

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EĞRİ ÇİFTLERİNİN GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esmâ DANACI

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rifat GÜNEŞ

OCAK 2026

T.C

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EĞRİ ÇİFTLERİNİN GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esmâ DANACI
36203614045

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rifat GÜNEŞ

OCAK 2026

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

EĞRİ ÇİFTLERİNİN GEOMETRİSİ

Tezi Hazırlayan: Esmâ DANACI
Yüksek Lisans Tezi

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitim sürecimin her aşamasında bilgi, tecrübe ve destekleriyle beni her konuda yönlendiren, akademik bakış açımı şekillendiren, sabır ve anlayışı ile daima destek veren değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ'e gönülden teşekkürlerimi sunarım.

Bu süreç boyunca bilgi ve tecrübeleriyle akademik birikimime katkıda bulunan Matematik Anabilim Dalı Öğretim üyesi hocalarıma teşekkürü borç bilirim.

Yüksek lisans eğitim sürecim boyunca TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı (BİDEB) 2210-A Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında maddi ve manevi desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca olduğu gibi bu süreçte de daima yanımda olan, hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen canım aileme, koşulsuz sevgileri ve emekleri için çok teşekkür ederim.

Ve nihâyet en özel teşekkürüm, bu süreci benimle birlikte taşıyan, her adımda yanımda duran, sevgisini, desteğini, fedakârlığını en derinden hissettiğim kıymetli eşim Uğur DANACI'ya yöneliktir, sonsuz teşekkür ederim.

Esma DANACI

ONUR SÖZÜ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Eğri Çiftlerinin Geometrisi” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Esma DANACI



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1. Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar	4
2.2. Düzlemsel Eğriler	6
2.3. $\mathbb{R}^3$ Öklid Uzayında Eğriler	16
2.4. $\mathbb{R}^3$ Öklid Uzayında Çatı Eğrileri	19
2.5. $\mathbb{R}^4$ Öklid Uzayında Eğriler	22
2.6. $\mathbb{R}^4$ Öklid Uzayında Çatı Eğrileri	25
3. $\mathbb{R}^3$ ÖKLİD UZAYINDA EĞRİ ÇİFTLERİ	29
3.1. İnvolüt-Evolüt Eğri Çifti	29
3.2. Bertrand Eğri Çifti	34
3.3. Mannheim Eğri Çifti.....	41
3.4. Çatı Eğrilerinde Bertrand Eğri Çifti	47
3.5. Çatı Eğrilerinde Mannheim Eğri Çifti	52
4. $\mathbb{R}^4$ ÖKLİD UZAYINDA EĞRİ ÇİFTLERİ	58
4.1. Bertrand Eğri Çifti	58
4.2. Mannheim Eğri Çifti.....	61
4.3. Çatı Eğrilerinde Bertrand Eğri Çifti	72
4.4. Çatı Eğrilerinde Mannheim Eğri Çifti	79
4.5. Dört Boyutlu Öklid Uzayında Regüler Eğrilerin Bertrand Eğrilerinin Yeniden Değerlendirilmesi	81
KAYNAKLAR	86
ÖZGEÇMİŞ	88

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\ \quad \ $	: Norm
$ \quad $	: Mutlak Değer
$\langle , \rangle$	: İç Çarpım Dönüşümü
$\times$	: Vektörel Çarpım Dönüşümü
$\mathbf{t}$	: Teğet Vektör
$\mathbf{n}$	: Normal Vektör
$\mathbf{b}$	: Binormal Vektör
κ	: Eğrinin eğriliği
τ	: Eğrinin burulması (torsiyon)
$\mathbb{R}^3$	: 3 Boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{R}^4$	: 4 Boyutlu Öklid Uzayı
C^k	: Diferansiyellenebilir fonksiyonlar sınıfı
α	: $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir eğri
s	: α eğrisinin yay uzunluğu parametresi
$\bar{s}$	: $\bar{\alpha}$ eğrisinin yay uzunluğu parametresi

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

EĞRİ ÇİFTLERİNİN GEOMETRİSİ

Esmâ DANACI

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

88+vi sayfa

2026

Danışman: Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Giriş olarak verilen birinci bölümde eğri çiftleriyle ilgili bilgiler verilmiş ve bu alanda yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde ise, tezin anlaşılabilir olması için diferansiyellenebilir fonksiyonlar, düzlemsel eğriler, $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^4$ de eğriler ele alınmıştır. Ayrıca $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^4$ de çatı eğrileri analiz edilmiştir. Üçüncü bölümde İnvolüt-Evolüt eğri çiftleri, Bertrand eğri çiftleri ve Mannheim eğri çiftleri ile ilgili bağıntılar incelenmiştir. Bunun yanı sıra çatı eğrilerinde Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri ile ilgili özellikler üzerinde durulmuştur. Son bölüm olan dördüncü bölümde ise $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri ele alınmıştır. Bununla birlikte çatı eğrilerinde Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Eğri çiftleri, $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^4$, Frenet çatısı, Çatı eğrileri, Eğrilik, Burulma

ABSTRACT

Master Thesis

GEOMETRY OF CURVE PAIRS

Esma DANACI

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

88+vi sayfa

2026

Supervisor: Prof. Dr. Rifat GÜNEŞ

This study, prepared as a master's thesis, consists of four chapters. In the first chapter, which serves as the introduction, fundamental information on curve couples is presented, and previous studies conducted in this field are reviewed. In the second chapter, in order to ensure the comprehensibility of the thesis, differentiable functions, planar curves, and curves in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$ are discussed. In addition, roof curves in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$ are analyzed. The third chapter is devoted to the investigation of the relationships associated with Involute–Evolute curve couples, Bertrand curve couples, and Mannheim curve couples. Moreover, the properties of Bertrand and Mannheim curve couples in roof curves are examined. In the fourth and final chapter, Bertrand and Mannheim curve couples in the four-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^4$ are considered. Furthermore, the relationships between Bertrand and Mannheim curve couples in roof curves are presented.

Keywords: Curve pairs, $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$, Frenet frame, Framed curves, Curvature, Torsion

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri, hem teorik matematik hem de uygulamalı bilimler açısından temel bir araştırma alanı olup eğrilerin, yüzeylerin ve daha genel geometrik yapıların analizini yapan bilim dalıdır. Özellikle eğrilerin yer değiştirme, yönelim ve eğrilik özelliklerini inceleyen klasik eğri teorisi, yalnızca tek bir eğrinin yapısını çözümlemekle sınırlı kalmaz; kimi durumlarda iki eğri arasındaki sistematik geometrik bağıntıları da ele alır. Bu tür ilişkilerin incelendiği yapı “Eğri Çiftleri” olarak adlandırılmakta ve diferansiyel geometrinin hem üç boyutlu hem de daha yüksek boyutlu Öklid uzaylarında önemli bir çalışma alanı oluşturmaktadır (Kühnel, Differential Geometry (Vol. 77), 2015), (O’neill, 2006).

Eğri çiftleri kavramı, esasen iki eğri arasındaki özel bir bağıntının -normal doğrultuların ortaklığı, eğrilik merkezlerinin örtüşmesi, sabit bir uzaklık ilişkisi veya bir eğrinin diğerinin iz eğrisi olarak tanımlanması gibi- belirli diferansiyel geometrik koşullar üzerinden ifade edilmesiyle ortaya çıkar. Literatürde en bilinen örnekler arasında İnvolüt-Evolüt, Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri yer alır. Bu eğri çiftleri, hem eğrilerin lokal hareketini hem de birbirleriyle kurdukları bağıntıları tanımlayan Frenet çatısı ve türev yapıları üzerinden sınıflandırılır (Do Carmo, 1976), (Struik, 2012).

Klasik eğri çiftleri çalışmaları ağırlıklı olarak Öklid uzayında gerçekleştirilmiş ve eğri teorisinin temel örüntüleri bu ortamda şekillendirilmiştir. İnvolüt-Evolüt çiftleri, bir eğrinin diğerinin teğetsel izi olmasıyla; Bertrand eğri çiftleri, eğrilerin normal doğrultularının çakışmasıyla; Mannheim eğri çiftleri ise bir eğrinin asli normal doğrultusunun diğerinin binormal doğrultusu ile çakışmasıyla tanımlanır (Özdamar & Hacısalihoğlu, 1976).

Bu eğri çiftlerinin üç boyutlu uzayda incelenmesi, hem mühendislik uygulamalarında hem de mekanik sistemlerin hareket analizlerinde temel bir rol oynamaktadır. Robotik, bilgisayar grafik ve animasyon, eğri interpolasyonu, optik iz yolları ve kontrol teorisi gibi birçok alanda iki eğri arasındaki bu özel bağıntılar kullanılmaktadır (Bloomenthal & Bajaj, 1997).

Çatı eğrileri, özellikle mimarlık geometrisi ve bilgisayar destekli tasarım alanlarında sıkça karşılaşılan özel eğri yapılarıdır. Bu eğriler, bir doğrular ailesi tarafından oluşturulan yüzeylerin belirli kesit eğrileri olarak ortaya çıkabilirler. Çatı eğrileri üzerinde tanımlanan eğri çiftleri, klasik eğri çiftlerine benzer biçimde geometrik bağıntılar içerir; ancak çatı eğrilerinin taşıdığı ek parametrik yapılar ve yüzeyle ilişkili diferansiyel özellikler analize

yeni boyutlar ekler. Bu nedenle çatı eğrilerinde eğri çiftlerinin ele alınması hem eğri teorisinin uygulamalı yönünü güçlendirir, hem de mühendislik yapılarında optimizasyon süreçleri için yeni araçlar sunar (Pottmann, Liu, Wallner, Bobenko, & Wang, 2007).

Son yıllarda diferansiyel geometri araştırmaları, klasik üç boyutlu uzaydan daha yüksek boyutlara taşınmış ve özellikle Öklid uzayı eğri teorisinin doğal bir genişlemesi olarak öne çıkmıştır. Dört boyutlu uzay, yalnızca ek bir koordinatın eklenmesinden ibaret olmayıp eğrilerin sahip olduğu Frenet çatısı, dördüncü normal vektör, ek eğrilikler ve daha karmaşık dönme davranışları gibi yeni yapıları beraberinde getirir (Gray, 1998).

Dolayısıyla eğri çiftleri, dört boyutlu uzayda çok daha zengin bir ilişkiler ağına sahiptir. Nitekim İnvolüt–Evolüt, Bertrand veya Mannheim benzeri eğri ilişkileri dört boyutlu uzayda yeniden tanımlanmakta; bu ilişkiler, ek boyutun getirdiği yeni eğrilik fonksiyonları ve normal vektör alanlarıyla birlikte daha karmaşık bir geometrik yapı ortaya çıkarmaktadır (Buket & İlarslan, 2012).

Bu tür analizler, teorik matematik açısından olduğu kadar fiziksel modeller -örneğin relativistik mekân-zaman geometrisi, eklemli mekanizmaların dört serbestlik dereceli hareketleri veya dört boyutlu optimizasyon problemleri- açısından da önem taşır.

Çatı eğrileri dört boyutlu uzaya aktarıldığında, eğrilerin hem parametrik yapıları hem de onları oluşturan yüzey ailesi daha karmaşık bir form kazanmaktadır. Dört boyutlu çatı eğrilerinde tanımlanan eğri çiftleri, klasik eğri çiftlerinin yüksek boyutlu bir genellemesi olarak değerlendirilebilir; ancak yeni boyut, çatı eğrilerinin taşıdığı kesit yapılar ve doğrular ailesinin genişlemesi nedeniyle daha zengin bağıntılar sunmaktadır.

Bu alan literatürde görece yeni olduğu için yapılan çalışmaların önemli bir bölümü teorik katkılar niteliğindedir. Dört boyutlu çatı eğrilerinde eğri çiftlerinin izlediği geometrik bağıntıların ortaya konması, hem çatı eğrilerinin sınıflandırılmasına hem de yüksek boyutlu yüzey ve eğri analizlerinin sistematik hâle getirilmesine katkı sağlar (Pottmann, Liu, Wallner, Bobenko, & Wang, 2007).

Bu tez çalışması, Shun’ichi Honda ve Masatomo Takahashi’nin 2016, 2020 ve 2022 yıllarında yayınlamış olduğu makaleler esas alınarak üç boyutlu ve dört boyutlu Öklid uzaylarında eğri çiftlerinin genel teorik çerçevesini genişletmeyi, çatı eğrilerinde eğri çiftlerini sistematik olarak ele almayı ve özellikle dört boyutlu uzayda çatı eğrilerinin sahip olduğu yeni bağıntıları matematiksel olarak incelemeyi amaçlamaktadır. Böylece hem eğri

iftleri literatürüne hem de yüksek boyutlu geometrik modelleme yaklaşımlarına katkı sunmayı hedeflemektedir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Temel Kavramlar kısmı, altı alt bölüm olarak düzenlenmiştir. Birinci alt bölümde diferansiyellenebilir fonksiyonlar ele alınmıştır. İkinci alt bölümde düzlemsel eğriler ve bu eğrilere ilişkin geometrik kavramlar üzerinde durulmuştur. Üçüncü alt bölümde $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında eğriler ele alınmıştır. Dördüncü alt bölümde üç boyutlu uzay eğrileri için çatı eğrileri tanımlanmış olup bu çatı eğrilerinin özellikleri incelenmiştir. Beşinci ve altıncı alt bölümlerde de $\mathbb{R}^4$ uzayında eğriler ve çatı eğrilerine ilişkin özellikler incelenmiştir.

2.1. Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar

Tanım 2.1.1: A boş olmayan bir küme ve V n -boyutlu bir vektör uzayı olsun.

- i. $\forall p, q, r \in A$ için $f(p, q) + f(q, r) = f(p, r)$
- ii. $\forall p \in A, \forall a \in V$ için $f(p, q) = a$

olacak şekilde bir tek $q \in A$ vardır. Bu önermeleri doğrulayacak bir

$$f: A \times A \rightarrow V$$

dönüşümü varsa A ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.2: V , n -boyutlu reel iç çarpım uzayı olsun. V ile birleştirilmiş bir A afin uzayına n -boyutlu Öklid uzayı denir ve $\mathbb{R}^n$ ile gösterilir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.3: A n -boyutlu bir afin uzay ve buna karşılık gelen vektör uzayı V olsun. $O \in A$ afin uzayda seçilmiş bir başlangıç noktası olacak şekilde $\forall P \in A$ noktası için $\overrightarrow{OP} \in V$ vektörü tanımlanabilir. V vektör uzayının bir bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ise $\overrightarrow{OP} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ yazılabilir. Burada $x_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$ fonksiyonlarına Öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ kümesine de Öklid koordinat sistemi denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.4: $X, Y \in \mathbb{R}^n$ iki vektör ve bu vektörlerin koordinatları $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olarak verilsin. $\mathbb{R}^n$ de Öklid iç çarpımı

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.5: $\mathbb{R}^n$, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$ iç çarpımına sahip n -boyutlu Öklid uzayı olsun. Burada $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dir. $i = 1, 2, \dots, (n-1)$ için $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ olduğundan $x_i = x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ olduğunu kabul edelim. $x_1 \times x_2 \times \dots \times x_{n-1}$ vektörel çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$x_1 \times x_2 \times \dots \times x_{n-1} = \det \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(n-1)1} & \dots & x_{(n-1)n} \\ e_1 & \dots & e_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \det(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, e_i) e_i.$$

Burada $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ vektörleri $\mathbb{R}^n$ in standart temel bazıdır (O'Neill, 2006).

Tanım 2.1.6: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonunun k . mertebeden türevleri var ve sürekli ise f fonksiyonuna C^k mertebeden diferansiyellenebilirdir (C^k sınıfından) denir. Eğer f her mertebeden diferansiyellenebilir ise fonksiyona sonsuz mertebeden diferansiyellenebilir veya kısaca diferansiyellenebilirdir denir. Eğer f sadece sürekli ise C^0 sınıfındandır denir.

Diğer taraftan reel sayılar uzayından üç boyutlu veya iki boyutlu Öklidyen uzaya tanımlanan fonksiyonlar için türevlenebilme, karşılık gelen her bir bileşenin türevi olarak tanımlanır. Yani

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

fonksiyonu

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

olarak verildiğinde, f fonksiyonunun türevi f_i fonksiyonlarının türevi olarak tanımlanır.

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $\mathbb{R}^3$ uzayının bazı olmak üzere

$$\frac{df}{dt} = \frac{df_1}{dt} \vec{e}_1 + \frac{df_2}{dt} \vec{e}_2 + \frac{df_3}{dt} \vec{e}_3$$

şeklinde yazılır. Çok değerli f fonksiyonunun diferansiyellenebilmesi ise f_i fonksiyonlarının diferansiyellenebilmesi olarak tanımlanır. Her mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ veya $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ ile gösterilir (Hacısalihoglu, 1983).

Örnek 2.1.1: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ fonksiyonu $f(t) = (\cos t, \sin t)$ ile verilsin.

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t) = -\sin t \vec{e}_1 + \cos t \vec{e}_2$$

olur. $\sin t$ ve $\cos t$ her mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonlar olduklarından f diferansiyellenebilir.

Tanım 2.1.7: $I, \mathbb{R}^n$ de bir açık aralık olmak üzere $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü diferansiyellenebilir ise α dönüşümüne $\mathbb{R}^n$ de bir eğri denir. Bir α eğrisi $\forall t \in I$ için

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

biçiminde gösterilir. Buradaki α_i fonksiyonları I dan $\mathbb{R}$ ye tanımlı diferansiyellenebilir fonksiyonlardır (Şahin, 2022).

Tanım 2.1.8: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferansiyellenebilir bir eğri ve $s \in I$ olsun.

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s))$$

olmak üzere

$$\frac{d\alpha}{ds} = \alpha'(s) = \left(\frac{d\alpha_1}{ds}, \frac{d\alpha_2}{ds}, \dots, \frac{d\alpha_n}{ds} \right)$$

vektörüne eğrinin teğet vektör alanı denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.9: Eğer

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{d\alpha_i}{ds} \right)^2} = 1$$

ise α eğrisine birim hızlı eğri denir. s parametresine de yay uzunluğu denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.10: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regüler bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için bu eğrinin $t = a$ ve $t = b$ noktaları arasındaki uzunluğu

$$s(t) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

şeklindedir. Burada $\|\alpha'(t)\|$ ifadesi $\mathbb{R}^n$ deki Öklid normudur ve

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(\alpha'_1(t))^2 + (\alpha'_2(t))^2 + (\alpha'_3(t))^2 + (\alpha'_4(t))^2}$$

denklemleriyle hesaplanır (Banchoff & Lovett, 2022).

Tanım 2.1.11: s yay parametresi olmak üzere $\forall s \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri denir (Hacısalihoglu, 1983).

2.2. Düzlemsel Eğriler

Tanım 2.2.1: $F: U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in U$ için F fonksiyonunun 1: 1 olacağı bir komşuluğu varsa F fonksiyonuna yerel olarak 1: 1 dir denir (Şahin, 2022).

Tanım 2.2.2: $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir düzlem eğrisinin C^k sınıfından parametrik gösterimi, yerel olarak birebir ve C^k sınıfından olan

$$\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

dönüşümü olarak tanımlanır. Bu durumda

$$\{\alpha(t) \mid t \in (a, b)\}$$

kümesine α ile gösterilen eğrinin destek kümesi denir (Şahin, 2022).

Örnek 2.2.1: Her sürekli $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği $(x, g(x))$ olmak üzere, bir düzlem eğrisinin parametrik gösteriminin desteği olarak

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \rightarrow (x, g(x))$$

dir. İlk bileşen 1: 1 olduğundan f yerel olarak birebirdir. Üstelik g , C^k sınıfından ise ilk bileşen C^∞ olduğundan f , C^k sınıfındandır (Şahin, 2022).

Tanım 2.2.3: f ve g fonksiyonları

$$\begin{array}{ll} f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2 & g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow f(t) & s \rightarrow g(s) \end{array}$$

C^k sınıfındaki iki parametrik gösterim olsun. Eğer C^k sınıfından $\varphi: (a, b) \rightarrow (c, d)$ ve $\varphi^{-1}: (c, d) \rightarrow (a, b)$ 1:1 dönüşümlerinin $g \circ \varphi = f$ ve $f \circ \varphi^{-1} = g$ olacak şekilde var olması durumunda f ve g parametrik gösterimleri denktir denir. Bu durumda φ^{-1} dönüşümünün 1:1 olması fazladan bir şart olmakla birlikte C^k sınıfından olması zorunludur.

Tanımı esas alarak, bir parametrik gösterimden diğer gösterime parametre değişimi yapılarak geçilebiliyorsa bu iki parametrik gösterim denktir denir (Şahin, 2022).

Tanım 2.2.4: Düzlem eğrilerinin C^k sınıfından parametrik gösteriminin denklik sınıflarının her birine C^k sınıfından bir düzlem eğrisi denir (O'Neill, 2006).

Tanım 2.2.5: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$, C^1 sınıfından bir eğri olsun. Bu durumda $t \in (a, b)$ için $f'(t) \neq 0$ ise t ye regüler nokta denir. Eğer $\forall t \in (a, b)$ için $f'(t) \neq 0$ ise f ye regülerdir denir. Eğer $t \in (a, b)$ için $f'(t) = 0$ ise t noktasına singüler nokta denir (O'Neill, 2006).

Önerme 2.2.1: C^1 sınıfından denk iki parametrik gösterim f ve g olsun. Bu durumda

- i. f parametrik gösterimin $t \in (a, b)$ parametrelili noktada regüler olması için gerek ve yeter şart g parametrik gösterimin $t \in (a, b)$ parametrelili noktada regüler olmasıdır.
- ii. f parametrik gösterimin regüler olması için gerek ve yeter şart g parametrik gösterimin regüler olmasıdır (Şahin, 2022).

Tanım 2.2.6: $a < t_0 < b$ alalım. $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ eğrisi için $[a, t]$ aralığındaki yay uzunluğu fonksiyonu s

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} du, a \leq t \leq b$$

ile tanımlanır. Bu durumda

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\| \quad \|\alpha'(t)\|^2 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle$$

ile tanımlı s parametresine yay parametresi denir (Şahin, 2022).

Örnek 2.2.2: $t < 2\pi$ olmak üzere $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, cycloid eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonunu bulalım.

x ve y fonksiyonlarının t parametresine göre türevi alınarak

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a(\sin t)$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} x'(t)^2 + y'(t)^2 &= a^2 + a^2 + 2a^2 \cos t \\ &= 2a^2 - 2a^2 \cos t \\ &= 2a^2 (1 - \cos t) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$s = \int_0^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

olduğundan

$$\cos 2t = 1 - 2 \sin^2 t$$

kullanılırsa

$$s = \sqrt{2}a \int_0^t \sqrt{1 - \cos t} dt,$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2}a \int_0^t \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt, \\
&= 2a \int_0^t \sin \frac{t}{2} dt, \quad \left(\frac{t}{2} = u\right) \\
&= 2a \int_0^{2u} \sin u (2du), \\
&= 4a \int_0^{2u} \sin u du, \\
&= 4a(-\cos u)|_0^{2u}, \\
&= 4a|-\cos 2u + 1|
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$s = 4a|1 - \cos 2u|$$

bulunur. Bilinir ki eğer $y = f(x)$ ise

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

olur. $s = s(t) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$, fonksiyonu için $t = t(s)$ fonksiyonu vardır. Bu ifade $\alpha(t)$ de yerine yazılırsa $\alpha = \alpha(t(s)) = \alpha(s)$ olur. Böylece herhangi regüler bir eğrinin t parametresi s parametresi ile değiştirilebilir.

Tanım 2.2.7: $\alpha = I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ yay parametresi ile verilsin. Bu durumda α eğrisinin teğet vektörü $\alpha'(s)$, T ile gösterilir. Böylece $T: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ fonksiyonu, $\forall s \in I$ için $\|T(s)\| = 1$ olacak şekilde vektör değerli diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. $\mathbb{R}^2$ de $T(s)$ vektörüne dik olan iki vektör $\pm N$ dir. Biz $N(s)$ birim vektörünü seçiyoruz. $N(s)$ vektörüne $\alpha(s)$ eğrisinin normal vektörü denir. Bu seçimle birlikte N vektörü $\forall s \in I$ için, $\|N(s)\| = 1$, $\langle T(s), N(s) \rangle = 0$ ve $\det(T(s), N(s)) = 1$ olacak şekilde diferansiyellenebilir bir vektördür. Böylece $\mathbb{R}^2$ uzayının pozitif yönlendirilmiş bir ortonormal bazını inşa etmiş oluruz. $\{T(s), N(s)\}$ ikilisine $\alpha(s)$ eğrisinin pozitif yönlendirilmiş Frenet ikilisi adı verilir (Gray, 1998).

Tanım 2.2.8: Yay parametresi ile verilmiş $\alpha(s)$ eğrisinin her noktasında tanımlı $\{T(s), N(s)\}$ çatısının değişimini inceleyerek eğrinin ne kadar eğrildiğini gözlemleyelim.

$$\|T(s)\|^2 = \|N(s)\|^2 = 1$$

$$\langle T(s), N(s) \rangle = 0$$

ifadelerinde türev alınırsa

$$\langle T'(s), T(s) \rangle = \langle N'(s), N(s) \rangle = 0$$

$$\langle T'(s), N(s) \rangle + \langle T(s), N'(s) \rangle = 0$$

olur. Böylece görülür ki $T'(s)$ ve $N(s)$ aynı doğrultuya sahiptir. Buradan $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$T'(s) = \kappa(s)N(s) \quad (2.1)$$

yazılabilir. Buradan $\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$ elde edilir. $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir $\kappa(s)$ sayısına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir. Bu durumda

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) \quad (2.2)$$

olur. Böylece

$$|\kappa(s)| = \|T''(s)\| = \|\alpha''(s)\|$$

dir, buradan $\kappa(s)$, α eğrisinin ivme vektörünün uzunluğudur. $\|\alpha'(s)\| = 1$ olduğundan, ivme sadece merkezidir ve teğet değildir (Şahin, 2022).

$\alpha(s)$, s parametresi ile verilsin. Eğer eğri bir doğru değil ise, eğrinin bir doğru olmasından sapmasını ölçmek önemlidir. Bu ölçüme eğrinin eğriliği adı verilir. Eğrinin eğriliği, teğetin eğri boyunca hareketi esnasındaki doğrultusunun değişme miktarıdır. Sonuç olarak $|\kappa(s)|$, α eğrisinin doğrultusunun değişimini ölçer. Ayrıca

$$\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \det(\alpha'(s), \alpha''(s))$$

dir. Böylece $\kappa(s)$ fonksiyonunun işareti, eğrinin teğet (hız) vektörü ile belirlenen bazının yönlendirmesi hakkında bilgi verir. Yani $\kappa(s) > 0$ ise eğrinin doğrultusu saat yönünün tersi yönünde değişir. Bu durum düzlem eğrileri ile uzay eğrileri arasındaki önemli bir farktır. Çünkü uzay eğrilerinde eğrilik her zaman pozitif olacaktır (Do Carmo, 2016).

Önerme 2.2.1: $\alpha(s)$, birim hızlı düzlemsel bir eğri olsun. Sabit bir vektör $\vec{a}$, $\varphi(s)$ kadar saat yönünün tersinde döndürüldüğü durumda eğrinin birim teğet vektörü ile çakışmış olur. Bu durumda

$$\kappa_s = \frac{d\varphi}{ds} \quad (2.3)$$

dir (Do Carmo, 2016).

İspat: $\vec{a}$, sabit bir vektör ve $\vec{b}$, $\vec{a}$ vektörünün $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürülmesi ile elde edilen vektör olsun. T birim vektör olduğundan

$$\vec{T} = \cos\varphi \vec{a} + \sin\varphi \vec{b}$$

yazılır. s parametresine göre türev alınırsa

$$\vec{T}' = (-a\sin\varphi + b\cos\varphi) \frac{d\varphi}{ds}$$

olur. İfadenin her iki tarafı $\vec{a}$ vektörü ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\langle \vec{T}', \vec{a} \rangle = -\sin\varphi \frac{d\varphi}{ds}$$

bulunur. Burada (2.1) denklemini kullanılırsa

$$\kappa_s \langle \vec{N}_s, \vec{a} \rangle = -\sin\varphi \frac{d\varphi}{ds}$$

dir. Diğer taraftan $\vec{N}_s$ ile $\vec{a}$ arasındaki açı $\varphi + \frac{\pi}{2}$ dir. Böylece

$$\kappa_s \|\vec{N}_s\| \|\vec{a}\| \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi \frac{d\varphi}{ds}$$

$$-\kappa_s \sin\varphi = -\sin\varphi \frac{d\varphi}{ds}$$

$$\kappa_s = \frac{d\varphi}{ds}$$

elde edilir. ■

Tanım 2.2.9: $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ regüler bir eğri olsun. Bu durumda s yay parametresi olmak üzere

$$\alpha(t) = \beta(s(t))$$

yazılabilir. Bu eğri aynı zamanda $\alpha(t) = (x(t), y(t), 0)$ yazılabilir. Şimdi s yay parametresine göre türev α' ile ve t parametresine göre türev $\dot{\alpha}$ ile gösterilir ve zincir kuralı uygulanırsa

$$\dot{\alpha}(t) = \beta'(s(t))\dot{s}(t)$$

$$\dot{\alpha}(t) = T\dot{s}$$

$$\ddot{\alpha}(t) = T'(\dot{s})^2 + T\ddot{s}$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \kappa N(\dot{s})^2 + T\ddot{s}$$

$$\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t) = \kappa(T \times N)(\dot{s})^3$$

bulunur. T ve N , üç boyutlu uzayda XOY düzleminde ise $T \times N$, XOY düzlemine diktir. T ve N birim vektörler ve

$$\|T \times N\| = \langle \|T\|, \|N\| \rangle. 1 = 1$$

olduğundan $T \times N$ vektörünün de birim vektör olduğu görülür. Böylece

$$\|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}\|^2 = \kappa^2(\dot{s})^6$$

olacağından

$$\kappa = \frac{\|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}\|}{(\dot{s})^3} = \frac{\|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}\|}{\|\dot{\alpha}\|^3}$$

dır. Koordinatlar türünden ise

$$\dot{\alpha}(t) = (x'(t), y'(t), 0)$$

$$\ddot{\alpha}(t) = (x''(t), y''(t), 0)$$

kullanılır ve

$$\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t) = \begin{vmatrix} x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, x'y'' - x''y')$$

$$\|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}\| = x'y'' - x''y'$$

göz önüne alınırsa

$$\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

elde edilir (Şahin, 2022).

Tanım 2.2.10: λ keyfi bir parametre olmak üzere

$$\alpha = \alpha(t, \lambda)$$

ailesi verilsin. Eğer her noktada bu eğri ailesinden birine teğet olan bir β parametrik eğrisi varsa, β eğrisine α eğrisinin zarfı denir (Şahin, 2022).

Tanım 2.2.11: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ düzlemsel bir eğrinin parametrik gösterimi olsun. Bu durumda eğrinin normaller eğrisinin zarfına eğrinin evolütü denir (Şahin, 2022).

Önerme 2.2.2: $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ parametrik gösterimi ile verilen düzlem eğrisinin evolütünün koordinatları X ve Y olmak üzere parametrik denklemi

$$X = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}$$

$$Y = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}$$

ile verilir (Şahin, 2022).

İspat: $(x(t), y(t))$ noktasından geçen ve doğrultusu $(-y'(t), x'(t))$ olan normal doğrunun denklemi

$$\frac{X - x(t)}{-y'(t)} = \frac{Y - y(t)}{x'(t)} = r$$

olduğundan

$$F(X, Y, t) = (X - x(t))x'(t) + (Y - y(t))y'(t) = 0$$

elde edilir. Zarfın noktaları

$$F(X, Y, t) = 0$$

$$F'_t(X, Y, t) = 0$$

şartlarını sağlayacağından

$$x'(t)X + y'(t)Y = x(t)x'(t) + y(t)y'(t)$$

$$x''(t)X + y''(t)Y = x'^2(t) + y'^2(t) + x(t)x''(t) + y(t)y''(t)$$

olmalıdır. Bu denklemin çözümü için Cramer yöntemi kullanılırsa

$$X = \frac{\begin{vmatrix} x(t)x'(t) + y(t)y'(t) & y'(t) \\ x'^2(t) + y'^2(t) + x(t)x''(t) + y(t)y''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{x'y'' - x''y'}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & x(t)x'(t) + y(t)y'(t) \\ x''(t) & x'^2(t) + y'^2(t) + x(t)x''(t) + y(t)y''(t) \end{vmatrix}}{x'y'' - x''y'}$$

olur. Buradan

$$X = \frac{x(t)x'(t)y''(t) + y(t)y'(t)y''(t) - y'(t)(x'^2(t) + y'^2(t)) - x(t)x''(t)y'(t) - y(t)y''(t)y'(t)}{x'y'' - x''y'}$$

dir. Bu ifade düzenlenirse

$$X = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}$$

elde edilir. ■

Y koordinatı da benzer şekilde hesaplanır.

Tanım 2.2.12: $\alpha(s)$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin c orijinli involütü

$$g(\alpha, c) = \alpha(s) + (c - s)\alpha'(s)$$

ile tanımlanır. İnvolüt eğrisi birim hızlı olmayabilir. Keyfi bir eğri için aşağıdaki durum geçerlidir (O'Neill, 2006).

Önerme 2.2.3: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ düzlem eğrisinin parametrik gösterimi olsun. Bu durumda α eğrisinin c orijinli involütü

$$g(t) = \alpha(t) + (c - s(t)) \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

dir (O'Neill, 2006). Burada $s = s(t)$, α eğrisinin yay uzunluğudur. Bu durumu bir örnekle açıklayalım.

Örnek 2.2.3: $\alpha(t) = (rcost, rsint)$ çemberi verilsin. Bu çemberin involütünün koordinatlarını bulalım.

Bu eğrinin hız vektörü

$$\alpha'(t) = (-rsint, rcost)$$

olduğundan

$$\|\alpha'(t)\|^2 = x'^2 + y'^2 = r^2$$

dir. Böylece yay uzunluğu

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^t r dt = rt$$

olur. İnvolutün denklemi

$$g(t) = (rcost, rsint) + \frac{c - rt}{r}(-rsint, rcost)$$

olarak elde edilir. Koordinatlar ise

$$X(t) = rcost - (c - rt)sint$$

$$Y(t) = rsint + (c - rt)cost$$

dir.

Lemma 2.2.1: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir eğri ve g , α eğrisinin c orijinli involütü olsun. Bu durumda

$$\kappa_{\pm g}(s) = \frac{sgn(\kappa_{\pm}(s))}{|c - s|}$$

dir (Hacısalihoglu, 1983). Burada κ_g ile involüt eğrisinin eğriliği ve κ ile α eğrisinin eğriliği gösterilmektedir.

İspat: İnvolut eğrisi $g(\alpha, c)(s) = \alpha(s) - (c - s)\alpha'(s)$ olduğundan hız vektörü

$$g'(\alpha, c)(s) = T - T + (c - s)T'$$

olur. Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$g'(\alpha, c)(s) = (c - s)\kappa N \quad (2.4)$$

dir. N vektör alanının koordinatları yerine yazılırsa

$$g'(\alpha, c)(s) = (-(c - s)\kappa y', (c - s)\kappa x') = (X', Y')$$

elde edilir. (2.4) denkleminin türevi alınır

$$g''(\alpha, c)(s) = -\kappa N + (c - s)\kappa'N + (c - s)\kappa N'$$

olur. N vektör alanı için Frenet türev formülü yerine yazılırsa

$$g''(\alpha, c)(s) = -\kappa N + (c - s)\kappa'N - (c - s)\kappa^2 T$$

veya

$$g''(\alpha, c)(s) = (-\kappa + (c - s)\kappa')N - (c - s)\kappa^2 T$$

olur. Burada T ve N vektör alanlarının koordinatları yerine yazılırsa

$$g''(\alpha, c)(s) = (-\kappa + (c - s)\kappa')(-y', x') - (c - s)\kappa^2(x', y') = (X'', Y'')$$

dir. Şimdi involüt eğrisinin eğriliğini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} X'Y'' - X''Y' &= -(c - s)\kappa(-\kappa + (c - s)\kappa')x'y' + (c - s)^2\kappa^3y'^2 \\ &\quad + (c - s)\kappa(-\kappa + (c - s)\kappa')x'y' + (c - s)^2\kappa^3x'^2 \end{aligned}$$

olacağından

$$X'Y'' - X''Y' = (c - s)^2\kappa^3$$

dir. Diğer taraftan

$$X'^2 + Y'^2 = (c - s)^2\kappa^2$$

olur. Böylece eğrilik ifadesinde bu denklemler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \frac{X'Y'' - X''Y'}{(X'^2 + Y'^2)^{3/2}} = \frac{(c - s)^2\kappa^3}{(c - s)^3|\kappa|^3} \\ &= \frac{\text{sgn}(\kappa)}{|c - s|} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

2.3. $\mathbb{R}^3$ Öklid Uzayında Eğriler

Tanım 2.3.1: $I, \mathbb{R}$ de bir açık aralık olmak üzere $\forall t \in I$ için $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü diferansiyellenebilir ise α dönüşümüne $\mathbb{R}^3$ te bir eğri denir (Kühnel, 2015).

Tanım 2.3.2: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri, s yay parametresi olsun. Bu eğrinin ardışık türevleri $\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)$ lineer bağımsız vektörlerdir.

$$t(s) = \alpha'(s), \quad n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad b(s) = t(s) \times n(s)$$

olacak şekilde $\{t(s), n(s), b(s)\}$ ortonormal sistemine Frenet çatısı denir. $t(s), n(s), b(s)$ birim vektörlerine sırasıyla eğrinin teğet vektörü, asli normal vektörü ve binormal vektörü denir (Do Carmo, 2016).

Tanım 2.3.3: $\{t, n, b\}$ Frenet çatısına göre

$\{t, n\}$ tarafından gerilen düzleme öskülatör düzlem,

$\{t, b\}$ tarafından gerilen düzleme rektifyen düzlem,

$\{n, b\}$ tarafından gerilen düzleme normal düzlem denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.3.4: 3 boyutlu Öklid uzayında bir α eğrisinin Frenet çatısı $\{t, n, b\}$ olsun. O başlangıç noktası olmak üzere $\overrightarrow{O\alpha(t)}$ vektörüne yer (konum) vektörü denir. Eğer konum vektörü için

$sp\{t, n\}$ öskülatör düzleminde kalıyorsa eğriye öskülatör eğri,

$sp\{t, b\}$ rektifyen düzleminde kalıyorsa eğriye rektifyen eğri,

$sp\{n, b\}$ normal düzleminde kalıyorsa eğriye normal eğri denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.3.5: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri ve eğrinin birim teğet vektör alanı $t(s) = \alpha'(s)$ olsun. Bu durumda

$$\|t\| = \langle t, t \rangle = 1$$

olduğundan, her iki tarafın s parametresine göre türevi alınır

$$\langle t', t \rangle = 0$$

olur. Böylece t', t vektör alanına diktir. Şimdi

$$\kappa(s) = \|t'(s)\|$$

ile tanımlayalım. Bu durumda $\kappa(s) \geq 0$ dır. Böylece asli normal vektör alanı

$$n(s) = \frac{1}{\kappa(s)} t'(s) , \quad \kappa(s) \neq 0$$

ile tanımlanır. Burada

$$\|n(s)\| = \frac{1}{\kappa(s)} \|t'(s)\| = 1$$

dir. Böylece n birim normal vektör alanıdır. Şimdi $b = t \times n$ olduğundan

$$\|b\| = \|t \times n\| = \|t\| \cdot \|n\| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

olur. Yani b birim vektör alanıdır. Böylece α eğrisi boyunca $\mathbb{R}^3$ uzayının $\{t, n, b\}$ bazı elde edilir. Bu baza Frenet-Serret çatısı denir (O'Neill, 2006). Burada $\kappa(s)$ fonksiyonuna α eğrisinin eğriliği denir.

Tanım 2.3.6: α , s yay parametresiyle verilen regüler bir eğri ve $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{t, n, b\}$ olsun. Bu çatı ile türevleri arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Burada κ fonksiyonuna eğrinin eğriliği (birinci eğrilik), τ fonksiyonuna ise eğrinin burulması (ikinci eğrilik) denir (O'Neill, 2006).

Tanım 2.3.7: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilmiş olsun. Frenet çatısı $\{t(s), n(s), b(s)\}$ yardımıyla tanımlanan ve her biri eğrinin farklı düzlemler üzerindeki bükülme miktarını ölçen reel fonksiyonlar kümesine eğrinin eğrilikleri denir. Birinci eğrilik κ ve ikinci eğrilik (burulma) τ ile gösterilir. Burada

$$\kappa = \langle t', n \rangle$$

$$\tau = \langle n', b \rangle$$

dir (Kühnel & Hunt, 2015).

Tanım 2.3.8: Bir α eğrisinin eğrilikleri sırasıyla κ ve τ olsun. Bu durumda aşağıdaki karakterizasyonlar vardır:

- Eğer $\kappa = \tau = 0$ ise eğri bir geodeziktir.
- Eğer $\kappa > 0$ ise eğri sağ sarınlı, $\tau < 0$ ise eğri sol sarınlı bir eğridir.
- Eğer $\kappa = sbt \neq 0$ ise eğri yarıçapı $r = \frac{1}{\kappa}$ olan çemberdir.
- Eğer κ ve τ sabit değil fakat $\frac{\kappa}{\tau}$ oranı sabitse eğri bir genel helistir. (Lancert teoremi)
- Eğer κ ve τ eğrilikleri

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)^2 = r^2$$

eşitliğini sağlarsa eğri $S^2(r)$ küresi üzerinde yatan bir eğridir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.3.9: $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ regüler bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin teğeti sabit doğrultu ile sabit açı yapıyorsa bu durumda α eğrisine bir genel helis eğrisi denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.3.10: $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir regüler eğri olsun. Eğer α eğrisinin κ eğriliği sabit fakat τ eğriliği sabit değilse bu eğriye Salkowski eğrisi denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.3.11: $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir regüler eğri olsun. Eğer α eğrisinin τ eğriliği sabit fakat κ eğriliği sabit değilse bu eğriye Anti-Salkowski eğrisi denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.3.12: $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi ile $\alpha(s) \in \alpha$ noktasında sonsuz yakın dört noktası ortak olan küreye $\alpha(s) \in \alpha$ noktasındaki oskütatör küre denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.3.13: $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin eğrilikleri κ ve τ , Frenet vektörleri $\{t, n, b\}$ olsun. $\alpha(s) \in \alpha$ noktasındaki oskütatör küre merkezi α ise oskütatör küre merkezinin geometrik yeri,

$$\alpha = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa}n - \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau}b$$

denklemleri ile verilir (Banchoff & Lovett, 2022).

2.4. $\mathbb{R}^3$ Öklid Uzayında Çatı Eğrileri

3 boyutlu Öklid uzayında bir çatı eğrisi, hareketli bir çatıya sahip düzgün bir uzay eğrisidir.

Tanım 2.4.1: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir bir eğri ve $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3$ te iki vektör olmak üzere $(v_1, v_2): I \rightarrow \Delta$ olacak şekilde $\Delta = \{v_1(t), v_2(t)\}$ olsun. Eğer $\langle \alpha'(t), v_1(t) \rangle = 0$ ve $\langle \alpha'(t), v_2(t) \rangle = 0$ ise (α, v_1, v_2) sistemine α nın bir çatı eğrisi denir ve $(\alpha, v_1, v_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ ile gösterilir. $\mu(t) = v_1(t) \times v_2(t)$ olmak üzere $\{v_1(t), v_2(t), \mu(t)\}$, $\mathbb{R}^3$ teki $\alpha(t)$ nin hareketli bir bazı olur. Bu çatı sistemi ile çatı sisteminin türevleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır (Honda & Takahashi, 2020):

$$l(t) = \langle v_1'(t), v_2(t) \rangle$$

$$m(t) = \langle v_1'(t), \mu(t) \rangle$$

$$n(t) = \langle v_2'(t), \mu(t) \rangle$$

$$p(t) = \langle \alpha'(t), \mu(t) \rangle$$

Bu bağıntıların elde edildiği matris sistemi de

$$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ \mu'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l(t) & m(t) \\ -l(t) & 0 & n(t) \\ -m(t) & -n(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir (Honda & Takahashi, 2016). Ayrıca

$$\alpha'(t) = p(t)\mu(t)$$

dir. Bu formüllere Frenet tipi formüller adı verilir. Ayrıca (l, m, n, p) fonksiyonlarına da (α, v_1, v_2) çatı eğrisinin eğrilikleri denir. $p(t_0) = 0$ olursa t_0 , α nın bir singüler noktası olur (Honda & Takahashi, 2016).

Tanım 2.4.2: (α, v_1, v_2) ve $(\tilde{\alpha}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ iki çatı eğrisi olsun. Sabit bir $A \in SO(3)$ dönüşümü ve $\forall t \in I$ için $p \in \mathbb{R}^3$ öyle ki $\tilde{\alpha}(t) = A(\alpha(t)) + p$, $\tilde{v}_1(t) = A(v_1(t))$, $\tilde{v}_2(t) = A(v_2(t))$ dönüşümleri sağlanıyorsa (α, v_1, v_2) ve $(\tilde{\alpha}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ çatı eğrilerine kongruent çatı eğrileri denir (Honda & Takahashi, 2016).

Teorem 2.4.1 (Çatılar İçin Varlık Teoremi): $(l, m, n, p) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. O zaman eğrilikleri (l, m, n, p) olan $(\alpha, v_1, v_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ çatı eğrisi vardır (Honda & Takahashi, 2016).

Teorem 2.4.2 (Çatılar İçin Teklik Teoremi): (α, v_1, v_2) ve $(\tilde{\alpha}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ eğrileri sırasıyla (l, m, n, p) ve $(\tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{p})$ eğrilikleriyle tanımlanan eğriler olsun. Bu takdirde (α, v_1, v_2) ve $(\tilde{\alpha}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ çatı eğrilerinin kongruent olması için gerek ve yeter şart (l, m, n, p) ve $(\tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{p})$ eğriliklerinin çakışık olmasıdır (Honda & Takahashi, 2016).

Eğrilikleri (l, m, n, p) olan $(\alpha, v_1, v_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ çatı eğrisi verilsin. $(\tilde{v}_1(t), \tilde{v}_2(t)) \in \Delta_2$ tarafından gerilen $\alpha(t)$ nin normal bir düzlemi olsun. Bishop çatısına benzer olarak $\{v_1(t), v_2(t)\}$ ile $\{\tilde{v}_1(t), \tilde{v}_2(t)\}$ arasında aşağıdaki bağıntı vardır (Bishop, 1975)

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_1(t) \\ \tilde{v}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Burada $\theta(t)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. Bu durumda (α, v_1, v_2) aynı zamanda bir çatıdır ve $\mu(t) = \tilde{\mu}(t)$ dir. (2.6) denkleminde göre

$$\tilde{v}_1(t) = \cos\theta(t)v_1(t) - \sin\theta(t)v_2(t)$$

$$\tilde{v}_2(t) = \sin\theta(t)v_1(t) + \cos\theta(t)v_2(t)$$

dir. Bu eşitliklerin türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\tilde{v}_1'(t) = (\cos\theta(t))'v_1(t) + \cos\theta(t)v_1'(t) - (\sin\theta(t))'v_2(t) - \sin\theta(t)v_2'(t)$$

$$\tilde{v}_1'(t) = (l(t) - \theta'(t))\sin\theta(t)v_1(t) + (l(t) - \theta'(t))\cos\theta(t)v_2(t)$$

$$+ (m(t)\cos\theta(t) - n(t)\sin\theta(t))\mu(t) \quad ,$$

$$\tilde{v}_2'(t) = (\sin\theta(t))'v_1(t) + \sin\theta(t)v_1'(t) + (\cos\theta(t))'v_2(t) + \cos\theta(t)v_2'(t)$$

$$\begin{aligned}\tilde{v}_2'(t) &= (l(t) - \theta'(t))\cos\theta(t)v_1(t) + (l(t) - \theta'(t))\sin\theta(t)v_2(t) \\ &\quad + (m(t)\cos\theta(t) - n(t)\sin\theta(t))\mu(t)\end{aligned}$$

elde edilir. $\theta(t) = l(t)$ olacak şekilde bir $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu alalım. O zaman $\{\tilde{v}_1(t), \tilde{v}_2(t), \mu(t)\}$ çatısı $\alpha(t)$ boyunca bir çatı olarak tanımlanır. Böylece Frenet-Serret tipi formüllere benzer olarak aşağıdaki bağıntılar verilir:

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_1'(t) \\ \tilde{v}_2'(t) \\ \mu'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{m}(t) \\ 0 & 0 & \tilde{n}(t) \\ -\tilde{m}(t) & -\tilde{n}(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1(t) \\ \tilde{v}_2(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}.$$

Buradan

$$\tilde{v}_1'(t) = \tilde{m}(t)\mu(t)$$

$$\tilde{v}_2'(t) = \tilde{n}(t)\mu(t)$$

$$\mu'(t) = -\tilde{m}(t)\tilde{v}_1(t) - \tilde{n}(t)\tilde{v}_2(t)$$

olur. Böylece $\tilde{m}(t)$ ve $\tilde{n}(t)$ nin

$$\begin{bmatrix} \tilde{m}(t) \\ \tilde{n}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m(t) \\ n(t) \end{bmatrix}$$

eşitliği ile verildiği sonucu ortaya çıkar .

Ayrıca, belirli bir koşul altında, temel bir çatı eğrisi boyunca hareket eden özel bir çatıyı ele alalım. $(\alpha, v_1, v_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ eğrisi $m^2(t) + n^2(t) \neq 0$ ifadesi ile tanımlanmış bir eğri olsun. $(n_1(t), n_2(t)) \in \Delta$ aşağıdaki şekilde tanımlanır (Honda & Takahashi, 2020):

$$\begin{aligned}n_1(t) &= \frac{m(t)v_1(t) + n(t)v_2(t)}{\sqrt{m^2(t) + n^2(t)}} \\ n_2(t) &= \frac{-n(t)v_1(t) + m(t)v_2(t)}{\sqrt{m^2(t) + n^2(t)}}.\end{aligned}$$

$n_1(t) \times n_2(t) = \mu(t)$ olacak şekilde $\{n_1(t), n_2(t), \mu(t)\}$ hareketli çatısına $\alpha(t)$ boyunca Frenet tipi çatı denir. O zaman Frenet-Serret tipi formül aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{bmatrix} n_1'(t) \\ n_2'(t) \\ \mu'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & L(t) & M(t) \\ -L(t) & 0 & 0 \\ -M(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix},$$

$$\alpha'(t) = p(t)\mu(t),$$

burada

$$L(t) = \frac{m(t)n'(t) - m'(t)n(t) + \ell(t)(m^2(t) + n^2(t))}{m^2(t) + n^2(t)}$$

$$M(t) = \sqrt{m^2(t) + n^2(t)}$$

dir. Bu nedenle (α, n_1, n_2) çatı eğrisinin eğriliği $(L, M, 0, p)$ ile verilir.

Orijinal çatı $\{v_1(t), v_2(t), \mu(t)\}$ ve Frenet tipi çatı $\{n_1(t), n_2(t), \mu(t)\}$ olduğundan $\mu(t)$ birim vektördür.

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ non-dejenere bir eğri olsun. $v_1(t) = n(t)$ ve $v_2(t) = b(t)$ alırsak o zaman $(\alpha, v_1, v_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ bir çatı eğrisidir ve $n_1(t) = -n(t)$, $n_2(t) = -b(t)$, $\mu(t) = t(t)$ olur. $\{n_1(t), n_2(t), \mu(t)\}$ yi $\alpha(t)$ boyunca Frenet tipi çatı olarak adlandırmamızın nedeni budur.

2.5. $\mathbb{R}^4$ Öklid Uzayında Eğriler

Tanım 2.5.1: $a, b \in \mathbb{R}^4$ vektörleri ve bu vektörlerin koordinatları $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ve $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ verilsin. $\mathbb{R}^4$ te Öklid iç çarpımı aşağıdaki şekilde verilir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022) :

$$\langle a, b \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + a_4 \cdot b_4$$

Tanım 2.5.2: $a, b, c \in \mathbb{R}^4$ için $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ ve $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ olduğunu kabul edelim. $\mathbb{R}^4$ uzayında vektörel çarpım

$$a \times b \times c = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix}$$

işlemiyle hesaplanır. Burada $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\mathbb{R}^4$ ün temel bazıdır (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

Tanım 2.5.3: $I \subset \mathbb{R}^4$ açık aralığı olmak üzere $\forall t \in I$ için $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ dönüşümü diferansiyellenebilir ise α dönüşümüne $\mathbb{R}^4$ te bir eğri denir.

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t))$$

şeklinde yazılır (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

Tanım 2.5.4: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ eğrisi verilsin. $\forall t \in I$ için α eğrisinin t parametresine karşılık gelen noktasındaki teğet vektörü

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t), \alpha'_4(t)) \quad (2.7)$$

dir. Eğer $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise bu eğriye regüler eğri denir. Burada $\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}$ dir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

Tanım 2.5.5: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri sırasıyla $\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)$ olsun. $\forall t \in I$ için

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) \times \alpha'''(t) \neq 0$$

koşulu sağlanıyorsa $\alpha(t)$ eğrisine non-dejenere eğri denir, aksi halde bu eğriye dejenere eğri denir (Karakuş & Tosun, 2021).

Tanım 2.5.6: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ eğrisi s yay parametresiyle verilsin.

$$t(s) = \alpha'(s), \quad (2.8)$$

$$n_1(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{t'(s)}{\|t'(s)\|}, \quad (2.9)$$

$$n_2(s) = \frac{n'_1(s) + \|t'(s)\|t(s)}{\|n'_1(s) + \|t'(s)\|t(s)\|}, \quad (2.10)$$

$$n_3(s) = t(s) \times n_1(s) \times n_2(s) \quad (2.11)$$

vektörlerini tanımlayalım. Burada $t(s)$ vektörüne eğrinin birim teğet vektörü, $n_1(s)$, $n_2(s)$, $n_3(s)$ vektörlerine de sırasıyla eğrinin birinci, ikinci ve üçüncü normal vektörleri denir. Burada $\{t(s), n_1(s), n_2(s), n_3(s)\}$ çatısına $\mathbb{R}^4$ te α eğrisinin Frenet çatısı denir (Honda & Takahashi, 2016).

Tanım 2.5.7: s yay parametresi olmak üzere $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{t(s), n_1(s), n_2(s), n_3(s)\}$ olsun. α eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri sırasıyla $\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)$ olmak üzere aşağıdaki bağıntıları hesaplayabiliriz.

$$\kappa_1(s) = \|\alpha''(s)\| \quad (2.12)$$

$$\kappa_2(s) = \frac{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s) \times \alpha'''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^2} \quad (2.13)$$

$$\kappa_3(s) = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\kappa_1^3(s) \cdot \kappa_2^2(s)} \quad (2.14)$$

Burada $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ fonksiyonlarına sırasıyla α eğrisinin birinci, ikinci, üçüncü eğrilikleri denir. Ayrıca $\{t, n_1, n_2, n_3\}$ Frenet çatısı ile bu vektörlerin türevleri arasında bilinen işlemler yapılırsa ($\mathbb{R}^3$ teki gibi)

$$t'(s) = \kappa_1(s) \cdot n_1(s) \quad (2.15)$$

$$n_1'(s) = -\kappa_1(s) \cdot t(s) + \kappa_2(s) \cdot n_2(s)$$

$$n_2'(s) = -\kappa_2(s) \cdot n_1(s) + \kappa_3(s) \cdot n_3(s)$$

$$n_3'(s) = -\kappa_3(s) \cdot n_2(s)$$

elde edilir. Bu ifadeler matris formunda aşağıdaki şekilde gösterilir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022):

$$\begin{bmatrix} t'(s) \\ n_1'(s) \\ n_2'(s) \\ n_3'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1(s) & 0 & 0 \\ -\kappa_1(s) & 0 & \kappa_2(s) & 0 \\ 0 & -\kappa_2(s) & 0 & \kappa_3(s) \\ 0 & 0 & -\kappa_3(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t(s) \\ n_1(s) \\ n_2(s) \\ n_3(s) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Tanım 2.5.8: $t, n_1, n_2, n_3, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ fonksiyonlarına $\mathbb{R}^4$ te α eğrisinin Frenet elemanları denir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

Tanım 2.5.9: t herhangi bir parametre ise $\mathbb{R}^4$ te bir α eğrisinin Frenet elemanları aşağıdaki gibi hesaplanabilir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022):

$$t(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \quad (2.17)$$

$$n_1(t) = \frac{t'(t)}{\|t'(t)\|} = \frac{\|\alpha'(t)\|^2 \cdot \alpha''(t) - (\alpha'(t) \cdot \alpha''(t)) \cdot \alpha'(t)}{\|\|\alpha'(t)\|^2 \cdot \alpha''(t) - (\alpha'(t) \cdot \alpha''(t)) \cdot \alpha'(t)\|} \quad (2.18)$$

$$n_2(t) = -n_3(t) \times t(t) \times n_1(t) \quad (2.19)$$

$$n_3(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t) \times \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t) \times \alpha'''(t)\|} \quad (2.20)$$

2.6. $\mathbb{R}^4$ Öklid Uzayında Çatı Eğrileri

$\mathbb{R}^4 \times \Delta$ da bir çatı eğrisi, hareketli bir çatı ile tanımlanmış düzgün bir uzay eğrisidir.

Tanım 2.6.1: $i = 1, 2, 3$ için, $(v_1, v_2, v_3): I \rightarrow \Delta$ vektörleri $\forall t \in I$ için $\langle \alpha'(t), v_i(t) \rangle = 0$ eşitliğini sağlıyorsa $(\alpha, v_1, v_2, v_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ eğrisi bir çatı eğrisidir. Burada $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ eğrisine çatı tabanı denir. Ayrıca $\alpha(t)$ boyunca hareket eden bir $\{v_1(t), v_2(t), v_3(t), \mu(t)\}$ çatısı varsa burada $\mu(t) = v_1(t) \times v_2(t) \times v_3(t)$ dir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

Tanım 2.6.2: $(l_1, l_2, \dots, l_6, \gamma): I \rightarrow \mathbb{R}^7$ şeklinde tanımlı olan dönüşüme $(\alpha, v_1, v_2, v_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ çatı eğrisinin eğrilikleri denir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

$$\alpha'(t) = \gamma(t)\mu(t)$$

ve

$$\gamma(t) = \langle \alpha'(t), \mu(t) \rangle$$

dir.

Tanım 2.6.3: $\{v_1(t), v_2(t), v_3(t), \mu(t)\}$ vektörleri ve bu vektörlerin türevleri arasında bilinen işlemler yapılırsa

$$l_1(t) = \langle v_1'(t), v_2(t) \rangle$$

$$l_2(t) = \langle v_1'(t), v_3(t) \rangle$$

$$l_3(t) = \langle v_1'(t), \mu(t) \rangle$$

$$l_4(t) = \langle v_2'(t), v_3(t) \rangle$$

$$l_5(t) = \langle v_2'(t), \mu(t) \rangle$$

$$l_6(t) = \langle v_3'(t), \mu(t) \rangle$$

elde edilir. Bu ifadeler matris formunda aşağıdaki şekilde gösterilebilir (Honda & Takahashi, 2016).

$$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ v_3'(t) \\ \mu'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l_1(t) & l_2(t) & l_3(t) \\ -l_1(t) & 0 & l_4(t) & l_5(t) \\ -l_2(t) & -l_4(t) & 0 & l_6(t) \\ -l_3(t) & -l_5(t) & -l_6(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Tanım 2.6.4: (α, v_1, v_2, v_3) ve $(\tilde{\alpha}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3) : I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ çatı eğrileri olsun. $\forall t \in I$ için

$$\tilde{\alpha}(t) = A(\alpha(t)) + b$$

ve

$$\tilde{v}_i(t) = A(v_i(t)), \quad i = 1, 2, 3$$

olacak şekilde $A \in SO(3)$ dönmesi ve $b \in \mathbb{R}^4$ ötelemesi varsa (α, v_1, v_2, v_3) ve $(\tilde{\alpha}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$ çatı eğrilerinin kongruent olduğunu söyleyebiliriz (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

Teorem 2.6.1: Eğriliği $(l_1, l_2, \dots, l_6, \gamma)$ olarak verilen $(\alpha, v_1, v_2, v_3) : I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ çatı eğrisi olsun. $\alpha(t)$ eğrisinin $(v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ tarafından gerilen normal hiper düzlemi için, regüler bir uzay eğrisinin çatı eğrileri için bazı dönüşümler vardır. $A(t) \in SO(3)$ olacak şekilde $(\tilde{v}_1(t), \tilde{v}_2(t), \tilde{v}_3(t)) \in \Delta$ vektörleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_1(t) \\ \tilde{v}_2(t) \\ \tilde{v}_3(t) \end{bmatrix} = A(t) \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

burada

$A(t)$

$$= \begin{bmatrix} \cos\phi(t)\cos\psi(t) - \sin\phi(t)\cos\theta(t)\sin\psi(t) & -\cos\phi(t)\sin\psi(t) - \sin\phi(t)\cos\theta(t)\cos\psi(t) & \sin\phi(t)\sin\theta(t) \\ \sin\phi(t)\cos\psi(t) + \cos\phi(t)\cos\theta(t)\sin\psi(t) & -\sin\phi(t)\sin\psi(t) + \cos\phi(t)\cos\theta(t)\cos\psi(t) & -\cos\phi(t)\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t)\sin\psi(t) & \sin\theta(t)\cos\psi(t) & \cos\theta(t) \end{bmatrix}$$

dir. Burada $\phi, \psi, \theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. O zaman $(\tilde{\alpha}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ eğrisi de bir çatı eğrisidir ve $\mu(t) = \tilde{\mu}(t)$ dir. Gerekli hesaplamalar yapılarak Frenet-Serret tipi formüller aşağıdaki şekilde verilir.

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_1'(t) \\ \tilde{v}_2'(t) \\ \tilde{v}_3'(t) \\ \tilde{\mu}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{l}_1(t) & \tilde{l}_2(t) & \tilde{l}_3(t) \\ -\tilde{l}_1(t) & 0 & \tilde{l}_4(t) & \tilde{l}_5(t) \\ -\tilde{l}_2(t) & -\tilde{l}_4(t) & 0 & \tilde{l}_6(t) \\ -\tilde{l}_3(t) & -\tilde{l}_5(t) & -\tilde{l}_6(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1(t) \\ \tilde{v}_2(t) \\ \tilde{v}_3(t) \\ \tilde{\mu}(t) \end{bmatrix}, \quad \alpha'(t) = \gamma(t)\mu(t)$$

Burada

$$\begin{aligned} \tilde{l}_1(t) &= -\phi'(t) + (l_1(t) - \psi'(t))\cos\theta(t) \\ &\quad + (-l_2(t)\cos\psi(t) + l_4(t)\sin\psi(t))\sin\theta(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{l}_2(t) &= (\theta'(t) - (l_2(t)\sin\psi(t) + l_4(t)\cos\psi(t)))\sin\phi(t) \\ &\quad + ((l_2(t)\cos\psi(t) - l_4(t)\sin\psi(t))\cos\theta(t) \\ &\quad + (l_1(t) - \psi'(t))\sin\theta(t))\cos\phi(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{l}_3(t) &= (l_6(t)\sin\theta(t) - (l_3(t)\sin\psi(t) + l_5(t)\cos\psi(t))\cos\theta(t))\sin\phi(t) \\ &\quad + (l_3(t)\cos\psi(t) - l_5(t)\sin\psi(t))\cos\phi(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{l}_4(t) &= (-\theta'(t) + (l_2(t)\sin\psi(t) + l_4(t)\cos\psi(t)))\cos\phi(t) \\ &\quad + ((l_1(t) - \psi'(t))\sin\theta(t) \\ &\quad + (l_2(t)\cos\psi(t) - l_4(t)\sin\psi(t))\cos\theta(t))\sin\phi(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{l}_5(t) = & (-l_6(t)\sin\theta(t) + (l_3(t)\sin\psi(t) + l_5(t)\cos\psi(t))\cos\theta(t))\cos\phi(t) \\ & + (l_3(t)\cos\psi(t) - l_5(t)\sin\psi(t))\sin\phi(t),\end{aligned}$$

$$\tilde{l}_6(t) = (l_3(t)\sin\psi(t) + l_5(t)\cos\psi(t))\sin\theta(t) + l_6(t)\cos\theta(t)$$

dir (Honda & Takahashi, 2016).

Sonuç 2.6.1: Yukarıdaki gösterimler altında $\theta, \phi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonları $\forall t \in I$ için

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \frac{(-l_2(t)\cos\psi(t) + l_4(t)\sin\psi(t))}{\sin\theta(t)}, \\ \psi'(t) &= \frac{(l_2(t)\cos\psi(t) - l_4(t)\sin\psi(t))\cos\theta(t)}{\sin\theta(t) + l_1(t)}, \\ \theta'(t) &= l_2(t)\sin\psi(t) + l_4(t)\cos\psi(t),\end{aligned}$$

ve $\sin\theta(t) \neq 0$ alınırsa o zaman $\tilde{l}_1(t) = \tilde{l}_2(t) = \tilde{l}_4(t) = 0$ olur. Bu takdirde $\{v_1(t), v_2(t), v_3(t), \mu(t)\}$ çatısına $\alpha(t)$ boyunca uyarlanmış bir çatı denir ve Frenet-Serret formülleri aşağıdaki şekilde verilir (Honda & Takahashi, 2016).

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}'_1(t) \\ \tilde{v}'_2(t) \\ \tilde{v}'_3(t) \\ \mu'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{l}_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{l}_5(t) \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{l}_6(t) \\ -\tilde{l}_3(t) & -\tilde{l}_5(t) & -\tilde{l}_6(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1(t) \\ \tilde{v}_2(t) \\ \tilde{v}_3(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}, \quad \alpha'(t) = \gamma(t)\mu(t)$$

3. $\mathbb{R}^3$ ÖKLİD UZAYINDA EĞRİ ÇİFTLERİ

Bu bölümde $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında eğri çiftleri arasındaki bağıntılar değerlendirildi. Beş alt bölümden oluşan bu kısmın birinci alt bölümünde İnvolut-Evolüt eğri çiftleri ele alındı. İkinci alt bölümde Bertrand eğri çiftleri incelendi. Üçüncü alt bölümde Mannheim eğri çiftleri arasındaki bağıntılar verildi. Dördüncü ve beşinci alt bölümlerde ise çatı eğrilerinde Bertrand ve Mannheim eğrileri araştırıldı.

3.1. İnvolut-Evolüt Eğri Çifti

Tanım 3.1.1: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri ve $\bar{\alpha}$ aynı aralıkta tanımlı regüler bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için α eğrisinin teğeti t , $\bar{\alpha}$ eğrisinin $\bar{t}$ teğet vektörüne dik ise $\bar{\alpha}$ eğrisine α eğrisinin involütü, α eğrisine de $\bar{\alpha}$ eğrisinin evolütü denir. Böylece involüt-evolüt α ve $\bar{\alpha}$ eğrileri için

$$\langle t, \bar{t} \rangle = 0$$

olur.

Şimdi bu eğri çiftinin birbirine göre durumları incelenecektir (Şahin, 2022).

Lemma 3.1.1: $\bar{\alpha}$ birim hızlı eğrisi α eğrisinin involütü ise, c bir sabit olmak üzere $\forall s \in I$ için

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + (c - s)t(s) \quad (3.1)$$

dir (Şahin, 2022).

İspat: $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda(s)t(s)$ olsun. $\bar{\alpha}$ eğrisinin hız vektör alanı

$$\bar{\alpha}'(s) = \alpha'(s) + \lambda'(s)t(s) + \lambda(s)t'(s)$$

olur. Bu ifade bilindiği üzere

$$\bar{\alpha}'(s) = t(s) + \lambda'(s)t(s) + \lambda(s)\kappa(s)n(s)$$

şeklinde yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa $\bar{\alpha}$ eğrisinin teğet vektör alanı

$$\bar{t}(s) = (1 + \lambda'(s))t(s) + \lambda(s)\kappa(s)n(s)$$

bulunur. α ve $\bar{\alpha}$ eğrileri involüt-evolüt eğri çifti olduğu için $\langle t, \bar{t} \rangle = 0$ dir. Böylece

$$0 = 1 + \lambda'(s)$$

yani

$$\lambda'(s) = -1$$

olur. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\lambda(s) = -s + c$$

bulunur. Böylece

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + (c - s)t(s)$$

dir. ■

Önerme 3.1.1: α ve $\bar{\alpha}$ eğrileri involüt-evolüt eğri çifti ise bu eğriler arasındaki uzaklık

$$\|\bar{\alpha}(s) - \alpha(s)\| = |c - s|$$

dir (Şahin, 2022).

İspat : (3.1) denkleminde

$$\bar{\alpha}(s) - \alpha(s) = (c - s)t(s)$$

yazılabilir. Buradan

$$\|\bar{\alpha}(s) - \alpha(s)\| = |c - s|$$

elde edilir. ■

Önerme 3.1.2: $\bar{\alpha}$, α eğrisinin involütü olsun. α eğrisinin Frenet çatısı $\{t, n, b\}$ ve $\bar{\alpha}$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}\}$ ise

$$\bar{t} = n$$

$$\bar{n} = \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} t + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} b$$

$$\bar{b} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} t + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} b$$

dir, buradaki κ ve τ , sırasıyla α eğrisinin eğriği ve burulmasıdır (Hacısalihoglu, 1983).

İspat: Lemma 3.1.1 den

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + (c - s)t(s)$$

olduğu göz önüne alınır ve Frenet-Serret türev formülleri kullanılırsa

$$\bar{\alpha}'(s) = t(s) + (c - s)t'(s) - t(s)$$

ve

$$\bar{\alpha}'(s) = (c - s)\kappa(s)n(s)$$

elde edilir. $\bar{\alpha}$ eğrisinin kendi $\bar{s}$ parametresine göre türevi alınır

$$\frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{s}} = \frac{d\bar{\alpha}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}}$$

ve

$$\frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{s}} = (c - s)\kappa n \frac{ds}{d\bar{s}} \quad (3.2)$$

olur. Bu vektör alanının uzunluğu

$$\|\bar{\alpha}'(s)\| = |(c - s)\kappa| \|n\|$$

olacağından

$$\bar{t} = \frac{\bar{\alpha}'(s)}{\|\bar{\alpha}'(s)\|}$$

ifadesinden

$$\bar{t} = \frac{(c - s)\kappa n}{|c - s|\kappa}$$

olur. Böylece $\bar{t} = \pm n$ dir. $\bar{t} = n$ durumunu göz önüne alacağız. $\bar{\alpha}'(s)$ ifadesinin s parametresine göre türevi alınır ve Frenet Serret türev formülleri kullanılırsa

$$\bar{\alpha}''(s) = -\kappa n + (c - s)\kappa' n + (c - s)\kappa(-\kappa t + \tau b)$$

ve

$$\bar{\alpha}''(s) = -(c - s)\kappa^2 t + (-\kappa + (c - s)\kappa')n + (c - s)\kappa\tau b$$

olur. $\bar{\alpha}$ eğrisinin birinci ve ikinci türevlerinin vektörel çarpımı yapılırsa

$$\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s) = [(c-s)\kappa n] \times [-(c-s)\kappa^2 t + (-\kappa + (c-s)\kappa')n + (c-s)\kappa\tau b]$$

dır. Burada $n \times n = 0$, $n \times t = -b$, $n \times b = t$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s) = (c-s)^2 \kappa^3 b + (c-s)^2 \kappa^2 \tau t$$

elde edilir. Bu vektör alanının uzunluğu

$$\|\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s)\| = \sqrt{(c-s)^4 \kappa^6 + (c-s)^4 \kappa^4 \tau^2} = |(c-s)^2 \kappa^2| \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

olur. Böylece

$$\bar{b} = \frac{\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s)}{\|\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s)\|} = \frac{\kappa b}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} + \frac{\tau t}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

bulunur. Dairesel permütasyonla $\bar{n} = \bar{b} \times \bar{t}$ olacağından, bu vektörel çarpımın sonucu

$$\bar{n} = \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} t + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} b$$

elde edilir. ■

Önerme 3.1.3: $\bar{\alpha}$ eğrisi α eğrisinin involütü, α eğrisinin eğrilikleri κ, τ ve $\bar{\alpha}$ eğrisinin eğrilikleri de $\bar{\kappa}, \bar{\tau}$ ise

$$\bar{\kappa} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{(c-s)\kappa}$$

$$\bar{\tau} = \frac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)}{(c-s)\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}$$

dir (Şahin, 2022).

İspat: Önerme 3.1.2 ispatından

$$\|\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s)\| = (c - s)^2 \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

ve

$$\|\bar{\alpha}'(s)\| = (c - s)\kappa$$

bulunur.

$$\bar{\kappa} = \frac{\|\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s)\|}{\|\bar{\alpha}'(s)\|^3}$$

olduğundan ifadeler yerine yazılırsa

$$\bar{\kappa} = \frac{(c - s)^2 \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{(c - s)^3 \kappa^3}$$

ve

$$\bar{\kappa} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{(c - s)\kappa}$$

olur. Şimdi Önerme 3.1.2 $\bar{t} = n$ olduğunu belirlediğinden

$$\frac{d\bar{t}}{d\bar{s}} = \frac{d\bar{t}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} = -\kappa\tau + \tau b$$

elde edilir. (3.2) numaralı denklem ve Frenet-Serret formülleri kullanılırsa

$$\kappa\bar{\kappa}(c - s)\bar{n} = -\kappa\tau + \tau b$$

olur. Bu ifade ile $\bar{t}$ vektörel çarpıma tabi tutulursa

$$\kappa\bar{\kappa}(c - s)\bar{b} = \kappa b + \tau t$$

bulunur. Bu ifadenin türevi alınır

$$\frac{d}{ds}(\kappa\bar{\kappa}(c - s))\bar{b} + (\kappa\bar{\kappa}(c - s))\frac{d\bar{b}}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} = \kappa'b + \kappa b' + \tau't + \tau t'$$

olur. $\frac{d\bar{s}}{ds} = (c - s)\kappa$ olduğundan

$$\frac{d}{ds}(\kappa\bar{\kappa}(c - s))\bar{b} + (\kappa^2\bar{\kappa}(c - s)^2)(-\bar{\tau}\bar{n}) = \kappa'b + \tau't - \tau\kappa n + \tau(\kappa n)$$

veya düzenlenirse

$$\frac{d}{ds}(\kappa\bar{\kappa}(c - s))\bar{b} + (\kappa^2\bar{\kappa}(c - s)^2)(-\bar{\tau}\bar{n}) = \kappa'b + \tau't$$

dir. İç çarpıma tabi tutulursa

$$(\kappa^2\bar{\kappa}(c - s)^2)(-\bar{\tau})(\kappa\bar{\kappa}(c - s)) = -\kappa\tau' + \tau\kappa'$$

elde edilir. Böylece

$$\bar{\tau} = \frac{-\kappa\tau' + \tau\kappa'}{-(\kappa^3\bar{\kappa}^2(c - s)^3)}$$

bulunur. $\bar{\kappa}$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\bar{\tau} = \frac{-\kappa\tau' + \tau\kappa'(c - s)^2\kappa^2}{-(\kappa^3(c - s)^3)\kappa^2 + \tau^2} = \frac{-\kappa\tau' + \tau\kappa'}{-(c - s)\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

3.2. Bertrand Eğri Çifti

Tanım 3.2.1: $\mathbb{R}^3$ de iki eğri α ve $\bar{\alpha}$, asli normalleri sırası ile n ve $\bar{n}$ olsun. $\forall t \in I$ için

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda(t)n(t) \quad (3.3)$$

ve $n(t) = \pm\bar{n}(t)$ olacak şekilde bir $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa $\{\alpha, \bar{\alpha}\}$ eğri çiftine bir Bertrand eğri çifti denir. Bu tanıma göre $\{\alpha, \bar{\alpha}\}$ Bertrand çifti ise α nın asli normal doğrusu $\bar{\alpha}$ nin asli normal doğrusu ile her nokta için aynıdır (Choi, Kang, & Kim, 2012), (Bertrand, 1850).

Lemma 3.2.1: Yay parametresiyle verilen regüler bir eğri $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ olsun. Tanım 2.1.1. e göre α ve $\bar{\alpha}$ Bertrand eğrileri ise o zaman λ sıfırdan farklı bir sabittir (Matsuda & Yorozu, 2003).

İspat: (3.3) denkleminin türevi alınır

$$(\bar{\alpha}(s))' = \alpha'(s) + (\lambda(s)n(s))'$$

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{t}(s) = t(s) + \lambda'(s)n(s) + \lambda(s)n'(s)$$

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{t}(s) = t(s) + \lambda'(s)n(s) + \lambda(s)(-\kappa t(s) + \tau b(s))$$

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{t}(s) = (1 - \lambda(s)\kappa(s))t(s) + \lambda'(s)n(s) + \lambda(s)\tau(s)b(s)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $n(s)$ ile iç çarpıma tabii tutulursa $n(s) = \bar{n}(s)$ olduğundan $\forall s \in I$ için $\lambda'(s) = 0$ olur. Bu nedenle λ bir sabittir. Eğer $\lambda = 0$ olursa $\forall s \in I$ için $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s)$ olur. Dolayısıyla λ nın sıfırdan farklı bir sabit olduğu sonucu elde edilir.

■

Teorem 3.2.1: Yay uzunluğu parametresiyle verilen $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ non-dejenere bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için $\tau(s) \neq 0$ olduğunu ve A nın sıfırdan farklı bir sabit olduğunu varsayalım. α ve $\bar{\alpha}$ Bertrand çifti ve $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + An(s)$ olması için gerek ve yeter şart $\forall s \in I$ için

$$A\kappa(s) + B\tau(s) = 1 \quad (3.4)$$

ve

$$B\kappa(s) + A\tau(s) \neq 0 \quad (3.5)$$

olacak şekilde bir B sabitinin var olmasıdır (Matsuda & Yorozu, 2003).

İspat: $(\alpha, \bar{\alpha})$ Bertrand eğri çifti ve $\forall s \in I$ için $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda n(s)$ ve $n(s) = \bar{n}(s)$ olduğunu varsayalım.

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda n(s)$$

eşitliğinin türevi alınır

$$(\bar{\alpha}(s))' = \alpha'(s) + (\lambda n(s))'$$

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{t}(s) = t(s) + \lambda n'(s)$$

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{t}(s) = t(s) + \lambda(-\kappa t(s) + \tau b(s))$$

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{t}(s) = (1 - \lambda(s)\kappa(s))t(s) + \lambda(s)\tau(s)b(s)$$

elde edilir. Burada $\lambda = A$ kabul edilirse

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{t}(s) = (1 - A\kappa(s))t(s) + A\tau(s)b(s) \quad (3.6)$$

olur. $n(s) = \bar{n}(s)$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} \bar{b}(s) \\ \bar{t}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(s) & -\sin\theta(s) \\ \sin\theta(s) & \cos\theta(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(s) \\ t(s) \end{pmatrix}$$

olacak şekilde bir $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ differansiyellenebilir fonksiyonu vardır. Burada

$$\bar{b}(s) = \cos\theta(s)b(s) - \sin\theta(s)t(s) \quad (3.7)$$

$$\bar{t}(s) = \sin\theta(s)b(s) + \cos\theta(s)t(s) \quad (3.8)$$

dir. (3.8) denklemini (3.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|(\sin\theta(s)b(s) + \cos\theta(s)t(s)) = (1 - \lambda(s)\kappa(s))t(s) + \lambda(s)\tau(s)b(s)$$

olur. Bu eşitliğe göre

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\sin\theta(s) = A\tau(s) \quad (3.9)$$

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\cos\theta(s) = 1 - A\kappa(s) \quad (3.10)$$

dir. (3.9) numaralı denklem $-\cos\theta(s)$ ile, (3.10) numaralı denklem ise $\sin\theta(s)$ ile çarpılırsa

$$-\cos\theta(s)\sin\theta(s)\|\bar{\alpha}'(s)\| = -A\cos\theta(s)\tau(s)$$

$$\cos\theta(s)\sin\theta(s)\|\bar{\alpha}'(s)\| = (1 - A\kappa(s))\sin\theta(s)$$

elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$-A\cos\theta(s)\tau(s) + (1 - A\kappa(s))\sin\theta(s) = 0 \quad (3.11)$$

olur.

$$\bar{t}(s) = \sin\theta(s)b(s) + \cos\theta(s)t(s)$$

eşitliğinin türevi alınır

$$\bar{t}'(s) = (\sin\theta(s)b(s))' + (\cos\theta(s)t(s))'$$

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{\kappa}(s)\bar{n}(s) = (\sin\theta(s))'b(s) + \sin\theta(s)b'(s) + (\cos\theta(s))'t(s) + \cos\theta(s)t'(s),$$

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{\kappa}(s)\bar{n}(s) = \theta'(s)\cos\theta(s)b(s) - \sin\theta(s)\tau(s)n(s)$$

$$+ \cos \theta(s) \kappa(s) n(s) - \theta'(s) \sin \theta(s) t(s),$$

$$\begin{aligned} \|\bar{\alpha}'(s)\| \bar{\kappa}(s) \bar{n}(s) &= \theta'(s) \cos \theta(s) b(s) - \theta'(s) \sin \theta(s) t(s) \\ &+ (-\sin \theta(s) \tau(s) + \cos \theta(s) \kappa(s)) n(s) \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir. $n(s) = \bar{n}(s)$ olduğundan eşitliğin her iki tarafı $t(s)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \|\bar{\alpha}'(s)\| \bar{\kappa}(s) \bar{n}(s) t(s) &= \theta'(s) \cos \theta(s) b(s) t(s) - \theta'(s) \sin \theta(s) t(s) t(s) \\ &+ (-\sin \theta(s) \tau(s) + \cos \theta(s) \kappa(s)) n(s) t(s) \end{aligned}$$

olur. Buradan $\forall s \in I$ için $\theta'(s) = 0$ dır. Bu nedenle θ bir sabittir. $\tau(s) \neq 0$ ve

$\|\bar{\alpha}'(s)\| \sin \theta = A \tau(s)$ ile $\sin \theta \neq 0$ ifadesini elde ederiz.

(3.11) denkleminde eşitliğin her iki tarafı $\sin \theta$ ile bölünürse

$$-A \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \tau(s) - A \kappa(s) + 1 = 0$$

olur. Bu denklem düzenlenerek

$$A \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \tau(s) + A \kappa(s) = 1$$

elde edilir. Buradan $\forall s \in I$ için $A \cos \theta / \sin \theta$ yerine B yazılırsa

$$A \kappa(s) + B \tau(s) = 1$$

bulunur. Diğer taraftan $n(s) = \bar{n}(s)$ olduğundan (3.12) denklemi $n(s)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \|\bar{\alpha}'(s)\| \bar{\kappa}(s) \bar{n}(s) n(s) &= \theta'(s) \cos \theta(s) b(s) n(s) - \theta'(s) \sin \theta(s) t(s) n(s) \\ &+ (-\sin \theta(s) \tau(s) + \cos \theta(s) \kappa(s)) n(s) n(s), \end{aligned}$$

$$\|\bar{\alpha}'(s)\| \bar{\kappa}(s) = -\sin \theta \tau(s) + \cos \theta \kappa(s) \quad (3.13)$$

elde edilir. $\cos \theta = \frac{B \sin \theta}{A}$ ve $\sin \theta = \frac{A \cos \theta}{B}$ eşitlikleri (3.13) te yerine yazılırsa

$$\|\bar{\alpha}'(s)\| \bar{\kappa}(s) = -\frac{A \cos \theta}{B} \tau(s) + \frac{B \sin \theta}{A} \kappa(s)$$

olur. Burada $\cos \theta$ yerine $\frac{B \sin \theta}{A}$ yazılırsa

$$\|\bar{\alpha}'(s)\| \bar{\kappa}(s) = -\frac{A \sin \theta}{A} \tau(s) + \frac{B \sin \theta}{A} \kappa(s)$$

elde edilir. Böylece

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{\kappa}(s) = -\sin \theta \tau(s) + \cos \theta \kappa(s) = \frac{\sin \theta}{A}(-A\tau(s) + B\kappa(s))$$

olur. $\bar{\kappa}(s) \neq 0$ olduğundan $\forall s \in I$ için $B\kappa(s) - A\tau(s) \neq 0$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

Şimdi tersine, varsayalım ki $\forall s \in I$ için

$$A\kappa(s) + B\tau(s) = 1,$$

$$B\kappa(s) - A\tau(s) \neq 0$$

ve

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + An(s) \quad (3.14)$$

ifadelerini sağlayan bir B sabiti olsun. (3.6) denkleminde $1 - A\kappa(s)$ yerine $B\tau(s)$ yazılırsa,

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{t}(s) = (1 - A\kappa(s))t(s) + A\tau(s)b(s)$$

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{t}(s) = B\tau(s)t(s) + A\tau(s)b(s)$$

olur. Burada eşitlik $\tau(s)$ parantezine alınır

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{t}(s) = (1 - A\kappa(s))t(s) + A\tau(s)b(s) = \tau(s)(Bt(s) + Ab(s))$$

elde edilir. Bu ifadenin normu $\|\bar{\alpha}'(s)\| = \sqrt{A^2 + B^2}|\tau(s)|$ olduğu için

$$\bar{t}(s) = \operatorname{sgn}(\tau(s))\left(\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)(Bt(s) + Ab(s)) \quad (3.15)$$

olur. Bu ifadede

$$\tau(s) > 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(\tau(s)) = 1,$$

$$\tau(s) < 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(\tau(s)) = -1$$

dir. (3.15) denkleminde $\bar{t}(s)$ in türevi alınır

$$\bar{t}(s) = \operatorname{sgn}(\tau(s))\left(\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)(Bt'(s) + Ab'(s)),$$

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{\kappa}(s)\bar{n}(s) = \operatorname{sgn}(\tau(s))\left(\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)(B\kappa(s) - A\tau(s))n(s)$$

olur.

Önerme 3.2.1: α ve $\bar{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birbirinden farklı diferansiyellenebilir iki eğri olsun. α ve $\bar{\alpha}$ Teorem 2.1.3. teki $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + A n(s)$ ve $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ şartları sağlayan Bertrand eğri çifti ise bu durumda $\bar{\kappa}$ ve $\bar{\tau}$ eğrilikleri

$$\bar{\kappa}(s) = \frac{|B\kappa(s) - A\tau(s)|}{(A^2 + B^2)|\tau(s)|}$$

ve

$$\bar{\tau}(s) = \frac{1}{(A^2 + B^2)\tau(s)}$$

şeklindedir (Matsuda & Yorozu, 2003).

İspat : (3.14) denkleminde

$$\bar{\alpha}'(s) = (1 - A\kappa(s))t(s) + A\tau(s)b(s) = \tau(s)(Bt(s) + Ab(s))$$

eşitliğini yazabiliriz. Böylece bu ifadenin ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri alınır

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}''(s) &= \tau'(s)(Bt(s) + Ab(s)) + \tau(s)(Bt'(s) + Ab'(s)) \\ &= \tau'(s)(Bt(s) + Ab(s)) + \tau(s)(B\kappa(s) - A\tau(s))n(s),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}'''(s) &= \tau''(s)(Bt(s) + Ab(s)) + \tau'(s)(Bt'(s) + Ab'(s)) \\ &\quad + \tau'(s)(B\kappa(s) - A\tau(s))n(s) + \tau(s)(B\kappa(s) - A\tau(s))'n(s) \\ &\quad + \tau(s)(B\kappa(s) - A\tau(s))n'(s), \\ &= \tau''(s)(Bt(s) + Ab(s)) + 2\tau'(s)(B\kappa(s) - A\tau(s))n(s) \\ &\quad + \tau(s)(B\kappa'(s) - A\tau'(s))n(s) \\ &\quad + \tau(s)(B\kappa(s) - A\tau(s))(-\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s))\end{aligned}$$

olur. Buradan $\bar{\alpha}'(s)$ vektörünün normu ve $\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s)$ vektörü hesaplanır ve normu alınır

$$\|\bar{\alpha}'(s)\| = |\tau(s)|(A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s)\| = \tau(s)^2 |B\kappa(s) - A\tau(s)|(A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{\alpha}''(s), \bar{\alpha}'''(s)) = \tau(s)^3 (B\kappa(s) - A\tau(s))^2$$

olduğundan α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerinin eğrilikleri arasında

$$\bar{\kappa}(s) = \frac{|\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s)|}{\|\bar{\alpha}'(s)\|^3} = \frac{|B\kappa(s) - A\tau(s)|}{(A^2 + B^2)|\tau(s)|} \quad (3.16)$$

$$\bar{\tau}(s) = \frac{\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{\alpha}''(s), \bar{\alpha}'''(s))}{\|\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s)\|^2} = \frac{1}{(A^2 + B^2)\tau(s)} \quad (3.17)$$

bağıntıları elde edilir. ■

Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.2.1:

$$\tau(s)\bar{\tau}(s) = \frac{1}{(A^2 + B^2)}$$

olduğundan $\tau(s)\bar{\tau}(s)$ pozitif bir sabittir.

Böylece $\forall s \in I$ için $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ ve $B\kappa(s) - A\tau(s) = 0$ olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa(s) = \frac{A}{A^2 + B^2}$$

ve

$$\tau(s) = \frac{B}{A^2 + B^2}$$

olmasıdır. Buradan $\alpha(s)$ eğrisi

$$\alpha(s) = \left(A \cos \frac{s}{\sqrt{A^2 + B^2}}, A \sin \frac{s}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{Bs}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eğri ise bir helistir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$t(s) = \left(-A \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{A^2 + B^2}}, A \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$$

$$\alpha''(s) = \left(\frac{A}{A^2 + B^2} \cos \frac{s}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{A}{A^2 + B^2} \sin \frac{s}{\sqrt{A^2 + B^2}}, 0 \right),$$

$$\begin{aligned}\|\alpha''(s)\| &= \sqrt{\frac{A^2}{(A^2 + B^2)} \cos^2 \frac{s}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{A^2}{(A^2 + B^2)} \sin^2 \frac{s}{\sqrt{A^2 + B^2}}} \\ &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}},\end{aligned}$$

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right), 0 \right)$$

ifadeleri elde edilir. Dolayısıyla

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda n(s) = \left((A - \lambda) \cos\left(\frac{s}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right), (A - \lambda) \sin\left(\frac{s}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right), \frac{Bs}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$$

dir ve burada λ bir sabittir. Eğer $\lambda = A$ ise $\bar{\alpha}(s) = \left(0, 0, \frac{Bs}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$ dir. Bu durumda $\forall s \in I$ için $\bar{\kappa}(s) = 0$ yani $\bar{\alpha}$ dejenere bir eğridir. Eğer $\lambda \neq A$ ise o zaman

$$A > \lambda \text{ ise } \text{sgn}(A - \lambda) = 1$$

$$A < \lambda \text{ ise } \text{sgn}(A - \lambda) = -1$$

olmak üzere

$$\bar{n}(s) = \text{sgn}(A - \lambda) \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right), 0 \right)$$

olduğundan α ve $\bar{\alpha}$ non-dejenere bir Bertrand eğri çiftidir (Honda & Takahashi, 2020).

3.3. Mannheim Eğri Çifti

Tanım 3.3.1: α ve $\bar{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birbirinden farklı non-dejenere diferansiyellenebilir iki eğri olsun. Eğer $\forall t \in I$ için

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda n(t) \tag{3.18}$$

ve $n(t) = \pm \bar{b}(t)$ eşitlikleri olacak şekilde diferansiyellenebilir bir $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa α ve $\bar{\alpha}$ ye Mannheim eğri çifti denir. Bu tanıma göre α ve $\bar{\alpha}$ Mannheim çifti ise α nın asli normal doğrusu ile $\bar{\alpha}$ nin binormal doğrusu her nokta için aynıdır. λ yerine $-\lambda$ alırsak $n(t) = \bar{b}(t)$ olur. α nın s yay uzunluğu parametresi ile verildiğini kabul edelim. Böylece aşağıdaki Lemma ve Teoremi verebiliriz.

Lemma 3.3.1: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi diferansiyellenebilir non-dejenere bir eğri olsun. α ve $\bar{\alpha}$ Mannheim çifti ise o zaman λ sıfırdan farklı bir sabit olur (Liu & Wang, 2008).

İspat: $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda(s)n(s)$ ifadesinin türevi alınarak

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{t}(s) = (1 - \lambda(s)\kappa(s))t(s) + \lambda'(s)n(s) + \lambda(s)\tau(s)b(s)$$

elde edilir. $n(s) = \bar{b}(s)$ olduğundan $\forall s \in I$ için $\lambda'(s) = 0$ olur. Böylece λ bir sabittir. Eğer $\forall s \in I$ için $\lambda = 0$ ise o zaman $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s)$ olur. O hâlde λ sıfırdan farklı bir sabit olmalıdır. ■

Teorem 3.3.1: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi diferansiyellenebilir non-dejenere bir eğri olsun. Kabul edelim ki $\forall s \in I$ için $\tau(s) \neq 0$ ve A sıfırdan farklı bir sabit olsun. Bu durumda $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + An(s)$ denklemi ile tanımlanan α ve $\bar{\alpha}$ nin Mannheim eğri çifti olabilmesi için gerek ve yeter şart $\forall s \in I$ için

$$A(\kappa^2(s) + \tau^2(s)) = \kappa(s) \quad (3.19)$$

ve

$$\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s) > 0 \quad (3.20)$$

olmalıdır (Liu & Wang, 2008).

İspat: $\forall s \in I$ için $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + An(s)$ ve $n(s) = \bar{b}(s)$ olduğunu kabul edelim. $\bar{\alpha}$ nin s yay parametresi ile verilmediğini göz önünde bulunduralım. $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + An(s)$ ifadesinin türevi alınarak

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{t}(s) = (1 - A\kappa(s))t(s) + A\tau(s)b(s)$$

denklemi elde edilir. $n(s) = \bar{b}(s)$ olduğundan

$$\begin{bmatrix} \bar{t}(s) \\ \bar{n}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta(s) & -\sin\theta(s) \\ \sin\theta(s) & \cos\theta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(s) \\ t(s) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

olacak şekilde diferansiyellenebilir bir $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Buna göre

$$\bar{n}(s) = \sin\theta(s)b(s) + \cos\theta(s)t(s)$$

$$\bar{t}(s) = \cos\theta(s)b(s) - \sin\theta(s)t(s)$$

dir. $\bar{t}(s)$ eşitliği (3.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|(\cos\theta(s)b(s) - \sin\theta(s)t(s)) = (1 - A\kappa(s))t(s) + A\tau(s)b(s)$$

olur. Buradan

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|\cos\theta(s) = A\tau(s) \quad (3.22)$$

$$-\|\bar{\alpha}'(s)\|\sin\theta(s) = 1 - A\kappa(s) \quad (3.23)$$

dir. Burada (3.22) numaralı denklem $\sin\theta(s)$ ile (3.23) numaralı denklem $\cos\theta(s)$ çarpılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$A\tau(s)\sin\theta(s) + (1 - A\kappa(s))\cos\theta(s) = 0 \quad (3.24)$$

elde edilir.

$$\bar{t}(s) = \cos\theta(s)b(s) - \sin\theta(s)t(s)$$

denkleminin türevi alınır

$$(\bar{t}(s))' = (\cos\theta(s))'b(s) + \cos\theta(s)b'(s) - (\sin\theta(s))'t(s) - \sin\theta(s)t'(s)$$

$$\begin{aligned} \|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{\kappa}(s)\bar{n}(s) &= -\theta'(s)\sin\theta(s)b(s) - \theta'(s)\cos\theta(s)t(s) \\ &\quad - (\cos\theta(s)\tau(s) + \sin\theta(s)\kappa(s))n(s) \end{aligned}$$

bulunur. $\forall s \in I$ için $n(s) = \bar{b}(s)$ olduğundan eşitliğin her iki tarafı $n(s)$ ile çarpılarak

$$\cos\theta(s)\tau(s) + \sin\theta(s)\kappa(s) = 0 \quad (3.25)$$

denklemini elde edilir. $\tau(s) \neq 0$ ve $|\bar{\alpha}'(s)|\cos\theta(s) = A\tau(s)$ göz önüne alınır $\cos\theta(s) \neq 0$ olur. Böylece $\sin\theta(s) \neq 0$ dır. $\bar{n}(s) = \sin\theta(s)b(s) + \cos\theta(s)t(s)$ olduğundan $\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{\kappa}(s) = -\theta'(s)$ eşitliği elde edilir. (3.24) ve (3.25) denklemlerinden

$$A(\kappa^2(s) + \tau^2(s)) = \kappa(s)$$

elde edilir. (3.25) denkleminin türevi alınır

$$-\theta'(s)\sin\theta(s)\tau(s) + \cos\theta(s)\tau'(s) + \theta'(s)\cos\theta(s)\kappa(s) + \sin\theta(s)\kappa'(s) = 0$$

olur. Buradan

$$\theta'(s) = \frac{(-\kappa(s)\tau'(s) + \kappa'(s)\tau(s))}{(\kappa^2(s) + \tau^2(s))}$$

elde edilir. $\forall s \in I$ için $\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{\kappa}(s) > 0$ olduğundan $\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s) > 0$ olur ki bu da ispatı tamamlar. ■

Tersine, kabul edelim ki $\forall s \in I$ için

$$A(\kappa^2(s) + \tau^2(s)) = \kappa(s) ,$$

$$\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s) > 0 ,$$

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + An(s)$$

olsun. $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + An(s)$ denkleminin birinci ve ikinci mertebeden türevleri alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}'(s) &= \|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{t}(s) = (1 - A\kappa(s))t(s) + A\tau(s)b(s) \\ &= A\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)(\tau(s)t(s) + \kappa(s)b(s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}''(s) &= \frac{d}{ds} \|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{t}(s) + \|\bar{\alpha}'(s)\|^2 \bar{\kappa}(s)\bar{n}(s) \\ &= A\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)' (\tau(s)t(s) + \kappa(s)b(s)) \\ &\quad + A\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right) (\tau'(s)t(s) + \kappa'(s)b(s)) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\|\bar{\alpha}'(s)\|^3 \bar{\kappa}(s)\bar{b}(s) = A^2 \left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)^2 (\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s))n(s)$$

olur. $n(s) = \bar{b}(s)$ şartı elde edilir ki bu da bize α ve $\bar{\alpha}$ nin Mannheim eşleri olduğunu gösterir (Honda & Takahashi, 2020).

Böylece aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 3.3.1: α ve $\bar{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birbirinden farklı non-dejenere diferansiyellenebilir iki eğri ve $(\alpha, \bar{\alpha})$ eğrileri $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + An(s)$ denklemi ile tanımlanan Mannheim eğri çifti olsun. O zaman $\bar{\alpha}$ nin $\bar{\kappa}$ eğriliği ve $\bar{\tau}$ burulması aşağıdaki şekilde verilir (Liu & Wang, 2008):

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}(s) &= \frac{\kappa(s)(\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s))}{|A\tau(s)|(\kappa^2(s) + \tau^2(s))^{\frac{3}{2}}} \\ \bar{\tau}(s) &= \frac{\kappa(s)}{A\tau(s)} = \frac{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}{\tau(s)} . \end{aligned}$$

İspat: $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + An(s)$ eşitliğinin birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}'(s) &= (1 - A\kappa(s))t(s) + A\tau(s)b(s) \\
&= A \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} (\tau(s)t(s) + \kappa(s)b(s)) \\
\bar{\alpha}''(s) &= A \left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \right)' (\tau(s)t(s) + \kappa(s)b(s)) \\
&\quad + A \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} (\tau'(s)t(s) + \kappa'(s)b(s)), \\
\bar{\alpha}'''(s) &= A \left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \right)'' (\tau(s)t(s) + \kappa(s)b(s)) \\
&\quad + 2A \left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \right)' (\tau'(s)t(s) + \kappa'(s)b(s)) \\
&\quad + A \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} (\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s))n(s)
\end{aligned}$$

elde edilir (Honda & Takahashi, 2020).

(3.20) denkleminde göre $\forall s \in I$ için $\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s) > 0$ olduğundan

$$\|\bar{\alpha}'(s)\| = \frac{|A\tau(s)|}{\kappa(s)} (\kappa^2(s) + \tau^2(s))^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s)\| = A^2 \left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \right)^2 (\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s))$$

dır. Ayrıca

$$\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{\alpha}''(s), \bar{\alpha}'''(s)) = A^3 \left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \right)^3 (\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s))^2$$

olduğundan $\bar{\alpha}$ eğrisinin eğrilik ve burulması

$$\begin{aligned}
\bar{\kappa}(s) &= \frac{\|\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s)\|}{\|\bar{\alpha}'(s)\|^3} = \frac{\kappa(s)(\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s))}{|A\tau(s)|(\kappa^2(s) + \tau^2(s))^{\frac{3}{2}}}, \\
\bar{\tau}(s) &= \frac{\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{\alpha}''(s), \bar{\alpha}'''(s))}{\|\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s)\|^2} = \frac{\kappa(s)}{A\tau(s)} = \frac{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}{\tau(s)}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. ■

$\forall s \in I$ için $A(\kappa^2(s) + \tau^2(s)) = \kappa(s)$ ve $\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s) = 0$ olup buradan

$$\kappa(s) = \frac{1}{(A(1 + B^2))}$$

ve

$$\tau(s) = \frac{B}{(A(1 + B^2))}$$

olacak şekilde bir B sabiti vardır. Böylece α bir helis eğrisidir. Yani $\alpha(s)$ aşağıdaki şekilde verilir:

$$\alpha(s) = \left(A \cos \frac{s}{A\sqrt{1+B^2}}, A \sin \frac{s}{A\sqrt{1+B^2}}, \frac{Bs}{\sqrt{1+B^2}} \right).$$

Buradan

$$\alpha'(s) = t(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{1+B^2}} \sin \frac{s}{A\sqrt{1+B^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} \cos \frac{s}{A\sqrt{1+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{1+B^2}} \right),$$

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{1}{A(1+B^2)} \cos \frac{s}{A\sqrt{1+B^2}}, -\frac{1}{A(1+B^2)} \sin \frac{s}{A\sqrt{1+B^2}}, 0 \right),$$

$$\|\alpha''(s)\| = \frac{1}{A(1+B^2)},$$

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \left(-\cos \left(\frac{s}{A\sqrt{1+B^2}} \right), -\sin \left(\frac{s}{A\sqrt{1+B^2}} \right), 0 \right)$$

elde edilir.

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda n(s)$$

$$= \left((A - \lambda) \cos \left(\frac{s}{A\sqrt{1+B^2}} \right), (A - \lambda) \sin \left(\frac{s}{A\sqrt{1+B^2}} \right), \frac{Bs}{\sqrt{1+B^2}} \right)$$

dir. Burada λ bir sabittir. $\lambda = A$ ise o zaman $\bar{\alpha}(s) = (0, 0, \frac{Bs}{\sqrt{1+B^2}})$ olur. Bu durumda $\bar{\alpha}$ dejeneredir ve $\forall s \in I$ için $\bar{\kappa}(s) = 0$ olur.

$\lambda \neq A$ ise o zaman $\bar{\alpha}$ non-dejeneredir. Ancak bu durumda

$$\bar{b}(s) = \bar{t}(s) \times \bar{n}(s) = \frac{1}{\sqrt{B^2 + \left(\frac{A-\lambda}{A} \right)^2}} \left(B \sin \left(\frac{s}{A\sqrt{1+B^2}} \right), B \cos \left(\frac{s}{A\sqrt{1+B^2}} \right), \frac{A-\lambda}{A} \right)$$

olduğundan α ve $\bar{\alpha}$ nin Mannheim eğri çifti olmadığı sonucu elde edilir (Honda & Takahashi, 2020).

Sonuç 3.3.1: $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ ve $C(\kappa^2(s) + \tau^2(s)) = \kappa(s)$ olacak şekilde sıfırdan farklı A ve C sabitleri ve bir B sabiti varsa o zaman

$$\kappa(s) = \frac{(1 - B\tau(s))}{A}$$

ve

$$(A^2 + B^2)C\tau^2(s) + (-2BC + AB)\tau(s) + C - A = 0$$

dır. Bu ifadenin bir çözümü varsa o zaman $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ bir sabittir. Böylece $\forall s \in I$ için $\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s) = 0$ dır. Bu da bize her zaman için Bertrand ve Mannheim eğrilerinin regüler olmadığını gösterir (Honda & Takahashi, 2020).

3.4. Çatı Eğrilerinde Bertrand Eğri Çifti

(α, ν_1, ν_2) ve $(\bar{\alpha}, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ çatı eğrileri ve bu çatı eğrilerinin eğrilikleri sırasıyla (l, m, n, p) ve $(\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}, \bar{p})$ olsun. α ve $\bar{\alpha}$ nin birbirinden farklı eğriler olduğunu yani $\alpha \neq \bar{\alpha}$ olduğunu varsayalım.

Tanım 3.4.1: $\forall t \in I$ için

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda(t)\nu_1(t) \quad (3.26)$$

ve $\nu_1(t) = \bar{\nu}_1(t)$ olacak şekilde diferansiyellenebilir bir $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa (α, ν_1, ν_2) ve $(\bar{\alpha}, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2)$ çatı eğrilerine Bertrand eğri çifti denir (Honda & Takahashi, 2020).

Lemma 3.4.1: Eğer (α, ν_1, ν_2) ve $(\bar{\alpha}, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2)$ Bertrand çifti ise o zaman λ sıfırdan farklı bir sabittir (Honda & Takahashi, 2020).

İspat : (3.26) eşitliğinin türevi alınırsa $\forall t \in I$ için

$$\bar{p}(t)\bar{\mu}(t) = (p(t) + \lambda(t)m(t))\mu(t) + \lambda(t)l(t)\nu_2(t) + \lambda'(t)\nu_1(t)$$

ifadesi elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $\bar{\nu}_1(t)$ ile çarpılırsa $\bar{\nu}_1(t) = \nu_1(t)$ olduğundan $\forall t \in I$ için $\lambda'(t) = 0$ olur. Böylece λ bir sabittir. $\lambda = 0$ ise o zaman $\forall t \in I$ için $\alpha(t) = \bar{\alpha}(t)$ olacağından bu durum varlık koşulunu sağlamaz. Bu yüzden λ sıfırdan farklı bir sabittir.

Bir çatı eğrisi için bir Bertrand eğrisinin gerekli ve yeterli şartlarını verelim.

Teorem 3.4.1: $(\alpha, v_1, v_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$, eğriliği (l, m, n, p) olan bir çatı eğrisi olsun. O zaman (α, v_1, v_2) bir Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart $\forall t \in I$ için

$$\lambda l(t) \cos \theta(t) - (p(t) + \lambda m(t)) \sin \theta(t) = 0 \quad (3.27)$$

olacak şekilde diferansiyellenebilir bir $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun ve sıfırdan farklı bir λ sabitinin var olmasıdır (Honda & Takahashi, 2020).

İspat: Kabul edelim ki $(\alpha, v_1, v_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ bir Bertrand eğrisi olsun. O zaman $\bar{v}_1(t) = v_1(t)$ olur. $\forall t \in I$ için $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda(t)v_1(t)$ olacak şekilde bir $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ çatı eğrisi ve sıfırdan farklı bir $\lambda \in \mathbb{R}$ sabiti vardır.

(3.26) ifadesinin türevi alınır

$$\bar{p}(t)\bar{\mu}(t) = (p(t) + \lambda(t)m(t))\mu(t) + \lambda(t)l(t)v_2(t)$$

olur. $\bar{v}_1(t) = v_1(t)$ olduğundan

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_2(t) \\ \bar{\mu}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

olacak şekilde bir $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Bu yüzden $\forall t \in I$ için

$$\bar{p}(t) \sin \theta(t) = \lambda(t) \quad (3.29)$$

$$\bar{p}(t) \cos \theta(t) = p(t) + \lambda m(t) \quad (3.30)$$

yazılabilir. Buradan $\forall t \in I$ için

$$\lambda l(t) \cos \theta(t) - (p(t) + \lambda m(t)) \sin \theta(t) = 0$$

olur.

Tersine, kabul edelim ki $\forall t \in I$ için

$$\lambda l(t) \cos \theta(t) - (p(t) + \lambda m(t)) \sin \theta(t) = 0$$

olsun. $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ olup

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda v_1(t) ,$$

$$\bar{v}_1(t) = v_1(t) ,$$

$$\bar{v}_2(t) = \cos \theta(t) v_2(t) - \sin \theta(t) \mu(t)$$

olur. Böylece $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ eğrisi bir çatı eğrisidir. Bu yüzden (α, v_1, v_2) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ eğrileri Bertrand eğri çiftidir (Honda & Takahashi, 2020).

Önerme 3.4.1: $\forall t \in I$ için

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda v_1(t)$$

ve

$$\lambda l(t) \cos \theta(t) - (p(t) + \lambda m(t)) \sin \theta(t) = 0$$

olmak üzere (α, v_1, v_2) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ eğrilerinin Bertrand eğri çifti olduğunu varsayalım. O zaman $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ nin eğrilikleri $(\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}, \bar{p})$ aşağıdaki şekilde verilir (Honda & Takahashi, 2020):

$$\begin{aligned} \bar{l}(t) &= l(t) \cos \theta(t) - m(t) \sin \theta(t), \\ \bar{m}(t) &= l(t) \sin \theta(t) + m(t) \cos \theta(t), \\ \bar{n}(t) &= n(t) - \theta'(t), \\ \bar{p}(t) &= \lambda l(t) \sin \theta(t) + (p(t) + \lambda m(t)) \cos \theta(t). \end{aligned} \quad (3.31)$$

İspat: (3.28) denkleminde

$$\bar{v}_2(t) = \cos \theta(t) v_2(t) - \sin \theta(t) \mu(t)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin türevi alınır

$$\begin{aligned} -\bar{l}(t) \bar{v}_1(t) + \bar{n}(t) \bar{\mu}(t) &= (-l(t) \cos \theta(t) + m(t) \sin \theta(t)) v_1(t) \\ &+ (-\theta'(t) - n(t)) \cos \theta(t) v_2(t) \\ &+ (n(t) - \theta'(t)) \sin \theta(t) \mu(t) \end{aligned}$$

olur. $\bar{v}_1(t) = v_1(t)$ olduğundan eşitliğin iki tarafı $v_1(t)$ ile çarpılırsa

$$\bar{l}(t) = l(t) \cos \theta(t) - m(t) \sin \theta(t)$$

ifadesine ulaşılır.

Benzer şekilde (3.28) ile $\bar{n}(t) = n(t) - \theta'(t)$ eşitliğinin var olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$$\bar{\mu}(t) = \sin \theta(t) v_2(t) + \cos \theta(t) \mu(t)$$

ifadesinin türevi alınır

$$\begin{aligned}\bar{m}(t)\bar{v}_1(t) - \bar{n}(t)\bar{v}_2(t) &= (-l(t)\sin\theta(t) - m(t)\cos\theta(t))v_1(t) \\ &\quad + (\theta'(t) - n(t))\cos\theta(t)v_2(t) \\ &\quad + (n(t) - \theta'(t))\sin\theta(t)\mu(t)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\bar{v}_1(t) = v_1(t)$ olduğundan eşitliğin her iki tarafı $v_1(t)$ ile çarpılarak

$$\bar{m}(t) = l(t)\sin\theta(t) + m(t)\cos\theta(t)$$

ifadesine ulaşılır.

$$\bar{p}(t)\sin\theta(t) = \lambda l(t) \quad (3.32)$$

$$\bar{p}(t)\cos\theta(t) = p(t) + \lambda m(t) \quad (3.33)$$

eşitliklerinde (3.32) numaralı denklem $\sin\theta(t)$ ile (3.33) numaralı denklem ise $\cos\theta(t)$ ile çarpılırsa

$$\bar{p}(t)\sin^2\theta(t) = \lambda l(t)\sin\theta(t) ,$$

$$\bar{p}(t)\cos^2\theta(t) = (p(t) + \lambda m(t))\cos\theta(t)$$

olur. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanır

$$\bar{p}(t) = \lambda l(t)\sin\theta(t) + (p(t) + \lambda m(t))\cos\theta(t)$$

elde edilir. ■

Böylece aşağıdaki sonuçları verebiliriz:

Sonuç 3.4.1: $(\alpha, v_1, v_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$, eğriliği (l, m, n, p) olan bir çatı eğrisi olsun.

(1) $\forall t \in I$ için $l(t) = 0$ ise (α, v_1, v_2) bir Bertrand eğrisidir.

(2) $\forall t \in I$ için $p(t) + \lambda m(t) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir λ sabiti varsa (α, v_1, v_2) bir Bertrand eğrisidir (Honda & Takahashi, 2020).

İspat: (1) $\lambda l(t)\cos\theta(t) - (p(t) + \lambda m(t))\sin\theta(t) = 0$ denkleminde $\theta(t) = 0$ alınır $l(t) = 0$ olur. λ sıfırdan farklı bir sabit olduğundan $l(t) = 0$ olmalıdır. Böylece ispat tamamlanır.

(2) $\lambda l(t)\cos\theta(t) - (p(t) + \lambda m(t))\sin\theta(t) = 0$ denkleminde $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$ alınır $p(t) + \lambda m(t) = 0$ olacağından bu ifade ispatlanmış olur. ■

Eğriliği (l, m, n, p) olan $(\alpha, v_1, v_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ eğrisi bir çatı eğrisi olsun. Eğer uyarlanmış bir $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \mu\}$ çatısı alınır, eğrilikler $(0, \tilde{m}, \tilde{n}, p)$ ile verilir.

Sonuç 3.4.2: $(\alpha, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ eğrisi her zaman için bir Bertrand eğrisidir (Honda & Takahashi, 2020).

Uyarı 3.4.1: Asli normal doğrultusunun regüler olduğunu göz önüne alalım.

Eğrilikleri (l, m, n, p) olan $(\alpha, v_1, v_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ eğrisi bir çatı eğrisi olsun. $\alpha'(t) = p(t)\mu(t)$ ifadesinin türevi alınır

$$(\alpha'(t))' = p'(t)\mu(t) + p(t)\mu'(t),$$

$$\alpha''(t) = p'(t)\mu(t) - p(t)(m(t)v_1(t) + n(t)v_2(t)),$$

$$\alpha''(t) = p'(t)\mu(t) - p(t)m(t)v_1(t) - p(t)n(t)v_2(t)$$

olur. α nın birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin vektörel çarpımları ile aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = p^2(t)n(t)v_1(t) - p^2(t)m(t)v_2(t),$$

$$(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \times \alpha'(t) = -p^3(t)m(t)v_1(t) - p^3(t)n(t)v_2(t),$$

Burada $p(t) \neq 0$. $\{n_1, n_2, \mu\}$ Frenet tipi çatıdır.

Sonuç 3.4.3: (α, v_1, v_2) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ çatı eğrileri olsun. O zaman (α, n_1, n_2) ve $(\bar{\alpha}, \bar{n}_1, \bar{n}_2)$ eğrilerinin Bertrand eğrileri olabilmesi için $\theta(t)$ bir sabit olmak üzere (3.27) ve (3.31) denklemlerini sağlayan bir λ sabitinin olması gerekir.

İspat: $n(t) = \bar{n}(t) = 0$ ve Teorem 3.2.1 in ispatından $\forall t \in I$ için $\theta'(t) = 0$ dır. Bu durumda θ bir sabittir.

Böylece aşağıdaki uyarıyı verebiliriz.

Uyarı 3.4.2: Bazı noktalarda $(m(t), n(t)) = (0, 0)$ olduğunda, $m(t) = r(t)\cos\varphi(t)$, $n(t) = r(t)\sin\varphi(t)$ olacak şekilde bir $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu ve pozitif bir $r: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa Sonuç 3.4.3 için de benzer sonuçlar düşünebiliriz.

3.5. Çatı Eğrilerinde Mannheim Eğri Çifti

(α, v_1, v_2) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ çatı eğrileri ve bu çatı eğrilerinin eğrilikleri sırasıyla (l, m, n, p) ve $(\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}, \bar{p})$ olsun. α ve $\bar{\alpha}$ nin birbirinden farklı eğriler olduğunu yani $\alpha \neq \bar{\alpha}$ olduğunu kabul edelim.

Tanım 3.5.1: $\forall t \in I$ için

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda(t)v_1(t)$$

ve $v_1(t) = \bar{v}_1(t)$ olacak şekilde diferansiyellenebilir bir $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa (α, v_1, v_2) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ çatı eğrilerine Bertrand eğri çifti denir (Liu & Wang, 2008).

Lemma 3.5.1: Eğer (α, v_1, v_2) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ Bertrand çifti ise o zaman λ sıfırdan farklı bir sabittir (Liu & Wang, 2008).

İspat :

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda(t)v_1(t)$$

eşitliğinin türevi alınırsa $\forall t \in I$ için

$$\bar{p}(t)\bar{\mu}(t) = (p(t) + \lambda(t)m(t))\mu(t) + \lambda(t)l(t)v_2(t) + \lambda'(t)v_1(t)$$

ifadesi elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $\bar{v}_1(t)$ ile çarpılırsa $\bar{v}_1(t) = v_1(t)$ olduğundan $\forall t \in I$ için $\lambda'(t) = 0$ olur. Böylece λ bir sabittir. $\lambda = 0$ ise o zaman $\forall t \in I$ için $\alpha(t) = \bar{\alpha}(t)$ olacağından bu durum varlık koşulunu sağlamaz. Bu yüzden λ sıfırdan farklı bir sabittir.

Bir çatı eğrisi için bir Bertrand eğrisinin gerekli ve yeterli şartlarını verelim.

Teorem 3.5.1: $(\alpha, v_1, v_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$, eğriliği (l, m, n, p) olan bir çatı eğrisi olsun. O zaman (α, v_1, v_2) bir Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart $\forall t \in I$ için

$$\lambda l(t) \cos \theta(t) - (p(t) + \lambda m(t)) \sin \theta(t) = 0 \quad (3.34)$$

olacak şekilde diferansiyellenebilir bir $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun ve sıfırdan farklı bir λ sabitinin var olmasıdır (Liu & Wang, 2008).

İspat: Kabul edelim ki $(\alpha, v_1, v_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ bir Bertrand eğrisi olsun. O zaman $\bar{v}_1(t) = v_1(t)$ olur. $\forall t \in I$ için $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda(t)v_1(t)$ olacak şekilde bir $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ çatı eğrisi ve sıfırdan farklı bir $\lambda \in \mathbb{R}$ sabiti vardır.

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda(t)v_1(t)$$

ifadesinin türevi alınırsa

$$\bar{p}(t)\bar{\mu}(t) = (p(t) + \lambda(t)m(t))\mu(t) + \lambda(t)l(t)v_2(t)$$

olur. $\bar{v}_1(t) = v_1(t)$ olduğundan

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_2(t) \\ \bar{\mu}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

olacak şekilde bir $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Bu nedenle $\forall t \in I$ için

$$\bar{p}(t)\sin\theta(t) = \lambda l(t) \quad (3.36)$$

$$\bar{p}(t)\cos\theta(t) = p(t) + \lambda m(t) \quad (3.37)$$

yazılabilir. Buradan $\forall t \in I$ için

$$\lambda l(t)\cos\theta(t) - (p(t) + \lambda m(t))\sin\theta(t) = 0$$

olur.

Tersine, varsayalım ki $\forall t \in I$ için

$$\lambda l(t)\cos\theta(t) - (p(t) + \lambda m(t))\sin\theta(t) = 0$$

olsun. $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ olup

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda v_1(t) ,$$

$$\bar{v}_1(t) = v_1(t) ,$$

$$\bar{v}_2(t) = \cos\theta(t)v_2(t) - \sin\theta(t)\mu(t)$$

olur. Böylece $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ eğrisi bir çatı eğrisidir. Bu yüzden (α, v_1, v_2) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ eğrileri Bertrand eğri çiftidir (Honda & Takahashi, 2020). ■

Önerme 3.5.1: $\forall t \in I$ için

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda v_1(t)$$

ve

$$\lambda l(t)\cos\theta(t) - (p(t) + \lambda m(t))\sin\theta(t) = 0$$

olmak üzere (α, v_1, v_2) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ eğrilerinin Bertrand eğri çifti olduğunu varsayalım. O zaman $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ nin eğrilikleri $(\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}, \bar{p})$ aşağıdaki şekilde verilir (Liu & Wang, 2008):

$$\bar{l}(t) = l(t)\cos\theta(t) - m(t)\sin\theta(t),$$

$$\bar{m}(t) = l(t)\sin\theta(t) + m(t)\cos\theta(t),$$

$$\bar{n}(t) = n(t) - \theta'(t),$$

$$\bar{p}(t) = \lambda l(t)\sin\theta(t) + (p(t) + \lambda m(t))\cos\theta(t).$$

İspat: (3.35) denklemiyle

$$\bar{v}_2(t) = \cos\theta(t)v_2(t) - \sin\theta(t)\mu(t)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin türevi alınır

$$-\bar{l}(t)\bar{v}_1(t) + \bar{n}(t)\bar{\mu}(t) = (-l(t)\cos\theta(t) + m(t)\sin\theta(t))v_1(t)$$

$$+(-\theta'(t) - n(t))\cos\theta(t)v_2(t)$$

$$+(n(t) - \theta'(t))\sin\theta(t)\mu(t)$$

olur. $\bar{v}_1(t) = v_1(t)$ olduğundan eşitliğin iki tarafı $v_1(t)$ ile çarpılırsa

$$\bar{l}(t) = l(t)\cos\theta(t) - m(t)\sin\theta(t)$$

ifadesine ulaşılır.

Benzer şekilde (3.35) ile $\bar{n}(t) = n(t) - \theta'(t)$ eşitliğinin var olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$$\bar{\mu}(t) = \sin\theta(t)v_2(t) + \cos\theta(t)\mu(t)$$

ifadesinin türevi alınır

$$\begin{aligned}
\bar{m}(t)\bar{v}_1(t) - \bar{n}(t)\bar{v}_2(t) &= (-l(t)\sin\theta(t) - m(t)\cos\theta(t))v_1(t) \\
&+ (\theta'(t) - n(t))\cos\theta(t)v_2(t) \\
&+ (n(t) - \theta'(t))\sin\theta(t)\mu(t)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\bar{v}_1(t) = v_1(t)$ olduğundan eşitliğin her iki tarafı $v_1(t)$ ile iç çarpıma tabi tutularak

$$\bar{m}(t) = l(t)\sin\theta(t) + m(t)\cos\theta(t)$$

ifadesine ulaşılır. (3.32) ve (3.33) denklemlerinden

$$\bar{p}(t)\sin\theta(t) = \lambda l(t) ,$$

$$\bar{p}(t)\cos\theta(t) = p(t) + \lambda m(t)$$

eşitliklerinde (3.32) numaralı denklem $\sin\theta(t)$ ile (3.33) numaralı denklem ise $\cos\theta(t)$ ile çarpılırsa

$$\bar{p}(t)\sin^2\theta(t) = \lambda l(t)\sin\theta(t) ,$$

$$\bar{p}(t)\cos^2\theta(t) = (p(t) + \lambda m(t))\cos\theta(t)$$

olur. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$\bar{p}(t) = \lambda l(t)\sin\theta(t) + (p(t) + \lambda m(t))\cos\theta(t)$$

elde edilir (Liu & Wang, 2008). ■

Böylece aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç 3.5.1: $(\alpha, v_1, v_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$, eğriliği (l, m, n, p) olan bir çatı eğrisi olsun.

- (1) $\forall t \in I$ için $l(t) = 0$ ise, (α, v_1, v_2) bir Bertrand eğrisidir (Honda & Takahashi, 2020).
- (2) $\forall t \in I$ için $p(t) + \lambda m(t) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir λ sabiti varsa, (α, v_1, v_2) bir Bertrand eğrisidir (Honda & Takahashi, 2020).

İspat:

- (1) $\lambda l(t)\cos\theta(t) - (p(t) + \lambda m(t))\sin\theta(t) = 0$ denkleminde $\theta(t) = 0$ alınırsa $\lambda l(t) = 0$ olur. λ sıfırdan farklı bir sabit olduğundan $l(t) = 0$ olmalıdır. Böylece ispat tamamlanır.

(2) $\lambda l(t)\cos\theta(t) - (p(t) + \lambda m(t))\sin\theta(t) = 0$ denkleminde $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$ alınırsa $p(t) + \lambda m(t) = 0$ olacağından bu ifade ispatlanmış olur. ■

Eğriliği (l, m, n, p) olan $(\alpha, v_1, v_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ eğrisi bir çatı eğrisi olsun. Eğer uyarlanmış bir $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \mu\}$ çatısı alınırsa, eğrilikler $(0, \tilde{m}, \tilde{n}, p)$ ile verilir.

Sonuç 3.5.2: $(\alpha, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ eğrisi her zaman için bir Bertrand eğrisidir (Honda & Takahashi, 2020).

Uyarı 3.5.1: Asli normal doğrultusunun regüler olduğunu göz önüne alalım.

Eğrilikleri (l, m, n, p) olan $(\alpha, v_1, v_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ eğrisi bir çatı eğrisi olsun.

$$\alpha'(t) = p(t)\mu(t)$$

eşitliğinin türevi alınırsa

$$(\alpha'(t))' = p'(t)\mu(t) + p(t)\mu'(t),$$

$$\alpha''(t) = p'(t)\mu(t) - p(t)(m(t)v_1(t) + n(t)v_2(t)),$$

$$\alpha''(t) = p'(t)\mu(t) - p(t)m(t)v_1(t) - p(t)n(t)v_2(t)$$

olur. α nın birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin vektörel çarpımları ile aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = p^2(t)n(t)v_1(t) - p^2(t)m(t)v_2(t),$$

$$(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \times \alpha'(t) = -p^3(t)m(t)v_1(t) - p^3(t)n(t)v_2(t),$$

Burada $p(t) \neq 0$. $\{n_1, n_2, \mu\}$ Frenet tipi çatıdır.

Sonuç 3.5.3: (α, v_1, v_2) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ çatı eğrileri olsun. O zaman (α, n_1, n_2) ve $(\bar{\alpha}, \bar{n}_1, \bar{n}_2)$ eğrilerinin Bertrand eğrileri olabilmesi için $\theta(t)$ bir sabit olmak üzere (3.31) ve (3.34) denklemlerini sağlayan bir λ sabitinin olması gerekir.

İspat: $\forall t \in I$ için $n(t) = \bar{n}(t) = 0$ ve Teorem 3.2.1 den $\theta'(t) = 0$ dır. Bu durumda θ bir sabittir. ■

Böylece aşağıdaki uyarı verilebilir.

Uyarı 3.5.2: Bazı noktalarda $(m(t), n(t)) = (0, 0)$ olduğunda ,

$$m(t) = r(t)\cos\varphi(t),$$

$$n(t) = r(t)\sin\varphi(t)$$

olacak şekilde bir $\varphi:I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu ve pozitif bir $r:I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa Sonuç 3.5.3 için de benzer sonuçlar düşünebiliriz.



4. $\mathbb{R}^4$ ÖKLİD UZAYINDA EĞRİ ÇİFTLERİ

Bu bölümde $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında tanımlanan eğri çiftleri arasındaki yapısal ve diferansiyel nitelikli ilişkiler, kapsamlı bir biçimde ortaya konulmuştur. Beş alt bölümden oluşan bu kısmın, ilk alt bölümünde Bertrand eğri çiftlerine ilişkin temel ifadeler sunulmuştur. İkinci alt bölümünde Mannheim eğri çiftlerinin karakteristik özellikleri analiz edilmiştir. Üçüncü ve dördüncü alt bölümlerde ise çatı eğrileri bağlamında Bertrand ve Mannheim eğrilerinin geometrik özellikleri araştırılmıştır. Beşinci alt bölümde de Bertrand eğri çiftleri yeniden sistematik olarak incelenmiştir.

4.1. Bertrand Eğri Çifti

α ve $\bar{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ birbirinden farklı non-dejenere iki eğri ve α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerinin hareketli çatıları sırasıyla $\{t, n_1, n_2, n_3\}$ ve $\{\bar{t}, \bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3\}$ olsun. Böylece Bertrand eğri çifti aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Tanım 4.1.1: $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu sıfırdan farklı olmak üzere $\forall t \in I$ için

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda(t)n_1(t) \quad (4.1)$$

ve $n_1(t) = \pm \bar{n}_1(t)$ ise α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerine Bertrand eğri çifti denir. Ayrıca α ve $\bar{\alpha}$, Bertrand eşleri olacak şekilde başka bir $\bar{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ tanımlı eğrisi varsa $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ eğrisinin bir Bertrand eğrisi olduğunu söyleriz (Izumiya & Takeuchi, 2002).

Bu tanıma göre eğer α ve $\bar{\alpha}$, Bertrand çifti ise o zaman α eğrisinin birinci normal doğrusu ile $\bar{\alpha}$ eğrisinin birinci normal doğrusu her nokta için lineer bağımlıdır.

s yay parametresi olmak üzere aşağıdaki Lemma ve Teoremleri verebiliriz.

Lemma 4.1.1: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ yay parametresi ile verilen non-dejenere bir eğri olsun. α ve $\bar{\alpha}$ Bertrand eğri çifti ise λ sıfırdan farklı bir sabittir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

İspat: α ve $\bar{\alpha}$ Bertrand eğri çifti ise $\forall s \in I$ için

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda(s)n_1(s) \quad (4.2)$$

dir. Bu ifadenin türevi alınır

$$(\bar{\alpha}(s))' = \alpha'(s) + \lambda'(s)n_1'(s)$$

veya

$$\|\bar{\alpha}(s)\|\bar{t}(s) = t(s) + \lambda'(s)n_1(s) + \lambda(s)n_1'(s)$$

$$\|\bar{\alpha}(s)\|\bar{t}(s) = t(s) + \lambda'(s)n_1(s) + \lambda(s)n_1'(s)$$

$$\|\bar{\alpha}(s)\|\bar{t}(s) = (1 - \lambda(s)\kappa_1(s))t(s) + \lambda'(s)n_1(s) + \lambda(s)\kappa_2(s)n_2(s) \quad (4.3)$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafı $n_1(s)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa $n_1(s) = \pm \bar{n}_1(s)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|\bar{\alpha}(s)\|\langle \bar{t}(s), \bar{n}_1(s) \rangle &= (1 - \lambda(s)\kappa_1(s))\langle t(s), n_1(s) \rangle \\ &\quad + \lambda'(s)\langle n_1(s), n_1(s) \rangle + \lambda(s)\kappa_2(s)\langle n_2(s), n_1(s) \rangle \end{aligned}$$

ve

$$0 = \lambda'(s)$$

elde edilir. Bu da λ nın bir sabit olduğunu gösterir. $\lambda = 0$ olsaydı (4.2) denklemine göre $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s)$ olacağından bu durum tanım şartını sağlamaz. Bu takdirde $\lambda \neq 0$ bir sabittir.

Teorem 4.1.1: Yay uzunluğu ile verilen non-dejenere bir eğri $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ fonksiyonu ile verilsin. Kabul edelim ki $\forall s_0 \in I$ için $\kappa_3(s_0) \neq 0$ bir nokta olsun. O halde α bir Bertrand eğrisi değildir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

İspat: s parametresinin $\bar{\alpha}$ eğrisinin yay parametresi olmadığını varsayalım. Lemma 4.1.1 e göre

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda n_1(s)$$

dir, burada λ sıfırdan farklı bir sabittir ve $n_1(s) = \pm \bar{n}_1(s)$ dir. Bu ifadenin türevi alınarak (4.3) numaralı denklem elde edilir.

$\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\forall s \in I$ için

$$\bar{t}(s) = \cos\theta(s)t(s) + \sin\theta(s)n_2(s) \quad (4.4)$$

dir. (4.4) denklemini (4.3) numaralı denklemde yerine yazılırsa

$$\|\bar{\alpha}(s)\|(\cos\theta(s)t(s) + \sin\theta(s)n_2(s)) = (1 - \lambda\kappa_1(s))t(s) + \lambda\kappa_2(s)n_2(s)$$

dir. Ya da

$$\cos\theta(s)t(s) + \sin\theta(s)n_2(s) = \frac{1 - \lambda\kappa_1(s)}{\|\bar{\alpha}(s)\|}t(s) + \frac{\lambda\kappa_2(s)}{\|\bar{\alpha}(s)\|}n_2(s)$$

olur. Buradan

$$\cos\theta(s) = \frac{1 - \lambda\kappa_1(s)}{\|\bar{\alpha}(s)\|}$$

$$\sin\theta(s) = \frac{\lambda\kappa_2(s)}{\|\bar{\alpha}(s)\|}$$

elde edilir. (4.4) bağıntısının türevi alınır

$$(\bar{t}(s))' = -\theta'(s)\sin\theta(s)t(s) + (\kappa_1(s)\cos\theta(s) - \kappa_2(s)\sin\theta(s))n_1(s)$$

elde edilir. Bu eşitlikte (2.15) deki bağıntı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{\kappa}_1(s)\bar{n}_1(s) &= -\theta'(s)\sin\theta(s)t(s) + (\kappa_1(s)\cos\theta(s) - \kappa_2(s)\sin\theta(s))n_1(s) \\ &\quad + \theta'(s)\cos\theta(s)n_2(s) + \kappa_3(s)\sin\theta(s)n_3(s) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı $n_3(s)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa $n_1(s) = \pm\bar{n}_1(s)$ olduğundan $\forall s \in I$ için

$$\kappa_3(s)\sin\theta(s) = 0$$

elde edilir. Böylece $\kappa_3(s) = 0$ olur ki bu da $\kappa_3(s) \neq 0$ koşulu ile çelişkilidir. Buna göre α bir Bertrand eğrisi değildir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022). ■

Sonuç 4.1.1: $\forall s \in I$ için $\kappa_3(s_0) = 0$ ise α eğrisi üç boyutlu uzayda yer alır. Yani α nın bir Bertrand eğrisi olması mümkündür.

4.2. Mannheim Eğri Çifti

α ve $\bar{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ birbirinden farklı non-dejenere eğriler olsun. α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerinin hareketli çatılarını sırasıyla $\{t, n_1, n_2, n_3\}$ ve $\{\bar{t}, \bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3\}$ ile gösterelim. Böylece Mannheim eğri çifti aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Tanım 4.2.1

- (1) $\forall t \in I$ için $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda(t)n_1(t)$ ve $n_1(t) = \pm \bar{n}_2(t)$ olacak şekilde bir $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı diferansiyellenebilir fonksiyonu varsa α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerine ikinci tip Mannheim eğrileri (kısaca ikinci eşler ya da $(n_1, \bar{n}_2)$ - eşleri) denir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).
- (2) $\forall t \in I$ için $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda(t)n_1(t)$ ve $n_1(t) = \pm \bar{n}_3(t)$ olacak şekilde bir $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı diferansiyellenebilir fonksiyonu varsa da α ve $\bar{\alpha}$ çiftine üçüncü tip Mannheim eğrileri (kısaca üçüncü eşler ya da $(n_1, \bar{n}_3)$ - eşleri) denir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

Ayrıca $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ eğrisinin ikinci tip (üçüncü tip) Mannheim eğrisi olduğunu, α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerinin ikinci eşler (üçüncü eşler) başka bir non-dejenere $\bar{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ eğrisi varsa söyleriz. Eğer α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerinin ikinci eşler (üçüncü eşler) ise α nın birinci normal doğrusu ve $\bar{\alpha}$ nin ikinci normal doğrusu (üçüncü normal doğrusu) her nokta için lineer bağımlıdır.

α nın s yay parametresiyle verildiğini kabul edelim.

Lemma 4.2.1: $\alpha, \bar{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ tanımlı non-dejenere iki eğri olsun. Tanım 4.2.1 e göre α ve $\bar{\alpha}$ eğrileri ikinci tip Mannheim eğri çifti ya da üçüncü tip Mannheim eğri çifti ise o zaman λ bir sabittir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

İspat :

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda(s)n_1(s)$$

ifadesinin türevi alınırsa (4.3) numaralı denklem, yani

$$\|\bar{\alpha}(s)\|\bar{t}(s) = (1 - \lambda(s)\kappa_1(s))t(s) + \lambda'(s)n_1(s) + \lambda(s)\kappa_2(s)n_2(s)$$

elde edilir. Daha sonra $n_1(t) = \pm \bar{n}_2(t)$ ve $n_1(t) = \pm \bar{n}_3(t)$ eşitlikleri göz önüne alınıp ifadenin her iki tarafı $n_1(s)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\lambda'(s) = 0$$

olur. Böylece λ nın sabit olduğu ortaya çıkar. ■

Teorem 4.2.1: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ yay parametresiyle verilmiş non-dejenere bir eğri ve $\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$ ise α eğrisinin eğrilikleri olarak verilsin. Kabul edelim ki λ sıfırdan farklı bir sabit olsun. O hâlde s yay parametresi olmak üzere α ve $\bar{\alpha}$ nin ikinci tip Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter şart $\forall s \in I$ için

$$\lambda(\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s)) = \kappa_1(s) \quad (4.5)$$

$$f_1(s) = \lambda^2 \kappa_1'(s)^2 \kappa_2^4(s) \kappa_3^2(s) + (1 - \lambda \kappa_1(s))^2 \kappa_1'(s)^2 \kappa_2^2(s) \kappa_3^2(s) \quad (4.6)$$

$$+ \kappa_1'(s)^2 \left((1 - \lambda \kappa_1(s)) \kappa_2'(s) + \lambda \kappa_1'(s) \kappa_2(s) \right)^2 > 0,$$

$$\begin{aligned} f_2(s) = & \kappa_2(s)(2\kappa_2'(s)^2 \kappa_3(s) + \kappa_2(s) \kappa_2'(s) \kappa_3'(s) \\ & - \kappa_2(s) \kappa_2''(s) \kappa_3(s) + \kappa_2^2(s) \kappa_3^3(s)) \\ & + \kappa_1(s)(2\kappa_1'(s) \kappa_2'(s) \kappa_3(s) + \kappa_1'(s) \kappa_2(s) \kappa_3'(s) \\ & - \kappa_1''(s) \kappa_2(s) \kappa_3(s)) = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

olmasıdır (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

İspat: Kabul edelim ki $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda n_1(s)$ non-dejenere ve $n_1(s) = \pm \bar{n}_2(s)$ olsun. Buradan

$$\bar{\alpha}'(s) = (1 - \lambda \kappa_1(s)) t(s) + \lambda \kappa_2(s) n_2(s) ,$$

$$\|\bar{\alpha}'(s)\| = \sqrt{(1 - \lambda \kappa_1(s))^2 + \lambda^2 \kappa_2^2(s)} \quad (4.8)$$

$$\bar{t}(s) = \frac{1 - \lambda \kappa_1(s)}{\|\bar{\alpha}'(s)\|} t(s) + \frac{\lambda \kappa_2(s)}{\|\bar{\alpha}'(s)\|} n_2(s) \quad (4.9)$$

olur. (4.9) eşitliğinin türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{\kappa}_1(s)\bar{n}_1(s) &= \bar{t}'(s) \\
&= \frac{d}{ds} \left(\frac{1 - \lambda\kappa_1(s)}{\|\bar{\alpha}'(s)\|} \right) t(s) \\
&\quad + \frac{1}{\|\bar{\alpha}'(s)\|} \left((1 - \lambda\kappa_1(s))\kappa_1(s) - \lambda\kappa_2^2(s) \right) n_1(s) \\
&\quad + \frac{d}{ds} \left(\frac{\lambda\kappa_2(s)}{\|\bar{\alpha}'(s)\|} \right) n_2(s) + \frac{\lambda\kappa_2(s)\kappa_3(s)}{\|\bar{\alpha}'(s)\|} n_3(s)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. $n_1(s) = \pm \bar{n}_2(s)$ olduğundan (4.10) denklemi $n_1(s)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$(1 - \lambda\kappa_1(s))\kappa_1(s) - \lambda\kappa_2^2(s) = 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu denklem açılırsa

$$\kappa_1(s) - \lambda\kappa_1^2(s) - \lambda\kappa_2^2(s) = 0$$

olur. Buradan

$$\lambda(\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s)) = \kappa_1(s)$$

olduğu görünür. Eşitliğin her iki tarafı λ ile çarpılırsa

$$\lambda^2(\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s)) = \lambda\kappa_1(s)$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafına da $(1 - 2\lambda\kappa_1(s))$ eklenip gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(1 - \lambda\kappa_1(s))^2 + \lambda^2\kappa_2^2(s) = (1 - \lambda\kappa_1(s))$$

olur. (4.6) numaralı denklemde $(1 - \lambda\kappa_1(s))^2$ ifadesinin yerine $(1 - \lambda\kappa_1(s)) - \lambda^2\kappa_2^2(s)$ yazılırsa

$$\|\bar{\alpha}'(s)\| = \sqrt{1 - \lambda\kappa_1(s)}$$

olur. Bu nedenle $1 - \lambda\kappa_1(s) > 0$ dir ve λ pozitif bir sabittir.

$\bar{\alpha}$ eğrisinin ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri alınır

$$\bar{\alpha}''(s) = -\lambda\kappa_1'(s)t(s) + \lambda\kappa_2'(s)n_2(s) + \lambda\kappa_3(s)\kappa_3(s)n_3(s)$$

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}'''(s) = & -\lambda\kappa''_1(s)t(s) - \frac{\kappa_1(s)}{2}n_1(s) + \lambda(\kappa_2''(s) - \kappa_2(s)\kappa_3^2(s))n_2(s) \\ & + \lambda(2\kappa_2'(s)\kappa_3(s) + \kappa_2(s)\kappa_3'(s))n_3(s)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\bar{\alpha}', \bar{\alpha}''$ ve $\bar{\alpha}'''$ eğrilerine vektörel çarpım işlemi uygulanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s) \times \bar{\alpha}'''(s) &= \frac{\lambda^2}{2}\kappa_1'(s)\kappa_2^2(s)\kappa_3(s)t(s) \\ &+ \frac{\lambda^3\kappa_2(s)}{\kappa_1(s)}\left(\kappa_2(s)(2\kappa_2'(s)^2\kappa_3(s) + \kappa_2(s)\kappa_2'(s)\kappa_3'(s) - \kappa_2(s)\kappa_2''(s)\kappa_3(s) \right. \\ &+ \kappa_2^2(s)\kappa_3^3(s)) \\ &+ \kappa_1(s)(2\kappa_1'(s)\kappa_2'(s)\kappa_3(s) + \kappa_1'(s)\kappa_2(s)\kappa_3'(s) \\ &- \kappa_1''(s)\kappa_2(s)\kappa_3(s))\Big)n_1(s) - \frac{\lambda}{2}(1 - \lambda\kappa_1(s))\kappa_1'(s)\kappa_2(s)\kappa_3(s)n_2(s) \\ &+ \frac{\lambda}{2}\left((1 - \lambda\kappa_1(s))\kappa_1'(s)\kappa_2'(s) + \lambda\kappa_1'(s)^2\kappa_2(s)\right)n_3(s)\end{aligned}$$

olur. Burada $t(s)$ nin katsayısı $A(s)$, $n_1(s)$ nin katsayısı $B(s)$, $n_2(s)$ nin katsayısı $C(s)$ ve $n_3(s)$ nin katsayısı $D(s)$ olarak adlandırılırsa

$$\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s) \times \bar{\alpha}'''(s) = A(s)t(s) + B(s)n_1(s) + C(s)n_2(s) + D(s)n_3(s)$$

olduğu belirtilir. $\bar{n}_2(s) = -\bar{n}_3(s) \times \bar{t}(s) \times \bar{n}_1(s)$ eşitliğine paralel olarak

$$\begin{aligned}-\left(\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s) \times \bar{\alpha}'''(s)\right) \times \bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s) &= \lambda^2\kappa_2^2(s)\kappa_3(s)B(s)t(s) \\ &+ \lambda\left((1 - \lambda\kappa_1(s))(-\kappa_2'(s)D(s) + \kappa_2(s)\kappa_3(s)C(s)) \right. \\ &- \lambda\kappa_2(s)(\kappa_1'(s)D(s) + \kappa_2(s)\kappa_3(s)A(s))\Big)n_1(s) \\ &- \lambda(1 - \lambda\kappa_1(s))\kappa_2(s)\kappa_3(s)B(s)n_2(s) \\ &+ \lambda\left((1 - \lambda\kappa_1(s))\kappa_2'(s) + \lambda\kappa_1'(s)\kappa_2(s)\right)B(s)n_3(s)\end{aligned}\quad (4.11)$$

elde edilir ve $n_1(s) = \bar{n}_2(s)$ olduğundan (4.11) eşitliğinin her iki tarafı $t(s)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\lambda^2\kappa_2^2(s)\kappa_3(s)B(s) = 0$$

olur. Burada $\lambda^2 \kappa_2^2(s) \neq 0$ olacağından $\kappa_3(s)B(s) = 0$ olması gerekir. Eğer $B(s) \neq 0$ olursa o zaman $\kappa_3(s) = 0$ olur. Ayrıca (4.11) denklemi $n_3(s)$ ile iç çarpıma tabi tutulduğunda

$$\lambda \left((1 - \lambda \kappa_1(s)) \kappa_2'(s) + \lambda \kappa_1'(s) \kappa_2(s) \right) B(s) = 0$$

elde edilir. O halde

$$\lambda \left((1 - \lambda \kappa_1(s)) \kappa_2'(s) + \lambda \kappa_1'(s) \kappa_2(s) \right) = 0$$

olur ve bu durum çelişkilidir. Dolayısıyla $\forall s \in I$ için $B(s) = 0$ yani $f_2(s) = 0$ olur. Bu koşul altında $\forall s \in I$ için $\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s) \times \bar{\alpha}'''(s) \neq 0$ olabilmesi için ancak ve ancak $f_1(s) > 0$ olmalıdır. ■

Tersine, kabul edelim ki $\forall s \in I$ için $\lambda(\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s)) = \kappa_3(s)$, $f_1(s) > 0$ ve $f_2(s) = 0$ olsun. Gerekli hesaplamalar yapılarak $\forall s \in I$ için $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda n_1(s)$ ve $n_1(s) = \pm \bar{n}_2(s)$ eşitlikleri elde edilir. Bu durum α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerinin ikinci tip Mannheim eğri çifti olduğunu gösterir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

Önerme 4.2.1: Teorem 4.2.1 deki varsayımlar ve notasyonlar altında

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda n_1(s)$$

ifadesi ile α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerinin ikinci tip Mannheim eğri çifti olduğunu kabul edelim. $\bar{\alpha}$ eğrisinin eğrilikleri

$$\bar{\kappa}_1(s) = \frac{\lambda \sqrt{g_1(s)}}{(1 - \lambda \kappa_1(s))^{3/2}},$$

$$\bar{\kappa}_2(s) = \frac{\lambda \sqrt{f_1(s)}}{2(1 - \lambda \kappa_1(s))^{3/2} \bar{\kappa}_1(s)},$$

$$\bar{\kappa}_3(s) = \frac{g_2(s)}{(1 - \lambda \kappa_1(s))^5 \bar{\kappa}_1^3(s) \bar{\kappa}_2^2(s)}$$

dir. Burada

$$g_1(s) = (1 - \lambda \kappa_1(s))(\kappa_1'(s)^2 + \kappa_2^2(s) \kappa_3(s)) - \frac{\kappa_1'(s)^2}{4},$$

$$\begin{aligned}
g_2(s) = & \frac{\lambda^2}{2} \kappa_1'(s) \kappa_2^2(s) \kappa_3(s) \left(-\lambda \kappa_1'''(s) + \frac{1}{2} \kappa_1(s) \kappa_1'(s) \right) \\
& - \frac{1}{2} (1 - \lambda \kappa_1(s)) \lambda \kappa_1'(s) \kappa_2(s) \kappa_3(s) \left(-\frac{1}{2} \kappa_1'(s) \kappa_2(s) + \lambda \kappa_2'''(s) \right. \\
& \left. - 3\lambda \kappa_2'(s) \kappa_3^2(s) - 3\lambda \kappa_2(s) \kappa_3(s) \kappa_3'(s) \right) \\
& + \frac{\lambda}{2} \kappa_1'(s) \left((1 - \lambda \kappa_1(s)) \kappa_2'(s) + \lambda \kappa_1'(s) \kappa_2(s) \right) (3\lambda \kappa_2''(s) \kappa_3(s) \\
& - \lambda \kappa_2(s) \kappa_3^3(s) + 3\lambda \kappa_2'(s) \kappa_3'(s) + \lambda \kappa_2(s) \kappa_3''(s))
\end{aligned}$$

dir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

İspat: Teorem 4.2.1 deki varsayımlara göre, $\forall s \in I$ için

$$\lambda(\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s)) = \kappa_1(s)$$

$$f_1(s) > 0, f_2(s) = 0$$

dır. $\bar{\alpha}$ eğrisinin birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türevleri, gerekli hesaplamalar sonucunda aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\bar{\alpha}'(s) = (1 - \lambda \kappa_1(s))t(s) + \lambda \kappa_2(s)n_2(s)$$

$$\bar{\alpha}''(s) = -\lambda \kappa_1'(s)t(s) + \lambda \kappa_2'(s)n_2(s) + \lambda \kappa_2(s)\kappa_3(s)n_3(s)$$

$$\bar{\alpha}'''(s) = -\lambda \kappa_1''(s)t(s) - \frac{\kappa_1(s)}{2}n_1(s) + \lambda(\kappa_2''(s) - \kappa_2(s)\kappa_3^2(s))n_2(s)$$

$$+ \lambda(2\kappa_2'(s)\kappa_3(s) + \kappa_2(s)\kappa_3'(s))n_3(s)$$

$$\bar{\alpha}^{(4)}(s) = \left(-\lambda \kappa_1'''(s) + \frac{1}{2} \kappa_1(s) \kappa_1'(s) \right) t(s)$$

$$- \left(\lambda \kappa_1''(s) \kappa_1(s) + \frac{\kappa_1''(s)}{2} + \lambda(\kappa_2''(s) - \kappa_2(s)\kappa_3^2(s)) \kappa_2(s) \right) n_1(s)$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} \kappa_1'(s) \kappa_2(s) \right.$$

$$\left. + \lambda(\kappa_2'''(s) - 3\kappa_2'(s)\kappa_3^2(s) - 3\kappa_2(s)\kappa_3(s)\kappa_3'(s)) \right) n_2(s)$$

$$+ \lambda(3\kappa_2''(s)\kappa_3(s) - \kappa_2(s)\kappa_3^3(s) + 3\kappa_2'(s)\kappa_3'(s) + \kappa_2(s)\kappa_3''(s))n_3(s).$$

Ayrıca

$$\|\bar{\alpha}'(s)\| = \sqrt{1 - \lambda\kappa_1(s)}$$

$$\|\bar{\alpha}''(s)\| = \lambda\sqrt{\kappa_1'(s)^2 + \kappa_2'(s)^2 + \kappa_2^2(s)\kappa_3^2(s)}$$

dir. Daha sonra $\lambda(\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s)) = \kappa_1(s)$ denkleminin türevi alınarak

$$2\lambda(\kappa_1(s)\kappa_1'(s) + \kappa_2(s)\kappa_2'(s)) = \kappa_1'(s)$$

elde edilir. $\bar{\alpha}(s)$ eğrisinin birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin iç çarpımı

$$\langle \bar{\alpha}'(s), \bar{\alpha}''(s) \rangle = (1 - \lambda\kappa_1(s))(-\lambda\kappa_1'(s)) + \lambda^2\kappa_2(s)\kappa_2'(s) = -\frac{\lambda}{2}\kappa_1'(s)$$

şeklinde hesaplanır. Buradan gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned} g_1(s) &= \|\bar{\alpha}'(s)\|^2 \|\bar{\alpha}''(s)\|^2 - \langle \bar{\alpha}'(s), \bar{\alpha}''(s) \rangle^2 \\ &= \lambda^2(1 - \lambda\kappa_1(s))(\kappa_1'(s)^2 + \kappa_2'(s)^2 + \kappa_2^2(s)\kappa_3^2(s)) - \frac{\lambda^2}{4}\kappa_1'(s)^2 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca bazı matematiksel hesaplamalar neticesinde

$$\begin{aligned} &\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s) \times \bar{\alpha}'''(s) \\ &= \frac{\lambda^2}{2}\kappa_1'(s)\kappa_2^2(s)\kappa_3(s)t(s) \\ &\quad - \frac{\lambda}{2}(1 - \lambda\kappa_1(s))\kappa_1'(s)\kappa_2(s)\kappa_3(s)n_2(s) \\ &\quad + \frac{\lambda}{2}\left((1 - \lambda\kappa_1(s))\kappa_1'(s)\kappa_2'(s) + \lambda\kappa_1'(s)^2\kappa_2(s)\right)n_3(s) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\|\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s) \times \bar{\alpha}'''(s)\| = \lambda \frac{\sqrt{f_1(s)}}{2}$$

ve

$$g_2(s) = \det\left(\bar{\alpha}'(s), \bar{\alpha}''(s), \bar{\alpha}'''(s), \bar{\alpha}^{(4)}(s)\right) = \langle (\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s) \times \bar{\alpha}'''(s)), \bar{\alpha}^{(4)}(s) \rangle$$

elde edilir. ■

Sonuç olarak $\bar{\alpha}$ eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü eğriliği aşağıda verilmiştir.

$$\bar{\kappa}_1(s) = \frac{\lambda\sqrt{g_1(s)}}{(1 - \lambda\kappa_1(s))^{3/2}} = \frac{\sqrt{\|\bar{\alpha}'(s)\|^2 \|\bar{\alpha}''(s)\|^2 - (\langle \bar{\alpha}'(s), \bar{\alpha}''(s) \rangle)^2}}{\|\bar{\alpha}'(s)\|^3}, \quad (4.13)$$

$$\bar{\kappa}_2(s) = \frac{\lambda\sqrt{f_1(s)}}{2(1 - \lambda\kappa_1(s))^3 \bar{\kappa}_1^2(s)} = \frac{\|\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s) \times \bar{\alpha}'''(s)\|}{\|\bar{\alpha}'(s)\|^6 \bar{\kappa}_1^2(s)}, \quad (4.14)$$

$$\bar{\kappa}_3(s) = \frac{g_2(s)}{(1 - \lambda\kappa_1(s))^5 \bar{\kappa}_1^3(s) \bar{\kappa}_2^2(s)} = \frac{\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{\alpha}''(s), \bar{\alpha}'''(s), \bar{\alpha}^{(4)}(s))}{\|\bar{\alpha}'(s)\|^{10} \bar{\kappa}_1^3(s) \bar{\kappa}_2^2(s)}. \quad (4.15)$$

Teorem 4.2.2: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ eğrisi yay uzunluğu ile verilmiş non-dejenere bir eğri olsun. α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerinin üçüncü tip Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter koşullar $\forall s \in I$ için $\kappa_1(s)$ ve $\kappa_2(s)$ eğriliklerinin pozitif sabitler olması, $\kappa_3(s) \neq 0$, $\lambda(\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s)) = \kappa_1(s)$ ve $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda n_1(s)$ eşitliklerinin sağlanmasıdır (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

İspat: $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda n_1(s)$ ve $n_1(s) = \pm \bar{n}_3(s)$ olduğunu kabul edelim. Bu ifadenin türevi alınarak

$$\bar{\alpha}'(s) = (1 - \lambda\kappa_1(s))t(s) + \lambda\kappa_2(s)n_2(s)$$

olduğundan $\bar{\alpha}(s)$ eğrisinin türevinin normu

$$\|\bar{\alpha}'(s)\| = \sqrt{(1 - \lambda\kappa_1(s))^2 + \lambda^2 \kappa_2^2(s)}$$

olarak elde edilir. Aynı zamanda $\bar{\alpha}(s)$ eğrisinin teğet vektörü

$$\bar{t}(s) = \frac{(1 - \lambda\kappa_1(s))}{\|\bar{\alpha}'(s)\|} t(s) + \frac{\lambda\kappa_2(s)}{\|\bar{\alpha}'(s)\|} n_2(s) \quad (4.16)$$

dir. (4.10) denkleminin türevi alınır

$$\begin{aligned} \|\bar{\alpha}'(s)\| \bar{\kappa}_1(s) \bar{n}_1(s) &= \bar{t}'(s) \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{1 - \lambda\kappa_1(s)}{\|\bar{\alpha}'(s)\|} \right) t(s) + \frac{1}{\|\bar{\alpha}'(s)\|} \left((1 - \lambda\kappa_1(s)) \kappa_1(s) - \lambda\kappa_2^2(s) \right) n_1(s) \\ &\quad + \frac{d}{ds} \left(\frac{\lambda\kappa_2(s)}{\|\bar{\alpha}'(s)\|} \right) n_2(s) + \frac{\lambda\kappa_2(s) \kappa_3(s)}{\|\bar{\alpha}'(s)\|} n_3(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $n_1(s) = \pm \bar{n}_3(s)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$(1 - \lambda\kappa_1(s))\kappa_1(s) - \lambda\kappa_2^2(s) = 0$$

olur. Böylece $\forall s \in I$ için

$$\lambda(\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s)) = \kappa_1(s)$$

sağlanmış olur. Ayrıca gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$(1 - \lambda\kappa_1(s))^2 + \lambda^2\kappa_2^2(s) = 1 - \lambda\kappa_1(s)$$

olur. Bu nedenle $1 - \lambda\kappa_1(s) > 0$ dır ve $\|\bar{\alpha}'(s)\| = \sqrt{1 - \lambda\kappa_1(s)}$ yazılabilir. Frenet-Serret formüllerinden

$$\begin{aligned} \bar{n}_1(s) = & \frac{1}{\|\bar{\alpha}'(s)\|\kappa_1(s)} \left(-\frac{\lambda\kappa_1'(s)}{2\|\bar{\alpha}'(s)\|} t(s) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\lambda\kappa_2'(s)}{\|\bar{\alpha}'(s)\|} + \frac{\lambda^2\kappa_1'(s)\kappa_2(s)}{2\|\bar{\alpha}'(s)\|^3} \right) n_2(s) + \frac{\lambda\kappa_2(s)\kappa_3(s)}{\|\bar{\alpha}'(s)\|} n_3(s) \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

olduğu biliniyor. $n_1(s) = \pm \bar{n}_3(s)$ eşitliğinde karşılıklı iki tarafın türevi alınır

$$-\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{\kappa}_3(s)\bar{n}_2(s) = \pm(-\kappa_1(s)t(s) + \kappa_2(s)n_2(s))$$

elde edilir. Bu durumda

$$\bar{n}_2(s) = \pm \frac{1}{\|\bar{\alpha}'(s)\|\bar{\kappa}_3(s)} (-\kappa_1(s)t(s) + \kappa_2(s)n_2(s))$$

olduğundan $\forall s \in I$ için $\bar{\kappa}_3(s) \neq 0$ dir. Ayrıca $\forall s \in I$ için κ_1 ve κ_2 pozitif sabitlerdir ve $\kappa_1'(s) = \kappa_2'(s) = 0$ sağlandığından

$$\bar{n}_1(s) = \bar{n}_2(s) \times \bar{n}_3(s) \times \bar{t}(s) = \pm \frac{\kappa_2}{\|\bar{\alpha}'(s)\|^2 \bar{\kappa}_3(s)} n_3(s)$$

olur. λ nın da pozitif bir sabit olduğu göz önünde bulundurularak gerekli düzenlemeler yapılırsa $\bar{\alpha}(s)$ eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\bar{\alpha}'(s) = (1 - \lambda\kappa_1)t(s) + \lambda\kappa_2 n_2(s),$$

$$\bar{\alpha}''(s) = \lambda\kappa_2\kappa_3(s)n_3(s),$$

$$\bar{\alpha}'''(s) = \lambda\kappa_2\kappa_3^2(s)n_2(s) + \lambda\kappa_2\kappa_3'(s)n_3(s).$$

(4.12) numaralı denklemin normu alınır

$$\|\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s) \times \bar{\alpha}'''(s)\| = (1 - \lambda\kappa_1)\lambda^2\kappa_2^2\kappa_3^2(s)\|\kappa_3(s)\|$$

elde edilir. $\bar{\alpha}(s)$ eğrisinin non-dejenere olması koşulu göz önüne alınır $\forall s \in I$ için $\kappa_3(s) \neq 0$ olması gerekir.

Tersine, kabul edelim ki κ_1 ve κ_2 pozitif sabitler olsun. $\forall s \in I$ için $\kappa_3(s) \neq 0$ ve $\lambda(\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s)) = \kappa_1(s)$

olsun. Gerekli matematiksel hesaplamalar ve düzenlemeler yapılarak $\forall s \in I$ için α ve $\bar{\alpha}$ non-dejenere eğrileri için

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda n_1(s)$$

bağıntısının sağlandığı ve $n_1(s) = \pm \bar{n}_3(s)$ olduğu sonucuna ulaşılır. Bu durum α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerinin üçüncü tip Mannheim eğri çifti olduğunu gösterir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022). ■

Önerme 4.2.2: Teorem 4.2.2 deki varsayımlar altında kabul edelim ki $\forall s \in I$ için

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda n_1(s)$$

bağıntısı ile birlikte α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerinin üçüncü tip Mannheim eğri çifti olsun. $\bar{\alpha}$ eğrisinin eğrilikleri

$$\bar{\kappa}_1(s) = \frac{\lambda\kappa_2\|\kappa_3(s)\|}{1 - \lambda\kappa_1},$$

$$\bar{\kappa}_2(s) = \|\kappa_3(s)\|,$$

$$\bar{\kappa}_3(s) = \frac{\kappa_2\kappa_3(s)}{(1 - \lambda\kappa_1)\|\kappa_3(s)\|}$$

eşitlikleriyle hesaplanır (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

İspat: Teorem 4.2.2 ile $\forall s \in I$ için $\kappa_1(s)$ ve $\kappa_2(s)$ nin sabit sayılar olduğu $\lambda(\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s)) = \kappa_1(s)$ bağıntısı ile elde edilir. Bu doğrultuda Önerme 4.2.1 in ispatında yer alan $\bar{\alpha}(s)$ eğrisinin birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türevleri yeniden düzenlenip aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\bar{\alpha}'(s) = (1 - \lambda\kappa_1)t(s) + \lambda\kappa_2n_2(s),$$

$$\bar{\alpha}''(s) = \lambda\kappa_2\kappa_3(s)n_3(s),$$

$$\bar{\alpha}'''(s) = -\lambda\kappa_2\kappa_3^2(s)n_2(s) + \lambda\kappa_2\kappa_3'(s)n_3(s),$$

$$\bar{\alpha}^{(4)}(s) = \lambda\kappa_2^2\kappa_3^2(s)n_1(s) + -3\lambda\kappa_2\kappa_3(s)\kappa_3'(s)n_2(s) + \lambda(\kappa_2\kappa_3''(s) - \kappa_2\kappa_3^3(s))n_3(s).$$

Aynı şekilde $\forall s \in I$ için $\kappa_1(s)$ ve $\kappa_2(s)$ sabit sayılar olduğu için

$$\|\bar{\alpha}'(s)\| = \sqrt{1 - \lambda\kappa_1},$$

$$\|\bar{\alpha}''(s)\| = \lambda\kappa_2\|\kappa_3(s)\|,$$

$$\langle \bar{\alpha}'(s), \bar{\alpha}''(s) \rangle = 0,$$

$$\|\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s) \times \bar{\alpha}'''(s)\| = (1 - \lambda\kappa_1)\lambda^2\kappa_2^2\kappa_3^2(s)\|\kappa_3(s)\|,$$

$$\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{\alpha}''(s), \bar{\alpha}'''(s), \bar{\alpha}^{(4)}(s)) = (1 - \lambda\kappa_1)\lambda^3\kappa_2^4\kappa_3^5(s)$$

eşitlikleri yeniden yazılabilir. Bu durumda $\bar{\alpha}(s)$ eğrisinin eğrilikleri

$$\bar{\kappa}_1(s) = \frac{\|\bar{\alpha}''(s)\|}{\|\bar{\alpha}'(s)\|^2} = \frac{\lambda\kappa_2\|\kappa_3(s)\|}{1 - \lambda\kappa_1},$$

$$\bar{\kappa}_2(s) = \frac{\|\bar{\alpha}'(s) \times \bar{\alpha}''(s) \times \bar{\alpha}'''(s)\|}{\|\bar{\alpha}'(s)\|^6 \bar{\kappa}_1^2(s)} = \|\kappa_3(s)\|,$$

$$\bar{\kappa}_3(s) = \frac{\det(\bar{\alpha}'(s), \bar{\alpha}''(s), \bar{\alpha}'''(s), \bar{\alpha}^{(4)}(s))}{\|\bar{\alpha}'(s)\|^{10} \bar{\kappa}_1^3(s) \bar{\kappa}_2^2(s)} = \frac{\kappa_2\kappa_3(s)}{(1 - \lambda\kappa_1)\|\kappa_3(s)\|}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\bar{\kappa}_3(s) = \frac{\kappa_2}{(1 - \lambda\kappa_1)}$$

olduğundan, $\bar{\kappa}_3(s)$ eğriliğinin sabit olduğu ortaya çıkar (Honda, Takahashi, & Yu, 2022). ■

Uyarı 4.2.1: İkinci ve üçüncü tip Mannheim eğrilerinin tanımlarına göre, α nın ikinci ve üçüncü tip Mannheim eğrisi olduğu yönünde hiçbir şey yoktur. Ayrıca Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 de elde edilen bulgular doğrultusunda κ_1 ve κ_2 eğrilikleri sabitlenirse, o zaman $\forall s \in I$ için $f_1(s) = 0$ olur.

4.3. Çatı Eğrilerinde Bertrand Eğri Çifti

(α, v_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ çatı eğrileri olsun. α ve $\bar{\alpha}$ çatı eğrilerinin eğrilikleri sırasıyla $(l_1, l_2, \dots, l_6, \gamma)$ ve $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_6, \bar{\gamma})$ olarak verilsin. α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerinin birbirlerinden farklı olduğunu kabul edelim. Yani $\alpha \neq \bar{\alpha}$ olsun.

Tanım 4.3.1: $\forall t \in I$ için

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda(t)v_1(t) \quad (4.18)$$

ve

$$\bar{v}_1(t) = v_1(t) \quad (4.19)$$

olacak şekilde bir $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa (α, v_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ çatı eğrilerine Bertrand çifti (birinci eşler ya da $(v_1 - \bar{v}_1)$ eşleri) denir. (α, v_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ eğrileri Bertrand çifti olacak şekilde bir $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ çatı eğrisi varsa $(\alpha, v_1, v_2, v_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ eğrisine Bertrand eğrisi denir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

Lemma 4.3.1: Tanım 4.3.1 deki notasyonlar altında (α, v_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ eğrileri Bertrand çifti ise o zaman λ sıfırdan farklı bir sabittir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

İspat: $\forall t \in I$ için (4.18) denkleminin yani

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda(t)v_1(t)$$

ifadesinin türevi alınarak

$$\langle \bar{\gamma}(t), \bar{\mu}(t) \rangle = (\alpha(t) + \lambda(t)l_3(t))\mu(t) + \lambda'(t)v_1(t) + \lambda(t)l_1(t)v_2(t) + \lambda(t)l_2(t)v_3(t)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $\bar{v}_1(t) = v_1(t)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa $\forall t \in I$ için

$$\lambda'(t) = 0$$

olur. Bu nedenle λ bir sabittir. $\lambda = 0$ kabul edilirse $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t)$ olacağından tanım koşulunu sağlamaz. Bu nedenle $\lambda \neq 0$ bir sabittir. ■

Teorem 4.3.1: Eğrilikleri $(l_1, l_2, \dots, l_6, \gamma)$ olan $(\alpha, v_1, v_2, v_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ çatı eğrisi verilsin. (α, v_1, v_2, v_3) çatı eğrisinin Bertrand eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart sıfırdan farklı bir λ sabitinin ve $\forall t \in I$ için

$$l_1(t)\cos\psi(t) - l_2(t)\sin\psi(t) = 0 \quad (4.20)$$

ve

$$\lambda(l_1(t)\sin\psi(t) + l_2(t)\cos\psi(t))\cos\theta(t) - (\gamma(t) + \lambda l_3(t))\sin\theta(t) = 0 \quad (4.21)$$

olacak şekilde $\psi, \theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlarının var olmasıdır. (Honda, Takahashi, & Yu, 2022)

İspat: Kabul edelim ki (α, v_1, v_2, v_3) eğrisi, Bertrand eğrisi olsun. Bu takdirde Tanım 4.3.1 ve Lemma 4.3.1 e göre $\forall t \in I$ için $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda(t)v_1(t)$ ve $v_1(t) = \bar{v}_1(t)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\lambda \in \mathbb{R}$ sabiti ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ çatı eğrisi vardır. (4.18) denkleminin türevi alınarak

$$\langle \bar{\gamma}(t), \bar{\mu}(t) \rangle = (\alpha(t) + \lambda(t)l_3(t))\mu(t) + \lambda'(t)v_1(t) + \lambda(t)l_1(t)v_2(t) + \lambda(t)l_2(t)v_3(t)$$

elde edilir. $v_1(t) = \bar{v}_1(t)$ olduğundan diğer vektörler arasında

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_2(t) \\ \bar{v}_3(t) \\ \bar{\mu}(t) \end{bmatrix} = A(t) \begin{bmatrix} v_2(t) \\ v_3(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

olacak şekilde $A(t) \in SO(3)$ dönüşümü vardır (Karakuş & Tosun, 2021). Bu durumda $\theta, \phi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $\forall t \in I$ için

$A(t)$

$$= \begin{bmatrix} \cos\phi(t)\cos\psi(t) - \sin\phi(t)\cos\theta(t)\sin\psi(t) & -\cos\phi(t)\sin\psi(t) - \sin\phi(t)\cos\theta(t)\cos\psi(t) & \sin\phi(t)\sin\theta(t) \\ \sin\phi(t)\cos\psi(t) + \cos\phi(t)\cos\theta(t)\sin\psi(t) & -\sin\phi(t)\sin\psi(t) + \cos\phi(t)\cos\theta(t)\cos\psi(t) & -\cos\phi(t)\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t)\sin\psi(t) & \sin\theta(t)\cos\psi(t) & \cos\theta(t) \end{bmatrix}$$

olarak verilir. (4.22) denkleminde

$$\bar{\mu}(t) = \sin\theta(t)\sin\psi(t)v_2(t) + \sin\theta(t)\cos\psi(t)v_3(t) + \cos\theta(t)\mu(t)$$

yazılabilir. Gerekli matematiksel işlemler yapılarak

$$\bar{\gamma}(t)\sin\theta(t)\sin\psi(t) = \lambda l_1(t), \quad (4.23)$$

$$\bar{\gamma}(t)\sin\theta(t)\cos\psi(t) = \lambda l_2(t), \quad (4.24)$$

$$\bar{\gamma}(t)\cos\theta(t) = \gamma(t) + \lambda l_3(t) \quad (4.25)$$

elde edilir. Burada (4.23) numaralı denklem $\cos\psi(t)$ ile ve (4.24) numaralı denklem $\sin\psi(t)$ ile çarpılıp elde edilen denklemler eşitlenerek gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$l_1(t)\cos\psi(t) - l_2(t)\sin\psi(t) = 0,$$

$$\bar{\gamma}(t)\sin\theta(t) = \lambda(l_1(t)\sin\psi(t) + l_2(t)\cos\psi(t)) \quad (4.26)$$

olur. (4.25) denklemini $\sin\theta(t)$ ile (4.26) denklemini $\cos\theta(t)$ ile çarpılırsa elde edilen denklemlerin eşitliğinden $\forall t \in I$ için

$$\lambda(l_1(t)\sin\psi(t) + l_2(t)\cos\psi(t))\cos\theta(t) - (\gamma(t) + \lambda l_3(t))\sin\theta(t) = 0$$

denklemini ile sonuçlanır ve ispat tamamlanmış olur. ■

Tersine, kabul edelim ki, (4.20) ve (4.21) denklemleri, yani

$$l_1(t)\cos\psi(t) - l_2(t)\sin\psi(t) = 0$$

$$\lambda(l_1(t)\sin\psi(t) + l_2(t)\cos\psi(t))\cos\theta(t) - (\gamma(t) + \lambda l_3(t))\sin\theta(t) = 0$$

olsun. $\theta, \phi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonları ve sıfırdan farklı bir λ sabiti verilsin. Bu takdirde (4.18) denkleminde

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda v_1(t),$$

$$\bar{v}_1(t) = v_1(t),$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_2(t) &= (\cos\phi(t)\cos\psi(t) - \sin\phi(t)\cos\theta(t)\sin\psi(t))v_2(t) \\ &\quad + (-\cos\phi(t)\sin\psi(t) \\ &\quad - \sin\phi(t)\cos\theta(t)\cos\psi(t))v_3(t) \\ &\quad + \sin\phi(t)\sin\theta(t)\mu(t), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_3(t) &= (\sin\phi(t)\cos\psi(t) + \cos\phi(t)\cos\theta(t)\sin\psi(t))v_2(t) \\ &\quad + (-\sin\phi(t)\sin\psi(t) \\ &\quad + \cos\phi(t)\cos\theta(t)\cos\psi(t))v_3(t) \\ &\quad - \cos\phi(t)\sin\theta(t)\mu(t) \end{aligned} \quad (4.28)$$

denklemlerinin sağlandığı bir $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ fonksiyonu tanımlanır. Gerekli matematiksel hesaplamalar doğrultusunda $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ eğrisinin bir çatı eğrisi olduğu ve bu nedenle (α, v_1, v_2, v_3) eğrisinin de bir Bertrand eğrisi olduğu ifade edilir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

Sonuç 4.3.1: Eğrilikleri $(l_1, l_2, \dots, l_6, \gamma)$ olan $(\alpha, v_1, v_2, v_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ bir çatı eğrisi olsun. $\forall t \in I$ için $l_1(t) = l_2(t)$ olursa o zaman (α, v_1, v_2, v_3) bir Bertrand eğrisi olur.

İspat: $\forall t \in I$ için $l_1(t) = l_2(t)$ olursa o zaman (4.20) numaralı denklem sağlanır. Ayrıca $\forall t \in I$ için $\theta(t) = 0$ alınırsa o zaman (4.21) numaralı denklem elde edilir. Bu şartlar altında ve Teorem 4.3.1 e göre (α, v_1, v_2, v_3) Bertrand eğrisidir. ■

$(\alpha, v_1, v_2, v_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ çatı eğrisinin eğrilikleri $(l_1, l_2, \dots, l_6, \gamma)$ olsun. Uyarlanmış bir $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \mu\}$ çatısı alınırsa o zaman bu çatının eğrilikleri $(0, 0, l_3, 0, l_5, l_6, \gamma)$ olur (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

Sonuç 4.3.2: Uyarlanmış bir çatı için $(\alpha, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ her zaman bir Bertrand eğrisidir.

Önerme 4.3.1: Kabul edelim ki (α, v_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ eğrileri, (4.18), (4.19), (4.27), (4.28) denklemleri ile verilmiş Bertrand eğri çiftleri olsun. O hâlde $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ çatı eğrisinin eğrilikleri $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_6, \bar{\gamma})$ aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\bar{l}_1(t) = \frac{-\gamma(t)\sin\phi(t)\sin\theta(t)}{\lambda},$$

$$\bar{l}_2(t) = (l_1(t)\sin\psi(t) + l_2(t)\cos\psi(t))\cos\phi(t)\cos\theta(t) - l_3(t)\cos\phi(t)\sin\theta(t),$$

$$\bar{l}_3(t) = (l_1(t)\sin\psi(t) + l_2(t)\cos\psi(t))\sin\theta(t) + l_3(t)\cos\theta(t),$$

$$\bar{l}_4(t) = -\phi'(t) + (l_4(t) - \psi'(t))\cos\theta(t) - (l_5(t)\cos\psi(t) - l_6(t)\sin\psi(t))\sin\theta(t),$$

$$\begin{aligned} \bar{l}_5(t) &= \theta'(t)\sin\phi(t) + (l_4(t) - \psi'(t))\cos\phi(t)\sin\theta(t) \\ &\quad - (l_5(t)\sin\psi(t) + l_6(t)\cos\psi(t))\sin\phi(t) \\ &\quad + (l_5(t)\cos\psi(t) - l_6(t)\sin\psi(t))\cos\phi(t)\cos\theta(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{l}_6(t) &= -\theta'(t)\cos\phi(t) + (l_4(t) - \psi'(t))\sin\phi(t)\sin\theta(t) \\ &\quad + (l_5(t)\sin\psi(t) + l_6(t)\cos\psi(t))\cos\phi(t) \\ &\quad + (l_5(t)\cos\psi(t) - l_6(t)\sin\psi(t))\sin\phi(t)\cos\theta(t), \end{aligned}$$

$$\bar{\gamma}(t) = \lambda(l_1(t)\sin\psi(t) + l_2(t)\cos\psi(t))\sin\theta(t) + (\gamma(t) + \lambda l_3(t))\cos\theta(t).$$

İspat: Gerekli matematiksel hesaplamalar sonucunda

$$\bar{\mu}(t) = \sin\theta(t)\sin\psi(t)v_2(t) + \sin\theta(t)\cos\psi(t)v_3(t) + \cos\theta(t)\mu(t)$$

elde edilir. $\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ ifadelerinin türevleri alınarak

$$\bar{\alpha}'(t) = \lambda l_1(t)v_2(t) + \lambda l_2(t)v_3(t),$$

$$\bar{v}_1'(t) = l_1(t)v_2(t) + l_2(t)v_3(t),$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_2'(t) = & (l_1(t)(\sin\phi(t)\cos\theta(t)\sin\psi(t) - \cos\phi(t)\cos\psi(t)) \\ & + l_2(t)(\sin\phi(t)\cos\theta(t)\cos\psi(t) + \cos\phi(t)\sin\psi(t)) \\ & - l_3(t)\sin\phi(t)\sin\theta(t))v_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (-\phi'(t)\sin\phi(t)\cos\psi(t) - \psi'(t)\cos\phi(t)\sin\psi(t) + \theta'(t)\sin\phi(t)\sin\theta(t)\sin\psi(t) \\ & - \phi'(t)\cos\phi(t)\cos\theta(t)\sin\psi(t) - \psi'(t)\sin\phi(t)\cos\theta(t)\cos\psi(t) \\ & + l_4(t)(\cos\phi(t)\sin\psi(t) \\ & + \sin\phi(t)\cos\theta(t)\cos\psi(t)) - l_5(t)\sin\phi(t)\sin\theta(t))v_2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (\phi'(t)\sin\phi(t)\sin\psi(t) - \psi'(t)\cos\phi(t)\cos\psi(t) + \theta'(t)\sin\phi(t)\sin\theta(t)\cos\psi(t) \\ & - \phi'(t)\cos\phi(t)\cos\theta(t)\cos\psi(t) + \psi'(t)\sin\phi(t)\cos\theta(t)\sin\psi(t) \\ & + l_4(t)(\cos\phi(t)\cos\psi(t) - \sin\phi(t)\cos\theta(t)\sin\psi(t)) \\ & - l_6(t)\sin\phi(t)\sin\theta(t))v_3(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (\phi'(t)\cos\phi(t)\sin\theta(t) + \theta'(t)\sin\phi(t)\cos\theta(t) \\ & + l_5(t)(\cos\phi(t)\cos\psi(t) - \sin\phi(t)\cos\theta(t)\sin\psi(t)) \\ & + l_6(t)(\cos\phi(t)\sin\psi(t) + \sin\phi(t)\cos\theta(t)\cos\psi(t))\mu(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_3'(t) = & (-l_1(t)(\cos\phi(t)\cos\theta(t)\sin\psi(t) - \sin\phi(t)\cos\psi(t)) \\ & + l_2(t)(-\cos\phi(t)\cos\theta(t)\cos\psi(t) + \sin\phi(t)\sin\psi(t)) \\ & + l_3(t)\cos\phi(t)\sin\theta(t))v_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (\phi'(t)\cos\phi(t)\cos\psi(t) - \psi'(t)\sin\phi(t)\sin\psi(t) - \theta'(t)\cos\phi(t)\sin\theta(t)\sin\psi(t) \\ & - \phi'(t)\sin\phi(t)\cos\theta(t)\sin\psi(t) + \psi'(t)\cos\phi(t)\cos\theta(t)\cos\psi(t) \\ & + l_4(t)(\sin\phi(t)\sin\psi(t) \\ & - \cos\phi(t)\cos\theta(t)\cos\psi(t)) + l_5(t)\cos\phi(t)\sin\theta(t))v_2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-\phi'(t)\cos\phi(t)\sin\psi(t) - \psi'(t)\sin\phi(t)\cos\psi(t) - \theta'(t)\cos\phi(t)\sin\theta(t)\cos\psi(t) \\
& \quad - \phi'(t)\sin\phi(t)\cos\theta(t)\cos\psi(t) - \psi'(t)\cos\phi(t)\cos\theta(t)\sin\psi(t) \\
& \quad + l_4(t)(\sin\phi(t)\cos\psi(t) + \cos\phi(t)\cos\theta(t)\sin\psi(t)) \\
& \quad + l_6(t)\cos\phi(t)\sin\theta(t))v_3(t) \\
& +(\phi'(t)\sin\phi(t)\sin\theta(t) + \theta'(t)\cos\phi(t)\cos\theta(t) \\
& \quad + l_5(t)(\sin\phi(t)\cos\psi(t) + \cos\phi(t)\cos\theta(t)\sin\psi(t)) \\
& \quad + l_6(t)(-\sin\phi(t)\sin\psi(t) + \cos\phi(t)\cos\theta(t)\cos\psi(t))\mu(t)
\end{aligned}$$

olur. (4.20) ve (4.21) denklemleri ile gerekli hesaplamalar sonucunda eğrilik elde edilir.

Özellikle $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ çatı eğrisi için $\forall t \in I$ için $\phi(t) = 0$ alınırsa

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda v_1(t),$$

$$\bar{v}_1(t) = v_1(t),$$

$$\bar{v}_2(t) = \cos\psi(t)v_2(t) - \sin\psi(t)v_3(t), \quad (4.29)$$

$$\bar{v}_3(t) = \cos\theta(t)\sin\psi(t)v_2(t) + \cos\theta(t)\cos\psi(t)v_3(t) - \sin\theta(t)\mu(t) \quad (4.30)$$

şeklinde verilir. ■

$(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ eğrisinin bir çatı eğrisi olduğu görülüyor. Ayrıca (α, v_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ eğrileri Bertrand eğri çiftleridir.

Sonuç 4.3.3: Kabul edelim ki, (α, v_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ eğrileri Bertrand eğri çifti olsun ve bu bağlamda (4.18), (4.19), (4.31) ve (4.32) denklemleri sağlansın. O hâlde $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ eğrisinin eğrilikleri $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_6, \bar{\gamma})$ aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\bar{l}_1(t) = 0,$$

$$\bar{l}_2(t) = (l_1(t)\sin\psi(t) + l_2(t)\cos\psi(t))\cos\theta(t) - l_3(t)\sin\theta(t),$$

$$\bar{l}_3(t) = (l_1(t)\sin\psi(t) + l_2(t)\cos\psi(t))\sin\theta(t) + l_3(t)\cos\theta(t),$$

$$\bar{l}_4(t) = (l_4(t) - \psi'(t))\cos\theta(t) - (l_5(t)\cos\psi(t) - l_6(t)\sin\psi(t))\sin\theta(t),$$

$$\bar{l}_5(t) = (l_4(t) - \psi'(t))\sin\theta(t) + (l_5(t)\cos\psi(t) - l_6(t)\sin\psi(t))\cos\theta(t),$$

$$\bar{l}_6(t) = -\theta'(t) + l_5(t)\sin\psi(t) + l_6(t)\cos\psi(t),$$

$$\bar{\gamma}(t) = \lambda(l_1(t)\sin\psi(t) + l_2(t)\cos\psi(t))\sin\theta(t) + (\gamma(t) + \lambda l_3(t))\cos\theta(t).$$

Uyarı 4.3.1: (α, v_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ eğrilerinin (4.18), (4.19), (4.29) ve (4.30) denklemlerini sağlayan Bertrand eğri çifti olduğunu kabul edelim. (4.21) denkleminde

$$\bar{l}_2(t) = \frac{\gamma(t)\sin\theta(t)}{\lambda}$$

olarak hesaplanır (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

Örnek 4.3.1: $(\alpha, v_1, v_2, v_3): [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ çatı eğrisi

$$\alpha(t) = \left(tsint + cost, -tcost + sint, tsin2t + \frac{1}{2}cos2t, -tcos2t + \frac{1}{2}sin2t \right)$$

olarak verilsin. $\langle \alpha'(t), v_1(t) \rangle = 0$ ve $\langle \alpha'(t), v_2(t) \rangle = 0$ olacak şekilde

$$v_1(t) = (-sint, cost, 0, 0),$$

$$v_2(t) = (0, 0, -sin2t, cos2t)$$

vardır. Bu takdirde

$$v_3(t) = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(cost, sint, -\frac{1}{2}cos2t, -\frac{1}{2}sin2t \right)$$

olur. Ayrıca

$$\mu(t) = v_1(t) \times v_2(t) \times v_3(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} (cost, sint, 2cos2t, 2sin2t)$$

ve (α, v_1, v_2, v_3) çatı eğrisinin eğrilikleri de

$$(l_1(t), l_2(t), \dots, l_6(t), \gamma(t)) = \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}, 0, \sqrt{5}t \right)$$

olarak hesaplanır. Bu durumda $t = 0$ noktasının, α eğrisinin singüler bir noktası olduğu ifade edilebilir (Ishikawa, 2016). Eğer $\psi(t) = 0$, $\lambda = -\sqrt{5}$ ve θ değeri için $2\cos\theta(t) - (\sqrt{5} + 1)\sin\theta(t) = 0$ olursa o zaman (4.20) ve (4.21) numaralı denklemler sağlanır. Bu bağlamda Teorem 4.3.1 deki notasyonlar altında $(\alpha, v_1, v_2, v_3): [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ eğrisi Bertrand eğrisidir. Bununla birlikte (4.18), (4.19), (4.29) ve (4.30) denklemleri doğrultusunda bir $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3): [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ çatı eğrisi ele alınırsa

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) - \sqrt{5}v_1(t),$$

$$\bar{v}_1(t) = v_1(t),$$

$$\bar{v}_2(t) = v_2(t),$$

$$\bar{v}_3(t) = \cos\theta(t)v_3(t) - \sin\theta(t)\mu(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{5}t + 1)^2 + 4}} (2t\cos t, 2t\sin t, -(t + \sqrt{5})\sin 2t)$$

olarak hesaplanır. Bu durumda (α, v_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ eğrileri Bertrand eğri çiftidir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

4.4. Çatı Eğrilerinde Mannheim Eğri Çifti

(α, v_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ çatı eğrileri ve bu eğrilerin eğrilikleri sırasıyla $(l_1, l_2, \dots, l_6, \gamma)$ ve $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_6, \bar{\gamma})$ olarak verilsin α ve $\bar{\alpha}$ eğrilerinin birbirlerinden farklı eğriler olduğunu kabul edelim. Yani $\alpha \not\equiv \bar{\alpha}$ olsun.

Tanım 4.4.1:

(1) $\forall t \in I$ için

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda(t)v_1(t) \quad (4.31)$$

ve $v_1(t) = \pm \bar{v}_2(t)$ olacak şekilde bir $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı diferansiyellenebilir fonksiyonu varsa (α, v_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ çatı eğrilerine ikinci tip Mannheim eğrileri (kısaca ikinci eşler ya da $(v_1, \bar{v}_2)$ - eşleri) denir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

(2) $\forall t \in I$ için

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda(t)v_1(t)$$

ve $v_1(t) = \pm \bar{v}_3(t)$ olacak şekilde bir $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı diferansiyellenebilir fonksiyonu varsa da (α, v_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ çatı eğrilerine üçüncü tip Mannheim eğrileri (kısaca üçüncü eşler ya da $(v_1, \bar{v}_3)$ - eşleri) denir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

Lemma 4.4.1: Tanım 4.4.1 deki notasyonlar altında (α, v_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ çatı eğrileri ikinci tip (veya üçüncü tip) Mannheim çifti varsa o zaman λ sıfırdan farklı bir sabittir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

İspat: $\forall t \in I$ için (4.31) denkleminin türevi alınır

$$\bar{\gamma}(t)\bar{\mu}(t) = (\gamma(t) + \lambda(t)l_3(t))\mu(t) + \lambda'(t)v_1(t) + \lambda(t)l_1(t)v_2(t) + \lambda(t)l_2(t)v_3(t)$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafı $v_1(t) = \pm \bar{v}_2(t)$ (veya $v_1(t) = \pm \bar{v}_3(t)$) vektörleriyle iç çarpıma tabi tutulursa $\forall t \in I$ için $\lambda'(t) = 0$ olur. Dolayısıyla λ bir sabittir. $\lambda = 0$ olması durumunda $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t)$ eşitliği tanım koşulunu sağlamadığından λ nın sıfırdan farklı bir sabit olduğu ispatlanmış olur.

Çatı eğrilerinin Bertrand Eğrisi, ikinci ve üçüncü tip Mannheim Eğrisi tanımları ile aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Teorem 4.4.1: $(\alpha, v_1, v_2, v_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ çatı eğrisi olsun. Bu takdirde aşağıdaki bilgiler mevcuttur (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

- 1) (α, v_1, v_2, v_3) eğrisi bir Bertrand eğrisidir.
- 2) (α, v_1, v_2, v_3) eğrisi ikinci tip Mannheim eğrisidir.
- 3) (α, v_1, v_2, v_3) eğrisi üçüncü tip Mannheim eğrisidir.

İspat: Kabul edelim ki (α, v_1, v_2, v_3) bir Bertrand eğrisi olsun. Yani $\forall t \in I$ için

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda v_1(t)$$

ve $v_1(t) = \bar{v}_1(t)$ olacak şekilde $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ çatı eğrisi olsun. Burada λ nın sıfırdan farklı bir sabit olduğunu biliyoruz. Eğer

$$(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3) = (\bar{v}_3, \bar{v}_1 \bar{v}_2)$$

olarak belirtilirse, o zaman $(\bar{\alpha}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$ eğrisi de $\forall t \in I$ için $v_1(t) = \tilde{v}_2(t)$ olan bir çatı eğrisidir. Dolayısıyla (α, v_1, v_2, v_3) eğrisi, ikinci tip Mannheim eğrisidir ve tersi de geçerlidir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

Ayrıca $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3) = (\bar{v}_2, \bar{v}_3 \bar{v}_1)$ olursa, o zaman $(\bar{\alpha}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$ eğrisi $\forall t \in I$ için $v_1(t) = \tilde{v}_3(t)$ eşitliğinin sağlandığı bir çatı eğrisidir. Dolayısıyla (α, v_1, v_2, v_3) eğrisi üçüncü tip Mannheim eğrisidir ve tersi de kabul edilebilir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022). ■

İkinci ve üçüncü tip Mannheim eğrilerinin varoluş koşullarının doğrudan hesaplamaları ile de Teorem 4.4.1 ispatlanabilir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

4.5. Dört Boyutlu Öklid Uzayında Regüler Eğrilerin Bertrand Eğrilerinin Yeniden Değerlendirilmesi

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ eğrisi, s yay parametresiyle verilmiş non-dejenere bir regüler uzay eğrisi olsun. Aynı zamanda $(\alpha, n_1, n_2, n_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ bir eğri olarak kabul edelim. O hâlde $\alpha(s)$ eğrisinin hareketli çatısı $\{t(s), n_1(s), n_2(s), n_3(s)\}$ olur.

$$-t(s) = n_1(s) \times n_2(s) \times n_3(s)$$

olduğunu biliyoruz (Honda, Takahashi, & Yu, 2022). (2.15) denklemine göre

$$\begin{bmatrix} t'(s) \\ n_1'(s) \\ n_2'(s) \\ n_3'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1(s) & 0 & 0 \\ -\kappa_1(s) & 0 & \kappa_2(s) & 0 \\ 0 & -\kappa_2(s) & 0 & \kappa_3(s) \\ 0 & 0 & -\kappa_3(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t(s) \\ n_1(s) \\ n_2(s) \\ n_3(s) \end{bmatrix}$$

olup $\alpha'(s) = t(s)$ dir. Böylece

$$l_1(s) = \kappa_2(s),$$

$$l_2(s) = 0,$$

$$l_3(s) = \kappa_1(s),$$

$$l_4(s) = \kappa_3(s),$$

$$l_5(s) = 0,$$

$$l_6(s) = 0,$$

$$\gamma(s) = -1$$

olur. Teorem 4.3.1 e göre (4.20) ve (4.21) numaralı denklemler

$$l_1(t)\cos\psi(t) - l_2(t)\sin\psi(t) = \kappa_2(s)\cos\psi(s) = 0$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda(l_1(t)\sin\psi(t) + l_2(t)\cos\psi(t))\cos\theta(t) - (\gamma(t) + \lambda l_3(t))\sin\theta(t) \\ = \lambda\kappa_2(s)\sin\psi(s)\cos\theta(s) - (-1 + \lambda\kappa_1(s))\sin\theta(s) = 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Eğer $\psi(s) = \pi/2$ olarak alınırsa $\forall s \in I$ için

$$\lambda\kappa_2(s)\cos\theta(s) + (1 - \lambda\kappa_1(s))\sin\theta(s) = 0$$

olur. O zaman (α, n_1, n_2, n_3) eğrisi, Teorem 4.3.1 e göre çerçevelemiş bir Bertrand eğrisidir. Ardından çatı eğrilerinin Bertrand eğrilerine kıyasla daha geometrik bir anlam taşıyan regüler uzay eğrileri ele alınacak. Non-dejenere koşulunun, hareketli bir çatı elde etmek için güçlü bir varsayım olduğu görülmektedir. Non-dejenere koşuluna sahip regüler uzay eğrileri ile çatı eğrileri arasında uygun varsayımlar ele alınacaktır. Bu olgu daha yüksek boyutlu durumlarda ortaya çıkar. Üç boyutlu uzaydaki regüler uzay eğrilerini dikkate alamayız (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ regüler uzay eğrisi olsun. Bertrand eğrisi tanımlayabilmek için, α eğrisinin asli normal vektörü yani n_1 gereklidir. Bu nedenle $\forall t \in I$ için

$$\|\alpha'(t)\|^2 \|\alpha''(t)\|^2 - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle^2 > 0$$

olduğunu kabul edelim. Yani $\forall t \in I$ için $\kappa_1(t) > 0$ dır. Ayrıca, $(\alpha, n_1, v_2, v_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ tanımlanan çatı eğrisi ve $t \times n_1 \times v_2 = v_3$ olacak şekilde diferansiyellenebilir bir $v_2: I \rightarrow S^3$ dönüşümünün olduğunu varsayalım.

α ve $\bar{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}^4$ eğrilerinin birinci eğrilikleri sırasıyla κ_1 ve $\bar{\kappa}_1$ olsun. (α, v_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ çatı eğrileri olup $t \times n_1 \times v_2 = v_3$ ve $\bar{t} \times \bar{n}_1 \times \bar{v}_2 = \bar{v}_3$ olacak şekilde v_2 ve $\bar{v}_2: I \rightarrow S^3$ diferansiyellenebilir dönüşümlerinin olduğunu kabul edelim.

Tanım 4.5.1: Yukarıda tanımlanan çatı eğrileri (α, n_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{n}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ için $I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı λ fonksiyonu mevcut olup $\forall t \in I$ için $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \lambda(t)n_1(t)$ ve $n_1(t) = \pm \bar{n}_1(t)$ sağlanıyorsa, bu eğriler Bertrand çifti olarak adlandırılır. Ayrıca eğer (α, n_1, v_2, v_3) eğrisi için, bu eğri ile Bertrand çifti olan bir çatı eğrisi $(\bar{\alpha}, \bar{n}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ mevcut ise (α, n_1, v_2, v_3) eğrisine Bertrand eğrisi denir.

(α, n_1, v_2, v_3) eğrisi, çatı eğrisinin özel bir durumu olduğundan aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 4.5.1: Tanım 4.5.1 deki gösterimler altında, eğer (α, n_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{n}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ eğrileri Bertrand çifti ise, λ sıfırdan farklı bir sabittir. Şimdi s nin α eğrisinin yay uzunluğu parametresi olduğunu kabul edelim. $(\alpha, n_1, v_2, v_3): I \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Delta$ şeklinde tanımlı çatı eğrisi için $n_1 \times v_2 \times v_3 = -t$ eşitliği sağlanır ve

$$\begin{bmatrix} n_1'(s) \\ v_2'(s) \\ v_3'(s) \\ -t'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l_1(s) & l_2(s) & \kappa_1(s) \\ -l_1(s) & 0 & l_3(s) & 0 \\ -l_2(s) & -l_3(s) & 0 & 0 \\ -\kappa_1(s) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1(s) \\ v_2(s) \\ v_3(s) \\ -t(s) \end{bmatrix}$$

$-\alpha'(s) = -(-t(s))$ dir. Böylece (α, n_1, v_2, v_3) çatı eğrisinin eğrilikleri $(l_1, l_2, \kappa_1, l_3, 0, 0, -1)$ ile verilir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

Tanım 4.5.1 ile Bertrand eğrisinin gerekli ve yeterli koşulunu verdik.

Teorem 4.5.1: Tanım 4.5.1 deki gösterimler altında (α, n_1, v_2, v_3) çatı eğrisinin eğrilikleri $(l_1, l_2, \kappa_1, l_3, 0, 0, -1)$ olduğunu, s nin α eğrisinin yay parametresi olduğunu ve λ nın sıfırdan farklı bir sabit olduğunu kabul edelim. O zaman (α, n_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{n}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ eğrilerinin Bertrand çifti olabilmesi için gerek ve yeter şart, $\forall s \in I$ için $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda n_1(s)$ eşitliğiyle beraber

$$l_1(s)\cos\psi(s) - l_2(s)\sin\psi(s) = 0, \quad (4.32)$$

$$\lambda(l_1(s)\sin\psi(s) + l_2(s)\cos\psi(s))\cos\theta(s) + (1 - \lambda\kappa_1(s))\sin\theta(s) = 0, \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} h(s) = & (1 - \lambda\kappa_1(s))^2 \left((1 - \lambda\kappa_1(s))\kappa_1(s) - l_1^2(s) - l_2^2(s) \right)^2 \\ & + (1 - \lambda\kappa_1(s))(l_1'(s) \\ & - l_2(s)l_3(s)) \left((1 - \lambda\kappa_1(s))(l_1'(s) - l_1(s)l_3(s)) \right. \\ & + 2\lambda\kappa_1'(s)l_1(s) \\ & + (1 - \lambda\kappa_1(s))(l_2'(s) \\ & - l_1(s)l_3(s)) \left((1 - \lambda\kappa_1(s))(l_2'(s) - l_1(s)l_3(s)) \right. \\ & + 2\lambda\kappa_1'(s)l_2(s) \\ & + \left(\lambda^2\kappa_1'(s)^2 + \left((1 - \lambda\kappa_1(s))\kappa_1(s) - l_1^2(s) - l_2^2(s) \right)^2 \right) (l_1^2(s) \\ & + l_2^2(s)) \\ & \left. \left. + \left(l_2(s)(l_1'(s) - l_2(s)l_3(s)) - l_1(s)(l_2'(s) - l_1(s)l_3(s)) \right)^2 \right) > 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

olacak şekilde $\theta, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonların olmasıdır (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

İspat: Teorem 4.3.1 ile (4.20) ve (4.21) denklemlerindeki $(l_1, l_2, \dots, l_6, \gamma)$ eğrilikleri $(l_1, l_2, \kappa_1, l_3, 0, 0, -1)$ ile değiştirilirse (4.32) ve (4.33) koşulları elde edilir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022). Dolayısıyla $\bar{\alpha}$ eğrisinin $\bar{\kappa}_1$ eğriliğinin pozitif olması koşulunu vermek yeterlidir.

$$\bar{\alpha}'(s) = (1 - \lambda\kappa_1(s))t(s) + l_1(s)v_2(s) + l_2(s)v_3(s)$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}''(s) = & -\lambda\kappa_1'(s)t(s) + \left((1 - \lambda\kappa_1(s))\kappa_1(s) - l_1^2(s) - l_2^2(s)\right)n_1(s) \\ & + (l_1'(s) - l_2(s)l_3(s))v_2(s) + (l_2'(s) - l_1(s)l_3(s))v_3(s)\end{aligned}$$

olduğundan gerekli hesaplamalar sonucunda $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(t)\|^2 \|\alpha''(t)\|^2 - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle^2 > 0$$

yani $h(s) > 0$ koşulunun sağlandığı sonucuna ulaşılır. Burada

$$\|\alpha'(t)\|^2 \|\alpha''(t)\|^2 - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle^2 = h(s)$$

dir. ■

Uyarı 4.5.1 Teorem 4.5.1 deki aynı varsayımlar altında (α, n_1, v_2, v_3) ve $(\bar{\alpha}, \bar{n}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ çatı eğrileri $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda n_1(s)$ eşitliği ile birlikte Bertrand eşleridir. O zaman $\bar{\alpha}(s)$ eğrisinin birinci eğriliği

$$\bar{\kappa}_1(s) = \frac{\sqrt{h(s)}}{\sqrt{(1 - \lambda\kappa_1(s))^2 + l_1^2(s) + l_2^2(s)}}$$

ile verilir.

Örnek 4.5.1: $\alpha: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^4$ eğrisi

$$\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{r} \cos rs, \frac{1}{r} \sin rs, \frac{1}{b} \cos bs, \frac{1}{b} \sin bs \right)$$

ile verilen regüler uzay eğrisi olsun. Burada r ve b sıfırdan farklı sabitlerdir ve $r^2 \neq b^2$ dir. O hâlde

$$\alpha'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin rs, \cos rs, -\sin bs, \cos bs)$$

olup $\forall s \in [0, 2\pi)$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ dir. s , α eğrisinin yay parametresi olup $t(s) = \alpha'(s)$ ve

$$\|t(s)\| = \frac{\sqrt{r^2 + b^2}}{\sqrt{2}}$$

dir. Buradan şu sonuç çıkarılır:

$$\kappa_1(s) = \frac{\sqrt{r^2 + b^2}}{\sqrt{2}}$$

ve

$$n_1(s) = \frac{t'(s)}{\|t'(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2}}(-rcosrs, -rsinrs, -bcosbs, -bsinbs)$$

dir. $v_2: [0, 2\pi) \rightarrow S^3$,

$$v_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-sinrs, cosrs, sinbs, -cosbs)$$

alınırsa

$$v_3(s) = t(s) \times n_1(s) \times v_2(s) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2}}(bcosrs, bsinrs, -rcosbs, -rsinbs)$$

olur. Sonuç olarak $\alpha: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^4$ eğrisi bir çatı eğrisidir. Gerekli matematiksel hesaplamalar neticesinde (α, n_1, v_2, v_3) eğrisinin eğrilikleri

$$(l_1, l_2, \kappa_1, l_3, 0, 0, -1) = \left(\frac{-r^2 + b^2}{\sqrt{2(r^2 + b^2)}}, 0, \frac{\sqrt{r^2 + b^2}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{r^2 + b^2}}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}rb}{r^2 + b^2}, 0, 0, -1 \right)$$

olarak verilir.

Eğer $\psi = \frac{\pi}{2}$ alınırsa o zaman (4.32) denklemi sağlanır. $1 - \lambda\kappa_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda (4.33) numaralı denklemin sağlandığı bir θ vardır diyebiliriz. Bazı hesaplamalar sonucunda

$$h = ((1 - \lambda\kappa_1)\kappa_1 - l_1^2)^2(l_1^2 + (1 - \lambda\kappa_1)^2) + (l_1l_3)^2(l_1^2 - (1 - \lambda\kappa_1)^2)$$

olarak verilir. $h > 0$ ise o zaman (α, n_1, v_2, v_3) eğrisi Teorem 4.5.1 ile Bertrand eğrisidir.

Somut bir örnek olarak $r = 1$, $b = \sqrt{3}$ ve $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{4}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\psi = \frac{\pi}{2}$, $1 - \lambda\kappa_1 = \frac{1}{2} \neq 0$, $\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ve $h = \frac{3(2-\sqrt{2})}{8} > 0$ olur. Buradan da anlaşıldığı üzere (α, n_1, v_2, v_3) eğrisi bir Bertrand eğrisidir (Honda, Takahashi, & Yu, 2022).

KAYNAKLAR

- Banchoff, T. F., & Lovett, S.** (2022). *Differential geometry of curves and surfaces*. America: CRC Press.
- Bertrand, J.** (1850). Mémoire sur la théorie des courbes á double courbure. *Journal de Mathématiques Pures Et Appliquées*, 332-350.
- Bishop, R. L.** (1975). There is more than one way to frame a curve. *The American Mathematical Monthly*, 82(3), 246-251.
- Bloomenthal, J., & Bajaj, C.** (1997). *Introduction to implicit surfaces*. Morgan Kaufmann.
- Buket, S., & İlarslan, K.** (2012). On some special curves in. *Turkish Journal of Mathematics*, 415–427.
- Choi, J. H., Kang, T. H., & Kim, Y. H.** (2012). Bertrand curves in 3-dimensional space forms. *Applied Mathematics and Computation*, 219(3), 1040-1046.
- Do Carmo, M. P.** (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall.
- Do Carmo, M. P.** (2016). *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition*. Courier Dover Publications.
- Gray, A.** (1998). *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*. CRC Press.
- Hacısalihoğlu, H. H.** (1983). *Diferensiyel Geometri*. İnönü Üniv. Yayınları Mat. 2.
- Honda, S. I., & Takahashi, M.** (2016). *Framed curves in the Euclidean space*.
- Honda, S. I., & Takahashi, M.** (2020). Bertrand and Mannheim Curves of Framed Curves in the 3-dimensional Euclidean Space. *Turkish Journal of Mathematics*, 44(3), 883-899.
- Honda, S. I., Takahashi, M., & Yu, H.** (2022). Bertrand and Mannheim curves of framed curves in the 4-dimensional Euclidean space. *Journal of Geometry*, 114(2), 12.
- Ishikawa, G. O.** (2016). *Singularities of curves and surfaces in various geometric problems*. Warszawa (Polonya): Center for Advanced Studies Warsaw University of Technology.
- Izumiya, S., & Takeuchi, N.** (2002). Generic properties of helices and Bertrand curves. *Journal of Geometry*, 74(1-2), 97-109.
- Karakus, S. O., İlarslan, K., & Yaylı, Y.** (2014). A new approach for characterization of curve couples in Euclidean 3-space. *Honam Mathematical Journal*, 36(1), 113-129.
- Karakuş, S. Ö., & Tosun, M.** (2021). Characterizations of framed curves in four-dimensional euclidean space. *Universal Journal of Mathematics and Applications*, 4(4), 125-131.
- Kühnel, W.** (2015). *Differential Geometry (Vol. 77)*. American Mathematical Soc.

- Kühnel, W., & Hunt, B.** (2015). *Differential geometry: Curves, surfaces and manifolds*. AMS.
- Liu, H., & Wang, F.** (2008). *Mannheim partner curves in 3-space*.
- Matsuda, H., & Yorozu, S.** (2003). *Notes on Bertrand curves*.
- O'Neill, B.** (2006). *Elementary Differential Geometry*. Elsevier, Academic Press .
- Ozdamar, E., & Hacisalihoglu, H.** (1976). *Principal curvature of a manifold and shape oprators*.
Journal of Fac.sc of the K.T.U Vol 1 Fas. 8.Series MA Mathematics.
- Pottmann, H., Liu, Y., Wallner, J., Bobenko, A., & Wang, W.** (2007). *Geometry of multi-layer freeform structures for architecture*. In ACM SIGGRAPH.
- Sabuncuoğlu, A.** (2014). *Diferensiyel Geometri*. Nobel Akademik Yayıncılık.
- Struik, D. J.** (2012). *Lectures on classical differential geometry*. Inc., New York: Dover Publications.
- Şahin, B.** (2022). *Diferansiyel Geometri*. Palme Yayınevi.

ÖZGEÇMİŞ

Ad- Soyad : Esmâ Danacı

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2019, Fırat Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü

