

EĞRİ BİR UZAY-ZAMANDA RELATİVİSTİK DALGA DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Mehmet Akif HUN

Yüksek Lisans Tezi

Fizik Anabilim Dalı

Matematiksel Fizik Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nuray CANDEMİR

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Haziran 2021

ÖZET
EĞRİ BİR UZAY-ZAMANDA RELATİVİSTİK DALGA DENKLEMLERİNİN
ÇÖZÜMLERİ

Mehmet Akif HUN

Fizik Anabilim Dalı

Matematiksel Fizik Bilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Haziran 2021

Danışman: Doç. Dr. Nuray CANDEMİR

Bu tez çalışmasında, kozmik sicim tarafından üretilen kiral konik uzay-zaman geometrisinde spin-0 parçacıkların relativistik kuantum dinamiklerini Klein Gordon salınıcı, Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) ve DKP salınıcı denklemleri ile araştırılmıştır. Ayrıca, düzgün bir manyetik alan ile Klein Gordon ve DKP salınıcıların etkileşimi de incelenmiştir. Analitik metotlar kullanılarak, bu sistemlerin enerji özdeğerleri ve dalga fonksiyonları elde edilmiştir. Bu sistemlerdeki parçacığın, enerji seviyelerinin ve dalga fonksiyonlarının uzay-zaman geometrisini karakterize eden parametrelere bağlı olduğu gösterilmiştir. Bu bağımlılıklar nedeniyle, Klein Gordon denkleminin çözümü olan dalga fonksiyonlarında Aharonov-Bohm etkisine benzer kütle çekimsel bir etki de vardır.

Anahtar Sözcükler: Eğri uzay-zaman, Klein Gordon denklemi, DKP denklemi.

ABSTRACT

SOLUTIONS OF RELATIVISTIC WAVE EQUATIONS IN A CURVED SPACE-TIME

Mehmet Akif HUN

Department of Physics

Programme in Mathematical Physics

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, June 2021

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Nuray CANDEMİR

In this thesis, the relativistic quantum dynamics of spin-0 particles in a chiral conical space-time geometry produced by the cosmic string are investigated by the Klein Gordon oscillator, the Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) and the DKP oscillator equations. In addition, the interaction of a uniform magnetic field with the Klein Gordon and the DKP oscillators is also studied. By using analytical methods, the energy eigenvalues and corresponding wave functions of these systems are obtained. It is shown that energy levels and wave functions of the particle in these systems depend on the parameters characterizing the geometry of space-time. Because of these dependencies, there also exists a gravitational effect similar to the Aharonov-Bohm effect in wave functions that are the solution of Klein Gordon equation.

Keywords: Curved space-time, Klein Gordon equation, DKP equation.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca gösterdiği ilgi, sabır ve fikirleri ile beni yönlendiren, değerli zamanını ayırıp her şeyi en ince ayrıntısına kadar paylaşan danışman hocam Doç. Dr. Nuray CANDEMİR'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Bütün eğitim hayatımda her konuda arkamda durup fikirlerimi destekleyen anneme, babama ve kardeşlerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet Akif HUN



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Mehmet Akif HUN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL BİLGİLER	4
2.1. Klein Gordon Denklemi.....	4
2.2. Duffin-Kemmer-Petiau Denklemi.....	5
2.3. Kiral Konik Uzay-Zaman.....	6
3. MATERYAL VE METOT.....	9
3.1. Bessel Diferansiyel Denklemi	9
3.2. Konfluent Hipergeometrik Diferansiyel Denklemi	9
3.3. Nikiforov-Uvarov Metodu	10
4. EĞRİ BİR UZAY-ZAMANDA RELATİVİSTİK DALGA DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ.....	12
4.1. Kiral Konik Uzay-Zamanda Klein Gordon Denklemi'nin Çözümü	12
4.1.1. Kiral Konik Uzay-Zamanda Klein Gordon Salınıcı	14
4.1.2. Kiral Konik Uzay-Zamanda Klein Gordon Salınıcısının Landau Seviyeleri	21
4.2. Kiral Konik Uzay-Zamanda Duffin-Kemmer-Petiau Denklemi'nin Çözümü	24

4.2.1. Kiral Konik Uzay-Zamanda Duffin-Kemmer-Petiau Salınıcı	27
4.2.2. Kiral Konik Uzay-Zamanda Duffin-Kemmer-Petiau Salınıcısının Landau Seviyeleri.....	37
5. SONUÇ	40
KAYNAKÇA.....	42
ÖZGEÇMİŞ	



ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

- Şekil 4.1.** $M = k = \omega, J_0 = J_3 = \alpha = 0,5$ parametreleriyle n ve l değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak $E_{KS,nl+}^>$ enerji spektrumunun çizimi..... 17
- Şekil 4.2.** $M = k = \omega, J_0 = J_3 = \alpha = 0,5$ ile n ve l değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak $E_{KS,nl-}^>$ negatif enerji spektrumunun çizimi..... 18
- Şekil 4.3.** $M = k = \omega = 1, J_0 = J_3 = \alpha = 0,5$ ile α nin bir fonksiyonu olarak $E_{KS,n1}^>$ enerji spektrumunun çizimi 18
- Şekil 4.4.** $M = k = \omega = 1, J_3 = \alpha = 0,5$ parametreleri ile J_0 'ın bir fonksiyonu olarak $E_{KS,n1}^>$ enerji spektrumunun çizimi 19
- Şekil 4.5.** $M = k = \omega = 1, J_0 = \alpha = 0,5$ parametreleri ile J_3 'ün bir fonksiyonu olarak $E_{KS,n1}^>$ enerji spektrumunun çizimi..... 19
- Şekil 4.6.** $M = k = l = 1, J_0 = J_3 = \alpha = 0,5, n = 2$ parametreleri ile ρ değişkeninin bir fonksiyonu olarak $|R(\rho)|^2$ olasılık yoğunluğunun çizimi..... 20
- Şekil 4.7.** $M = k = l = q = 1, J_0 = J_3 = \alpha = 0,5, n = 2$ parametreleri ile ρ değişkeninin bir fonksiyonu olarak $|R(\rho)|^2$ olasılık yoğunluğunun çizimi..... 23
- Şekil 4.8.** $M = k = l = 1, J_0 = J_3 = \omega = 0,5$ için α 'nın bir fonksiyonu olarak DKP salınıcısının $E_{K|S}$ enerji spektrumunun çizimi 31
- Şekil 4.9.** $M = k = l = 1, \alpha = J_3 = \omega = 0,5$ parametreleri için J_0 parametresine karşı DKP salınıcısının $E_{K|S}$ enerji spektrumu 31
- Şekil 4.10.** $M = k = l = 1, \alpha = J_0 = \omega = 0,5$ parametreleri için J_3 parametresine karşı DKP salınıcısının $E_{K|S}$ enerji spektrumu 32
- Şekil 4.11.** $M = k = l = 1, \alpha = J_0 = J_3 = 0,5$ parametreleri ile pozitif enerji değerleri için r 'nin fonksiyonu olarak (denklem (4.42) ile verilen ψ_1 ile) $|\psi_1(r)|^2$ olasılık yoğunluğunun çizimi..... 33
- Şekil 4.12.** $M = k = l = 1, \alpha = J_0 = J_3 = 0,5$ parametreleri ile negatif enerji değerleri için r 'nin fonksiyonu olarak (denklem (4.42) ile verilen ψ_1 ile) $|\psi_1(r)|^2$ olasılık yoğunluğunun çizimi..... 33

Şekil 4.13. $M = k = l = 1, \alpha = \omega = J_3 = 0.5$ parametreleri ile pozitif enerjiler ve J_0 'nın farklı değerleri için r 'nin bir fonksiyonu olarak denklem (4.39)'da verilen J^t yük	34
Şekil 4.14. $M = k = l = 1, \alpha = \omega = J_3 = 0.5$ parametreleri ile negatif enerjiler ve J_0 'nın farklı değerleri için r 'nin bir fonksiyonu olarak denklem (4.39)'da verilen J^t yük	34
Şekil 4.15. $M = k = l = 1, \alpha = \omega = J_0 = 0.5$ parametreleri ile pozitif enerjiler ve J_3 'nin farklı değerleri için r 'nin bir fonksiyonu olarak denklem (4.39)'da verilen J^t yük yoğunluğunun	35
Şekil 4.16. $M = k = l = 1, \alpha = \omega = J_0 = 0.5$ parametreleri ile negatif enerjiler ve J_3 'nin farklı değerleri için r 'nin bir fonksiyonu olarak denklem (4.39)'da verilen J^t yük yoğunluğunun	36
Şekil 4.17. $M = k = q = l = 1, \alpha = J_0 = J_3 = 0.5, n = 2, \omega = 0$ parametreleri ile pozitif enerji değerleri ve B manyetik alanın farklı değerleri için r 'nin bir fonksiyonu olarak $ \psi_{K SL,1}(r) ^2$	39

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\bar{\Psi}$	: Adjoint Spinör
Ψ	: DKP Spinörü
$\Psi_{K S}$	: DKP Salıncının Spinörü
$\Psi_{K SL}$	: Manyetik Alanda DKP Salıncının Spinörü
Ψ	: DKP Spinörü
$\Psi_{K S}$	: DKP Salıncının Spinörü
$\Psi_{K SL}$	: Manyetik Alanda DKP Salıncının Spinörü
$\eta_{\mu\nu}$	: Düz Uzak-Zamanın Metrik Tensörü
η_0	: 2×2 'lik Matris
Γ_μ	: Spin-0 Parçacığı için Spin Bağlantı Katsayısı
$\omega_{\mu ab}$	: Spin İletimi
β^a	: Düz Uzak-Zamanın Beta Matrisleri
$\beta^\mu(x)$	: Eğri Uzak-Zamanın Beta Matrisleri
∇_a	: Düz Uzak-Zaman için Kovaryant Türev
∇_μ	: Eğri Uzak-Zaman için Kovaryant Türev
∂_μ	: Eğri Uzak-Zaman için Kısmi Türev
$\tilde{\theta}$	: 2×2 'lük Sıfır Matris
$\bar{0}$	: 2×3 'lük Sıfır Matris
$\mathbf{0}$	: 3×3 'lük Sıfır Matris
Φ	: Klein Gordon Dalga Fonksiyonu
Φ_{KS}	: Klein Gordon Salıncının Dalga Fonksiyonu
Φ_{KSL}	: Manyetik Alanda Klein Gordon Salıncının Dalga Fonksiyonu
$\hbar$	: Plank Sabitinin 2π 'ye Bölümü
c	: Işık Hızı
DKP	: Duffin-Kemmer-Petiau
$d\tau$	: Diferansiyel Hacim Elemanı

ds^2	: Çizgi Elemanı
E	: Klein Gordon Parçacığının Enerji Spektrumu
E_{KS}	: Klein Gordon Salınıcısının Enerji Spektrumu
E_{KSL}	: Manyetik Alanda Klein Gordon Salınıcısının Enerji Spektrumu
$E_{K }$	: DKP Parçacığının Enerji Spektrumu
$E_{K S}$	: DKP Salınıcısının Enerji Spektrumu
$E_{K SL}$	: Manyetik Alanda DKP Salınıcısının Enerji Spektrumu
$e_\mu^a(x)$	: Bir Matrisi Eğri Uzay-Zamandan Düz Uzay-Zamana Dönüştüren Tetrad
$e_a^\mu(x)$	: Bir Matrisi Düz Uzay-Zamandan Eğri Uzay-Zamana Dönüştüren Tetrad
${}_1F_1(a; b; z)$	: Konfluent Hipergeometrik Fonksiyon
G	: Yerçekimi Sabiti
$g_{\mu\nu}$	: Metrik Tensör
$g^{\mu\nu}$	: Ters Metrik Tensör
I	: 2×2 'lik Birim Matris
J^μ	: Akım Yoğunluğu
J_η	: Birinci Tür Bessel Fonksiyonu
J^t	: Yük Yoğunluğu
NU	: Genelleştirilmiş Laguerre Polinomu
N_{nm}	: Normalizasyon Sabiti
$P_n^{(c,p)}(x)$	: Jacobi Polinomu
Y_η	: İkinci Tür Bessel Fonksiyonu

1. GİRİŞ

19. yüzyılın sonlarına doğru fizikte cisimlerin hareketi Newton mekaniği, elektromanyetik olaylar Maxwell denklemleri ve termodinamik olaylar istatistik fizik yasaları kullanılarak başarılı biçimde açıklanabiliyordu. Klasik mekaniği tanımlayan bu kuramlar 20. yüzyılın başlarında yapılan siyah cisim ışıması, fotoelektrik olay, Compton saçılması, tayf çizgileri vb. gibi bir dizi deneyi açıklamada başarılı olamadı. Uzun yıllar süren çalışmaların sonunda kuantum mekaniği denilen yeni bir kuram ortaya konuldu [1].

Kuantum mekaniği atom altı parçacıkların hareketini tanımlar. Kuantum mekaniğinde parçacıkların davranışı dalga fonksiyonu denilen matematiksel ifadeler ile verilir. Dalga fonksiyonu, parçacığa ait tüm bilgileri içinde barındırır. Düşük hızlarda parçacığın dinamiğini tanımlayan tek dalga denklemi Schrödinger denklemidir. Yüksek hızlara sahip parçacıklar sahip oldukları spine göre bir dalga denklemi ile tanımlanırlar.

Klein Gordon denklemi, kuantum mekaniği ile özel görelilik kuramlarının birleşimi ile ortaya konulan ilk relativistik dalga denklemidir. Bu denklem pion, mezon ve kaon gibi spin-0 parçacıkları (skaler bozonlar) tanımlar [2]. Klein Gordon denklemi farklı potansiyellerle etkileşen parçacığın saçılım ve band durumlarını elde etmek için çözülmüştür [3-7]. Sonuçların spin-0 parçacıkları ile çekirdek etkileşimlerini açıklamak için kullanılabileceği ifade edilmiştir [7].

Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denklemi de relativistik bir dalga denklemidir. Bu denklem hem spin-0 (skaler) hem de spin-1 (vektörel) parçacıkları araştırmamıza olanak sağlayan matematiksel bir yapıya sahiptir [8-10]. DKP denklemi, uzun yıllar ikinci dereceden diferansiyel denklemler olan ve spin-0 parçacıkları tanımlayan Klein Gordon, spin-1 parçacıkları tanımlayan Proca denklemlerine alternatif olarak görülmüştür [11-14]. DKP denklemi birçok açıdan spin-1/2 parçacıklarını tanımlayan Dirac denklemine benzer. Bu iki denklemde, birinci dereceden diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemde, Dirac denklemindeki gama matrisleri DKP cebri denilen matris cebri ile yer değiştirir [8-10,15]. Bu cebirsel yapı Klein Gordon ve Proca denklemlerinde yer almayan etkileşimlerin incelenmesine de olanak sağlar [16-17].

DKP denklemi mezon-çekirdek etkileşimlerini araştırmak için önerilmiştir ve bazı durumlarda Klein Gordon denklemi ile karşılaştırıldığında deneysel verilerle daha uyumlu sonuçlar vermekte olduğu ifade edilmiştir [18]. DKP denklemi ile döteryum-

çekirdek ve alfa-çekirdek saçılımı incelenmiştir. Bu araştırmaların sonuçlarının deneysel verilerle tutarlı olduğu gösterilmiştir [19-20]. DKP denklemi, sonlu sıcaklıkta relativistik Bose-Einstein denklemini türetmek için de kullanılmıştır [21]. DKP denklemi Coulomb etkileşimine gömülü skaler bozonlar için çözülmüş, band ve saçılım durumlarını elde edilmiştir [22]. DKP formalizmi topolojik yarı-metallarin daha yüksek boyuta genellemelerini oluşturmak içinde kullanılmıştır [23].

Harmonik salıncı hem klasik fizik hem de relativistik olmayan kuantum mekaniğinde önemli birçok uygulaması olan bir modeldir. Moleküler titreşimler, elektromanyetik alanlar, AC devreleri, akustik gibi birçok olayın matematiksel olarak açıklanmasında bir prototip görevi görür. Harmonik salıncı için relativistik modeller de önerilmiştir. Klein Gordon salıncı ve DKP salıncı spin-0 parçacıkları için önerilen relativistik modellerdir. Bu salıncıların ağır kuark sistemlerinde hapsedme potansiyeli olarak kullanmak için iyi bir aday olabilecekleri ifade edilmiştir [24-25]. Bu salıncıların bir boyutlu formları Minkowski uzay-zamanında çözülerek parçacıkları tanımlayan dalga fonksiyonları ve enerji spektrumları incelenmiştir [26-27]

Kuantum mekaniği ve genel görelilik teorisini birleştiren bir tek teori oluşturma fikri ile relativistik dalga denklemleri eğri uzay-zamana uyacak şekilde genelleştirilmiştir [28]. Genel görelilik teorisine göre, kütle çekimi uzay-zaman eğriliğinin bir sonucudur ve bu eğrilik üzerinden fiziksel sistemleri etkiler. Eğri bir uzay-zamana yerleştirilen atomun enerji seviyeleri uzay-zaman eğriliği ile etkileşimin sonucu olarak değişime uğrar. Enerji seviyelerindeki değişimler, bir kuantum sisteminin farklı durumları için aynı olmayabilir. Uzay-zaman geometrisi kaynaklı bu etki, incelenen sistemin her enerji seviyesi için aynı değişimi veren Doppler etkisi, kütle çekimsel ve kozmolojik kırmızıya kayma etkilerinden ayrılır [29-33]. Ayrıca elektromanyetik alan kaynaklı Stark ve Zeeman etkilerinden de farklıdır [32-33].

Kozmik sicim ve monopol evrenin genişlemesi sırasında oluştuğu ve günümüze kadar hayatta kaldığı düşünülen topolojik kusurlardır. Kozmik sicimler uzay-zamanın iyi anlaşılmayan (nontrivial) topolojisini oluştururlar. Kozmik sicim etrafında oluşan uzay-zaman geometrisi yerel olarak düz ancak global olarak düz değildir [33-35]. Uzay-zaman geometrisi ve uzay-zamanın topolojik kusurlarının relativistik kuantum sistemleri üzerindeki etkileri uzun yıllardır araştırılmaktadır. Bu çalışmalarda bazıları, dönen kozmik sicim uzayında spinsiz parçacığın incelenmesi [36], kozmik sicim uzay-

zamanında düzgün manyetik alan altında Klein Gordon salınıcı [37], dönen kozmik sicim uzayında relativistik Landau düzeyleri [38], Kaluza-Klein teorisindeki topolojik kusurların varlığında spin-0 parçacıkları [39], Kaluza-Klein teoride Klein salınıcı [40], Kaluza-Klein teori de band durumları için Aharonov-Bohm etkisi [41], dönen kozmik sicimdeki manyetik alanda genelleştirilmiş Klein Gordon salıcı üzerindeki Aharonov-Bohm etkisi [42], kozmik sicim uzay-zamanında lineer etkileşimli DKP salınıcı [43], Robertson Walker uzay-zamanında DKP denklemi [44], skaler bozonların kuantum dinamikleri üzerindeki dönme etkileri [45], Som-Raychaudhuri uzay-zamanda relativistik spin-0 bozonlar [46] uzay-zamanın Gödel tipinin varlığında spin-sıfır sistemi için DKP denklemidir [47]. Ayrıca bir kiral kozmik sicim tarafından üretilen uzay-zamanda DKP ve DKP salınıcı denklemleri çözülmüş ve uzay-zaman geometrisinin etkileri araştırılmıştır [48].

Bu tez kapsamında, kiral konik uzay-zamanda, Klein Gordon [49] ve DKP denklemleri ve bu denklemlerle oluşturulan sistemlerde, spin-0 parçacıkların relativistik kuantum dinamiklerini üzerinde uzay-zamanın topolojiden kaynaklanan etkiler araştırılmıştır.

Tezin giriş bölümünde, tezin kapsamına ilişkin literatür gözden geçirilmektedir. İkinci bölümde, tez kapsamındaki Klein Gordon ve Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denklemleri ile kiral konik uzay-zaman tanıtılmaktadır. Üçüncü bölümde, denklem çözümlerinde kullanılan yöntemler ve bu yöntemlerin matematiksel özellikleri anlatılmaktadır. Dördüncü bölümde, kiral konik uzay-zamanda, Klein Gordon ve DKP denklemleri ve bu denklemlerden oluşturulan sistemlerin çözümleri verilmektedir. Bu bölümde çizilen grafiklerle spin-0 parçacığının relativistik kuantum dinamikleri üzerinde eğri uzay-zamanın topolojik etkileri de tartışılmıştır.

2. KURAMSAL BİLGİLER

Bu bölümde, Klein Gordon ve DKP denklemleri ile kiral konik uzay-zaman tanımlanmaktadır.

2.1. Klein Gordon Denklemi

Relativistik enerji-momentum bağıntısı durgun kütlesi m olan serbest bir parçacık için

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

veya

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m^2 c^2 \quad (2.1)$$

ile tanımlanır. Burada E parçacığın toplam enerjisi, p momentumudur. p^μ momentum dört vektör gösterimidir. Dört momentum işlemcisinin koordinat gösterimi

$$\hat{p}^\mu = i\hbar \partial^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} = i\hbar \left(\frac{\partial}{c \partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = i\hbar \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = (\hat{p}_0, \hat{\mathbf{p}})$$

$$\hat{p}_\mu = i\hbar \partial_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar \left(\frac{\partial}{c \partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = i\hbar \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) = (\hat{p}_0, -\hat{\mathbf{p}})$$

şeklinde verilir. $\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu$ çarpımı

$$\begin{aligned} \hat{p}^\mu \hat{p}_\mu &= -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = -\hbar^2 \left[\frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \\ &= -\hbar^2 \left(\frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu sonuç, denklem (2.1)'de dört momentumun skaler çarpımı yerine yazılarak Klein Gordon denklemini elde etmek için kullanılır.

$$\left[\frac{\partial}{c^2 \partial t^2} - \nabla^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Phi(r, t) = 0$$

Bu ifade serbest parçacık için Klein Gordon denklemdir [2].

2.2. Duffin-Kemmer-Petiau Denklemi

Minkowski uzay-zamanında, M kütleli serbest bozonlar için Duffin-Kemmer-Petiau denkleminin

$$[i\beta^a \partial_a - M]\Psi = 0$$

şeklinde verilir. β^a ($a = 0,1,2,3$) matrisleri Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) cebri denilen

$$\beta^a \beta^b \beta^c + \beta^c \beta^b \beta^a = g^{ab} \beta^c + g^{bc} \beta^a$$

komutasyon bağıntısını sağlar. $g^{ab} = (1, -1, -1, -1)$ metrik tensör ve β^a beta matrisleri 16×16 matrislerdir. Bu onaltı boyutlu matrisler bir, beş ve on boyutlu indirgenemez matris temsillerine indirgenebilir. Beş boyutlu temsili spin-0 olan bozonları tanımlamak için kullanılır.

Spin-0 temsili için, β^a 'lar 5×5 matrislerdir ve aşağıdaki şekilde verilir.

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \theta & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} \tilde{\theta} & \rho^i \\ -\rho_T^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$\tilde{\theta}$, $\bar{0}$ ve $\mathbf{0}$ sırasıyla 2×2 , 2×3 ve 3×3 sıfır matrislerdir. T üst indisi matris transpozunu gösterir ve matristeki diğer ifadeler

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

şeklinde tanımlanır.

Spin-1 temsili için, β^a 'lar 10×10 matrislerdir ve

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0 & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \bar{0}^T & \mathbf{I} & 0 & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta^a = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_i \\ e_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \\ \bar{0}^T & -is_i & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$$

burada $s_i, s_{ijk} = -i\varepsilon_{ijk}$ ile verilen spin-1 matrisleridir ve matristeki diğer terimler

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{I}$ ve $\mathbf{0}$ sırasıyla birim ve sıfır matrislerdir. Ψ durumları spin-0 parçacıkları için beş bileşenli bir spinör iken, spin-1 parçacıkları için on bileşenlidir [10, 45, 50].

2.3. Kiral Konik Uzay-Zaman

Kiral konik uzay-zaman, zaman koordinatında ve sicimin uzandığı uzay koordinatında sarmal yapıya sahip yeni bir sicim modelidir. Bu uzay-zamana karşılık gelen metrik yerel olarak r ekseninden uzakta düzdür, ancak genel olarak düz değildir. Bu uzay-zamanın sarmal yapısı, zaman gecikmesi ve bu uzaya yerleştirilen bir nesnenin z ekseninde iki ayrı görüntü oluşturmaya gibi genel etkiler yaratır.

Kiral konik uzay-zaman için çizgi elemanı [49, 51-52]

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dt + a d\varphi)^2 - \alpha^2 r^2 d\varphi^2 - (dz + \beta d\varphi)^2 \\ &= (dt + 4GJ_0 d\varphi)^2 - \alpha^2 r^2 d\varphi^2 - (dz + 4GJ_3 d\varphi)^2 \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $a = 4GJ_0$ kozmik sicimin dönme parametresidir ve uzunluk birimine sahiptir. $\beta = 4GJ_3$ dönme ile ilgili parametredir. α , μ sicimin kütle yoğunluğu ile $\alpha = 1 - 4\mu$ şeklinde tanımlanır. G yerçekimi sabitidir. (Bu çalışmada G yerçekimi sabiti ve c ışık hızı $G = c = 1$ olarak alınacaktır.) J_0 ve J_3 sırasıyla sicimin açısall momentumu ve burulmasıdır. Yukarıdaki metrik, J_0 ve J_3 parametrelerinin aldığı değerlere göre farklı uzay-zaman metriklerini temsil eder. $J_0 = J_3 = 0$ olduğunda [49, 53], yukarıda tanımlanan metrik kozmik sicim uzay-zamanını tanımlarken, sadece $J_3 = 0$ olduğu durumda [49, 54-55], dönen kozmik sicim uzay-zamanını tanımlar. Katılarda, çizgisel ve sapma (yerinden çıkma) kusuru olarak bilinen topolojik kusurlar geometrik olarak bir metrik ile tanımlanırlar. Bu kusura sahip bir katıda, J_0 ve J_3 parametreleri çizgisel kusuru, α ise sapma (yerinden çıkma) kusurunu temsil eder [49, 57].

(2.2) denklemi ile verilen çizgi elemanı $g = (+1, -1, -1, -)$ metriğine sahiptir ve bu metrik için koordinatlar aşağıda verilen bölgede tanımlıdır.

$$-\infty \leq t \leq \infty \quad r \geq 0 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Yerel koordinat çerçevesi, e_μ^a tetradlar olarak adlandırılan ve koordinat olmayan bazlarla oluşturulur. Bu uzay-zaman için aşağıda verilen e_μ^a tetradlar ve onların tersleri kullanılır.

$$e_\mu^a(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4J_0}{\alpha r} \sin \varphi & \cos \varphi & \frac{\sin \varphi}{\alpha r} & \frac{4J_3}{\alpha r} \sin \varphi \\ \frac{4J_0}{\alpha r} \cos \varphi & \sin \varphi & \frac{\cos \varphi}{\alpha r} & \frac{4J_3}{\alpha r} \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_a^\mu(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 4J_0 & -\alpha r \sin \varphi & \cos \varphi & 4J_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Burada (μ, ν) Yunan indisleri eğri uzay-zamanı temsil ederken, (a, b) Latin indisleri düz uzay-zamanı temsil eder. Tedradlar

$$e_a^\mu(x) e_\nu^a(x) = \delta_\nu^\mu \quad e_\mu^a(x) e_a^\nu(x) = \delta_\mu^\nu$$

diklik şartını ve

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x) e_\nu^b(x) \eta_{ab} \quad g^{\mu\nu}(x) = e_a^\mu(x) e_b^\nu(x) \eta_{ab} \quad (2.4)$$

bağıntılarını sağlar. $\eta_{ab} = (+, -, -, -)$ Minkowski (düz) uzay-zaman metriğidir.

(2.2) denklemindeki çizgi elemanın metrik bileşenleri

$$g_{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4J_0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4J_0 & 0 & -\alpha^2 r^2 - 16(J_0^2 - J_3^2) & -4J_3 \\ 0 & 0 & -4J_3 & -1 \end{pmatrix}$$

olarak yazılır. Burada $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$ ve $x^4 = z$ dir. Metriğin determinanı

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = \alpha^2 r^2 \quad (2.5)$$

dir. (2.3) denklemi ile verilen tedrad tersleri ve (2.4) denklemi kullanılarak, ters metrik

$$g^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{16J_0^2}{\alpha^2 r^2} & 0 & \frac{4J_0}{\alpha^2 r^2} & -\frac{16J_0J_3}{\alpha^2 r^2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{4J_0}{\alpha^2 r^2} & 0 & -\frac{1}{\alpha^2 r^2} & \frac{4J_3}{\alpha^2 r^2} \\ -\frac{16J_0J_3}{\alpha^2 r^2} & 0 & \frac{4J_3}{\alpha^2 r^2} & -\left(1 + \frac{16J_0^2}{\alpha^2 r^2}\right) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

olarak elde edilir.

Denklem (2.2) ile verilen metriğe

$$t \rightarrow T + 4J_0\varphi, \quad \varphi \rightarrow \theta = \alpha\varphi \quad z \rightarrow Z = z + 4J_3\varphi$$

dönüşümü uygulandığında aşağıdaki düz metrik elde edilir [49]:

$$ds^2 = dT^2 - dr^2 - d\varphi^2 - dZ^2.$$



3. MATERYAL VE METOT

Bu çalışmadaki tüm denklemler analitik olarak çözülmüştür. Denklem (2.2) de tanımlanan metrik için Klein Gordon ve DKP denklemleri ile bu denklemlerden oluşan sistemlerin çözümü incelenmektedir. Bu denklemlerin çözümü sonucu fizik alanında sıkça rastlanan Bessel, konfluent hipergeometrik ve Nikiforov-Uvarov denklemleri elde edilmektedir. Bu bölümde, bu denklemler ve çözümleri kısaca tanıtılacaktır.

3.1. Bessel Diferansiyel Denklemi

η sabit bir sayı olmak üzere, Bessel denklemi

$$\frac{d^2y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + \left(u^2 - \frac{\eta^2}{z^2}\right)y = 0 \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilir. A ve B keyfi sabitler olmak üzere, Bessel diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y = A_1 J_\eta(uz) + A_2 Y_\eta(uz) \quad (3.2)$$

olarak verilir. $J_\eta(uz)$ ve $Y_\eta(uz)$ sırasıyla birinci tür ve ikinci tür Bessel fonksiyonları olarak adlandırılır. Burada $J_\eta(uz)$ fonksiyonu $0 < z < \infty$ aralığında sönümlenen çözümleri ifade etmektedir. $Y_\eta(uz)$ fonksiyonu $z \rightarrow 0$ durumunda ıraksar; $z \rightarrow \infty$ durumunda ise sönümlenen titreşim yaparak sıfıra yakınsamaktadır. Dalga fonksiyonunun sonlu ve sınırlarda sürekli olma şartları düşünüldüğünde $A_2 = 0$ ve $J_\eta(uz) = 0$ olmaktadır [58-59].

3.2. Konfluent Hipergeometrik Diferansiyel Denklemi

$$z \frac{d^2y}{dz^2} + (b - x) \frac{dy}{dz} - a y = 0 \quad (3.3)$$

Yukarıdaki ifadeye konfluent hipergeometrik denklemi ya da Kummer denklemi adı verilmektedir.

Burada a, b reel ya da kompleks parametrelerdir. Kummer denkleminin sınırlarda sonlu olan çözümleri

$$y = AM(a; b; z) = A {}_1F_1(a; b; z) \quad (3.4)$$

konfluent hipergeometrik fonksiyonlarıdır. Burada A keyfi bir sabittir. Polinom olma şartı

$$a = -n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde verilir [58-59].

3.3. Nikiforov-Uvarov Metodu

Nikiforov Uvarov (NU) metodu ikinci dereceden diferansiyel denklemlerin enerji özdeğeri ve özfonksiyonlarını bulmak için kullanılır. Bu metotta, ikinci dereceden bir denklemin aşağıdaki biçimde yazılması gerekir.

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + \frac{c_1 - c_2x}{x(1 - c_3)} \frac{d\Phi(x)}{dx} + \left(\frac{-\xi_1x^2 + \xi_2x + \xi_3}{x^2(1 - c_3x)^2} \right) \Phi(x) = 0 \quad (3.5)$$

Böylece özfonksiyonlar ve enerji özdeğerleri sırasıyla

$$\Phi(x) = x^{c_{12}}(1 - c_3x)^{-c_{12} - \frac{c_{13}}{c_3}} P_n^{(c_{10}-1, \frac{c_{11}}{c_3} - c_{10}-1)}(1 - 2c_3x) \quad (3.6)$$

ve

$$\begin{aligned} nc_2 - (2n + 1)c_5 + (2n + 1)(\sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8}) + n(n - 1)c_3 \\ + c_7 + 2c_3c_8 + 2\sqrt{c_8c_9} = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

olarak yazılır. $P_n^{(c,p)}$ Jacobi polinomudur. $c_4, \dots, c_{13}$ parametreleri, (3.5)'deki $c_1, \dots, c_3, \xi_1, \dots, \xi_3$ altı parametreden elde edilir:

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{1}{2}(1 - c_4), \quad c_4 = \frac{1}{2}(c_2 - 2c_3), \quad c_6 = c_5^2 + \xi_1, \\ c_7 &= 2c_4c_5 - \xi_1, \quad c_8 = c_4^2 + \xi_3, \\ c_9 &= c_3c_7 + c_3^2c_8 + c_6, \quad c_{10} = c_1 + 2c_4 + 2\sqrt{c_8}, \\ c_{11} &= c_2 - 2c_5 + 2(\sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8}), \quad c_{12} = c_4 + \sqrt{c_8}, \\ c_{13} &= c_5 - \sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Bu parametrelerden $c_3 = 0$ ise,

$$\lim_{c_3 \rightarrow 0} P_n^{(c_{10}-1, \frac{c_{11}}{c_3} - c_{10}-1)}(1 - 2c_3x) = L_n^{c_{10}-1}(c_{11}x)$$

$$\lim_{c_3 \rightarrow 0} (1 - c_3 x)^{-c_{12} - \frac{c_{11}}{c_3}} = \exp(c_{13} x)$$

ifadelerine dönüşür. Böylece (3.6) deki dalga fonksiyonu

$$\Phi(x) = x^{c_{12}} \exp(c_{13} x) L_n^{c_{10}-1}(c_{11} x) \quad (3.9)$$

olur. $L_n^c(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomudur.

Enerji denklemi ise,

$$nc_2 - (2n + 1)c_5 + (2n + 1)\sqrt{c_9} + c_7 + 2\sqrt{c_8 c_9} = 0 \quad (3.10)$$

ifadesine indirgenir [54, 60-61].

4. EĞRİ BİR UZAY-ZAMANDA RELATİVİSTİK DALGA DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, Klein Gordon denkleminin kiral konik uzay-zamanda çözümü tanıtılmaktadır [49]. Daha sonra Klein Gordon salıncı, manyetik alanda Klein Gordon salıncı, DKP denklemi, DKP salıncı ve manyetik alanda DKP salıncının kiral konik uzay-zamanda analitik çözümleri yapılmaktadır.

4.1. Kiral Konik Uzay-Zamanda Klein Gordon Denkleminin Çözümü

Eğri uzay-zamanda Klein Gordon denklemi aşağıdaki biçimde verilir [41, 49, 62].

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) + M^2 \right] \Phi = 0$$

Bu denklem, kiral konik uzay-zamanın metrik determinantı ve ters metrik bileşenleri ile

$$\begin{aligned} & g^{tt} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2g^{t\varphi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \varphi} + g^{\varphi\varphi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + 2g^{tz} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial z} \\ & + \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(g^{rr} \sqrt{-g} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right] + 2g^{\varphi z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial z} + g^{zz} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + M^2 \Phi = 0 \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Yukarıdaki denkleme, Bölüm (2)'de denklem (2.5) ile verilen metrik determinantı ve (2.6) denklemindeki ters metrik bileşenleri yazılır. Böylece kiral konik uzay-zamanda Klein Gordon denklemi

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\alpha^2 r^2} \left\{ \left(4J_0 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(4J_3 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + 32J_0 J_3 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + M^2 \right) \right] \Phi = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

elde edilir. Çalışılan eğri uzay-zamanın metriği t , φ , ve z den bağımsız olduğundan, Φ dalga fonksiyonu için aşağıdaki çözüm önerisini yazılabilir.

$$\Phi(t, r, \varphi, z) = e^{i(kz + l\varphi - Et)} R(r) \quad (4.2)$$

Burada E enerji ve $l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ açışal momentum işlemcisinin z – bileşeninin özdeğeri ve k bir sabittir.

Düz uzay koordinatlarında T, r, θ, Z , denklem (4.2)'de verilen çözüm aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Phi(t, r, \varphi, z) = e^{i(kZ + L\theta - ET)} R(r)$$

Bu ifade (t, r, φ, z) koordinatlarında

$$\Phi(t, r, \varphi, z) = e^{i(kz + \varphi[\alpha l - 4J_0 E + 4J_3 k] - Et)} R(r)$$

şeklinde ifade edilebilir. Son iki denklem karşılaştırıldığında Φ durumunun

$$L = \frac{1}{\alpha} [l + 4J_0 E - 4J_3 k]$$

ile verilen kesirli bir açısal momentuma sahip olduğu sonucu çıkartılır. Bu sonuçta, bir parçacığı kiral bir kozmik dizginin arka plan uzay-zamanında paralel olarak taşınırsa, dalga fonksiyonunun bir $e^{2\pi i L}$ faz elde edeceğini gösterir. Dalga fonksiyonu

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{2\pi i L} \Phi$$

Bu durumda ϕ 'nin manyetik akı olduğu elektromanyetik Aharonov Bohm etkisindeki $l \rightarrow l - e\phi/2\pi$ kaymasına benzer.

Denklem (4.1)'e denklem (4.2)'deki çözüm önerisi yerleştirilerek

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{[(4J_0 E + l) - 4J_3 k]^2}{\alpha^2 r^2} + E^2 - M^2 - k^2 \right] R(r) = 0 \quad (4.3)$$

denklemini elde edilir. Aşağıdaki etkin açısal momentum

$$L = \frac{1}{\alpha} [(4J_0 E + l) - 4J_3 k] \quad (4.4)$$

ve

$$\eta = E^2 - M^2 - k^2$$

ifadeleri ile (4.3) tekrardan düzenlenirse

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(\eta^2 - \frac{L^2}{r^2} \right) \right] \chi(z) = 0$$

olur. Burada $z = \eta r$ ve $R(r) = \chi(z)$ eşitlikleri kullanarak

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + \left(1 - \frac{L^2}{z^2} \right) \right] \chi(z) = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklem Bölüm (3)'de Denklem (3.1) ile verilen Bessel diferansiyel denklemdir ve denklemin genel çözümü

$$R(r) = N_1 J_{|L|}(\eta r) + N_2 N_{|L|}(\eta r) \quad (4.5)$$

$J_{|L|}(\eta r)$ birinci tür ve $N_{|L|}(\eta r)$ ikinci tür Bessel fonksiyonları ile verilir.

Parçacığın enerjisi belirlemek için, parçacığının $r = r_1$ ve $r = r_2$ 'da ($r_2 > r_1$) aralığında hareketi sınırlandırılmalıdır. Bu sınırlarda ve sınırın dışında $R(r)$ yok olmalıdır, diğer bir ifade ile

$$R(r_1) = R(r_2) = 0 \quad (4.6)$$

olmalıdır. Denklem (4.5) denklem (4.6) da kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$J_{|L|}(\eta r_1) N_{|L|}(\eta r_2) - J_{|L|}(\eta r_2) N_{|L|}(\eta r_1) \quad (4.7)$$

Parçacığın enerji spektrumu elde etmek için $\eta r_1 \gg 1$ ve $\eta r_2 \gg 1$ özel durumu kabul edilerek, sabit bir $|\lambda|$ için, Hankel'in asimtotik açılımı

$$\begin{aligned} J_{|L|}(x_i) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x_i}} \left[\cos\left(x_i - \frac{|L|\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{4|L|^2 - 1}{8x_i} \sin\left(x_i - \frac{|L|\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ N_{|L|}(x_i) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x_i}} \left[\sin\left(x_i - \frac{|L|\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4|L|^2 - 1}{8x_i} \cos\left(x_i - \frac{|L|\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

yazılabilir. Burada $x_i = \eta r_1, \eta r_2$ dir. Denklem (4.7)'ye denklem (4.8) yerleştirildikten sonra parçacığın enerjisi

$$E^2 \approx \frac{n^2 \pi^2}{(r_2 - r_1)} + \frac{4|L|^2 - 1}{8r_2 r_1} + M^2 + k^2$$

olarak bulunur [49].

4.1.1. Kiral Konik Uzay-Zamanda Klein Gordon Salıncı

Klein-Gordon salıncı, Klein Gordon denklemindeki momentum operatöründe aşağıdaki değişik yapılar elde edilir [40,42,63-64].

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - iM\omega X_\mu \quad (4.9)$$

Burada $X_\mu = (0, r, 0, 0)$, r parçacığın sicime olan uzaklığı ve ω parçacığın salınım frekansıdır. Böylece Klein Gordon salıncı

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\mu + M\omega X_\mu) \{ \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\partial_\nu - M\omega X_\nu) \} - M^2 \right] \Phi_{KS} = 0 \quad (4.10)$$

şeklinde yazılır. Denklem (2.2) ile verilen çizgi elemanı için, denklem (4.10)'nin çözümü

$$\Phi_{KS}(t, r, \varphi, z) = e^{i(kz + l\varphi - E_{KS}t)} R(r) \quad (4.11)$$

alınarak Klein Gordon salınıcı için radyal denklem

$$\left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - M\omega r \right) \left(r \frac{\partial}{\partial r} + M\omega r^2 \right) - \frac{1}{\alpha^2 r^2} [(4)_0 E_{KS} + l) - 4]_3 k]^2 \right. \\ \left. - M^2 \omega^2 r^2 + E_{KS}^2 - M^2 - k^2 + 2m\omega \right] R(r) = 0$$

elde edilir. Burada k , z momentumu; E , parçacığın enerjisi ve l , yörünge açısız kuantum sayısıdır. Yukarıdaki denklem $\rho = M\omega r^2$ değişkeni kullanılarak yeniden yazılabilir. Bu değişikliklikle birlikte denklem

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{1}{4} - \frac{L_{KS}^2}{4\rho} + \frac{\varepsilon}{4M\omega\rho} \right] R(\rho) = 0 \quad (4.12)$$

şeklini alır. Burada aşağıdaki ifade kullanılmıştır.

$$L_{KS}^2 = \frac{1}{\alpha^2} [(4)_0 E_{KS} + l) - 4]_3 k]^2 \quad (4.13)$$

$$\varepsilon = E_{KS}^2 - M^2 - k^2 + 2m\omega \quad (4.14)$$

Denklem (4.12)'nin çözümü için, $R(\rho)$ dalga fonksiyonunun $\rho \rightarrow 0$ ve $\rho \rightarrow \infty$ da asimptotik davranışı incelenmelidir. Bu yapıldığında, $R(\rho)$ fonksiyonu bilinmeyen bir $F(\rho)$ fonksiyonuna göre aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$R(\rho) = N_1 e^{-\frac{\rho}{2}} \frac{|L_{KS}|}{2} F(\rho) \quad (4.15)$$

Denklem (4.12)'a denklem (4.15) yerleştirilerek

$$\rho \frac{d^2 F(\rho)}{d\rho^2} + (|L_{KS}| + 1 - \rho) \frac{dF(\rho)}{d\rho} - \left(\frac{|L_{KS}| + 1}{2} - \frac{\varepsilon}{4M\omega} \right) F(\rho) = 0 \quad (4.16)$$

elde edilir. Bu denklem, bölüm 3'deki (3.3) denklem ile verilen konfluent hipergeometrik diferansiyel denkleminin basit bir şeklidir. Denklemin çözümü

$$F(\rho) = {}_1F_1 \left(\frac{|L_{KS}| + 1}{2} - \frac{\varepsilon}{4M\omega}, |L_{KS}| + 1, \rho \right) \quad (4.17)$$

konfluent hipergeometrik fonksiyonudur.

Hipergeometrik fonksiyonlar ile Laguerre polinomları arasındaki aşağıdaki bağıntı vardır [65].

$$L_n^k(z) = \frac{\Gamma(k+n+1)}{n! \Gamma(k+1)} {}_1F_1(-n, k+1, z)$$

O zaman, normalize edilmiş radyal dalga fonksiyonu için

$$R(\rho) = N_1 e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{\frac{|L_{KS}|}{2}} L_n^{|L_{KS}|}(\rho) \quad (4.18)$$

yazılabilir. Burada normalizasyon sabitini bulmak için

$$\int_0^\infty x^\sigma e^{-x} L_n^\sigma(z) L_m^\sigma(z) dz = \frac{\Gamma(n+\sigma+1)}{n!} \delta_{nm}$$

bağıntısı kullanılır ve normalizasyon sabiti

$$N_1 = \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+\sigma+1)}}$$

elde edilir.

Denklem (4.17) ile verilen hipergeometrik fonksiyonun fiziksel bir çözüm olabilmesi için fonksiyondaki ilk terimin aşağıdaki koşulu sağlaması gerekir.

$$\frac{|L_{KS}|+1}{2} - \frac{\varepsilon}{4M\omega} = -n$$

Bu denkleme sırasıyla denklem (4.13) ve (4.14)'de verilen L_{KS} ve ε parametreleri yerleştirildiğinde, enerji özdeğer denklemi aşağıdaki gibi bulunur.

$$E_{KS}^2 - 2M\omega \left(2n + \left| \frac{(4J_0 E_{KS} + l) - 4J_3 k}{\alpha} \right| \right) - M^2 - k^2 = 0 \quad (4.19)$$

Enerji özdeğerleri $|L_{KS}| = \left| \frac{(4J_0 E_{KS} + l) - 4J_3 k}{\alpha} \right| > 0$ ise,

$$E_{KS,nl}^> = \frac{2M\omega J_0}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{16M^2\omega^2 J_0^2}{\alpha^2} + 4M\omega n - \frac{4M\omega(2J_3 k - l)}{\alpha} + k^2 + M^2} \quad (4.20)$$

ve $|L_{KS}| = \left| \frac{(4J_0 E_{KS} + l) - 4J_3 k}{\alpha} \right| < 0$ ise,

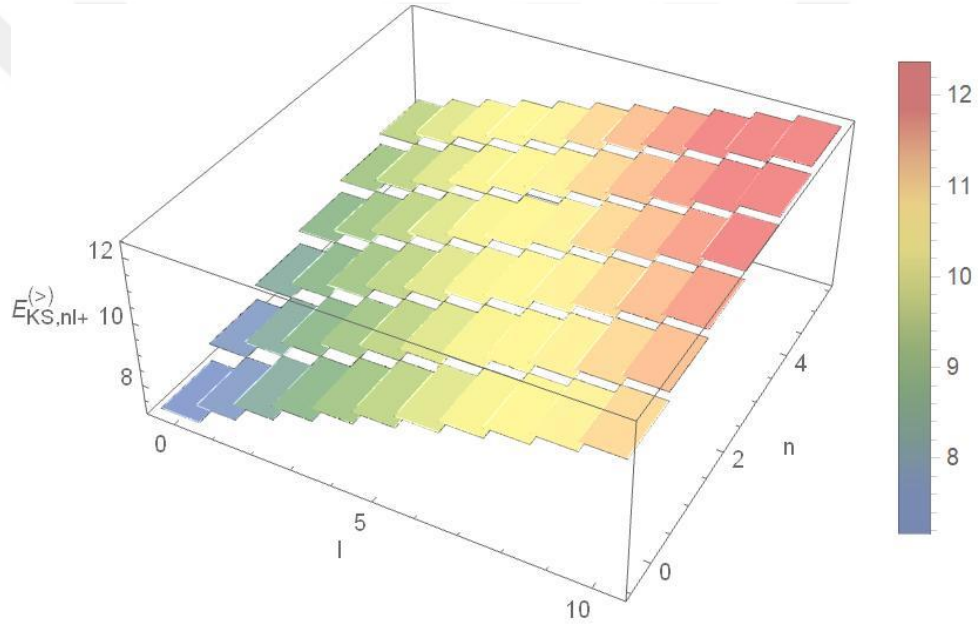
$$E_{KS,nl}^< = -\frac{2M\omega J_0}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{16M^2\omega^2 J_0^2}{\alpha^2} + 4M\omega n - \frac{4M\omega(2J_3 k - l)}{\alpha} + k^2 + M^2} \quad (4.21)$$

olur.

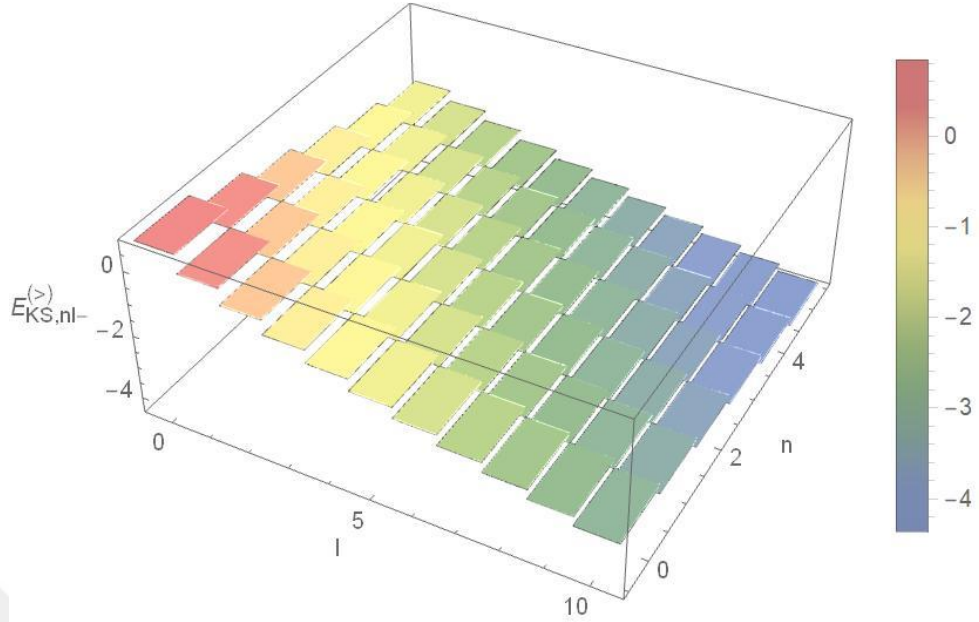
Sistemin dalga fonksiyonu

$$\Phi_{KS}(t, r, \varphi, z) = N e^{i(kz+l\varphi-E_{KS}t)} e^{-M\omega r^2} (M\omega r^2)^{\frac{|L_{KS}|}{2}} \times {}_1F_1(-n, |L_{KS}| + 1, M\Omega r^2) \quad (4.22)$$

şeklinde yazılır. Enerjiler (4.20) ve (4.21) eğri uzay-zamandaki tüm parametreler ile ω salınıcının frekansına bağlıdır. Bu enerjiler $\omega = 0$ için $E_{KS,nl} = 0$ etrafında simetriktr. J_0 α parametreleri ve ω salınıcının frekansı bu simetriyi kırar. Enerjiler (4.20) ve (4.21) ise her J_0 , α , ω için simetriktr. Bu, enerjilerin benzer spektruma sahip olduğunu ifade eder. Bu nedenle enerji (4.20) incelenecektir. Şekil 4.1 ve 4.2’de $M = k = \omega$, $J_0 = J_3 = \alpha = 0,5$ parametreleri için n ve l değişkenlerine karşı enerjinin pozitif ve negatif çözümlerini çizilmiştir. $|E_{KS,nl}^{>}|$, n ve l

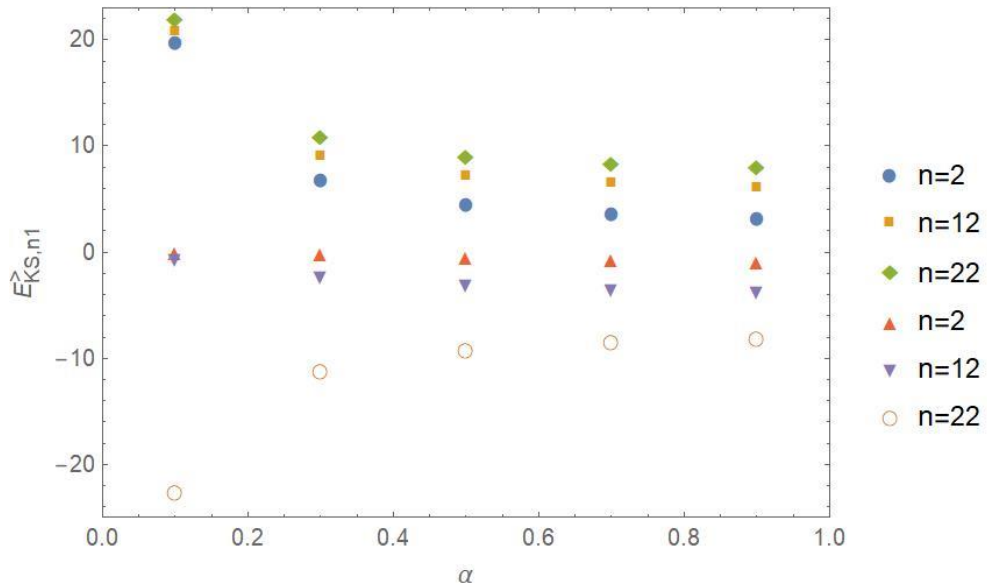


Şekil 4.1. $M = k = \omega$, $J_0 = J_3 = \alpha = 0,5$ parametreleriyle n ve l değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak $E_{KS,nl}^{>}$ enerji spektrumunun çizimi



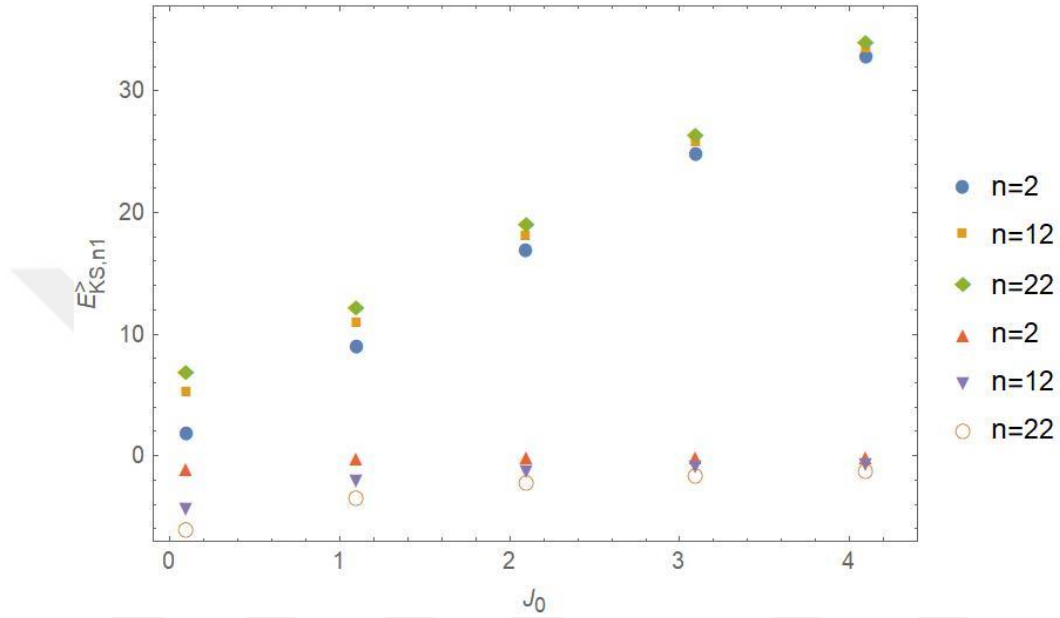
Şekil 4.2. $M = k = \omega, J_0 = J_3 = \alpha = 0,5$ ile n ve l değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak $E_{KS,nl-}^{(>)}$ negatif enerji spektrumunun çizimi

değişkenlerinin artmasıyla artar. Şekil 4.3’de, $E_{KS,nl+}^{(>)}$ pozitif enerji değerleri α ve parametresinin artması ile azalır. $|E_{KS,nl-}^{(>)}|$ ise, α ile birlikte n ’nin alacağı değerlere göre

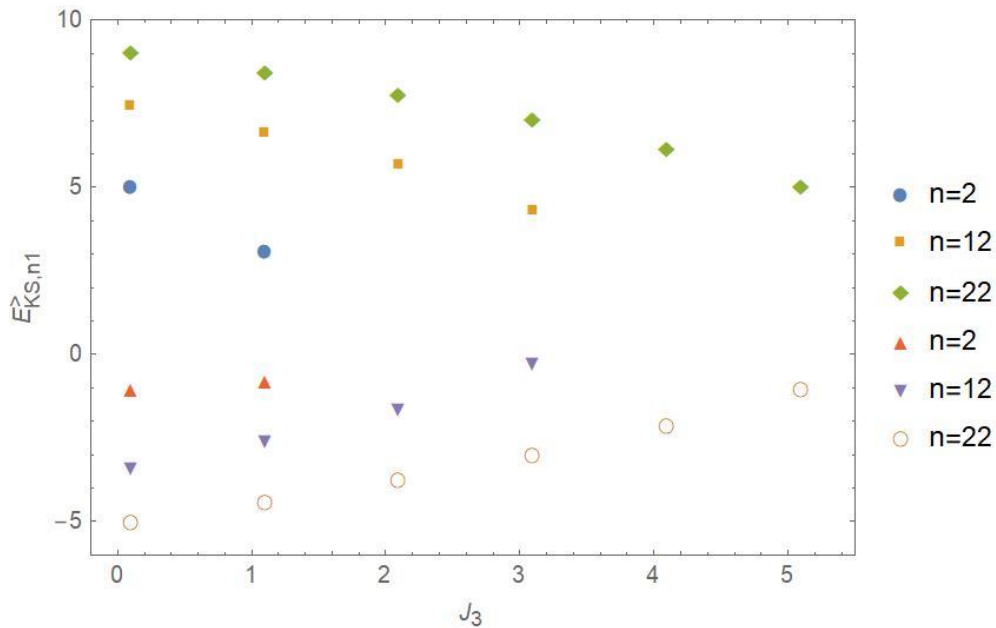


Şekil 4.3. $M = k = \omega = 1, J_0 = J_3 = \alpha = 0,5$ ile α nin bir fonksiyonu olarak $E_{KS,n1}^{(>)}$ enerji spektrumunun çizimi

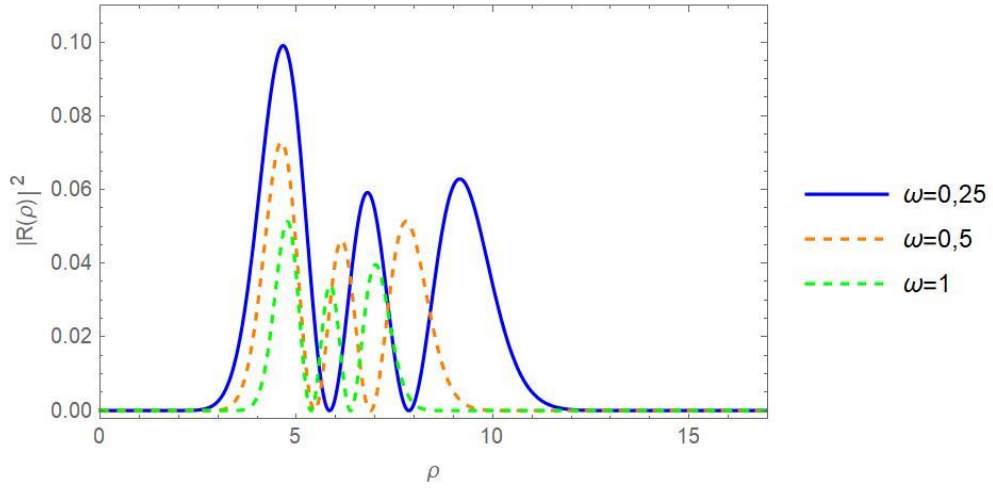
değişmektedir. $M = k = \omega = l = 1$, $J_3 = \alpha = 0,5$ için, pozitif enerjiler J_0 ile artar Şekil 4.4. Bu durumda negatif enerji değerleri n 'nin küçük değerleri ile azalırken, büyük n değerleriyle artar. Şekil 4.5'de, $|E_{KS,n1}^>|$ J_3 artarken artar. Aynı zamanda, $|E_{KS,n1}^>|$, $n = 2$ için $J_3 = 1,089$ değerinden sonra ve $n = 12$ için $J_3 = 3,084$ değerlerinden büyük değerlerde imajiner değerler alır ve parçacık bu durumlarda bulunamaz.



Şekil 4.4. $M = k = \omega = 1$, $J_3 = \alpha = 0,5$ parametreleri ile J_0 'ın bir fonksiyonu olarak $E_{KS,n1}^>$ enerji spektrumunun çizimi



Şekil 4.5. $M = k = \omega = 1$, $J_0 = \alpha = 0,5$ parametreleri ile J_3 'ün bir fonksiyonu olarak $E_{KS,n1}^>$ enerji spektrumunun çizimi



Şekil 4.6. $M = k = l = 1, J_0 = J_3 = \alpha = 0,5, n = 2$ parametreleri ile ρ değişkeninin bir fonksiyonu olarak $|R(\rho)|^2$ olasılık yoğunluğunun çizimi.

Denklem (4.18)'da verilen $R(\rho)$ radyal dalga fonksiyonunun $|R(\rho)|^2$ olasılık yoğunluğu $M = k = l = 1, J_0 = J_3 = \alpha = 0,5, n = 2$ parametreleri ve pozitif enerji değerleri ($\omega = 0,25$ için $E_{KS} = 3,000$, $\omega = 0,5$ için $E_{KS} = 4,8284$ ve $\omega = 1$ için $E_{KS} = 8,6904$) ile üç farklı ω salınıcı frekansının için Şekil 6'da çizilmiştir. $|R(\rho)|^2$ 'nin genliği ω artmasıyla azalır ve $|R(\rho)|^2$ pikleri yerel bir noktaya toplanacak şekilde hareket eder.

Özel Durum 1

Bölüm 2'de denklem (2.2) ile verilen metrikte, yerdeğiştirme (dislocation) parametresi $J_3 = 0$ olursa, dönen kozmik uzay-zamanı elde edilir. Onun çizgi elemanı

$$ds^2 = (dt + 4J_0 d\varphi)^2 - \alpha^2 r^2 d\varphi^2 - dz^2$$

ile verilir.

(4.22) ve (4.19) denklemlerinde $J_3 = 0$ yazılırsa, dönen kozmik uzay-zamanda Klein Gordon salınıcısının dalga fonksiyonu

$$\begin{aligned} \Phi(t, r, \varphi, z) = N'_1 e^{i(kz + l\varphi - E_{KS}t)} e^{-M\omega r^2} (M\omega r^2)^{\left|\frac{4J_0 E_{KS} + l}{2\alpha}\right|} \\ \times {}_1F_1\left(-n, \left|\frac{4J_0 E_{KS} + l}{2\alpha}\right| + 1, M\omega r^2\right) \end{aligned}$$

ve enerji spektrumu

$$E_{KS}^2 - 2M\omega \left(2n + \left|\frac{(4J_0 E_{KS} + l)}{\alpha}\right|\right) - M^2 - k^2 = 0$$

elde edilir.

Özel Durum 2

Bölüm 2’de denklem (2.2) ile verilen metrikte yerdeğiştirme (dislocation) ve burulma (torsion) parametreleri $J_0 = J_3 = 0$ olursa, metrik

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\varphi^2 - dz^2$$

şekline dönüşür. Bu metrikte kozmik uzay-zamanı temsil eder. Bu uzay-zaman için Klein Gordon salınıcısının dalga fonksiyonu

$$\Phi(t, r, \varphi, z) = N'_2 e^{i(kz+l\varphi-E_{KS}t)} e^{-M\omega r^2} (M\omega r^2)^{\frac{|l|}{2}} {}_1F_1(-n, |l| + 1, M\omega r^2)$$

ve enerji spektrumu

$$E_{KS}^2 - 2M\omega \left(2n + \left| \frac{l}{\alpha} \right| \right) - M^2 - k^2 = 0$$

elde edilir. Bu iki denklem Referans (37) da verilen (25) ve (26) denklemlerinin aynısıdır.

4.1.2. Kiral Konik Uzay-Zamanda Klein Gordon Salınıcısının Landau Seviyeleri

Bir dış elektromanyetik alanla etkileşen parçacık için eğri uzay-zamanda Klein Gordon salınıcı [37].

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\mu + M\omega X_\mu - iqA_\mu) [g^{\mu\nu} \sqrt{-g} (\partial_\nu + M\omega X_\nu - iqA_\nu) + M^2] \Phi_{KSL} = 0 \quad (4.23)$$

ile verilir. Sicime paralel düzgün bir manyetik alanın varlığında, vektör potansiyel $\mathbf{A} = (0, A_\varphi, 0)$

$$A_\varphi = \frac{1}{2} \alpha B r^2$$

olarak yazılabilir. Burada B manyetik alanın büyüklüğüdür.

Denklem (4.23) in çözümü için aşağıdaki çözüm önerisi kullanılabilir.

$$\Phi_{KSL}(t, r, \varphi, z) = e^{i(kz+l\varphi-E_{KSL}t)} \chi(r)$$

Böylece, kiral konik uzay-zamanda manyetik alanın varlığında Klein Gordon salınıcı

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{\alpha^2 r^2} (4J_0 E_{KSL} + l - 4J_3 k)^2 - M^2 (\omega^2 + \omega_0^2) r^2 + E_{KSL}^2 - M^2 - k^2 - \frac{8E_{KSL} M \omega_0 (J_0 + J_3)}{\alpha} + \frac{2Ml\omega_0}{\alpha} + 2M\omega \right] \chi(r) = 0$$

ile verilir. Burada $\omega_0 = \frac{qB}{2M}$ parçacığın siklotron frekansıdır. Radyal dalga denklemi,

$$L_{KSL}^2 = \frac{[(4J_0 E_{KSL} + l) - 4J_3 k]^2}{\alpha^2}$$

$$\Omega^2 = \omega^2 - \omega_0^2$$

$$\varepsilon_1 = E_{KSL}^2 - M^2 - k^2 - \frac{8E_{KSL}M\omega_0(J_0 + J_3) + 2Ml\omega_0}{\alpha} + 2M\omega$$

tanımları ile

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{L_{KSL}^2}{r^2} - M^2 \Omega^2 r^2 + \varepsilon_1 \right] \chi(r) = 0 \quad (4.24)$$

şeklinde yazılır. Burada $y = \Omega r^2$ değişken değişimi yapılarak ve

$$\chi(y) = N e^{\frac{y}{2}} y^{\frac{|L_{KSL}|}{2}} G(y) = 0$$

çözüm önerisi kullanılarak, denklem (4.24) konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemine dönüşür.

$$y \frac{d^2 G(y)}{dy^2} + (|L_{KSL}| + 1 - y) \frac{dG(y)}{dy} - \left(\frac{|L_{KSL}| + 1}{2} - \varepsilon_1 \right) G(y) = 0$$

Böylece (4.16)-(4.18) denklemlerine benzer işlemler yapılarak, enerji özdeğer denklemi

$$E_{KSL}^2 - M^2 - k^2 - 2M\Omega \left(2n + \left| \frac{(4J_0 E_{KSL} + l) - 4J_3 k}{\alpha} \right| + 1 \right) + 2M\omega + \frac{2M}{\alpha} \omega_0 (4J_0 E_{KSL} + l - 4J_3 k) = 0 \quad (4.25)$$

ve dalga fonksiyonu

$$\Phi_{KSL}(t, r, \varphi, z) = N'' e^{i(kz + l\varphi - E_{KSL}t)} e^{-M\Omega r^2} (M\Omega r^2)^{\frac{|L_{KSL}|}{2}} {}_1F_1(-n, |L_{KSL}| + 1, M\Omega r^2)$$

şeklinde bulunur. Son iki denklem sırasıyla $J_0 = J_3 = 0$ alındığında Referans (29)'un yazarlar tarafından elde edilen (36) ve (38) denklemleri ile aynıdır.

Denklem (4.25) da verilen enerji denkleminde, $|L_{KSL}| = \left| \frac{(4J_0 E_{KSL} + l) - 4J_3 k}{\alpha} \right| > 0$ ise enerji özdeğerleri ise,

$$E_{KSL, nl}^> = \frac{4MJ_0\Omega}{\alpha} + \frac{4M\omega_0(J_0 + J_3)}{\alpha}$$

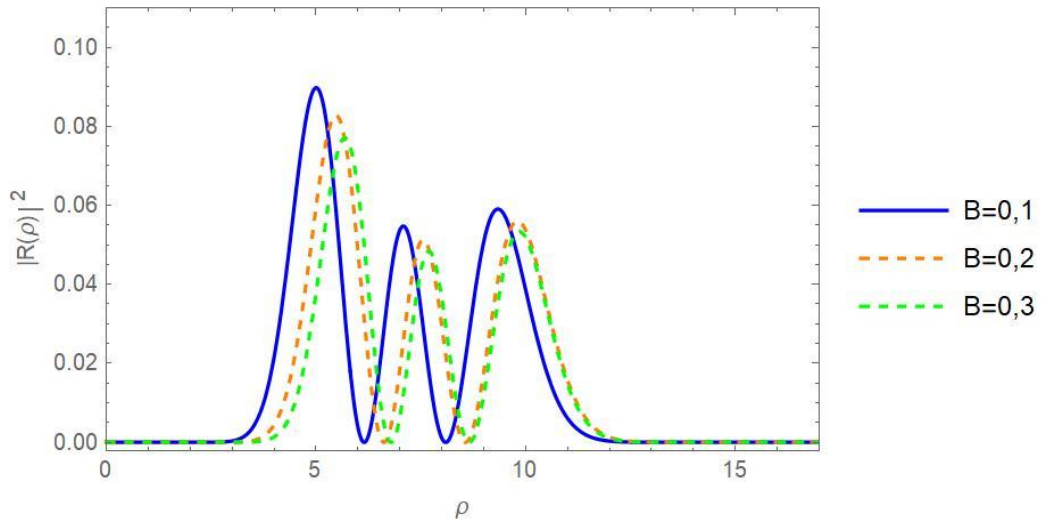
$$\pm \sqrt{4M^2\Omega^2\Sigma^2 + 4M\Omega\Pi + k^2 + M^2 - 2M\omega_0\left(1 + \frac{l}{\alpha}\right)} \quad (4.26)$$

ve denklem (4.25) da verilen enerji denkleminde $|L_{KSL}| = \left| \frac{(4J_0 E_{KSL} + l) - 4J_3 k}{\alpha} \right| < 0$ ise,

$$E_{KSL,nl}^< = -\frac{4MJ_0\Omega}{\alpha} + \frac{4M\omega_0(J_0 + J_3)}{\alpha} \pm \sqrt{4M^2\Omega^2\Sigma^2 + 4M\Omega\Pi + k^2 + M^2 - 2M\omega_0\left(1 + \frac{l}{\alpha}\right)} \quad (4.27)$$

olur. Burada $\Sigma = \frac{4}{\alpha^2} \left(\frac{(J_0 + J_3)\omega_0}{\Omega} - J_0 \right)$, $\Pi = n + \frac{1}{2} - \frac{l}{2\alpha} + \frac{2J_3 k}{\alpha}$ dır.

Energiler (4.26) ve (4.27) denklemleriyle kiral konik uzay-zamanda manyetik alanın varlığında Klein Gordon salınıcısının enerji spektrumunu oluşturur. Enerji spektrumları eğri uzay-zamanın tüm parametreleri ile salınıcının frekansı ve manyetik alan şiddetine bağlıdır. $J_0, J_3, \alpha, \omega_0, M$ ve Ω parametreleri $E_{KSL,nl}^> = 0$ ve $E_{KSL,nl}^< = 0$ etrafında ki simetriyi bozar. Bu enerji denklemleri Bölüm (4.2)' deki (4.19) ve (4.20) denklemleri ile benzerdir. Bu nedenle enerji spektrumların $J_0, J_3, \alpha, \omega_0, M$ ve bağılılıkları için benzer yorumlar yapılacağından ayrıca çizilmemiştir. Şekil 4.7'de $M = k = l = q = 1, J_0 = J_3 = \alpha = 0,5, \omega = 0,25, n = 2$ parametreleri ve enerjilerin pozitif değerleri ($B = 0,1$ için $E_{KSL} = 3,4783$, $B = 0,2$ için $E_{KSL} = 3,9449$ ve $B = 0,3$ için $E_{KSL} = 4,4117$) için ρ



Şekil 4.7. $M = k = l = q = 1, J_0 = J_3 = \alpha = 0,5, n = 2$ parametreleri ile ρ değişkeninin bir fonksiyonu olarak $|R(\rho)|^2$ olasılık yoğunluğunun çizimi.

değişkeninin bir fonksiyonu olarak $|R(\rho)|^2$ olasılık yoğunluğunun çizilmiştir. $|R(\rho)|^2$ genliği B artarken azalır ve orijinden uzaklaşacak şekilde bir miktar uzaklaşır.

4.2. Kiral Konik Uzay-Zamanda Duffin-Kemmer-Petiau Denkleminin Çözümü

Eğri uzay-zamanda, DKP denklemi [43-48]

$$[i\beta^\mu(x)\nabla_\mu - M]\Psi = 0 \quad (4.28)$$

ile verilir. Burada kovaryant türev

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu$$

ve Γ_μ DKP spin bağıntısı katsayısı

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}[\beta^a, \beta^b] \quad (4.29)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğri uzay-zamanın genelleştirilmiş β^μ beta matrisleri

$$\beta^\mu(x) = e_a^\mu(x)\beta^a$$

ile verilir. β^a matrislerinin spin-0 parçacık temsili ve çalıştığımız eğri uzay-zamanın denklem (2.4) ile verilen e_a^μ tetradları kullanılarak yukarıdaki genelleştirilmiş β^μ beta matrisleri

$$\begin{aligned} \beta^\mu(x) &= e_a^\mu \beta^a = \beta^0 + \frac{4J_0}{\alpha r} \beta^\varphi \\ \beta^r(x) &= e_a^r \beta^a = \cos \varphi \beta^1 + \sin \varphi \beta^2 \\ \beta^\varphi(x) &= e_a^\varphi \beta^a = -\frac{1}{\alpha r} \sin \varphi \beta^1 + \frac{1}{\alpha r} \cos \varphi \beta^2 \\ \beta^z(x) &= e_a^z \beta^3 \end{aligned} \quad (4.30)$$

elde edilir. Matrislerin açık yazımı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \beta^t(x) &= \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 1 & -\frac{4J_0}{\alpha r} \sin \varphi & \frac{4J_0}{\alpha r} \cos \varphi & 0 \\ \frac{4J_0}{\alpha r} \sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4J_0}{\alpha r} \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \beta^r(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\beta^\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sin \varphi}{\alpha r} & \frac{\cos \varphi}{\alpha r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sin \varphi}{\alpha r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos \varphi}{\alpha r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha r}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

$$\beta^z(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{4J_3}{\alpha r} \sin \varphi & \frac{4J_3}{\alpha r} \cos \varphi & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4J_3}{\alpha r} \sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4J_3}{\alpha r} \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Genelleştirilmiş beta matrisleriyle kiral konik uzay-zaman için DKP denklemi

$$[i\beta^t(x)\partial_t + i\beta^r(x)\partial_r + i\beta^\varphi(x)(\partial_\varphi + \Gamma_\varphi) + i\beta^z(x)\partial_z - M]\Psi = 0 \quad (4.32)$$

şeklinde yazılır. Bu denklemde, $\beta^\varphi(x)\Gamma_\varphi$ terimi denklem (4.29) ve (4.30) denklemleri kullanılarak

$$\beta^\varphi(x)\Gamma_\varphi = \frac{(\alpha - 1)}{2}\beta^1\beta^2$$

ya da matris formu ile

$$\beta^\varphi(x)\Gamma_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{(1-\alpha)}{\alpha r} \cos \varphi & \frac{(1-\alpha)}{\alpha r} \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (4.28)'daki beş bileşenli Ψ DKP spinörü

$$\Psi = e^{i(l\varphi + kz - Et)} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

olarak alınabilir. Burada $l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ açısal momentumun operatörünün z-bileşeninin özdeğeri; k =sabit lineer momentum operatörünün z-bileşeni ve E parçacığın enerjisidir. (4.33)-(4.34) denklemleri ile (4.31) de verilen genelleştirilmiş beta matrislerinin denklem (4.32)'da kullanılmasıyla, aşağıdaki birinci dereceden denklem seti elde edilir.

$$E_{K|}\phi_2 - \left(\frac{4J_0 E}{\alpha r} \sin \varphi - i \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{\alpha r} \sin \varphi - \frac{4J_3 k}{\alpha r} \sin \varphi \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i(1-\alpha)}{\alpha r} \cos \varphi \Big) \phi_3(r) + \left(\frac{4J_0 E_K}{\alpha r} \cos \varphi - i \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \right. \\
& \quad \left. \frac{l}{\alpha r} \cos \varphi - \frac{4J_3 k}{\alpha r} \cos \varphi + \frac{i(1-\alpha)}{\alpha r} \sin \varphi \right) \phi_4(r) \\
& \quad -k\phi_1(r) - M\phi_5(r) = 0 \quad (4.35a)
\end{aligned}$$

$$E_K \phi_1(r) - M\phi_2(r) = 0 \quad (4.35b)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{4J_0 E_K}{\alpha r} \sin \varphi + i \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l \sin \varphi}{\alpha r} \right. \\
& \quad \left. - \frac{4J_3 k}{\alpha r} \sin \varphi \right) \phi_1(r) - M\phi_2(r) = 0 \quad (4.35c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{4J_0 E_K}{\alpha r} \cos \varphi + i \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l \cos \varphi}{\alpha r} \right. \\
& \quad \left. - \frac{4J_3 k}{\alpha r} \cos \varphi \right) \phi_1(r) - M\phi_4(r) = 0 \quad (4.35d)
\end{aligned}$$

$$-k \phi_1(r) - M\phi_5(r) = 0 \quad (4.35e)$$

Son dört denklem (4.35a)'a yerleştirilerek, ϕ_1 için ikinci dereceden diferansiyel denklem elde edilir:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha r} \right) \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \left[\frac{(4J_0 E_K + l) - J_3 k}{\alpha} \right]^2 + (E_K^2 - M^2 - k^2) \right\} \phi_1(r) = 0$$

Yukarıdaki denklemin çözümü için $\phi_1(r) = r^{1/2} R_{mn}$ şeklinde bir çözüm önerisi yazılabilir ve denklem aşağıdaki şekilde elde edilir [64].

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left[\varepsilon^2 - \frac{\xi^2}{r^2} \right] \right\} R_{mn}(r) = 0$$

Bu denklem, bölüm 3'de (3.2) denklemini ile verilen Bessel denkleminin basit bir şeklidir. Denklemin fiziksel çözümü

$$R_{mn}(r) = A J_{\xi}(\varepsilon r)$$

birinci tür Bessel fonksiyonudur. Denklemdaki parametreler

$$\varepsilon^2 = E_K^2 - M^2 - k^2$$

$$\xi^2 = \frac{1 + 4[(4J_0 E_{K|} + l) - J_3 k]^2}{4\alpha^2}$$

ifade eder.

DKP denklemleri için akım yoğunluğu [48,67]

$$J^\mu \propto \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi$$

formülü ile verilir. $\bar{\Psi}$ adjoint spinor

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \eta_0 \quad (4.36)$$

ile tanımlanır. η_0 parametresi

$$\eta_0 = 2(\beta^0)^2 - 1 \quad (4.37)$$

formülü ile bulunan bir matrisidir. $\int d\tau J^t = \pm 1$ ile verilen dalga fonksiyonunun normalizasyon şartı açıkça [52]

$$\int d\tau \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi = \pm 2 \quad (4.38)$$

şeklinde yazılır. Formüldeki artı (eksi) işareti pozitif (negatif) yük için kullanılır.

$\mu = t$ için, yük yoğunluğu çalıştığımız eğri uzay-zaman için

$$J^t \propto \bar{\Psi} \beta^t \Psi = -2 \frac{4J_0(4J_0 E_{K|} + 4J_3 k - l) - E_{K|} \alpha^2 r^2}{M \alpha^2 r^2} |\phi_1(r)|^2 \quad (4.39)$$

olarak elde edilir.

4.2.1. Kiral Konik Uzay-Zamanda Duffin-Kemmer-Petiau Salınıcı

Eğri uzay-zamanda, M kütleli ve Ψ DKP salınıcısı spinörü için denklem, (4.28) verilen DKP denkleminde aşağıdaki yerdeğiştirme yapılarak elde edilir [45, 48, 66].

$$-i\nabla \rightarrow -i\nabla - iM\omega\eta_0 X_\mu$$

Burada $X_\mu = (0, r, 0, 0)$ parçacıktan kusura olan mesafedir. η_0 terimi (4.37) ile verilmiştir. DKP salınıcı denklemleri

$$[i\beta^\mu(x)(\nabla_\mu + M\omega\eta_0 X_\mu) - M]\Psi_{K|S}(r) = 0$$

ya da

$$[i\beta^\mu(x)\partial_\mu + i\beta^\mu(x)\Gamma_\mu + i\beta^r(x)M\omega\eta_0 r - M]\Psi_{K|S}(r) = 0 \quad (4.40)$$

ile verilir. Yukarıdaki ifadeye denklem (4.34) benzer bileşenleri ψ_i ($i=1,5$) ile verilen DKP spinörünü yerleştirerek, beş lineer denklem elde edilir:

$$E_{K|S}\psi_2 - \left(\frac{4J_0 E_{K|S}}{\alpha r} \sin \varphi + i \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l}{\alpha r} \sin \varphi - \frac{4J_3 k}{\alpha r} \sin \varphi - \frac{i(1-\alpha)}{\alpha r} \cos \varphi + iM\omega r \cos \varphi \right) \psi_3(r)$$

$$+ \left(\frac{4J_0 E_{K|S}}{\alpha r} \cos \varphi - i \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l}{\alpha r} \cos \varphi - \frac{4J_3 k}{\alpha r} \cos \varphi + \frac{i(1-\alpha)}{\alpha r} \sin \varphi + iM\omega r \sin \varphi \right) \psi_4 - k\psi_5(r) - M\psi_1(r) = 0$$

$$E_{K|S}\psi_1(r) - M\psi_2(r) = 0$$

$$\left(\frac{4J_0 E_{K|S}}{\alpha r} \sin \varphi + i \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l}{\alpha r} \sin \varphi - \frac{4J_3 k}{\alpha r} \sin \varphi - iM\omega r \cos \varphi \right) \psi_1(r) - M\psi_3(r) = 0$$

$$\left(\frac{4J_0 E_{K|S}}{\alpha r} \cos \varphi + i \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l}{\alpha r} \cos \varphi - \frac{4J_3 k}{\alpha r} \cos \varphi - iM\omega r \sin \varphi \right) \psi_1(r) - M\psi_4(r) = 0$$

$$-k\psi_1(r) - M\psi_5(r) = 0$$

Bu denklemlerden, $\psi_1(r)$ için

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1-\alpha}{\alpha r} \frac{d}{dr} + E_{K|S}^2 - M^2 - k^2 + 2M\omega - \frac{M\omega}{\alpha} - M^2\omega^2 r^2 - \frac{1}{r^2} \left[\frac{1 + (4J_0 E_{K|S} + l) - 4J_3 k}{\alpha} \right]^2 \right\} \psi_1(r) = 0 \quad (4.41)$$

denklemini elde edilir. Yukarıdaki denklemde

$$\psi_1(r) = r^{1/2\alpha} F_{n,l}(r) \quad (4.42)$$

ile ifade edilen bir fonksiyon kullanılır ve denklem aşağıdaki forma dönüşür.

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(\Sigma_1 r^2 + \frac{\Sigma_2}{r^2} + \Sigma_3 \right) \right\} F_{n,l}(r) = 0 \quad (4.43)$$

Burada Σ_1 , Σ_2 ve Σ_3 fiziksel parametrelere göre tanımlanır:

$$\Sigma_1 = -M^2\omega^2$$

$$\Sigma_2 = \frac{1 + 4[(4J_0 E_{K|S} + l) - 4J_3 k]^2}{4\alpha^2}$$

$$\Sigma_3 = E_{K|S}^2 - M^2 - k^2 + 2M\omega - \frac{M\omega}{\alpha}$$

Denklem (4.43)'da $\rho = r^2$ değişken değişimi yapıldığında, denklem

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{1}{4\rho} \left(\Sigma_1 \rho + \frac{\Sigma_2}{\rho} + \Sigma_3 \right) \right\} F_{n,l}(\rho) = 0 \quad (4.44)$$

şekilde yazılabilir. Bu denklem Nikiforov Uvarov metodunda verilen (3.5) denklemle ile karşılaştırılır ve denklem (3.8) den yararlanılarak $F_{n,l}(\rho)$ fonksiyonunun elde etmek için gerekli olan parametreler bulunur:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{M^2 \omega^2}{4} \\
\xi_2 &= \frac{1}{4} \left(E_{K|S}^2 - M^2 - k^2 + 2M\omega - \frac{M\omega}{\alpha} \right) \\
\xi_3 &= \frac{1 + 4[(4J_0 E_{K|S} + l) - 4J_3 k]^2}{16\alpha^2} \\
c_1 &= 1 \\
c_2 &= c_3 = c_4 = c_5 = 0 \\
c_6 &= \frac{M^2 \omega^2}{4} \\
c_7 &= \frac{1}{4} \left(E_{K|S}^2 - M^2 - k^2 + 2M\omega - \frac{M\omega}{\alpha} \right) \\
c_8 &= \frac{1 + 4[(4J_0 E_{K|S} + l) - 4J_3 k]^2}{16\alpha^2} \\
c_9 &= \frac{M^2 \omega^2}{4} \\
c_{10} &= 1 + \frac{1}{2\alpha} \sqrt{1 + 4[(4J_0 E_{K|S} + l) - 4J_3 k]^2} \\
c_{11} &= M\omega \\
c_{12} &= 1 + \frac{1}{2\alpha} \sqrt{1 + 4[(4J_0 E_{K|S} + l) - 4J_3 k]^2} \\
c_{13} &= -\frac{M\omega}{2}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Yukarıdaki parametreler, (3.8) denkleminde kullanılarak DKP salımcısı için dalga fonksiyonu

$$F_{n,l}(\rho) = C e^{-\frac{M\omega}{2} r^2} r^{\frac{1}{2\alpha} \sqrt{1 + [(4J_0 E_{K|S} + l) - 4J_3 k]^2}} L_n^{\frac{1}{\alpha} \sqrt{1 + [(4J_0 E_{K|S} + l) - 4J_3 k]^2}} (M\omega r^2) \tag{4.46}$$

olarak bulunur. C normalizasyon sabitidir. (4.38) denklemi ile verilen yük yoğunluğu ifadesi $\psi_1(r) = r^{1/2\alpha} F_{n,l}(r)$ dalga fonksiyonunun

$$\int_0^\infty dr \left(\frac{2E_{K|S}\alpha^2 r^2 - 8J_0(4J_0 E_{K|S} - 4J_3 k + l)}{\alpha^2 r^2 M} \right) |r^{1/2\alpha} F_{n,l}(r)|^2 = 1 \tag{4.47}$$

şeklinde normalize edilmesi gerektiğini belirtir.

Böylece, DKP salıncısı için dalga fonksiyonu

$$\Psi_{K|S}(\mathbf{r}) = C \begin{pmatrix} \frac{1}{M} E_{K|S} \\ \left(\frac{4J_0 E_{K|S}}{\alpha r} \sin \varphi + i \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l \sin \varphi}{\alpha r} - \frac{4J_3 k}{\alpha r} \sin \varphi - iM\omega r \cos \varphi \right) \\ \frac{M}{M} \\ \left(\frac{4J_0 E_{K|S}}{\alpha r} \cos \varphi + i \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l \cos \varphi}{\alpha r} - \frac{4J_3 k}{\alpha r} \cos \varphi - iM\omega r \sin \varphi \right) \\ \frac{M}{M} \\ \frac{k}{-\frac{M}{M}} \end{pmatrix} \times e^{(il\varphi + kz - iEt - \frac{M\omega}{2} r^2)} r^{\frac{1}{2\alpha}} \sqrt{1 + [(4J_0 E_{K|S} + l) - 4J_3 k]^2} \times L_n^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt{1 + [(4J_0 E_{K|S} + l) - 4J_3 k]^2} (M\omega r^2) \quad (4.48)$$

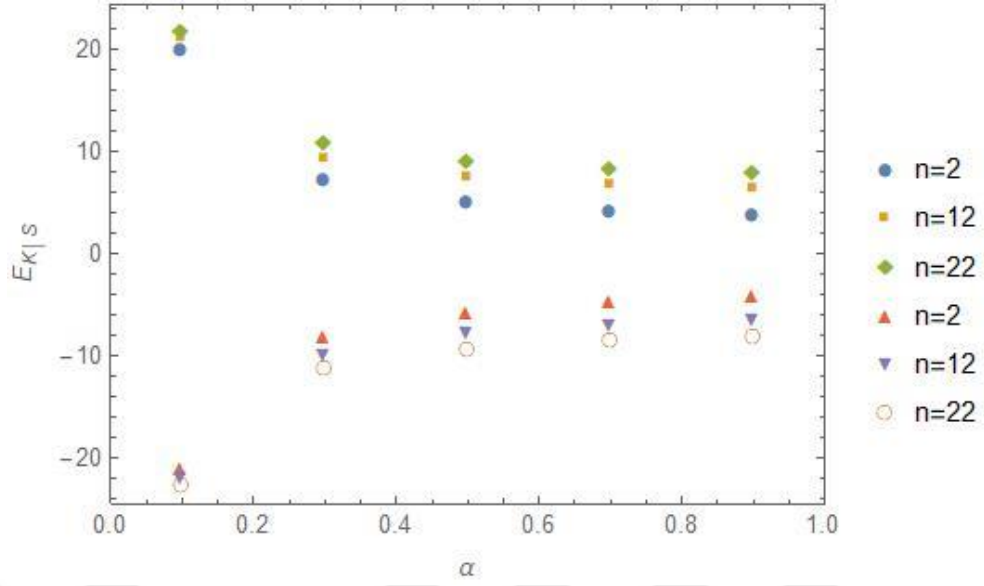
olarak yazılır.

(3.9) ve (4.45) denklemlerinden, enerji denklemi elde edilir:

$$2(2n + 1)M\omega - \frac{1}{2} \left(E_{K|S}^2 - M^2 - k^2 + 2M\omega - \frac{M\omega}{\alpha} \right) + \frac{M}{4\alpha} \sqrt{1 + 4[(4J_0 E_{K|S} + l) - 4J_3 k]^2} = 0 \quad (4.49)$$

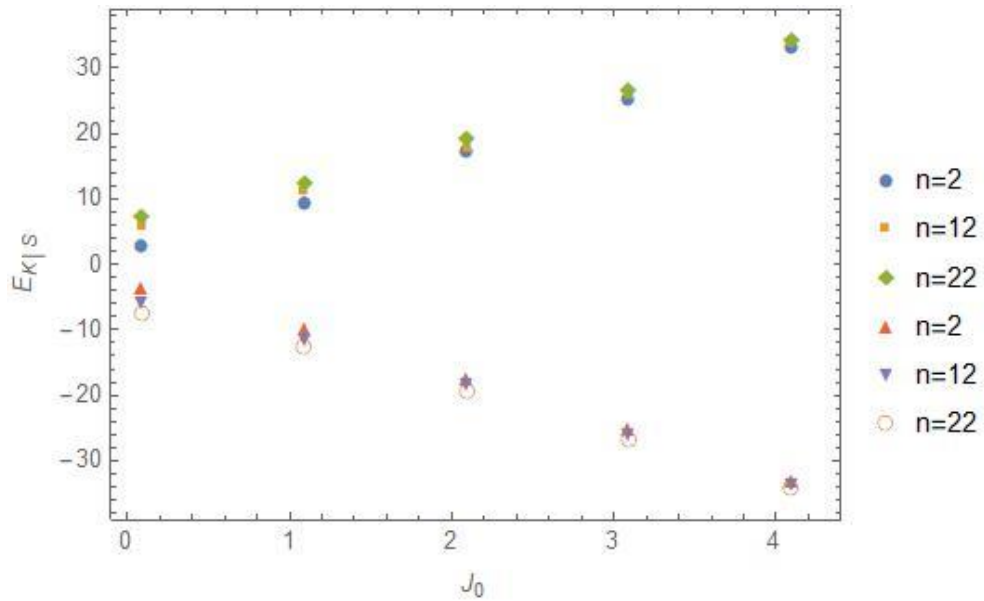
α , J_0 , J_3 , eğri uzay-zaman parametreleri ve ω salıncı frekansının DKP salıncısının enerji düzeyleri, akım yoğunluğu ve olasılık yoğunluğu üzerindeki etkilerini sırasıyla incelenecektir.

Şekil 4.8 $M = k = l = 1$, $J_0 = J_3 = \omega = 0.5$ ve $n(2, 12, 22)$ için DKP salıncısının farklı α değerleri için enerji spektrumu vermektedir. Şekil bozonların ve anti-bozonların enerjisinin α 'nın artmasıyla azaldığını ifade etmektedir.



Şekil 4.8. $M = k = l = 1, J_0 = J_3 = \omega = 0,5$ için α 'nın bir fonksiyonu olarak DKP salıncısının $E_{K|S}$ enerji spektrumunun çizimi

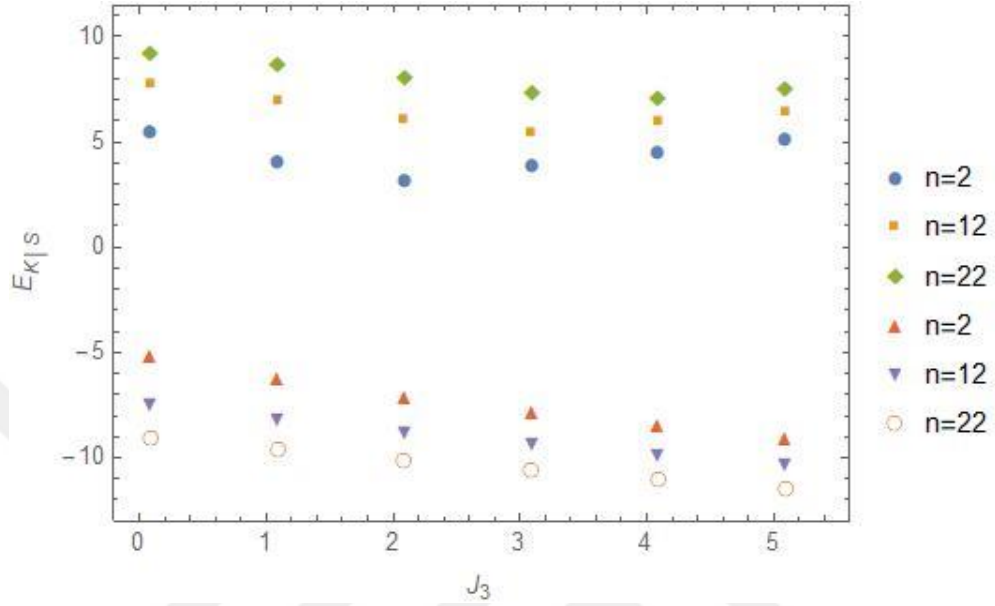
Şekil 4.9, $M = k = l = 1, \alpha = J_3 = \omega = 0.5$ ve $n(2, 12, 22)$ için DKP salıncısının farklı J_0 değerleri için enerji spektrumu vermektedir. Bu şekil bozonların ve anti-bozonların enerjisinin J_0 'nın artmasıyla arttığını göstermektedir.



Şekil 4.9. $M = k = l = 1, \alpha = J_3 = \omega = 0,5$ parametreleri için J_0 parametresine karşı DKP salıncısının $E_{K|S}$ enerji spektrumu

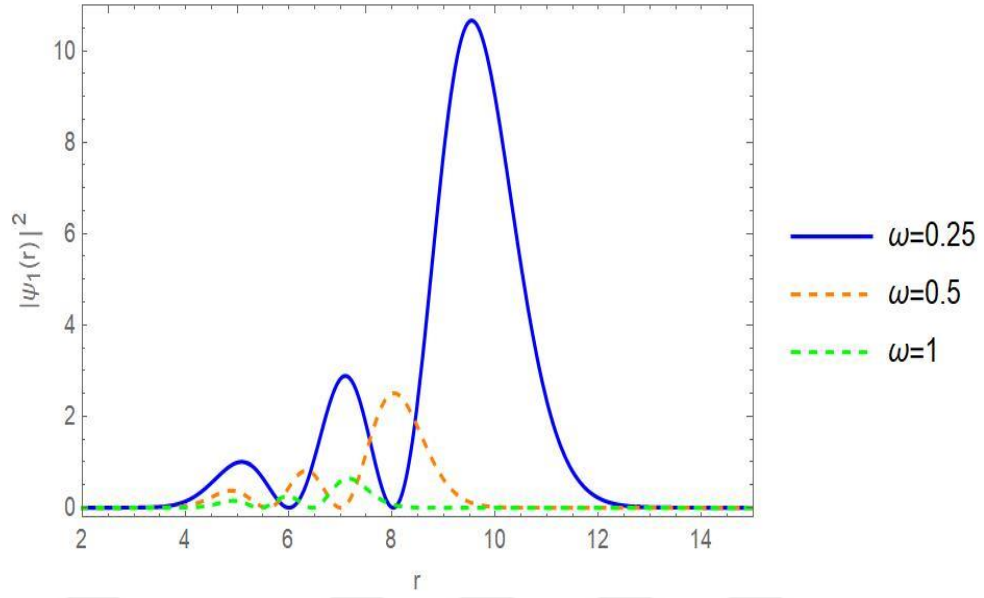
Şekil 4.10'de, $M = k = l = 1, \alpha = J_0 = \omega = 0.5$ ve $n(2, 12, 22)$ için DKP salıncısının enerjisi J_3 parametresinin farklı değerleri için enerji spektrumu

verilmektedir. Burada bozonların enerjisi, J_3 'nin artmasıyla kritik değer olan $J_3 = 2$ değerine kadar azaldıktan sonra tekrar arttığını görülmektedir. Anti-bozonların enerji spektrumunun ise J_3 nin artmasıyla azalmaktadır.

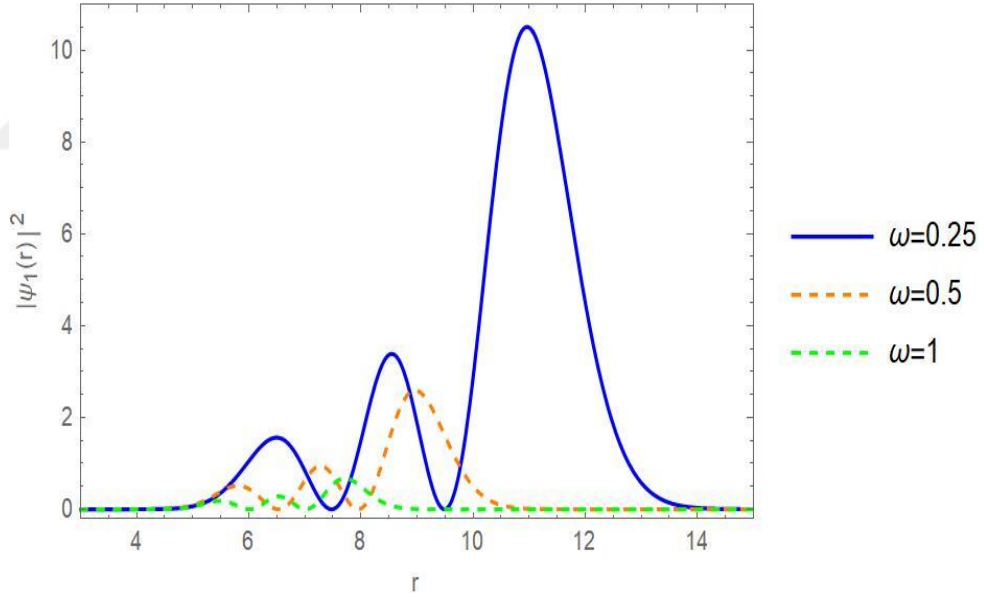


Şekil 4.10. $M = k = l = 1$, $\alpha = J_0 = \omega = 0,5$ parametreleri için J_3 parametresine karşı DKP salınıcısının $E_{K|S}$ enerji spektrumu

Şekil 4.11 ve Şekil 4.12’de, $M = k = l = 1$, $J_0 = J_3 = 1$ ve $\alpha = 0.5$ parametreleri ile pozitif ve negatif enerji ($\omega = 0,25$ için $E_{K|S,+} = 2,8983$ ve $E_{K|S,-} = -3,3051$; $\omega = 0,50$ için $E_{K|S,+} = 4,5888$ ve $E_{K|S,-} = -5,1719$; $\omega = 1$ için $E_{K|S,+} = 8,09440$ ve $E_{K|S,-} = -8,8339$) değerleri için (4.42) denkleminde verilen ψ_1 dalga fonksiyonunun $|\psi_1(r)|^2$ olasılık yoğunluğu farklı ω değerleri için çizilmiştir. Her iki durumda, genliğin ω 'nın artmasıyla azaldığı ve orijine doğru yaklaştığı görülmektedir.



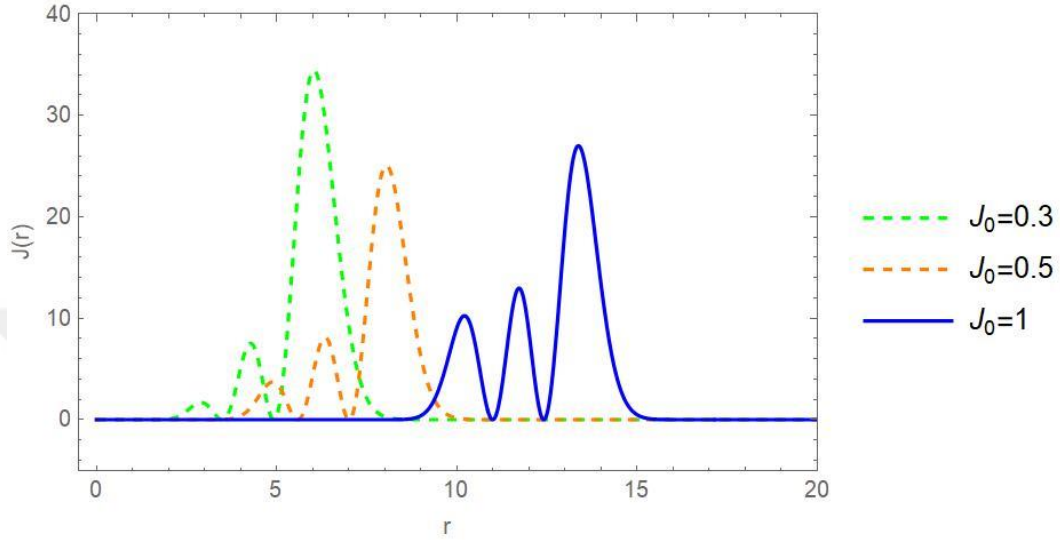
Şekil 4.11. $M = k = l = 1$, $\alpha = J_0 = J_3 = 0,5$ parametreleri ile pozitif enerji değerleri için r 'nin fonksiyonu olarak (denklem (4.42) ile verilen ψ_1 ile) $|\psi_1(r)|^2$ olasılık yoğunluğunun çizimi



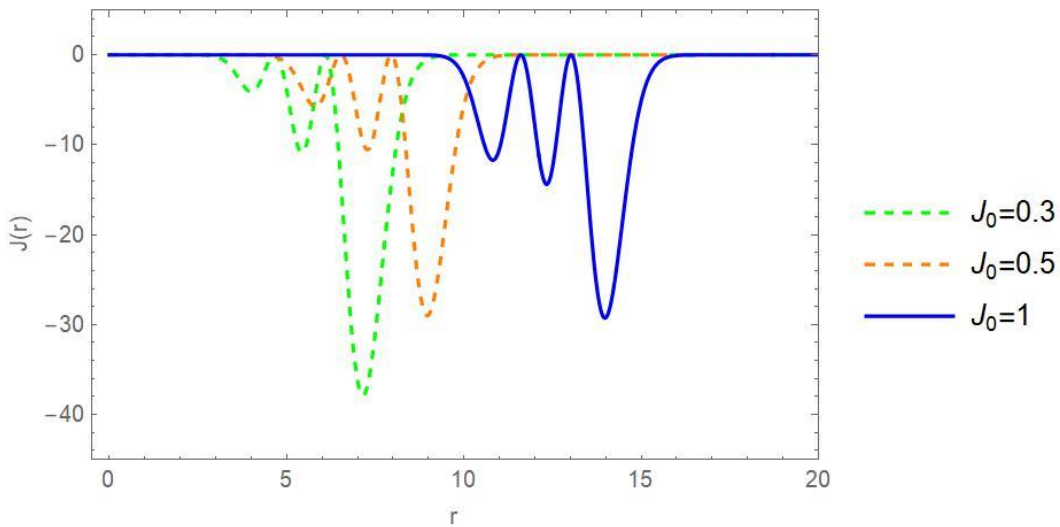
Şekil 4.12. $M = k = l = 1$, $\alpha = J_0 = J_3 = 0,5$ parametreleri ile negatif enerji değerleri için r 'nin fonksiyonu olarak (denklem (4.42) ile verilen ψ_1 ile) $|\psi_1(r)|^2$ olasılık yoğunluğunun çizimi

Şekil 4.13'de denkleminde elde edilen J_0 ın çeşitli değerlerine karşılık gelen pozitif enerjiler ($J_0 = 0,3$ için $E_{K|S} = 3,7516$, $J_0 = 0,5$ için $E_{K|S} = 5,0046$ ve $J_0 = 1$ için $E_{K|S} = 8,5833$) için $M = k = l = 1$, $\alpha = \omega = J_3 = 0.5$ ve $n = 2$ parametreleri ile r 'nin bir fonksiyonu olarak $J^t(r)$ yük yoğunluğu gösterir. Tüm durumlarda genişlik

orijinden uzaklaşırken artar. şekil 4.14, şekil 4.13'daki çiziminin negatif enerji değerleri ile tekrardır. şekil 4.14'da $J_0 = 0,3$ için $E_{K|S} = -4,4372$, $J_0 = 0,5$ için $E_{K|S} = -5,6083$ ve $J_0 = 1$ için $E_{K|S} = -9,0006$ dir. Negatif enerji çözümleri için yük yoğunluğunda benzer değişim görülür.

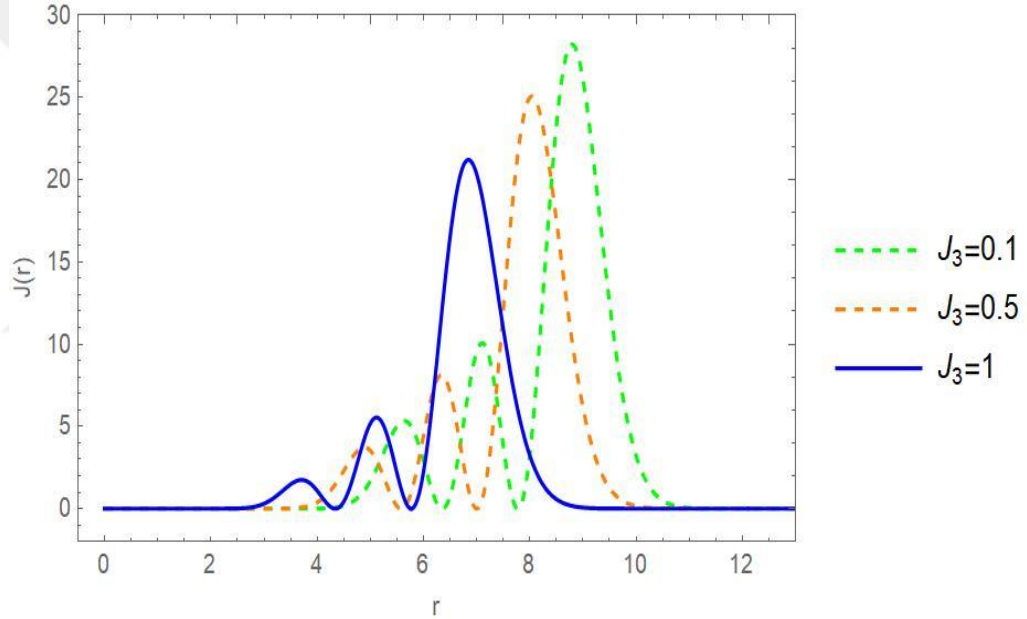


şekil 4.13. $M = k = l = 1$, $\alpha = \omega = J_3 = 0.5$ parametreleri ile pozitif enerjiler ve J_0 'nın farklı değerleri için r 'nın bir fonksiyonu olarak denklem (4.39) 'da verilen J^t yük yoğunluğunun çizimi

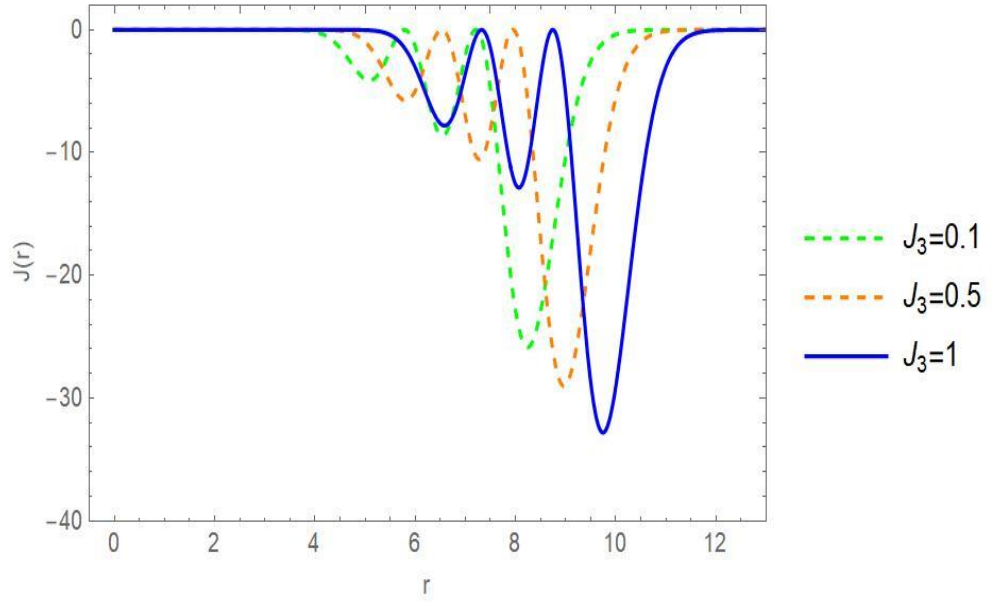


şekil 4.14. $M = k = l = 1$, $\alpha = \omega = J_3 = 0.5$ parametreleri ile negatif enerjiler ve J_0 'nın farklı değerleri için r 'nın bir fonksiyonu olarak denklem (4.39) 'da verilen J^t yük yoğunluğunun çizimi

Şekil 4.15’de, $M = k = l = 1$, $\alpha = \omega = J_0 = 0,5$ ve $n = 2$ parametreleri ile pozitif enerjiler ve J_3 ’ün farklı değerleri için r ’nin fonksiyonu olarak denklem (4.39)’daki $J^t(r)$ yük yoğunluğu çizdirilmiştir. Enerjiler $J_3 = 0,1$ için $E_{K|S} = 5,4959$, $J_3 = 0,5$ için $E_{K|S} = 5,0046$ ve $J_3 = 1$ için $E_{K|S} = 4,2462$ ’dir. $J^t(r)$ pikleri, J_3 değişimi ile belirgin bir şekilde hareket etmiyor gibi görülmektedir. Tüm durumlarda genlik orijinden uzaklaşırken artmaktadır. Yerel genliklerinde, J_3 ’ün azalmasıyla arttığı görülmektedir. Şekil 4.16, Şekil 4.15’deki aynı parametreler için negatif enerji değerleriyle denklem (4.39)’da elde edilen $J^t(r)$ çizilmiştir. Enerjiler $J_3 = 0,1$ için $E_{K|S} = -5,1346$, $J_3 = 0,5$ için $E_{K|S} = -5,6084$ ve $J_3 = 1$ için $E_{K|S} = -6,1251$ dir. Bu durumda en göze çarpan etki, yoğunluk pikleri pozitif enerjili durumların aksine J_3 artarken orijinden uzaklaşır.



Şekil 4.15. $M = k = l = 1$, $\alpha = \omega = J_0 = 0.5$ parametreleri ile pozitif enerjiler ve J_3 ’nin farklı değerleri için r ’nin bir fonksiyonu olarak denklem (4.39)’da verilen J^t yük yoğunluğunun çizimi



Şekil 4.16. $M = k = l = 1$, $\alpha = \omega = J_0 = 0.5$ parametreleri ile negatif enerjiler ve J_3 'nın farklı değerleri için r 'nin bir fonksiyonu olarak denklem (4.39) 'da verilen J^t yük yoğunluğunun çizimi

Özel Durum 1

(4.48) ve (4.49) denklemlerinde $J_3 = 0$ yazılırsa, dönen kozmik uzay-zamanda DKP salınıcısının dalga fonksiyonu ve enerji spektrumu elde edilir. Dalga fonksiyonu

$$\Psi_1(\mathbf{r}) = C_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{E_{K|S}} \\ \frac{M}{\left(\frac{4J_0 E_{K|S}}{\alpha r} \sin \varphi + i \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l \sin \varphi}{\alpha r} - i M \omega r \cos \varphi \right)} \\ \frac{M}{\left(\frac{4J_0 E_{K|S}}{\alpha r} \cos \varphi + i \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l \cos \varphi}{\alpha r} - i M \omega r \sin \varphi \right)} \\ -\frac{k}{M} \end{pmatrix} \times e^{(il\varphi + ikz - iE_{K|S}t - \frac{M\omega}{2})r^2} r^{\frac{1}{2\alpha}} \sqrt{1 + [(4J_0 E_{K|SL} + l) - 4J_3 k]^2} \times L_n^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt{1 + [(4J_0 E_{K|SL} + l) - 4J_3 k]^2} (M\omega r^2)$$

ve enerji spektrumu

$$2(2n + 1)M\omega - \frac{1}{2} \left(E_{K|S}^2 - M^2 - k^2 + 2M\omega - \frac{M\omega}{\alpha} \right) + \frac{M}{4\alpha} \sqrt{1 + [(4J_0 E_{K|SL} + l) - 4J_3 k]^2} = 0$$

olarak yazılır. Bu durumda yukarıdaki enerji spektrumu referans (54)'de verilen enerji spektrumu ile benzerdir.

Özel Durum 2

(4.48) denkleminde, yerdeğiştirme (dislocation) ve burulma (torsion) parametreleri $J_0 = J_3 = 0$ olursa, kozmik uzay-zamanın için DKP salınıcısının dalga fonksiyonu

$$\Psi_2(\mathbf{r}) = C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{E_{K|S}} \\ \frac{E_{K|S}}{M} \\ \left(i \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l \sin \varphi}{\alpha r} - iM\omega r \cos \varphi \right) \\ \frac{M}{\left(i \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l \cos \varphi}{\alpha r} - iM\omega r \sin \varphi \right)} \\ \frac{M}{k} \\ -\frac{k}{M} \end{pmatrix} \times e^{(il\varphi + ikz - iE_{K|S}t - \frac{M\omega}{2})r^2} r^{\frac{1}{2\alpha}} \sqrt{1 + [(4J_0 E_{K|SL} + l) - 4J_3 k]^2} \times L_n^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt{1 + [(4J_0 E_{K|SL} + l) - 4J_3 k]^2} (M\omega r^2)$$

elde edilir.

(4.49) denklemlerinde $J_0 = J_3 = 0$ yazılırsa, enerji spektrumu

$$2(2n + 1)M\omega - \frac{1}{2} \left(E_{K|S}^2 - M^2 - k^2 + 2M\omega - \frac{M\omega}{\alpha} \right) + \frac{M}{4\alpha} \sqrt{1 + [(4J_0 E_{K|SL} + l) - 4J_3 k]^2} = 0$$

olarak yazılır. Bu sonuçlar referans (67)'de elde edilen enerji spektrumu ile tutarlıdır.

4.2.2. Kiral Konik Uzay-Zamanda Duffin-Kemmer-Petiau Salınıcısının Landau Seviyeleri

Eğri bir uzay-zamanda, elektromanyetik alanın varlığında skaler bozonlar için DKP salınıcı denklemi aşağıdaki denklem ile verilir [68].

$$[i\beta^\mu(x)(\nabla_\mu + iM\omega\eta_0\mathbf{r} + \Gamma_\mu - iqA_\mu) - M]\Psi_{K|SL} = 0 \quad (4.50)$$

Burada A_μ elektromanyetik dört vektördür. Sicime paralel düzgün bir $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = B\hat{k}$ manyetik alan olsun. Böylesi düzgün bir manyetik alan Coulomb ayar şartını sağlayan

$$\mathbf{A} = (0, A_\varphi, 0) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$A_\varphi = \frac{1}{2} \alpha B r^2$$

vektör potansiyelin sonucudur. Burada B manyetik alanın büyüklüğünü tanımlamaktadır. (4.50) ile verilen denklem

$$\begin{aligned} & [i\beta^t(\mathbf{x}) \partial_t + i\beta^r(\mathbf{x})(\partial_r + M\omega\eta_0 r) + i\beta^\varphi(\mathbf{x})(\partial_\varphi + \Gamma_\varphi - iqA_\varphi) \\ & + i\beta^z(\mathbf{x}) \partial_z - M] \Psi_{K|SL} = 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki denkleme (4.34)'da verilen beş bileşenli bir DKP spinörü yerleştirilir ve bölüm (4.2.1) deki denklemler (4.40)-(4.47)'da yapılan işlemler tekrarlanarak manyetik alandaki DKP salıncısı için dalga fonksiyonu

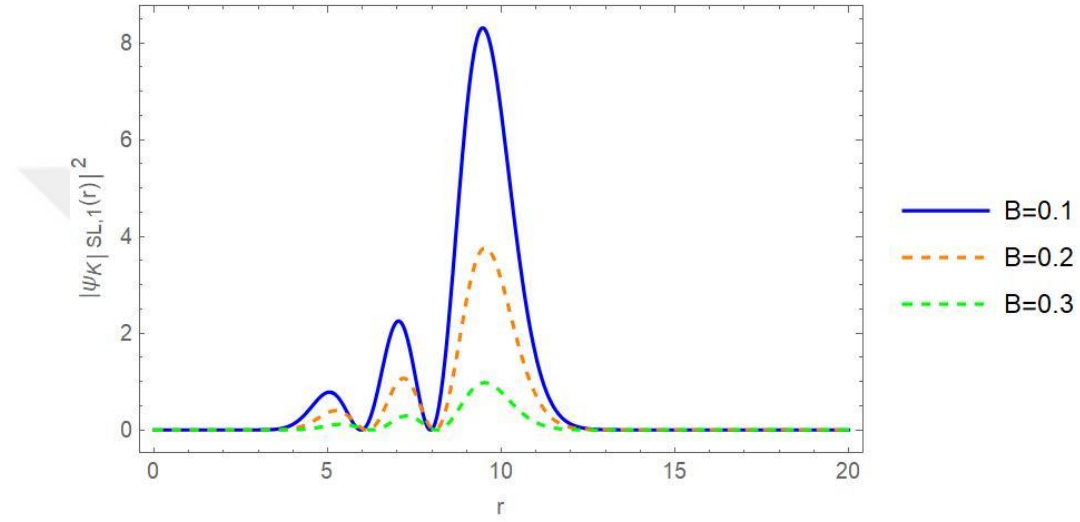
$$\begin{aligned} \Psi_{K|SL}(\mathbf{r}) = C & \begin{pmatrix} \frac{1}{M} \frac{E_{K|SL}}{M} \\ \frac{(4J_0 E_{K|SL} \sin \varphi + i \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l \sin \varphi}{\alpha r} - \frac{4J_3 k}{\alpha r} \sin \varphi - iM\omega r \cos \varphi - \frac{\omega_0}{\alpha} \sin \varphi)}{M} \\ \frac{(4J_0 E_{K|SL} \cos \varphi + i \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l \cos \varphi}{\alpha r} - \frac{4J_3 k}{\alpha r} \cos \varphi - iM\omega r \sin \varphi + \frac{\omega_0}{\alpha} \cos \varphi)}{M} \\ -\frac{k}{M} \end{pmatrix} \\ & \times e^{(il\varphi + kz - iEt - \frac{M\Omega}{2} r^2)} r^{\frac{1}{2\alpha}} \sqrt{1 + [(4J_0 E_{K|SL} + l) - 4J_3 k]^2} \\ & \times L_n^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt{1 + [(4J_0 E_{K|SL} + l) - 4J_3 k]^2} (M\Omega r^2) \end{aligned}$$

ve enerji denklemleri

$$\begin{aligned} & 2(2n+1)M\Omega + \frac{M\Omega}{4\alpha} \sqrt{1 + 4[(4J_0 E + l) - 4J_3 k]^2} \\ & - \frac{1}{2} \left(E_{K|SL}^2 - M^2 - k^2 + 2M\omega + \frac{2M\omega_0(4J_0 E_{K|SL} + l - 4J_3 k) - M\omega}{\alpha} \right) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\omega_0 = \frac{qB}{2M}$ parçacığın siklotron frekansı ve $\Omega^2 = \omega^2 + \omega_0^2$ etkin frekansıdır. Son iki denklem göstermektedir ki, sistemin dalga fonksiyonu ve enerji spektrumu eğri uzaydaki metriğin yapısını karakterize eden parametrelerin yanı sıra parçacığın siklotron frekansı ve uygulanan manyetik alanın büyüklüğüne bağlıdır.

Şekil 4.20’de, $M = k = q = l = 1$, $\alpha = J_0 = J_3 = 0.5$, $\omega = 0,25$ ve $n = 2$ parametreleri, pozitif enerjiler ve farklı B manyetik alanları için r ’nin fonksiyonu olarak denklem (4.35)’ile verilen $\psi_{K|SL,1}$ dalga fonksiyonunun $|\psi_{K|SL,1}(r)|^2$ olasılık yoğunluğu çizdirilmiştir. $E_{K|SL} = 3,1400$, $B = 0,2$ için $E_{K|SL} = 3,4562$ ve $B = 0,3$ için $E_{K|SL} = 3,8399$ ’dir $|\psi_{K|SL,1}(r)|^2$ pikleri, B manyetik alan değişimi ile bir araya gelecek şekilde hareket ediyor gibi görülmektedir. Genlik ise B artarken hızla azalır.



Şekil 4.17. $M = k = q = l = 1$, $\alpha = J_0 = J_3 = 0.5$, $n = 2$, $\omega = 0,25$ parametreleri ile pozitif enerji değerleri ve B manyetik alanın farklı değerleri için r ’nin bir fonksiyonu olarak $|\psi_{K|SL,1}(r)|^2$ olasılık yoğunluğunun çizimi.

5. SONUÇ

Bu tezde, Bezerra tarafında kiral konik uzay-zamanda incelenen Klein Gordon denklemi [49] tanıtıldı. Bu uzay-zamanda, Klein Gordon salınıcıyı tanımlayan Klein Gordon denklemi, manyetik alanın varlığında ve olmadığı durumlarda elde edildi. Klein Gordon salınıcı denklemi cebirsel yöntemlerle çözülerek enerji spektrumu ve özvektörleri türetilti. Bu sonuçlar [37] referansında verilen sonuçların bir genellemesidir. Özvektörler konfluent hipergeometrik fonksiyonlarla verilir. Enerji spektrumu $|L_{KS}|$ etkin açısal momentumun bağlı olması nedeniyle, enerji özdeğerleri $|L_{KS}| > 0$ ve $|L_{KS}| < 0$ durumuna göre belirlenir. Enerjiler (4.20) ve (4.21) benzerdirler ve enerji spektrumunun $E_{KS,nl} = 0$ etrafındaki simetrisi, uzay-zamanın J_0 , α parametreleri ve ω salınıcının frekansı tarafından bozulur. Enerjiler (4.20) ve (4.21) benzer olmaları nedeniyle, sadece (4.20) denklemindeki enerji spektrumu üzerinde uzay-zaman parametrelerin etkisi incelenmiştir. $|E_{KS,nl}^>|$ n ve l değişkenleri ile artar (Şekil 1 ve 2). $|E_{KS,n1+}^>|$ α parametresinin artması ile artarken, $|E_{KS,nl-}^>|$ ise, α ile birlikte n 'nin alacağı değerlere göre değişmektedir (Şekil 3). $|E_{KS,n1+}^>|$ J_0 ile artarken, $|E_{KS,n1-}^>|$ değerleri J_0 ile birlikte n 'nin küçük değerlerinde artarken, büyük n değerleriyle azalır (Şekil 4). $|E_{KS,n1+}^>|$, J_3 artarken azalır, $|E_{KS,n1-}^>|$ $n = 2$ için $J_3 = 1,089$ değerinden sonra ve $n = 12$ için $J_3 = 3,084$ değerlerinden büyük değerlerde imajiner değerler alır ve parçacık bu durumlarda bulunamaz (Şekil 5). Klein Gordon salınıcısının özvektörleri uzay-zaman eğriliği ve salınıcı frekansına bağlıdır (Deklem (4.22)). Manyetik alanın varlığında Klein Gordon salınıcı denklemi de çözüldü. Uzay-zaman parametrelerinin, salınıcı frekansının ve manyetik alanın enerji spektrumu ve özfonksiyonlar üzerindeki etkisi açıkça görülmektedir. Klein Gordon salınıcısından farklı olarak enerji spektrumunun $E_{KSL,nl} = 0$ etrafındaki simetrisi J_0 , α parametreleri ile birlik J_3 parametresi tarafından bozulur.

Kiral konik uzay-zamanda, DKP denklemi analitik metotla çözüldü. Bu uzay-zamanda, DKP salınıcıyı tanımlayan DKP denklemi de manyetik alanın olmadığı ve manyetik alanın varlığında çözüldü. Bu denklemler ise Nikiforov Uvarov yöntemi kullanılarak çözüldü. Enerji özdeğer denklemi ve özfonksiyonları elde edildi. Bu sonuçlar referanslar [54 ve 67]'nin bir genellemesidir. Ayrıca yük yoğunluğu da DKP salınıcı için elde edildi. DKP salınıcısının enerji spektrumu, özfonksiyonları ve yük yoğunluğu üzerinde uzay-zaman parametrelerinin ve salınıcı frekansının etkileri incelendi. Parçacığın ve anti-parçacığın enerjilerin mutlak değerleri α ve J_0 değerlerinin artmasıyla

artar (Şekil 4.8-9). Parçacıkların enerjisi J_3 'nin artmasıyla kritik değer olan $J_3 = 2$ değerine kadar azaldıktan sonra tekrar artarken, anti parçacıkların enerjisi J_3 nin artmasıyla azalır (Şekil 4.10). ψ_1 dalga fonksiyonunun $|\psi_1(r)|^2$ olasılık yoğunluğu farklı ω değerleri için incelenmiştir. Her iki durumda, $|\psi_1(r)|^2$ olasılık yoğunluğunun genliğin ω 'nın artmasıyla azalmış ve pikler orijine doğru yaklaşmıştır (Şekil 4.11-12). $J^t(r)$ yük yoğunluğunun pikleri J_0 ın çeşitli değerlerine karşılık gelen pozitif ve negatif enerjiler için J_0 artmasıyla orijinden uzaklaşır (Şekil 4.13-14). $J^t(r)$ yük yoğunluğunun pikleri pozitif enerji durumları için J_3 artışı ile orijine yaklaşır (Şekil 4.15). Onlar negatif enerjili durumlarda, orijinden uzaklaşır (Şekil 4.16). Manyetik alanın varlığındaki DKP salınıcı denklemleri de NU metodu ile çözüldü. Sistemin özfonksiyonları ve relativistik Landau enerji seviyeleri elde edildi. Eğri uzay-zaman parametrelerinin, Landau enerji seviyeleri ve özfonksiyonlar üzerindeki etkisi açıkça görülmektedir.

KAYNAKÇA

- [1] Karaoğlu, B. (2008). *Kuantum mekaniğine giriş*. Seçkin.
- [2] Greiner, W. (2000). *Relativistic quantum mechanics* (Vol. 2), New York: Springer Verlag Berlin Heidelberg
- [3] Okorie, U. S., Ikot, A. N., Edet, C. O., Rampho, G. J., Horchani, R. Jelassi, H. (2021). Bound and scattering states solutions of the Klein–Gordon equation with generalized Mobius square potential in D-dimensions. *The European Physical Journal D*, 75(2), 1-8.
- [4] Durmus, A., Yasuk, F. and Boztosun, I. (2006). Exact Analytical Solution of the Klein-Gordon Equation for the Pionic Atom by Asymptotic Iteration Method. *International Journal of Modern Physics E*, 15(06), 1243-1251.
- [5] Onyeaju, M. C., Ikot, A. N., Chukwuocha, E. O., Obong, H. P., Zare, S., Hassanabadi, H. (2016). Scattering and Bound States of Klein–Gordon Particle with Hylleraas Potential Within Effective Mass Formalism. *Few-Body Systems*, 57(9), 823-831.
- [6] Lütfüoğlu, B. C., Lipovský, J. and Kříž, J. (2018). Scattering of Klein-Gordon particles in the background of mixed scalar-vector generalized symmetric Woods-Saxon potential. *The European Physical Journal Plus*, 133(1), 1-16.
- [7] Bayrak, O., and Sahin, D. (2015). Exact Analytical Solution of the Klein–Gordon Equation in the Generalized Woods–Saxon Potential. *Communications in Theoretical Physics*, 64(3), 259.
- [8] Nadjadi, Y. and Barrett, R. C. (1993). On the properties of the Duffin-Kemmer-Petiau equation. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 19(1), 87.
- [9] Kemmer, N. (1939). The particle aspect of meson theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 173(952), 91- 116.
- [10] Nadjadi Y. and BarrettR. C. (1993). On the properties of the Duffin-Kemmer-Petiau equation. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 19, 87-98

- [11] Ünal, N. (2005). Duffin-Kemmer-Petiau equation, proca equation and Maxwells equation in $1+1$ D. *Concepts of Physics*, 2, 273-282.
- [12] Nowakowski, M. (1998). The electromagnetic coupling in Kemmer-Duffin-Petiau theory. *Physics Letters A*, 244(5), 329-337.
- [13] Lunardi, J. T., Pimentel, B. M., Teixeira, R. G. Valverde, J. S. (2000). Remarks on Duffin–Kemmer–Petiau theory and gauge invariance. *Physics Letters A*, 268(3), 165-173.
- [14] Castro, L. B. and De Castro, A. S. (2014). Corroborating the equivalence between the Duffin-Kemmer-Petiau and the Klein-Gordon and Proca equations. *Physical Review A*, 90(2), 022101.
- [15] Castro L. B. (2012). Relating pseudospin and spin symmetries through chiral trasformation with tensor interaction. *Physical Review C*(86), 052201(R).
- [16] Guertin, R. F. and Wilson, T. L. (1977). Noncausal propagation in spin-0 theories with external field interactions. *Physical Review D*, 15(6), 1518.
- [17] Vijayalakshmi, B., Seetharaman, M. and Mathews, P. M. (1979). Consistency of spin-1 theories in external electromagnetic fields. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 12(5), 665.
- [18] Friedman, E., Kälbermann, G. and Batty C. J. (1986). Kemmer-Duffin-Petiau equation for pionic atoms and anomalous strong interaction effects. *Physical Review C*, 34(6), 2244.
- [19] Ait-Tahar S., Al-Khalili, Nedjadi Y. (1995). A relativistic model for α -nucleus elastic scattering. *Nuclear Physics A*, 589, 307-319.
- [20] Kurth L. B. J., Clark B. C., Cooper E. D., Hama S., Mercer, R. L., Ray L. Hoffmann G. W. (1994). Relativistic impulse approximation treatment of the elastic scattering of 400 MEV π^+ on ^{28}Si . *Physical Review C*, 50(5), 2624-2626.
- [21] Casana, R., Fainberg, V. Y., Pimentel, B. M. Valverde, J. S. (2003). Bose–Einstein condensation and free DKP field. *Physics Letters A*, 316(1-2), 33-43.

- [22] Castro, L. B., de Oliveira, L. P., Garcia, M. G. and de Castro, A. S. (2017). Relativistic quantum dynamics of scalar bosons under a full vector Coulomb interaction. *The European Physical Journal C*, 77(5), 1-8.
- [23] Palumbo, G. and Meichanetzidis, K. (2015). Two-dimensional Chern semimetals on the Lieb lattice. *Physical Review B*, 92(23), 235106.
- [24] Boumali, A. (2007). One-dimensional thermal properties of the Kemmer oscillator. *Physica Scripta*, 76(6), 669.
- [25] Grunfeld, A. G. and Rocca, M. C. (1998). Quarkonium mass spectra with a Klein-Gordon oscillator as a confining potential. arXiv:hep-ph/9706317.
- [26] Rao, N. A. and Kagali, B. A. (2007). Energy profile of the one-dimensional Klein–Gordon oscillator. *Physica Scripta*, 77(1), 015003.
- [27] Boumali, A. and Chetouani, L. (2005). Exact solutions of the Kemmer equation for a Dirac oscillator. *Physics Letters A*, 346(4), 261-268.
- [28] Redkov V. M. arXiv:quant-ph/9812007.
- [29] Parker, L. (1980). One-electron atom as a probe of spacetime curvature. *Physical Review D*, 22(8), 1922-1934.
- [30] Parker, L. (1980). One-electron atom in curved space-time. *Physical Review Letters*, 44, 1559-1562.
- [31] Parker L. (1981). The atom as a probe of curved space time, *General Relativity and Gravitation*, 13(4), 307-311.
- [32] Parker L, Pimentel L. O. (1982). Gravitational perturbation of the hydrogen spectrum. *Physical Review D*, 25(12) 3180-3190.
- [33] Marques, G. D. A. and Bezerra, V. B. (2002). Hydrogen atom in the gravitational fields of topological defects. *Physical Review D*, 66(10), 105011.
- [34] Hindmarsh, M. and Kibble, T. W. B. (1995). Cosmic strings. *Reports on Progress in Physics*, 58(5), 477-562.
- [35] Hiscock, W. A. (1985). Exact gravitational field of a string. *Physical Review D*, 31(12), 3288.

- [36] Wang, Z., Long, Z. W., Long, C. Y. and Wang, B. Q. (2017). The study of a spinless relativistic particle in the spinning cosmic string space-time. *Canadian Journal of Physics*, 95(4), 331-335.
- [37] Boumali, A. and Messai, N. (2014). Klein–Gordon oscillator under a uniform magnetic field in cosmic string space-time. *Canadian Journal of Physics*, 92(11), 1460- 1463.
- [38] Cunha, M. S., Muniz, C. R., Christiansen, H. R. and Bezerra, V. B. (2016). Relativistic Landau levels in the rotating cosmic string spacetime. *The European Physical Journal C*, 76(9), 1-7.
- [39] Furtado, C., Moraes, F. and Bezerra, V. B. (1999). Global effects due to cosmic defects in Kaluza-Klein theory. *Physical Review D*, 59(10), 107504.
- [40] Carvalho, J., Carvalho, A. M. D. M., Cavalcante, E. and Furtado, C. (2016). Klein–Gordon oscillator in Kaluza–Klein theory. *The European Physical Journal C*, 76(7), 1-9.
- [41] Furtado, C., Bezerra, V. B. and Moraes, F. (2000). Aharonov–Bohm effect for bound states in Kaluza–Klein theory. *Modern Physics Letters A*, 15(04), 253-258.
- [42] Ahmed, F. (2020). Aharonov-Bohm effect on a generalized Klein-Gordon oscillator with uniform magnetic field in a spinning cosmic string space- time. *EPL (Europhysics Letters)*, 130(4), 40003.
- [43] Hosseinpour, M., Hassanabadi, H. and Andrade, F. M. (2018). The DKP oscillator with a linear interaction in the cosmic string space-time. *The European Physical Journal C*, 78(2), 1-7.
- [44] Falek, M. and Merad, M. (2010). Duffin-Kemmer-Petiau equation in Robertson-Walker space-time. *Open Physics*, 8(3), 408-414.
- [45] Castro, L. B. (2016). Noninertial effects on the quantum dynamics of scalar bosons. *The European Physical Journal C*, 76(2), 1-11.

- [46] Hassanabadi, H., Zare, S. and de Montigny, M. (2018). Relativistic spin-zero bosons in a Som–Raychaudhuri space–time. *General Relativity and Gravitation*, 50(8), 1-25.
- [47] Hassanabadi, H., Chung, W. S., Zare, S. and Sobhani, H. (2018). Investigation of DKP equation for spin-zero system in the presence of Gödel-type background space- time. *The European Physical Journal C*, 78(1), 1-7.
- [48] Hun, M. A. and Candemir, N. (2019). Relativistic quantum motion of the scalar bosons in the background space–time around a chiral cosmic string. *International Journal of Modern Physics A*, 34(10), 1950056.
- [49] Bezerra, V. B. (1997). Global effects due to a chiral cone. *Journal of Mathematical Physics*, 38(5), 2553-2564
- [50] CardosoT. R., Castro L. B., de Castro A. S. (2010). On the nonminimal vector coupling in the Duffin-Kemmer- Petiau theory and the confinement of massive bosons by a linear potential. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43, 05530.
- [51] Özdemir, N. (2005). Spinning cosmic strings: a general class of solutions. *International Journal of Modern Physics A*, 20(13), 2821-2832.
- [52] Özdemir, F. and Özdemir, N. (2004). Maxwell equations in the spinning cosmic string spacetimes. *General Relativity and Gravitation*, 36(9), 2053-2062.
- [53] Castro, L. B. (2015). Quantum dynamics of scalar bosons in a cosmic string background. *The European Physical Journal C*, 75(6), 1-8.
- [54] Hosseinpour, M. and Hassanabadi, H. (2018). The DKP oscillator in spinning cosmic string background. *Advances in High Energy Physics*, 2018.
- [55] De Lorenci, V. A. and Moreira Jr, E. S. (2004). Spinning strings, cosmic dislocations, and chronology protection. *Physical Review D*, 70(4), 047502.
- [56] de A Marques, G., Furtado, C., Bezerra, V. B., Moraes, F. (2001). Landau levels in the presence of topological defects. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(30), 5945.

- [57] Dantas, L., Furtado, C. And Netto, A. S. (2015). Quantum ring in a rotating frame in the presence of a topological defect. *Physics Letters A*, 379(1-2), 11-15.
- [58] Boas, M. L. (2006). *Mathematical methods in the physical sciences*. John Wiley and Sons.
- [59] Arfken G. B. and Weber H. J. (2005). *Mathematical methods for physicist*. Academic press. 684-863.
- [60] Nikiforov, A. F. and Uvarov, V. B. (1988). Foundations of the theory of special functions. In *Special Functions of Mathematical Physics* (pp. 1-19). Birkhäuser, Boston, MA.
- [61] Tezcan C., Sever Ramazan (2009). A general approach for the exact solution of the Shrödinger equation. *International Journal of Theoetical. Physics*, 48, 337-350
- [62] Teixeira Filho, R. M. and Bezerra, V. B. (2003). Scalar particles in weak gravitational fields. *Classical and Quantum Gravity*, 21(1), 307.
- [63] Santos, L. C. N. and Barros, C. J. (2018). Relativistic quantum motion of spin-0 particles under the influence of noninertial effects in the cosmic string s pacetime. *The European Physical Journal C*, 78(1), 1-8.
- [64] Vitória, R. L. L. and Bakke, K. (2016). Relativistic quantum effects of confining potentials on the Klein-Gordon oscillator. *The European Physical Journal Plus*, 131(2), 1-8.
- [65] Jeffrey, A. and Zwillinger, D. (Eds.). (2007). *Table of integrals, series, and products*. Elsevier.
- [66] Nadjadi, Y. and Barrett, R. C. (1994). The Duffin-Kemmer-Petiau oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 27(12), 4301.
- [68] Castro, L. B. (2015). Quantum dynamics of scalar bosons in a cosmic string background. *The European Physical Journal C*, 75(6), 1-8.
- [69] Kangal, E. E., Yanar, H., Havare, A. and Sogut, K. (2014). Creation of vector bosons by an electric field in curved spacetime. *Annals of Physics*, 343, 40-48.