

- Turchin, P. (1990). Rarity of density dependence or population regulation with lags. *Nature*, 344, 660-663.
- Turchin, P. ve Taylor, A. D. (1992). Complex dynamics in ecological time series. *Ecology*, 73, 289-305.
- Ullah, S. ve Khan, M. A. (2020). Modeling the impact of non-pharmaceutical interventions on the dynamics of novel coronavirus with optimal control analysis with a case study. *Chaos Solitons Fractals*, 139, 110075.
- URL-1, [///C:/Users/P%C4%B1nar/Downloads/Documents/20200517-covid-19-sitre-118_2.pdf](C:/Users/P%C4%B1nar/Downloads/Documents/20200517-covid-19-sitre-118_2.pdf). 17 Mayıs 2020.
- URL-2, <https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019>.
- URL-3, <https://covid19.saglik.gov.tr/>. 17 Mayıs 2020.
- URL-4, https://tr.wikipedia.org/wiki/T%C3%BCrkiye%27de_COVID-19_pandemisi
- URL-5, <http://www.baskent.edu.tr/~tkaracay/etudio/ders/prg/pascal/pstest/leastsquare.Html>.
- URL-6, <https://covid19.saglik.gov.tr/TR-66935/genel-koronavirus-tablosu.html>.
- Ünal, E. ve Gökdoğan, A. (2017). Solution of conformable fractional ordinary differential equations via differential transform method. *Optik*, 128, 264-273.
- Valleron, A. J. (2000). Roles of mathematical modeling in epidemiology. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, 323(5), 429-433.
- van den Driessche, P. ve Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180, 29-48
- Vargas-De-Leon, C. (2015). Volterra-type Lyapunov functions for fractional-order epidemic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 24(1-3), 75-85.
- Vielle, B. ve Chauvet, G. (1998). Delay equation analysis of human respiratory stability. *Mathematical Biosciences*, 152(2), 105-122.
- Villasana, M. ve Radunskaya, A. (2003). A delay differential equation model for tumor growth. *Journal of Mathematical Biology*, 47(3), 270-294.
- Wiener, N. (1923). Differential-space. *Journal of Mathematics and Physics*, 2(1-4), 131-174.
- World Health Organization (WHO). <https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019>. 30 Haziran 2020.
- World Health Organization (WHO). <https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019/technical-guidance2020>.

- Wu, J. T., Leung, K., Bushman, M., Kishore, N., Niehus, R., de Salazar, P. M., ... Leung, G. M. (2020). Estimating clinical severity of COVID-19 from the transmission dynamics in Wuhan, China. *Nature Medicine*, 26, 506–510.
- Yadav, S., Kumar, D., Singh, J. ve Baleanu, D. (2021). Analysis and dynamics of fractional order Covid-19 model with memory effect. *Results in Physics*, 24, 104017.
- Yavuz, M. ve Haydar, W. Y. A. (2022). A new mathematical modelling and parameter estimation of COVID-19: A case study in Iraq. *AIMS Bioengineering*, 9(4), 420-446,
- Zafar, Z. A., Nigar A., Zaman, G., Thounthong, P. ve Tunc, C. (2020). Analysis and numerical simulations of fractional order Vallis system. *Alexandria Engineering Journal*, 59, 2591-2605.
- Zhao, T. (1995). Global periodic solutions for a differential delay system modeling a microbial population in the chemostat. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 193, 329-352.
- Zhu, X., Xia, P., He, Q., Ni, Z. ve Ni, L. (2023). Coke price prediction approach based on dense GRU and opposition-based learning salp swarm algorithm. *International Journal of Bio-Inspired Computation*, 21(2), 106-121.
- Zoua, G. ve Wanga, B. (2016). On the study of stochastic fractional-order differential equation systems. *Numerical Analysis*, arXiv:1611.07618.

ÖZGEÇMİŞ

Pınar AÇIKGÖZ, İlk ve ortaokulu Aktaş Okulu, liseyi Gümüşhane Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2015 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2018 yılında Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği bölümünde yüksek lisansını tamamladı. Yüksek lisans yaparken aynı zamanda 2015-2022 yılları arasında Gümüşhane'de çeşitli özel okullarda (Turkuaz Koleji, Bahçeşehir Koleji) matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2022-2025 yılları arasında ise İstanbul'da çeşitli özel okul ve kurslarda mesleğine devam etti. Evli ve çocuk beklemekte.

Yayınlar:

- Açıkgöz, P. ve Merdan, M. (2025). Mathematical analysis of fractional order covid 19 epidemic model. *Sigma* 43(5),1712-1724.
- Merdan, M. ve Açıkgöz, P. (2025). Investigation of fractional order covid-19 model with q-homotopy analysis transform method. *Sigma* 43(2), 582-597.
- Merdan, M. ve Açıkgöz, P. (2025). Investigation of nonstandard finite difference for fractional order Covid-19 model. *Gazi University Journal of Science*, 1-1, 2025.
- Şahin, Y. Merdan, M. ve Açıkgöz, P. (2025). The analysis of three-dimensional time-fractional helmholtz model using a new iterative method. *Symmetry*, 17(8),1219.
- Şahin, Y. Merdan, M. ve Açıkgöz, P. (2025). Development of a hybrid technique for solving the Newell-Whitehead-Segel equation using the Caputo Fabrizio derivative. *Engineering Computations*,1