

T.C.
KIRKLARELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

EĞRİ VE YÜZEYLERİN TEKNOLOJİK TASARIMI

DOKTORA TEZİ

Selcan KOCABAŞ

Eylül, 2025

T.C.
KIRKLARELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

EĞRİ VE YÜZEYLERİN TEKNOLOJİK TASARIMI

DOKTORA TEZİ

Selcan-KOCABAŞ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN

Eylül, 2025

ETİK BEYAN

“Kırkırelı Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez ve Dönem Projesi Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum bilgileri, verileri ve dokümanları, değişik sonuç verebilecek şekilde araştırma araç gereçleri kullanmadan, işlem veya kayıt sonuçlarını değiştirmeden akademik ve etik kurallar çerçevesinde bizzat elde ettiğimi, bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.”

Selcan KOCABAŞ

15/09/2025

ÜRETKEN YAPAY ZEKÂ ETİK BEYANI

Tezde Üretken Yapay Zeka araçlarını araştırma yöntemi, örneklem büyüklüğü tespiti/güç analizi yapılması, veri analizi, veri toplama, veri depolama ve paylaşımı (federatif veri paylaşım/kullanım sistemleri dahil), literatür taraması, kaynakların düzenlenmesi, dil bilgisi ve yazım kontrolü, çeviri gibi işlerde kullandığımı; bu süreçlerde yaptırılan işleri dikkat ve özenle gözden geçirerek maddi hataları ve taraflı ya da yazılımsal/algoritmik ya da olgusal/yorumsal hataları tespit ederek düzelttiğimi, bağlamsal tutarlılığı sağladığımı ve ortaya çıkan ürünün (metin, resim, ses, görüntü, kod, karar, sonuç) yasal ve etik açıdan doğabilecek tüm sorumluluğunu üstlendiğimi beyan ederim.

Selcan KOCABAŞ

15/09/2025

TEZ ONAYI

“Kırklareli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Lisansüstü Programında Doktora öğrencisi Selcan KOCABAŞ tarafından Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN’ın danışmanlığında hazırlanan “EĞRİ VE YÜZEYLERİN TEKNOLOJİK TASARIMI” başlıklı tez aşağıdaki jüri üyeleri tarafından 15/09/2025 tarihinde yapılan Tez Savunma Sınavında oy birliği / oy çokluğu ile başarılı bulunmuş ve Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.”

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN
Kırklareli Üniversitesi

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Yasin ÜNLÜTÜRK
Kırklareli Üniversitesi

Doç. Dr. Vahide BULUT
İzmir Katip Çelebi Üniversitesi

Prof. Dr. Nesip AKTAN
Necmettin Erbakan Üniversitesi

**Doç. Dr. Muhammet Enes
DURMAZ**
Kırklareli Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi:

15/09/2025

ÖN SÖZ

Doktora çalışmamın tamamlanmasında, bilgi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren, çalışmalarımı şekillendiren ve her aşamada desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ali Çalışkan’a ve süreç boyunca teşvik ve destekleriyle yanımda olan Sayın Jale Çalışkan’a en içten şükranlarımı sunarım. Ayrıca, tez savunma sürecinde dikkatli, yapıcı eleştirileri ve etkili yönlendirmeleriyle çalışmamın gelişimine önemli katkılarda bulunan jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Yasin Ünlütürk ve Sayın Doç. Dr. Vahide Bulut’a teşekkür ederim. Bu süreç boyunca yanımda olan, sevgileriyle güç veren aileme de teşekkürlerimi ifade etmek isterim. Destekleri, teşvikleri ve kıymetli katkılarıyla bu çalışmanın tamamlanmasına yardımcı olan akademik çevreme de içtenlikle teşekkür ederim.

Selcan KOCABAŞ

Eylül, 2025

İÇİNDEKİLER

ÖN SÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xii
ÖZET.....	xvi
ABSTRACT	xviii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER	5
2.1. Öklid Uzayında Eğriler Teorisi.....	5
2.2. Minkowski Uzayında Eğri ve Yüzeyler Teorisi.....	8
3. ÖKLİD UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ OFSET EĞRİLERİ VE VARYASYONLARI	19
3.1. $\mathbb{E}^3$ de Uzay Eğrilerinin Genelleştirilmiş Ofset Eğrileri	19
3.2. $\mathbb{E}^3$ de Uzay Eğrilerinin Genelleştirilmiş Ofset Eğrilerinin Varyasyonu..	27
3.3. Uygulamalar	31
4. MINKOWSKI UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ OFSET EĞRİLERİ VE VARYASYONLARI	37
4.1. $\mathbb{E}^{1,2}$ de Düzlem Eğrilerinin Genelleştirilmiş Ofset Eğrileri	37
4.2. $\mathbb{E}^{1,2}$ de Düzlem Eğrilerinin Genelleştirilmiş Ofset Eğrilerinin Varyasyonu	41
4.3. Uygulamalar	44
4.4. $\mathbb{E}^{1,3}$ de Uzay Eğrilerinin Genelleştirilmiş Ofset Eğrileri.....	46
4.5. $\mathbb{E}^{1,3}$ de Uzay Eğrilerinin Genelleştirilmiş Ofset Eğrilerinin Varyasyonu	54
4.6. Uygulamalar	58
4.7. Psödo Null Eğrilerinin Genelleştirilmiş Ofset Eğrileri ve Varyasyonu....	62
4.7.1. Psödo null eğrilerin Serret Frenet çatısına göre genelleştirilmiş ofset eğrileri ve varyasyonu	62

4.7.2. Psödo null eğrilerin Bishop çatısına göre genelleştirilmiş ofset eğrileri ve varyasyonu	67
4.7.3. Uygulamalar	72
4.8. Null Cartan Eğrilerinin Genelleştirilmiş Ofset Eğrileri ve Varyasyonu..	76
4.8.1. Null Cartan eğrilerin Cartan çatısına göre genelleştirilmiş ofset eğrileri ve varyasyonu	76
4.8.2. Null Cartan eğrilerin Bishop çatısına göre genelleştirilmiş ofset eğrileri ve varyasyonu	79
4.8.3. Uygulamalar	83
5. MINKOWSKİ UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ OFSET YÜZEYLERİ VE VARYASYONLARI.....	89
5.1. Genelleştirilmiş Ofset Yüzeyleri	89
5.2. Genelleştirilmiş Ofset Yüzeylerinin Varyasyonları	99
5.2.2. Ofset yüzeylerin yüzölçümünün birinci varyasyonuna ilişkin Gauss formülü.....	103
5.2.3. Ofset yüzeylerin yüzölçümünün ikinci varyasyonu.....	108
5.3. Uygulamalar	110
6. ORTAK EĞRİLİK ÇİZGİSİ BOYUNCA ZAMAN BENZERİ AÇILABİLİR YÜZEYLERİN İNŞASI.....	115
6.1. Zaman Benzeri Ortak Eğrilik Çizgisi Boyunca Zaman Benzeri Açılabilir Yüzey	116
6.2. Uzay Benzeri Ortak Eğrilik Çizgisi Boyunca Zaman Benzeri Açılabilir Yüzey	120
6.2.1. $N(s)$ zaman benzeri vektör alanı, $B(s)$ uzay benzeri vektör alanı.....	120
6.2.2. $N(s)$ uzay benzeri vektör alanı, $B(s)$ zaman benzeri vektör alanı.....	125
6.3. Uygulamalar	127
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	133
KAYNAKÇA	135

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

Bu tez çalışmasında kullanılmış olan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Semboller	Açıklamalar
α	: Alfa eğrisi
β	: Beta eğrisi
B	: Serret Frenet çatısının birim binormal vektör alanı
b_1	: Yüzeyin birim teğet vektör alanı ile birim normal vektör alanının vektörel çarpımından elde edilen vektör
d	: Ofset mesafesi
ϵ	: Reel parametre
$\mathbb{E}^3$	: Üç boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^n$	: n – boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}_1^2$	: Minkowski düzlemi
$\mathbb{E}_1^3$	: 3 – boyutlu Minkowski uzayı
γ	: Gamma eğrisi
H	: Yüzeyin ortalama eğriliği
H^*	: Genelleştirilmiş ofset yüzeyin ortalama eğriliği
$[I]$	: Yüzeyin birinci temel formu

$[III]$	: Yüzeyin ikinci temel formu
κ	: $\mathbf{r}$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu
κ_*	: $\mathbf{r}_*$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu
κ_1	: $\mathbf{r}$ eğrisinin birinci Bishop eğrilik fonksiyonu
κ_2	: $\mathbf{r}$ eğrisinin ikinci Bishop eğrilik fonksiyonu
κ_n	: Yüzeyin normal eğrilik fonksiyonu
K	: Yüzeyin Gauss eğriliği
K^*	: Genelleştirilmiş ofset yüzeyin Gauss eğriliği
N	: Serret Frenet çatısının birim normal vektör alanı
N_1	: Bishop çatısının birinci vektör alanı
N_2	: Bishop çatısının ikinci vektör alanı
$\mathbf{n}$	: Yüzeyin birim normal vektör alanı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
$\mathbf{r}$	: $\mathbf{r}$ eğrisi
$\mathbf{r}'$	: $\mathbf{r}$ eğrisinin s parametresine göre türevi
$\dot{\mathbf{r}}$	: $\mathbf{r}$ eğrisinin t parametresine göre türevi
$\mathbf{r}_*$	: $\mathbf{r}$ eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi
$\mathbf{r}_e$	: $\mathbf{r}$ eğrisinin evolüt eğrisi
$\mathbf{r}_i$	: $\mathbf{r}$ eğrisinin involüt eğrisi
s	: Yay uzunluğu parametresi

S	: Yüzeyin şekil operatörü
T	: Serret Frenet çatısının birim teğet vektör alanı
T_1	: Bishop çatısının birim teğet vektör alanı
τ	: r eğrisinin burulma fonksiyonu
τ_*	: r_* eğrisinin burulma fonksiyonu
∇	: Birinci Beltrami operatörü

Kısaltmalar Açıklamalar

BDGT	: Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım
BDÜ	: Bilgisayar Destekli Üretim
BDT	: Bilgisayar Destekli Tasarım

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Üç boyutlu Minkowski uzayında ışık konisi içindeki, üzerindeki ve dışındaki vektörler.....	8
Şekil 3.1. r helis eğrisi (mavi); $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil); $\epsilon = \frac{1}{4}$ için r_3 (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{13}$ için r_4 (sarı).....	34
Şekil 3.2. r helis eğrisi (mavi); $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{3}$ için r_3 (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{9}$ için r_4 (siyah).....	34
Şekil 3.3. r orijinal eğri (mavi) ve r_* onun genelleştirilmiş ofset eğrisi (kırmızı), r_i involüt eğri (yeşil) ve onun r_{i*} genelleştirilmiş ofset eğrisi (mor).....	35
Şekil 3.4. r orijinal eğri (mavi) ve r_* onun genelleştirilmiş ofset eğrisi (kırmızı), r_i involüt eğri (yeşil) ve onun r_{i*} genelleştirilmiş ofset eğrisi (mor).....	36
Şekil 4.1. r orijinal eğri (mavi); $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için r_3 (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{8}$ için r_4 (sarı).....	44
Şekil 4.2. r orijinal eğri (mavi); $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{20}$ için r_3 (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{80}$ için r_4 (sarı).....	45
Şekil 4.3. r orijinal eğri (mavi); $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{10}$ için r_3 (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{25}$ için r_4 (siyah)	46
Şekil 4.4. r orijinal eğri (mavi); $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için r_3 (mor).....	59
Şekil 4.5. r orijinal eğri (mavi); $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için r_3 (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için r_4 (siyah)	60
Şekil 4.6. r orijinal eğri (mavi); $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{6}$ için r_3 (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{12}$ için r_4 (siyah)	61
Şekil 4.7. r orijinal eğri (mavi); $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{3}$ için r_3 (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{9}$ için r_4 (siyah).....	61

Şekil 4.8. r orijinal eğri (mavi); $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için r_3 (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{8}$ için r_4 (siyah).....	62
Şekil 4.9. r orijinal eğri (mavi) ve Serret Frenet çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için r_3 (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için r_4 (siyah)	73
Şekil 4.10. r orijinal eğri (siyah) ve Serret Frenet çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (mavi), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için r_3 (yeşil) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için r_4 (mor)	73
Şekil 4.11. r orijinal eğri (mavi) ve Bishop çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ için r_3 (mor).....	75
Şekil 4.12. r orijinal eğri (mavi) ve Bishop çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için r_3 (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{8}$ için r_4 (siyah).....	75
Şekil 4.13. r orijinal eğri (mavi) ve Cartan çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{6}$ için r_3 (siyah) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için r_4 (mor)	82
Şekil 4.14. r orijinal eğri (mavi) ve Bishop çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{6}$ için r_3 (siyah) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için r_4 (mor)	84
Şekil 4.15. r orijinal eğri (mavi) ve Cartan çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için r_3 (sarı) ve $\epsilon = \frac{1}{8}$ için r_4 (mor).....	85
Şekil 4.16. r orijinal eğri (mavi) ve Bishop çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için r_3 (sarı) ve $\epsilon = \frac{1}{8}$ için r_4 (mor).....	86

Şekil 4.17. r orijinal eğri (mavi) ve Cartan çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için r_3 (siyah) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için r_4 (mor)	87
Şekil 4.18. r orijinal eğri (mavi) ve Bishop çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için r_1 (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için r_3 (siyah) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için r_4 (mor)	88
Şekil 5.1. r orijinal yüzey (kırmızı) ve genelleştirilmiş ofset yüzeyleri; $\epsilon = 1$ için r_1 (mavi), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{6}$ için r_3 (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için r_4 (sarı)	111
Şekil 5.2. r orijinal yüzey (kırmızı) ve genelleştirilmiş ofset yüzeyleri; $\epsilon = 1$ için r_1 (mavi), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{6}$ için r_3 (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için r_4 (sarı)	111
Şekil 5.3. r orijinal yüzey (kırmızı) ve genelleştirilmiş ofset yüzeyleri; $\epsilon = 1$ için r_1 (mavi), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{6}$ için r_3 (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için r_4 (sarı)	113
Şekil 5.4. r orijinal yüzey (kırmızı) ve genelleştirilmiş ofset yüzeyleri; $\epsilon = 1$ için r_1 (mavi), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{6}$ için r_3 (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için r_4 (sarı)	113
Şekil 5.5. r orijinal yüzey (kırmızı) ve genelleştirilmiş ofset yüzeyleri; $\epsilon = 1$ için r_1 (mavi), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil)	114
Şekil 6.1. Örnek 6.3.1 deki uzay benzeri eğrilik çizgisine sahip zaman benzeri teğet yüzey	128
Şekil 6.2. Örnek 6.3.2 deki zaman benzeri eğrilik çizgisine sahip zaman benzeri teğet yüzey	128
Şekil 6.3. Örnek 6.3.3 deki zaman benzeri eğrilik çizgisine sahip zaman benzeri teğet yüzey	129
Şekil 6.4. Örnek 6.3.4 deki uzay benzeri eğrilik çizgisine sahip zaman benzeri teğet yüzey	129
Şekil 6.5. Örnek 6.3.5 deki uzay benzeri eğrilik çizgisine sahip zaman benzeri silindirik yüzey ($\theta_0 = 0$)	130
Şekil 6.6. Örnek 6.3.5 deki uzay benzeri eğrilik çizgisine sahip zaman benzeri konik yüzey ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$)	131

Şekil 6.7. Örnek 6.3.6 daki uzay benzeri eğrilik çizgisi olan zaman benzeri silindirik yüzey ($\theta_0 = 0$) 128



ÖZET

EĞRİ VE YÜZEYLERİN TEKNOLOJİK TASARIMI

Eğri ve yüzeyler, teorik matematikte olduğu kadar teknoloji, mühendislik, bilgisayar destekli tasarım gibi uygulamalı alanlarda da önemli bir role sahiptir. Teorik açıdan eğri ve yüzeyler, geometrik yapıların anlaşılmasını ve soyut matematik modellerin geliştirilmesini sağlarken, uygulamalı alanlarda da karmaşık şekillerin modellenmesine araçlar sunar. Bu anlayışla çalışmamızda, Öklid ve Minkowski uzaylarında eğri ve yüzeyler teorisi çerçevesinde genelleştirilmiş ofset eğrileri ve bu eğrilerin varyasyonları incelenmiştir. Tez kapsamında Öklid ve Minkowski uzayında genelleştirilmiş ofset eğrileri tanımı ve geometrik özellikleri verilirken, bu eğrilere ilişkin temel fonksiyonların varyasyonları analiz edilmiş ve uygulamalı örneklerle desteklenmiştir. Ayrıca, eğriler gibi yüzeylerin de Minkowski uzayında genelleştirilmiş ofset yüzeyleri tanımlanmış ve farklı yüzölçüm varyasyonları analiz edilmiştir. Genelleştirme ve varyasyon irdelemelerine ek olarak, yüzeylerin ortak eğrilik çizgisi boyunca zaman benzeri açılabilir yüzeylerin inşasına yönelik yaklaşımlar geliştirilmiştir. Çalışmamızda, teorik modellemeler ve uygulamalı matematik analizler vererek hem ofset eğri ve yüzeyleri konusuna katkı sağlamak hem de bu alanda yeni bir bakış açısı oluşturmak hedeflenmiştir.

Tez çalışması kapsamında ele alınan konuların teorik ve uygulamalı alanlardaki önemine ilişkin genel bir girişin ardından, tezin ikinci bölümünde orijinal bulguların elde edilmesine yönelik kavram ve tanımlar ele alınmıştır. Çalışmanın üçüncü bölümünde, 3 boyutlu Öklid uzayında genelleştirilmiş ofset eğrileri ve varyasyonları incelenmekte olup, elde edilen sonuçlara yönelik farklı uygulamalar yer almaktadır. Dördüncü bölümde, Minkowski uzayında null ve null olmayan eğrilerin genelleştirilmiş ofset eğri ve varyasyonları analiz edilirken, elde edilen bulgulara yönelik örnekler ve grafikleri sunulmuştur. Beşinci bölümde, Minkowski uzayında genelleştirilmiş ofset yüzeyleri ve varyasyonları ile ilgili uygulamalar verilmiştir. Altıncı bölümde, ortak eğrilik çizgisi boyunca zaman benzeri açılabilir yüzeylerin

inşası ve ilgili örnekler incelenmekte olup; çalışmamızın tamamlandığı yedinci bölümde, genelleştirilmiş ofset eğri ve yüzeyleri konusuna kapsamlı bir çerçeve sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Minkowski uzayı, Öklid uzayı, genelleştirilmiş ofset eğriler, genelleştirilmiş ofset yüzeyler, varyasyon.



ABSTRACT

TECNOLOGICAL DESIGN OF CURVES AND SURFACES

Curves and surfaces play an important role not only in theoretical mathematics but also in applied fields such as technology, engineering, and computer aided design. From a theoretical perspective, curves and surfaces enable the understanding of geometric structures and the development of abstract mathematical models, while in applied fields, they provide tools for modelling complex shapes. With this understanding, our study examines generalized offset curves and their variations within the framework of curve and surface theory in Euclidean and Minkowski spaces. Within the scope of the thesis, the definition and geometric properties of generalized offset curves in Euclidean and Minkowski spaces are provided, while the variations of the fundamental functions related to these curves are analysed and supported by applied examples. Furthermore, surfaces, like curves, are defined as generalized offset surfaces in Minkowski space, and different floor space variations are analysed. In addition to the generalization and variation investigations, approaches have been developed for the construction of timelike developable surfaces along the common curvature line of surfaces. Our study aims to contribute to the subject of offset curves and surfaces and to create a new perspective in this field by providing theoretical models and applied mathematical analyses.

In the second chapter, the concepts and definitions relevant to obtaining original findings are examined, following a general introduction to the theoretical and practical significance of the topics addressed in the thesis. The third chapter of this thesis investigates generalized offset curves and their variations in three-dimensional Euclidean space, presenting various applications of the results obtained. The fourth section is devoted to the analysis of the generalized offset curves and variations of null and non-null curves in Minkowski space. This section also presents examples and graphs of the findings. The fifth section provides applications related to generalized offset surfaces and variations in Minkowski space. The sixth chapter of this text

provides an examination of the construction of timelike developable surfaces along a common curvature line and related examples. The seventh chapter, which brings the study to a close, presents a comprehensive framework on the subject of generalised offset curves and surfaces.

Keywords: Minkowski space, Euclidean space, generalized offset curves, generalized offset surfaces, variations.



1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri; eğri, yüzey ve manifoldların geometrisini türeve dayalı hesaplamalar ve tekniklerle analiz eden matematiğin önemli bir alanıdır. 18. ve 19. yüzyılda Öklid uzayında düzlem eğrilerinin, uzay eğrilerinin ve iki parametreye bağlı eğri ailesi olan yüzeylerin irdelenmesi ile modern diferansiyel geometrinin temelleri atılmıştır (O'Neill, 1966). 19. yüzyıl sonları ve 20. yüzyıl başlarından itibaren bu disiplin dalı diferansiyellenebilir manifoldlar üzerindeki geometrik yapılarla ilgilenen bir alan haline gelmiştir (O'Neill, 1983; Kreyszig, 1991).

Bir boyutlu manifold olan eğriler ve iki boyutlu manifold olan yüzeyler, klasik diferansiyel geometrinin önemli bir konusu olmalarının yanı sıra teknolojide de giderek önemini arttıran iki geometrik yapıdır (Barnhill vd., 1992; Brechner, 1992). Eğri ve yüzeyler; Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım (BDGT), bilgisayar grafiği, mimari tasarım, mekanik, robotik, ürün tasarımı ve üretimi gibi farklı alanlarda birçok etkin uygulamalara sahiptir (Farouki vd., 1995; Faux and Pratt;1979; Papaioannou and Kiritsis, 1985; Patrikalakis and Bardis; 1991). Eğri ve yüzeyler konusu içerisinde özel bir çalışma alanı olan ofset eğri ve yüzeyleri, orijinal bir eğri veya yüzeyden belirli bir mesafede yer alan noktaların geometrik yeri olarak tanımlanır (Do Carmo, 1976; Millman ve Parker, 1977). Ofset yapılar, özellikle Bilgisayar Destekli Tasarım ve Üretim (BDT/BDÜ) sistemlerinde, geometrik modelleme yoluyla katılar üzerindeki dönüşüm işlemlerinde ve buna bağlı olarak tolerans bölge analizlerinde, çok yüzölçüm nesneleri arasında hareket eden katı cismin çarpışmadan kaçınma problemlerinde, üç boyutlu uzayda güvenli yol planlama algoritmalarında, 3-boyutlu baskı teknolojileri gibi alanlarda yaygın uygulama alanları bulmaktadır (Farouki ve Neff, 1990; Maekawa, 1999; Pham, 1992; Patrikalakis ve Maekawa, 2002; Reyes ve Jambrina, 2021).

Klasik ofset teorisinde, ofset mesafesi sabit olarak ele alınırken, reel dünya uygulamalarında değişken ofset mesafelerine ihtiyaç duyulmaktadır. Genelleştirilmiş ofset eğri ve yüzeyleri, bu ihtiyacı karşılamak üzere geliştirilmiştir. Bu yapılarda, ofset mesafesi sabit bir değer yerine, eğri veya yüzey parametrelerine bağlı bir fonksiyon

olarak tanımlanır (Bulut ve Çalışkan, 2015; Chen ve Lin, 2014; Moon, 1999). Bu genelleştirme, daha esnek tasarımlar yapmaya, karmaşık geometrik yapıları daha doğru modellemeye ve mühendislik uygulamalarında iyileştirilmiş çözümler üretmeye olanak tanır (Chen ve Ravani, 1987; Lin ve Rokne, 1997).

Eğri ve yüzey varyasyonları, bir geometrik yapının küçük değişimler altında nasıl davrandığını inceleyen bir analiz aracıdır. Varyasyon hesabı, en kısa mesafe problemi (jeodezikler), minimum yüzey problemi ve optimal kontrol teorisi gibi birçok alanda temel oluşturur (Caratheodory, 1999; Cherkasov, 2003). Genelleştirilmiş ofset eğrileri ve yüzeyleri söz konusu olduğunda, yay uzunluğu, eğrilik ve burulma fonksiyonları varyasyonlarının incelenmesi, bu yapıların geometrik karakteristiklerinin daha iyi anlaşılmasını sağlar ve pratik uygulamalarda daha güvenilir sonuçlar elde etmeye yardımcı olur (Dillen ve Kühnel, 1999; Struik, 1988; Oprea, 2007; Pressley, 2010; Eisenhart, 2004).

Minkowski uzayı, Einstein'ın özel görelilik teorisinin matematiksel çerçevesini oluşturan, Öklid uzayından farklı bir metrik yapıya sahip bir uzay zaman modelidir. Bu uzayda, uzaklık kavramı klasik Öklid uzayından farklı olarak tanımlanır ve bu farklılık, Minkowski uzayındaki eğri ve yüzeylerin geometrik özelliklerine yansır (Ekici vd, 2008; Karacan ve Bükcü, 2008; Sariaydin ve Körpınar, 2019; Ünlütürk ve Özusağlam, 2013; Yüksel vd, 2022). Psödo null eğriler, null Cartan eğrileri ve zaman benzeri, uzay benzeri yüzeyler gibi Minkowski uzayına özgü geometrik yapılar, diferansiyel geometri perspektifinden zengin bir araştırma alanı sunar (Ayyıldız ve Yücesan, 2006; O'Neill, 1983; Naber, 2012; López, 2014; Ratcliffe, 2006; Chen, 2011; Saad vd, 2022; Turhan ve Ayyıldız, 2011).

Tez çalışması kapsamında ele alınan konuların teorik ve uygulamalı alanlardaki önemine ilişkin genel bir girişin ardından, tezin ikinci bölümünde orijinal bulguların elde edilmesine yönelik kavram ve tanımlar ele alınmıştır.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, 3 boyutlu Öklid uzayında genelleştirilmiş ofset eğrileri ve varyasyonları incelenmektedir. İlk olarak Öklid uzayında genelleştirilmiş ofset eğrileri tanımlanmakta, uzay eğrilerinin genelleştirilmiş ofset eğrisi Serret Frenet çatısı baz alınarak analiz edilmektedir. Ardından, bir uzay eğrisine ait genelleştirilmiş

offset eğrisinin standart offset eğri türünden ifadesi verilmektedir. Ayrıca bu uzay eğrilerinin genelleştirilmiş offset eğrilerinin varyasyonu incelenmekte, bu kapsamda yay uzunluğu, eğrilik fonksiyonu ve burulma fonksiyonu varyasyonları detaylı bir şekilde ele alınmaktadır. Bu bölüm, elde edilen sonuçlara yönelik farklı uygulamalarla sonlanmaktadır.

Çalışmanın dördüncü bölümde, Minkowski uzayında genelleştirilmiş offset eğri ve varyasyonları incelenmektedir. İlk olarak Minkowski düzleminde düzlem eğrilerinin genelleştirilmiş offset eğrileri Serret Frenet çatısı kullanılarak tanımlanmakta ve ardından standart offset eğrisi türünden ifadesi sunulmaktadır. Ayrıca bu eğrilerin varyasyon analizi yapılarak, yay uzunluğu ve eğrilik fonksiyonuna ilişkin değişimler irdelenmektedir. Ardından, Minkowski uzayında uzay eğrilerinin genelleştirilmiş offset eğrileri ve bunların varyasyonları analiz edilmekte olup yay uzunluğu, eğrilik ve burulma fonksiyonu varyasyonları detaylandırılmaktadır. Ek olarak, psödo null eğrilerinin ve null Cartan eğrilerinin genelleştirilmiş offset eğrileri ve varyasyonları özel durumlar olarak incelenmektedir. Bu özel eğri tipleri için Serret Frenet ve Bishop çatılarına göre genelleştirilmiş offset eğrileri ve varyasyonları detaylı bir şekilde ele alınmaktadır.

Çalışmanın beşinci bölümünde, Minkowski uzayında genelleştirilmiş offset yüzeyleri ve varyasyonları incelenmektedir. Bu kısımda öncelikle genelleştirilmiş offset yüzeyleri tanımlanmakta ve bu yüzeylerin standart offset yüzey türünden ifadesi verilmektedir. Ardından, varyasyon hesaplamalar kapsamında offset yüzeylerin yüzölçümünün birinci varyasyonu, birinci varyasyonuna ilişkin Gauss formülü ve yüzölçümünün ikinci varyasyonu detaylı bir şekilde ele alınmaktadır. Elde edilen bulgulara ilişkin uygulamalarla bu kısım tamamlanmaktadır.

Çalışmanın altıncı bölümünde, ortak eğrilik çizgisi boyunca zaman benzeri açılabilir yüzeylerin inşası incelenmektedir. Zaman benzeri ortak eğrilik çizgisi boyunca zaman benzeri açılabilir yüzey kavramı tanımlanmakta ve uzay benzeri ortak eğrilik çizgisi boyunca zaman benzeri açılabilir yüzeyin analizi yapılmaktadır.

Çalışmamızın tamamlandığı yedinci bölümde, genelleştirilmiş offset eğri ve yüzeyleri konusuna kapsamlı bir çerçeve sunarak, ulaşılan sonuçların diferansiyel geometri,

matematiksel fizik ve mühendislik alanlarına teorik alt yapı ve matematik uygulama açısından katkı sağlaması beklenmektedir.



2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde tez çalışmamız kapsamında gerekli olan temel bilgiler sunulmaktadır.

2.1. Öklid Uzayında Eğriler Teorisi

Tanım 2.1.1. A boş kümeden farklı bir küme; V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $A \times A$ kümesinden V uzayına,

$$f: A \times A \rightarrow V, \quad (P, Q) \rightarrow f(P, Q)$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon,

- i. $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$ dir.
- ii. $\forall P \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için $f(P, Q) = \vec{v}$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ vardır.

koşullarını sağlıyorsa, A kümesine V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay denir (Coxeter, 1991).

Tanım 2.1.2. $V = \mathbb{R}^n$ ve $F = \mathbb{R}$ olmak üzere $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ için,

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

$\mathbb{R}^n$ üzerinde bir iç çarpım olur, bu iç çarpıma $\mathbb{R}^n$ uzayında Öklid iç çarpımı denir.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

ifadesine $\vec{u}$ vektörünün uzunluğu (normu) denir (Do Carmo, 1976).

$\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde Öklid iç çarpımının tanımlanmasıyla elde edilen uzaya $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayı denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere,

$$\mathbf{r}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$$

$$t \rightarrow \mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \dots, \mathbf{r}_n(t))$$

şeklinde tanımlı türevlenebilir $\mathbf{r}(t)$ fonksiyonuna, $\mathbb{E}^n$ de koordinat komşuluğu ile tanımlanmış bir eğri denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.1.4. $\mathbf{r}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$, $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \dots, \mathbf{r}_n(t))$ eğrisi ele alınsın.

$$\mathbf{r}'(t) = (\mathbf{r}'_1(t), \mathbf{r}'_2(t), \dots, \mathbf{r}'_n(t))$$

vektörüne $\mathbf{r}$ eğrisinin $\mathbf{r}(t)$ noktasındaki hız (teğet veya tanjant) vektörü denir (Do Carmo, 1976).

- $\forall t \in I$ için $\mathbf{r}'(t)$ hız vektörü olsun. Eğer $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$ ise, $\mathbf{r}$ eğrisi birim hızlıdır,
- $\mathbf{r}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisinde, $\forall t \in I$ için $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ ise, bu eğriye regüler (düzgün) eğri denir,
- $\mathbf{r}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisinde, $t_0 \in I$ için $\mathbf{r}'(t_0) = 0$ ise bu noktaya $\mathbf{r}$ eğrisinin singüler (tekil) noktası denir (Kreyszig, 1991; O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.5. $\mathbf{r}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi ele alınsın. $J \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere,

$$h: J \rightarrow I,$$

$$s \rightarrow t = h(s)$$

diffeomorfizmine, $\mathbf{r}$ eğrisi için bir parametre dönüşümü denir. $(\mathbf{r} \circ h)(s)$ eğrisine de, $\mathbf{r}(t)$ eğrisinin $h(s)$ ile yeniden parametrelendirilmesi denir (O'Neill, 1983).

Ele alınan herhangi bir $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \dots, \mathbf{r}_n(t))$ eğrisinin A ve B noktaları arasında kalan yay elemanının uzunluğu, $A \leq t \leq B$ olmak üzere,

$$s = \int_A^B \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_A^B \sqrt{(\mathbf{r}'_1(t))^2 + (\mathbf{r}'_2(t))^2 + \dots + (\mathbf{r}'_n(t))^2} dt$$

şeklinde hesaplanır (Millman ve Parker, 1977).

Differansiyellenebilir eğri boyunca hareket eden parçacığın kinematik özelliklerini veya hareketten bağımsız olarak eğrinin geometrik karakterini ortaya koyan Serret Frenet çatısı klasik diferansiyel geometri ve BDT/BDÜ sistemleri için önem arz eder.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ regüler eğrisinin, herhangi bir noktadaki Serret Frenet çatısı ve ilgili türev formülleri aşağıdaki gibidir:

- i. $\mathbf{r}(t)$, birim hızlı eğri olarak alındığında; $\mathbf{r}'(s) = \mathbf{T}$ olur, burada $\mathbf{T}$, $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin birim teğet vektör alanıdır. $\mathbf{N}$ asal birim normal vektör alanı ve $\mathbf{B}$ binormal birim vektör alanları sırayla,

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'}{\|\mathbf{T}'\|} = \frac{\mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}''(t)\|} \quad \text{ve} \quad \mathbf{B} = \mathbf{N} \times \mathbf{T} \quad (2.1)$$

dır. $\mathbf{T} = \mathbf{B} \times \mathbf{N}$, $\mathbf{N} = \mathbf{T} \times \mathbf{B}$ olup saat yönünün tersi esas alınmıştır. $\mathbf{r}(s)$ birim hızlı eğrisi için Serret Frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

şeklinde olup, burada κ ve τ , sırayla, eğrilik ve burulma fonksiyonlarıdır.

- ii. $\mathbf{r}(t)$, birim hızlı değil ise, Serret Frenet vektörleri, κ eğriligi ve τ burulması,

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{T} \times \mathbf{B},$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}, \quad \tau = \frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \cdot \mathbf{r}'''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2} \quad (2.3)$$

formülleriyle elde edilir. Burada skaler hız $\|\mathbf{r}'(t)\| = v$ alınmak şartıyla, birim hızlı olmayan $\mathbf{r}(t)$ eğrisi için S.Frenet türev elemanları,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v\kappa & 0 \\ -v\kappa & 0 & v\tau \\ 0 & -v\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

biçiminde verilir (O'Neill, 1966).

2.2. Minkowski Uzayında Eğri ve Yüzeyler Teorisi

Bu kısımda üç boyutlu Minkowski uzayında eğri ve yüzeylere ilişkin temel bilgiler verilmektedir.

Tanım 2.2.1. V bir vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü bilineer, simetrik ve nondejenere ise f ye V üzerinde bir skaler çarpım, V vektör uzayına ise skaler çarpımlı vektör uzayı denir. Ek olarak,

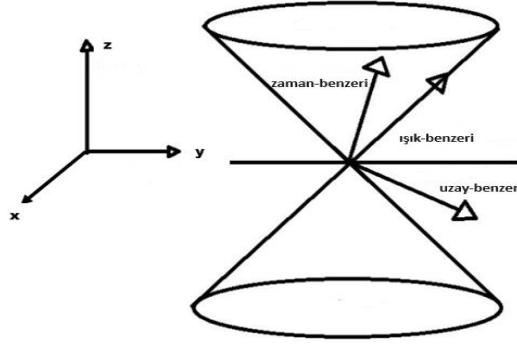
- $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için $f(u, u) > 0$ ise, f –pozitif tanımlı,
- $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için $f(u, u) < 0$ ise, f –negatif tanımlı,
- $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için $f(u, u) \geq 0$ ise, f –yarı pozitif tanımlı
- $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için $f(u, u) \leq 0$ ise, f –yarı negatif tanımlıdır denir.

Ayrıca,

- f nin nondejenere olması için gerek ve yeter koşul $f(u, v) = 0$ ve $\forall v \in V$ için $u = 0$ olmasıdır.
- f nin dejenere olması için gerek ve yeter koşul $f(u, v) = 0$ ve $\forall v \in V$ için $u \neq 0$ olmasıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.2. V bir Minkowski uzayı olmak üzere, $u \in V$ için

- $f(u, u) > 0$ veya $u = 0$ ise, u ya uzay benzeri (spacelike) vektör,
- $f(u, u) < 0$ ise, u ya zaman benzeri (timelike) vektör,
- $f(u, u) = 0$ ve $u \neq 0$ ise, u ya ışık benzeri (lightlike) veya null vektör denir.



Şekil 2.1. Üç boyutlu Minkowski uzayında ışık konisi içindeki, üzerindeki ve dışındaki vektörler

Minkowski uzayı, orijin merkezli ışık konisine bağlı olarak karakterize edilir; yukarıdaki şekle göre ışık konisinin üzerinde ışık benzeri (null) vektörler, ışık konisi içerisinde zaman benzeri vektörler ve dışında da uzay benzeri vektörler bulunur (O'Neill, 1966).

Üç boyutlu Minkowski uzayında vektörel çarpım ve karma çarpım, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3$ vektörleri $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ olarak verildiğinde,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_3v_2 - u_2v_3, u_1v_3 - u_3v_1, u_1v_2 - u_2v_1)$$

olarak tanımlanır ve $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ veya $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ olarak gösterilir. Ayrıca $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{E}_1^3$ için skaler üçlü veya karma çarpım $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ biçiminde elde edilir (Lopez, 2014).

Tanım.2.2.3. $\mathbf{r}, \mathbb{E}_1^3$ de bir eğri ve I parametre aralığı olarak alınsın. $\mathbf{r}, s \in I$ için

- Eğer $\dot{\mathbf{r}}(s)$ vektörü uzay benzeri vektör ise, $\mathbf{r}(s)$ eğrisi uzay benzeri eğri,
- Eğer $\dot{\mathbf{r}}(s)$ vektörü zaman benzeri vektör ise, $\mathbf{r}(s)$ eğrisi zaman benzeri eğri,
- Eğer $\dot{\mathbf{r}}(s)$ vektörü ışık benzeri vektör ise, $\mathbf{r}(s)$ eğrisi ışık benzeri eğridir, denir (Couto ve Lymberopoulos, 2021; Lopez, 2014).

Tanım.2.2.4. Eğer $t_0 \in I$ için $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$ ise, $\mathbf{r}$ eğrisine $t_0 \in I$ noktasında regülerdir denir. $\forall t \in I$ için $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ sağlanıyorsa $\mathbf{r}$ eğrisine regüler eğri denir (O'Neill, 1983).

$\mathbf{r}$ eğrisi s yay parametresi ile parametrelendirilmiş olmak üzere, $\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s)$ vektörüne, $\mathbf{r}$ eğrisinin teğet vektörü denir. Eğrinin zaman benzeri ve uzay benzeri olma durumuları için Serret Frenet çatısını ve türev formüllerini ele alalım:

1. $\mathbf{r}(s)$ zaman benzeri eğri için $\mathbf{T}'(s) \neq 0$, $\mathbf{T}(s)$ ile lineer bağımsız bir uzay benzeri vektördür. s_0 noktasında $\mathbf{r}$ nin eğrilik fonksiyonu $\kappa(s_0) = \|\mathbf{T}'(s_0)\|$ dir. $\mathbf{N}(s)$ asal normal vektörü olmak üzere

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|} = \frac{\mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|}$$

dir. Ayrıca $\kappa(s) = \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle$ olarak verilir.

$-\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$, şeklindeki $\mathbf{B}(s)$ vektörüne eğrinin binormal vektörü denir. $\mathbf{B}(s)$ vektörü, uzay benzeri birim vektördür.

Bu eğrinin burulma fonksiyonu $\tau(s) = \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle$ olarak tanımlanır. Bu duruma ilişkin Serret Frenet türev formüllerinin matris formu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

şeklinde olup ve ortonormal baz vektörleri arasındaki vektörel çarpımlar,

$$\mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) = -\mathbf{B}(s), \mathbf{N}(s) \times \mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s), \mathbf{B}(s) \times \mathbf{T}(s) = -\mathbf{N}(s) \text{ dir.}$$

2. $\mathbf{r}(s)$ uzay benzeri eğri için $\mathbf{T}'(s)$ nin etken karakterine bağlı olarak iki farklı durum incelemesi sunulmuştur:

- a. $\mathbf{N}(s)$ uzay benzeri vektör, $\mathbf{B}(s)$ zaman benzeri vektör:

$\mathbf{r}$ eğrisinin eğriliği $\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|$ dir. $\mathbf{N}(s)$ asal normal vektörü, $\mathbf{B}(s)$ binormal vektörü ve $\tau = -\langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle$ olmak üzere,

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|}, \quad \mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$$

biçimindedir. Bu duruma ait Serret Frenet türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

dir. Ayrıca $\mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) = \mathbf{B}(s)$, $\mathbf{N}(s) \times \mathbf{B}(s) = -\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{B}(s) \times \mathbf{T}(s) = -\mathbf{N}(s)$.

b. $\mathbf{N}(s)$ zaman benzeri vektör, $\mathbf{B}(s)$ uzay benzeri vektör:

$\mathbf{r}$ eğrisinin eğriliği $\kappa(s) = \sqrt{-\langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{T}'(s) \rangle}$ ve $\mathbf{N}(s)$ asal normal vektörü, $\mathbf{B}(s)$ binormal vektörü ve burulması $\tau(s) = \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle$ olmak üzere,

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|}, \quad -\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$$

dir. Serret Frenet türev denklemlerinin matris formu ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

dir. $\mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) = -\mathbf{B}(s)$, $\mathbf{N}(s) \times \mathbf{B}(s) = -\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{B}(s) \times \mathbf{T}(s) = \mathbf{N}(s)$ bağıntıları mevcuttur (Li vd., 2013; Li vd., 2015; Lopez, 2014).

$\mathbf{r}(s)$ eğrisi s psödo yay parametresi ile parametrelendirilmiş olmak üzere $\mathbf{N}$ asal birim normal vektör alanı ile $\mathbf{B}$ asal binormal birim vektör alanları için

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = 1, \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle = 0, \langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle = 1 \quad (2.8)$$

koşullarını sağlayan $\mathbf{r}(s)$ eğrisine psödo null eğri denir. $\mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{B}$, $\mathbf{N} \times \mathbf{B} = \mathbf{T}$, $\mathbf{B} \times \mathbf{T} = \mathbf{N}$ bağıntıları da mevcuttur. Geodezik olmayan psödo null eğrinin s psödo yay parametresine göre Serret Frenet formülü

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

biçimindedir, burada eğrilik fonksiyonu $\kappa(s) = 1$ iken $\tau(s)$ burulma fonksiyonu s yay parametresinin herhangi bir fonksiyonudur (Grbovic and Nesovic, 2018).

$\mathbf{r}(s)$ psödo null eğrisinin Bishop çatısı $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2\}$ ve Serret Frenet çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ olsun. Bu iki çatı arasındaki ilişkiyi ifade eden bağıntılar aşağıdaki şekliyle verilmiştir:

i.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

ve Bishop çatısının türev formülleri,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'_1 \\ \mathbf{N}'_1 \\ \mathbf{N}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \kappa_2 & \kappa_1 \\ -\kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

burada $\kappa_1(s) = 0$, $\kappa_2(s) = c_0 e^{\int \tau(s) ds}$, $c_0 \in \mathbb{R}_0^+$;

ii.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_1 \\ 0 & -1/\kappa_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

ile Bishop çatısına göre türev formülleri,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'_1 \\ \mathbf{N}'_1 \\ \mathbf{N}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \kappa_2 & \kappa_1 \\ -\kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

olup $\kappa_1(s) = c_0 e^{\int \tau(s) ds}$, $c_0 \in \mathbb{R}_0^-$ ve $\kappa_2(s) = 0$ dir.

Ayrıca Bishop çatısının vektör elemanları aşağıdaki bağıntıları sağlar (Grbovic and Nesovic, 2018):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1 \rangle &= 1, \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_1 \rangle = \langle \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_2 \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{T}_1, \mathbf{N}_1 \rangle &= \langle \mathbf{T}_1, \mathbf{N}_2 \rangle = 0, \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \rangle = 1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

$\mathbf{r}: I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisinin $\mathbf{r}' = \mathbf{T}$ teğet vektörü null bir vektör ise, $\mathbf{r}$ ye null eğri denir.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ null eğrisinin s psödo yay uzunluk fonksiyonu

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\|\mathbf{r}''(u)\|} du$$

şeklinde tanımlanırsa, o zaman $\mathbf{r}$ eğrisi null Cartan eğrisi olarak adlandırılır. Geodezik olmayan $\mathbf{r}$ null cartan eğrisi boyunca tek bir $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ Serret Frenet çatısı vardır. Bu çatı alanlarına ait türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\tau & 0 & \kappa \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

matrisi ile verilir. Burada $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ sırasıyla birim teğet vektör, birim normal vektör ve birim binormal vektördür. Ayrıca eğrilik $\kappa(s) = 1$ iken $\tau(s) = \langle \mathbf{N}', \mathbf{B} \rangle$ burulması s psödo yay parametresinin bir fonksiyonudur. Eğer $\tau(s)$ sıfır ise, $\mathbf{r}$ null Cartan eğrisi, null Cartan kübik olarak adlandırılır. Ayrıca

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = 1,$$

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle = -1,$$

ve

$$\mathbf{T} \times \mathbf{N} = -\mathbf{T}, \quad \mathbf{N} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \mathbf{N}. \quad (2.16)$$

bağıntıları mevcut olup $\det(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}) = [\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}] = 1$ ise $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ çatısı pozitif yönlendirilmiştir (Grbovic and Nesovic, 2018).

$\mathbf{r}(s)$ null Cartan eğrisinin $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2\}$ Bishop çatısı ve $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ S.Frenet çatısı arasındaki ilişki,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & 1 & 0 \\ \frac{\kappa_2^2}{2} & -\kappa_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

şeklinde olup, türev formülleri ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'_1 \\ \mathbf{N}'_1 \\ \mathbf{N}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_2 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_1 \\ 0 & 0 & -\kappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

biçimindedir, burada birinci Bishop eğriliği $\kappa_1(s) = 1$ eşitliğini sağlarken ikinci Bishop eğriliği ise $\kappa_2'(s) = -\frac{1}{2}\kappa_2^2 - \tau(s)$ Riccati diferansiyel denklemini sağlar.

Tanım 2.2.5. M , $\mathbb{E}_1^3$ de bir yüzey ve $\varphi: M \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ bir immersiyon $\forall P \in M$ için differansiyellenebilir dönüşümü $d\varphi_P: T_P(M) \rightarrow T_{\varphi(P)}(\mathbb{E}_1^3)$ birebir olsun. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında $\langle, \rangle_P$ Lorentz metriğinin φ ile geri çekme dönüşümü (pull back) g_P kabul edilsin. O zaman $g_P = \varphi^*(\langle, \rangle_P)$ olduğundan $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_P(M)$ için

$$g_P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_P = \langle d\varphi_P(\mathbf{u}), d\varphi_P(\mathbf{v}) \rangle$$

dir (Lopez, 2014). Burada $T_P(M)$ uzayı üç farklı durum söz konusudur:

- g_P pozitif tanımlı ise, $T_P(M)$ uzay benzeri düzlemdir.
- g_P metriğinin indeksi 1 ise, $T_P(M)$ zaman benzeri düzlemdir.
- g_P dejenere metrik ise, $T_P(M)$ ışık benzeri (null) düzlemdir.

Tanım 2.2.6. Teğet düzlemleri uzay benzeri (sırasıyla zaman benzeri, ışık benzeri) olan immersiyona uzay benzeri (sırasıyla zaman benzeri, ışık benzeri) denir (Lopez, 2014).

M yüzeyi içinde $\varphi(U)$ differansiyellenebilir yüzeyi için $Q \in U$ ve $\varphi(Q) = P$ olsun. $\varphi(U)$ yüzeyinin her P noktasındaki $\{\varphi_u(Q), \varphi_v(Q), \mathbf{n}(P)\}$ kümesi, $T_P \mathbb{R}^3$ uzayının pozitif yönlü bir tabanı olacak şekilde $\varphi(U)$ üzerinde, $\mathbf{n}$ birim normal vektör alanı

$$\mathbf{n} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \quad (2.19)$$

şeklindedir (Lopez, 2014).

Tanım 2.2.7. M yüzeyi ele alınsın. $\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p \in T_p M$ için M nin her bir P noktasını

$$I_p = \langle, \rangle_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_p(\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p) = \langle \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p \rangle$$

fonksiyonuna karşılık getiren I_p fonksiyonuna, M üzerinde birinci temel form denir. M nin her bir P noktasına

$$II_p = \langle, \rangle_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad II_p(\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p) = \langle S(\mathbf{u}_p), \mathbf{v}_p \rangle$$

fonksiyonunu karşılık getiren II_p fonksiyonuna, M üzerinde ikinci temel form denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.8. $\bar{M}$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey olsun. $\forall P \in \bar{M}$ ve

$\forall \mathbf{w}_p \in T_p \bar{M}, \mathbf{v}_p \in T_p \bar{M}$ olmak üzere,

$$\langle \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_p = 0$$

sağlanıyorsa, $\bar{M}$ ye $\mathbb{R}_1^3$ uzayında bir nondejenere yüzey denir (Lopez, 2014). $\bar{M}$ yüzeyi üzerindeki metriğin matris formu

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

dir. $\bar{M}$ yüzeyi üzerindeki metriğin nondejenere olması için gerek ve yeter şart

$$\det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \neq 0$$

olmasıdır. Diğer bir ifadeyle, $\bar{M}$ yüzeyinin nondejenere yüzey olması için gerek ve yeter şart, yüzeyin normalinin null vektör alanı olmamasıdır.

O zaman $\bar{M}$ yüzeyinin etken karakterine yönelik durumlar

- $\bar{M}$ yüzeyinin uzay benzeri bir yüzey olmasının gerek ve yeter şartı yüzey normalinin zaman benzeri bir vektör alanı, yani $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle < 0$ olmasıdır,
- $\bar{M}$ yüzeyinin zaman benzeri bir yüzey olmasının gerek ve yeter şartı yüzey normalinin uzay benzeri bir vektör alanı, yani $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle > 0$ olmasıdır (Lopez, 2014).

Tanım.2.2.9. $M, \mathbb{E}_1^3$ uzayında bir yüzey ve $\mathbf{n}$, M yüzeyin birim normal vektör alanı kabul edilsin. $D, \mathbb{E}_1^3$ de koneksiyon olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$X \rightarrow S(X) = D_X \mathbf{n}$$

olarak tanımlanan S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü (Weingarten dönüşümü) denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.10. M , $\mathbb{E}_1^3$ de bir yüzey ve $\mathbf{n}$ asal birim normali ve S şekil operatörü olan bir yüzey olsun. $P \in M$ ve $\varepsilon = \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \pm 1$ için,

$$K: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow K(P) = \varepsilon \det S_p$$

biçimindeki fonksiyona M yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu; $K(P)$ değerine ise M yüzeyinin P deki Gauss eğriliği denir (Lopez, 2014).

Tanım 2.2.11. M , $\mathbb{E}_1^3$ de $\mathbf{n}$ asal birim normalli ve S şekil operatörlü bir yüzey olsun. $P \in M$ ve $\varepsilon = \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \pm 1$ için,

$$H: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow H(P) = \frac{\varepsilon}{2} \text{tr} S_p$$

biçimindeki fonksiyona M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu; $H(P)$ değerine ise M nin P deki ortalama eğriliği denir (Lopez, 2014).

Tanım 2.2.12. M yüzeyinin parametrik denklemi $\varphi(u, v)$ olmak üzere her bir noktada teğet düzlemin bazı $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ için $E, F, G: U \rightarrow \mathbb{R}$ alalım.

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle, \quad (2.20)$$

türevlenebilir fonksiyonlarına birinci temel formun katsayıları denir ve

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

olarak birinci esas form yazılır.

$$L = -\langle \varphi_u, \mathbf{n}_u \rangle = \langle \mathbf{n}, \varphi_{uu} \rangle,$$

$$M = -\langle \varphi_u, \mathbf{n}_v \rangle = -\langle \varphi_v, \mathbf{n}_u \rangle = \langle \mathbf{n}, \varphi_{uv} \rangle,$$

$$N = -\langle \varphi_v, \mathbf{n}_v \rangle = \langle \mathbf{n}, \varphi_{vv} \rangle, \quad (2.21)$$

türevlenebilir fonksiyonlarına da ikinci temel formun katsayıları denir ve

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

biçiminde ikinci esas form verilir. Ayrıca birinci ve ikinci temel formların katsayıları cinsinden M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırayla

$$\begin{aligned} K &= \varepsilon \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \\ H &= \varepsilon \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

biçiminde verilir (Couto ve Lymberopoulos, 2021; Lopez, 2014).

M yüzeyi üzerinde yer alan $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin bir diğer çatısı Darboux çatısıdır ve tez çalışmamızda $\{\mathbf{T}, \mathbf{b}_1, \mathbf{n}_1\}$ notasyonu ile gösterilmiştir. Darboux çatısını oluşturan vektörlerden $\mathbf{T}$, eğrinin birim teğet vektörü; $\mathbf{n}_1$, M yüzeyinin birim normal vektörü ve $\mathbf{b}_1$, hem $\mathbf{T}$ ye hem de $\mathbf{n}_1$ e dik birim vektör olup $\mathbf{b}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{T}$ şeklinde ifade edilen vektördür. $\mathbf{T}$, Serret Frenet ve Darboux çatılarının her ikisinde de olup $\mathbf{N}, \mathbf{B}, \mathbf{b}_1$ ve $\mathbf{n}_1$ vektörleri aynı düzlemde yer alırlar (Bulut ve Çalışkan, 2021; Uğurlu and Çalışkan, 2012).

Regle yüzey; üreteç veya doğrultman adı verilen doğrunun, bir baz eğrisi boyunca sürekli hareketi sonucu oluşan yüzeydir. Bu durumda

Tanım 2.2.13. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında M regle yüzeyi için;

- $\alpha = \alpha(s)$, $\mathbb{R}$ nin I_1 açık aralığında tanımlı eğri
- $\beta = \beta(s)$, α eğrisi boyunca vektör alanıdır.

$\mathbb{R}$ nin I_2 açık aralığı için M yüzeyinin parametrizasyonu

$$\mathbf{P}(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s), \quad s \in I_1, t \in I_2 \quad (2.23)$$

ile verilir, burada $\alpha(s)$ baz eğrisi ve $\beta(s)$ doğrultman eğridir (Gray vd., 2006; Walrave, 1995).

Regle yüzeyin özel bir durumu olan açılabilir yüzey için; M nin doğrultmanı boyunca teğet düzlemlerin çakışması $0 = \det(\mathbf{T}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}'_1)$ ile sağlanır, bu da M regle yüzeyinin açılabilir yüzey olduğu anlamına gelir (Millman ve Parker, 1977).

$\mathbb{E}_1^3$ uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzeyin boğaz çizgisi (striksiyon eğrisi);

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) - \frac{\langle \mathbf{T}, \mathbf{X}' \rangle}{\langle \mathbf{X}', \mathbf{X}' \rangle} \mathbf{X}(t), \quad (2.24)$$

şeklinde olup, burada $\mathbf{X}$ doğrultmanı, eğri boyunca $\langle \mathbf{X}', \mathbf{X}' \rangle \neq 0$ sağlayan yönlü bir vektördür (Woestijne, 1990). Ayrıca $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında dejenere olmayan, parametrik denklemi $\mathbf{P}(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s)$ şeklinde verilen yüzey için;

- Eğer $\alpha(s)$ sabit bir nokta ise, $\mathbf{P}(s, t)$ koni yüzeyi;
- Eğer $\beta(s)$ sabit ise $\mathbf{P}(s, t)$ silindir yüzeyi;

Eğer $\alpha'(s) = \beta(s)$ sağlanıyorsa $\mathbf{P}(s, t)$ teğet yüzeydir, denir (Do Carmo, 1976; Dursun ve Coşkun, 2012)

3. ÖKLİD UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ OFSET EĞRİLERİ VE VARYASYONLARI

Çalışmamızın bu bölümünde, üç boyutlu Öklid uzayında uzay eğrilerinin genelleştirilmiş ofset eğrileri tanımlanmakta ve geometrik özellikleri ifade edilmektedir. Ardından uzay eğrilerinin genelleştirilmiş ofsetlerinin yay uzunluğu, eğrilik ve burulma fonksiyonlarına ait varyasyon hesaplamaları sunulmaktadır. Ayrıca uzay eğrilerinin genelleştirilmiş ofset eğrilerine ilişkin örnekler grafikleriyle birlikte verilmektedir.

3.1. $\mathbb{E}^3$ de Uzay Eğrilerinin Genelleştirilmiş Ofset Eğrileri

Tanım 3.1.1. $\mathbf{r}(t)$, ($t \in [0,1]$) düzgün parametrik uzay eğrisinin $\mathbf{r}_*(t)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi değişken ofset mesafesi ve yönü ile

$$\mathbf{r}_*(t) = \mathbf{r}(t) + d_1(t)\mathbf{e} + d_2(t)\mathbf{n} + d_3(t)\mathbf{b} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $d_1(t)$, $d_2(t)$ ve $d_3(t)$ değerleri t ye bağlı fonksiyonlardır. Genelleştirilmiş ofset eğrisi, ϵ komşuluk yaklaşımı

$$\mathbf{r}_*(t) = \mathbf{r}(t) + \epsilon \bar{d}_1(t)\mathbf{e} + \epsilon \bar{d}_2(t)\mathbf{n} + \epsilon \bar{d}_3(t)\mathbf{b} \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edilebilir, öyle ki $d_1(t) = \epsilon \bar{d}_1(t)$, $d_2(t) = \epsilon \bar{d}_2(t)$ ve $d_3(t) = \epsilon \bar{d}_3(t)$ olup ofset mesafesi $\epsilon \sqrt{\bar{d}_1(t)^2 + \bar{d}_2(t)^2 + \bar{d}_3(t)^2}$ dir (Blaschke,1950).

$\mathbf{r}_*(t)$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin birinci mertebeden parametrik türevi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_* &= \mathbf{r}' + \epsilon \left(\bar{d}'_1 \mathbf{e} + \bar{d}_1 \mathbf{e}' + \bar{d}'_2 \mathbf{n} + \bar{d}_2 \mathbf{n}' + \bar{d}'_3 \mathbf{b} + \bar{d}_3 \mathbf{b}' \right) \\ &= |\mathbf{r}'| \mathbf{e} + \epsilon \left(\left(\bar{d}'_1 + \bar{d}_2 \kappa |\mathbf{r}'| \right) \mathbf{e} + \left(\bar{d}'_2 - \bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'| + \bar{d}_3 \tau |\mathbf{r}'| \right) \mathbf{n} \right. \\ &\quad \left. + \left(\bar{d}'_3 - \bar{d}_2 \tau |\mathbf{r}'| \right) \mathbf{b} \right) \end{aligned}$$

biçiminde olup, kısaca

$$\mathbf{r}'_* = |\mathbf{r}'| \mathbf{e} + \epsilon(\alpha \mathbf{e} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b}), \quad (3.3)$$

olup, burada $\alpha = \bar{d}'_1 + \bar{d}_2 \kappa |\mathbf{r}'|$, $\beta = \bar{d}'_2 - \bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'| + \bar{d}_3 \tau |\mathbf{r}'|$, $\gamma = \bar{d}'_3 - \bar{d}_2 \tau |\mathbf{r}'|$ biçiminde alınmıştır. Ayrıca,

$$|\mathbf{r}'_*| = \sqrt{|\mathbf{r}'|^2 + \epsilon^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2\epsilon\alpha|\mathbf{r}'|} \quad (3.4)$$

şeklindedir. Birinci mertebeden parametrik türev,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''_* &= |\mathbf{r}'| \mathbf{e}' + \epsilon(\alpha' \mathbf{e} + \alpha \mathbf{e}' + \beta' \mathbf{n} + \beta \mathbf{n}' + \gamma' \mathbf{b} + \gamma \mathbf{b}') \\ &= -|\mathbf{r}'|^2 \kappa \mathbf{n} + \epsilon[(\alpha' + \beta \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{e} + (\beta' - \alpha \kappa |\mathbf{r}'| + \gamma \tau |\mathbf{r}'|) \mathbf{n} + (\gamma' - \beta \tau |\mathbf{r}'|) \mathbf{b}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_* \times \mathbf{r}''_* &= |\mathbf{r}'|^3 \kappa \mathbf{b} \\ &\quad + \epsilon[(-|\mathbf{r}'|^2 \kappa \gamma) \mathbf{e} + (\gamma' |\mathbf{r}'| - \beta \tau |\mathbf{r}'|^2) \mathbf{n} \\ &\quad + (-\beta' |\mathbf{r}'| + 2\alpha \kappa |\mathbf{r}'|^2 - \gamma \tau |\mathbf{r}'|^2) \mathbf{b}] \\ &\quad + \epsilon^2 \left(\begin{aligned} &(-\beta \gamma' + \beta^2 \tau |\mathbf{r}'| + \gamma \beta' - \gamma \alpha \kappa |\mathbf{r}'| + \gamma^2 \tau |\mathbf{r}'|) \mathbf{e} \\ &+ (\alpha \gamma' - \alpha \beta \tau |\mathbf{r}'| - \gamma \alpha' - \gamma \beta \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{n} \\ &+ (-\alpha \beta' + \alpha^2 \kappa |\mathbf{r}'| - \alpha \gamma \tau |\mathbf{r}'| + \beta \alpha' + \beta^2 \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{b} \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

elde edilerek,

$$\mathbf{r}'_* \times \mathbf{r}''_* = A_1 \mathbf{b} + \epsilon(\bar{B}_1 \mathbf{e} + \bar{B}_2 \mathbf{n} + \bar{B}_3 \mathbf{b}) + \epsilon^2(\bar{C}_1 \mathbf{e} + \bar{C}_2 \mathbf{n} + \bar{C}_3 \mathbf{b}) \quad (3.5)$$

olarak yazılabilir, burada

$$A_1 = |\mathbf{r}'|^3 \kappa, \quad \bar{B}_1 = -|\mathbf{r}'|^2 \kappa \gamma, \quad \bar{B}_2 = \gamma' |\mathbf{r}'| - \beta \tau |\mathbf{r}'|^2,$$

$$\bar{B}_3 = -\beta' |\mathbf{r}'| + 2\alpha \kappa |\mathbf{r}'|^2 - \gamma \tau |\mathbf{r}'|^2,$$

$$\bar{C}_1 = -\beta \gamma' + \beta^2 \tau |\mathbf{r}'| + \gamma \beta' - \gamma \alpha \kappa |\mathbf{r}'| + \gamma^2 \tau |\mathbf{r}'|,$$

$$\bar{C}_2 = \alpha \gamma' - \alpha \beta \tau |\mathbf{r}'| - \gamma \alpha' - \gamma \beta \kappa |\mathbf{r}'|,$$

$$\bar{C}_3 = -\alpha \beta' + \alpha^2 \kappa |\mathbf{r}'| - \alpha \gamma \tau |\mathbf{r}'| + \beta \alpha' + \beta^2 \kappa |\mathbf{r}'|$$

alınmıştır ve

$$|\mathbf{r}'_* \times \mathbf{r}''_*| = \epsilon \sqrt{(\bar{B}_1 + \epsilon \bar{C}_1)^2 + (\bar{B}_2 + \epsilon \bar{C}_2)^2 + \left(\frac{1}{\epsilon} A_1 + \bar{B}_3 + \epsilon \bar{C}_3\right)^2}. \quad (3.6)$$

Sonuç olarak, Eşitlik 3.3, 3.4, 3.5 ve 3.6 dan kullanılarak genelleştirilmiş ofset eğrisinin Serret Frenet vektör alanları,

$$\mathbf{e}_* = \frac{|\mathbf{r}'|\mathbf{e} + \epsilon(\alpha\mathbf{e} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b})}{\sqrt{|\mathbf{r}'|^2 + \epsilon^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2\epsilon\alpha|\mathbf{r}'|}},$$

$$\mathbf{b}_* = \frac{A_1\mathbf{b} + \epsilon(\bar{B}_1\mathbf{e} + \bar{B}_2\mathbf{n} + \bar{B}_3\mathbf{b}) + \epsilon^2(\bar{C}_1\mathbf{e} + \bar{C}_2\mathbf{n} + \bar{C}_3\mathbf{b})}{\epsilon\sqrt{(\bar{B}_1 + \epsilon\bar{C}_1)^2 + (\bar{B}_2 + \epsilon\bar{C}_2)^2 + \left(\frac{1}{\epsilon}A_1 + \bar{B}_3 + \epsilon\bar{C}_3\right)^2}},$$

ve $\mathbf{e}_* \times \mathbf{b}_*$ vektörel çarpımından;

$$\mathbf{n}_* = \frac{A_1|\mathbf{r}'|\mathbf{n} + \epsilon(-A_1\beta\mathbf{e} + (A_1\alpha + \bar{B}_3|\mathbf{r}'|)\mathbf{n} - \bar{B}_2|\mathbf{r}'|\mathbf{b}) + \epsilon^2((\bar{B}_2\gamma - \bar{B}_3\beta)\mathbf{e} + (-\bar{B}_1\gamma + \bar{B}_3\alpha + \bar{C}_3|\mathbf{r}'|)\mathbf{n} + (\bar{B}_1\beta - \bar{B}_2\alpha - \bar{C}_2|\mathbf{r}'|)\mathbf{b}) + \epsilon^3((\bar{C}_2\gamma - \bar{C}_3\beta)\mathbf{e} + (-\bar{C}_1\gamma + \bar{C}_3\alpha)\mathbf{n} + (\bar{C}_1\beta - \bar{C}_2\alpha)\mathbf{b})}{\epsilon\left([|\mathbf{r}'|^2 + \epsilon^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2\epsilon\alpha|\mathbf{r}'|]\left(\frac{(\bar{B}_1 + \epsilon\bar{C}_1)^2 + (\bar{B}_2 + \epsilon\bar{C}_2)^2}{\left(\frac{1}{\epsilon}A_1 + \bar{B}_3 + \epsilon\bar{C}_3\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}$$

olarak elde edilir. $\mathbb{E}^3$ de $\mathbf{r}_*(t)$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin üçüncü mertebeden türevi,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_*''' &= -|\mathbf{r}'|^3\kappa^2\mathbf{e} - |\mathbf{r}'|^2\kappa'\mathbf{n} + |\mathbf{r}'|^3\kappa\tau\mathbf{b} \\ &+ \epsilon[[(\alpha' + \beta\kappa|\mathbf{r}'|)'] + (\beta' - \alpha\kappa|\mathbf{r}'| + \gamma\tau|\mathbf{r}'|)\kappa|\mathbf{r}'|]\mathbf{e} \\ &+ \epsilon[[(\beta' + \alpha\kappa|\mathbf{r}'| + \gamma\tau|\mathbf{r}'|)'] - (\alpha' + \beta\kappa|\mathbf{r}'|)\kappa|\mathbf{r}'| + (\gamma' - \beta\tau|\mathbf{r}'|)\tau|\mathbf{r}'|]\mathbf{n} \\ &+ \epsilon[[(\gamma' - \beta\tau|\mathbf{r}'|)'] - (\beta' - \alpha\kappa|\mathbf{r}'| + \gamma\tau|\mathbf{r}'|)\tau|\mathbf{r}'|]\mathbf{b}\end{aligned}$$

olarak elde edilir ve düzenlenirse,

$$\mathbf{r}_*''' = (-|\mathbf{r}'|^3\kappa^2 + \epsilon\bar{M}_1)\mathbf{e} + (-|\mathbf{r}'|^2\kappa' + \epsilon\bar{M}_2)\mathbf{n} + (|\mathbf{r}'|^3\kappa\tau + \epsilon\bar{M}_3)\mathbf{b}$$

şeklinde yazılabilir, burada

$$\bar{M}_1 = (\alpha' + \beta\kappa|\mathbf{r}'|)' + (\beta' - \alpha\kappa|\mathbf{r}'| + \gamma\tau|\mathbf{r}'|)\kappa|\mathbf{r}'|,$$

$$\bar{M}_2 = (\beta' + \alpha\kappa|\mathbf{r}'| + \gamma\tau|\mathbf{r}'|)' - (\alpha' + \beta\kappa|\mathbf{r}'|)\kappa|\mathbf{r}'| + (\gamma' - \beta\tau|\mathbf{r}'|)\tau|\mathbf{r}'|,$$

$$\bar{M}_3 = (\gamma' - \beta\tau|\mathbf{r}'|)' - (\beta' - \alpha\kappa|\mathbf{r}'| + \gamma\tau|\mathbf{r}'|)\tau|\mathbf{r}'|$$

olarak alınmıştır. Bu durumda,

$$(\mathbf{r}'_* \times \mathbf{r}''_*) \cdot \mathbf{r}'''_* = (\bar{B}_1 + \epsilon \bar{C}_1)(-|\mathbf{r}'|^3 \kappa^2 + \epsilon \bar{M}_1) + (\bar{B}_2 + \epsilon \bar{C}_2)(-|\mathbf{r}'|^2 \kappa' + \epsilon \bar{M}_2) + \left(\frac{A_1}{\epsilon} + \bar{B}_3 + \epsilon \bar{C}_3\right)(|\mathbf{r}'|^3 \kappa \tau + \epsilon \bar{M}_3) \quad (3.7)$$

biçimindedir. Sonuçta $\mathbf{r}_*(t)$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin Eşitlik 3.4, 3.6 ve 3.7 kullanılarak eğrilik ve burulma fonksiyonları sırayla;

$$\kappa_* = \frac{\epsilon \sqrt{(\bar{B}_1 + \epsilon \bar{C}_1)^2 + (\bar{B}_2 + \epsilon \bar{C}_2)^2 + \left(\frac{1}{\epsilon} A_1 + \bar{B}_3 + \epsilon \bar{C}_3\right)^2}}{(|\mathbf{r}'|^2 + \epsilon^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2\epsilon\alpha|\mathbf{r}'|)^{3/2}},$$

$$\tau_* = \frac{\left((\bar{B}_1 + \epsilon \bar{C}_1)(-|\mathbf{r}'|^3 \kappa^2 + \epsilon \bar{M}_1) + (\bar{B}_2 + \epsilon \bar{C}_2)(-|\mathbf{r}'|^2 \kappa' + \epsilon \bar{M}_2) + \left(\frac{A_1}{\epsilon} + \bar{B}_3 + \epsilon \bar{C}_3\right)(|\mathbf{r}'|^3 \kappa \tau + \epsilon \bar{M}_3) \right)}{\epsilon \left((\bar{B}_1 + \epsilon \bar{C}_1)^2 + (\bar{B}_2 + \epsilon \bar{C}_2)^2 + \left(\frac{A_1}{\epsilon} + \bar{B}_3 + \epsilon \bar{C}_3\right)^2 \right)}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.1.1. Aşağıdaki

$$\bar{d}_2 \bar{d}'_2 + \bar{d}_1 \left(\bar{d}'_1 + \frac{|\mathbf{r}'|}{\epsilon} \right) + \bar{d}_3 \bar{d}'_3 = 0$$

denklemini sağlayan $t_0 \in [0,1]$ varsa ve herhangi bir δ keyfi küçük pozitif sayı için

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{\epsilon \bar{d}_2} - \frac{\bar{d}'_1}{\bar{d}_2 |\mathbf{r}'|} \\ \tau &= \frac{\bar{d}'_3}{\bar{d}_2 |\mathbf{r}'|} \end{aligned} \right\} \text{ öyle ki } |\bar{d}_2| \geq \delta > 0$$

ise; $\mathbf{r}_*(t_0)$, $\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin düzgün olmayan bir noktasıdır.

İspat:

$|\mathbf{r}'_*(t_0)| = \sqrt{(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^2 + (\epsilon\beta)^2 + (\epsilon\gamma)^2} = 0$, yani $\alpha = -\frac{|\mathbf{r}'|}{\epsilon}$, $\beta = 0$ ve $\gamma = 0$ elde edilir. Böylece

$$\alpha = \bar{d}'_1 + \bar{d}_2 \kappa |\mathbf{r}'| = -\frac{|\mathbf{r}'|}{\epsilon} \quad \text{ve} \quad \gamma = \bar{d}'_3 - \bar{d}_2 \tau |\mathbf{r}'| = 0$$

eşitliklerine ulaşılır. Yukarıda yer alan ifadeler $\beta = \bar{d}'_2 - \bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'| + \bar{d}_3 \tau |\mathbf{r}'| = 0$ denkleminde yerine konulduğunda

$$\bar{d}_2 \bar{d}'_2 + \bar{d}_1 \left(\bar{d}'_1 + \frac{|\mathbf{r}'|}{\epsilon} \right) + \bar{d}_3 \bar{d}'_3 = 0 \text{ elde edilir, ve } t_0 \in [0,1] \text{ için}$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{\epsilon \bar{d}_2} - \frac{\bar{d}'_1}{\bar{d}_2 |\mathbf{r}'|} \\ \tau &= \frac{\bar{d}'_3}{\bar{d}_2 |\mathbf{r}'|} \end{aligned} \right\} \text{ öyle ki } |\bar{d}_2| \geq \delta > 0$$

bulunur. Sonuç olarak $\mathbf{r}_*(t_0)$ noktasının, $\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisi için düzgün olmayan noktası olduğu görülür.

Teorem 3.1.2. $\mathbf{r}_* = \mathbf{r} + d_1 \mathbf{e} + d_2 \mathbf{n} + d_3 \mathbf{b}$ denklemi ile verilen genelleştirilmiş ofset eğrisi

$$\mathbf{r}_*(t) = \mathbf{r}_1(t) + d \mathbf{n}_1$$

bağıntısı kullanılarak standart ofset eğrisi olarak yazılabilir. Burada; $\mathbf{r}_1$ düzgün parametrik uzay eğrisi, d sabit ofset mesafesi ve $\mathbf{n}_1$ ise $\mathbf{r}_1$ eğrisinin asal birim normal vektörüdür.

İspat: Genelleştirilmiş ofset eğrisi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_* &= \mathbf{r} + d_1 \mathbf{e} + d_2 \mathbf{n} + d_3 \mathbf{b} \\ &= \mathbf{r} + A \mathbf{e} + B \mathbf{n} + C \mathbf{b} + (d_1 - A) \mathbf{e} + (d_2 - B) \mathbf{n} + (d_3 - C) \mathbf{b} \\ &\triangleq \mathbf{r}_1 + d \mathbf{n}_1, \text{ yani } \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + A \mathbf{e} + B \mathbf{n} + C \mathbf{b} \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir ve $d_1 = \epsilon \bar{d}_1, d_2 = \epsilon \bar{d}_2, d_3 = \epsilon \bar{d}_3, A = \epsilon \bar{A}, B = \epsilon \bar{B}, C = \epsilon \bar{C}$ değerleri t nin birer fonksiyonudur. Ayrıca,

$$d = \epsilon \sqrt{(\bar{d}_1 - \bar{A})^2 + (\bar{d}_2 - \bar{B})^2 + (\bar{d}_3 - \bar{C})^2} = \epsilon \bar{d},$$

$$\mathbf{n}_1 = \epsilon \left(\frac{(\bar{d}_1 - \bar{A})}{d} \mathbf{e} + \frac{(\bar{d}_2 - \bar{B})}{d} \mathbf{n} + \frac{(\bar{d}_3 - \bar{C})}{d} \mathbf{b} \right) \quad (3.8)$$

şeklindedir. Böylece

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}' + \epsilon \left(\bar{A}' \mathbf{e} + \bar{A} \mathbf{e}' + \bar{B}' \mathbf{n} + \bar{B} \mathbf{n}' + \bar{C}' \mathbf{b} + \bar{C} \mathbf{b}' \right) \\ &= |\mathbf{r}'| \mathbf{e} + \epsilon \left(\left(\bar{A}' + \bar{B} \kappa |\mathbf{r}'| \right) \mathbf{e} + \left(\bar{B}' - \bar{A} \kappa |\mathbf{r}'| + \bar{C} \tau |\mathbf{r}'| \right) \mathbf{n} \right. \\ &\quad \left. + \left(\bar{C}' - \bar{B} \tau |\mathbf{r}'| \right) \mathbf{b} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

bağıntısı elde edilir. (3.9) daki genelleştirilmiş ofset eğrisinin standart ofset eğrisi olarak ifade edilebilmesi için aşağıda verilen iki bağıntının sağlanması gerekmektedir:

i. $\langle d\mathbf{n}_1, \mathbf{r}'_1 \rangle = 0$ için aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\begin{aligned} \epsilon(\bar{d}_1 - \bar{A}) \left(|\mathbf{r}'| + \epsilon \left(\bar{A}' + \bar{B} \kappa |\mathbf{r}'| \right) \right) + \epsilon^2(\bar{d}_2 - \bar{B}) \left(\bar{B}' - \bar{A} \kappa |\mathbf{r}'| + \bar{C} \tau |\mathbf{r}'| \right) \\ + \epsilon^2(\bar{d}_3 - \bar{C}) \left(\bar{C}' - \bar{B} \tau |\mathbf{r}'| \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

ii. $\epsilon^2(\bar{d}_1 - \bar{A})^2 + \epsilon^2(\bar{d}_2 - \bar{B})^2 + \epsilon^2(\bar{d}_3 - \bar{C})^2 = c, c \in \mathbb{R}$, diğer bir deyişle

$$\epsilon^2[(\bar{d}_1 - \bar{A})(\bar{d}_1' - \bar{A}') + (\bar{d}_2 - \bar{B})(\bar{d}_2' - \bar{B}') + (\bar{d}_3 - \bar{C})(\bar{d}_3' - \bar{C}')] = 0 \quad (3.11)$$

gelir. Bu yüzden, $A = \epsilon \bar{A}, B = \epsilon \bar{B}$ ve $C = \epsilon \bar{C}$ değerlerini (3.10) ve (3.11) denklemlerinden aşağıdaki gibi bulabiliriz:

$$\begin{aligned} &\left(\epsilon |\mathbf{r}'| + \epsilon^2 (\bar{d}_2 \kappa |\mathbf{r}'| + \bar{d}_1') \right) \bar{A} \\ &= \epsilon^2 (\bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'| - \bar{d}_3 \tau |\mathbf{r}'| - \bar{d}_2') \bar{B} + \epsilon^2 (\bar{d}_2 \tau |\mathbf{r}'| - \bar{d}_3') \bar{C} \\ &+ \left(\epsilon \bar{d}_1 |\mathbf{r}'| + \epsilon^2 (\bar{d}_1' \bar{d}_1 + \bar{d}_2' \bar{d}_2 + \bar{d}_3' \bar{d}_3) \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Bunlara ek olarak $\alpha = \bar{d}_1' + \bar{d}_2 \kappa |\mathbf{r}'|, \beta = \bar{d}_2' - \bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'| + \bar{d}_3 \tau |\mathbf{r}'|, \gamma = \bar{d}_3' - \bar{d}_2 \tau |\mathbf{r}'|$ olduğundan dolayı,

$$\epsilon \bar{d}_1 |\mathbf{r}'| + \epsilon^2 (\bar{d}_1' \bar{d}_1 + \bar{d}_2' \bar{d}_2 + \bar{d}_3' \bar{d}_3) = \epsilon \bar{d}_1 |\mathbf{r}'| + \epsilon^2 (\bar{d}_1 \alpha + \bar{d}_2 \beta + \bar{d}_3 \gamma) \quad (3.13)$$

biçiminde yazılır. Bu durumda

$$\epsilon \left((\bar{d}_1 - \bar{A})|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha(\bar{d}_1 - \bar{A}) + \epsilon\beta(\bar{d}_2 - \bar{B}) + \epsilon\gamma(\bar{d}_3 - \bar{C}) \right) = 0 \quad (3.14)$$

olur. $A = \epsilon\bar{A}$, $B = \epsilon\bar{B}$ ve $C = \epsilon\bar{C}$ değerleri, Eşitlik 3.11 ve 3.14 den aşağıda verilen sekiz farklı durum incelemesi yapılarak elde edilir:

1. $\alpha = \beta = \gamma = 0$ için (3.14) denkleminden $\epsilon|\mathbf{r}'|(\bar{d}_1 - \bar{A}) = 0$ gelir. $|\mathbf{r}'| \neq 0$ olduğundan $\bar{d}_1(t) = \bar{A}$ dir. (3.11)'den $(\bar{d}_2 - \bar{B})^2 + (\bar{d}_3 - \bar{C})^2 = c_0 = sbt$.

$\bar{C} = g(t)$ kabul edildiğinde $\bar{B} = \bar{d}_2 \pm \sqrt{c_0 - (\bar{d}_3 - g(t))^2}$ değerine ulaşılır.

2. i) $\alpha \neq 0, \beta = \gamma = 0$ için (3.14) denkleminden $(\bar{d}_1 - \bar{A}) = 0$ geldiğinden $\bar{d}_1(t) = \bar{A}$ olur. (3.11) den $(\bar{d}_2 - \bar{B})^2 + (\bar{d}_3 - \bar{C})^2 = c_0$; $c_0 = sbt$ olduğundan $\bar{C} = g(t)$ için $\bar{B} = \bar{d}_2 \pm \sqrt{c_0 - (\bar{d}_3 - g(t))^2}$ olup 1. duruma benzer biçimde elde edilir.

ii) $\beta \neq 0, \alpha = \gamma = 0$ için (3.14) denkleminden $(\bar{d}_1 - \bar{A}) = -\frac{\epsilon\beta}{|\mathbf{r}'|}(\bar{d}_2 - \bar{B})$

olur. (3.11)'den $(\epsilon^2\beta^2 + |\mathbf{r}'|^2)(\bar{d}_2 - \bar{B})^2 + |\mathbf{r}'|^2(\bar{d}_3 - \bar{C}) = c_0|\mathbf{r}'|^2$;
 $c_0 = sbt$ elde edilir, buradan

$$\bar{C} = g(t) \text{ için } \bar{B} = \bar{d}_2 \pm |\mathbf{r}'| \frac{\sqrt{c_0 - (\bar{d}_3 - g(t))^2}}{\sqrt{\epsilon^2\beta^2 + |\mathbf{r}'|^2}}, \quad \bar{A} = \bar{d}_1 + \epsilon\beta \frac{\sqrt{c_0 - (\bar{d}_3 - g(t))^2}}{\sqrt{\epsilon^2\beta^2 + |\mathbf{r}'|^2}}$$

sonucuna ulaşılır.

iii) $\gamma \neq 0, \alpha = \beta = 0$ durumu için, (3.14) den $(\bar{d}_1 - \bar{A}) = -\frac{\epsilon\gamma}{|\mathbf{r}'|}(\bar{d}_3 - \bar{C})$

olur. (3.11)'den $(\epsilon^2\gamma^2 + |\mathbf{r}'|^2)(\bar{d}_3 - \bar{C})^2 + |\mathbf{r}'|^2(\bar{d}_2 - \bar{B}) = c_0|\mathbf{r}'|^2$;

$c_0 = sbt$ elde edilir, buradan $\bar{B} = g(t)$ için $\bar{C} = \bar{d}_3 \pm |\mathbf{r}'| \frac{\sqrt{c_0 - (\bar{d}_2 - g(t))^2}}{\sqrt{\epsilon^2\gamma^2 + |\mathbf{r}'|^2}},$

$$\bar{A} = \bar{d}_1 + \epsilon\gamma \frac{\sqrt{c_0 - (\bar{d}_2 - g(t))^2}}{\sqrt{\epsilon^2\gamma^2 + |\mathbf{r}'|^2}} \text{ sonucuna ulaşılır.}$$

3. i) $\alpha = 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$ için (3.14) denkleminden

$\epsilon|\mathbf{r}'| (\bar{d}_1 - \bar{A}) + \epsilon^2\beta(\bar{d}_2 - \bar{B}) + \epsilon^2\gamma(\bar{d}_3 - \bar{C}) = 0$ elde edilir. $\bar{C} = g(t)$

kabul edilirse $(\bar{d}_2 - \bar{B}) = -\frac{\gamma}{\beta}(\bar{d}_3 - g(t)) - \frac{|\mathbf{r}'|}{\epsilon\beta}(\bar{d}_1 - \bar{A})$ olarak gelir.

(3.11) denkleminde $(\bar{d}_1 - \bar{A})^2 + (\bar{d}_2 - \bar{B})^2 = c_0 - (\bar{d}_3 - g(t))^2$;

$c_0 = sbt$, ulaşılır. Elde edilen eşitlikler birlikte çözüldüğünde

$$\begin{aligned}\bar{B} &= \bar{d}_2 + \frac{\epsilon^2\beta\gamma}{\epsilon^2\beta^2 + |\mathbf{r}'|^2}(\bar{d}_3 - g(t)) \\ &\quad \pm \frac{|\mathbf{r}'|}{\epsilon^2\beta^2 + |\mathbf{r}'|^2} \left(c_0\beta^2 - (\bar{d}_3 - g(t))^2 (|\mathbf{r}'|^2 + \epsilon^2\beta^2 + \epsilon^2\gamma^2) \right)^{1/2}, \\ \bar{A} &= \bar{d}_1 - \left(\frac{\epsilon^2\beta^2\gamma}{\epsilon^2\beta^2|\mathbf{r}'| + |\mathbf{r}'|^3} - \frac{\epsilon\gamma}{|\mathbf{r}'|} \right) (\bar{d}_3 - g(t)) \\ &\quad \pm \frac{\epsilon\beta}{\epsilon^2\beta^2 + |\mathbf{r}'|^2} \left(c_0\beta^2 - (\bar{d}_3 - g(t))^2 (|\mathbf{r}'|^2 + \epsilon^2\beta^2 + \epsilon^2\gamma^2) \right)^{1/2}\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

ii) $\beta = 0, \alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ için (3.14) den $(\bar{d}_1 - \bar{A}) = -\frac{\epsilon\gamma}{|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha}(\bar{d}_3 - \bar{C})$ gelir.

(3.11) ifadesinden $\left(\frac{\epsilon^2\gamma^2}{(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^2} + 1 \right) (\bar{d}_3 - \bar{C})^2 + (\bar{d}_2 - \bar{B})^2 = c_0$; $c_0 = sbt$

bağıntısına ulaşılır. Elde edilen iki ifade birlikte çözüldüğünde ve $\bar{C} = g(t)$ olarak kabul edildiğinde

$$\begin{aligned}\bar{B} &= \bar{d}_2 \pm \frac{1}{|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha} \sqrt{c_0(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^2 - (\epsilon^2\gamma^2 + (|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^2) (\bar{d}_3 - g(t))^2}, \\ \bar{A} &= \bar{d}_1 \pm \frac{\epsilon\gamma}{|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha} (\bar{d}_3 - g(t))\end{aligned}$$

büyükliklerine ulaşılır.

iii) $\gamma = 0, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$ için (3.14) den $(\bar{d}_1 - \bar{A}) = -\frac{\epsilon\beta}{|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha}(\bar{d}_2 - \bar{B})$ gelir.

(3.11) ifadesinden $\left(\frac{\epsilon^2\beta^2}{(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^2} + 1 \right) (\bar{d}_2 - \bar{B})^2 + (\bar{d}_3 - \bar{C})^2 = c_0$; $c_0 = sbt$,

bağıntısına ulaşılır. Elde edilen iki ifade birlikte çözüldüğünde ve $\bar{B} = g(t)$ olarak kabul edildiğinde

$$\begin{aligned}\bar{C} &= \bar{d}_3 \pm \frac{1}{|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha} \sqrt{c_0(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^2 - (\epsilon^2\beta^2 + (|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^2) (\bar{d}_2 - g(t))^2}, \\ \bar{A} &= \bar{d}_1 \pm \frac{\epsilon\beta}{|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha} (\bar{d}_2 - g(t))\end{aligned}$$

büyükliklerine ulaşılır.

4. $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ ve $\gamma \neq 0$ için (3.14) denkleminde

$$(\bar{d}_2 - \bar{B}) = -\frac{\gamma}{\beta}(\bar{d}_3 - g(t)) - \frac{|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha}{\epsilon\beta}(\bar{d}_1 - \bar{A}) \quad \text{elde edilir. } \bar{C} = g(t) \text{ iken}$$

(3.11) den $(\bar{d}_1 - \bar{A})^2 + (\bar{d}_2 - \bar{B}) = \emptyset - (\bar{d}_3 - g(t))^2; c_0 = sbt$, sonucuna ulaşılır.

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \bar{d}_2 + \frac{\epsilon^2\beta\gamma}{(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^2 + \epsilon^2\beta^2}(\bar{d}_3 - g(t)) \\ &\quad \pm \frac{|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha}{(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^2 + \epsilon^2\beta^2} \left(-(\bar{d}_3 - g(t))^2 \left[\frac{\epsilon^2\beta^2(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^2 + c_0[\beta^2 + (|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha\beta)^2]}{\epsilon^2\beta^2 + \epsilon^2\gamma} \right] \right)^{1/2}, \\ \bar{A} &= \bar{d}_1 - \left(\frac{\epsilon^3\beta^2\gamma}{(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^3 + \epsilon^2\beta^2(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)} - \frac{\epsilon\gamma}{(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)} \right) (\bar{d}_3 - g(t)) \\ &\quad \pm \frac{\epsilon\beta}{(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^2 + \epsilon^2\beta^2} \left(-(\bar{d}_3 - g(t))^2 \left(\frac{\epsilon^2\beta^2(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^2 + c_0[\beta^2 + (|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha\beta)^2]}{\epsilon^2\beta^2 + \epsilon^2\gamma} \right) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

değerleri elde edilir.

Sonuç olarak genelleştirilmiş ofset eğrisinin, standart ofset eğrisi olarak ifade edilmesinde kullanılan $A = \epsilon\bar{A}$, $B = \epsilon\bar{B}$ ve $C = \epsilon\bar{C}$ değerleri için sekiz farklı durum mevcut olup bunlara ilişkin irdelemeler sunulmuştur.

3.2. $\mathbb{E}^3$ de Uzay Eğrilerinin Genelleştirilmiş Ofset Eğrilerinin Varyasyonu

Üç boyutlu Öklid uzayında $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{r} + d_1\mathbf{e} + d_2\mathbf{n} + d_3\mathbf{b} = \mathbf{r} + \mathbf{y} \quad (3.15)$$

şeklinde yazılabilir, burada $\{\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ değerleri $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin Serret Frenet çatısı, d_1, d_2 ve d_3 değerleri; s ye bağlı $\bar{d}_i$ ($i = 1, 2, 3$) fonksiyonlarının ve $\mathbf{y}$ vektör alanının ϵ katı,

$$d_1 = \epsilon\bar{d}_1(s), \quad d_2 = \epsilon\bar{d}_2(s), \quad d_3 = \epsilon\bar{d}_3(s), \quad \mathbf{y} = \epsilon\bar{\mathbf{y}}(s)$$

biçimindeki fonksiyonlarıdır. Eğer $\epsilon \rightarrow 0$ ise, $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi $\mathbf{r}(s)$ eğrisi ile özdeş olur.

Genelleştirilmiş ofset eğrisinin

$$s_* = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\mathbf{r}'_*{}^2} ds \quad (3.16)$$

şeklinde verilen yay uzunluğunu ϵ nun kuvvetlerine göre Taylor seri açılımında ϵ na göre lineer olan terim δs ile gösterilirse

$$s_* = s + \delta s + \dots$$

elde edilir. Bu yüzden δs , yay uzunluğunun birinci varyasyonu olarak adlandırılır ve

$$\delta s = \epsilon \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{s_* - s}{\epsilon}$$

biçiminde ifade edilebilir. $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında Serret Frenet formülleri

$$\mathbf{e}' = \kappa \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{e} + \tau \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n} \quad (3.17)$$

şeklindedir. Eşitlik 3.15 ve 3.17 den

$$\mathbf{y}' = \epsilon \bar{\mathbf{y}}' = (d'_1 - d_2 \kappa) \mathbf{e} + (d'_2 + d_1 \kappa - d_3 \tau) \mathbf{n} + (d'_3 + d_2 \tau) \mathbf{b} \quad (3.18)$$

bulunur. Eşitlik 3.15 den $\mathbf{r}(s)$ nin s -yay uzunluğu parametresine göre türevi alındığında

$$\mathbf{r}'_* = \mathbf{r}' + \mathbf{y}'$$

elde edilir. Buradan $\langle (\mathbf{r}' + \mathbf{y}'), (\mathbf{r}' + \mathbf{y}') \rangle$ olarak, ϵ na göre ikinci dereceden terimler terk edilerek

$$\mathbf{r}'_*{}^2 = \mathbf{r}'^2 + 2\mathbf{r}'\mathbf{y}' \quad (3.19)$$

bulunur. $\mathbf{r}' = \mathbf{e}$ ve Eşitlik 3.16, 3.17, 3.19 yardımıyla

$$s_* = s + \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{r}'\mathbf{y}' ds + \dots = s + [d_1]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} \kappa d_2 ds + \dots$$

olarak bulunur. Nihayet, yay uzunluğunun birinci varyasyonu

$$\delta s = [d_1]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} \kappa d_2 ds$$

olarak elde edilir.

Eğer $(\mathbf{r})$ ve $(\mathbf{r}_*)$ eğrileri ortak sınır noktalarına sahipse $[d_1(s_1) = 0 ; d_1(s_2) = 0]$, bu durumda eğrilerin yay-uzunluğunun birinci varyasyonu

$$\delta s = - \int_{s_1}^{s_2} \kappa d_2 ds$$

haline gelir. d_2 yerine δn yazılırsa

$$\delta s = - \int_{s_1}^{s_2} \kappa \delta n ds$$

elde edilir.

$\mathbf{r}$ eğrisinin, $\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisine geçişinde κ eğriliğinin nasıl değiştiği şu şekilde incelenir:

$(\mathbf{r}_*)$ eğrisinin κ_* eğriliği olmak üzere Langrange özdeşliğinden

$$\kappa_* = \frac{\sqrt{\mathbf{r}'_*{}^2 \mathbf{r}''_*{}^2 - (\mathbf{r}'_* \mathbf{r}''_*)^2}}{\left(\sqrt{\mathbf{r}'_*{}^2}\right)^3}, \quad (3.20)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda

$$\mathbf{r}'_*(s) = \mathbf{e}_* = \mathbf{r}' + \mathbf{y}' = \mathbf{e} + \epsilon \bar{\mathbf{y}}' \quad (3.21)$$

olduğundan ve ayrıca Eşitlik 3.18 den $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin birim teğet vektörü

$$\mathbf{r}'_*(s) = \mathbf{e}_* = (1 + d'_1 - d_2 \kappa) \mathbf{e} + (d'_2 + d_1 \kappa - d_3 \tau) \mathbf{n} + (d'_3 + d_2 \tau) \mathbf{b} \quad (3.22)$$

olarak bulunur. O zaman Eşitlik 3.20 den $\mathbf{r}$ orijinal eğri ile $\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisi arasındaki eğrilik ilişkisi

$$\kappa_* = \kappa + \epsilon \left((\bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n}) - 2\kappa(\bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e}) \right) + \dots \quad (3.23)$$

biçiminde bulunur. Burada ϵ nun ikinci dereceden terimleri sıfır olarak alındığından ve

$$\delta\kappa = \epsilon \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\kappa_* - \kappa}{\epsilon}$$

için

$$\delta\kappa = \epsilon \left((\bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n}) - 2\kappa(\bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e}) \right)$$

olarak bulunur. Böylece Eşitlik 3.15, 3.22 ve

$$\mathbf{y}'' = \begin{pmatrix} (d_1'' - 2d_2'\kappa - d_1\kappa^2 + d_2\kappa' + d_3\tau\kappa)\mathbf{e} \\ +(d_2'' + 2d_1'\kappa + d_1\kappa' - d_2\kappa^2 - d_2\tau^2 - 2d_3'\tau - d_3\tau')\mathbf{n} \\ +(d_3'' + d_1\kappa\tau + 2d_2'\tau + d_2\tau' - d_3\tau^2)\mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

denklemlerinden $\mathbf{r}$ orijinal eğrisi ile $\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisi arasındaki eğriliğin birinci varyasyonu

$$\delta\kappa = \epsilon((d_2' - d_3\tau)' - d_3'\tau + d_1\kappa' + d_2\kappa^2 - d_2\tau^2)$$

şeklinde bulunur.

Eğrilik varyasyonuna ilişkin incelemenin ardından aşağıda $\mathbf{r}$ eğrisinin, $\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisine geçişinde τ burulmasının nasıl değiştiği irdelenmiştir.

$(\mathbf{r}_*)$ eğrisinin τ_* burulması olmak üzere,

$$\tau_* = \frac{(\mathbf{r}'_* \times \mathbf{r}''_*) \cdot \mathbf{r}'''_*}{\|\mathbf{r}'_* \times \mathbf{r}''_*\|^2} \quad (3.25)$$

dir. Ayrıca Langrange özdeşliğinden

$$\tau_* = \frac{\sqrt{\mathbf{r}'_*{}^2 \mathbf{r}''_*{}^2 \mathbf{r}'''_*{}^2 - (\mathbf{r}'_* \mathbf{r}''_*)^2 \mathbf{r}'''_*{}^2}}{\mathbf{r}'_*{}^2 \mathbf{r}''_*{}^2 - (\mathbf{r}'_* \mathbf{r}''_*)^2} \quad (3.26)$$

yazılabilir. Eşitlik 3.21 den $\mathbf{r}_*$ eğrisinin ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_*''(s) &= \mathbf{e}' + \epsilon \bar{\mathbf{y}}'' = \kappa \mathbf{n} + \epsilon \bar{\mathbf{y}}'', \\ \mathbf{r}_*'''(s) &= \kappa' \mathbf{n} + \kappa \mathbf{n}' + \epsilon \bar{\mathbf{y}}''' = -\kappa^2 \mathbf{e} + \kappa' \mathbf{n} + \tau \kappa \mathbf{b} + \epsilon \bar{\mathbf{y}}'''\end{aligned}\quad (3.27)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik 3.21 ve 3.27 kullanılıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$(\mathbf{r}_*' \times \mathbf{r}_*'). \mathbf{r}_*''' = \tau \kappa^2 + \epsilon \tau \kappa^2 \bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e} + \epsilon \tau \kappa \bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n} + (\epsilon \kappa \bar{\mathbf{y}}''' - \epsilon \kappa' \bar{\mathbf{y}}'' + \epsilon \kappa^3 \bar{\mathbf{y}}') \mathbf{b}$$

ve

$$\|\mathbf{r}_*' \times \mathbf{r}_*'\|^2 = \kappa^2 + \epsilon (2\kappa \bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n} + 2\kappa^2 \bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e}) \quad (3.28)$$

elde edilir. Burada ϵ nun ikinci dereceden terimleri göz ardı edilmiştir.

Sonuçta, Eşitlik 3.25 de Eşitlik 3.28 denklemleri kullanılarak

$$\tau_* = \tau - \epsilon \tau \bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e} - \epsilon \frac{\tau}{\kappa} \bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n} + \epsilon \left(\frac{1}{\kappa} \bar{\mathbf{y}}''' - \frac{\kappa'}{\kappa^2} \bar{\mathbf{y}}'' + \kappa \bar{\mathbf{y}}' \right) \mathbf{b} + \dots$$

ifadesine ulaşılır. O halde

$$\delta\tau = \epsilon \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\tau_* - \tau}{\epsilon}$$

için

$$\delta\tau = \epsilon \left(-\tau \bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e} - \frac{\tau}{\kappa} \bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n} + \left(\frac{1}{\kappa} \bar{\mathbf{y}}''' - \frac{\kappa'}{\kappa^2} \bar{\mathbf{y}}'' + \kappa \bar{\mathbf{y}}' \right) \mathbf{b} \right)$$

biçiminde yazılabilir. Eşitlik 3.18, 3.24 ve bazı hesaplamalardan sonra $\mathbf{r}$ orijinal eğrisi ile $\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisi arasında burulmanın birinci varyasyonu

$$\delta\tau = \epsilon \left(-\tau d_1' + 2\tau \kappa d_2 + \kappa d_3' + \left(\frac{d_3'' + 2d_2' \tau + d_2 \tau' - d_3 \tau^2 - d_1 \kappa \tau}{\kappa} \right)' \right)$$

olarak ifade edilebilir.

3.3. Uygulamalar

Örnek 3.3.1. Helis için Genelleştirilmiş Ofset Eğri Denklemi

$M \in \mathbb{R}^3$ eğrisi, $a, b \in \mathbb{R}$ birer sabit olmak üzere silindirik helis denklemi ve Serret Frenet çatısı

$$\mathbf{r}(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c} s \right), \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{e} = \left(-\frac{a}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c} \right), \mathbf{n} = \left(-\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right) \text{ ve}$$

$\mathbf{b} = \left(\frac{b}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{b}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \right)$ şeklindedir. $\mathbf{r}(s)$ silindirik helis eğrisi için değişken ofset mesafesi ve yönüne sahip $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi,

$$\mathbf{r}_* = \begin{pmatrix} (a - d_2) \cos\left(\frac{s}{c}\right) + \left(d_3 \frac{b}{c} - d_1 \frac{a}{c}\right) \sin\left(\frac{s}{c}\right), \\ (a - d_2) \sin\left(\frac{s}{c}\right) + \left(d_1 \frac{a}{c} - d_3 \frac{b}{c}\right) \cos\left(\frac{s}{c}\right), \\ \frac{b}{c} s + \left(d_1 \frac{b}{c} + d_3 \frac{a}{c}\right) \end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilir.

Örnek 3.3.2. İnvolüt (Basıt) Eğrisi için Genelleştirilmiş Ofset Eğri Denklemi

$\mathbf{r}(s)$ birim hızlı eğrisinin involüt eğri denklemi ve çatı vektör elemanları

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(s) + (c - s)\mathbf{T}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}_i = \frac{-\kappa \mathbf{e} + \tau \mathbf{b}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \quad \mathbf{b}_i = \frac{\tau \mathbf{e} + \kappa \mathbf{b}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

şeklinde olup $\mathbf{r}_i(s)$ involüt eğrisinin $\mathbf{r}_{i*}(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi

$$\mathbf{r}_{i*}(s) = \mathbf{r}_i(s) + d_1(s)\mathbf{e}_i + d_2(s)\mathbf{n}_i + d_3(s)\mathbf{b}_i$$

biçiminde tanımlanır. $\mathbf{r}_{i*}$ eğrisinin $\mathbf{r}$ orijinal eğrisinin vektör elemanları cinsinden ifadesi,

$$\mathbf{r}_{i*} = \mathbf{r} + \left(c - s - \frac{d_2 \kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} + \frac{d_3 \tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right) \mathbf{e} + d_1 \mathbf{n} + \left(\frac{d_2 \tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} + \frac{d_3 \kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right) \mathbf{b}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.3.3. Evolüt (Mebcut) Eğrisi için Genelleştirilmiş Ofset Eğri Denklemi

$\mathbf{r}(s)$ birim hızlı eğrisinin evolüt eğrisi ve Serret-Frenet vektörleri,

$$\mathbf{r}_e(s) = \mathbf{r}(s) + \rho \mathbf{n} - \rho \tan(\psi + c) \mathbf{b}, \quad \rho = \frac{1}{\kappa}, \quad \psi = \int \tau ds, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{e}_e = \cos(\psi + c) \mathbf{n} - \sin(\psi + c) \mathbf{b}, \quad \mathbf{n}_e = -\mathbf{e}, \quad \mathbf{b}_e = \cos(\psi + c) \mathbf{b} + \sin(\psi + c) \mathbf{n}$$

biçimindedir. $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin $\mathbf{r}_e(s)$ evolüt eğrisine ait genelleştirilmiş ofset eğrisi

$$\mathbf{r}_{e_*}(s) = \mathbf{r}_e(s) + d_1(s) \mathbf{e}_e + d_2(s) \mathbf{n}_e + d_3(s) \mathbf{b}_e$$

şeklinde yazılır. $\mathbf{r}_{e_*}$ eğrisinin $\mathbf{r}$ orijinal eğrisinin vektör elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{e_*} = \mathbf{r} - d_2 \mathbf{e} + (R + d_1 \cos(\psi + c) + d_3 \sin(\psi + c)) \mathbf{n} \\ + (d_3 \cos(\psi + c) - R \tan(\psi + c) - d_1 \sin(\psi + c)) \mathbf{b} \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

Örnek 3.3.4. $\mathbf{r}(s) = \left(5 \cos\left(\frac{s}{13}\right), 5 \sin\left(\frac{s}{13}\right), \frac{12}{13}s\right)$ helis eğrisinin Serret Frenet çatısı

$$\mathbf{e} = \left(-\frac{5}{13} \sin\left(\frac{s}{13}\right), \frac{5}{13} \cos\left(\frac{s}{13}\right), \frac{12}{13}\right), \quad \mathbf{n} = \left(-\cos\left(\frac{s}{13}\right), -\sin\left(\frac{s}{13}\right), 0\right),$$

$$\mathbf{b} = \left(\frac{12}{13} \sin\left(\frac{s}{13}\right), -\frac{12}{13} \cos\left(\frac{s}{13}\right), \frac{5}{13}\right)$$

şeklindedir. $d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \frac{13}{5} \epsilon$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = \epsilon$, $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = \frac{13}{12} \epsilon$ olarak alındığında, genelleştirilmiş ofset eğri denklemi;

$$\mathbf{r}_*(s) = \left(5 \cos \frac{s}{13}, 5 \sin \frac{s}{13}, \frac{12}{13}s\right) + \epsilon \left(-\cos \frac{s}{13}, -\sin \frac{s}{13}, \frac{169}{60}\right)$$

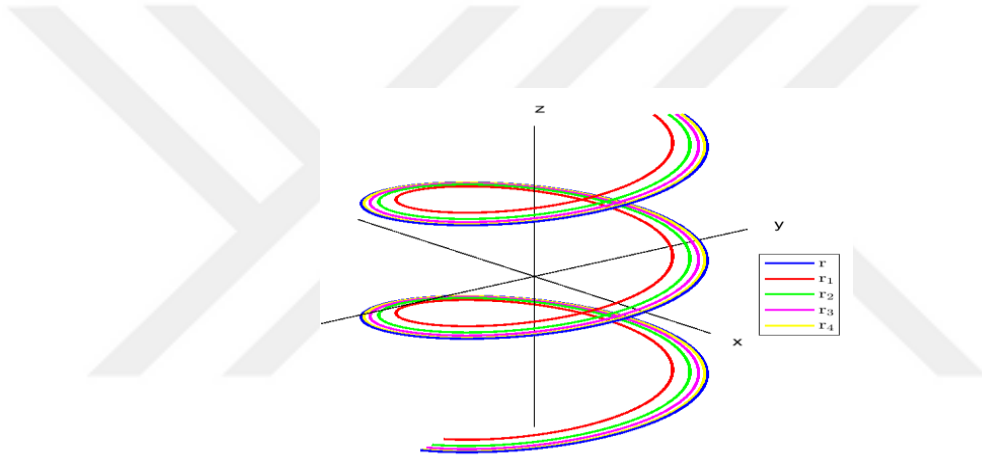
olarak bulunur. Helis eğrisinin, ϵ nun farklı değerleri için elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri ile ilişkisi Şekil 3.1 de verilmiştir.

Örnek 3.3.5. $\mathbf{r}(s) = \left(3 \cos \frac{s}{5}, 3 \sin \frac{s}{5}, \frac{4}{5}s\right)$ helisinin $\mathbf{e} = \left(-\frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \cos \left(\frac{s}{5}\right), \frac{4}{5}\right)$,

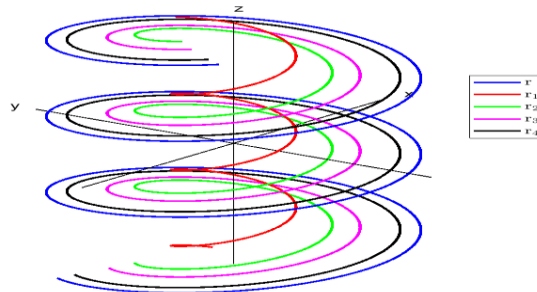
$\mathbf{n} = \left(-\cos \frac{s}{5}, -\sin \left(\frac{s}{5}\right), 0\right)$ ve $\mathbf{b} = \left(\frac{4}{5} \sin \left(\frac{s}{5}\right), -\frac{4}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{3}{5}\right)$ baz vektörleridir.
 $d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \frac{1}{3}\epsilon$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = 3\epsilon$, $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = \frac{3}{2}\epsilon$ için $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi;

$$\mathbf{r}_*(s) = \left(3 \cos \left(\frac{s}{5}\right), 3 \sin \left(\frac{s}{5}\right), \frac{4}{5} s\right) + \epsilon \left(\sin \left(\frac{s}{5}\right) - 3 \cos \left(\frac{s}{5}\right), -3 \sin \left(\frac{s}{5}\right) - \cos \left(\frac{s}{5}\right), \frac{7}{6}\right)$$

biçimindedir. ϵ nun farklı değerleri için helis eğrisi ve onun genelleştirilmiş ofsetleri Şekil 3.2 de gösterilmiştir.



Şekil 3.1. $\mathbf{r}$ helis eğrisi (mavi); $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için $\mathbf{r}_3$ (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{13}$ için $\mathbf{r}_4$ (sarı).



Şekil 3.2. $\mathbf{r}$ helis eğrisi (mavi); $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{3}$ için $\mathbf{r}_3$ (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{9}$ için $\mathbf{r}_4$ (siyah).

Örnek 3.3.6. $\mathbf{r}(t) = (\cos 3t, \sin 3t, 5t)$ eğrisinin $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{34}}(-3 \sin 3t, 3 \cos 3t, 5)$

$\mathbf{n} = (-\cos 3t, -\sin 3t, 0)$, $\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{34}}(5 \sin 3t, -5 \cos 3t, 3)$ Serret Frenet vektör

alanlarıdır. $\mathbf{r}(t)$ eğrisinin $\mathbf{r}_i(t)$ involüt eğrisi ve onun Serret Frenet çatısı

$$\mathbf{r}_i(t) = (\cos 3t + 3t \sin 3t, \sin 3t - 3t \cos 3t, 0),$$

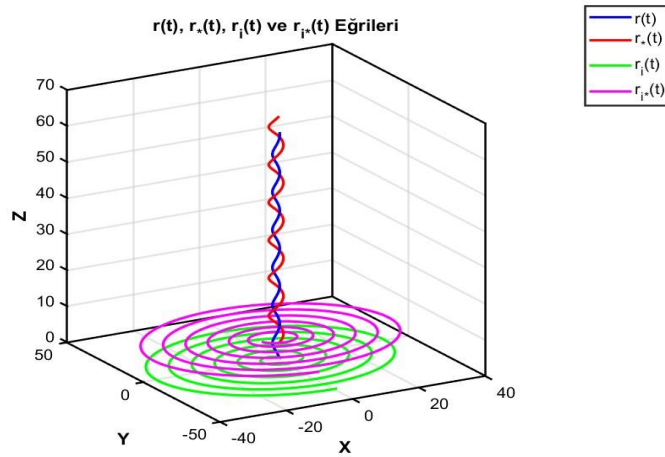
$$\mathbf{e}_i = (-\cos 3t, -\sin 3t, 0), \mathbf{n}_i = (\sin 3t, -\cos 3t, 0), \mathbf{b}_i = (0, 0, 1)$$

şeklindedir. $\mathbf{r}(t)$ ve $\mathbf{r}_i(t)$ nin farklı ofset mesafelerindeki genelleştirilmiş ofset eğrileri aşağıdaki gibi bulunmuştur. Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 de grafikleri verilmiştir.

a) $\epsilon = 1$ için $d_1 = \sqrt{34}$, $d_2 = 1$ ve $d_3 = \sqrt{34}$ olmak üzere $\mathbf{r}(t)$ nin genelleştirilmiş ofseti $\mathbf{r}_*(t)$ ve $\mathbf{r}_i(t)$ involüt eğrisinin genelleştirilmiş ofseti $\mathbf{r}_{i*}(t)$ nin denklemleri sırasıyla $\mathbf{r}_*(t) = (2 \sin 3t, -2 \cos 3t, 5t + 5)$ ve

$$\mathbf{r}_{i*}(t) = ((1 - \sqrt{34}) \cos 3t + (3t + 1) \sin 3t, -(3t + 1) \cos 3t + (1 - \sqrt{34}) \sin 3t, \sqrt{34})$$

biçiminde elde edilir.

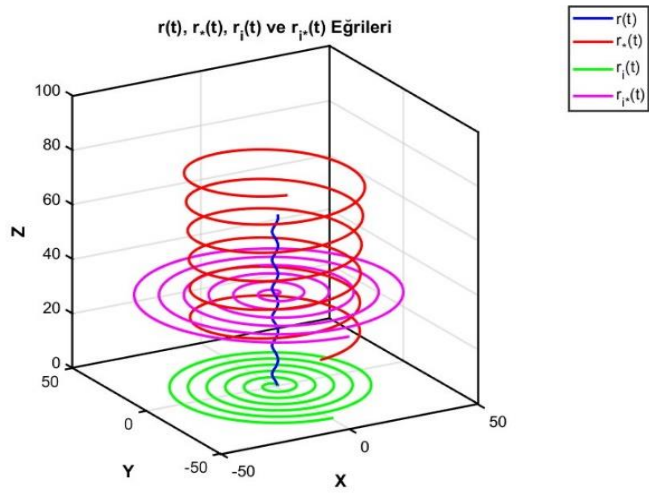


Şekil 3.3. $\mathbf{r}$ orijinal eğri (mavi) ve $\mathbf{r}_*$ onun genelleştirilmiş ofset eğrisi (kırmızı), $\mathbf{r}_i$ involüt eğri (yeşil) ve onun $\mathbf{r}_{i*}$ genelleştirilmiş ofset eğrisi (mor).

b) $\epsilon = 1$ için $d_1 = 1$, $d_2 = t$ ve $d_3 = 34$ olmak üzere $\mathbf{r}(t)$ eğrisinin $\mathbf{r}_*(t)$ genelleştirilmiş ofseti ve $\mathbf{r}_i(t)$ involüt eğrisinin $\mathbf{r}_{i*}(t)$ genelleştirilmiş ofseti sırayla;

$$\mathbf{r}_*(t) = \left((1-t) \cos 3t + \frac{167}{\sqrt{34}} \sin 3t, (1-t) \sin 3t - \frac{167}{\sqrt{34}} \cos 3t, 5t + \frac{107}{\sqrt{34}} \right),$$

$$\mathbf{r}_{i*}(t) = (4t \sin 3t, -4t \cos 3t, 34).$$



Şekil 3.4. $\mathbf{r}$ orijinal eğri (mavi) ve $\mathbf{r}_*$ onun genelleştirilmiş ofset eğrisi (kırmızı), $\mathbf{r}_i$ involüt eğri (yeşil) ve onun $\mathbf{r}_{i*}$ genelleştirilmiş ofset eğrisi (mor).

4. MINKOWSKI UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ OFSET EĞRİLERİ VE VARYASYONLARI

Çalışmamızın bu bölümünde $\mathbb{E}_1^2$ Minkowski düzleminde ve $\mathbb{E}_1^3$ üç boyutlu Minkowski uzayında, sırayla düzlem eğrilerinin ve uzay eğrilerinin genelleştirilmiş ofset eğrileri tanımlanmış ve geometrik özellikleri ifade edilmiştir. Ardından orijinal eğriler ile genelleştirilmiş ofset eğrileri arasındaki değişimleri ortaya koyan yay uzunluğu, eğrilik ve burulma fonksiyonlarına ilişkin varyasyon hesaplamaları sunulmuştur. Son olarak özel örnekler grafikleriyle birlikte verilmiştir.

4.1. $\mathbb{E}_1^2$ de Düzlem Eğrilerinin Genelleştirilmiş Ofset Eğrileri

$\mathbb{E}_1^2$ Minkowski düzleminde null olmayan regüler bir eğriyi; $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ gösterimiyle ele aldığımızda yay uzunluğu parametresine göre Serret-Frenet türev formülleri

$$\frac{de}{ds} = \kappa \mathbf{n}, \quad \frac{dn}{ds} = \kappa \mathbf{e} \quad (4.1)$$

şeklinde olup;

$\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle > 0$ veya $\mathbf{e} = 0$ ise α eğrisine uzay benzeri eğri,

$\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle < 0$ ise α eğrisine zaman benzeri eğri,

$\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = 0$ ve $\mathbf{e} \neq 0$ ise α eğrisine null eğri

denir (O'Neill, 1983). Burada $\mathbf{e}, \mathbf{n}$ ve κ sırasıyla $\mathbf{r}(t)$ eğrisinin birim teğet vektörü, birim normal vektörü ve eğriliğidir, ayrıca $\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'|$ dür.

Minkowski uzayında düzlemin birim normal vektörü olan $\mathbf{z}$ vektörü ve eğrinin eğriliği sırasıyla

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{e} \times \mathbf{z} = -\sigma \mathbf{n}, \quad \mathbf{z} \times \mathbf{n} = \sigma \mathbf{e}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{e} = -\mathbf{z}, \quad \mathbf{e} \times \mathbf{n} = \mathbf{z},$$

$$\kappa = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{z}}{|\mathbf{r}'|^3} \quad (4.2)$$

biçiminde ifade edilebilir (Couto ve Lymberopoulos, 2021), burada $\langle e, e \rangle = \sigma$ ve $\langle n, n \rangle = -\sigma$ olup $\sigma = \pm 1$ dir.

Tanım.4.1.1. $\mathbb{E}_1^2$ Minkowski düzleminde $\mathbf{r}(t)$ null olmayan düzgün parametrik ($t \in [0,1]$) düzlem eğrisinin, $\mathbf{r}_*(t)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi değişken ofset mesafesi ve yönü ile

$$\mathbf{r}_*(t) = \mathbf{r}(t) + d_1(t)\mathbf{e} + d_2(t)\mathbf{n} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır, burada $d_1(t)$ ve $d_2(t)$ değerleri t nin birer fonksiyonudur. Ofset yönü ve mesafesi $d_1(t)\mathbf{e}$ ve $d_2(t)\mathbf{n}$ kullanılarak belirlenir.

Genelleştirilmiş ofset eğrisinin ϵ komşuluk yaklaşımlı ifadesi

$$\mathbf{r}_*(t) = \mathbf{r}(t) + \epsilon \bar{d}_1(t)\mathbf{e} + \epsilon \bar{d}_2(t)\mathbf{n} \quad (4.4)$$

biçimindedir, burada $d_1(t) = \epsilon \bar{d}_1(t)$ ve $d_2(t) = \epsilon \bar{d}_2(t)$ olup ofset mesafesi $\epsilon \sqrt{|\sigma \bar{d}_1(t)^2 - \sigma \bar{d}_2(t)^2|}$ dir.

$\mathbf{r}_*(t)$ eğrisinin parametrik türevi ve normu;

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_* &= \mathbf{r}' + \epsilon (\bar{d}'_1 \mathbf{e} + \bar{d}_1 \mathbf{e}' + \bar{d}'_2 \mathbf{n} + \bar{d}_2 \mathbf{n}') \\ &= |\mathbf{r}'| \mathbf{e} + \epsilon \left((\bar{d}'_1 + \bar{d}_2 \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{e} + (\bar{d}'_2 + \bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{n} \right) \\ &= |\mathbf{r}'| \mathbf{e} + \epsilon (\alpha \mathbf{e} + \beta \mathbf{n}), \\ |\mathbf{r}'_*| &= \sqrt{\sigma |\mathbf{r}'|^2 + \sigma \epsilon^2 (\alpha^2 - \beta^2) + 2\sigma \epsilon \alpha |\mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (4.5)$$

hesaplandığında, $\mathbf{r}'_*$ vektörünün parametrik türevinden

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''_* &= |\mathbf{r}'| \mathbf{e}' + \epsilon (\alpha' \mathbf{e} + \alpha \mathbf{e}' + \beta' \mathbf{n} + \beta \mathbf{n}') \\ &= |\mathbf{r}'|^2 \kappa \mathbf{n} + \epsilon ((\alpha' + \beta \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{e} + (\beta' + \alpha \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

olur. Burada $\alpha = \bar{d}'_1 + \bar{d}_2 \kappa |\mathbf{r}'|$, $\beta = \bar{d}'_2 + \bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'|$ dir.

$\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin etken karakteri için $|\mathbf{r}'_*(t)| = \sqrt{|\langle \mathbf{r}'_*, \mathbf{r}'_* \rangle|}$ ve

$\mathbf{r}'_*(t) = \left((|\mathbf{r}'| + \epsilon \bar{d}'_1 + \epsilon \bar{d}_2 \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{e} + (\epsilon \bar{d}'_2 + \epsilon \bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{n} \right)$ bağıntılarından

$$\langle \mathbf{r}'_*, \mathbf{r}'_* \rangle = \sigma \left(|\mathbf{r}'| + \epsilon \bar{d}'_1 + \epsilon \bar{d}_2 \kappa |\mathbf{r}'| \right)^2 - \sigma \left(\epsilon \bar{d}'_2 + \epsilon \bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'| \right) = \Gamma$$

elde edilir. Bu durumda

$\Gamma > 0$ veya $|\mathbf{r}'| \mathbf{e} + \epsilon(\alpha \mathbf{e} + \beta \mathbf{n}) = 0$ ise $\mathbf{r}_*$ eğrisi uzay benzeri eğri,

$\Gamma < 0$ ise $\mathbf{r}_*$ eğrisi zaman benzeri eğri,

$\Gamma = 0$ ise $\mathbf{r}_*$ eğrisi null eğridir.

Sonuç olarak, Eşitlik 4.2 ve 4.5 den $\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin Serret Frenet çatı elemanları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_* &= \frac{|\mathbf{r}'| \mathbf{e} + \epsilon(\alpha \mathbf{e} + \beta \mathbf{n})}{\sqrt{\sigma |\mathbf{r}'|^2 + \sigma \epsilon^2 (\alpha^2 - \beta^2) + 2\sigma \epsilon \alpha |\mathbf{r}'|}}, \\ \mathbf{n}_* &= \frac{|\mathbf{r}'| \mathbf{n} + \epsilon(\alpha \mathbf{n} + \beta \mathbf{e})}{\sqrt{\sigma |\mathbf{r}'|^2 + \sigma \epsilon^2 (\alpha^2 - \beta^2) + 2\sigma \epsilon \alpha |\mathbf{r}'|}}, \\ \kappa_* &= \frac{(|\mathbf{r}'| + \epsilon \alpha)(\beta' + \alpha \kappa |\mathbf{r}'| + \kappa |\mathbf{r}'|^2) - \epsilon \beta (\epsilon \alpha' + \epsilon \beta \kappa |\mathbf{r}'|)}{(\sigma |\mathbf{r}'|^2 + \sigma \epsilon^2 (\alpha^2 - \beta^2) + 2\sigma \epsilon \alpha |\mathbf{r}'|)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Teorem 4.1.1. $\mathbf{r}_*(t) = \mathbf{r}(t) + d_1(t) \mathbf{e} + d_2(t) \mathbf{n}$ ile verilen genelleştirilmiş ofset eğrisi

$$\mathbf{r}_*(t) = \mathbf{r}_1(t) + d \mathbf{n}_1$$

bağıntısı ile Lorentz düzleminde standart ofset eğrisi olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{r}_1, \mathbb{E}_1^2$ de düzgün parametrik düzlem eğrisi, d sabit ofset mesafesi ve $\mathbf{n}_1$ ise $\mathbf{r}_1$ eğrisinin asal birim normal vektörüdür.

İspat: Genelleştirilmiş ofset eğrisi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_* &= \mathbf{r} + d_1 \mathbf{e} + d_2 \mathbf{n} \\ &= \mathbf{r} + A \mathbf{e} + B \mathbf{n} + (d_1 - A) \mathbf{e} + (d_2 - B) \mathbf{n} \\ &\triangleq \mathbf{r}_1 + d \mathbf{n}_1 \end{aligned} \tag{4.7}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, $d_1 = \epsilon \bar{d}_1, d_2 = \epsilon \bar{d}_2, A = \epsilon \bar{A}, B = \epsilon \bar{B}$ değerleri t nin birer fonksiyonudur ve ayrıca;

$$d = \epsilon \sqrt{\left| \sigma(\bar{d}_1 - \bar{A})^2 - \sigma(\bar{d}_2 - \bar{B})^2 \right|} = \epsilon \bar{d},$$

$$\mathbf{n}_1 = \epsilon \left(\frac{(\bar{d}_1 - \bar{A})}{d} \mathbf{e} + \frac{(\bar{d}_2 - \bar{B})}{d} \mathbf{n} \right) \quad (4.8)$$

olup burada,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}' + \epsilon \left(\bar{A}' \mathbf{e} + \bar{A} \mathbf{e}' + \bar{B}' \mathbf{n} + \bar{B} \mathbf{n}' \right) \\ &= |\mathbf{r}'| \mathbf{e} + \epsilon \left((\bar{A}' + \bar{B} \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{e} + (\bar{B}' + \bar{A} \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{n} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

bağıntısı yazılabilir. Aşağıda yer alan iki denklem Eşitlik 4.7 deki ilişkiyi doğrulayabilmek için sağlanmak zorundadır:

i. $\langle d\mathbf{n}_1, \mathbf{r}'_1 \rangle = 0$, diğer bir deyişle,

$$\epsilon \sigma(\bar{d}_1 - \bar{A}) \left(|\mathbf{r}'| + \epsilon (\bar{A}' + \sigma \bar{B} \kappa |\mathbf{r}'|) \right) - \epsilon^2 \sigma(\bar{d}_2 - \bar{B}) (\bar{B}' + \bar{A} \kappa |\mathbf{r}'|) = 0 \quad (4.10)$$

ii. $\epsilon^2 \left| \sigma(\bar{d}_1 - \bar{A})^2 - \sigma(\bar{d}_2 - \bar{B})^2 \right| = c, c \in \mathbb{R}$. Buradan

$$\epsilon^2 \left(\sigma(\bar{d}_1 - \bar{A})(\bar{d}_1' - \bar{A}') - \sigma(\bar{d}_2 - \bar{B})(\bar{d}_2' - \bar{B}') \right) = 0 \quad (4.11)$$

elde edilir. $A = \epsilon \bar{A}$ ve $B = \epsilon \bar{B}$ değerleri (4.10) ve (4.11) denklemleri kullanılarak elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \sigma \left(\epsilon |\mathbf{r}'| + \epsilon^2 (\bar{d}_1' + \bar{d}_2 \kappa |\mathbf{r}'|) \right) \bar{A} &= \sigma \epsilon^2 (\bar{d}_2' + \bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'|) \bar{B} \\ &+ \sigma \left[\epsilon \bar{d}_1 |\mathbf{r}'| + \epsilon^2 (\bar{d}_1' \bar{d}_1 - \bar{d}_2' \bar{d}_2) \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

bağıntısı elde edilir. Bunlara ilave olarak $\alpha = \bar{d}_1' + \bar{d}_2 \kappa |\mathbf{r}'|$, $\beta = \bar{d}_2' + \bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'|$ den

$$\epsilon \bar{d}_1 |\mathbf{r}'| + \epsilon^2 (\bar{d}_1' \bar{d}_1 - \bar{d}_2' \bar{d}_2) = \epsilon \bar{d}_1 |\mathbf{r}'| + \epsilon^2 (\bar{d}_1 \alpha - \bar{d}_2 \beta) \quad (4.13)$$

eşitliği yazılır, ve

$$\sigma \epsilon \left((\bar{d}_1 - \bar{A}) |\mathbf{r}'| + \epsilon \alpha (\bar{d}_1 - \bar{A}) - \epsilon \beta (\bar{d}_2 - \bar{B}) \right) = 0 \quad (4.14)$$

olur. Eğer $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ olursa $A = \epsilon \bar{A}$ ve $B = \epsilon \bar{B}$ değerleri, (4.11) ve (4.14) denklemlerinden

$$\bar{A} = \bar{d}_1 \pm \frac{c_0 \beta}{\sqrt{\epsilon^2 \beta^2 - |\mathbf{r}'|^2 - 2\epsilon \alpha |\mathbf{r}'| + \epsilon^2 \alpha^2}},$$

$$\bar{B} = \bar{d}_2 \pm \frac{c_0 (|\mathbf{r}'| + \epsilon \alpha)}{\sqrt{\epsilon^2 \beta^2 - |\mathbf{r}'|^2 - 2\epsilon \alpha |\mathbf{r}'| + \epsilon^2 \alpha^2}}$$

olarak belirlenir. Burada " c_0 " herhangi bir reel sabittir.

4.2. $\mathbb{E}_1^2$ de Düzlem Eğrilerinin Genelleştirilmiş Ofset Eğrilerinin Varyasyonu

$\mathbf{r}_*(s) = \mathbf{r}(s) + d_1(s)\mathbf{e} + d_2(s)\mathbf{n}$ genelleştirilmiş ofset eğrisi

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{r} + d_1 \mathbf{e} + d_2 \mathbf{n} = \mathbf{r} + \mathbf{y} \quad (4.15)$$

şeklinde yazılabilir, burada $\{\mathbf{e}, \mathbf{n}\}$ değerleri $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin Serret Frenet çatısı, d_1 ve d_2 değerleri s ye bağlı $\bar{d}_1$ ve $\bar{d}_2$ fonksiyonlarının ϵ katı olarak

$$d_1 = \epsilon \bar{d}_1(s), \quad d_2 = \epsilon \bar{d}_2(s), \quad \mathbf{y} = \epsilon \bar{\mathbf{y}}(s)$$

şeklinde verilir. Eğer $\epsilon \rightarrow 0$ ise, o zaman $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi $\mathbf{r}(s)$ eğrisi ile özdeş olur.

Genelleştirilmiş ofset eğrisinin

$$s_* = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{|\mathbf{r}'_*|^2} ds \quad (4.16)$$

şeklinde verilen yay uzunluğu, ϵ nun kuvvetlerine göre seriye açılır ve bu açılımda ϵ na göre lineer olan terim δs ile gösterilirse

$$s_* = s + \delta s + \dots \quad (4.17)$$

denklemine ulaşılır. Bu yüzden δs , yay uzunluğunun birinci varyasyonu olarak adlandırılır ve

$$\delta s = \epsilon \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{s_* - s}{\epsilon}$$

biçiminde ifade edilir. Eşitlik 4.15 ve $\mathbf{e}' = \kappa \mathbf{n}$, $\mathbf{n}' = \kappa \mathbf{e}$ formüllerinden

$$\mathbf{y}' = \epsilon \bar{\mathbf{y}}' = (d'_1 + d_2 \kappa) \mathbf{e} + (d'_2 + d_1 \kappa) \mathbf{n} \quad (4.18)$$

bulunur. Eşitlik 4.15 den $\mathbf{r}_*(s)$ nin s -yay uzunluğu parametresine göre türevi ve skaler çarpımı alınıp ϵ na göre ikinci dereceden terimleri göz ardı edilirse

$$\mathbf{r}'_*{}^2 = \mathbf{r}^2 + 2\mathbf{r}'\mathbf{y}' \quad (4.19)$$

bulunur. Eşitlik 4.17, 4.18 ve $\mathbf{e}' = \kappa \mathbf{n}$, $\mathbf{n}' = \kappa \mathbf{e}$, $\mathbf{r}' = \mathbf{e}$ bağıntıları yardımıyla

$$s_* = s + \sigma \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{r}'\mathbf{y}' ds + \dots = s + \sigma [d_1]_{s_1}^{s_2} + \sigma \int_{s_1}^{s_2} \kappa d_2 ds + \dots$$

bulunur. Nihayet, yay uzunluğunun birinci varyasyonu

$$\delta s = \sigma [d_1]_{s_1}^{s_2} + \sigma \int_{s_1}^{s_2} \kappa d_2 ds$$

olarak elde edilir. $(\mathbf{r})$ ve $(\mathbf{r}_*)$ eğrileri ortak sınır noktalarına sahipse $[d_1(s_1) = 0 ; d_1(s_2) = 0]$, bu durumda eğrilerin yay uzunluğunun birinci varyasyonu

$$\delta s = \sigma \int_{s_1}^{s_2} \kappa d_2 ds$$

haline gelir. d_2 yerine δn yazılırsa

$$\delta s = \sigma \int_{s_1}^{s_2} \kappa \delta n ds$$

elde edilir.

$\mathbf{r}(s)$ orijinal eğrisinin, $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisine geçişinde κ eğriliğinin nasıl değiştiği aşağıdaki gibi analiz edilmiştir:

$(\mathbf{r}_*)$ eğrisinin κ_* eğrilik fonksiyonu Langrange özdeşliğinden

$$\kappa_* = \frac{\sqrt{|\mathbf{r}'_*{}^2 \mathbf{r}''_*{}^2 - (\mathbf{r}'_* \mathbf{r}''_*)^2|}}{\left(\sqrt{|\mathbf{r}'_*{}^2|}\right)^3}, \quad (4.20)$$

şeklinde tanımlıdır. Bu durumda

$$\mathbf{r}'_*(s) = \mathbf{r}' + \mathbf{y}' = \mathbf{e} + \epsilon \bar{\mathbf{y}}'$$

olduğundan ve $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin birim teğet vektörü

$$\mathbf{r}'_*(s) = (1 + d'_1 + d_2 \kappa) \mathbf{e} + (d'_2 + d_1 \kappa) \mathbf{n}$$

olarak bulunur. O zaman Eşitlik 4.20 den $\mathbf{r}$ orijinal eğrisi ile $\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisi arasındaki eğrilik ilişkisi

$$\kappa_* = \left| \sigma \kappa - \epsilon \left((\bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n}) + 2\kappa (\bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e}) \right) \right| + \dots$$

bulunur. Burada ϵ nun ikinci dereceden terimleri göz ardı edilmiştir. Şu halde

$$\delta \kappa = \epsilon \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\kappa_* - \kappa}{\epsilon}$$

için

- i. $\sigma \kappa > \epsilon \bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n} + 2\epsilon \kappa \bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e}$ ve $\sigma = 1$ için $\delta \kappa = -\epsilon (\bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n} + 2\kappa \bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e})$
- ii. $\sigma \kappa < \epsilon \bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n} + 2\epsilon \kappa \bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e}$ ve $\sigma = -1$ için $\delta \kappa = \epsilon (\bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n} + 2\kappa \bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e})$

olarak bulunur. Böylece Eşitlik 4.15, 4.18 den ve

$$\mathbf{y}'' = (d''_1 + 2d'_2 \kappa + d_2 \kappa' + d_1 \kappa^2) \mathbf{e} + (d''_2 + 2d'_1 \kappa + d_1 \kappa' + d_2 \kappa^2) \mathbf{n}$$

denkleminde; $\mathbf{r}$ orijinal eğrisi ile $\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisi arasında eğriliğin birinci varyasyonu

- i. $\sigma \kappa > \epsilon \bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n} + 2\epsilon \kappa \bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e}$ ve $\sigma = 1$ için

$$\delta \kappa = \sigma \epsilon [d''_2 + 4d'_1 \kappa + d_1 \kappa' + 3d_2 \kappa^2]$$
- ii. $\sigma \kappa < \epsilon \bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n} + 2\epsilon \kappa \bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e}$ ve $\sigma = -1$ için

$$\delta\kappa = -\sigma\epsilon[d_2'' + d_1\kappa' - d_2\kappa^2]$$

olarak yazılabilir.

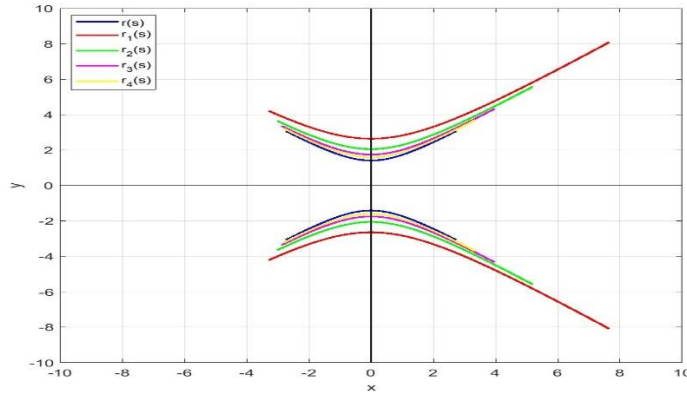
4.3. Uygulamalar

Örnek 4.3.1. $\mathbf{r}(s) = \left(\sqrt{2}\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sqrt{2}\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)$ uzay benzeri eğri için Serret Frenet çatısı; $\mathbf{e} = \left(\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)$ ve $\mathbf{n} = \left(\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)$ şeklindedir.

$d_1 = \epsilon\bar{d}_1 = \epsilon$, $d_2 = \epsilon\bar{d}_2 = \sqrt{2}\epsilon$ ofset mesafeleri için $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi;

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^*(s) = & \left(\sqrt{2}\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sqrt{2}\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) + \epsilon \left(\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ & + \epsilon \left(\sqrt{2}\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sqrt{2}\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)\end{aligned}$$

biçimindedir ve Şekil 4.1, orijinal eğri ile ϵ nun farklı değerleri için elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri arasındaki ilişkiyi göstermektedir.



Şekil 4.1. $\mathbf{r}$ orijinal eğri (mavi); $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için $\mathbf{r}_3$ (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{8}$ için $\mathbf{r}_4$ (sarı).

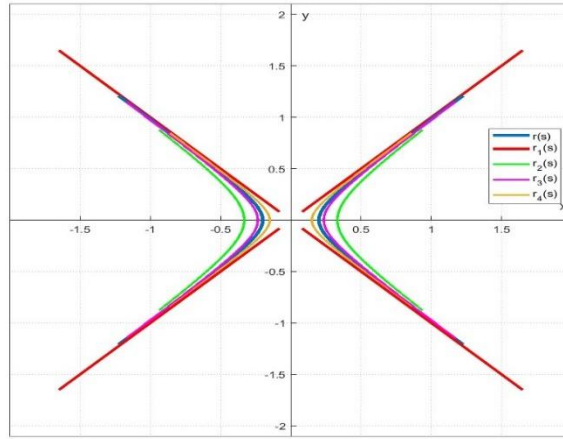
Örnek 4.3.2. $\mathbf{r}(s) = \frac{1}{5}(\cosh(5s - 1), \sinh(5s - 1))$ zaman benzeri eğri için Serret Frenet çatısı;

$\mathbf{e} = (\sinh(5s - 1), \cosh(5s - 1))$ ve $\mathbf{n} = (\cosh(5s - 1), \sinh(5s - 1))$ dir.

Ofset mesafeleri $d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \epsilon$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = \frac{4}{5}\epsilon$ için $\mathbf{r}(s)$ nin genelleştirilmiş ofset eğrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^*(s) = & \left(\frac{1}{5} \cosh(5s - 1), \frac{1}{5} \sinh(5s - 1) \right) + \epsilon (\sinh(5s - 1), \cosh(5s - 1)) \\ & + \epsilon \left(\frac{4}{5} \cosh(5s - 1), \frac{4}{5} \sinh(5s - 1) \right). \end{aligned}$$

ϵ nun farklı değerleri için orijinal eğriden elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri ve orijinal eğri Şekil 4.2 de verilmiştir.



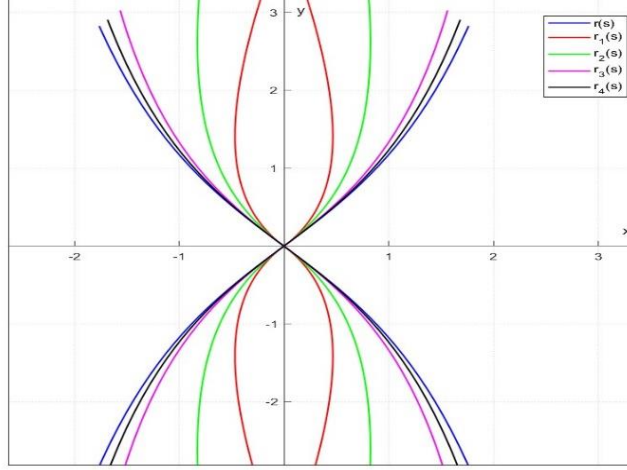
Şekil 4.2. $\mathbf{r}$ orijinal eğri (mavi); $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{20}$ için $\mathbf{r}_3$ (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{80}$ için $\mathbf{r}_4$ (sarı).

Örnek 4.3.3. $\mathbf{r}(s) = (\operatorname{arccosh} s, \sqrt{s^2 - 1})$ zaman benzeri eğri için Serret Frenet çatısı; $\mathbf{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{s^2 - 1}}, \frac{s}{\sqrt{s^2 - 1}} \right)$ ve $\mathbf{n} = \left(-\frac{s}{\sqrt{s^2 - 1}}, -\frac{1}{\sqrt{s^2 - 1}} \right)$ şeklindedir.

Ofset mesafeleri $d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \epsilon \sqrt{s^2 - 1}$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = \epsilon \sqrt{s^2 - 1}$ olarak seçildiğinde, $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi

$$\mathbf{r}^*(s) = (\operatorname{arccosh} s, \sqrt{s^2 - 1}) + \epsilon(1 - s, s - 1)$$

olur ve ϵ nun farklı değerleri için elde edilen eğriler Şekil 4.3 de görülmektedir.



Şekil 4.3. $\mathbf{r}$ orijinal eğri (mavi); $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{10}$ için $\mathbf{r}_3$ (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{25}$ için $\mathbf{r}_4$ (siyah).

4.4. $\mathbb{E}_1^3$ de Uzay Eğrilerinin Genelleştirilmiş Ofset Eğrileri

$\mathbb{E}_1^3$ uzayında bir uzay eğrisini $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ gösterimiyle ele aldığımızda yay uzunluğu parametresine göre Serret Frenet türev formülleri

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = \kappa\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\rho\mu\kappa\mathbf{e} + \tau\mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \rho\tau\mathbf{n} \quad (4.22)$$

şeklinde (Coutu ve Lymberopoulos, 2021), burada $\mathbf{e}$, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ sırasıyla $\mathbf{r}(t)$ eğrisinin birim teğet vektörü, birim normal vektörü ve birim binormal vektörü olup κ ve τ da sırasıyla $\mathbf{r}(t)$ eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır, ayrıca $\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'|$ dir. Diğer taraftan,

$$\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \rho = 1 \text{ veya } \mathbf{e} = 0 \text{ ise } \mathbf{r} \text{ uzay benzeri eğri,}$$

$$\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \rho = -1 \text{ ise } \mathbf{r} \text{ zaman benzeri eğri,}$$

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \mu = \pm 1, \quad \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -\rho\mu = \pm 1$$

olup, bunlar eğrinin etken karakterini ifade eden durumlardır.

Minkowski uzayının indeksi $\nu = 1$ olmak üzere $\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ birim vektörleri, eğrilik ve burulma fonksiyonları,

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}, \quad \rho\mu \mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{e}, \quad \rho\mathbf{e} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}, \quad -\mu\mathbf{n} = \mathbf{e} \times \mathbf{b}$$

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}, \quad \tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2} \quad (4.23)$$

biçiminde ifade edilir (Couto ve Lymberopoulos, 2021).

Tanım 4.4.1. $\mathbf{r}(t)$ düzgün parametrik ($t \in [0,1]$) uzay eğrisinin $\mathbf{r}_*(t)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi değişken ofset mesafesi ve yönü ile

$$\mathbf{r}_*(t) = \mathbf{r}(t) + d_1(t)\mathbf{e} + d_2(t)\mathbf{n} + d_3(t)\mathbf{b} \quad (4.24)$$

şeklinde tanımlanır. $d_1(t)$, $d_2(t)$ ve $d_3(t)$ değerleri t nin birer fonksiyonudur. Ofset yönü ve mesafesi $d_1(t)\mathbf{e}$, $d_2(t)\mathbf{n}$ ve $d_3(t)\mathbf{b}$ kullanılarak belirlenir.

Genelleştirilmiş ofset eğrisinin Eşitlik 4.24 de verilen tanımı

$$\mathbf{r}_*(t) = \mathbf{r}(t) + \epsilon\bar{d}_1(t)\mathbf{e} + \epsilon\bar{d}_2(t)\mathbf{n} + \epsilon\bar{d}_3(t)\mathbf{b} \quad (4.25)$$

olarak ifade edilir. Burada $d_1(t) = \epsilon\bar{d}_1(t)$, $d_2(t) = \epsilon\bar{d}_2(t)$ ve $d_3(t) = \epsilon\bar{d}_3(t)$ eşitliklerinden ofset mesafesi $\epsilon\sqrt{|\rho\bar{d}_1(t)|^2 + \mu\bar{d}_2(t)^2 - \rho\mu\bar{d}_3(t)^2}$ biçimindedir.

$\mathbf{r}_*(t)$ nin parametrik türevleri

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_* &= \mathbf{r}' + \epsilon(\bar{d}'_1\mathbf{e} + \bar{d}_1\mathbf{e}' + \bar{d}'_2\mathbf{n} + \bar{d}_2\mathbf{n}' + \bar{d}'_3\mathbf{b} + \bar{d}_3\mathbf{b}') \\ &= |\mathbf{r}'|\mathbf{e} + \epsilon\left((\bar{d}'_1 - \bar{d}_2\rho\mu\kappa|\mathbf{r}'|)\mathbf{e}\right) + \epsilon\left((\bar{d}'_2 + \bar{d}_1\kappa|\mathbf{r}'| + \bar{d}_3\rho\tau|\mathbf{r}'|)\mathbf{n}\right) \\ &\quad + \epsilon\left((\bar{d}'_3 + \bar{d}_2\tau|\mathbf{r}'|)\mathbf{b}\right) \end{aligned}$$

ve $\alpha = \bar{d}'_1 - \bar{d}_2\rho\mu\kappa|\mathbf{r}'|$, $\beta = \bar{d}'_2 + \bar{d}_1\kappa|\mathbf{r}'| + \bar{d}_3\rho\tau|\mathbf{r}'|$, $\gamma = \bar{d}'_3 + \bar{d}_2\tau|\mathbf{r}'|$ için

$$\mathbf{r}'_* = |\mathbf{r}'|\mathbf{e} + \epsilon(\alpha\mathbf{e} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b}),$$

$$|\mathbf{r}'_*| = \sqrt{\rho|\mathbf{r}'|^2 + \epsilon^2(\rho\alpha^2 + \mu\beta^2 - \rho\mu\gamma^2) + 2\epsilon\rho\alpha|\mathbf{r}'|} \quad (4.26)$$

şeklinde yazılır ve yeniden parametrik türev alınırsa,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_*'' &= |\mathbf{r}'| \mathbf{e}' + \epsilon(\alpha' \mathbf{e} + \alpha \mathbf{e}' + \beta' \mathbf{n} + \beta \mathbf{n}' + \gamma' \mathbf{b} + \gamma \mathbf{b}') \\ &= |\mathbf{r}'|^2 \kappa \mathbf{n} + \epsilon((\alpha' - \beta \rho \mu \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{e} + (\beta' + \alpha \kappa |\mathbf{r}'| + \gamma \rho \tau |\mathbf{r}'|) \mathbf{n} + (\gamma' + \beta \tau |\mathbf{r}'|) \mathbf{b})\end{aligned}$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_*' \times \mathbf{r}_*'' &= -\rho \mu |\mathbf{r}'|^3 \kappa \mathbf{b} + \epsilon \left((-\rho |\mathbf{r}'|^2 \kappa \gamma) \mathbf{e} \right) - \epsilon \left((\mu \gamma' |\mathbf{r}'| + \mu \beta \tau |\mathbf{r}'|^2) \mathbf{n} \right) \\ &\quad - \epsilon [-(\rho \mu \beta' |\mathbf{r}'| + 2 \rho \mu \alpha \kappa |\mathbf{r}'|^2 - \mu \gamma \tau |\mathbf{r}'|^2) \mathbf{b}] \\ &\quad + \epsilon^2 ((\rho \beta \gamma' + \rho \beta^2 \tau |\mathbf{r}'| - \rho \gamma \beta' - \rho \gamma \alpha \kappa |\mathbf{r}'| - \gamma^2 \tau |\mathbf{r}'|) \mathbf{e}) \\ &\quad + \epsilon^2 ((-\mu \alpha \gamma' - \mu \alpha \beta \tau |\mathbf{r}'| + \mu \gamma \alpha' - \rho \gamma \beta \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{n}) \\ &\quad + \epsilon^2 ((-\rho \mu \alpha \beta' - \rho \mu \alpha^2 \kappa |\mathbf{r}'| - \mu \alpha \gamma \tau |\mathbf{r}'| + \rho \mu \beta \alpha' - \beta^2 \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{b})\end{aligned}$$

elde edilirken

$$\mathbf{r}_*' \times \mathbf{r}_*'' = A_1 \mathbf{b} + \epsilon(\bar{B}_1 \mathbf{e} + \bar{B}_2 \mathbf{n} + \bar{B}_3 \mathbf{b}) + \epsilon^2(\bar{C}_1 \mathbf{e} + \bar{C}_2 \mathbf{n} + \bar{C}_3 \mathbf{b}), \quad (4.27)$$

$$|\mathbf{r}_*' \times \mathbf{r}_*''| = \epsilon \sqrt{\rho(\bar{B}_1 + \epsilon \bar{C}_1)^2 + \mu(\bar{B}_2 + \epsilon \bar{C}_2)^2 - \rho \mu \left(\frac{1}{\epsilon} A_1 + \bar{B}_3 + \epsilon \bar{C}_3 \right)^2}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$A_1 = -\rho \mu |\mathbf{r}'|^3 \kappa, \quad \bar{B}_1 = -\rho |\mathbf{r}'|^2 \kappa \gamma, \quad \bar{B}_2 = -\mu \gamma' |\mathbf{r}'| - \mu \beta \tau |\mathbf{r}'|^2,$$

$$\bar{B}_3 = -\rho \mu \beta' |\mathbf{r}'| - 2 \rho \mu \alpha \kappa |\mathbf{r}'|^2 - \mu \gamma \tau |\mathbf{r}'|^2$$

$$\bar{C}_1 = \rho \beta \gamma' + \rho \beta^2 \tau |\mathbf{r}'| - \rho \gamma \beta' - \rho \gamma \alpha \kappa |\mathbf{r}'| - \gamma^2 \tau |\mathbf{r}'|,$$

$$\bar{C}_2 = -\mu \alpha \gamma' - \mu \alpha \beta \tau |\mathbf{r}'| + \mu \gamma \alpha' - \rho \gamma \beta \kappa |\mathbf{r}'|,$$

$$\bar{C}_3 = -\rho \mu \alpha \beta' - \rho \mu \alpha^2 \kappa |\mathbf{r}'| - \mu \alpha \gamma \tau |\mathbf{r}'| + \rho \mu \beta \alpha' - \beta^2 \kappa |\mathbf{r}'| \text{ dir.}$$

$\mathbf{r}_*$ eğrisinin etken karakteri için;

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_*(t) &= (|\mathbf{r}'| + \epsilon \bar{d}_1' - \epsilon \bar{d}_2 \rho \mu \kappa |\mathbf{r}'|) \mathbf{e} + (\epsilon \bar{d}_2' + \epsilon \bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'| + \epsilon \bar{d}_3 \rho \tau |\mathbf{r}'|) \mathbf{n} \\ &\quad + (\epsilon \bar{d}_3' + \epsilon \bar{d}_2 \tau |\mathbf{r}'|) \mathbf{b}\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\langle \mathbf{r}'_*, \mathbf{r}'_* \rangle = \rho \left(|\mathbf{r}'| + \epsilon \bar{d}'_1 - \epsilon \bar{d}_2 \rho \mu \kappa |\mathbf{r}'| \right)^2 + \mu \left(\epsilon \bar{d}'_2 + \epsilon \bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'| + \epsilon \bar{d}_3 \rho \tau |\mathbf{r}'| \right)^2 - \rho \mu \left(\epsilon \bar{d}'_3 + \epsilon \bar{d}_2 \tau |\mathbf{r}'| \right)^2 = \Gamma$$

elde edilir, bu durumda

$$\Gamma > 0 \text{ veya } \left(\begin{aligned} & \left(|\mathbf{r}'| + \epsilon \bar{d}'_1 - \epsilon \bar{d}_2 \rho \mu \kappa |\mathbf{r}'| \right) \mathbf{e} + \\ & \left(\epsilon \bar{d}'_2 + \epsilon \bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'| + \epsilon \bar{d}_3 \rho \tau |\mathbf{r}'| \right) \mathbf{n} + \left(\epsilon \bar{d}'_3 + \epsilon \bar{d}_2 \tau |\mathbf{r}'| \right) \mathbf{b} = 0 \end{aligned} \right) \text{ ise,}$$

$\mathbf{r}_*$ uzay benzeri eğri,

$\Gamma < 0$ olduğunda, $\mathbf{r}_*$ zaman benzeri eğri,

$\Gamma = 0$ ise, $\mathbf{r}_*$ null veya lightlike eğridir.

Sonuç olarak Eşitlik 4.23, 4.26 ve 4.27 den

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_* &= \frac{|\mathbf{r}'| \mathbf{e} + \epsilon (\alpha \mathbf{e} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b})}{\sqrt{\rho |\mathbf{r}'|^2 + \epsilon^2 (\rho \alpha^2 + \mu \beta^2 - \rho \mu \gamma^2) + 2 \epsilon \rho \alpha |\mathbf{r}'|}}, \\ \mathbf{b}_* &= \frac{A_1 \mathbf{b} + \epsilon (\bar{B}_1 \mathbf{e} + \bar{B}_2 \mathbf{n} + \bar{B}_3 \mathbf{b}) + \epsilon^2 (\bar{C}_1 \mathbf{e} + \bar{C}_2 \mathbf{n} + \bar{C}_3 \mathbf{b})}{\epsilon \sqrt{\rho (\bar{B}_1 + \epsilon \bar{C}_1)^2 + \mu (\bar{B}_2 + \epsilon \bar{C}_2)^2 - \rho \mu \left(\frac{1}{\epsilon} A_1 + \bar{B}_3 + \epsilon \bar{C}_3 \right)^2}}, \\ \mathbf{n}_* &= \frac{A_1 |\mathbf{r}'| \mathbf{n} + \epsilon (-\rho \mu A_1 \beta \mathbf{e} + (A_1 \alpha + \bar{B}_3 |\mathbf{r}'|) \mathbf{n} - \rho \bar{B}_2 |\mathbf{r}'| \mathbf{b}) + \epsilon^2 (\rho (\mu \bar{B}_2 \gamma - \mu \bar{B}_3 \beta) \mathbf{e} + (-\bar{B}_1 \gamma + \bar{B}_3 \alpha + \bar{C}_3 |\mathbf{r}'|) \mathbf{n} + \rho (-\bar{B}_1 \beta + \bar{B}_2 \alpha + \bar{C}_2 |\mathbf{r}'|) \mathbf{b}) + \epsilon^3 ((\rho \mu \bar{C}_2 \gamma - \rho \mu \bar{C}_3 \beta) \mathbf{e} + (-\bar{C}_1 \gamma + \bar{C}_3 \alpha) \mathbf{n} + (-\rho \bar{C}_1 \beta + \rho \bar{C}_2 \alpha) \mathbf{b})}{\epsilon \sqrt{(\rho |\mathbf{r}'|^2 + \epsilon^2 (\rho \alpha^2 + \mu \beta^2 - \rho \mu \gamma^2) + 2 \epsilon \rho \alpha |\mathbf{r}'|) \left(\begin{aligned} & \rho (\bar{B}_1 + \epsilon \bar{C}_1)^2 + \mu (\bar{B}_2 + \epsilon \bar{C}_2)^2 \\ & - \rho \mu \left(\frac{1}{\epsilon} A_1 + \bar{B}_3 + \epsilon \bar{C}_3 \right)^2 \end{aligned} \right)}} \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. $\mathbf{r}''_*(t)$ nin bir kez daha türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'''_* &= -\rho \mu |\mathbf{r}'|^3 \kappa^2 \mathbf{e} + |\mathbf{r}'|^2 \kappa' \mathbf{n} + |\mathbf{r}'|^3 \kappa \tau \mathbf{b} \\ &+ \epsilon \left(((\alpha' - \rho \mu \beta \kappa |\mathbf{r}'|)' - \rho \mu \kappa |\mathbf{r}'| (\beta' + \alpha \kappa |\mathbf{r}'| + \rho \gamma \tau |\mathbf{r}'|)) \mathbf{e} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\epsilon \left(((\beta' + \alpha\kappa|\mathbf{r}'| + \rho\gamma\tau|\mathbf{r}'|)' + \kappa|\mathbf{r}'|(\alpha' - \rho\mu\beta\kappa|\mathbf{r}'|)) \right. \\
& \quad \left. + \rho\tau|\mathbf{r}'|(\gamma' + \beta\tau|\mathbf{r}'|))\mathbf{n} \right) \\
& +\epsilon \left(((\gamma' + \beta\tau|\mathbf{r}'|)' + \tau|\mathbf{r}'|(\beta' + \alpha\kappa|\mathbf{r}'| + \rho\gamma\tau|\mathbf{r}'|))\mathbf{b} \right) \quad \text{elde edilir.} \\
& \mathbf{r}_*''' = (M_1 + \epsilon\bar{M}_{11})\mathbf{e} + (M_2 + \epsilon\bar{M}_{22})\mathbf{n} + (M_3 + \epsilon\bar{M}_{33})\mathbf{b} \quad (4.28)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir, burada

$$\begin{aligned}
M_1 &= -\rho\mu|\mathbf{r}'|^3\kappa^2, \quad M_2 = |\mathbf{r}'|^2\kappa', \quad M_3 = |\mathbf{r}'|^3\kappa\tau, \\
\bar{M}_{11} &= (\alpha' - \rho\mu\beta\kappa|\mathbf{r}'|)' - \rho\mu\kappa|\mathbf{r}'|(\beta' + \alpha\kappa|\mathbf{r}'| + \rho\gamma\tau|\mathbf{r}'|), \\
\bar{M}_{22} &= (\beta' + \alpha\kappa|\mathbf{r}'| + \rho\gamma\tau|\mathbf{r}'|)' + \kappa|\mathbf{r}'|(\alpha' - \rho\mu\beta\kappa|\mathbf{r}'|) + \rho\tau|\mathbf{r}'|(\gamma' + \beta\tau|\mathbf{r}'|), \\
\bar{M}_{33} &= (\gamma' + \beta\tau|\mathbf{r}'|)' + \tau|\mathbf{r}'|(\beta' + \alpha\kappa|\mathbf{r}'| + \rho\gamma\tau|\mathbf{r}'|)
\end{aligned}$$

olarak alınmıştır. Eşitlik 4.27 ve 4.28 denklemlerinden

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r}_* \times \mathbf{r}_*'') \cdot \mathbf{r}_*''' &= -\rho\mu A_1 M_3 + \epsilon \left(\rho M_1 \bar{B}_1 + \mu M_2 \bar{B}_2 - \rho\mu(M_3 \bar{B}_3 + A_1 \bar{M}_{33}) \right) \\
&+ \epsilon^2 \left(\rho(M_1 \bar{C}_1 + \bar{B}_1 \bar{M}_{11}) + \mu(M_2 \bar{C}_2 + \bar{B}_2 \bar{M}_{22}) - \rho\mu(M_3 \bar{C}_3 + \bar{B}_3 \bar{M}_{33}) \right) \\
&+ \epsilon^3 (\rho \bar{M}_{11} \bar{C}_1 + \mu \bar{M}_{22} \bar{C}_2 - \rho\mu \bar{M}_{33} \bar{C}_3) \quad (4.29)
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak Eşitlik 4.23, 4.26, 4.27 ve 4.29 kullanılarak $\mathbf{r}_*(t)$ eğrisinin eğrilik ve burulması sırayla;

$$\begin{aligned}
\kappa_* &= \frac{\epsilon \sqrt{\rho(\bar{B}_1 + \epsilon\bar{C}_1)^2 + \mu(\bar{B}_2 + \epsilon\bar{C}_2)^2 - \rho\mu\left(\frac{1}{\epsilon}A_1 + \bar{B}_3 + \epsilon\bar{C}_3\right)^2}}{(\rho|\mathbf{r}'|^2 + \epsilon^2(\rho\alpha^2 + \mu\beta^2 - \rho\mu\gamma^2) + 2\epsilon\rho\alpha|\mathbf{r}'|)^{3/2}}, \\
\tau_* &= \frac{-\rho\mu A_1 M_3 + \epsilon \left(\rho M_1 \bar{B}_1 + \mu M_2 \bar{B}_2 - \rho\mu(M_3 \bar{B}_3 + A_1 \bar{M}_{33}) \right) \\
&+ \epsilon^2 [\rho(M_1 \bar{C}_1 + \bar{B}_1 \bar{M}_{11}) + \mu(M_2 \bar{C}_2 + \bar{B}_2 \bar{M}_{22}) - \rho\mu(M_3 \bar{C}_3 + \bar{B}_3 \bar{M}_{33})] \\
&+ \epsilon^3 (\rho \bar{M}_{11} \bar{C}_1 + \mu \bar{M}_{22} \bar{C}_2 - \rho\mu \bar{M}_{33} \bar{C}_3)}{\epsilon^2 \left(\rho(\bar{B}_1 + \epsilon\bar{C}_1)^2 + \mu(\bar{B}_2 + \epsilon\bar{C}_2)^2 - \rho\mu\left(\frac{A_1}{\epsilon} + \bar{B}_3 + \epsilon\bar{C}_3\right)^2 \right)}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.4.1. Aşağıdaki

$$\bar{d}_2 \bar{d}_2' + \rho \mu \bar{d}_1 \left(\bar{d}_1' + \frac{|\mathbf{r}'|}{\epsilon} \right) - \rho \bar{d}_3 \bar{d}_3' = 0$$

denklemini sağlayan $t_0 \in [0,1]$ varsa ve herhangi bir δ keyfi küçük pozitif sayı için

$$\kappa = \rho \mu \frac{1}{\epsilon \bar{d}_2} + \rho \mu \frac{\bar{d}_1'}{\bar{d}_2 |\mathbf{r}'|} \quad \text{ve} \quad \tau = -\frac{\bar{d}_3'}{\bar{d}_2 |\mathbf{r}'|} \quad \text{öyle ki} \quad |\bar{d}_2| \geq \delta > 0$$

ise, $\mathbf{r}_*(t_0)$ noktası, $\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin düzgün olmayan bir noktasıdır.

İspat:

$|\mathbf{r}_*(t_0)| = \sqrt{(|\mathbf{r}'| + \epsilon \alpha)^2 + (\epsilon \beta)^2 + (\epsilon \gamma)^2} = 0$ yani $\alpha = -\frac{|\mathbf{r}'|}{\epsilon}$, $\beta = 0$ ve $\gamma = 0$ elde edilir. Dolayısıyla

$$-\frac{|\mathbf{r}'|}{\epsilon} = \bar{d}_1' - \rho \mu \bar{d}_2 \kappa |\mathbf{r}'| \quad \text{ve} \quad \bar{d}_3' + \bar{d}_2 \tau |\mathbf{r}'| = 0$$

eşitliklerine ulaşılır. Yukarıda yer alan ifadeler $\bar{d}_2' + \bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'| + \rho \bar{d}_3 \tau |\mathbf{r}'| = 0$ denkleminde yerine konulduğunda

$$\bar{d}_2 \bar{d}_2' + \bar{d}_1 \left(\bar{d}_1' + \frac{|\mathbf{r}'|}{\epsilon} \right) + \bar{d}_3 \bar{d}_3' = 0$$

elde edilir. $t_0 \in [0,1]$ için $|\bar{d}_2| \geq \delta > 0$ olmak üzere,

$$\kappa = \rho \mu \frac{1}{\epsilon \bar{d}_2} + \rho \mu \frac{\bar{d}_1'}{\bar{d}_2 |\mathbf{r}'|} \quad \text{ve} \quad \tau = -\frac{\bar{d}_3'}{\bar{d}_2 |\mathbf{r}'|}$$

bağıntılarına ulaşılır.

Sonuç olarak $\mathbf{r}_*(t_0)$, $\mathbf{r}_*$ uzay eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisinin düzgün olmayan noktası olduğu görülür.

Uzay eğrilerinin genelleştirilmiş ofset eğrisini, standart ofset eğrisi türünden ifade edelim:

Teorem 4.4.2. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında (4.24) ile verilen $\mathbf{r}_*(t)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi,

$$\mathbf{r}_*(t) = \mathbf{r}_1(t) + d\mathbf{n}_1$$

bağıntısı ile standart ofset eğrisi olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{r}_1$, $\mathbb{E}_1^3$ de düzgün parametrik uzay eğrisi, d sabit ofset mesafesi ve $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{r}_1$ eğrisinin asal birim normal vektörüdür.

İspat. $\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_* &= \mathbf{r} + d_1\mathbf{e} + d_2\mathbf{n} + d_3\mathbf{b} \\ &= \mathbf{r} + A\mathbf{e} + B\mathbf{n} + C\mathbf{b} + (d_1 - A)\mathbf{e} + (d_2 - B)\mathbf{n} + (d_3 - C)\mathbf{b} \quad (4.30) \\ &\triangleq \mathbf{r}_1 + d\mathbf{n}_1 \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, $d_1 = \epsilon\bar{d}_1, d_2 = \epsilon\bar{d}_2, d_3 = \epsilon\bar{d}_3, A = \epsilon\bar{A}, B = \epsilon\bar{B}, C = \epsilon\bar{C}$ değerleri t ye bağlı fonksiyonlardır. Ofset mesafesi ve birim normal vektörü,

$$\begin{aligned} d &= \epsilon\sqrt{\left|\rho(\bar{d}_1 - \bar{A})^2 + \mu(\bar{d}_2 - \bar{B})^2 - \rho\mu(\bar{d}_3 - \bar{C})^2\right|} = \epsilon\bar{d}, \\ \mathbf{n}_1 &= \epsilon\left(\frac{(\bar{d}_1 - \bar{A})}{d}\mathbf{e} + \frac{(\bar{d}_2 - \bar{B})}{d}\mathbf{n} + \frac{(\bar{d}_3 - \bar{C})}{d}\mathbf{b}\right) \quad (4.31) \end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece $\mathbf{r}_1 + d\mathbf{n}_1$ den,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}' + \epsilon\left(\bar{A}'\mathbf{e} + \bar{A}\mathbf{e}' + \bar{B}'\mathbf{n} + \bar{B}\mathbf{n}' + \bar{C}'\mathbf{b} + \bar{C}\mathbf{b}'\right) \quad (4.32) \\ &= |\mathbf{r}'|\mathbf{e} + \epsilon\left(\left(\bar{A}' - \rho\mu\bar{B}\kappa|\mathbf{r}'|\right)\mathbf{e} + \left(\bar{B}' + \bar{A}\kappa|\mathbf{r}'| + \rho\bar{C}\tau|\mathbf{r}'|\right)\mathbf{n} + \left(\bar{C}' + \bar{B}\tau|\mathbf{r}'|\right)\mathbf{b}\right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Aşağıda yer alan iki denklem Eşitlik 4.32 deki ilişkiyi doğrulayabilmek için sağlanmak zorundadır:

i. $\langle d\mathbf{n}_1, \mathbf{r}'_1 \rangle = 0$, bir başka deyişle,

$$\epsilon\rho(\bar{d}_1 - \bar{A})\left(|\mathbf{r}'| + \epsilon\left(\bar{A}' - \rho\mu\bar{B}\kappa|\mathbf{r}'|\right)\right) + \epsilon^2\mu(\bar{d}_2 - \bar{B})\left(\bar{B}' + \bar{A}\kappa|\mathbf{r}'| + \rho\bar{C}\tau|\mathbf{r}'|\right)$$

$$-\epsilon^2 \rho \mu (\bar{d}_3 - \bar{C}) (\bar{C}' + \bar{B} \tau |\mathbf{r}'|) = 0 \quad (4.33)$$

ii. $\epsilon^2 \left| \rho (\bar{d}_1 - \bar{A})^2 + \mu (\bar{d}_2 - \bar{B})^2 - \rho \mu (\bar{d}_3 - \bar{C})^2 \right| = c, c \in \mathbb{R}$, dolayısıyla

$$\epsilon^2 \begin{pmatrix} \rho (\bar{d}_1 - \bar{A}) (\bar{d}_1' - \bar{A}') + \mu (\bar{d}_2 - \bar{B}) (\bar{d}_2' - \bar{B}') \\ -\rho \mu (\bar{d}_3 - \bar{C}) (\bar{d}_3' - \bar{C}') \end{pmatrix} = 0 \quad (4.34)$$

elde edilir. Bu yüzden, $A = \epsilon \bar{A}, B = \epsilon \bar{B}$ ve $C = \epsilon \bar{C}$ değerleri Eşitlik 4.33 ve 4.34 denklemlerinden aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} \left(\epsilon \rho |\mathbf{r}'| + \epsilon^2 (\rho \bar{d}_1' - \mu \bar{d}_2 \kappa |\mathbf{r}'|) \right) \bar{A} &= -\epsilon^2 (\mu \bar{d}_2' + \mu \bar{d}_1 \kappa |\mathbf{r}'| + \rho \mu \bar{d}_3 \tau |\mathbf{r}'|) \bar{B} \\ &+ \epsilon^2 (\rho \mu \bar{d}_3' + \rho \mu \bar{d}_2 \tau |\mathbf{r}'|) \bar{C} \\ &+ \left(\epsilon \rho \bar{d}_1 |\mathbf{r}'| + \epsilon^2 (\rho \bar{d}_1' \bar{d}_1 + \mu \bar{d}_2' \bar{d}_2 - \rho \mu \bar{d}_3' \bar{d}_3) \right) \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Bunlara ilave olarak,

$$\epsilon \rho \bar{d}_1 |\mathbf{r}'| + \epsilon^2 (\rho \bar{d}_1' \bar{d}_1 + \mu \bar{d}_2' \bar{d}_2 - \rho \mu \bar{d}_3' \bar{d}_3) = \rho \bar{d}_1 |\mathbf{r}'| + \epsilon^2 (\rho \bar{d}_1 \alpha + \mu \bar{d}_2 \beta - \rho \mu \bar{d}_3 \gamma)$$

alınsın. O zaman

$$\epsilon \left(\rho (\bar{d}_1 - \bar{A}) |\mathbf{r}'| + \epsilon \rho \alpha (\bar{d}_1 - \bar{A}) + \epsilon \mu \beta (\bar{d}_2 + \bar{B}) - \epsilon \rho \mu \gamma (\bar{d}_3 - \bar{C}) \right) = 0 \quad (4.35)$$

olur. Eğer $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ ve $\gamma \neq 0$ ise $A = \epsilon \bar{A}, B = \epsilon \bar{B}$ ve $C = \epsilon \bar{C}$ değerlerinin hesabı için Eşitlik 4.35 den

$$(\bar{d}_1 - \bar{A}) = \mu \frac{\gamma}{|\mathbf{r}'| + \epsilon \alpha} (\bar{d}_3 - \bar{C}) - \mu \rho \frac{\beta}{|\mathbf{r}'| + \epsilon \alpha} (\bar{d}_2 + g(t))$$

elde edilir. Burada $\bar{B} = g(t)$ kabul edilmiştir. (4.34) den

$$(\bar{d}_1 - \bar{A})^2 - \mu (\bar{d}_3 - \bar{C})^2 = c_0 - \mu \rho (\bar{d}_2 - g(t))^2$$

ifadesine ulaşılır ve

$$\begin{aligned}\bar{A} = \bar{d}_1 - \mu\rho \frac{\beta\gamma^2}{\gamma^2(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha) - \mu(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^3}(\bar{d}_2 + g(t)) \\ + \mu\rho \frac{\beta}{(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)}(\bar{d}_2 + g(t)) \\ \pm \frac{|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha}{\gamma^2 - \mu(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^2} \left(\gamma^2 (c_0 - \mu\rho(\bar{d}_2 - g(t))^2) + \mu\beta^2(\bar{d}_2 + g(t))^2 \right)^{1/2} \\ - (|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^2 (c_0 - \rho(\bar{d}_2 - g(t))^2) \end{aligned}$$

$$\bar{B} = g(t),$$

$$\begin{aligned}\bar{C} = \bar{d}_3 - \rho \frac{\beta\gamma}{\gamma^2 - \mu(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^2}(\bar{d}_2 + g(t)) \\ \pm \frac{|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha}{\gamma^2 - \mu(|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^2} \left(\gamma^2 (c_0 - \mu\rho(\bar{d}_2 - g(t))^2) + \mu\beta^2(\bar{d}_2 + g(t))^2 \right)^{1/2} \\ - (|\mathbf{r}'| + \epsilon\alpha)^2 (c_0 - \rho(\bar{d}_2 - g(t))^2) \end{aligned}$$

olarak belirlenir. Burada " c_0 " herhangi bir reel sabittir.

4.5. $\mathbb{E}_1^3$ de Uzay Eğrilerinin Genelleştirilmiş Ofset Eğrilerinin Varyasyonu

$\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{r} + d_1\mathbf{e} + d_2\mathbf{n} + d_3\mathbf{b} = \mathbf{r} + \mathbf{y} \quad (4.36)$$

şeklinde yazılır, burada $\{\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ değerleri $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin Serret Frenet çatısı, d_1, d_2 ve d_3 değerleri; s ye bağlı $\bar{d}_i$ ($i = 1, 2, 3$) fonksiyonlarının ve $\mathbf{y}$ vektör alanının ϵ katı

$$d_1 = \epsilon\bar{d}_1(s), \quad d_2 = \epsilon\bar{d}_2(s), \quad d_3 = \epsilon\bar{d}_3(s), \quad \mathbf{y} = \epsilon\bar{\mathbf{y}}(s)$$

biçimindeki fonksiyonlarıdır. Eğer $\epsilon \rightarrow 0$ ise, o zaman $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi $\mathbf{r}(s)$ eğrisi ile özdeş olur.

Genelleştirilmiş ofset eğrisinin

$$s_* = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{|\mathbf{r}'_*|^2} ds \quad (4.37)$$

şeklinde verilen yay uzunluğunu ϵ nun kuvvetlerine göre seri açılımında ϵ na göre lineer olan terim δs ile gösterilirse

$$s_* = s + \delta s + \dots \quad (4.38)$$

olur. Bu yüzden δs , yay uzunluğunun birinci varyasyonu olarak adlandırılır ve

$$\delta s = \epsilon \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{s_* - s}{\epsilon}$$

biçiminde ifade edilir. Eşitlik 4.22 ve 4.36 dan

$$\mathbf{y}' = \epsilon \bar{\mathbf{y}}' = (d'_1 - \rho \mu d_2 \kappa) \mathbf{e} + (d'_2 + d_1 \kappa + \rho d_3 \tau) \mathbf{n} + (d'_3 + d_2 \tau) \mathbf{b} \quad (4.40)$$

bulunur. Eşitlik 4.36 dan $\mathbf{r}(s)$ nin s -yay uzunluğu parametresine göre türevi alınıp skaler çarpımın da ϵ na göre ikinci dereceden terimleri ihmal edilirse,

$$\mathbf{r}'^2 = (\mathbf{1} + \mathbf{r}' \mathbf{y}')^2 \quad (4.41)$$

bulunur. Eşitlik 4.22, 4.37, 4.41 ve $\mathbf{r}' = \mathbf{e}$ bağıntıları yardımıyla

$$s_* = s + \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{r}' \mathbf{y}' ds + \dots = s + \rho [d_1]_{s_1}^{s_2} - \mu \int_{s_1}^{s_2} \kappa d_2 ds + \dots$$

bulunur. Dolayısıyla yay uzunluğunun birinci varyasyonu:

$$\delta s = \rho [d_1]_{s_1}^{s_2} - \mu \int_{s_1}^{s_2} \kappa d_2 ds$$

şeklinde elde edilir.

$(\mathbf{r})$ ve $(\mathbf{r}_*)$ eğrileri ortak sınır noktalarına sahipse $[d_1(s_1) = 0 ; d_1(s_2) = 0]$, o zaman yay-uzunluğunun birinci varyasyonu

$$\delta s = -\mu \int_{s_1}^{s_2} \kappa d_2 ds$$

haline gelir. d_2 yerine δn yazılırsa

$$\delta s = -\mu \int_{s_1}^{s_2} \kappa \delta n ds$$

sonucuna ulaşılır.

$\mathbf{r}$ eğrisinin $\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisine geçişinde κ eğriliğinin nasıl bir değişim gösterdiği aşağıdaki gibi incelenebilir:

($\mathbf{r}_*$) eğrisinin κ_* eğrilik fonksiyonu Langrange özdeşliğinden

$$\kappa_* = \frac{\sqrt{|\mathbf{r}'_*|^2 \mathbf{r}''_*{}^2 - (\mathbf{r}'_* \mathbf{r}''_*)^2}}{\left(\sqrt{|\mathbf{r}'_*|^2}\right)^3}, \quad (4.42)$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda

$$\mathbf{r}'_*(s) = \mathbf{e}_* = \mathbf{r}' + \mathbf{y}' = \mathbf{e} + \epsilon \bar{\mathbf{y}}' \quad (4.43)$$

olduğundan ve ayrıca Eşitlik 4.40 dan

$$\mathbf{r}'_*(s) = (1 + d'_1 - \rho \mu d_2 \kappa) \mathbf{e} + (d'_2 + d_1 \kappa + \rho d_3 \tau) \mathbf{n} + (d'_3 + d_2 \tau) \mathbf{b} \quad (4.44)$$

olarak bulunur, Eşitlik 4.42 den $\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin κ_* eğrilik fonksiyonunun ϵ na göre birinci dereceden ifadesi

$$\kappa_* = \left| \rho \kappa + \epsilon \left(\rho \mu (\bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n}) - 2 \kappa (\bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e}) \right) \right| + \dots$$

biçiminde elde edilir.

$$\delta \kappa = \epsilon \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\kappa_* - \kappa}{\epsilon}$$

için

$$\text{i.} \quad \rho \kappa > \epsilon \left(-\rho \mu (\bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n}) + 2 \kappa (\bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e}) \right) \text{ ve } \rho = 1 \text{ için}$$

$$\delta \kappa = \epsilon \left(\mu (\bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n}) - 2 \kappa (\bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e}) \right)$$

$$\text{ii.} \quad \rho \kappa < \epsilon \left(-\rho \mu (\bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n}) + 2 \kappa (\bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e}) \right) \text{ ve } \rho = -1 \text{ için}$$

$$\delta\kappa = \epsilon \left(\mu(\bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n}) + 2\kappa(\bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e}) \right)$$

olarak bulunur. Böylece Eşitlik 4.36, 4.44 ve

$$\mathbf{y}'' = \begin{pmatrix} (d_1'' - 2\rho\mu d_2'\kappa - \rho\mu d_1\kappa^2 - \rho\mu d_2\kappa' - \mu d_3\tau\kappa)\mathbf{e} \\ +(d_2'' + 2d_1'\kappa + d_1\kappa' - \rho\mu d_2\kappa^2 + \rho d_2\tau^2 + 2\rho d_3'\tau + \rho d_3\tau')\mathbf{n} \\ +(d_3'' + d_1\kappa\tau + 2d_2'\tau + d_2\tau' + \rho d_3\tau^2)\mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

denklemlerinden, $\mathbf{r}$ ve $\mathbf{r}_*$ eğrileri arasında eğriliğin birinci varyasyonu:

$$\text{i.} \quad \rho\kappa > \epsilon \left(-\rho\mu(\bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n}) + 2\kappa(\bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e}) \right) \quad \text{ve} \quad \rho = 1 \text{ için}$$

$$\delta\kappa = \epsilon((d_2' + d_3\tau)' + d_3'\tau + d_1\kappa' + \mu d_2\kappa^2 + d_2\tau^2),$$

$$\text{ii.} \quad \rho\kappa < \epsilon \left(-\rho\mu(\bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n}) + 2\kappa(\bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e}) \right) \quad \text{ve} \quad \rho = -1 \text{ için}$$

$$\delta\kappa = \epsilon((d_2' + d_3\tau)' + d_3'\tau + (\kappa d_1)' + 3\kappa(d_1' - 3\mu\kappa d_2) + d_2\tau^2)$$

olarak yazılabilir.

$\mathbf{r}$ eğrisinin $\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisine geçişinde τ burulmasının nasıl değiştiği aşağıdaki gibi analiz edilmiştir:

$(\mathbf{r}_*)$ eğrisinin τ_* burulma fonksiyonu

$$\tau_* = \frac{(\mathbf{r}'_* \times \mathbf{r}''_*) \cdot \mathbf{r}'''_*}{\|\mathbf{r}'_* \times \mathbf{r}''_*\|^2} \quad (4.46)$$

dir. Ayrıca Langrange özdeşliğinden

$$\tau_* = \frac{\sqrt{|\mathbf{r}'_*|^2 \mathbf{r}''_*'^2 \mathbf{r}'''_*'^2 - (\mathbf{r}'_* \mathbf{r}''_*)^2 \mathbf{r}'''_*'^2|}}{|\mathbf{r}'_*'^2 \mathbf{r}''_*'^2 - (\mathbf{r}'_* \mathbf{r}''_*)^2|}$$

yazılır. Eşitlik 4.43 de ikinci ve üçüncü mertebeden türevler alındığında,

$$\mathbf{r}''_*(s) = \mathbf{e}' + \epsilon \bar{\mathbf{y}}'' = \kappa \mathbf{n} + \epsilon \bar{\mathbf{y}}''$$

$$\mathbf{r}'''_*(s) = \kappa' \mathbf{n} + \kappa \mathbf{n}' + \epsilon \bar{\mathbf{y}}''' = -\rho\mu\kappa^2 \mathbf{e} + \kappa' \mathbf{n} + \tau\kappa \mathbf{b} + \epsilon \bar{\mathbf{y}}''' \quad (4.47)$$

olarak bulunur. Eşitlik 4.43 ve 4.47 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r}'_* \times \mathbf{r}''_*). \mathbf{r}'''_* &= \tau \kappa^2 + \epsilon \rho \tau \kappa^2 \bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e} + \epsilon \mu \tau \kappa \bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n} + \epsilon (-\rho \mu \kappa \bar{\mathbf{y}}''' + \rho \mu \kappa' \bar{\mathbf{y}}'' - \kappa^3 \bar{\mathbf{y}}') \mathbf{b}, \\
\|\mathbf{r}'_* \times \mathbf{r}''_*\|^2 &= \kappa^2 + \epsilon (2\mu \kappa \bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n} + 2\rho \kappa^2 \bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e})
\end{aligned} \tag{4.48}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, Eşitlik 4.46, 4.47 ve 4.48 kullanılarak,

$$\tau_* = \tau - \epsilon \rho \tau \bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e} - \epsilon \mu \frac{\tau}{\kappa} \bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n} - \epsilon \left(-\rho \mu \frac{1}{\kappa} \bar{\mathbf{y}}''' + \rho \mu \frac{\kappa'}{\kappa^2} \bar{\mathbf{y}}'' - \kappa \bar{\mathbf{y}}' \right) \mathbf{b} + \dots$$

elde edilir. O halde

$$\delta \tau = \epsilon \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\tau_* - \tau}{\epsilon}$$

için

$$\delta \tau = -\epsilon \left(\rho \tau \bar{\mathbf{y}}' \mathbf{e} + \mu \frac{\tau}{\kappa} \bar{\mathbf{y}}'' \mathbf{n} + \left(-\rho \mu \frac{1}{\kappa} \bar{\mathbf{y}}''' + \rho \mu \frac{\kappa'}{\kappa^2} \bar{\mathbf{y}}'' - \kappa \bar{\mathbf{y}}' \right) \mathbf{b} \right)$$

biçiminde yazılabilir. Eşitlik 4.40, 4.45 ve bazı ara hesaplamalardan sonra $\mathbf{r}$ ve $\mathbf{r}_*$ eğrileri arasında burulmanın birinci varyasyonu:

$$\begin{aligned}
\delta \tau &= -\epsilon \left(\tau d'_1 + \rho \mu \kappa d'_3 + \left(\frac{d''_3 + 2d'_2 \tau + d_2 \tau' + \rho d_3 \tau^2 + d_1 \kappa \tau}{\kappa} \right)' \right) \\
&\quad - \epsilon \left(\frac{2\tau}{\kappa} (d''_2 + 2d'_1 \kappa + d_1 \kappa' + 2\rho d'_3 \tau + \rho d_3 \tau' - \rho \mu d_2 \kappa^2 + \rho d_2 \tau^2) \right)
\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir.

4.6.Uygulamalar

Örnek 4.6.1. $\mathbf{r}(s) = \left(\sqrt{7} \cosh \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} s, \sqrt{7} \sinh \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$ zaman benzeri eğriyi alalım. Bu eğrinin Serret Frenet çatısı;

$$\mathbf{e} = \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \sinh \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \cosh \frac{s}{\sqrt{2}} \right), \mathbf{n} = \left(\cosh \frac{s}{\sqrt{2}}, 0, \sinh \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

ve $\mathbf{b} = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \sinh \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cosh \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$ şeklindedir. $d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \sqrt{2}\epsilon$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = \epsilon$, $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = \sqrt{2}\epsilon$ için, $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{r}_*(s) = \left(\sqrt{7} \cosh \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} s, \sqrt{7} \sinh \frac{s}{\sqrt{2}} \right) + \epsilon \left((\sqrt{7} + \sqrt{5}) \sinh \frac{s}{\sqrt{2}} + \cosh \frac{s}{\sqrt{2}}, (\sqrt{7} + \sqrt{5}), (\sqrt{7} + \sqrt{5}) \cosh \frac{s}{\sqrt{2}} + \sinh \frac{s}{\sqrt{2}} \right).$$

Şekil 4.4, ϵ nun farklı değerleri için elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri ile orijinal eğri arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

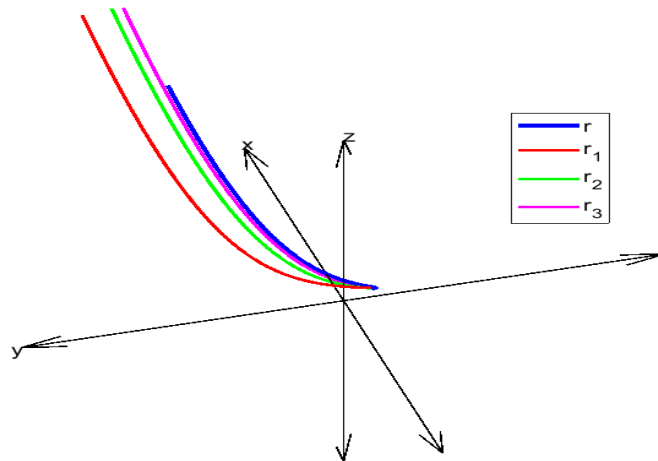
Örnek 4.6.2. $\mathbf{r}(s) = (\sin s, \cos s, 2)$ uzay benzeri eğri için Serret Frenet çatısı;

$\mathbf{e} = (\cos s, -\sin s, 0)$, $\mathbf{n} = (-\sin s, -\cos s, 0)$ ve $\mathbf{b} = (0, 0, -1)$ şeklindedir.

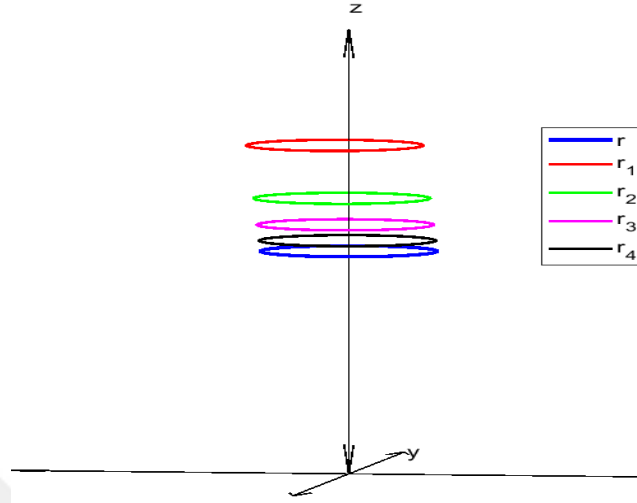
$d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \epsilon \sin s$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = \epsilon \cos s$, $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = \epsilon$ ofset mesefaları için $\mathbf{r}(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi denklemi:

$$\mathbf{r}_*(s) = (\sin s, \cos s, 2) + \epsilon(0, -1, 1).$$

Orijinal eğri ve ϵ nun farklı değerleri için elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri Şekil 4.5 de verilmiştir.



Şekil 4.4. $\mathbf{r}$ orijinal eğri (mavi); $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil) ve $\epsilon = \frac{1}{4}$ için $\mathbf{r}_3$ (mor).



Şekil 4.5. $\mathbf{r}$ orijinal eğri (mavi); $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için $\mathbf{r}_3$ (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için $\mathbf{r}_4$ (siyah).

Örnek 4.6.3. $\mathbf{r}(s) = \left(\frac{5}{3} \sin s, \frac{5}{3} \cos s, \frac{4}{3} s\right)$ uzay benzeri eğri için Serret Frenet çatısı;

$\mathbf{e} = \left(-\frac{5}{3} \sin s, \frac{5}{3} \cos s, \frac{4}{3}\right)$, $\mathbf{n} = (-\cos s, -\sin s, 0)$ ve $\mathbf{b} = \left(\frac{4}{3} \sin s, \frac{4}{3} \cos s, \frac{5}{3}\right)$ şeklindedir. O zaman $d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \frac{3}{5} \epsilon$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = \epsilon$, $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = \frac{3}{4} \epsilon$ mesafeleri için $\mathbf{r}(s)$ nin genelleştirilmiş ofset eğrisi,

$$\mathbf{r}_*(s) = \left(\frac{5}{3} \sin s, \frac{5}{3} \cos s, \frac{4}{3} s\right) + \epsilon \left(-\cos s, 2 \cos s - \sin s, \frac{41}{20}\right)$$

biçiminde olup, Şekil 4.6 orijinal eğrinin ve ϵ nun farklı değerleri için elde edilen genelleştirilmiş ofsetlerin grafiklerini göstermektedir.

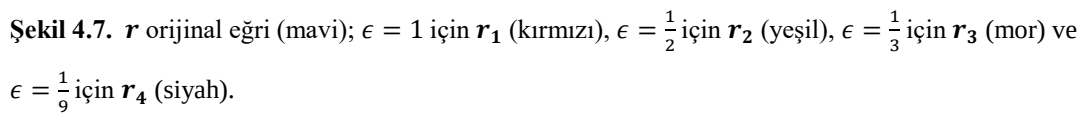
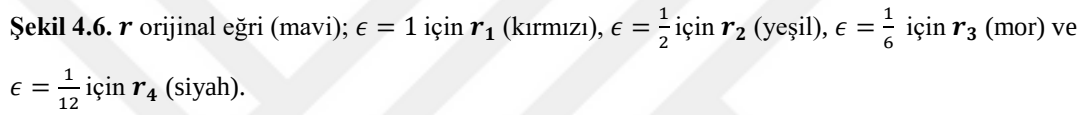
Örnek 4.6.4. $\mathbf{r}(s) = \left(\frac{4}{3} \sin s, \frac{4}{3} \cos s, \frac{5}{3} s\right)$ zaman benzeri eğri için Serret Frenet çatısı;

$$\mathbf{e} = \left(-\frac{4}{3} \sin s, \frac{4}{3} \cos s, \frac{5}{3}\right), \mathbf{n} = (-\cos s, -\sin s, 0), \mathbf{b} = \left(\frac{5}{3} \sin s, -\frac{5}{3} \cos s, -\frac{4}{3}\right).$$

$d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \frac{3}{4} \epsilon$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = \epsilon$, $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = \frac{3}{5} \epsilon$ için $\mathbf{r}^*(s)$ nin denklemi;

$$\mathbf{r}^*(s) = \left(\frac{4}{3} \sin s, \frac{4}{3} \cos s, \frac{5}{3} s\right) + \epsilon \left(-\cos s, -\sin s, \frac{9}{20}\right)$$

Şekil 4.6. $\mathbf{r}$ orijinal eğri (mavi); $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{12}$ için $\mathbf{r}_4$ (siyah).

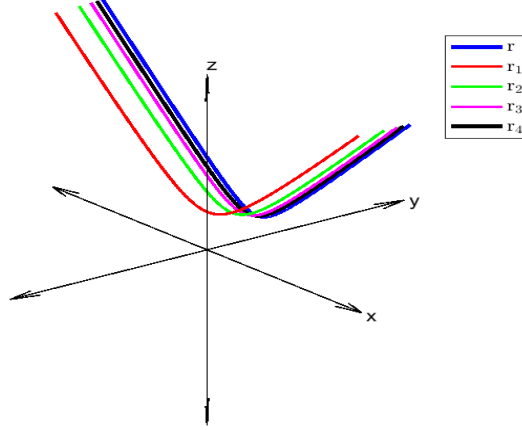


$\mathbf{e} = (\cosh s, 0, \sinh s)$, $\mathbf{n} = (\sinh s, 0, \cosh s)$ ve $\mathbf{b} = (0, -1, 0)$ şeklindedir.

61

$$\mathbf{r}^*(s) = (\sinh s, 2, \cosh s) + \epsilon(\cosh s + \sinh s, -2, \cosh s + \sinh s).$$

ϵ nun farklı değerleri için, Şekil 4.8 de bu eğrilerin grafikleri verilmiştir.



Şekil 4.8. $\mathbf{r}$ orijinal eğri (mavi); $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için $\mathbf{r}_3$ (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{8}$ için $\mathbf{r}_4$ (siyah).

4.7. Psödo Null Eğrilerinin Genelleştirilmiş Ofset Eğrileri ve Varyasyonu

Bu bölümde, psödo null eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi, orijinal eğri ve bu eğrinin Serret Frenet ve Bishop çatılarının vektör elemanları kullanılarak tanımlanmıştır. Ayrıca, genelleştirilmiş ofset eğrileri, ϵ - komşuluk yaklaşımı ile analiz edilmiştir. Ardından, Serret Frenet ve Bishop parametreleri kullanılarak genelleştirilmiş ofset eğrileri ile orijinal psödo null eğriler arasındaki psödo yay uzunluğu ve eğriliklerde meydana gelen değişimler analiz edilmiştir. Son olarak, çeşitli örnekler sunulmuştur.

4.7.1. Psödo null eğrilerin Serret Frenet çatısına göre genelleştirilmiş ofset eğrileri ve varyasyonu

Tanım 4.7.1. $\mathbf{r}(s)$ psödo null parametrik eğrisinin, $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin değişken ofset mesafesi ve yönü ile

$$\mathbf{r}_*(s) = \mathbf{r}(s) + d_1(s)\mathbf{T} + d_2(s)\mathbf{N} + d_3(s)\mathbf{B} \quad (4.49)$$

biçiminde tanımlanır, burada $d_1(s)$, $d_2(s)$ and $d_3(s)$ mesafeleri yay parametresinin birer fonksiyonudur. Ofset mesafesi ve yönü, $d_1(s)\mathbf{T} + d_2(s)\mathbf{N} + d_3(s)\mathbf{B}$ kullanılarak belirlenir.

Genelleştirilmiş ofset eğrisi,

$$\mathbf{r}_*(s) = \mathbf{r}(s) + \epsilon \bar{d}_1(s)\mathbf{T} + \epsilon \bar{d}_2(s)\mathbf{N} + \epsilon \bar{d}_3(s)\mathbf{B}$$

şeklinde yazılabilir ve $d_1(s) = \epsilon \bar{d}_1(s)$, $d_2(s) = \epsilon \bar{d}_2(s)$, $d_3(s) = \epsilon \bar{d}_3(s)$ iken ofset mesafesi $\epsilon \sqrt{|\bar{d}_1(s)|^2 + 2\bar{d}_2(s)\bar{d}_3(s)}$ dir.

Eşitlik 2.9 kullanılarak $\mathbf{r}_*(s)$ eğrisinin parametrik türevleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{r}'_* = \mathbf{T} + \epsilon \left((\bar{d}'_1 - \bar{d}_3) \mathbf{T} + (\bar{d}_1 + \bar{d}'_2 + \bar{d}_2 \tau) \mathbf{N} + (\bar{d}'_3 - \bar{d}_3 \tau) \mathbf{B} \right)$$

veya

$$\mathbf{r}'_* = \mathbf{T} + \epsilon(\alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{N} + \gamma \mathbf{B}), \quad (4.50)$$

burada $\alpha = (\bar{d}'_1 - \bar{d}_3)$, $\beta = (\bar{d}_1 + \bar{d}'_2 + \bar{d}_2 \tau)$, $\gamma = (\bar{d}'_3 - \bar{d}_3 \tau)$ alınmıştır. Ayrıca

$$\mathbf{r}''_* = \mathbf{N} + \epsilon((\alpha' - \gamma)\mathbf{T} + (\alpha + \beta' + \beta \tau)\mathbf{N} + (\gamma' - \gamma \tau)\mathbf{B}) \text{ dir.} \quad (4.51)$$

$\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin psödo null eğrisi olma şartları aşağıdaki gibidir:

- i. $\beta\gamma > -\left(\frac{1+\epsilon\alpha}{\sqrt{2}\epsilon}\right)^2$
- ii. $\epsilon^2(\alpha' - \gamma)^2 + 2\epsilon(\epsilon\alpha + \epsilon\beta' + \epsilon\beta\tau + 1)(\gamma' - \gamma\tau) = 0$
- iii. $\alpha(\epsilon\alpha + 2)^2 + 2\epsilon\beta(\epsilon\alpha\gamma + 2\gamma) = 0.$

$\{\mathbf{T}_*, \mathbf{N}_*, \mathbf{B}_*\}$ vektör alanları $\mathbf{r}_*(s)$ psödo null genelleştirilmiş ofset eğrisine ait olsun,

Denklem (4.50) ve $|\mathbf{r}'_*| = \sqrt{|\langle \mathbf{r}'_*, \mathbf{r}'_* \rangle|} = \sqrt{|(1 + \epsilon\alpha)^2 + 2\epsilon^2\beta\gamma|} = 1$ bağıntısından,

$\mathbf{T}_*$ birim teğet vektörü

$$\mathbf{T}_* = \mathbf{T} + \epsilon(\alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{N} + \gamma \mathbf{B})$$

olarak elde edilir.

$\mathbf{N}_*(s) = \mathbf{r}''_*(s)$ bağıntısından $\mathbf{r}_*(s)$ eğrisinin $\mathbf{N}_*$ birim normal vektörü,

$$\mathbf{N}_* = \mathbf{N} + \epsilon((\alpha' - \gamma)\mathbf{T} + (\alpha + \beta' + \beta\tau)\mathbf{N} + (\gamma' - \gamma\tau)\mathbf{B})$$

olarak bulunur. Son olarak, $\mathbf{B}_*$ birim binormal vektörü $\lambda_1\mathbf{T} + \lambda_2\mathbf{N} + \lambda_3\mathbf{B}$ şeklinde kabul edilip

$$\text{i. } \mathbf{B}_* \times \mathbf{T}_* = \mathbf{B}_*$$

$$\text{ii. } \langle \mathbf{N}_*, \mathbf{B}_* \rangle = 1$$

bağıntılarının sağlanması sonucunda, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ katsayıları bulunacaktır:

$$\begin{aligned} \text{i. } \mathbf{B}_* \times \mathbf{T}_* &= (\lambda_1\mathbf{T} + \lambda_2\mathbf{N} + \lambda_3\mathbf{B}) \times ((\epsilon\alpha + 1)\mathbf{T} + \epsilon\beta\mathbf{N} + \epsilon\gamma\mathbf{B}) \\ &= (\lambda_2\epsilon\gamma - \lambda_3\epsilon\beta)\mathbf{T} + (\lambda_1\epsilon\beta - \lambda_2(\epsilon\alpha + 1))\mathbf{N} + (\lambda_3(\epsilon\alpha + 1) - \lambda_1\epsilon\gamma)\mathbf{B} \\ &= \lambda_1\mathbf{T} + \lambda_2\mathbf{N} + \lambda_3\mathbf{B}, \end{aligned}$$

buradan aşağıdaki eşitliklere ulaşılır:

$$\lambda_2(\epsilon\alpha + 2) = \lambda_1\epsilon\beta \quad \text{ve} \quad \lambda_1\gamma = \lambda_3\alpha. \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \langle \mathbf{N}_*, \mathbf{B}_* \rangle &= \langle ((\epsilon\alpha' - \epsilon\gamma), (\epsilon\alpha + \epsilon\beta' + \epsilon\beta\tau + 1), (\epsilon\gamma' - \epsilon\gamma\tau)), (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \rangle \\ &= (\epsilon\alpha' - \epsilon\gamma)\lambda_1 + (\epsilon\gamma' - \epsilon\gamma\tau)\lambda_2 + (\epsilon\alpha + \epsilon\beta' + \epsilon\beta\tau + 1)\lambda_3, \end{aligned}$$

$\langle \mathbf{N}_*, \mathbf{B}_* \rangle = 1$ olduğundan

$$(\epsilon\alpha' - \epsilon\gamma)\lambda_1 + (\epsilon\gamma' - \epsilon\gamma\tau)\lambda_2 + (\epsilon\alpha + \epsilon\beta' + \epsilon\beta\tau + 1)\lambda_3 = 1 \quad \text{elde edilir. (4.53)}$$

Eşitlik 4.52 ve 4.53 den $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sırayla;

$$\lambda_1 = \frac{\epsilon\alpha^2 + 2\alpha}{2\gamma + \epsilon(2\alpha\alpha' + 2\beta'\gamma + 2\beta\gamma\tau + \alpha\gamma) + \epsilon^2(\alpha^2\alpha' + \alpha\beta'\gamma + \alpha\beta\gamma')} ,$$

$$\lambda_2 = \frac{\epsilon\beta\gamma}{2\gamma + \epsilon(2\alpha\alpha' + 2\beta'\gamma + 2\beta\gamma\tau + \alpha\gamma) + \epsilon^2(\alpha^2\alpha' + \alpha\beta'\gamma + \alpha\beta\gamma')} ,$$

$$\lambda_3 = \frac{\epsilon\alpha\gamma + 2\gamma}{2\gamma + \epsilon(2\alpha\alpha' + 2\beta'\gamma + 2\beta\gamma\tau + \alpha\gamma) + \epsilon^2(\alpha^2\alpha' + \alpha\beta'\gamma + \alpha\beta\gamma')}.$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak genelleştirilmiş ofset eğrisinin $\mathbf{B}_*$ birim binormal vektörünün orijinal eğrinin vektör elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_* &= \left(\frac{\epsilon \alpha^2 + 2\alpha}{2\gamma + \epsilon(2\alpha\alpha' + 2\beta'\gamma + 2\beta\gamma\tau + \alpha\gamma) + \epsilon^2(\alpha^2\alpha' + \alpha\beta'\gamma + \alpha\beta\gamma')} \right) \mathbf{T} \\ &+ \left(\frac{\epsilon\beta\gamma}{2\gamma + \epsilon(2\alpha\alpha' + 2\beta'\gamma + 2\beta\gamma\tau + \alpha\gamma) + \epsilon^2(\alpha^2\alpha' + \alpha\beta'\gamma + \alpha\beta\gamma')} \right) \mathbf{N} \\ &+ \left(\frac{\epsilon\alpha\gamma + 2\gamma}{2\gamma + \epsilon(2\alpha\alpha' + 2\beta'\gamma + 2\beta\gamma\tau + \alpha\gamma) + \epsilon^2(\alpha^2\alpha' + \alpha\beta'\gamma + \alpha\beta\gamma')} \right) \mathbf{B}\end{aligned}$$

biçimindedir.

$\mathbf{r}(s)$ psödo null eğrisinin $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{r} + d_1\mathbf{T} + d_2\mathbf{N} + d_3\mathbf{B} = \mathbf{r} + \mathbf{y} \quad (4.54)$$

biçiminde yazılabilir, burada $\mathbf{y}$ vektörü psödo yay uzunluğu parametresine göre alınmış olup Blaschke komşuluk yaklaşımı açısından $\mathbf{y} = \epsilon\bar{\mathbf{y}}(s)$ olarak alınabilir.

$\mathbf{r}_*(s)$ eğrisinin

$$s_* = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{|\mathbf{r}'_*|^2} ds \quad (4.55)$$

yay uzunluğunun seri açılımında ϵ na göre lineer olan terim δs ile gösterilirse

$$s_* = s + \delta s + \dots$$

elde edilir. Bu yüzden δs , yay uzunluğunun birinci varyasyonu olarak adlandırılır ve

$$\delta s = \epsilon \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{s_* - s}{\epsilon}$$

dır. Eşittlik 2.9 ve 4.54 den $\mathbf{y}(s)$ nin parametrik türevi

$$\mathbf{y}' = (d'_1 - d_3)\mathbf{T} + (d_1 + d'_2 + \tau d_2)\mathbf{N} + (d'_3 - \tau d_3)\mathbf{B} \quad (4.56)$$

biçimindedir. $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin önce türevi, ardından skaler çarpımı alınırsa ve ϵ un ikinci dereceden terimleri göz ardı edilirse,

$$\mathbf{r}'_*{}^2 = (1 + \mathbf{r}'\mathbf{y}')^2 \quad (4.57)$$

bulunur. Eşitlik 4.55 ve 4.57 den

$$s_* = \int_{s_1}^{s_2} 1 + \mathbf{r}' \mathbf{y}' ds + \dots = s + \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{r}' \mathbf{y}' ds + \dots$$

ulaşılır, $\mathbf{r}'(s) = \mathbf{T}$ ve Eşitlik 4.56 dan

$$s_* = s + \int_{s_1}^{s_2} (d'_1 - d_3) ds = s + [d_1]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} d_3 ds,$$

biçimine dönüştür, yani, psödo yay uzunluğunun birinci varyasyonu:

$$\delta s = [d_1]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} d_3 ds$$

dir.

$(\mathbf{r})$ ve $(\mathbf{r}_*)$ eğrileri ortak sınır noktalarına sahipse $[d_1(s_1) = 0 ; d_1(s_2) = 0]$, bu durumda eğrilerin psödo yay uzunluğunun birinci varyasyonu

$$\delta s = - \int_{s_1}^{s_2} d_3 ds$$

şeklinde elde edilir. Eğer d_3 yerine δB yazılırsa

$$\delta s = - \int_{s_1}^{s_2} \delta B ds.$$

$\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin burulma fonksiyonu $\tau_* = \langle \mathbf{N}'_*, \mathbf{B}_* \rangle$ şeklinde tanımlanır. $\mathbf{N}_*$ vektör ifadesinden

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'_* &= (\epsilon \alpha'' - 2\epsilon \gamma' + \epsilon \gamma \tau) \mathbf{T} \\ &\quad + (2\epsilon \alpha' - \epsilon \gamma + \epsilon \beta'' + 2\epsilon \beta' \tau + \epsilon \beta \tau' + \epsilon \alpha \tau + \epsilon \beta \tau^2 + \tau) \mathbf{N} \\ &\quad + (\epsilon \gamma'' - 2\epsilon \gamma' \tau - \epsilon \gamma \tau' + \epsilon \gamma \tau^2) \mathbf{B}. \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. $\mathbf{N}'_*$ ve $\mathbf{B}_*$ vektör ifadelerinden τ_* burulma fonksiyonu,

$$\tau_* = \frac{\left(\epsilon(2\alpha\alpha'' - 4\alpha\gamma' + 5\alpha\gamma\tau + 2\beta''\gamma + 4\alpha'\gamma + 4\beta'\gamma\tau - 2\gamma^2 + 2\beta\gamma\tau' + 2\beta\gamma\tau^2) + \epsilon^2 \left(\alpha^2\alpha'' - 2\alpha^2\gamma' + \alpha\beta\gamma'' - 2\alpha\beta\gamma'\tau + 2\alpha^2\gamma\tau + 2\alpha\beta\gamma\tau^2 \right) + 2\gamma\tau \right)}{2\gamma + \epsilon(2\alpha\alpha' + 2\beta'\gamma + 2\beta\gamma\tau + \alpha\gamma) + \epsilon^2(\alpha^2\alpha' + \alpha\beta'\gamma + \alpha\beta\gamma')}$$

dır. Ayrıca ϵ komşuluk yaklaşımına göre burulmanın birinci varyasyonu

$$\delta\tau = \frac{\epsilon \left(2\alpha\alpha'' - 4\alpha\gamma' + 5\alpha\gamma\tau + 2\beta''\gamma + 4\alpha'\gamma + 2\beta'\gamma\tau - 2\gamma^2 \right) + 2\beta\gamma\tau' - 2\alpha\alpha'\tau - \alpha\gamma\tau}{2\gamma + \epsilon(2\alpha\alpha' + 2\beta'\gamma + 2\beta\gamma\tau + \alpha\gamma)}$$

şeklinde elde edilir.

4.7.2. Psödo null eğrilerin Bishop çatısına göre genelleştirilmiş ofset eğrileri ve varyasyonu

Tanım 4.7.2.1. Bishop çatısına göre $\mathbf{r}(s)$ psödo null eğrisinin $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi

$$\mathbf{r}_*(s) = \mathbf{r}(s) + d_1(s)\mathbf{T}_1 + d_2(s)\mathbf{N}_1 + d_3(s)\mathbf{N}_2 \quad (4.58)$$

olarak tanımlanır ve ofset yönü $d_1(s)\mathbf{T}_1 + d_2(s)\mathbf{N}_1 + d_3(s)\mathbf{N}_2$ dir. $\mathbf{r}_*(s)$ eğrisinin Blaschke komşuluk yaklaşımı

$$\mathbf{r}_*(s) = \mathbf{r}(s) + \epsilon\bar{d}_1(s)\mathbf{T}_1 + \epsilon\bar{d}_2(s)\mathbf{N}_1 + \epsilon\bar{d}_3(s)\mathbf{N}_2$$

dir. Burada $d_1(s) = \epsilon\bar{d}_1(s)$, $d_2(s) = \epsilon\bar{d}_2(s)$ ve $d_3(s) = \epsilon\bar{d}_3(s)$ olarak kabul edilir.

Ayrıca ofset mesafesi $\epsilon\sqrt{|\bar{d}_1(s)|^2 + 2\bar{d}_2(s)\bar{d}_3(s)}$ şeklindedir.

Bishop çatısına göre psödo null eğrilerin genelleştirilmiş ofset eğrilerine ilişkin iki durum vardır:

Durum 1.

Eşitlik 2.11 ve 4.58 den

$$\mathbf{r}'_* = \mathbf{T}_1 + \epsilon \left(\bar{d}'_1\mathbf{T}_1 + (\bar{d}_1\kappa_2 + \bar{d}'_2)\mathbf{N}_1 + (\bar{d}'_3 - \bar{d}_3\kappa_2)\mathbf{N}_2 \right)$$

dir. Bu denklemde $\alpha = \bar{d}'_1$, $\beta = (\bar{d}_1\kappa_2 + \bar{d}'_2)$, $\gamma = (\bar{d}'_3 - \bar{d}_3\kappa_2)$ alınırsa $\mathbf{r}_*$ eğrisinin parametrik türevleri aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_* &= \mathbf{T}_1 + \epsilon(\alpha\mathbf{T}_1 + \beta\mathbf{N}_1 + \gamma\mathbf{N}_2), \\ \mathbf{r}''_* &= \kappa_2\mathbf{N}_1 + \epsilon((\alpha' - \gamma\kappa_2)\mathbf{T}_1 + (\alpha\kappa_2 + \beta')\mathbf{N}_1 + \gamma'\mathbf{N}_2).\end{aligned}\quad (4.59)$$

Bishop çatısına göre $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin psödo null eğri olması için aşağıda verilen

- i. $\beta\gamma > -\left(\frac{1 + \epsilon\alpha}{\sqrt{2}\epsilon}\right)^2$,
- ii. $\epsilon^2(\alpha' - \gamma\kappa_2)^2 + 2\epsilon\gamma'(\epsilon\alpha\kappa_2 + \epsilon\beta' + \kappa_2) = 0$,
- iii. $\lambda_1^2 + 2\lambda_2\lambda_3 = 0$

şartlarını sağlaması gerekir.

$\{\mathbf{T}_{1*}, \mathbf{N}_{1*}, \mathbf{N}_{2*}\}$, $\mathbf{r}_*(s)$ eğrisinin Bishop vektör alanları olsun. O zaman $\{\mathbf{T}_{1*}, \mathbf{N}_{1*}, \mathbf{N}_{2*}\}$ Bishop vektör alanları ile $\{\mathbf{T}_*, \mathbf{N}_*, \mathbf{B}_*\}$ Frenet vektör alanları arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1*} \\ \mathbf{N}_{1*} \\ \mathbf{N}_{2*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\kappa_{2*} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{2*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_* \\ \mathbf{N}_* \\ \mathbf{B}_* \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

dır. $\mathbf{r}_*(s)$ eğrisinin $\mathbf{T}_{1*}$ birim teğet vektörü Eşitlik 4.59, 4.60 ve

$$|\mathbf{r}'_*| = \sqrt{|\langle \mathbf{r}'_*, \mathbf{r}'_* \rangle|} = \sqrt{|(1 + \epsilon\alpha)^2 + 2\epsilon^2\beta\gamma|} = 1 \text{ bağıntısından}$$

$$\mathbf{T}_{1*} = \mathbf{T}_1 + \epsilon(\alpha\mathbf{T}_1 + \beta\mathbf{N}_1 + \gamma\mathbf{N}_2)$$

olarak elde edilir. Eşitlik 4.59 ve 4.60 dan $\mathbf{N}_{1*}(s)$ birim vektörü,

$$\mathbf{N}_{1*} = \frac{1}{\kappa_{2*}} \left(\kappa_2\mathbf{N}_1 + \epsilon((\alpha' - \gamma\kappa_2)\mathbf{T}_1 + (\alpha\kappa_2 + \beta')\mathbf{N}_1 + \gamma'\mathbf{N}_2) \right)$$

şeklindedir. Son olarak Eşitlik 4.60 dan $\mathbf{N}_{2*}(s)$ birim vektörü

$$\mathbf{N}_{2*} = \kappa_{2*} \left(\lambda_1\mathbf{T}_1 + \lambda_2\kappa_2\mathbf{N}_1 + \frac{\lambda_3}{\kappa_2}\mathbf{N}_2 \right)$$

dir. Burada $\kappa_{2*} = c_0 e^{\int \tau_*(s) ds}$ ve $\kappa_2(s) = c_0 e^{\int \tau(s) ds}$, $c_0 \in \mathbb{R}_0^+$ olarak alınır.

Durum 2.

$\mathbf{r}_*(s)$ eğrisinin türevi Eşitlik 2.12 ve 2.13 ifadelerinden

$$\mathbf{r}'_* = -\mathbf{T}_1 + \epsilon \left((\bar{d}'_1 - \bar{d}_2 \kappa_1) \mathbf{T}_1 + \bar{d}'_2 \mathbf{N}_1 + (\bar{d}_1 \kappa_1 + \bar{d}'_3) \mathbf{N}_2 \right)$$

olarak hesaplanır. $\alpha = (\bar{d}'_1 - \bar{d}_2 \kappa_1)$, $\beta = \bar{d}'_2$, $\gamma = (\bar{d}_1 \kappa_1 + \bar{d}'_3)$ olmak üzere

$$\mathbf{r}'_* = -\mathbf{T}_1 + \epsilon(\alpha \mathbf{T}_1 + \beta \mathbf{N}_1 + \gamma \mathbf{N}_2),$$

$$\mathbf{r}''_* = -\kappa_1 \mathbf{N}_2 + \epsilon((\alpha' - \beta \kappa_1) \mathbf{T}_1 + \beta' \mathbf{N}_1 + (\alpha \kappa_1 + \gamma') \mathbf{N}_2) \quad (4.61)$$

türevleri bulunur.

Bishop çatısına göre $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin psödo null eğri olması için

- i. $\beta\gamma > -\left(\frac{1-\epsilon\alpha}{\sqrt{2}\epsilon}\right)^2,$
- ii. $\epsilon^2(\alpha' - \beta\kappa_1)^2 + 2\epsilon\beta'(\epsilon\alpha\kappa_1 + \epsilon\gamma' - \kappa_1) = 0,$
- iii. $\lambda_1^2 + 2\lambda_2\lambda_3 = 0$

koşulları sağlanmalıdır. $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin $\{\mathbf{T}_{1*}, \mathbf{N}_{1*}, \mathbf{N}_{2*}\}$ Bishop vektör alanları ile $\{\mathbf{T}_*, \mathbf{N}_*, \mathbf{B}_*\}$ Serret Frenet vektör alanları arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1*} \\ \mathbf{N}_{1*} \\ \mathbf{N}_{2*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_{1*} \\ 0 & -1/\kappa_{1*} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_* \\ \mathbf{N}_* \\ \mathbf{B}_* \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

biçimindedir, burada $\mathbf{T}_{1*}$ birim teğet vektörü Eşitlik 4.61, 4.62 ve

$$|\mathbf{r}'_*| = \sqrt{|\langle \mathbf{r}'_*, \mathbf{r}'_* \rangle|} = \sqrt{|(1 + \epsilon\alpha)^2 + 2\epsilon^2\beta\gamma|} = 1 \text{ bağıntısından}$$

$$\mathbf{T}_{1*} = \mathbf{T}_1 - \epsilon(\alpha \mathbf{T}_1 + \beta \mathbf{N}_1 + \gamma \mathbf{N}_2).$$

olarak elde edilir. Eşitlik 4.62 den $\mathbf{N}_{1*} = -\kappa_{1*} \mathbf{B}_*$ birim vektörü

$$\mathbf{N}_{1*} = \kappa_{1*} \left(\lambda_1 \mathbf{T}_1 + \frac{\lambda_3}{\kappa_1} \mathbf{N}_1 + \lambda_2 \kappa_1 \mathbf{N}_2 \right),$$

dir. Eşitlik 4.61 ve 4.62 den $\mathbf{N}_{2*}(s)$ birim vektörü

$$\mathbf{N}_{2*} = -\frac{1}{\kappa_{1*}} \left(-\kappa_1 \mathbf{N}_2 + \epsilon \left((\alpha' - \beta \kappa_1) \mathbf{T}_1 + \beta' \mathbf{N}_1 + (\alpha \kappa_1 + \gamma') \mathbf{N}_2 \right) \right)$$

şeklinde bulunur, burada $\kappa_{1*} = c_0 e^{\int \tau_*(s) ds}$ ve $\kappa_1(s) = c_0 e^{\int \tau(s) ds}$, $c_0 \in \mathbb{R}_0^-$ alınmıştır.

Psödo null eğrilerin Bishop çatısına göre varyasyonları ise aşağıdaki gibi ele alınmıştır:

$\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{r} + d_1 \mathbf{T}_1 + d_2 \mathbf{N}_1 + d_3 \mathbf{N}_2 = \mathbf{r} + \mathbf{y}_1 \quad (4.63)$$

olarak yazılabilir ve $\mathbf{y}_1 = \epsilon \bar{\mathbf{y}}_1(s)$ dir.

Bishop çatısına göre psödo yay uzunluğu varyasyonu için iki durum mevcuttur:

Durum 1.

Eşitlik 2.11 ve 4.63 den

$\mathbf{y}'_1 = (d'_1 - d_3 \kappa_2) \mathbf{T}_1 + (d_1 \kappa_2 + d'_2) \mathbf{N}_1 + d'_3 \mathbf{N}_2$ olarak elde edilir.

Eşitlik 4.55 ve $\mathbf{r}'_*{}^2 = (1 + \mathbf{r}' \mathbf{y}'_1)^2$ bağıntısından

$$s_* = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{1} + \mathbf{r}' \mathbf{y}'_1 ds + \dots = s + \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{r}' \mathbf{y}'_1 ds + \dots,$$

yani

$$s_* = s + \int_{s_1}^{s_2} (d'_1 - d_3 \kappa_2) ds = s + [d_1]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} d_3 \kappa_2 ds$$

elde edilir. Sonuç olarak psödo yay uzunluğunun birinci varyasyonu:

$$\delta s = [d_1]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} d_3 \kappa_2 ds$$

şeklinde bulunur. Ortak sınır noktaları için birinci varyasyon

$$\delta s = - \int_{s_1}^{s_2} d_3 \kappa_2 ds$$

biçimini alır. Ayrıca d_3 ofset mesafesi δN_2 kabul edilirse

$$\delta s = - \int_{s_1}^{s_2} \delta N_2 \kappa_2 ds$$

eşitliğine ulaşılır.

Durum 2.

Eşitlik 2.13 den $\mathbf{y}_1(s)$ vektörünün türevi

$$\mathbf{y}'_1 = (d'_1 - d_2 \kappa_1) \mathbf{T}_1 + d'_2 \mathbf{N}_1 + (d_1 \kappa_1 + d'_3) \mathbf{N}_2$$

olarak bulunur. Durum 1 deki gibi benzer işlemler yapıldığında psödo yay uzunluğunun birinci varyasyonu:

$$s_* = s - \int_{s_1}^{s_2} (d'_1 - d_2 \kappa_1) ds = s - [d_1]_{s_1}^{s_2} + \int_{s_1}^{s_2} d_2 \kappa_1 ds,$$

yani

$$\delta s = -[d_1]_{s_1}^{s_2} + \int_{s_1}^{s_2} d_2 \kappa_1 ds.$$

şeklinde hesaplanır. Ortak sınır noktaları için

$$\delta s = \int_{s_1}^{s_2} d_2 \kappa_1 ds$$

dir. d_2 ofset mesafesi, δN_1 olarak kabul edildiğinde

$$\delta s = - \int_{s_1}^{s_2} \delta N_1 \kappa_1 ds$$

eşitliğine ulaşılır.

$\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin Bishop eğriliklerinin varyasyonu κ_1 ve κ_2 tanımlarından aşağıdaki gibi elde edilir:

Durum 1.

$$\delta\kappa_2 = \kappa_{2*} - \kappa_2 = c_0 e^{\int \tau_*(s) ds} - c_0 e^{\int \tau(s) ds}, \quad c_0 \in R_0^+$$

$$\delta\kappa_2 = c_0 (e^{\int \tau_*(s) ds} - e^{\int \tau(s) ds}).$$

Durum 2.

$$\delta\kappa_1 = \kappa_{1*} - \kappa_1 = c_0 e^{\int \tau_*(s) ds} - c_0 e^{\int \tau(s) ds}, \quad c_0 \in R_0^-$$

$$\delta\kappa_1 = c_0 (e^{\int \tau_*(s) ds} - e^{\int \tau(s) ds}).$$

4.7.3. Uygulamalar

Örnek 4.7.3.1. $\mathbf{r}(s) = \left(\sqrt{2}s^2 + \frac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}s^2 - \frac{s}{\sqrt{2}}, 2s^2 \right)$ psödo null eğrisinin çatı vektör alanları, $\mathbf{T}(s) = \left(2\sqrt{2}s + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}s - \frac{1}{\sqrt{2}}, 4s \right)$, $\mathbf{N}(s) = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4)$,

$\mathbf{B}(s) = \left(-\sqrt{2}s^2 - \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}}, -\sqrt{2}s^2 + \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}}, -2s^2 - \frac{1}{8} \right)$ biçimindedir.

$d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \sqrt{2}s\epsilon$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\epsilon$, $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = 2\sqrt{2}\epsilon$ ofset mesafeleri için $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi;

$$\mathbf{r}_*(s) = \left(\sqrt{2}s^2 + \frac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}s^2 - \frac{s}{\sqrt{2}}, 2s^2 \right) + \epsilon \left(-s + \frac{5}{4}, s + \frac{5}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4} \right).$$

$\mathbf{r}$ psödo null eğrisinin ve ϵ nun farklı değerleri için elde edilen genelleştirilmiş ofsetlerin grafikleri Şekil 4.9 da verilmiştir.

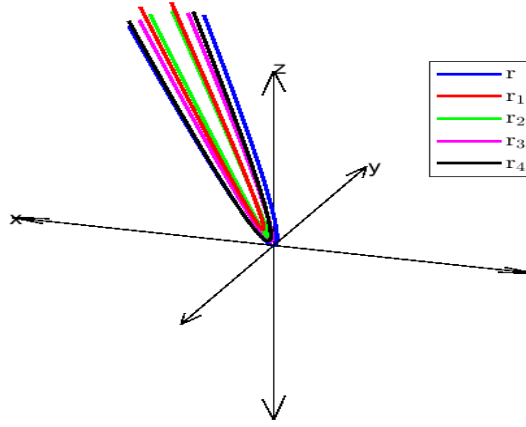
Örnek 4.7.3.2. $\mathbf{r}(s) = (e^{s+2}, s+3, e^{s+2})$ psödo null eğrisinin Serret Frenet vektör alanları

$$\mathbf{T}(s) = (e^{s+2}, 1, e^{s+2}), \mathbf{N}(s) = (e^{s+2}, 0, e^{s+2}), \mathbf{B}(s) = \left(\frac{e^{2s+4}-1}{2e^{s+2}}, -1, \frac{-e^{2s+4}-1}{2e^{s+2}} \right),$$

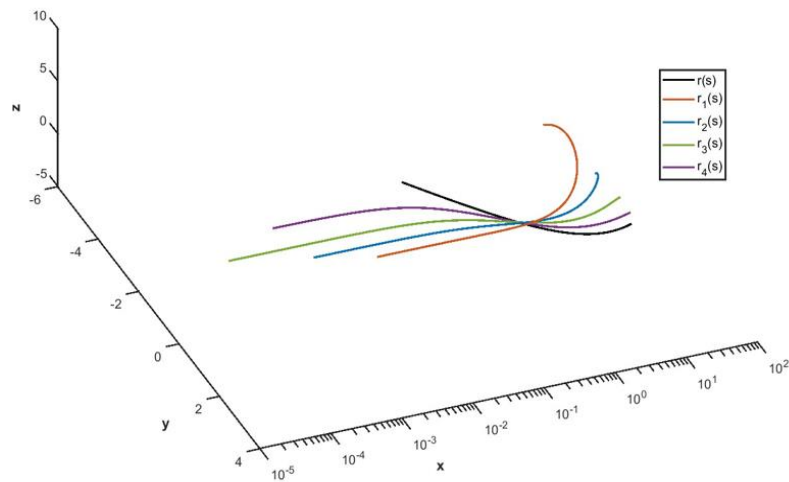
biçiminde olup $\mathbf{r}(s)$ nin $d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \epsilon$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = \epsilon$, $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = 2e^{s+2} \epsilon$ mesafeleri için genelleştirilmiş ofset eğrisinin denklemi,

$$\mathbf{r}_*(s) = (e^{s+2}, s+3, e^{s+2}) + \epsilon(e^{2s+4} + 2e^{s+2} - 1, -2e^{s+2} + 1, -e^{2s+4} + 2e^{s+2} - 1)$$

dir. Şekil 4.10 da $\mathbf{r}$ ve onun genelleştirilmiş ofset eğrilerinin grafikleri verilmiştir.



Şekil 4.9. $\mathbf{r}$ orijinal eğri (mavi) ve Serret Frenet çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için $\mathbf{r}_3$ (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için $\mathbf{r}_4$ (siyah).



Şekil 4.10. $\mathbf{r}$ orijinal eğri (siyah) ve Serret Frenet çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (mavi), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için $\mathbf{r}_3$ (yeşil) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için $\mathbf{r}_4$ (mor).

Örnek 4.7.3.3. $\mathbf{r}(s) = \left(\sqrt{2}s^2 + \frac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}s^2 - \frac{s}{\sqrt{2}}, 2s^2 \right)$ psödo null eğrisi olsun.

Durum 1 için κ_1 eğriliği sıfır iken, Bishop vektör alanları ve κ_2 eğriliği sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{T}_1(s) = \left(2\sqrt{2}s + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}s - \frac{1}{\sqrt{2}}, 4s \right), \mathbf{N}_1(s) = \frac{1}{c_0} (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4),$$

$$\mathbf{N}_2(s) = c_0 \left(-\sqrt{2}s^2 - \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}}, -\sqrt{2}s^2 + \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}}, -2s^2 - \frac{1}{8} \right), \kappa_2 = c_0, c_0 \in \mathbb{R}_0^+.$$

Özel olarak $c_0 = 8\sqrt{2}$ için;

$$\mathbf{T}_1(s) = \left(2\sqrt{2}s + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}s - \frac{1}{\sqrt{2}}, 4s \right), \mathbf{N}_1(s) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right),$$

$$\mathbf{N}_2(s) = (-16s^2 - 8s + 1, -16s^2 + 8s + 1, -16\sqrt{2}s^2 - \sqrt{2}) \text{ olur.}$$

$d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = 2\sqrt{2}\epsilon$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = 4\epsilon$, $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = \epsilon$ ofset mesafeleri için $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi denklemini aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_*(s) = & \left(\sqrt{2}s^2 + \frac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}s^2 - \frac{s}{\sqrt{2}}, 2s^2 \right) \\ & + \epsilon (-16s^2 + 4, -16s^2 + 16s, -16\sqrt{2}s^2 + 8\sqrt{2}s). \end{aligned}$$

Şekil 4.11 de orijinal eğri ve Bishop vektör alanları yönünde farklı ϵ değerleri için elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrilerin grafikleri yer almaktadır.

Örnek 4.7.3.4. $\mathbf{r}(s) = (e^{s+2}, s+3, e^{s+2})$ psödo null eğrisinin $\kappa_1 = 0$ için Bishop çatısı ve κ_2 eğriliği, $\mathbf{T}_1(s) = (e^{s+2}, 1, e^{s+2})$, $\mathbf{N}_1(s) = \frac{1}{c_0} (e^2, 0, e^2)$,

$$\mathbf{N}_2(s) = c_0 \left(\frac{e^{2s+4}-1}{2e^2}, -e^s, \frac{-e^{2s+4}-1}{2e^2} \right) \text{ ve } \kappa_2 = c_0 e^s, c_0 \in \mathbb{R}_0^+ \text{ dır.}$$

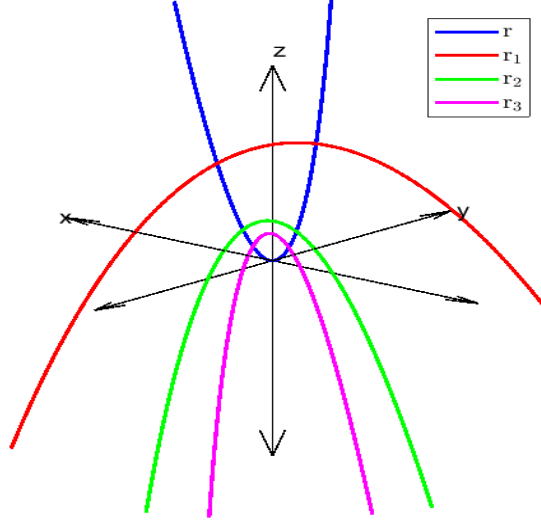
Özel olarak $c_0 = 2e^2$ alınırsa Bishop vektör alanları,

$$\mathbf{T}_1(s) = (e^{s+2}, 1, e^{s+2}), \mathbf{N}_1(s) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right),$$

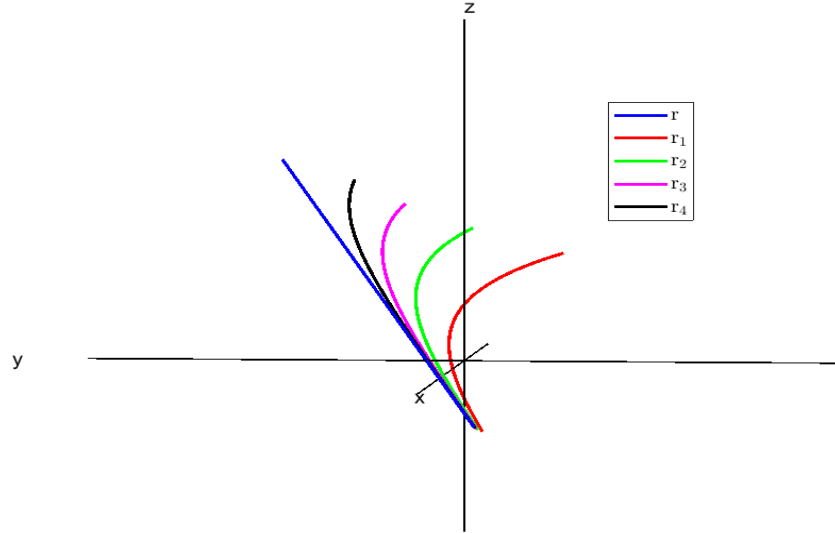
$\mathbf{N}_2(s) = (e^{2s+4} - 1, -2e^{s+2}, -e^{2s+4} - 1)$ biçiminde olur. $d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = e^{s+2} \epsilon$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = 2\epsilon$, $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = \epsilon$ mesafeleri için genelleştirilmiş ofsetinin denklemini;

$$\mathbf{r}_*(s) = (e^{s+2}, s+3, e^{s+2}) + \epsilon(2e^{2s+4}, -e^{s+2}, 0).$$

Şekil 4.12 de $\mathbf{r}$ psödo null eğrisi ve bu eğriye ilişkin genelleştirilmiş ofsetleri verilmiştir.



Şekil 4.11. $\mathbf{r}$ orijinal eğri (mavi) ve Bishop çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil) ve $\epsilon = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ için $\mathbf{r}_3$ (mor).



Şekil 4.12. $\mathbf{r}$ orijinal eğri (mavi) ve Bishop çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için $\mathbf{r}_3$ (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{8}$ için $\mathbf{r}_4$ (siyah).

4.8. Null Cartan Eğrilerinin Genelleştirilmiş Ofset Eğrileri ve Varyasyonu

Bu kısımda, null Cartan eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi, Serret Frenet ve Bishop çatıları kullanılarak orijinal eğrinin vektör elemanları cinsinden tanımlanmış olup, null Cartan eğrilerinin genelleştirilmiş ofsetleri, ϵ -komşuluk yaklaşımı kullanılarak daha hassas bir yaklaşımla analiz edilmiştir. Ek olarak, belirtilen çatıların vektör alanları kullanılarak yay uzunluğu ve eğrilik fonksiyonları varyasyonları incelenmiştir. Son olarak, bazı açıklayıcı örnekler ve grafikler sunulmuştur.

4.8.1. Null Cartan eğrilerin Cartan çatısına göre genelleştirilmiş ofset eğrileri ve varyasyonu

Tanım 4.8.1.1 $\mathbf{r}(s)$ null Cartan eğrisinin $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi,

$$\mathbf{r}_*(s) = \mathbf{r}(s) + d_1(s)\mathbf{T} + d_2(s)\mathbf{N} + d_3(s)\mathbf{B}$$

şeklinde tanımlanır, burada $d_1(s)$, $d_2(s)$ ve $d_3(s)$ değişken ofset mesafeleri yay parametresinin birer fonksiyonu ve $d_1(s)\mathbf{T} + d_2(s)\mathbf{N} + d_3(s)\mathbf{B}$ ifadesi değişken ofset doğrultusudur.

Genelleştirilmiş ofset eğrisinin ϵ Blaschke komşuluk yaklaşımlı tanımı

$$\mathbf{r}_*(s) = \mathbf{r}(s) + \epsilon \bar{d}_1(s)\mathbf{T} + \epsilon \bar{d}_2(s)\mathbf{N} + \epsilon \bar{d}_3(s)\mathbf{B}$$

olarak ifade edilir ve $d_1(s) = \epsilon \bar{d}_1(s)$, $d_2(s) = \epsilon \bar{d}_2(s)$, $d_3(s) = \epsilon \bar{d}_3(s)$ için ofset mesafesi $\epsilon \sqrt{|\bar{d}_2(s)^2 - \bar{d}_1(s)\bar{d}_3(s)|}$ ile elde edilir.

Cartan çatısının türev formülleri Eşitlik 2.15 den $\mathbf{r}_*(s)$ eğrisinin parametrik türevleri,

$$\mathbf{r}'_* = \mathbf{T} + \epsilon \left((\bar{d}'_1 - \bar{d}_2\tau)\mathbf{T} + (\bar{d}_1 + \bar{d}'_2 - \bar{d}_3\tau)\mathbf{N} + (\bar{d}_2 + \bar{d}'_3)\mathbf{B} \right)$$

dir. $\alpha = (\bar{d}'_1 - \bar{d}_2\tau)$, $\beta = (\bar{d}_1 + \bar{d}'_2 - \bar{d}_3\tau)$, $\gamma = (\bar{d}_2 + \bar{d}'_3)$ için

$$\mathbf{r}'_* = \mathbf{T} + \epsilon(\alpha\mathbf{T} + \beta\mathbf{N} + \gamma\mathbf{B}) \quad (4.64)$$

$$\mathbf{r}''_* = \mathbf{N} + \epsilon((\alpha' - \beta\tau)\mathbf{T} + (\alpha + \beta' - \gamma\tau)\mathbf{N} + (\beta + \gamma')\mathbf{B}) \quad (4.65)$$

şeklinde hesaplanır.

$\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin null Cartan eğri olması için

- i. $\epsilon\beta^2 - 2\gamma(1 + \epsilon\alpha) = 0,$
- ii. $\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_3 = 0,$
- iii. $(1 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau)^2 - 2(\epsilon\beta + \epsilon\gamma')(\epsilon\alpha' - \epsilon\beta\tau) = 1,$
- iv. $\epsilon(\beta\beta' - \alpha\gamma' - \alpha'\gamma) - \gamma' = 0,$
- v. $(1 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau)\lambda_2 - (\epsilon\beta + \epsilon\gamma')\lambda_1 - (\epsilon\alpha' - \epsilon\beta\tau)\lambda_3 = 0,$
- vi. $\epsilon\beta\lambda_2 - (1 + \epsilon\alpha)\lambda_3 - \epsilon\gamma\lambda_1 = -1$

şartları sağlanmalıdır. Burada λ_1, λ_2 ve λ_3 , $\mathbf{r}_*(s)$ eğrisinin $\mathbf{B}_* = \lambda_1\mathbf{T} + \lambda_2\mathbf{N} + \lambda_3\mathbf{B}$ olarak verilen binormal vektörünün katsayılarıdır.

$\mathbf{N}_* \times \mathbf{B}_* = -\mathbf{B}_*$ ve $\langle \mathbf{T}_*, \mathbf{B}_* \rangle = -1$ bağıntılarından λ_1, λ_2 ve λ_3 katsayıları

$$\lambda_1 = \frac{\epsilon(\alpha' - \beta\tau)(\alpha + \beta' - \gamma\tau)}{\left(\begin{array}{l} (\epsilon\alpha\beta + \epsilon\alpha\gamma' + \beta + \gamma')(2 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau) \\ -\beta(2 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau)(\epsilon\alpha + \epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau) \\ +(\epsilon\alpha'\gamma - \epsilon\beta\gamma\tau)(\epsilon\alpha + \epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau) \end{array} \right)},$$

$$\lambda_2 = \frac{\epsilon(2 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau)(\alpha + \beta' - \gamma\tau)}{\left(\begin{array}{l} (\epsilon\alpha\beta + \epsilon\alpha\gamma' + \beta + \gamma')(2 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau) \\ -\beta(2 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau)(\epsilon\alpha + \epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau) \\ +(\epsilon\alpha'\gamma - \epsilon\beta\gamma\tau)(\epsilon\alpha + \epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau) \end{array} \right)},$$

$$\lambda_3 = \frac{\epsilon(\beta + \gamma')(2 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau)}{\left(\begin{array}{l} (\epsilon\alpha\beta + \epsilon\alpha\gamma' + \beta + \gamma')(2 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau) \\ -\beta(2 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau)(\epsilon\alpha + \epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau) \\ +(\epsilon\alpha'\gamma - \epsilon\beta\gamma\tau)(\epsilon\alpha + \epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau) \end{array} \right)}$$

olarak elde edilir.

$\mathbf{r}_*(s)$ null Cartan genelleştirilmiş ofset eğrisinin $\{\mathbf{T}_*, \mathbf{N}_*, \mathbf{B}_*\}$ vektör alanları için $\mathbf{T}_*$ birim teğet vektör alanı, $\mathbf{T}_* = \mathbf{r}_*'$ bağıntısı ve Eşitlik 4.64 den

$$\mathbf{T}_* = \mathbf{T} + \epsilon(\alpha\mathbf{T} + \beta\mathbf{N} + \gamma\mathbf{B})$$

dır. $\mathbf{N}_*(s) = \mathbf{r}_*''(s)$ ve (4.65) den $\mathbf{N}_*$ birim normal vektör alanı

$$\mathbf{N}_* = \mathbf{N} + \epsilon((\alpha' - \beta\tau)\mathbf{T} + (\alpha + \beta' - \gamma\tau)\mathbf{N} + (\beta + \gamma')\mathbf{B})$$

şeklinde elde edilir. Son olarak, birim binormal vektör alanı $\mathbf{B}_* = \lambda_1\mathbf{T} + \lambda_2\mathbf{N} + \lambda_3\mathbf{B}$ kullanılarak $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ katsayıları elde edilmektedir.

Sonuç 4.8.1.1. ϵ değerine göre birinci dereceden yaklaşımda, $\mathbf{r}_*$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin $\{\mathbf{T}_*, \mathbf{N}_*, \mathbf{B}_*\}$ çatısı, $\mathbf{r}$ orijinal eğrisinin $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ çatısı ile aynı olur.

Null Cartan eğrilerin Cartan çatısına göre varyasyonları aşağıdaki gibi incelenmiştir:

$\mathbf{r}(s)$ null Cartan eğrisinin $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi,

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{r} + d_1\mathbf{T} + d_2\mathbf{N} + d_3\mathbf{B} = \mathbf{r} + \mathbf{y} \quad (4.66)$$

olarak yazılabilir, burada $\mathbf{y}$ vektörü s psödo yay parametresi cinsinden verilmiştir. Ayrıca $\mathbf{y} = \epsilon\bar{\mathbf{y}}(s)$ dir. $\epsilon \rightarrow 0$ iken, $\mathbf{r}_*(s)$ eğrisi, $\mathbf{r}(s)$ eğrisi ile özdeş olur. Diğer taraftan,

$$s_* = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\|\mathbf{r}_*''(s)\|} ds \quad (4.67)$$

şeklinde verilen $\mathbf{r}_*(s)$ eğrisinin psödo yay uzunluğunun ϵ nun kuvvetlerine göre seriye açılımında ϵ na göre lineer olan terim δs ile gösterilirse

$$s_* = s + \delta s + \dots$$

olur. Bu yüzden δs psödo yay uzunluğunun birinci varyasyonu olarak adlandırılır ve

$$\delta s = \epsilon \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{s_* - s}{\epsilon}$$

biçiminde ifade edilir. Eşitlik 2.15 ve 4.66 dan $\mathbf{y}(s)$ vektörünün ikinci türevi

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'' = & (d_1'' - 2d_2'\tau - d_2\tau' - d_1\tau + d_3\tau^2)\mathbf{T} + (2d_1' - 2d_2\tau + d_2'' - 2d_3'\tau - d_3\tau')\mathbf{N} \\ & + (d_1 + d_2' - d_3\tau + d_2' + d_3'')\mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.68)$$

olarak elde edilir. $\mathbf{r}_*(s)$ eğrisinin ikinci mertebe türevinin skaler çarpımı hesaplanır ve ϵ na göre ikinci dereceden terimler göz ardı edilirse

$$\mathbf{r}_*''^2 = (1 + \mathbf{r}''\mathbf{y}'')^2 \quad (4.69)$$

ulaşılr. Eşitlik 4.67 ve 4.69 dan

$$s_* = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\|(1 + \mathbf{r}''\mathbf{y}'')\|} ds + \dots$$

elde edilir. $\mathbf{r}''(s) = \mathbf{N}$ bağıntısı ile Eşitlik 4.67 ve 4.68 den, psödo yay uzunluğunun birinci varyasyonu:

$$\delta s = s_* - s = \int_{s_1}^{s_2} \left(\sqrt{|2d'_1 - 2d_2\tau + d''_2 - 2d'_3\tau - d_3\tau' + 1|} - 1 \right) ds$$

biçimindedir. $2d'_1 - 2d_2\tau + d''_2 - 2d'_3\tau - d_3\tau' = 0$ koşulunda genelleştirilmiş ofset eğrisinin psödo yay uzunluğu, orijinal eğrinin psödo yay uzunluğuna eşit olur.

Genelleştirilmiş ofset eğrisinin τ_* burulması $\tau_* = \langle \mathbf{N}'_*, \mathbf{B}_* \rangle$ şeklinde tanımlanır. $\mathbf{N}_*$ vektör alanının türevi

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'_* &= (-\tau + \epsilon\alpha'' - 2\epsilon\beta'\tau - \epsilon\beta\tau' - \epsilon\alpha\tau + \epsilon\gamma\tau^2)\mathbf{T} \\ &\quad + (2\epsilon\alpha' - 2\epsilon\beta\tau + \epsilon\beta'' - 2\epsilon\gamma'\tau - \epsilon\gamma\tau')\mathbf{N} \\ &\quad + (1 + \epsilon\alpha + 2\epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau + \epsilon\gamma'')\mathbf{B} \end{aligned}$$

olarak bulunur. $\mathbf{N}'_*$ and $\mathbf{B}_*$ vektörlerinden ϵ na göre burulma fonksiyonunun birinci varyasyonu:

$$\begin{aligned} \delta\tau &= -\tau - \lambda_1(1 + \epsilon\alpha + 2\epsilon\beta' - \epsilon\gamma\tau + \epsilon\gamma') \\ &\quad + \lambda_2(2\epsilon\alpha' - 2\epsilon\beta\tau + \epsilon\beta'' - 2\epsilon\gamma'\tau - \epsilon\gamma\tau') \\ &\quad - \lambda_3(\epsilon\alpha'' - 2\epsilon\beta'\tau - \epsilon\beta\tau' - \tau - \epsilon\alpha\tau + \epsilon\gamma\tau^2) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

4.8.2. Null Cartan eğrilerin Bishop çatısına göre genelleştirilmiş ofset eğrileri ve varyasyonu

Bishop çatısına göre $\mathbf{r}(s)$ null Cartan eğrisinin $\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi

$$\mathbf{r}_*(s) = \mathbf{r}(s) + d_1(s)\mathbf{T}_1 + d_2(s)\mathbf{N}_1 + d_3(s)\mathbf{N}_2 \quad (4.70)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $d_1(s)\mathbf{T}_1 + d_2(s)\mathbf{N}_1 + d_3(s)\mathbf{N}_2$ ofset yönüdür.

Blaschke komşuluk yaklaşımına göre $\mathbf{r}_*(s)$ eğrisi,

$$\mathbf{r}_*(s) = \mathbf{r}(s) + \epsilon \bar{d}_1(s)\mathbf{T}_1 + \epsilon \bar{d}_2(s)\mathbf{N}_1 + \epsilon \bar{d}_3(s)\mathbf{N}_2$$

olarak yazılır. Burada $d_1(s) = \epsilon \bar{d}_1(s)$, $d_2(s) = \epsilon \bar{d}_2(s)$ ve $d_3(s) = \epsilon \bar{d}_3(s)$ dir. Ofset

mesafesi $\epsilon \sqrt{|\bar{d}_2(s)^2 - \bar{d}_1(s)\bar{d}_3(s)|}$ ile belirlenir.

Eşitlik 2.18 ve 4.70 den

$$\mathbf{r}'_* = \mathbf{T}_1 + \epsilon \left((\bar{d}'_1 + \bar{d}_1\kappa_2)\mathbf{T}_1 + (\bar{d}_1 + \bar{d}'_2)\mathbf{N}_1 + (\bar{d}_2 + \bar{d}'_3 - \bar{d}_3\kappa_2)\mathbf{N}_2 \right).$$

elde edilir. Eğer,

$$\alpha = (\bar{d}'_1 + \bar{d}_1\kappa_2), \quad \beta = (\bar{d}_1 + \bar{d}'_2), \quad \gamma = (\bar{d}_2 + \bar{d}'_3 - \bar{d}_3\kappa_2) \text{ alınırsa,}$$

$$\mathbf{r}'_* = \mathbf{T}_1 + \epsilon(\alpha\mathbf{T}_1 + \beta\mathbf{N}_1 + \gamma\mathbf{N}_2),$$

$$\mathbf{r}''_* = \kappa_2\mathbf{T}_1 + \mathbf{N}_1 + \epsilon((\alpha' + \alpha\kappa_2)\mathbf{T}_1 + (\alpha + \beta')\mathbf{N}_1 + (\beta + \gamma' - \gamma\kappa_2)\mathbf{N}_2) \quad (4.71)$$

parametrik türevleri elde edilir.

$\mathbf{r}_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisinin Bishop çatısı $\{\mathbf{T}_{1*}, \mathbf{N}_{1*}, \mathbf{N}_{2*}\}$ olarak alınsın. O zaman $\mathbf{r}_*(s)$ eğrisinin $\{\mathbf{T}_{1*}, \mathbf{N}_{1*}, \mathbf{N}_{2*}\}$ Bishop çatısı ile $\{\mathbf{T}_*, \mathbf{N}_*, \mathbf{B}_*\}$ Cartan çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1*} \\ \mathbf{N}_{1*} \\ \mathbf{N}_{2*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\kappa_{2*} & 1 & 0 \\ \frac{\kappa_{2*}}{2} & -\kappa_{2*} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_* \\ \mathbf{N}_* \\ \mathbf{B}_* \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

matrisi ile verilebilir. Eşitlik 4.72 ve $\mathbf{T}_* = \mathbf{r}'_*$ bağıntısında $\mathbf{T}_{1*}$ birim teğet vektörü

$$\mathbf{T}_{1*} = \mathbf{T}_1 + \epsilon(\alpha\mathbf{T}_1 + \beta\mathbf{N}_1 + \gamma\mathbf{N}_2)$$

olarak bulunur. Eşitlik 4.71, 4.72 ve $\mathbf{N}_* = \mathbf{r}''_*$ den

$$\begin{aligned} N_{1*} = & \kappa_2 T_1 + N_1 - \kappa_{2*} (T_1 + \epsilon(\alpha T_1 + \beta N_1 + \gamma N_2)) \\ & + \epsilon((\alpha' + \alpha \kappa_2) T_1 + (\alpha + \beta') N_1 + (\beta + \gamma' - \gamma \kappa_2) N_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Eşitlik 2.17, 4.72 ve $B_* = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 (N_1 + \kappa_2 T_1) + \lambda_3 \left(\frac{\kappa_2^2}{2} T_1 + \kappa_2 N_1 + N_2 \right)$ birim binormal vektör bağıntısından,

$$\begin{aligned} N_{2*} = & \left(\frac{\kappa_{2*}^2}{2} + \frac{\kappa_{2*}^2}{2} \epsilon \alpha - \kappa_{2*} \kappa_2 - \kappa_{2*} \epsilon (\alpha' + \alpha \kappa_2) + \lambda_1 + \lambda_2 \kappa_2 + \frac{\lambda_3 \kappa_2^2}{2} \right) T_1 \\ & + \left(\frac{\kappa_{2*}^2}{2} \epsilon \beta - \kappa_{2*} - \kappa_{2*} \epsilon (\alpha + \beta') + \lambda_2 + \lambda_3 \kappa_2 \right) N_1 \\ & + \left(\frac{\kappa_{2*}^2}{2} \epsilon \gamma + \kappa_{2*} \epsilon (\beta + \gamma' - \gamma \kappa_2) + \lambda_3 \right) N_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada ikinci Bishop eğriliği $\kappa'_{2*}(s) = -\frac{1}{2} \kappa_{2*}^2(s) - \tau_*(s)$ Ricatti diferansiyel denklemini sağlar.

Null Cartan eğrilerin Bishop çatısına göre varyasyonu için yapılan irdelemeler aşağıdaki gibidir:

$r_*(s)$ genelleştirilmiş ofset eğrisi

$$r_* = r + d_1 T_1 + d_2 N_1 + d_3 N_2 = r + y_1 \quad (4.73)$$

olarak ifade edilir. Burada $y_1 = \epsilon \bar{y}_1(s)$ dir. ($\epsilon \rightarrow 0$) iken; $r_*(s)$, $r(s)$ ile özdeş olur. Genelleştirilmiş ofset eğri ve orijinal eğri arasındaki psödo yay uzunluğu varyasyonunu hesaplamak için Eşitlik 2.18 ve 4.66 dan

$$\begin{aligned} y_1'' = & (d_1'' + 2d_1' \kappa_2 + d_1 \kappa_2' + d_1 \kappa_2^2) T_1 + (2d_1' + d_2'' + d_1 \kappa_2) N_1 \\ & + (d_1 + 2d_2' + d_3'' - 2d_3' \kappa_2 - d_3 \kappa_2' - d_2 \kappa_2 + d_3 \kappa_2^2) N_2. \end{aligned} \quad (4.74)$$

elde edilir. $r_*(s)$ eğrisinin türevi ve skaler çarpımı alınır, ve ϵ na göre birinci dereceden yaklaşım yapılırsa,

$$r_*''^2 = (1 + r'' y'')^2 \quad (4.75)$$

denkleminde ulaşılır. Eşitlik 4.67 ve 4.75 bağıntılarından

$$s_* = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\|(1 + \mathbf{r}''\mathbf{y}'')\|} ds + \dots$$

elde edilir, $\mathbf{r}''(s) = \mathbf{N}$ bağıntısı ile (4.74) den psödo yay uzunluğunun birinci varyasyonu:

$$\delta s = \int_{s_1}^{s_2} \left(\sqrt{|1 + 2d'_1 + d''_2 - 2d'_2\kappa_2 - d''_3\kappa_2 + 2d'_3\kappa_2^2 + d_3\kappa'_2\kappa_2 + d_2\kappa_2^2 - d_3\kappa_2^3|} - 1 \right) ds$$

olur. Ek olarak, $2d'_1 + d''_2 - 2d'_2\kappa_2 - d''_3\kappa_2 + 2d'_3\kappa_2^2 + d_3\kappa'_2\kappa_2 + d_2\kappa_2^2 - d_3\kappa_2^3 = 0$ için $\mathbf{r}_*(s)$ eğrisinin psödo yay uzunluğu, $\mathbf{r}(s)$ orijinal eğrisinin psödo yay uzunluğu ile aynı olur.

$\mathbf{r}_*$ null Cartan genelleştirilmiş ofset eğrisinin ikinci Bishop eğriliği $\kappa_{2*} = -\langle \mathbf{T}'_{1*}, \mathbf{N}_{2*} \rangle$ biçimindedir. Eşitlik 4.71 ve 4.72 bağıntılarından

$$\mathbf{T}'_{1*} = (\kappa_2 + \epsilon\alpha' + \epsilon\alpha\kappa_2)\mathbf{T}_1 + (1 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta')\mathbf{N}_1 + (\epsilon\beta + \epsilon\gamma' - \epsilon\gamma\kappa_2)\mathbf{N}_2$$

olarak gelir. $\mathbf{T}'_{1*}$ ve $\mathbf{N}_{2*}$ vektörleri kullanılarak null Cartan eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisinin ikinci Bishop eğriliği,

$$\begin{aligned} \kappa_{2*} = & (\kappa_2 + \epsilon\alpha' + \epsilon\alpha\kappa_2) \left(\frac{\kappa_{2*}^2}{2} \epsilon\gamma + \kappa_{2*} \epsilon(\beta + \gamma' - \gamma\kappa_2) + \lambda_3 \right) \\ & - (1 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta') \left(\frac{\kappa_{2*}^2}{2} \epsilon\beta - \kappa_{2*} - \kappa_{2*} \epsilon(\alpha + \beta') + \lambda_2 + \lambda_3\kappa_2 \right) \\ & + (\epsilon\beta + \epsilon\gamma' - \epsilon\gamma\kappa_2) \left(\frac{\kappa_{2*}^2}{2} + \frac{\kappa_{2*}^2}{2} \epsilon\alpha - \kappa_{2*}\kappa_2 - \kappa_{2*} \epsilon(\alpha' + \alpha\kappa_2) \right. \\ & \quad \left. + \lambda_1 + \lambda_2\kappa_2 + \frac{\lambda_3\kappa_2^2}{2} \right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu denklem düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \kappa_{2*} = & \frac{\kappa_{2*}^2}{2} ((\epsilon\alpha + 1)(\epsilon\beta + \epsilon\gamma' - \epsilon\gamma\kappa_2) - \epsilon\beta(1 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta')) \\ & + \epsilon\gamma(\kappa_2 + \epsilon\alpha' + \epsilon\alpha\kappa_2) + \kappa_{2*}(1 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta')^2 \\ & + \lambda_1(\epsilon\beta + \epsilon\gamma' - \epsilon\gamma\kappa_2) \end{aligned}$$

$$+ \lambda_2((\epsilon\beta\kappa_2 + \epsilon\gamma'\kappa_2 - \epsilon\gamma\kappa_2^2) - (1 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta')) \\ + \lambda_3\left(\epsilon\alpha' - \epsilon\beta'\kappa_2 + \epsilon\frac{\kappa_2^2}{2}(\beta + \gamma' - \gamma\kappa_2)\right) \text{ olur, ve}$$

$$a = ((\epsilon\alpha + 1)(\epsilon\beta + \epsilon\gamma' - \epsilon\gamma\kappa_2) - \epsilon\beta(1 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta') + \epsilon\gamma(\kappa_2 + \epsilon\alpha' + \epsilon\alpha\kappa_2)),$$

$$b = ((1 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta')^2 - 1),$$

$$c = +\lambda_1(\epsilon\beta + \epsilon\gamma' - \epsilon\gamma\kappa_2) + \lambda_2((\epsilon\beta\kappa_2 + \epsilon\gamma'\kappa_2 - \epsilon\gamma\kappa_2^2) - (1 + \epsilon\alpha + \epsilon\beta')) \\ + \lambda_3\left(\epsilon\alpha' - \epsilon\beta'\kappa_2 + \epsilon\frac{\kappa_2^2}{2}(\beta + \gamma' - \gamma\kappa_2)\right)$$

katsayıları kabul edilir; ikinci dereceden denklem sistemi çözüldüğünde,

$$\kappa_{2*} = \left(\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}\right)^{1/2} - \frac{b}{a}$$

sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak *ikinci Bishop eğriliğinin birinci varyasyonu*

$$\delta\kappa_2 = -\kappa_2 - \frac{b}{a} + \left(\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}\right)^{1/2}$$

biçiminde ifade edilir.

4.8.3. Uygulamalar

Örnek 4.8.3.1. $\mathbf{r}(s) = \left(\frac{1}{5}\cos\sqrt{5}s, \frac{1}{5}\sin\sqrt{5}s, \frac{\sqrt{5}}{5}s\right)$ null Cartan eğrisinin Cartan vektör

alanları; $\mathbf{T}(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}s, \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\sqrt{5}s, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$,

$$\mathbf{N}(s) = (-\cos\sqrt{5}s, -\sin\sqrt{5}s, 0), \mathbf{B}(s) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\sin\sqrt{5}s, -\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\sqrt{5}s, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

olmak üzere $d_1 = \epsilon\bar{d}_1 = \sqrt{5}\epsilon$, $d_2 = \epsilon\bar{d}_2 = \frac{6}{5}\epsilon$, $d_3 = \epsilon\bar{d}_3 = \frac{2}{\sqrt{5}}\epsilon$ ofset mesafeleri

için $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{r}_*(s) = \left(\frac{1}{5}\cos\sqrt{5}s, \frac{1}{5}\sin\sqrt{5}s, \frac{\sqrt{5}}{5}s\right) + \epsilon\left(-\frac{6}{5}\cos\sqrt{5}s, -\frac{6}{5}\sin\sqrt{5}s, 2\right).$$

Şekil 4.13, Cartan vektör alanlarına göre ϵ nun farklı değerleri için orijinal eğri ve genelleştirilmiş ofset eğrisi arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

Şimdi, $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin Bishop vektör alanları; $\mathbf{T}_1(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \sin \sqrt{5}s, \frac{1}{\sqrt{5}} \cos \sqrt{5}s, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$,

$$\mathbf{N}_1(s) = -\kappa_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \sin \sqrt{5}s, \frac{1}{\sqrt{5}} \cos \sqrt{5}s, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + (-\cos \sqrt{5}s, -\sin \sqrt{5}s, 0),$$

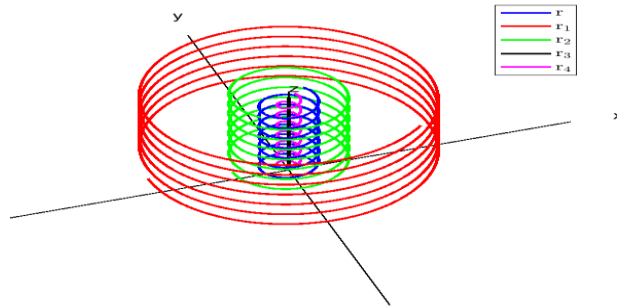
$$\begin{aligned} \mathbf{N}_2(s) = \frac{\kappa_2^2}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \sin \sqrt{5}s, \frac{1}{\sqrt{5}} \cos \sqrt{5}s, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \kappa_2(-\cos \sqrt{5}s, -\sin \sqrt{5}s, 0) \\ + \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \sin \sqrt{5}s, -\frac{\sqrt{5}}{2} \cos \sqrt{5}s, \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \end{aligned}$$

biçimindedir, ve ikinci Bishop eğriliği $\kappa_2(s) = -\sqrt{5} \tan\left(\frac{\sqrt{5}}{2}s\right)$ olarak bulunur.

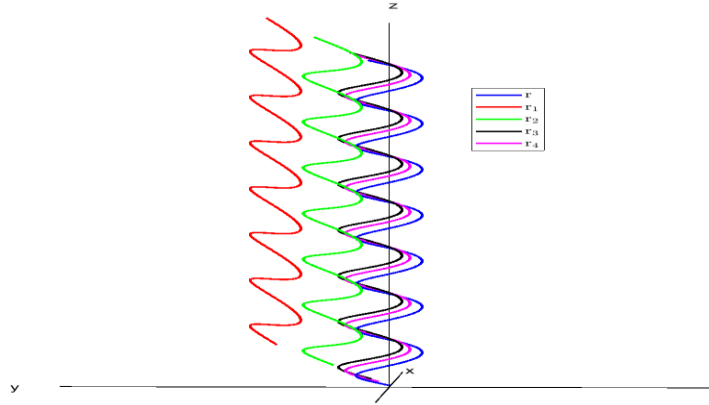
O zaman $d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \frac{\left(-\sqrt{5} \tan\left(\frac{\sqrt{5}}{2}s\right)\right)^2}{2} \epsilon$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = -\sqrt{5} \tan\left(\frac{\sqrt{5}}{2}s\right) \epsilon$, $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = \epsilon$ $\mathbf{r}(s)$ ofset mesafeleri için Bishop çatısına göre $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi;

$$\mathbf{r}_*(s) = \left(\frac{1}{5} \cos \sqrt{5}s, \frac{1}{5} \sin \sqrt{5}s, \frac{\sqrt{5}}{5}s\right) + \epsilon \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \sin \sqrt{5}s, -\frac{\sqrt{5}}{2} \cos \sqrt{5}s, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

olarak elde edilir. Şekil 4.14, ϵ nun farklı değerleri için orijinal eğriyi ve Bishop vektör alanlarına göre elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrilerini göstermektedir.



Şekil 4.13. $\mathbf{r}$ orijinal eğrisi (mavi) ve Cartan çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{6}$ için $\mathbf{r}_3$ (siyah) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için $\mathbf{r}_4$ (mor).



Şekil 4.14. $\mathbf{r}$ orijinal eğrisi (mavi) ve Bishop çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{6}$ için $\mathbf{r}_3$ (siyah) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için $\mathbf{r}_4$ (mor).

Örnek 4.8.3.2. $\mathbf{r}(s) = \left(\frac{1}{4}\cosh(2s), \frac{1}{2}s, \frac{1}{4}\sinh(2s)\right)$ null Cartan eğrisine ait Cartan çatısı; $\mathbf{T}(s) = \left(\frac{1}{2}\sinh(2s), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\cosh(2s)\right)$, $\mathbf{N}(s) = (\cosh(2s), 0, \sinh(2s))$ ve $\mathbf{B}(s) = (\sinh(2s), -1, \cosh(2s))$ şeklindedir.

$d_1 = \epsilon\bar{d}_1 = 2\epsilon$, $d_2 = \epsilon\bar{d}_2 = \epsilon$, $d_3 = \epsilon\bar{d}_3 = \epsilon$ ofset mesafelerine için $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin genelleştirilmiş ofset eğrisi;

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_*(s) &= \left(\frac{1}{4}\cosh(2s), \frac{1}{2}s, \frac{1}{4}\sinh(2s)\right) \\ &\quad + \epsilon(\cosh(2s) + 2\sinh(2s), 0, 2\cosh(2s) + \sinh(2s)).\end{aligned}$$

Şekil 4.15 de $\mathbf{r}$ eğrisi ve Cartan vektör alanları kullanılarak ϵ nun farklı değerleri için elde edilen $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ ve $\mathbf{r}_4$ genelleştirilmiş ofset eğrileri gösterilmektedir.

Şimdi, $\mathbf{r}(s)$ orijinal eğrisinin Bishop çatısı, $\mathbf{T}_1(s) = \left(\frac{1}{2}\sinh(2s), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\cosh(2s)\right)$,

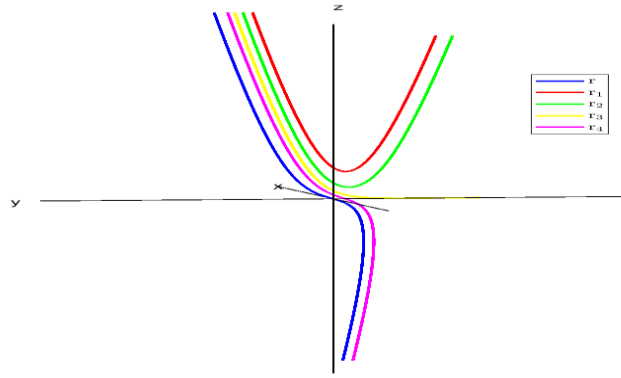
$$\mathbf{N}_1(s) = -\kappa_2 \left(\frac{1}{2}\sinh(2s), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\cosh(2s)\right) + (\cosh(2s), 0, \sinh(2s)),$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_2(s) &= \frac{\kappa_2^2}{2} \left(\frac{1}{2}\sinh(2s), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\cosh(2s)\right) - \kappa_2(\cosh(2s), 0, \sinh(2s)) \\ &\quad + (\sinh(2s), -1, \cosh(2s))\end{aligned}$$

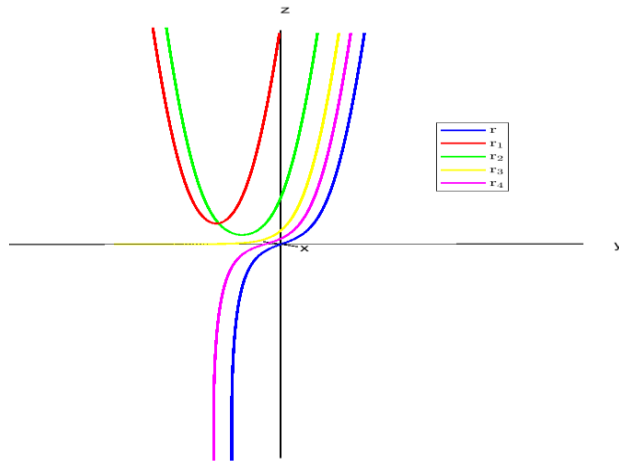
şeklindedir, ve ikinci Bishop eğriliği $\kappa_2(s) = \frac{2e^s - 2}{1 + e^s}$ olarak elde edilir.

$d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \frac{\left(\frac{2e^s-2}{1+e^s}\right)^2}{2} \epsilon$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = -\left(\frac{2e^s-2}{1+e^s}\right) \epsilon$, $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = \epsilon$ ofset mesafeleri için Bishop vektör alanları kullanılarak, $\mathbf{r}(s)$ nin genelleştirilmiş ofset eğrisi aşağıdaki gibi olup Şekil 4.16 da bu eğrilerin grafileri gösterilmiştir.

$$\mathbf{r}_*(s) = \left(\frac{1}{4} \cosh(2s), \frac{1}{2}s, \frac{1}{4} \sinh(2s)\right) + \epsilon(\sinh(2s), -1, \cosh(2s)).$$



Şekil 4.15. $\mathbf{r}$ orijinal eğrisi (mavi) ve Cartan çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için $\mathbf{r}_3$ (sarı) ve $\epsilon = \frac{1}{8}$ için $\mathbf{r}_4$ (mor).



Şekil 4.16. $\mathbf{r}$ orijinal eğrisi (mavi) ve Bishop çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için $\mathbf{r}_3$ (sarı) ve $\epsilon = \frac{1}{8}$ için $\mathbf{r}_4$ (mor).

Örnek 4.8.3.3. $\mathbf{r}(s) = \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s}{2}, \frac{s^2}{2}, \frac{s^3}{6} + \frac{s}{2}\right)$ null Cartan eğrisinin Cartan çatısı

$$\mathbf{T}(s) = \left(\frac{s^2}{2} - \frac{1}{2}, s, \frac{s^2}{2} + \frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{N}(s) = (s, 1, s), \quad \mathbf{B}(s) = (1, 0, 1) \text{ dir.}$$

$d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = 2\epsilon$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = \epsilon s$, $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = \epsilon$ ofset mesafeleri için genelleştirilmiş ofset eğrisi;

$$\mathbf{r}^*(s) = \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s}{2}, \frac{s^2}{2}, \frac{s^3}{6} + \frac{s}{2}\right) + \epsilon(2s^2, 3s, 2s^2 + 2).$$

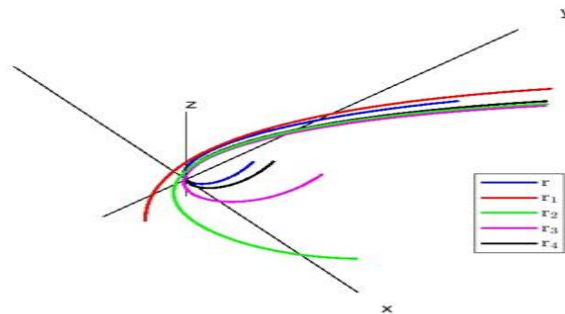
Şekil 4.17 de $\mathbf{r}(s)$ eğrisi ve ϵ nun farklı değerleri için elde edilen genelleştirilmiş ofsetlerinin grafikleri verilmiştir.

$\mathbf{r}(s)$ eğrisinin Bishop çatısına göre genelleştirilmiş ofset eğrisini bulalım:

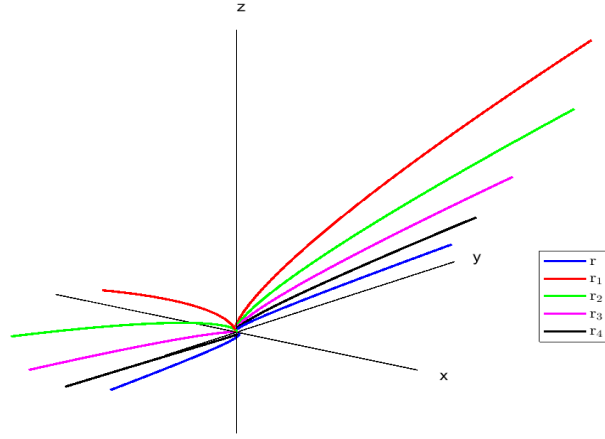
$\mathbf{T}_1(s) = \left(\frac{s^2}{2} - \frac{1}{2}, s, \frac{s^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{N}_1(s) = \left(\frac{1}{s}, -1, \frac{1}{s}\right)$ ve $\mathbf{N}_2(s) = \left(-\frac{1}{s^2}, 0, \frac{1}{s^2}\right)$ Bishop vektör alanları olup, ikinci Bishop eğriliği de $\kappa_2(s) = \frac{2}{s}$ dir. O zaman $d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \epsilon$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = \epsilon \frac{s^3}{2}$, $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = \epsilon s^4$ için elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrisi;

$$\mathbf{r}_*(s) = \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s}{2}, \frac{s^2}{2}, \frac{s^3}{6} + \frac{s}{2}\right) + \epsilon \left(-\frac{1}{2}, \frac{s^3}{2} + s, 2s^2 + \frac{1}{2}\right).$$

Şekil 4.18, Bishop vektörler alanlarından elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrilerin ve orijinal eğrinin grafiklerini göstermektedir.



Şekil 4.17. $\mathbf{r}$ orijinal eğrisi (mavi) ve Cartan çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için $\mathbf{r}_3$ (siyah) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için $\mathbf{r}_4$ (mor).



Şekil 4.18. $\mathbf{r}$ orijinal eğrisi (mavi) ve Bishop çatısı kullanılarak elde edilen genelleştirilmiş ofset eğrileri; $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (kırmızı), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{4}$ için $\mathbf{r}_3$ (siyah) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için $\mathbf{r}_4$ (mor).

5. MINKOWSKI UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ OFSET YÜZEYLERİ VE VARYASYONLARI

Tez çalışmamızın bu bölümünde, üç boyutlu Minkowski uzayında genelleştirilmiş ofset yüzeyleri, baz yüzeyin parametreleri türünden tanımlanmış olup, geometrik özellikleri ifade edilmiştir. Ardından genelleştirilmiş ofset yüzeyin, standart ofset yüzeyi türünden ifade edilebilmesini sağlayan koşullar sunulmuştur. Minkowski uzayında tanımlanan standart ofset yüzeyine ilişkin invaryantlar ve onların varyasyon hesabı verilmiştir. Ek olarak, dejenere olmayan baz yüzey ile onun genelleştirilmiş ofset yüzeyi arasındaki yüzölçüm değişimini ifade eden birinci ve ikinci varyasyon ile birinci varyasyonunun Gauss karakterizasyonu elde edilmiştir. Son olarak genelleştirilmiş ofset yüzeye ilişkin örnekler grafikleriyle birlikte verilmiştir.

5.1. Genelleştirilmiş Ofset Yüzeyleri

$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, dejenere olmayan, köşegenleştirilebilir şekil operatörlü düzgün parametrik bir yüzey ve bu yüzeyin $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$ çatısı

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_u(u, v)}{|\mathbf{r}_u(u, v)|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_v(u, v)}{|\mathbf{r}_v(u, v)|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)}{|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)|} \quad (5.1)$$

biçiminde tanımlansın. $\mathbf{r}(u, v)$ yüzeyinin $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$ yerel dik koordinat sistemini kullanarak $\mathbf{r}^*(u, v)$ genelleştirilmiş ofset yüzeyi, Minkowski uzayında değişken ofset yönü ve ofset mesafesi ile ifade edilir.

Tanım 5.1.1. Dejenere olmayan, köşegenleştirilebilir şekil operatörlü düzgün parametrik $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ yüzeyi için değişken ofset yönü ve mesafesi ile $\mathbf{r}^*(u, v)$ genelleştirilmiş ofset yüzeyi

$$\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + d_1(u, v)\mathbf{e}_1 + d_2(u, v)\mathbf{e}_2 + d_3(u, v)\mathbf{n} \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $d_1(u, v)$, $d_2(u, v)$ ve $d_3(u, v)$ ifadeleri u ve v değişkenlerinin birer fonksiyonudur. Ofset yönü ve mesafesi $d_1\mathbf{e}_1$, $d_2\mathbf{e}_2$ ve $d_3\mathbf{n}$ ile belirlenir.

Genelleştirilmiş ofset yüzeyin ϵ komşuluk yaklaşımlı denklemi

$$\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + \delta \mathbf{r}(u, v) \quad (5.3)$$

biçiminde yazılır. Burada

$$\delta \mathbf{r}(u, v) = d_1 \mathbf{e}_1 + d_2 \mathbf{e}_2 + d_3 \mathbf{n} \quad (5.4)$$

ve

$$d_1 = \epsilon \bar{d}_1(u, v), d_2 = \epsilon \bar{d}_2(u, v), d_3 = \epsilon \bar{d}_3(u, v) \quad (5.5)$$

dir. $\mathbf{r}^*(u, v)$ ofset yüzeyi, $\epsilon \rightarrow 0$ için $\mathbf{r}(u, v)$ orijinal yüzeyine yaklaşır ve $\epsilon = 1$ için Eşitlik 5.2 de verilen denklem haline gelir.

Minkowski uzayında $\mathbf{r}(u, v)$ dejenere olmayan, köşegenleştirilebilir şekil operatörlü düzgün yüzeyinin I. ve II. temel form büyüklükleri, Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$E = \mathbf{r}_u^2 = -\rho A_1^2, \quad F = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v, \quad G = \mathbf{r}_v^2 = A_2^2 \quad (5.6)$$

$$D = \mathbf{n} \mathbf{r}_{uu}, \quad D' = \mathbf{n} \mathbf{r}_{uv}, \quad D'' = \mathbf{n} \mathbf{r}_{vv} \quad (5.7)$$

$$K = \rho \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} \quad \text{ve} \quad 2H = \rho \frac{ED'' - 2FD' + GD}{EG - F^2} \quad (5.8)$$

şeklindedir.

$\mathbb{E}_1^3$ de $\mathbf{r}(u, v)$ yüzeyinin $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$ yerel dik koordinat sistemini kullanarak yüzeyin türev formülleri

$$\mathbf{e}_{1u} = \left(-\frac{A_{1u}}{\rho A_1} - \frac{A_{1u}}{A_1} \right) \mathbf{e}_1 + \left(-\frac{A_{1v}}{A_2} \right) \mathbf{e}_2 + \left(-\frac{A_1}{R_1} \right) \mathbf{n},$$

$$\mathbf{e}_{2u} = \left(-\frac{A_{1v}}{\rho A_2} \right) \mathbf{e}_1 \quad \text{ve} \quad \mathbf{n}_u = \left(-\frac{A_1}{R_1} \right) \mathbf{e}_1;$$

$$\mathbf{e}_{1v} = \left(-\frac{A_{1v}}{\rho A_1} - \frac{A_{1v}}{A_1} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{A_{2u}}{A_1} \right) \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{e}_{2v} = \left(\frac{A_{2u}}{\rho A_1} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{A_2}{\rho R_2} \right) \mathbf{n} \quad \text{ve} \quad \mathbf{n}_v = \left(-\frac{A_2}{R_2} \right) \mathbf{e}_2$$

biçiminde hesaplanır. Burada $\langle \mathbf{n}_u, \mathbf{e}_1 \rangle = \rho \frac{A_1}{R_1}$ ve $\langle \mathbf{n}_v, \mathbf{e}_2 \rangle = -\frac{A_2}{R_2}$ dir.

$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \rho = -1$ ise, $\mathbf{r}(u, v)$ uzay benzeri yüzey,

$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \rho = 1$ ise, $\mathbf{r}(u, v)$ zaman benzeri yüzey, ve

$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = -\rho$, $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 1$ dir.

Benzer şekilde $\mathbf{r}^*(u, v)$ genelleştirilmiş ofset yüzeyinin I. temel form ve II. temel form büyüklükleri ile Gauss ve ortalama eğriliklerini ifade edebiliriz. $\mathbf{r}^*(u, v)$ genelleştirilmiş ofset yüzeyinin kısmi türevleri;

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u^*(u, v) &= \mathbf{r}_u + \epsilon(\bar{d}_{1u}\mathbf{e}_1 + \bar{d}_1\mathbf{e}_{1u} + \bar{d}_{2u}\mathbf{e}_2 + \bar{d}_2\mathbf{e}_{2u} + \bar{d}_{3u}\mathbf{n} + \bar{d}_3\mathbf{n}_u) \\ &= A_1\mathbf{e}_1 + \epsilon \left[\left(\bar{d}_{1u} - \bar{d}_1 \frac{A_{1u}}{A_1} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) - \bar{d}_2 \frac{A_{1v}}{\rho A_2} - \bar{d}_3 \frac{A_1}{R_1} \right) \mathbf{e}_1 + \left(-\bar{d}_1 \frac{A_{1v}}{A_2} + \bar{d}_{2u} \right) \mathbf{e}_2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\bar{d}_{3u} - \bar{d}_1 \frac{A_1}{R_1} \right) \mathbf{n} \right] \\ &\triangleq A_1\mathbf{e}_1 + \epsilon \bar{B}_1\mathbf{e}_1 + \epsilon \bar{B}_2\mathbf{e}_2 + \epsilon \bar{B}_3\mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_v^*(u, v) &= \mathbf{r}_v + \epsilon(\bar{d}_{1v}\mathbf{e}_1 + \bar{d}_1\mathbf{e}_{1v} + \bar{d}_{2v}\mathbf{e}_2 + \bar{d}_2\mathbf{e}_{2v} + \bar{d}_{3v}\mathbf{n} + \bar{d}_3\mathbf{n}_v) \\ &= A_2\mathbf{e}_2 + \epsilon \left[\left(\bar{d}_{1v} - \bar{d}_1 \frac{A_{1v}}{A_1} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) + \bar{d}_2 \frac{A_{2u}}{\rho A_1} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\bar{d}_{2v} + \bar{d}_1 \frac{A_{2u}}{A_1} - \bar{d}_3 \frac{A_2}{R_2} \right) \mathbf{e}_2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\bar{d}_{3v} + \bar{d}_2 \frac{A_2}{\rho R_2} \right) \mathbf{n} \right] \\ &\triangleq A_2\mathbf{e}_2 + \epsilon \bar{C}_1\mathbf{e}_1 + \epsilon \bar{C}_2\mathbf{e}_2 + \epsilon \bar{C}_3\mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.10)$$

olarak elde edilir. Burada $\mathbf{r}_u$, $\bar{d}_{1u}$, $\bar{d}_{2u}$, $\bar{d}_{3u}$, A_{1u} , A_{2u} , $\mathbf{e}_{1u}$, $\mathbf{e}_{2u}$, $\mathbf{n}_u$ değerleri $\mathbf{r}$, $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$, $\bar{d}_3$, A_1 , A_2 , $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{n}$ nin u parametresine göre kısmi türevleri; $\mathbf{r}_v$, $\bar{d}_{1v}$, $\bar{d}_{2v}$, $\bar{d}_{3v}$, A_{1v} , A_{2v} , $\mathbf{e}_{1v}$, $\mathbf{e}_{2v}$, $\mathbf{n}_v$ değerleri ise $\mathbf{r}$, $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$, $\bar{d}_3$, A_1 , A_2 , $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{n}$ nin v parametresine göre kısmi türevleridir. R_1 ve R_2 asal eğrilik yarıçaplarıdır. İkinci mertebeden kısmi türevleri ise aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uu}^*(u, v) &= A_{1u}\mathbf{e}_1 + A_1\mathbf{e}_{1u} \\ &\quad + \epsilon(\bar{B}_{1u}\mathbf{e}_1 + \bar{B}_1\mathbf{e}_{1u} + \bar{B}_{2u}\mathbf{e}_2 + \bar{B}_2\mathbf{e}_{2u} + \bar{B}_{3u}\mathbf{n} + \bar{B}_3\mathbf{n}_u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A_{1u}}{\rho} \mathbf{e}_1 - \frac{A_1 A_{1v}}{A_2} \mathbf{e}_2 - \frac{A_1^2}{R_1} \mathbf{n} \\
&\quad + \epsilon \left(\left(\bar{B}_{1u} - \bar{B}_1 \frac{A_{1u}}{A_1} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) - \bar{B}_2 \frac{A_{1v}}{\rho A_2} - \bar{B}_3 \frac{A_1}{R_1} \right) \mathbf{e}_1 \right. \\
&\quad \left. + \left(\bar{B}_{2u} - \bar{B}_1 \frac{A_{1v}}{A_2} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\bar{B}_{3u} - \bar{B}_1 \frac{A_1}{R_1} \right) \mathbf{n} \right),
\end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_{uv}^*(u, v) = \mathbf{r}_{vu}^*(u, v)$$

$$\begin{aligned}
&= A_{1v} \mathbf{e}_1 + A_1 \mathbf{e}_{1v} \\
&\quad + \epsilon (\bar{B}_{1v} \mathbf{e}_1 + \bar{B}_1 \mathbf{e}_{1v} + \bar{B}_{2v} \mathbf{e}_2 + \bar{B}_2 \mathbf{e}_{2v} + \bar{B}_{3v} \mathbf{n} + \bar{B}_3 \mathbf{n}_v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A_{1v}}{\rho} \mathbf{e}_1 + A_{2u} \mathbf{e}_2 \\
&\quad + \epsilon \left(\left(\bar{B}_{1v} - \bar{B}_1 \frac{A_{1v}}{A_1} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) + \bar{B}_2 \frac{A_{2u}}{\rho A_1} \right) \mathbf{e}_1 \right. \\
&\quad \left. + \left(\bar{B}_{2v} + \bar{B}_1 \frac{A_{2u}}{A_1} - \bar{B}_3 \frac{A_2}{R_2} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\bar{B}_{3v} + \bar{B}_2 \frac{A_{2u}}{\rho A_1} \right) \mathbf{n} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{vv}^*(u, v) &= A_{2v} \mathbf{e}_2 + A_2 \mathbf{e}_{2v} \\
&\quad + \epsilon (\bar{C}_{1v} \mathbf{e}_1 + \bar{C}_1 \mathbf{e}_{1v} + \bar{C}_{2v} \mathbf{e}_2 + \bar{C}_2 \mathbf{e}_{2v} + \bar{C}_{3v} \mathbf{n} + \bar{C}_3 \mathbf{n}_v) \\
&= \frac{A_2 A_{2u}}{\rho A_1} \mathbf{e}_1 + A_{2v} \mathbf{e}_2 + \frac{A_2^2}{\rho R_2} \mathbf{n} \\
&\quad + \epsilon \left(\left(\bar{C}_{1v} - \bar{C}_1 \frac{A_{1v}}{A_1} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) + \bar{C}_2 \frac{A_{2u}}{\rho A_1} \right) \mathbf{e}_1 \right. \\
&\quad \left. + \left(\bar{C}_{2v} + \bar{C}_1 \frac{A_{2u}}{A_1} - \bar{C}_3 \frac{A_2}{R_2} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\bar{C}_{3v} + \bar{C}_2 \frac{A_2}{\rho R_2} \right) \mathbf{n} \right).
\end{aligned}$$

Sonuç olarak, $\mathbf{r}^*(u, v)$ genelleştirilmiş ofset yüzeyinin I. temel form katsayıları, birim teğet vektörleri ve birim normal vektörü sırasıyla,

$$E^* = \mathbf{r}_u^{*2} = E(= -\rho A_1^2) - 2\rho\epsilon A_1 \bar{B}_1 - \rho\epsilon^2 \left(\bar{B}_1^2 - \frac{1}{\rho} \bar{B}_2^2 - \bar{B}_3^2 \right),$$

$$F^* = \mathbf{r}_u^* \cdot \mathbf{r}_v^* = F(= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v) + \epsilon(-\rho A_1 \bar{C}_1 + A_2 \bar{B}_2) + \epsilon^2(-\rho \bar{B}_1 \bar{C}_1 + \bar{B}_2 \bar{C}_2 + \bar{B}_3 \bar{C}_3),$$

$$G^* = \mathbf{r}_v^{*2} = G(= A_2^2) + 2\epsilon A_2 \bar{C}_2 - \rho \epsilon^2 \left(\bar{C}_1^2 - \frac{1}{\rho} \bar{C}_2^2 - \bar{C}_3^2 \right),$$

$$\mathbf{e}_1^* = \frac{\mathbf{r}_u^*(u, v)}{|\mathbf{r}_u^*(u, v)|} = \frac{A_1 \mathbf{e}_1 + \epsilon (\bar{B}_1 \mathbf{e}_1 + \bar{B}_2 \mathbf{e}_2 + \bar{B}_3 \mathbf{n})}{\sqrt{E^*}},$$

$$\mathbf{e}_2^* = \frac{\mathbf{r}_v^*(u, v)}{|\mathbf{r}_v^*(u, v)|} = \frac{A_2 \mathbf{e}_2 + \epsilon (\bar{C}_1 \mathbf{e}_1 + \bar{C}_2 \mathbf{e}_2 + \bar{C}_3 \mathbf{n})}{\sqrt{G^*}},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^* &= \frac{\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*}{|\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|} = \frac{A_1 A_2}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}} \mathbf{n} \\ &\quad + \epsilon \left(-\frac{A_2 \bar{B}_3}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}} \mathbf{e}_1 + \frac{A_1 \bar{C}_3}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}} \mathbf{e}_2 + \frac{A_1 \bar{C}_2 + A_2 \bar{B}_1}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}} \mathbf{n} \right) \\ &\quad + \epsilon^2 \left(\frac{\bar{B}_2 \bar{C}_3 - \bar{B}_3 \bar{C}_2}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}} \mathbf{e}_1 + \frac{\bar{B}_1 \bar{C}_3 - \bar{B}_3 \bar{C}_1}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}} \mathbf{e}_2 + \frac{\bar{B}_1 \bar{C}_2 - \bar{B}_2 \bar{C}_1}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}} \mathbf{n} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^* &\triangleq \frac{A_1 A_2}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}} \mathbf{n} + \epsilon (\bar{M}_{11} \mathbf{e}_1 + \bar{M}_{21} \mathbf{e}_2 + \bar{M}_{31} \mathbf{n}) \\ &\quad + \epsilon^2 (\bar{M}_{12} \mathbf{e}_1 + \bar{M}_{22} \mathbf{e}_2 + \bar{M}_{32} \mathbf{n}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\mathbf{r}^*(u, v)$ genelleştirilmiş ofset yüzeyinin II. temel form katsayıları;

$$\begin{aligned} D^* = \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{r}_{uu}^* &= \rho \frac{A_1 A_2}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}} \left(-\frac{A_1^2}{R_1} + \epsilon \left(\bar{B}_{3u} - \bar{B}_1 \frac{A_1}{R_1} \right) \right) \\ &\quad + (\bar{M}_{11} + \epsilon \bar{M}_{12}) \left(\epsilon A_{1u} - \epsilon^2 \rho \left(\bar{B}_{1u} - \bar{B}_1 \frac{A_{1u}}{A_1} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) - \bar{B}_2 \frac{A_{1u}}{\rho A_2} - \bar{B}_3 \frac{A_1}{R_1} \right) \right) \\ &\quad + (\bar{M}_{21} + \epsilon \bar{M}_{22}) \left(\epsilon \left(-\frac{A_1 A_{1v}}{A_2} \right) + \epsilon^2 \left(\bar{B}_{2u} - \bar{B}_1 \frac{A_{1v}}{A_2} \right) \right) \\ &\quad + (\bar{M}_{31} + \epsilon \bar{M}_{32}) \left(\epsilon \rho \left(-\frac{A_1^2}{R_1} \right) + \epsilon^2 \rho \left(\bar{B}_{3u} - \bar{B}_1 \frac{A_1}{R_1} \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{*'} = \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{r}_{uv}^* &= \epsilon \rho \frac{A_1 A_2}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}} \left(\bar{B}_{3v} + \bar{B}_2 \frac{A_{2u}}{\rho A_1} \right) \\ &\quad + (\bar{M}_{11} + \epsilon \bar{M}_{12}) \left(\epsilon A_{1v} - \epsilon^2 \rho \left(\bar{B}_{1v} - \bar{B}_1 \frac{A_{1v}}{A_1} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) + \bar{B}_2 \frac{A_{2u}}{\rho A_1} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\overline{M}_{21} + \epsilon \overline{M}_{22}) \left(\epsilon A_{2u} + \epsilon^2 \left(\overline{B}_{2v} + \overline{B}_1 \frac{A_{2u}}{A_1} - \overline{B}_3 \frac{A_2}{R_2} \right) \right) \\
& +(\overline{M}_{31} + \epsilon \overline{M}_{32}) \left(\epsilon^2 \rho \left(\overline{B}_{3v} + \overline{B}_2 \frac{A_{2u}}{\rho A_1} \right) \right), \\
D^{*''} = \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{r}_{vv}^* &= \frac{A_1 A_2}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}} \left(\frac{A_2^2}{R_2} + \epsilon \rho \left(\overline{C}_{3v} + \overline{C}_2 \frac{A_2}{\rho R_2} \right) \right) \\
& +(\overline{M}_{11} + \epsilon \overline{M}_{12}) \left(\epsilon \left(-\frac{A_2 A_{2u}}{A_1} \right) - \epsilon^2 \rho \left(\overline{C}_{1v} - \overline{C}_1 \frac{A_{1v}}{A_1} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) + \overline{C}_2 \frac{A_{2v}}{\rho A_1} \right) \right) \\
& +(\overline{M}_{21} + \epsilon \overline{M}_{22}) \left(\epsilon A_{2v} + \epsilon^2 \left(\overline{C}_{2v} + \overline{C}_1 \frac{A_{2u}}{A_1} - \overline{C}_3 \frac{A_2}{R_2} \right) \right) \\
& +(\overline{M}_{31} + \epsilon \overline{M}_{32}) \left(\epsilon \frac{A_2^2}{\rho R_2} + \epsilon^2 \rho \left(\overline{C}_{3v} + \overline{C}_2 \frac{A_2}{\rho R_2} \right) \right)
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. $\mathbb{E}_1^3$ de $\mathbf{r}^*(u, v)$ genelleştirilmiş ofset yüzeyinin Gauss eğriliği de

$$K^* = \rho \frac{D^* D^{*''} - (D^{*'})^2}{E^* G^* - F^{*2}} \quad (5.11)$$

olarak yazılır.

Genelleştirilmiş ofset yüzeyinin standart ofset yüzey türünden ifadesine ilişkin analizler aşağıdaki gibidir:

Teorem 5.1.1. $\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + d_1(u, v)\mathbf{e}_1 + d_2(u, v)\mathbf{e}_2 + d_3(u, v)\mathbf{n}$ olarak verilen genelleştirilmiş ofset yüzeyi

$$\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}_1(u, v) + d\mathbf{n}_1 \quad (5.12)$$

denklemini kullanılarak standart ofset şeklinde ifade edilir. Burada, Minkowski uzayında $\mathbf{r}_1(u, v)$ yeni bir dejenere olmayan, köşegenleştirilebilir şekil operatörlü, düzgün parametrik bir yüzey, d sabit ofset mesafesi ve $\mathbf{n}_1$ ise $\mathbf{r}_1(u, v)$ nin birim normal vektörüdür.

Eşitlik 5.12 de tanımlanan standart ofset yüzeyi $d = \epsilon \overline{d}$ ilişkisi kullanılarak

$$\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}_1(u, v) + \epsilon \bar{d} \mathbf{n}_1 \quad (5.13)$$

şeklinde yazılır.

İspat. $\mathbb{E}_1^3$ de genelleştirilmiş ofset yüzeyi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^* &= \mathbf{r} + d_1 \mathbf{e}_1 + d_2 \mathbf{e}_2 + d_3 \mathbf{n} \\ &= \mathbf{r} + M \mathbf{e}_1 + N \mathbf{e}_2 + P \mathbf{n} + (d_1 - M) \mathbf{e}_1 + (d_2 - N) \mathbf{e}_2 + (d_3 - P) \mathbf{n} \\ &\triangleq \mathbf{r}_1(u, v) + \epsilon \bar{d} \mathbf{n}_1 \end{aligned} \quad (5.14)$$

ile ifade edilir. Burada M, N ve P değerleri u ve v ye bağlı fonksiyonlardır. Ayrıca

$$\begin{aligned} d_1 &= \epsilon \bar{d}_1(u, v), & d_2 &= \epsilon \bar{d}_2(u, v), & d_3 &= \epsilon \bar{d}_3(u, v) \\ M &= \epsilon \bar{M}(u, v), & N &= \epsilon \bar{N}(u, v), & P &= \epsilon \bar{P}(u, v) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\langle d \mathbf{n}_1, d \mathbf{n}_1 \rangle} = \|(d_1 - M) \mathbf{e}_1 + (d_2 - N) \mathbf{e}_2 + (d_3 - P) \mathbf{n}\| \\ &= \epsilon \sqrt{\left| -\rho(\bar{d}_1 - \bar{M})^2 + (\bar{d}_2 - \bar{N})^2 + \rho(\bar{d}_3 - \bar{P})^2 \right|}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{n}_1 = \epsilon \left(\frac{(\bar{d}_1 - \bar{M})}{d} \mathbf{e}_1 + \frac{(\bar{d}_2 - \bar{N})}{d} \mathbf{e}_2 + \frac{(\bar{d}_3 - \bar{P})}{d} \mathbf{n} \right)$$

olarak yazılır. $\mathbf{r}_1(u, v)$ yüzeyinin parametrik kısmi türevleri alınır

$$\mathbf{r}_{1u} = \mathbf{r}_u + \epsilon (\bar{M}_u \mathbf{e}_1 + \bar{M} \mathbf{e}_{1u} + \bar{N}_u \mathbf{e}_2 + \bar{N} \mathbf{e}_{2u} + \bar{P}_u \mathbf{n} + \bar{P} \mathbf{n}_u),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1u} &= A_1 \mathbf{e}_1 + \epsilon \left(\left(\bar{M}_u - \bar{M} \frac{A_{1u}}{A_1} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) - \bar{N} \frac{A_{1v}}{\rho A_2} - \bar{P} \frac{A_1}{R_1} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\bar{N}_u - \bar{M} \frac{A_{1v}}{A_2} \right) \mathbf{e}_2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\bar{P}_u - \bar{M} \frac{A_1}{R_1} \right) \mathbf{n} \right), \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_{1v} = \mathbf{r}_v + \epsilon (\bar{M}_v \mathbf{e}_1 + \bar{M} \mathbf{e}_{1v} + \bar{N}_v \mathbf{e}_2 + \bar{N} \mathbf{e}_{2v} + \bar{P}_v \mathbf{n} + \bar{P} \mathbf{n}_v),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1u} = A_2 \mathbf{e}_2 + \epsilon \left(\left(\bar{M}_v - \bar{M} \frac{A_{1v}}{A_1} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) + \bar{N} \frac{A_{2u}}{\rho A_1} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\bar{N}_v + \bar{M} \frac{A_{2u}}{A_1} - \bar{P} \frac{A_2}{R_2} \right) \mathbf{e}_2 \right. \\ \left. + \left(\bar{P}_v + \bar{N} \frac{A_2}{\rho R_2} \right) \mathbf{n} \right) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $\bar{M}_u$, $\bar{M}_v$, $\bar{N}_u$, $\bar{N}_v$, $\bar{P}_u$ ve $\bar{P}_v$ değerleri M, N ve P değerlerinin u ve v ye göre kısmi türevleridir. (5.14) te verilen bağıntının sağlanabilmesi için aşağıda verilen iki koşulun gerçekleşmesi gerekir:

1. $\mathbf{n}_1$ birim normal vektörü, $\mathbf{r}_1$ standart ofset yüzeyinin birim normal vektörü olmalıdır. Yani $\langle \mathbf{r}_{1u}, d\mathbf{n}_1 \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{r}_{1v}, d\mathbf{n}_1 \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} -\epsilon \rho (\bar{d}_1 - \bar{M}) A_1 + \epsilon^2 \left(-\rho (\bar{d}_1 - \bar{M}) \left(\bar{M}_u - \bar{M} \frac{A_{1u}}{A_1} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) - \bar{N} \frac{A_{1v}}{\rho A_2} - \bar{P} \frac{A_1}{R_1} \right) \right. \\ \left. + \epsilon^2 \left((\bar{d}_2 - \bar{N}) \left(\bar{N}_u - \bar{M} \frac{A_{1v}}{A_2} \right) + \rho (\bar{d}_3 - \bar{P}) \left(\bar{P}_u - \bar{M} \frac{A_1}{R_1} \right) \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

ve

$$\begin{aligned} \epsilon (\bar{d}_2 - \bar{N}) A_2 + \epsilon^2 \left(-\rho (\bar{d}_1 - \bar{M}) \left(\bar{M}_v - \bar{M} \frac{A_{1v}}{A_1} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) + \bar{N} \frac{A_{2u}}{\rho A_1} \right) \right. \\ \left. + \epsilon^2 \left((\bar{d}_2 - \bar{N}) \left(\bar{N}_v + \bar{M} \frac{A_{2u}}{A_1} - \bar{P} \frac{A_2}{R_2} \right) + \rho (\bar{d}_3 - \bar{P}) \left(\bar{P}_v + \bar{N} \frac{A_2}{\rho R_2} \right) \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

biçimindedir.

2. d sabittir, yani

$$\epsilon^2 \left| -\rho (\bar{d}_1 - \bar{M})^2 + (\bar{d}_2 - \bar{N})^2 + \rho (\bar{d}_3 - \bar{P})^2 \right| = \text{sabit} \quad (5.18)$$

şeklinde yazılabilir. O zaman

$$\epsilon^2 \left(-\rho (\bar{d}_1 - \bar{M}) (\bar{d}_{1u} - \bar{M}_u) + (\bar{d}_2 - \bar{N}) (\bar{d}_{2u} - \bar{N}_u) \right. \\ \left. + \rho (\bar{d}_3 - \bar{P}) (\bar{d}_{3u} - \bar{P}_u) \right) = 0, \quad (5.19)$$

$$\epsilon^2 \left(-\rho (\bar{d}_1 - \bar{M}) (\bar{d}_{1v} - \bar{M}_v) + (\bar{d}_2 - \bar{N}) (\bar{d}_{2v} - \bar{N}_v) \right. \\ \left. + \rho (\bar{d}_3 - \bar{P}) (\bar{d}_{3v} - \bar{P}_v) \right) = 0 \quad (5.20)$$

denklemleri elde edilir. $\bar{M}, \bar{N}$ ve $\bar{P}$ değerlerinin hesabı için (5.16) ve (5.19) denklemlerinden

$$\begin{aligned} & -\epsilon\rho(\bar{d}_1 - \bar{M})A_1 + \epsilon^2\left(\rho\bar{d}_{1u} - \frac{A_{1v}}{A_2}\bar{d}_2 - \rho\frac{A_1}{R_1}\bar{d}_3 + (1+\rho)\frac{A_{1u}}{A_1}\bar{d}_1\right)\bar{M} \\ & + \epsilon^2\left((1+\rho)\frac{A_{1u}}{A_1}\right)\bar{M}^2 + \epsilon^2\left(-\bar{d}_{2u} + \frac{A_{1v}}{A_2}\bar{d}_1\right)\bar{N} \\ & + \epsilon^2\left(\rho\bar{d}_1\frac{A_1}{R_1} - \rho\bar{d}_{3u}\right)\bar{P} + \epsilon^2(-\rho\bar{d}_1\bar{d}_{1u} + \bar{d}_2\bar{d}_{2u} + \rho\bar{d}_3\bar{d}_{3u}) = 0, \end{aligned}$$

bulunur, ve kısaca aşağıdaki şekliyle yazılırsa

$$-\epsilon\rho(\bar{d}_1 - \bar{M})A_1 + \epsilon^2\left(\alpha_1\bar{M} + \alpha_{11}\bar{M}^2 + \beta_1\bar{N} + \gamma_1\bar{P} + w_1\right) = 0 \quad (5.21)$$

olur. Eşitlik 5.17 ve 5.20 den

$$\begin{aligned} & \epsilon(\bar{d}_2 - \bar{N})A_2 + \epsilon^2\left(\rho\bar{d}_{1v} + \frac{A_{2u}}{A_1}\bar{d}_2 + (1+\rho)\frac{A_{1v}}{A_1}\bar{d}_1\right)\bar{M} - \epsilon^2\left((1+\rho)\frac{A_{1v}}{A_1}\right)\bar{M}^2 \\ & + \epsilon^2\left(-\bar{d}_{2v} - \frac{A_{2u}}{A_1}\bar{d}_1 + \frac{A_2}{R_2}\bar{d}_3\right)\bar{N} + \epsilon^2\left(-\rho\bar{d}_{3v} + \bar{d}_2\frac{A_2}{R_2}\right)\bar{P} \\ & + \epsilon^2(-\rho\bar{d}_1\bar{d}_{1v} + \bar{d}_2\bar{d}_{2v} + \rho\bar{d}_3\bar{d}_{3v}) = 0 \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır ve kısaca aşağıdaki biçimde ifade edilirse,

$$\epsilon(\bar{d}_2 - \bar{N})A_2 + \epsilon^2\left(\alpha_2\bar{M} - \alpha_{22}\bar{M}^2 + \beta_2\bar{N} + \gamma_2\bar{P} + w_2\right) = 0 \quad (5.22)$$

bulunur. Ayrıca,

$$(\epsilon^2\beta_2 - \epsilon A_2)(\epsilon^2\alpha_1 + \epsilon\rho A_1) - \epsilon^4\alpha_2\beta_1 \triangleq \tilde{\alpha},$$

$$\epsilon^2\gamma_1(\epsilon^2\beta_2 - \epsilon A_2) - \epsilon^4\beta_1\gamma_2 \triangleq \tilde{\beta},$$

$$-\epsilon^2\gamma_2(\epsilon^2\alpha_1 + \epsilon\rho A_1) + \epsilon^4\alpha_2\gamma_1 \triangleq \tilde{\gamma}$$

olarak belirlenirse,

$$\bar{M} = \bar{d}_1 - \frac{\tilde{\beta}c_0}{\sqrt{\rho\tilde{\alpha}^2 - \rho\tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2}},$$

$$\bar{N} = \bar{d}_2 + \frac{\tilde{\gamma}c_0}{\sqrt{\rho\tilde{\alpha}^2 - \rho\tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2}},$$

$$\bar{P} = \bar{d}_3 + \frac{\tilde{\alpha}c_0}{\sqrt{\rho\tilde{\alpha}^2 - \rho\tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2}}$$

denklemleri elde edilir, burada $\rho\tilde{\alpha}^2 - \rho\tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2 > 0$ olup; c_0 keyfi olarak alınan bir sabittir. Bu yüzden,

$$d = \epsilon \sqrt{|\rho(\bar{d}_1 - \bar{M})^2 + (\bar{d}_2 - \bar{N})^2 + \rho(\bar{d}_3 - \bar{P})^2|} = c_0,$$

$$\mathbf{n}_1 = \epsilon \left(\frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\rho\tilde{\alpha}^2 - \rho\tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2}} \mathbf{e}_1 - \frac{\tilde{\gamma}}{\sqrt{\rho\tilde{\alpha}^2 - \rho\tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2}} \mathbf{e}_2 - \frac{\tilde{\alpha}}{\sqrt{\rho\tilde{\alpha}^2 - \rho\tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2}} \mathbf{n} \right)$$

olarak yazılır. Böylece $\mathbf{r}_*(u, v) = \mathbf{r}_1(u, v) + d\mathbf{n}_1$ genelleştirilmiş ofset yüzeyi, $\mathbf{r}_1(u, v)$ nin standart ofset yüzeyi olarak tanımlanır.

$\mathbb{E}_1^3$ de paralel bir yüzey, $\mathbf{r}(u, v)$ yüzeyinin yüzey normalleri üzerinde sabit d mesafesinde ötelenmesiyle elde edilen $\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + d\mathbf{n}$ dejenere olmayan genelleştirilmiş ofset yüzey olarak alındığında K^* Gauss eğriliği ve H^* ortalama eğriliği,

$$K^* = \frac{K}{1 - 2\rho dH + \rho d^2 K} \quad \text{ve} \quad H^* = \frac{H - dK}{1 - 2\rho dH + \rho d^2 K} \quad (5.23)$$

şeklinde verilir (Couto ve Lymberopoulos, 2021).

Eş normaller ve asal eğrilik yarıçapları arasında

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n}, \quad R_1^* = R_1 - d, \quad R_2^* = R_2 - d \quad (5.24)$$

bağıntıları gerçekleşir.

$\mathbf{r}(u, v)$ orijinal yüzeyi için $K = 1$ ve $\mathbf{n}$ bu yüzeye ait birim normal vektörü olduğunda $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} - \mathbf{n}$ ofset yüzeyi,

$$H^* = \frac{H + 1}{1 + 2\rho H + \rho}$$

biçiminde bir ortalama eğriliğe sahip olur.

Şimdi, $d = \epsilon \bar{d}$ ile $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_1 + d\mathbf{n}_1$ standart ofset yüzeyi alındığında $d = \epsilon \bar{d} = sbt$ olduğundan $\mathbf{r}^*(u, v)$ standart ofset yüzeyinin K^* Gauss eğriliği ve H^* ortalama eğriliği

$$K^* = \frac{K_1}{1 - 2\epsilon\rho\bar{d}H_1 + \epsilon^2\rho\bar{d}^2K_1} \quad \text{ve} \quad H^* = \frac{H_1 - \epsilon\bar{d}K_1}{1 - 2\epsilon\rho\bar{d}H_1 + \epsilon^2\rho\bar{d}^2K_1} \quad (5.25)$$

olarak ifade edilir. Ek olarak, karşılıklı yüzey normalleri ve asal eğrilik yarıçapları arasında

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n}_1, \quad R_1^* = R_1 - \epsilon\bar{d}, \quad R_2^* = R_2 - \epsilon\bar{d} \quad (5.26)$$

durumları geçerlidir. $\epsilon = -1$ için, $d = \epsilon\bar{d} = sbt$ olduğundan Minkowski uzayında standart ofset yüzeyi

$$\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}_1(u, v) - \mathbf{n}_1 \quad (5.27)$$

haline gelir. Bu yüzey $H^* = \frac{H_1+1}{1+2\rho H_1+\rho}$ ortalama eğriliğine sahiptir ve

$$K^* = \frac{K_1}{1 + 2\rho H_1 + \rho K_1} \quad \text{ve} \quad H^* = \frac{H_1 + K_1}{1 + 2\rho H_1 + \rho K_1} \quad (5.28)$$

denklemleri ile Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği ifade edilebilir. Eğer $\mathbf{r}_1(u, v)$ yüzeyi minimal yüzey olursa yani $H_1 = 0$ iken

$$K^* = \frac{1}{1 + \rho}, \quad H^* = \frac{1}{1 + \rho} \quad (5.29)$$

sonucuna ulaşılır.

5.2. Genelleştirilmiş Ofset Yüzeylerinin Varyasyonları

Bu kısımda, Minkowski uzayında genelleştirilmiş ofset yüzeylerin varyasyonuna ilişkin; Christoffel sembolleri ile Weingarten denklemleri aracılığıyla bir baz yüzeyi ve onun genelleştirilmiş ofset yüzeyi arasındaki yüzölçüm farkını ifade eden birinci varyasyon ve bu varyasyonunun Gauss formülü verilmiştir. Ardından birinci Beltrami operatörü kullanılarak yüzölçümünün ikinci varyasyonu sunulmuştur.

5.2.1. Ofset yüzeylerin yüzölçümünün birinci varyasyonu

$\mathbf{r}_1(u, v)$ yüzeyi orijinal yüzey olmak üzere $d(u, v) = \epsilon \bar{d}(u, v)$ için genelleştirilmiş ofset yüzeyin standart ofset yüzey denklemi

$$\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}_1(u, v) + d\mathbf{n}_1 \quad (5.30)$$

biçiminde yazılabilir, burada $\mathbf{n}_1$ vektörü $\mathbf{r}_1(u, v)$ orijinal yüzeyinin yüzey normalidir. Standart ofset yüzeyi, $\epsilon \rightarrow 0$ için $\mathbf{r}_1(u, v)$ orijinal yüzeyine özdeş olur, ve $\epsilon = 1$ için Eşitlik 5.12 de verilen yüzey denklemi gibi olur. Eşitlik 5.30 da verilen yüzey denkleminin u ve v değişkenlerine göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u^* &= \mathbf{r}_{1u} + d_u \mathbf{n} + d\mathbf{n}_u, \\ \mathbf{r}_v^* &= \mathbf{r}_{1v} + d_v \mathbf{n} + d\mathbf{n}_v, \\ \mathbf{r}_{uu}^* &= \mathbf{r}_{1uu} + d_{uu} \mathbf{n} + d\mathbf{n}_{uu} + 2d_u \mathbf{n}_u, \\ \mathbf{r}_{uv}^* &= \mathbf{r}_{1uv} + d_{uv} \mathbf{n} + d_v \mathbf{n}_u + d\mathbf{n}_{uv} + d_u \mathbf{n}_v, \\ \mathbf{r}_{vv}^* &= \mathbf{r}_{1vv} + d_{vv} \mathbf{n} + d\mathbf{n}_{vv} + 2d_v \mathbf{n}_v \end{aligned} \quad (5.31)$$

olarak elde edilir. $\mathbf{r}^*(u, v)$ genelleştirilmiş ofset yüzeyinin I. temel form büyüklükleri ϵ na göre ikinci dereceden terimler ihmal edildiğinde

$$E^* = \mathbf{r}_u^{*2}, \quad F^* = \mathbf{r}_u^* \mathbf{r}_v^*, \quad G^* = \mathbf{r}_v^{*2}$$

şeklinde bulunur. O zaman $\mathbf{r}_1(u, v)$ orijinal yüzeyinin I. ve II. temel form katsayıları kullanılırsa, $\mathbf{r}^*(u, v)$ genelleştirilmiş ofset yüzeyinin I. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E^* &= \mathbf{r}_u^{*2} = \langle (\mathbf{r}_{1u} + d_u \mathbf{n} + d\mathbf{n}_u), (\mathbf{r}_{1u} + d_u \mathbf{n} + d\mathbf{n}_u) \rangle = E - 2dD, \\ F^* &= \mathbf{r}_u^* \mathbf{r}_v^* = \langle (\mathbf{r}_{1u} + d_u \mathbf{n} + d\mathbf{n}_u), (\mathbf{r}_{1v} + d_v \mathbf{n} + d\mathbf{n}_v) \rangle = F - 2dD' \\ G^* &= \mathbf{r}_v^{*2} = \langle (\mathbf{r}_{1v} + d_v \mathbf{n} + d\mathbf{n}_v), (\mathbf{r}_{1v} + d_v \mathbf{n} + d\mathbf{n}_v) \rangle = G - 2dD'' \end{aligned} \quad (5.32)$$

biçiminde olur.

Benzer şekilde $\mathbf{r}_1(u, v)$ orijinal yüzeyinin I. ve II. temel form katsayıları ve Christoffel sembollerinden

$$\begin{cases} d_{11} = d_{uu} - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{Bmatrix} d_u - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{Bmatrix} d_v, \\ d_{12} = d_{uv} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{Bmatrix} d_u - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{Bmatrix} d_v, \\ d_{22} = d_{vv} - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{Bmatrix} d_u - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & \end{Bmatrix} d_v, \end{cases}$$

$$D^* = \mathbf{r}_{uu}^* \mathbf{n}^* = \langle (\mathbf{r}_{1uu} + d_{uu} \mathbf{n} + d \mathbf{n}_{uu} + 2d_u \mathbf{n}_u), \mathbf{n} \rangle = D + d_{uu} - d \langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_u \rangle$$

$$D^* = D + d_{11} + d(KE - 2HD)$$

$$\begin{aligned} D^{*'} &= \mathbf{r}_{uv}^* \mathbf{n}^* = \langle (\mathbf{r}_{1uv} + d_{uv} \mathbf{n} + d_v \mathbf{n}_u + d \mathbf{n}_{uv} + d_u \mathbf{n}_v), \mathbf{n} \rangle \\ &= D' + d_{uv} - d \langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v \rangle \end{aligned}$$

$$D^{*'} = D' + d_{12} + d(KF - 2HD') \quad (5.33)$$

$$D^{*''} = \mathbf{r}_{vv}^* \mathbf{n}^* = \langle (\mathbf{r}_{1vv} + d_{vv} \mathbf{n} + d \mathbf{n}_{vv} + 2d_v \mathbf{n}_v), \mathbf{n} \rangle = D'' + d_{vv} - d \langle \mathbf{n}_v, \mathbf{n}_v \rangle$$

$$D^{*''} = D'' + d_{22} + d(KG - 2HD'').$$

$\mathbf{r}^*(u, v)$ genelleştirilmiş ofset yüzeyinin II. temel form büyüklükleri elde edilir.

Burada $F = 0$ için Weingarten denklemleri

$$\mathbf{n}_u = -\frac{D}{E} \mathbf{r}_u - \frac{D'}{G} \mathbf{r}_v \quad \text{ve} \quad \mathbf{n}_v = -\frac{D'}{E} \mathbf{r}_u - \frac{D''}{G} \mathbf{r}_v$$

olarak alınmıştır. Ayrıca $\mathbb{E}_1^3$ de yüzey alan denklemi (O'Neill, 19893)

$$W^{*2} = -\rho(E^* G^* - F^{*2})$$

için

$$W^{*2} = -\rho(E - 2dD)(G - 2dD'') - (F2dD')^2$$

ve

$$W^2 = -\rho(EG - F^2), \quad 2H = \rho \frac{ED'' - 2FD' + GD}{(EG - F^2)}$$

denklemlerinden ve ayrıca ϵ na göre ikinci dereceden terimlerin ihmal edilmesi ile

$$W^* = W(1 - 2\rho dH) \quad (5.34)$$

ifadesi elde edilir. Burada, H değeri $\mathbf{r}_1(u, v)$ orijinal yüzeyinin ortalama eğriliğidir.

$\mathbf{r}^*(u, v)$ standart ofset yüzeyinin yüzölçümü (5.34) denkleminde

$$\iint W^* dudv = \iint W dudv - 2\rho \iint dHW dudv \quad (5.35)$$

olarak yazılır. Sonuç olarak, d yerine δd aldığımızda orijinal yüzey ve standart ofset yüzeyleri arasında yüzölçümünün birinci varyasyonu:

$$\delta O = -\rho \iint \delta d \cdot 2 \cdot H \cdot W dudv$$

veya

$$\delta O = -\rho \iint \delta d \cdot 2 \cdot H \cdot do \quad (5.36)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, do ifadesi $\mathbf{r}_1(u, v)$ orijinal yüzeyinin yüzey elemanıdır, yani $do = W dudv$ dir.

$\mathbb{E}_1^3$ de orijinal yüzey ile standart ofset yüzey arasındaki Gauss eğriliği ve ortalama eğriliğin birinci varyasyonu sırasıyla aşağıdaki gibi incelenmiştir:

$\mathbb{E}_1^3$ de standart ofset yüzeyinin temel formlarının katsayıları kullanılarak genelleştirilmiş ofset yüzeyin Gauss eğriliği formülü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} K^* &= \rho \frac{D^* D^{*''} - (D^{*'})^2}{E^* G^* - F^{*2}} \\ &= \rho \frac{\left((D + d(KE - 2HD) + d_{11})(D'' + d(KG - 2HD'') + d_{22}) - (D' + d(KF - 2HD') + d_{12})^2 \right)}{(E - 2dD)(G - 2dD'') - (F - 2dD')^2} \end{aligned}$$

Bu denklemde, ϵ na göre ikinci dereceden terimler ihmal edildiğinde

$$K^* = K - 2HKd + 4\rho HKd + \rho \frac{Dd_{22} - 2D'd_{12} + D''d_{11}}{EG - F^2} + \dots \quad (5.37)$$

biçiminde gelir. Şimdi $\mathbb{E}_1^3$ de standart ofset yüzeyinin temel form katsayılarından genelleştirilmiş ofset yüzeyin ortalama eğriliği,

$$2H^* = \rho \frac{E^* D^{*''} - 2F^* D^{*'} + G^* D^*}{E^* G^* - F^{*2}}$$

$$= \rho \frac{\begin{pmatrix} (E - 2dD)(D'' + d(KG - 2HD'') + d_{22}) \\ -2(F - 2dD')(D' + d(KF - 2HD') + d_{12}) \\ +(G - 2dD'')(D + d(KE - 2HD) + d_{11}) \end{pmatrix}}{(E - 2dD)(G - 2dD'') - (F - 2dD')^2}$$

şeklindedir. Yine ϵ na göre ikinci dereceden terimler ihmal edildiğinde

$$H^* = H + d(2H^2 + \rho K - 2K) + \rho \frac{Ed_{22} - 2Fd_{12} + Gd_{11}}{2(EG - F^2)} + \dots \quad \text{dir. (5.38)}$$

5.2.2. Ofset yüzeylerin yüzölçümünün birinci varyasyonuna ilişkin Gauss formülü

Minkowski uzayında $\mathbf{r}(u, v)$ orijinal yüzeyindeki eğrilik çizgileri parametre eğrileri olarak alındığında yüzey parametrizasyonu

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k x_k + \epsilon_M h_{ij} N \quad (5.39)$$

olarak yazılabilir. Burada Γ_{ij}^k Christoffel sembolleri, ϵ_M yüzeyin etken karakteri, N yüzey normali ve h_{ij} yüzeyin II. temel form katsayılarıdır. (Couto ve Lymberopoulos, 2021)

Eşitlik 5.39 dan $\mathbf{r}(u, v)$ yüzeyinin parametrik türevlerinin Christoffel sembolleri cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uu} &= \Gamma_{uu}^u \mathbf{r}_u + \Gamma_{uu}^v \mathbf{r}_v + \epsilon_M h_{uu} \mathbf{N}, \\ \mathbf{r}_{uv} &= \Gamma_{uv}^u \mathbf{r}_u + \Gamma_{uv}^v \mathbf{r}_v + \epsilon_M h_{uv} \mathbf{N}, \\ \mathbf{r}_{vv} &= \Gamma_{vv}^u \mathbf{r}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbf{r}_v + \epsilon_M h_{vv} \mathbf{N} \end{aligned} \quad (5.40)$$

biçiminde elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^u &= \frac{E_u}{2E}, & \Gamma_{uu}^v &= -\frac{E_v}{2G}, & \Gamma_{uv}^u &= \frac{E_v}{2E}, \\ \Gamma_{uv}^v &= \frac{G_u}{2G}, & \Gamma_{vv}^u &= -\frac{G_u}{2E}, & \Gamma_{vv}^v &= \frac{G_v}{2G}, \\ h_{uu} &= D, & h_{uv} &= D', & h_{vv} &= D'' \\ \epsilon_M &= \rho, & \mathbf{N} &= \mathbf{n} \end{aligned}$$

olduğundan Eşitlik 5.40 daki denklemlerden

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{uu} = \frac{E_u}{2E} \mathbf{r}_u - \frac{E_v}{2G} \mathbf{r}_v + \rho D \mathbf{n} \\ \mathbf{r}_{uv} = \frac{E_v}{2E} \mathbf{r}_u + \frac{G_u}{2G} \mathbf{r}_v + \rho D' \mathbf{n} \\ \mathbf{r}_{vv} = -\frac{G_u}{2E} \mathbf{r}_u + \frac{G_v}{2G} \mathbf{r}_v + \rho D'' \mathbf{n} \end{cases} \quad (5.41)$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, Minkowski uzayındaki Weingarten türev formülleri

$$\mathbf{n}_u = -\frac{D}{E} \mathbf{r}_u, \quad \mathbf{n}_v = -\frac{D''}{G} \mathbf{r}_v$$

biçimindedir (Lopez, 2014).

Genelleştirilmiş ofset eğrisinin baz vektörlerinin, $\mathbf{r}(u, v)$ orijinal yüzeyinin çatı vektörleri cinsinden ifadesi

$$\mathbf{r}_u^* = A \mathbf{r}_u + B \mathbf{r}_v + C \mathbf{n} \quad \text{ve} \quad \mathbf{r}_v^* = \tilde{A} \mathbf{r}_u + \tilde{B} \mathbf{r}_v + \tilde{C} \mathbf{n}$$

olarak yazılabilir. $\mathbf{r}_u^*$ ve $\mathbf{r}_v^*$ vektörlerinin sırayla $\mathbf{r}_u$ ve $\mathbf{r}_v$ vektörleri ile nokta çarpımları ve $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + d_1 \mathbf{e}_1 + d_2 \mathbf{e}_2 + d_3 \mathbf{n}$ kullanılarak

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_u^*, \mathbf{r}_u \rangle &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle + d_{1u} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{r}_u \rangle + d_1 \langle \mathbf{e}_{1u}, \mathbf{r}_u \rangle + d_{2u} \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{r}_u \rangle + d_2 \langle \mathbf{e}_{2u}, \mathbf{r}_u \rangle \\ &\quad + d_{3u} \langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_u \rangle + d_3 \langle \mathbf{n}_u, \mathbf{r}_u \rangle \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_v^*, \mathbf{r}_v \rangle &= \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle + d_{1v} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{r}_v \rangle + d_1 \langle \mathbf{e}_{1v}, \mathbf{r}_v \rangle + d_{2v} \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{r}_v \rangle + d_2 \langle \mathbf{e}_{2v}, \mathbf{r}_v \rangle \\ &\quad + d_{3v} \langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_v \rangle + d_3 \langle \mathbf{n}_v, \mathbf{r}_v \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. E, F, G birinci temel form katsayıları yerine koyulur ve sadeleştirme işlemleri yapılırsa

$$AE = E - \rho d_{1u} \sqrt{E} - \rho d_2 \frac{E_v}{2\sqrt{G}} - d_3 D$$

ve

$$\tilde{B}G = G + d_1 \frac{G_u}{2\sqrt{E}} + d_{2v} \sqrt{G} - d_3 D''$$

eşitliklerine ulaşılır. Sonuç olarak,

$$A = 1 - \rho \frac{d_{1u}}{\sqrt{E}} - \rho d_2 \frac{E_v}{2E\sqrt{G}} - d_3 \frac{D}{E} \quad \text{ve} \quad \tilde{B} = 1 + d_1 \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} + \frac{d_{2v}}{\sqrt{G}} - d_3 \frac{D''}{G}$$

dir. O halde

$$\begin{cases} \mathbf{r}_u^* = \left(1 - \rho \frac{d_{1u}}{\sqrt{E}} - \rho d_2 \frac{E_v}{2E\sqrt{G}} - d_3 \frac{D}{E}\right) \mathbf{r}_u + (*)\mathbf{r}_v + (*)\mathbf{n} \\ \mathbf{r}_v^* = (*)\mathbf{r}_u + \left(1 + d_1 \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} + \frac{d_{2v}}{\sqrt{G}} - d_3 \frac{D''}{G}\right) \mathbf{r}_v + (*)\mathbf{n} \end{cases}$$

sistemleri elde edilir. (*) ifadeleri ϵ na göre birinci dereceden terimlerden oluşur ve ϵ na göre lineer olan terimler alınır

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^* &= \left(1 - \rho \frac{d_{1u}}{\sqrt{E}} - \rho d_2 \frac{E_v}{2E\sqrt{G}} - d_3 \frac{D}{E}\right) \left(1 + d_1 \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} + \frac{d_{2v}}{\sqrt{G}} - d_3 \frac{D''}{G}\right) (\mathbf{r}_u \\ &\quad \times \mathbf{r}_v) + (*) (\mathbf{r}_v \times \mathbf{n}) + (*) (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_u) \end{aligned} \quad (5.42)$$

bulunur. Eğrilik çizgileri parametre eğrileri olarak alındığından $\mathbf{n}$, $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ ve dolayısıyla $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$, $\mathbf{r}_v \times \mathbf{n}$ ve $\mathbf{n} \times \mathbf{r}_u$ sırayla birbirlerine diktir. Bu yüzden Eşitlik 5.42 nin skaler çarpımı alınır ve ϵ na göre ikinci dereceden terimler ihmal edilirse,

$$(\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*)^2 = \phi^2 (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)^2 = \phi^2 EG$$

şeklinde elde edilir. Burada ϕ miktarı Eşitlik 5.42 deki $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ nin bileşenlerini içerir. Böylece $\mathbf{r}^*(u, v)$ ofset yüzeyinin yüzölçümü

$$\bar{O} = \int \sqrt{(\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*)^2} dudv = \int \phi \sqrt{EG} dudv = O + \delta O$$

şeklinde olur. Burada

$$\begin{aligned} \phi \sqrt{EG} &= \left(1 - \rho \frac{d_{1u}}{\sqrt{E}} - \rho d_2 \frac{E_v}{2E\sqrt{G}} - d_3 \frac{D}{E}\right) \left(1 + d_1 \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} + \frac{d_{2v}}{\sqrt{G}} - d_3 \frac{D''}{G}\right) \sqrt{EG} \\ &= \sqrt{EG} - \rho d_{1u} \sqrt{G} + d_1 \frac{G_u}{2\sqrt{G}} - \rho d_2 \frac{E_v}{2\sqrt{E}} + d_{2v} \sqrt{E} - d_3 \frac{D}{E} \sqrt{EG} \\ &\quad + -d_3 \frac{D''}{G} \sqrt{EG} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{EG} - \rho d_{1u}\sqrt{G} + d_1 \frac{G_u}{2\sqrt{G}} - \rho d_2 \frac{E_v}{2\sqrt{E}} + d_{2v}\sqrt{E} - \rho d_3 2H\sqrt{EG}$$

olmak üzere $\rho = \pm 1$ için durum analizleri aşağıdaki gibidir:

- $\rho = -1$ için yani yüzey uzay benzeri iken,

$$\begin{aligned} \phi\sqrt{EG} &= \sqrt{EG} + d_{1u}\sqrt{G} + d_1 \frac{G_u}{2\sqrt{G}} + d_2 \frac{E_v}{2\sqrt{E}} + d_{2v}\sqrt{E} + d_3 2H\sqrt{EG} \\ &= \sqrt{EG} + \frac{\partial(d_1\sqrt{G})}{\partial u} + \frac{\partial(d_2\sqrt{E})}{\partial v} + 2Hd_3\sqrt{EG}, \end{aligned}$$

$$\bar{O} = O + \delta O$$

olduğundan,

$$\delta O = \iint \left\{ \frac{\partial(d_1\sqrt{G})}{\partial u} + \frac{\partial(d_2\sqrt{E})}{\partial v} \right\} dudv + \iint 2Hd_3\sqrt{EG} dudv$$

elde edilir. Green teoreminden

$$\delta O = \oint (-d_2\sqrt{E}d_u + d_1\sqrt{G}d_v) + 2 \int Hd_3 do$$

olur. $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}) = \sqrt{EG}$ denklemi sağlandığından ve $\delta \mathbf{r} = d_1 \mathbf{e}_1 + d_2 \mathbf{e}_2 + d_3 \mathbf{n}$ ifadesinden

$$-d_2\sqrt{E}d_u + d_1\sqrt{G}d_v = (\delta \mathbf{r}, d\mathbf{r}, \mathbf{n})$$

denkleminde ulaşılır. Çizgi integralinde $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$ çizgi elemanı olarak olarak ele alınırsa orijinal yüzey ile genelleştirilmiş ofset yüzeyi arasında yüzölçümünün birinci varyasyonuna ilişkin Gauss formülü:

$$\delta O = \oint (\delta \mathbf{r}, d\mathbf{r}, \mathbf{n}) + 2 \int Hd_3 do$$

veya

$$\delta O = \oint (\delta \mathbf{r}, d\mathbf{r}, \mathbf{n}) + \iint 2H(\delta \mathbf{r}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) dudv \quad (5.43)$$

biçiminde yazılır.

- $\rho = +1$ için yani yüzey zaman benzeri iken,

$$\begin{aligned}\phi\sqrt{EG} &= \sqrt{EG} - d_{1u}\sqrt{G} + d_1 \frac{G_u}{2\sqrt{G}} - d_2 \frac{E_v}{2\sqrt{E}} + d_{2v}\sqrt{E} - d_3 2H\sqrt{EG} \\ &= \sqrt{EG} - G \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d_1}{\sqrt{G}} \right) + E \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{d_2}{\sqrt{E}} \right) - 2Hd_3\sqrt{EG},\end{aligned}$$

$$\bar{O} = O + \delta O$$

olduğundan,

$$\delta O = \iint \left\{ -G \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d_1}{\sqrt{G}} \right) + E \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{d_2}{\sqrt{E}} \right) \right\} dudv - \iint 2Hd_3\sqrt{EG} dudv$$

elde edilir. Green teoreminden

$$\delta O = - \oint \left(-C_1 \frac{d_2}{\sqrt{E}} du + C_2 \frac{d_1}{\sqrt{G}} dv \right) - 2 \int Hd_3 do$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{aligned}C_1 &= \left(\int \frac{E^{\frac{3}{2}}}{d_2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{d_2}{\sqrt{E}} \right) e^{\int \frac{\sqrt{E}}{d_2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{d_2}{\sqrt{E}} \right) dv} \right) e^{-\int \frac{\sqrt{E}}{d_2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{d_2}{\sqrt{E}} \right) dv}, \\ C_2 &= \left(\int \frac{G^{\frac{3}{2}}}{d_1} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d_1}{\sqrt{G}} \right) e^{\int \frac{\sqrt{G}}{d_1} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d_1}{\sqrt{G}} \right) du} \right) e^{-\int \frac{\sqrt{G}}{d_1} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d_1}{\sqrt{G}} \right) du}\end{aligned}$$

dur. Ayrıca

$$C_2 \frac{d_1}{|\mathbf{r}_v|^2} (\mathbf{e}_1, d\mathbf{r}, \mathbf{n}) = C_2 \frac{d_1}{\sqrt{G}} dv \quad \text{ve} \quad C_1 \frac{d_2}{|\mathbf{r}_u|^2} (\mathbf{e}_2, d\mathbf{r}, \mathbf{n}) = -C_1 \frac{d_2}{\sqrt{E}} du$$

eşitlikleri göz önüne alındığında yüzölçümünün birinci varyasyonuna ilişkin Gauss formülü:

$$\begin{aligned}\delta O &= - \oint \left(C_1 \frac{d_2}{|\mathbf{r}_u|^2} (\mathbf{e}_2, d\mathbf{r}, \mathbf{n}) - C_2 \frac{d_1}{|\mathbf{r}_v|^2} (\mathbf{e}_1, d\mathbf{r}, \mathbf{n}) \right) \\ &\quad - \iint 2H(\delta \mathbf{r}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) dudv.\end{aligned}\tag{5.44}$$

5.2.3. Ofset yüzeylerin yüzölçümünün ikinci varyasyonu

$\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}_1(u, v) + d\mathbf{n}_1(u, v)$ standart ofset yüzeyi ϵ na göre ikinci dereceden terimler de hesaba katılarak incelenecektir. Eşitlik 5.31 denklemlerinden aşağıdaki

$$\begin{aligned} E^* &= E - 2dD + d^2\mathbf{n}_u^2 + \rho d_u^2, \\ F^* &= F - 2dD' + d^2\mathbf{n}_u\mathbf{n}_v + \rho d_u d_v, \\ G^* &= G - 2dD'' + d^2\mathbf{n}_v^2 + \rho d_v^2 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu eşitlikler yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} E^* &= E - 2dD + \rho d^2(2HD - KE) + \rho d_u^2, \\ F^* &= F - 2dD' + \rho d^2(2HD' - KF) + \rho d_u d_v, \\ G^* &= G - 2dD'' + \rho d^2(2HD'' - KG) + \rho d_v^2 \end{aligned} \quad (5.45)$$

ifadeleri bulunur.

ϕ ve ψ Riemann uzayında $r \geq 2$ sınıfından reel değerli iki fonksiyon olsun. Birinci dereceden ∇ Beltrami operatörü

$$\nabla(\phi, \psi) = g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = g^{ik} \phi_i \psi_k$$

şeklinde tanımlanır ve $\nabla\phi = \nabla(\phi, \phi)$ olarak yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right), \\ g^{ij} &= \frac{(|g_{ij}| \text{ nin kofaktörü})}{|g_{ij}|} \end{aligned} \quad (5.46)$$

olur, öyle ki $\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$ dir (Malkowsky vd, 2023). Bu tanımlamadan yola çıkarak birinci Beltrami operatörünün Minkowski uzayındaki karşılığı aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= g^{11} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} + g^{12} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \frac{\partial \phi}{\partial x^2} + g^{21} \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} + g^{22} \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^2}, \\ &= g^{11}\phi_u^2 + g^{12}\phi_u\phi_v + g^{21}\phi_v\phi_u + g^{22}\phi_v^2. \end{aligned}$$

Eşitlik 5.46 dan

$$\begin{aligned}\nabla\phi = & (-1)^{1+1} \frac{g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \phi_u^2 + (-1)^{1+2} \frac{g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \phi_u \phi_v \\ & + (-1)^{2+1} \frac{g_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \phi_u \phi_v + (-1)^{2+2} \frac{g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \phi_v^2,\end{aligned}$$

yani, birinci temel form katsayıları cinsinden yazılırsa

$$\nabla\phi = \frac{G}{EG - F^2} \phi_u^2 - \frac{2F}{EG - F^2} \phi_u \phi_v + \frac{E}{EG - F^2} \phi_v^2$$

elde edilir. Minkowski uzayında $W = \sqrt{\rho(EG - F^2)}$ olduğundan, bu uzaydaki birinci Beltrami operatörü

$$\nabla\phi = \rho \frac{(E\phi_v^2 - 2F\phi_u\phi_v + G\phi_u^2)}{W^2} \quad (5.47)$$

şeklinde ifade edilir. O zaman Eşitlik 5.47 den

$$\nabla d = \rho \frac{(Ed_v^2 - 2Fd_u d_v + Gd_u^2)}{W^2} \quad (5.48)$$

elde edilir. $W^{*2} = \rho(E^*G^* - F^{*2})$ denklemi için Eşitlik 5.45 deki denklem sistemlerinden ve ϵ na göre üçüncü dereceden terimler ihmal edildiğinde,

$$\begin{aligned}(E^*G^* - F^{*2}) = & ((EG - F^2) - 2d(ED'' - 2FD' + DG) + 4d^2(DD'' - D'^2) \\ & + \rho d^2(2HED'' - KEG + 2HDG - KEG - 4HFD' + 2KF^2) \\ & + \rho(Edv^2 + \rho Gdu^2 - 2Fdudv))\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Orijinal yüzeyin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği tanımları ile Eşitlik 5.48 den,

$$\begin{aligned}\rho W^{*2} = & \rho W^2 - 4dHW^2 + 2d^2KW^2 + \rho d^2 4H^2W^2 + \nabla dW^2 \\ = & \rho W^2(1 - 4\rho dH + 2\rho d^2K + 4d^2H^2 + \rho \nabla d) \\ = & \rho W^2 \left(1 - 2\rho dH + \rho d^2K + \frac{\rho}{2} \nabla d\right)^2\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Yani

$$W^* = W \left(1 - 2\rho dH + \rho d^2 K + \frac{\rho}{2} \nabla d \right) \quad (5.49)$$

bağıntısı bulunur. Yüzölçümü ifadesi için bu bağıntı ele alınır ve $dW = do$ kabul edilirse,

$$\bar{O} = O - 2\rho \int dH do + \rho \int \left(d^2 K + \frac{1}{2} \nabla d \right) do$$

eşitliğine varılır. Ayrıca,

$$\bar{O} = O + \delta O + \frac{1}{2} \delta^2 O$$

olduğundan, orijinal yüzey ile genelleştirilmiş ofset yüzeyi arasında yüzölçümünün ikinci varyasyonu:

$$\delta^2 O = \rho \int (2d^2 K + \nabla d) do \quad (5.50)$$

biçiminde elde edilir.

5.3. Uygulamalar

Örnek 5.3.1. $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 3v - 2u + 5)$ zaman benzeri helikoid yüzeyinin $d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \epsilon \sqrt{3}$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = \epsilon \sqrt{|u^2 - 9|}$ ve $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = \epsilon \sqrt{3|u^2 - 9|}$

ofset mesafeleri için genelleştirilmiş ofset yüzeyi,

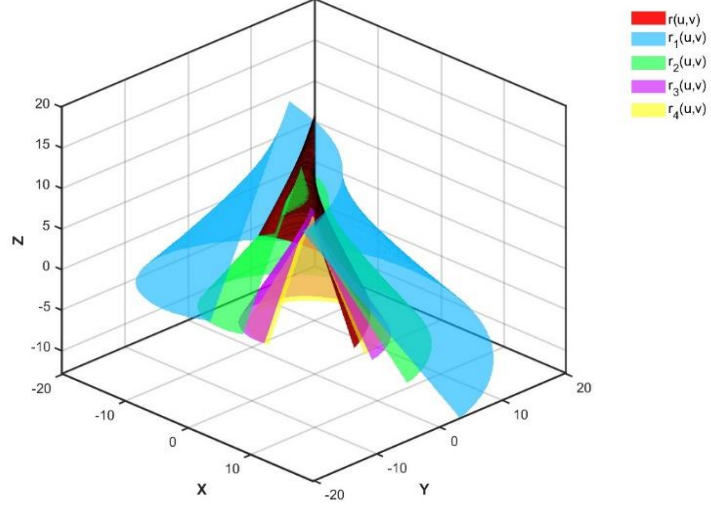
$$\begin{aligned} \mathbf{r}^*(u, v) = & (u \cos v, u \sin v, 3v - 2u + 5) \\ & + \epsilon (\cos v + 3 \sin v + 2u \cos v - u \sin v, -3 \cos v + \sin v + u \cos v \\ & + 2u \sin v, 1 - u) \end{aligned}$$

biçimindedir ve Şekil 5.1 de orijinal eğri ve ϵ nun farklı değerlerine göre elde edilen genelleştirilmiş ofset yüzeyler verilmiştir.

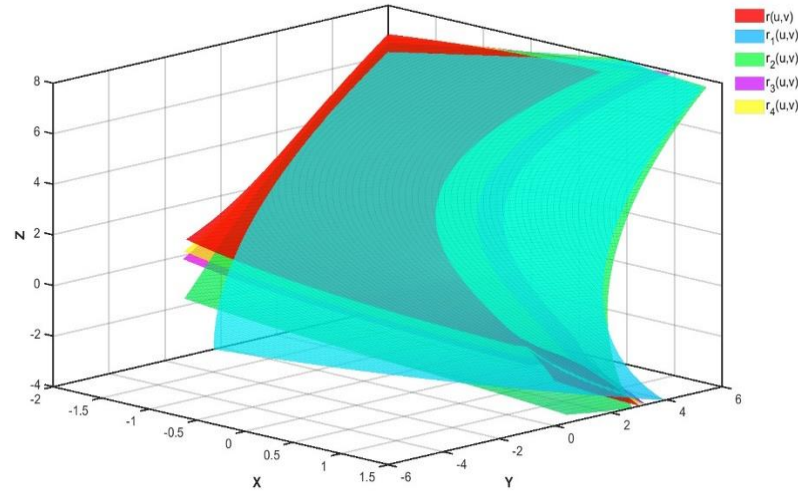
Örnek 5.3.2. $\mathbf{r}(u, v) = (uv - 3v + v^3, u + 3v^2, uv + 3v + v^3)$ zaman benzeri Cayley yüzeyinin $d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \epsilon$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = \epsilon 2\sqrt{3u}$ ve $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = \epsilon 2\sqrt{3u}$ ofset mesafeleri ele alınarak elde edilen genelleştirilmiş ofset yüzeyi,

$$\mathbf{r}^*(u, v) = (uv - 3v + v^3, u + 3v^2, uv + 3v + v^3) + \epsilon (2u + v, 1, 2u + v)$$

şeklindedir ve Şekil 5.2 de orijinal eğri ve ϵ nun farklı değerlerine göre elde edilen genelleştirilmiş ofset yüzeyler gösterilmiştir.



Şekil 5.1. r orijinal yüzey (kırmızı) ve genelleştirilmiş ofset yüzeyler; $\epsilon = 1$ için r_1 (mavi), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{6}$ için r_3 (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için r_4 (sarı).



Şekil 5.2. r orijinal yüzey (kırmızı) ve genelleştirilmiş ofset yüzeyler; $\epsilon = 1$ için r_1 (mavi), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{6}$ için r_3 (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için r_4 (sarı).

Örnek 5.3.3. $\mathbf{r}(u, v) = \left(\frac{u}{\sqrt{2}}, \sinh \frac{u}{\sqrt{2}} + \cosh v, \cosh \frac{u}{\sqrt{2}} + \sinh v \right)$ zaman benzeri öteleme yüzeyinin $d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \epsilon \sqrt{2}$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = \epsilon$ ve $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = \epsilon \sqrt{2}$ için elde edilen genelleştirilmiş ofset yüzeyi,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^*(u, v) = & \left(\frac{u}{\sqrt{2}}, \sinh \frac{u}{\sqrt{2}} + \cosh v, \cosh \frac{u}{\sqrt{2}} + \sinh v \right) \\ & + \epsilon \left(\cosh \frac{u}{\sqrt{2}} \cosh v - \sinh \frac{u}{\sqrt{2}} \sinh v + 1, \cosh \frac{u}{\sqrt{2}} \right. \\ & \left. + \sinh v - \cosh v, \sinh \frac{u}{\sqrt{2}} + \cosh v - \sinh v \right) \end{aligned}$$

olarak belirlenir. Şekil 5.3 de orijinal eğri ve ϵ nun farklı değerlerine göre elde edilen genelleştirilmiş ofset yüzeyler yer almaktadır.

Örnek 5.3.4. $\mathbf{r}(u, v) = (\cosh u + \cosh u \cos v, \sqrt{2} + \sin v, \sinh u + \sinh u \cos v)$ zaman benzeri tüp yüzeyinin $d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \epsilon$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = \epsilon$ ve $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = \epsilon$ mesafeleri için genelleştirilmiş ofset yüzeyi,

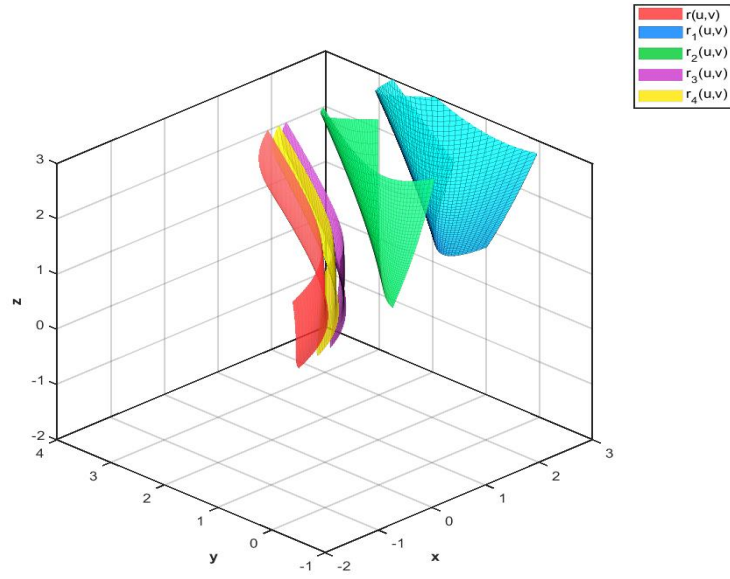
$$\begin{aligned} \mathbf{r}^*(u, v) = & (\cosh u + \cosh u \cos v, \sqrt{2} + \sin v, \sinh u + \sinh u \cos v) \\ & + \epsilon (\sinh u - \cosh u \sin v - \cosh u \cos v, \\ & \cos v - \sin v, \cosh u - \sinh u \sin v - \sinh u \cos v) \end{aligned}$$

biçimindedir ve Şekil 5.4 de orijinal eğri ve ϵ nun farklı değerlerine göre elde edilen genelleştirilmiş ofset yüzeyler verilmiştir.

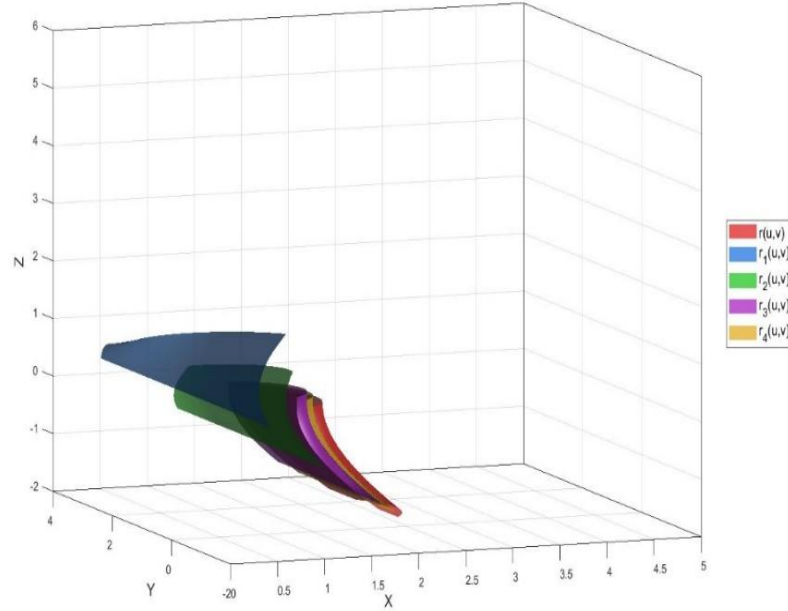
Örnek 5.3.5. $\mathbf{r}(u, v) = (u + v, \sqrt{2} \cosh u + \sqrt{2} v \sinh u, \sqrt{2} \sinh u + \sqrt{2} v \cosh u)$ zaman benzeri teğet açılabilir yüzeyinin $d_1 = \epsilon \bar{d}_1 = \epsilon \frac{\sqrt{|2v^2-1|}}{\sqrt{2}}$, $d_2 = \epsilon \bar{d}_2 = \epsilon \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $d_3 = \epsilon \bar{d}_3 = \epsilon \frac{\sqrt{|2v^2-1|}}{\sqrt{2}v}$ ofset mesafeleri için genelleştirilmiş ofset yüzeyi,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^*(u, v) = & (u + v, \sqrt{2} \cosh u + \sqrt{2} v \sinh u, \sqrt{2} \sinh u + \sqrt{2} v \cosh u) \\ & + \epsilon (2\sqrt{2}, 3 \sinh u + v \cosh u, 3 \cosh u + v \sinh u). \end{aligned}$$

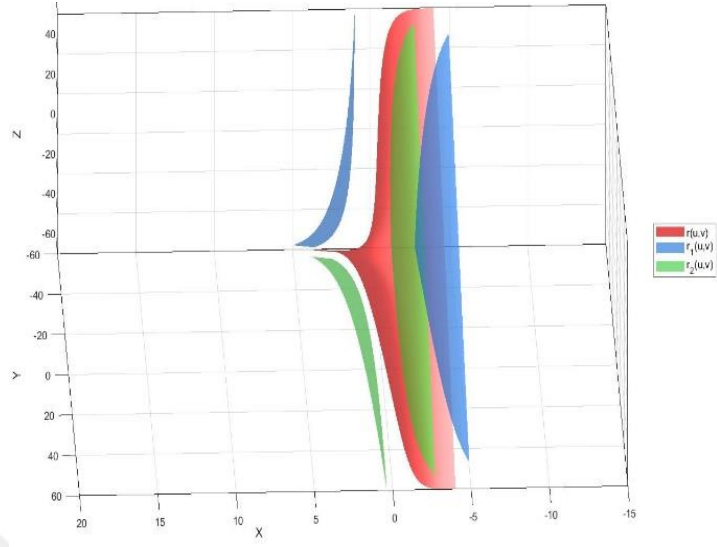
Şekil 5.5 de orijinal eğri ve genelleştirilmiş ofset yüzeyler verilmiştir.



Şekil 5.3. $\mathbf{r}$ orijinal yüzey (kırmızı) ve genelleştirilmiş ofset yüzeyler; $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (mavi), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{6}$ için $\mathbf{r}_3$ (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için $\mathbf{r}_4$ (sarı).



Şekil 5.4. $\mathbf{r}$ orijinal yüzey (kırmızı) ve genelleştirilmiş ofset yüzeyler; $\epsilon = 1$ için $\mathbf{r}_1$ (mavi), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için $\mathbf{r}_2$ (yeşil), $\epsilon = \frac{1}{6}$ için $\mathbf{r}_3$ (mor) ve $\epsilon = \frac{1}{10}$ için $\mathbf{r}_4$ (sarı).



Şekil 5.5. r orijinal yüzey (kırmızı) ve genelleştirilmiş ofset yüzeyler; $\epsilon = 1$ için r_1 (mavi), $\epsilon = \frac{1}{2}$ için r_2 (yeşil).

6. ORTAK EĞRİLİK ÇİZGİSİ BOYUNCA ZAMAN BENZERİ AÇILABİLİR YÜZEYLERİN İNŞASI

Çalışmamızın bu bölümünde üç boyutlu Minkowski uzayında ortak eğrilik çizgisi boyunca zaman-benzeri açılabilir yüzeyin tasarımı, Serret Frenet ve Darboux çatıları kullanılarak yapılmıştır. Ayrıca eğri-yüzey çiftine yönelik analiz ve incelemeler sonucunda yüzey karakterizasyonuna ilişkin bulgular ortaya konulmuştur. Uygulama kısmında ise zaman-benzeri açılabilir yüzeyi oluşturan farklı etken karakterdeki eğrilik çizgilerine yer verilmiş ve grafikleri sunulmuştur.

Öncelikle, Minkowski uzayında zaman benzeri yüzey üzerindeki eğrinin eğrilik çizgisi olmasının gerek ve yeter şartını ifade eden teorem verilecektir:

Teorem 6.1. Köşegenleştirilebilir şekil operatörlü dejenere olmayan bir yüzey üzerindeki null olmayan bir eğrinin, eğrilik çizgisi olmasının gerek ve yeter şartı eğri boyunca yüzey normallerinin E_1^3 de açılabilir bir yüzey oluşturmastır.

İspat. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ null olmayan eğrisi, $\mathbf{P}(s, t)$ köşegenleştirilebilir şekil operatörüne sahip dejenere olmayan yüzeyi üzerinde ve $\mathbf{n}_1$, bu eğri üzerinde herhangi bir $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ noktasındaki birim yüzey normali olsun. Dolayısıyla $\mathbf{n}_1$ sadece s nin bir fonksiyonu olarak düşünülebilir.

($\Rightarrow$): $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ eğrisinin $\mathbf{P} = \mathbf{P}(s, t)$ yüzeyi üzerinde eğrilik çizgisi olduğunu kabul edelim.

Rodrigues formülü $\kappa_n \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \frac{d\mathbf{n}_1}{ds} = 0$ dan,

$$-\kappa_n \mathbf{T} = \mathbf{n}_1', \quad \kappa_n: \text{normal eğrilik}$$

elde edilir. O zaman, $[\mathbf{T}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1'] = [\mathbf{T}, \mathbf{n}_1, -\kappa_n \mathbf{T}] = 0$ eşitliğinden Gauss eğriliği sıfır olur, bu durumda açılabilir yüzey için gerek şart sağlanır.

($\Leftarrow$): $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ eğrisi boyunca yüzey normallerinin açılabilir bir yüzey oluşturduğunu ve bu nedenle Gauss eğriliğinin sıfır olduğunu varsayalım. O zaman $[\mathbf{T}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1'] = 0$

yani $[T, \mathbf{n}'_1, \mathbf{n}_1] = 0$ gelir, bu da $(T \times \mathbf{n}'_1) \cdot \mathbf{n}_1 = 0$ ile aynıdır. $\mathbf{n}_1 \neq 0$ ve $\mathbf{n}_1^2 = 1$ olduğundan $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}'_1 = 0$ dır, bu da $\mathbf{n}'_1$ vektörünün $\mathbf{n}_1$ vektörüne dik olduğunu yani $\mathbf{n}'_1$ vektörünün teğet düzlemde yer aldığını gösterir. Bu yüzden $(T \times \mathbf{n}'_1)/\mathbf{n}_1$ paralelliği gelir. Eğer $T \times \mathbf{n}'_1 \neq 0$ ise, sıfır olmayan iki paralel vektör $T \times \mathbf{n}'_1$ ve $\mathbf{n}_1$ den $(T \times \mathbf{n}'_1) \cdot \mathbf{n}_1$ skaler çarpımı sıfır olamaz ve bu nedenle $T \times \mathbf{n}'_1 = 0$ olur, bu da bazı κ_n sabitleri için $\mathbf{n}'_1 = -\kappa_n T$ olur, bu $\mathbf{n}'_1 = -\kappa_n T$ eşitiliği $\frac{d\mathbf{n}_1}{ds} + \kappa_n \frac{dr}{ds} = 0$ ya da $d\mathbf{n}_1 + \kappa_n dr = 0$ anlamına gelir, yani eğrilik çizgilerini karakterize eden Rodriques formülü sağlar.

Sonuç olarak, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, yüzey üzerindeki eğrilik çizgisidir, bu da yeter koşulu gerçeklemektedir.

6.1. Zaman Benzeri Ortak Eğrilik Çizgisi Boyunca Zaman Benzeri Açılabilir Yüzey

$\mathbf{r}(s)$ zaman benzeri eğrisinin normal yüzeyi,

$$\mathbf{Q}(s, t) = \mathbf{r}(s) + t\mathbf{n}_1(s) \quad (6.1)$$

olarak alınsın, burada $\mathbf{n}_1(s)$ uzay benzeri yüzey normal vektör, θ açısı $\mathbf{n}_1$ ile $\mathbf{N}$ uzay benzeri normal vektör arasındaki açı olup;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n}_1(s) \\ \mathbf{b}_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

eşitliği gerçekleşmektedir. Teorem 6.1 den, $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyinin eğrilik çizgisi olmasının gerek ve yeter şartı $\mathbf{Q}(s, t)$ yüzeyinin açılabilir yüzey ve $\mathbf{n}_1(s)$ vektörünün $\mathbf{P}(s, t)$ nin normal vektörü olmasıdır.

O zaman Eşitlik 6.2 kullanılarak,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}}_1(s) &= -\dot{\theta}\sin\theta\mathbf{N} + \cos\theta\dot{\mathbf{N}} + \dot{\theta}\cos\theta\mathbf{B} + \sin\theta\dot{\mathbf{B}} \\ &= -\dot{\theta}\sin\theta\mathbf{N} + \cos\theta(\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \dot{\theta}\cos\theta\mathbf{B} + \sin\theta(-\tau\mathbf{N}) \\ &= \kappa\cos\theta\mathbf{T} - (\dot{\theta} + \tau)\mathbf{b}_1, \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{b}}_1(s) = \dot{\theta}\cos\theta\mathbf{N} + \sin\theta\dot{\mathbf{N}} + \dot{\theta}\sin\theta\mathbf{B} - \cos\theta\dot{\mathbf{B}}$$

$$\begin{aligned}
&= \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{N} + \sin \theta (\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) + \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{B} - \cos \theta (-\tau \mathbf{N}) \\
&= \kappa \sin \theta \mathbf{T} + (\dot{\theta} + \tau) \mathbf{n}_1
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Açılabilir yüzey olma şartından,

$$\begin{aligned}
(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1) = 0 &\Leftrightarrow (\mathbf{T}, \cos \theta \mathbf{N} + \sin \theta \mathbf{B}, \kappa \cos \theta \mathbf{T} - (\dot{\theta} + \tau) \mathbf{b}_1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\dot{\theta} + \tau)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 0 \\
&\Leftrightarrow \dot{\theta} + \tau = 0 \\
&\Leftrightarrow \dot{\theta} = -\tau, \text{ öyle ki}
\end{aligned}$$

$$\theta = - \int_{s_0}^s \tau ds + \theta_0 \quad (6.3)$$

ifadesine ulaşılır. Burada s_0 yay parametresi s nin başlangıç değeridir. Genelliği kaybetmeksizin, $s_0 = 0$ ve $\theta_0 = \theta(0)$ olarak alınabilir.

Zaman-benzeri açılabilir bir yüzey üzerindeki zaman benzeri eğrinin, eğrilik çizgisi olduğunu gösteren ilgili teorem aşağıda verilmiştir:

Teorem 6.1.1. $\mathbf{r}(s)$ parametrik zaman benzeri uzay eğrisi olsun. O halde, $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyi üzerindeki $\mathbf{r}(s)$ eğrisi, bir eğrilik çizgisidir.

İspat. $\mathbf{r}(s)$ zaman benzeri eğrisine ait normal yüzey

$$\mathbf{P}_1(s, t) = \mathbf{r}(s) + t\mathbf{n}_1(s) \quad (6.4)$$

biçiminde kabul edilsin, öyle ki $\mathbf{n}_1(s) = \cos \theta \mathbf{N}(s) + \sin \theta \mathbf{B}(s)$, uzay benzeri vektör iken $\theta(s)$ açısı Eşitlik 6.3 deki gibidir. $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyi

$$\mathbf{P}(s, t) = \mathbf{r}(s) - t\mathbf{b}_1(s), \quad (6.5)$$

olarak yazılabilir, burada $\mathbf{P}(s, 0) = \mathbf{r}(s)$ dir. O zaman

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_s(s, t) \times \mathbf{P}_t(s, t)|_{t=0} &= \left((\dot{\mathbf{r}}(s) - t\dot{\mathbf{b}}_1(s)) \times (-\mathbf{b}_1(s)) \right)|_{t=0} \\
&= -\mathbf{T}(s) \times (\sin \theta \mathbf{N} - \cos \theta \mathbf{B})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sin\theta \mathbf{B} + \cos\theta \mathbf{N} \\
&= \mathbf{n}_1(s)
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Bu yüzden, $\mathbf{P}_1(s, t)$, $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyinin normal yüzeyi olur. (6.3) bağıntısıyla verilen $\theta(s)$ açısı, $\mathbf{P}_1(s, t)$ yüzeyinin açılabilir olmasını sağlar, dolayısıyla Teorem 6.1 den $\mathbf{r}(s)$ eğrisi, $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyinin eğrilik çizgisi olur.

Son olarak, $(\dot{\mathbf{r}}, -\mathbf{b}_1, -\dot{\mathbf{b}}_1) = (\mathbf{T}, -\mathbf{b}_1, -\kappa \sin\theta \mathbf{T}) = 0$ olduğundan, $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir bir yüzeydir.

Aşağıda $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyinin silindir, koni veya teğet yüzey olma durumlarına ilişkin bağıntılar sırasıyla verilmiştir:

Teorem 6.1.2. $\mathbf{r}(s)$ zaman benzeri eğrilik çizgisi, $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyi üzerinde olsun. $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyinin silindir olmasının gerek ve yeter şartı $\theta = 0$ dır.

İspat. ($\Rightarrow$): $\mathbf{P}(s, t)$ açılabilir yüzeyinin silindirik olduğu kabul edilsin.

O zaman $\mathbf{b}_1 \times \dot{\mathbf{b}}_1 = 0$ dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 \times \dot{\mathbf{b}}_1 &= (\sin\theta \mathbf{N} - \cos\theta \mathbf{B}) \times (\kappa \sin\theta \mathbf{T}) \\
&= \kappa \sin^2 \theta (\mathbf{N} \times \mathbf{T}) - \kappa \cos\theta \sin\theta (\mathbf{B} \times \mathbf{T}) \\
&= -\kappa \sin^2 \theta \mathbf{B} + \kappa \cos\theta \sin\theta \mathbf{N},
\end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 \times \dot{\mathbf{b}}_1 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \kappa \sin^2 \theta = 0 \\ \kappa \cos\theta \sin\theta = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \sin\theta = 0 \\
&\Leftrightarrow \theta = 0 \text{ olduğu görülür.}
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$): $\theta = 0$ kabul edilsin. O zaman $\mathbf{b}_1(s)$ vektörü Eşitlik 6.2 den $\mathbf{b}_1(s) = -\mathbf{B}(s)$ olur.

Doğrultman vektör kullanılarak elde edilen parametrik yüzey denklemi,

$$\mathbf{P}(s, t) = \mathbf{r}(s) + t\mathbf{B}(s)$$

şeklindedir.

Teorem 6.1.3. Zaman benzeri eğrilik çizgisi $\mathbf{r}(s)$ olan $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyinin koni olmasının gerek ve yeter şartı $\kappa \sin \theta = \kappa_0 \sin \theta_0$ dır; burada $\theta_0 = \theta(0); \kappa_0 = \kappa(0)$ dır.

İspat. Eşitlik 2.24 den $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyinin striksiyon eğrisi;

$$\mathbf{w}(s) = \mathbf{r}(s) - \frac{\dot{\mathbf{r}}(s) \cdot \dot{\mathbf{b}}_1(s)}{\dot{\mathbf{b}}_1(s) \cdot \dot{\mathbf{b}}_1(s)} \mathbf{b}_1(s) \text{ dir.}$$

($\Rightarrow$) $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyi koni kabul edilsin. O zaman striksiyon eğrisi $\dot{\mathbf{w}}(s) = 0$ olur.

$$\lambda(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(s) \cdot \dot{\mathbf{b}}_1(s)}{\dot{\mathbf{b}}_1(s) \cdot \dot{\mathbf{b}}_1(s)} \text{ olmak üzere;}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}}(s) &= \dot{\mathbf{r}} - \dot{\lambda} \mathbf{b}_1 - \lambda \dot{\mathbf{b}}_1 \\ &= \mathbf{T} - \dot{\lambda}(\sin \theta \mathbf{N} - \cos \theta \mathbf{B}) - \lambda \kappa \sin \theta \mathbf{T} \\ &= (1 - \lambda \kappa \sin \theta) \mathbf{T} - \dot{\lambda} \sin \theta \mathbf{N} + \dot{\lambda} \cos \theta \mathbf{B} \end{aligned}$$

$\dot{\mathbf{w}}(s) = 0$ için aşağıdaki bağıntıların sağlanması gerekir:

$$\begin{cases} 1 - \lambda \kappa \sin \theta = 0, \\ \dot{\lambda} \sin \theta = 0, \\ \dot{\lambda} \cos \theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = s b t = \frac{1}{\kappa \sin \theta}. \quad (6.6)$$

Aynı zamanda $\kappa \sin \theta = \kappa_0 \sin \theta_0$ olur.

($\Leftarrow$) $\kappa \sin \theta = \kappa_0 \sin \theta_0$ yani Eşitlik 6.6 dan $\lambda = \frac{1}{\kappa \sin \theta} = s b t$ olduğunu varsayalım.

$\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyinin koni olması için $\dot{\mathbf{w}}(s) = 0$ olduğu gösterilmelidir. O zaman

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}}(s) &= \dot{\mathbf{r}} - \dot{\lambda} \mathbf{b}_1 - \lambda \dot{\mathbf{b}}_1 \\ &= \mathbf{T} - \dot{\lambda}(\sin \theta \mathbf{N} - \cos \theta \mathbf{B}) - \lambda \kappa \sin \theta \mathbf{T} \text{ ve } \lambda \text{ sabit olduğundan,} \\ &= 0 \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.1.4. Zaman benzeri eğrilik çizgisi $\mathbf{r}(s)$ olan $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyinin teğet yüzey olmasının gerek ve yeter şartı $\kappa \sin \theta \neq \kappa_0 \sin \theta_0$ olmasıdır, burada $\theta_0 = \theta(0)$, $\kappa_0 = \kappa(0)$ 'dır.

İspat: ($\Rightarrow$): $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyi teğet yüzey olsun. O zaman $\dot{\mathbf{w}}$ vektörü, $\mathbf{b}_1$ vektörüne paraleldir. Eşitlik 6.6 daki denklemden $\lambda = \frac{1}{\kappa \sin \theta}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{w}}(s) &= \dot{\mathbf{r}} - \dot{\lambda} \mathbf{b}_1 - \lambda \dot{\mathbf{b}}_1 \\ &= \mathbf{T} - \dot{\lambda} \mathbf{b}_1 - \lambda \kappa \sin \theta \mathbf{T} \\ &= (1 - \lambda \kappa \sin \theta) \mathbf{T} - \dot{\lambda} \mathbf{b}_1 \\ &= -\dot{\lambda} \mathbf{b}_1\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin $\dot{\lambda} \neq 0$ için anlamı $\dot{\mathbf{w}} \parallel \mathbf{b}_1$ dir.

($\Leftarrow$) $\lambda = \kappa \sin \theta \neq \kappa_0 \sin \theta_0$ iken $\dot{\mathbf{w}}(s) \neq 0$ olur. $(\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{b}_1, \dot{\mathbf{b}}_1) = 0$ den $\dot{\mathbf{w}} \cdot \dot{\mathbf{b}}_1 = 0$ ve $|\mathbf{b}_1| = 1$ elde edilir. Ayrıca $\mathbf{b}_1 \perp \dot{\mathbf{b}}_1$ olduğundan $\dot{\mathbf{w}} \parallel \mathbf{b}_1$ gelir, bu ise $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyinin teğet yüzey olduğu anlamına gelir.

6.2. Uzak Benzeri Ortak Eğrilik Çizgisi Boyunca Zaman Benzeri Açılabilir Yüzey

Bu kısımda; $\mathbf{r}(s)$ eğrisi zaman benzeri eğri alındığında $\mathbf{N}(s)$ normal vektör alanı ve $\mathbf{B}(s)$ binormal vektör alanının etken karakterlerine ilişkin iki farklı durum analizi yapılmıştır.

6.2.1. $\mathbf{N}(s)$ zaman benzeri vektör alanı, $\mathbf{B}(s)$ uzay benzeri vektör alanı

$\mathbf{r}(s)$ eğrisinin normal yüzeyi

$$\mathbf{Q}(s, t) = \mathbf{r}(s) + t \mathbf{n}_1(s) \quad (6.7)$$

olsun; burada $\mathbf{n}_1(s)$, uzay benzeri yüzey normali ve θ açısı, $\mathbf{b}_1$ zaman benzeri vektörü ile $\mathbf{N}$ zaman benzeri normal vektörü arasındaki açı olup;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n}_1(s) \\ \mathbf{b}_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sinh\theta & \cosh\theta \\ \cosh\theta & \sinh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

eşitliği mevcuttur. Teorem 6.1 den $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyinin eğrilik çizgisi olmasının gerek ve yeter şartı $\mathbf{Q}(s, t)$ yüzeyinin açılabilir yüzey ve $\mathbf{n}_1(s)$ vektörünün $\mathbf{P}(s, t)$ nin normal vektörü olmasıdır. O halde,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}}_1(s) &= \dot{\theta} \cosh\theta \mathbf{N} + \sinh\theta \dot{\mathbf{N}} + \dot{\theta} \sinh\theta \mathbf{B} + \cosh\theta \dot{\mathbf{B}} \\ &= \dot{\theta} \cosh\theta \mathbf{N} + \sinh\theta (\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) + \dot{\theta} \sinh\theta \mathbf{B} + \cosh\theta (\tau \mathbf{N}) \\ &= \kappa \sinh\theta \mathbf{T} + (\dot{\theta} + \tau) \mathbf{b}_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{b}}_1(s) &= \dot{\theta} \sinh\theta \mathbf{N} + \cosh\theta \dot{\mathbf{N}} + \dot{\theta} \cosh\theta \mathbf{B} + \sinh\theta \dot{\mathbf{B}} \\ &= \dot{\theta} \sinh\theta \mathbf{N} + \cosh\theta (\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) + \dot{\theta} \cosh\theta \mathbf{B} + \sinh\theta (\tau \mathbf{N}) \\ &= \kappa \cosh\theta \mathbf{T} + (\dot{\theta} + \tau) \mathbf{n}_1 \end{aligned}$$

elde edilir. O zaman

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{n}_1, \dot{\mathbf{n}}_1) = 0 &\Leftrightarrow (\mathbf{T}, \cos\theta \mathbf{N} + \sin\theta \mathbf{B}, \kappa \cos\theta \mathbf{T} - (\dot{\theta} + \tau) \mathbf{b}_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\dot{\theta} + \tau)(\sin^2\theta - \cos^2\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \dot{\theta} + \tau = 0 \\ &\Leftrightarrow \dot{\theta} = -\tau \text{ olur.} \end{aligned}$$

Elde edilen bu sonuç,

$$\theta = - \int_{s_0}^s \tau ds + \theta_0, \quad (6.9)$$

biçimindedir, burada s_0 yay parametresi, s nin başlangıç değeridir. Genelliği kaybetmeden, $s_0 = 0$ alınırsa $\theta_0 = \theta(0)$ olur.

Şimdi zaman benzeri açılabilir yüzey üzerindeki uzay benzeri eğrinin, eğrilik çizgisi olmasına ilişkin teoremler gösterilecektir:

Teorem 6.2.1.1. $\mathbf{r}(s)$ eğrisi, $\mathbf{N}(s)$ normal vektörü zaman benzeri olan parametrik formdaki uzay benzeri uzay eğrisi olsun. O halde, $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyi üzerindeki $\mathbf{r}(s)$ eğrisi bir eğrilik çizgisidir.

İspat. $\mathbf{r}(s)$ uzay benzeri eğrisine ait normal yüzeyi

$$\mathbf{P}_1(s, t) = \mathbf{r}(s) + t\mathbf{n}_1(s) \quad (6.10)$$

kabul edilsin, öyle ki $\mathbf{n}_1(s) = \sinh\theta\mathbf{N}(s) + \cosh\theta\mathbf{B}(s)$ vektörü uzay benzeridir. $\theta(s)$ açısı denklem (6.9) daki gibidir. O zaman $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyi,

$$\mathbf{P}(s, t) = \mathbf{r}(s) - t\mathbf{b}_1(s), \quad (6.11)$$

şeklinde yazılabilir, burada $\mathbf{P}(s, 0) = \mathbf{r}(s)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_s(s, t) \times \mathbf{P}_t(s, t)|_{t=0} &= \left((\dot{\mathbf{r}}(s) - t\dot{\mathbf{b}}_1(s)) \times (-\mathbf{b}_1(s)) \right)|_{t=0} \\ &= -\mathbf{T}(s) \times (\cosh\theta\mathbf{N} + \sinh\theta\mathbf{B}) \\ &= \cosh\theta\mathbf{B} + \sinh\theta\mathbf{N} \\ &= \mathbf{n}_1(s), \end{aligned}$$

olduğundan, $\mathbf{P}_1(s, t)$ yüzeyi, $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyinin normal yüzeyi olur. Ayrıca $\mathbf{P}_1(s, t)$ yüzeyi, açılabilir yüzey olup $\theta(s)$ açısı Eşitlik 6.9 daki bağıntıda verilmiştir. Bu yüzden, Teorem 6.1 den $\mathbf{r}(s)$ eğrisi, $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyinin eğrilik çizgisidir.

$(\dot{\mathbf{r}}, -\mathbf{b}_1, -\dot{\mathbf{b}}_1) = (\mathbf{T}, -\mathbf{b}_1, -\kappa\cosh\theta\mathbf{T}) = 0$ olduğundan dolayı $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri yüzeyi açılabilir yüzeydir.

$\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyinin silindir, koni veya teğet yüzey olması için üç koşul sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiştir:

Teorem 6.2.1.2. Uzay benzeri eğrilik çizgisi $\mathbf{r}(s)$ eğrisi olan, $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri yüzeyinin silindir olmasının gerek ve yeter şartı hem κ eğrilik fonksiyonu hem de θ_0 başlangıç açısının sıfır olmasıdır; öyle ki $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyi bir düzlem belirtir.

İspat. ($\Rightarrow$): Açılabilir $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyi silindirik yüzey olsun. O halde $\mathbf{b}_1 \times \dot{\mathbf{b}}_1 = 0$ ve bu yüzden

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 \times \dot{\mathbf{b}}_1 &= (\cosh\theta \mathbf{N} + \sinh\theta \mathbf{B}) \times (\kappa \cosh\theta \mathbf{T}) \\
&= \kappa \cos^2 h\theta (\mathbf{N} \times \mathbf{T}) + \kappa \cosh\theta \sinh\theta (\mathbf{B} \times \mathbf{T}) \\
&= \kappa \cos^2 h\theta \mathbf{B} + \kappa \cosh\theta \sinh\theta \mathbf{N}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\mathbf{b}_1 \times \dot{\mathbf{b}}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa \cos^2 h\theta = 0 \\ \kappa \cosh\theta \sinh\theta = 0 \end{cases}$$

olur. $\cosh\theta \neq 0$ olduğundan eğrilik fonksiyonu κ sıfır olmak zorundadır. Bu yüzden $\mathbf{P}(s, t)$, silindirik yüzeylerin özel bir durumu olan düzlem haline gelir.

($\Leftarrow$): Hem κ eğrilik fonksiyonunun hem de θ_0 başlangıç açısının sıfır olduğunu varsayalım, bu durumda θ açısı sıfır olur. Bu yüzden Eşitlik 6.8 de verilen $\mathbf{b}_1(s)$ vektörü ve $\theta = 0$ durumundan $\mathbf{b}_1(s) = \mathbf{N}(s)$ olur. Doğrultman vektör kullanılarak yazılan yüzeyin parametrik denklemi

$$\mathbf{P}(s, t) = \mathbf{r}(s) + t\mathbf{N}(s)$$

biçiminde elde edilir, bu da $\mathbf{N}(s)$ zaman benzeri vektörü boyunca sabit bir çizginin süpürülmesiyle oluşturulan bir yüzeyi ifade eder.

Teorem 6.2.1.3. Uzay benzeri eğrilik çizgisi $\mathbf{r}(s)$ eğrisi olan $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyinin koni olmasının gerek ve yeter şartı $\kappa \cosh\theta = \kappa_0 \cosh\theta_0$ olmasıdır; burada $\theta_0 = \theta(0)$; $\kappa_0 = \kappa(0)$ dır.

İspat. Eşitlik 2.24 deki bağıntıdan, $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\mathbf{w}(s) = \mathbf{r}(s) - \frac{\dot{\mathbf{r}}(s) \cdot \dot{\mathbf{b}}_1(s)}{\dot{\mathbf{b}}_1(s) \cdot \dot{\mathbf{b}}_1(s)} \mathbf{b}_1(s) \text{ dir.}$$

($\Rightarrow$): $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyi koni olsun o zaman, $\dot{\mathbf{w}}(s) = 0$ olur. $\lambda(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(s) \cdot \dot{\mathbf{b}}_1(s)}{\dot{\mathbf{b}}_1(s) \cdot \dot{\mathbf{b}}_1(s)}$ kabul edilsin.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{w}}(s) &= \dot{\mathbf{r}} - \dot{\lambda} \mathbf{b}_1 - \lambda \dot{\mathbf{b}}_1 \\
&= \mathbf{T} - \dot{\lambda} (\cosh\theta \mathbf{N} + \sinh\theta \mathbf{B}) - \lambda \kappa \cosh\theta \mathbf{T} \\
&= (1 - \lambda \kappa \cosh\theta) \mathbf{T} - \dot{\lambda} \cosh\theta \mathbf{N} - \dot{\lambda} \sinh\theta \mathbf{B} \text{ olarak elde edilir.}
\end{aligned}$$

$\dot{\mathbf{w}}(s) = 0$ için aşağıda verilen koşulların sağlanması gerekir:

$$\begin{cases} 1 + \lambda \kappa \cosh \theta = 0, \\ \dot{\lambda} \cosh \theta = 0, \\ \dot{\lambda} \sinh \theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = s b t = \frac{1}{\kappa \cosh \theta}, \quad (6.12)$$

buradan $\kappa \cosh \theta = \kappa_0 \cosh \theta_0$ elde edilir.

($\Leftarrow$): $\kappa \cosh \theta = \kappa_0 \cosh \theta_0$ bir başka deyişle $\lambda = \frac{1}{\kappa \cosh \theta} = \text{sabit}$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}}(s) &= \dot{\mathbf{r}} - \dot{\lambda} \mathbf{b}_1 - \lambda \dot{\mathbf{b}}_1 \\ &= \mathbf{T} - \dot{\lambda} (\cosh \theta \mathbf{N} + \sinh \theta \mathbf{B}) - \lambda \kappa \cosh \theta \mathbf{T} \text{ ve } \lambda \text{ sabit olduğundan,} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $\dot{\mathbf{w}}(s) = 0$ olduğundan, $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyi konidir.

Teorem 6.2.1.4. Uzay benzeri eğrilik çizgisi $\mathbf{r}(s)$ eğrisi olan, $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyinin teğet yüzey olmasının gerek ve yeter şartı $\kappa \cosh \theta \neq \kappa_0 \cosh \theta_0$ dır, burada $\theta_0 = \theta(0)$, $\kappa_0 = \kappa(0)$ dır.

İspat. ($\Rightarrow$): $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyi teğet yüzey olsun. O zaman $\dot{\mathbf{w}}$ vektörü $\mathbf{b}_1$ vektörüne paralel olur. Eşitlik 6.12) den $\lambda = \frac{1}{\kappa \cosh \theta}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}}(s) &= \dot{\mathbf{r}} - \dot{\lambda} \mathbf{b}_1 - \lambda \dot{\mathbf{b}}_1 \\ &= \mathbf{T} - \dot{\lambda} \mathbf{b}_1 - \lambda \kappa \cosh \theta \mathbf{T} \\ &= (1 - \lambda \kappa \cosh \theta) \mathbf{T} - \dot{\lambda} \mathbf{b}_1 \\ &= -\dot{\lambda} \mathbf{b}_1 \end{aligned}$$

dir. Bir başka deyişle yani $\dot{\mathbf{w}} \parallel \mathbf{b}_1$ için $\dot{\lambda} \neq 0$ olur; buradan $\kappa \cosh \theta \neq \kappa_0 \cosh \theta_0$ sonucuna ulaşılır.

($\Leftarrow$): $\kappa \cosh \theta \neq \kappa_0 \cosh \theta_0$ kabul edilsin. O zaman $\dot{\mathbf{w}}(s) \neq 0$ dır. $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyinin, açılabilir yüzey olmasından $(\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{b}_1, \dot{\mathbf{b}}_1) = 0$ yazılır, buradan $\dot{\mathbf{w}} \cdot \dot{\mathbf{b}}_1 = 0$ ve $|\mathbf{b}_1| = 1$, $\mathbf{b}_1 \perp \dot{\mathbf{b}}_1$ gelir. Sonuç olarak $\dot{\mathbf{w}} \parallel \mathbf{b}_1$ olduğu görülür, bu yüzden $\mathbf{P}(s, t)$ teğet yüzeydir.

6.2.2. $\mathbf{N}(s)$ uzay benzeri vektör alanı, $\mathbf{B}(s)$ zaman benzeri vektör alanı

$\mathbf{r}(s)$ eğrisinin normal yüzeyi

$$\mathbf{Q}(s, t) = \mathbf{r}(s) + t\mathbf{n}_1(s) \quad (6.13)$$

olsun. Burada, $\mathbf{n}_1(s)$ uzay benzeri yüzey normal vektörü ve θ açısı $\mathbf{b}_1$ zaman benzeri vektörü ile $\mathbf{B}$ zaman benzeri binormal vektörü arasındaki açı olup

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n}_1(s) \\ \mathbf{b}_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cosh\theta & -\sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

biçimindedir. Teorem 6.1 den $\mathbf{r}(s)$ eğrisinin $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyinin eğrilik çizgisi olmasının gerek ve yeter şartı $\mathbf{Q}(s, t)$ yüzeyinin açılabilir yüzey ve $\mathbf{n}_1(s)$ vektörünün $\mathbf{P}(s, t)$ nin normal vektörü olmasıdır. O halde,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}}_1(s) &= -\dot{\theta}\sinh\theta\mathbf{N} - \cosh\theta\dot{\mathbf{N}} - \dot{\theta}\cosh\theta\mathbf{B} - \sinh\theta\dot{\mathbf{B}} \\ &= -\dot{\theta}\sinh\theta\mathbf{N} - \cosh\theta(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \dot{\theta}\cosh\theta\mathbf{B} - \sinh\theta(\tau\mathbf{N}) \\ &= \kappa\cosh\theta\mathbf{T} - (\dot{\theta} + \tau)\mathbf{b}_1, \\ \dot{\mathbf{b}}_1(s) &= \dot{\theta}\cosh\theta\mathbf{N} + \sinh\theta\dot{\mathbf{N}} + \dot{\theta}\sinh\theta\mathbf{B} + \cosh\theta\dot{\mathbf{B}} \\ &= \dot{\theta}\cosh\theta\mathbf{N} + \sinh\theta(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \dot{\theta}\sinh\theta\mathbf{B} + \cosh\theta(\tau\mathbf{N}) \\ &= -\kappa\sinh\theta\mathbf{T} - (\dot{\theta} + \tau)\mathbf{n}_1 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Açılabilir yüzey olma şartından;

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{n}_1, \dot{\mathbf{n}}_1) = 0 &\Leftrightarrow (\mathbf{T}, \cos\theta\mathbf{N} + \sin\theta\mathbf{B}, \kappa\cos\theta\mathbf{T} - (\dot{\theta} + \tau)\mathbf{b}_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\dot{\theta} + \tau)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \dot{\theta} + \tau = 0 \\ &\Leftrightarrow \dot{\theta} = -\tau \end{aligned}$$

bulunur ki burada,

$$\theta = -\int_{s_0}^s \tau ds + \theta_0 \quad (6.15)$$

olmaktadır. s_0 yay parametresi, s nin başlangıç değeridir. Genelliği kaybetmeksizin $s_0 = 0$ ve $\theta_0 = \theta(0)$ alınabilir.

Eğrilik çizgisi olarak uzay benzeri eğriye sahip zaman benzeri açılabilir yüzey için verilen teorem ise aşağıdaki gibidir:

Teorem 6.2.2.1. $\mathbf{r}(s)$ eğrisi, $\mathbf{N}(s)$ uzay benzeri normal vektörü olan parametrik bir uzay benzeri uzay eğrisi olsun. O halde, $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyi üzerindeki $\mathbf{r}(s)$ eğrisi bir eğrilik çizgisidir.

İspat. $\mathbf{r}(s)$ uzay benzeri eğrisinin normal yüzeyi

$$\mathbf{P}_1(s, t) = \mathbf{r}(s) + t\mathbf{n}_1(s) \quad (6.16)$$

şeklindedir, burada $\mathbf{n}_1(s) = -\cosh\theta\mathbf{N}(s) - \sinh\theta\mathbf{B}(s)$ vektörü uzay benzeri vektördür ve $\theta(s)$ açısı Eşitlik 6.15 deki gibidir. O zaman $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyi

$$\mathbf{P}(s, t) = \mathbf{r}(s) - t\mathbf{b}_1(s), \quad (6.17)$$

olarak yazılabilir, öyle ki $\mathbf{P}(s, 0) = \mathbf{r}(s)$ dir.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_s(s, t) \times \mathbf{P}_t(s, t)|_{t=0} &= \left((\dot{\mathbf{r}}(s) - t\dot{\mathbf{b}}_1(s)) \times (-\mathbf{b}_1(s)) \right)|_{t=0} \\ &= -\mathbf{T}(s) \times (\sinh\theta\mathbf{N} + \cosh\theta\mathbf{B}) \\ &= -\sinh\theta\mathbf{B} - \cosh\theta\mathbf{N} \\ &= \mathbf{n}_1(s) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu nedenle, $\mathbf{P}_1(s, t)$, $\mathbf{P}(s, t)$ nin normal yüzeyi haline gelir. Ayrıca $\mathbf{P}_1(s, t)$ yüzeyi, $\theta(s)$ açısı Eşitlik 6.15 deki gibi olmak şartıyla açılabilir bir yüzeydir. Teorem 6.1 den $\mathbf{r}(s)$ eğrisi, $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyinin bir eğrilik çizgisi olur.

$(\dot{\mathbf{r}}, -\mathbf{b}_1, -\dot{\mathbf{b}}_1) = (\mathbf{T}, -\mathbf{b}_1, -\kappa\sinh\theta\mathbf{T}) = 0$ olduğundan $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri yüzeyi açılabilir yüzeydir.

Aşağıda, $\mathbf{r}(s)$ uzay benzeri eğrilik çizgisi ve $\mathbf{N}(s)$ uzay benzeri normal vektörü olan zaman benzeri açılabilir $\mathbf{P}(s, t)$ yüzeyi için silindirik, koni veya teğet yüzey olma koşullarına ilişkin teoremler sunulmuştur:

Teorem 6.2.2.2. $P(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyinin silindir olmasının gerek ve yeter şartı $\theta = 0$ olmasıdır.

Teorem 6.2.2.3. $P(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyinin koni olmasının gerek ve yeter şartı $k \sinh \theta = k_0 \sinh \theta_0$ dır, burada $\theta_0 = \theta(0)$; $\kappa_0 = \kappa(0)$ dır.

Teorem 6.2.2.4. $P(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyinin teğet yüzey olmasının gerek ve yeter şartı $\kappa \sinh \theta \neq \kappa_0 \sinh \theta_0$ dır, burada $\theta_0 = \theta(0)$, $\kappa_0 = \kappa(0)$ dır.

Teorem 6.2.2.2, Teorem 6.2.2.3 ve Teorem 6.2.2.4 ün ispatları yukarıdaki teoremlere benzer şekildedir.

6.3. Uygulamalar

Örnek 6.3.1. $r(s) = \left(\sqrt{5} \cosh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right), \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} s, \sqrt{5} \sinh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right)$ uzay benzeri eğrisine ait Serret Frenet vektör alanları ve eğrilik fonksiyonları,

$$T(s) = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \sinh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right), \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cosh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right), N(s) = \left(\cosh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right), 0, \sinh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right)$$

$$B(s) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sinh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right), \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cosh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right), \kappa(s) = \frac{\sqrt{5}}{3}, \tau(s) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

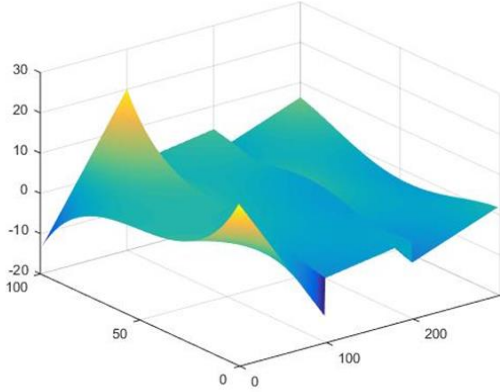
şeklinde hesaplanır. Eşitlik 6.15 den $\theta(s) = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} s + \theta_0$ elde edilir. $\theta_0 = 0$ iken, aşağıda verilen $P(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyi, Teorem 6.2.2.4 den $r(s)$ yi eğrilik çizgisi kabul eden zaman benzeri teğet yüzey olur:

$$P(s, t) = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \cosh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) - t \sinh \theta \cosh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} t \cosh \theta \sinh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right), \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} s - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} t \cosh \theta, \\ \sqrt{5} \sinh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) - t \sinh \theta \sinh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} t \cosh \theta \cosh \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) \end{pmatrix}.$$

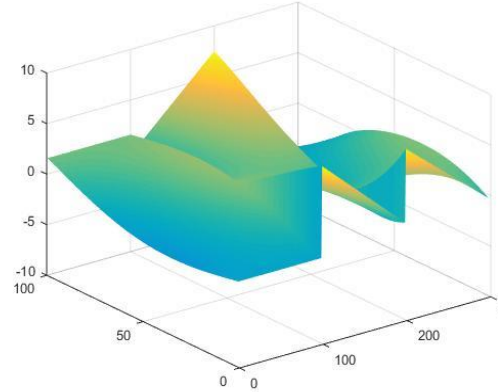
Örnek 6.3.2. $r(s) = (s, \sqrt{2} \cosh s, -\sqrt{2} \sinh s)$ zaman benzeri eğrisinin Serret Frenet vektörleri ve eğrilik fonksiyonları şöyledir: $T(s) = (1, \sqrt{2} \sinh s, -\sqrt{2} \cosh s)$, $N(s) = (0, \cosh s, -\sinh s)$, $B(s) = (\sqrt{2}, \sinh s, -\cosh s)$, $\kappa(s) = \sqrt{2}$, $\tau(s) = 1$.

Eşitlik 6.3 den, $\theta(s) = -s + \theta_0$ elde edilir. $\theta_0 = 0$ iken; $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyi, Teorem 6.1.4 den eğrilik çizgisi $\mathbf{r}(s)$ olan zaman benzeri teğet yüzey olur:

$$\mathbf{P}(s, t) = \begin{pmatrix} s + \sqrt{2}t \cos \theta, \sqrt{2} \cosh s - t \sin \theta \cosh s + t \cos \theta \sinh s, \\ -\sqrt{2} \sinh s + t \sin \theta \sinh s + t \cos \theta \cosh s \end{pmatrix}.$$



Şekil 6.1. Örnek 6.3.1 deki uzay benzeri eğrilik çizgisine sahip zaman benzeri teğet yüzey.



Şekil 6.2. Örnek 6.3.2 deki zaman benzeri eğrilik çizgisine sahip zaman benzeri teğet yüzey.

Örnek 6.3.3. $\mathbf{r}(s) = \left(\cosh\left(\frac{\sqrt{3}s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}s, \sinh\left(\frac{\sqrt{3}s}{\sqrt{2}}\right) \right)$ zaman benzeri eğrisinin Serret Frenet vektör alanları ve eğrilik fonksiyonları

$$\mathbf{T}(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}s}{\sqrt{2}}\right) \right), \mathbf{N}(s) = \left(\cosh\left(\frac{\sqrt{3}s}{\sqrt{2}}\right), 0, \sinh\left(\frac{\sqrt{3}s}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

$$\mathbf{B}(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}s}{\sqrt{2}}\right), \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}s}{\sqrt{2}}\right) \right), \kappa(s) = \frac{3}{2}, \tau(s) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

biçiminde elde edilir. Eşitlik 6.3 den $\theta(s) = -\frac{\sqrt{3}}{2}s + \theta_0$ gelir. $\theta_0 = 0$ iken, $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyi, Teorem 6.1.4 den $\mathbf{r}(s)$ yi eğrilik çizgisi kabul eden zaman benzeri teğet yüzey olur;

$$P(s, t) = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}s}{\sqrt{2}}\right) - t \sin \theta \cosh\left(\frac{\sqrt{3}s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} t \cos \theta \sinh\left(\frac{\sqrt{3}s}{\sqrt{2}}\right), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} s + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} t \cos \theta, \\ \sinh\left(\frac{\sqrt{3}s}{\sqrt{2}}\right) - t \sin \theta \sinh\left(\frac{\sqrt{3}s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} t \cos \theta \cosh\left(\frac{\sqrt{3}s}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}.$$

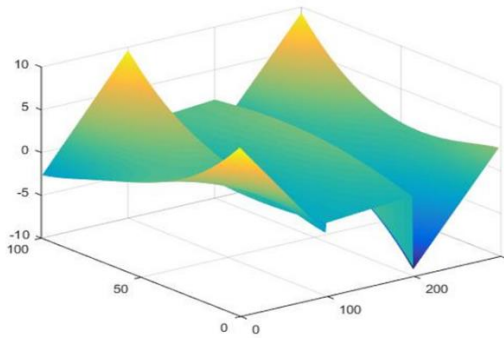
Örnek 6.3.4. $\mathbf{r}(s) = \left(\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}s, \cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)$ uzay benzeri eğrisine ait Serret Frenet elemanları ve eğrilik fonksiyonları

$$\mathbf{T}(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right), \mathbf{N}(s) = \left(\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0, \cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

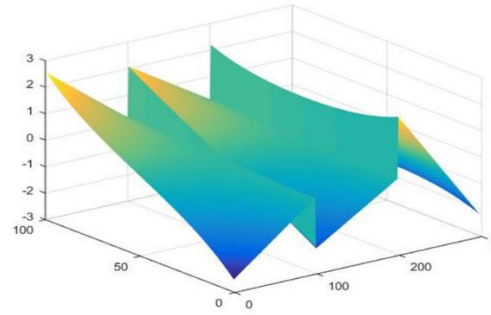
$$\mathbf{B}(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right), \kappa(s) = 1, \tau(s) = \frac{1}{2}$$

olarak hesaplanır. Eşitlik 6.9 dan $\theta(s) = -\frac{1}{2}s + \theta_0$ olur. $\theta_0 = 0$ iken, aşağıdaki $P(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyi, Teorem 6.2.1.4 den $\mathbf{r}(s)$ yi eğrilik çizgisi kabul eden zaman benzeri teğet yüzey olur:

$$P(s, t) = \begin{pmatrix} \sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - t \cosh \theta \sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} t \sinh \theta \cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} s + \frac{1}{\sqrt{2}} t \sinh \theta, \\ -t \cosh \theta \cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} t \sinh \theta \sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}.$$



Şekil 6.3. Örnek 6.3.3 deki zaman benzeri eğrilik çizgisine sahip zaman benzeri teğet yüzey.



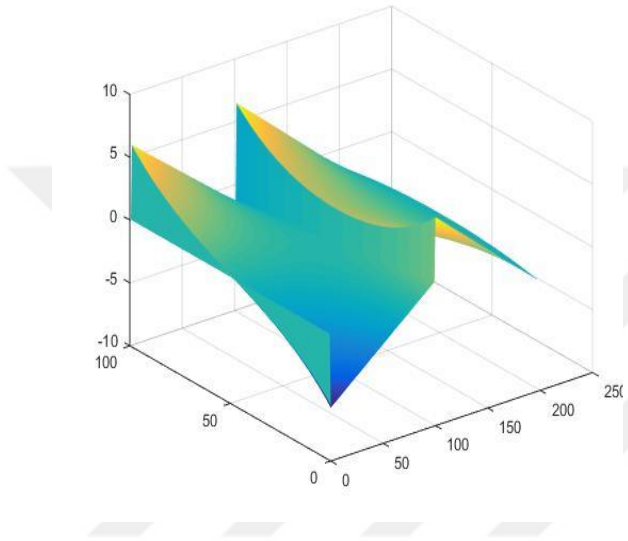
Şekil 6.4. Örnek 6.3.4 deki uzay benzeri eğrilik çizgisine sahip zaman benzeri teğet yüzey.

Örnek 6.3.5. $\mathbf{r}(s) = (0, \sinh s, \cosh s)$ uzay benzeri eğrinin Serret Frenet vektörleri ve eğrilik fonksiyonları $\mathbf{T}(s) = (0, \cosh s, \sinh s)$, $\mathbf{N}(s) = (0, \sinh s, \cosh s)$, $\mathbf{B}(s) = (1, 0, 0)$, $\kappa(s) = 1$, $\tau(s) = 0$ olarak bulunur. Eşitlik 6.9 dan $\theta(s) = \theta_0$ elde

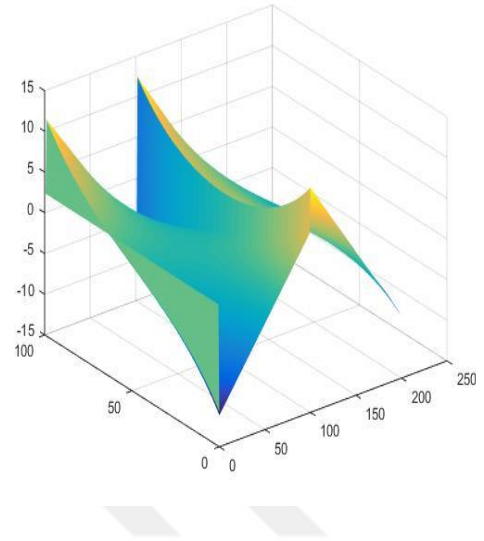
edilir. $\theta_0 = 0$ iken, $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyi, Teorem 6.2.1.2 den $\mathbf{r}(s)$ yi eğrilik çizgisi kabul eden zaman benzeri silindirik yüzey olur:

$$\mathbf{P}(s, t) = (\sinh \theta, \sinh s - t \cosh \theta \sinh s, \cosh s - t \cosh \theta \cosh s).$$

$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ için Teorem 6.2.1.3 den $\mathbf{P}(s, t)$, eğrilik çizgisi $\mathbf{r}(s)$ olan zaman benzeri koni yüzey olur.



Şekil 6.5. Örnek 6.3.5 deki uzay benzeri eğrilik çizgisine sahip zaman benzeri silindirik yüzey ($\theta_0 = 0$).

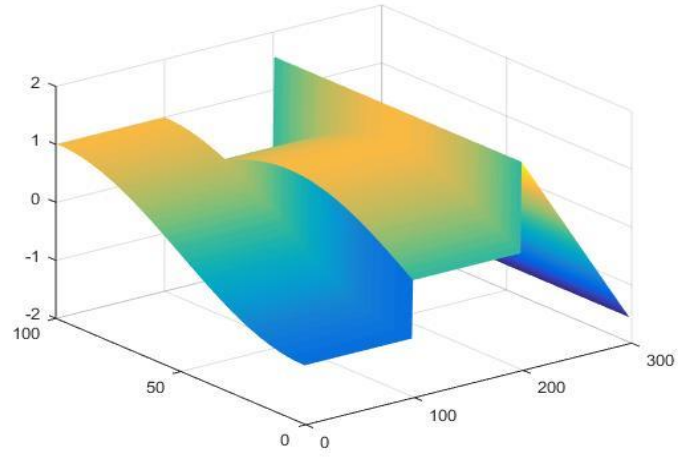


Şekil 6.6. Örnek 6.3.5 deki uzay benzeri eğrilik çizgisine sahip zaman benzeri konik yüzey ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$).

Örnek 6.3.6. $\mathbf{r}(s) = (\sin s, \cos s, 0)$ uzay benzeri eğrisinin Serret Frenet elemanları ve eğrilik fonksiyonları $\mathbf{T}(s) = (\cos s, -\sin s, 0)$, $\mathbf{N}(s) = (-\sin s, -\cos s, 0)$, $\mathbf{B}(s) = (0, 0, 1)$, $\kappa(s) = 1$, $\tau(s) = 0$ dır.

Eşitlik 6.15 deki bağıntıdan $\theta(s) = \theta_0$ elde edilir. $\theta_0 = 0$ iken, $\mathbf{P}(s, t)$ zaman benzeri açılabilir yüzeyi, Teorem 6.2.2.2 den $\mathbf{r}(s)$ yi eğrilik çizgisi kabul eden zaman benzeri silindirik yüzey olur. Eğer $\theta_0 \neq 0$ ise Teorem 6.2.2.3 den $\mathbf{P}(s, t)$, $\mathbf{r}(s)$ yi eğrilik çizgisi kabul eden zaman benzeri koni yüzey olur:

$$\mathbf{P}(s, t) = (\sin s + t \sinh \theta \sin s, \cos s + t \sinh \theta \cos s, -t \cosh \theta).$$



Şekil 6.7. Örnek 6.3.6 daki uzay benzeri eğrilik çizgisi olan zaman benzeri silindirik yüzey ($\theta_0 = 0$).



7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Doktora çalışmamızda, Öklid ve Minkowski uzaylarında genelleştirilmiş offset eğriler ve yüzeyler ile bunların varyasyonları kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Tez çalışmamızda elde edilen bulgular ve katkılar şöylece özetlenebilir:

- Öklid uzayında uzay eğrilerinin genelleştirilmiş ofset eğrileri, değişken ofset mesafesi ve yönü kullanılarak Serret Frenet çatısı baz alınarak tanımlanmış ve geometrik özellikleri irdelenmiştir.
- Öklid uzayında genelleştirilmiş ofset eğrilerinin varyasyonlarına ilişkin yay uzunluğu, eğrilik ve burulma fonksiyonlarının varyasyonları hesaplanarak verilmiştir.
- Minkowski düzleminde ve uzayında genelleştirilmiş ofset eğrileri, Serret Frenet çatısı kullanılarak değişken ofset mesafesi ve yönünde tanımlanıp geometrik özellikleri analiz edilmiştir.
- Minkowski düzleminde ve uzayında genelleştirilmiş ofset eğrilerin varyasyonları için yay uzunluğu, eğrilik ve burulma fonksiyonlarının varyasyonları Serret Frenet kullanılarak analiz edilmiştir.
- Psödo null eğrileri ve null Cartan eğrilerinin genelleştirilmiş ofset eğrileri, hem Cartan çatısı hem de Bishop çatısı kullanılarak incelenmiş, bu eğrilerin varyasyonları da bu iki çatının vektör alanları cinsinden hesaplanmıştır.
- Minkowski uzayında genelleştirilmiş ofset yüzeylerinin tanımı yapılmış, standart ofset yüzeylerinden farkları ortaya konulmuş ve bu yüzeylerin geometrik özellikleri incelenmiştir.
- Orijinal yüzey ile genelleştirilmiş ofset yüzey arasındaki yüzölçüm değişimini ifade eden yüzölçümün birinci ve ikinci varyasyonları hesaplanmış, Gauss formülü ile ilişkileri kurulmuştur.
- Zaman benzeri açılabilir yüzeylerin ortak eğrilik çizgisi boyunca inşası için matematik yöntemler geliştirilerek, bu yüzeylerin geometrik özellikleri incelenmiştir.

Bu çalışma kapsamında geliştirilen matematik bulgular ve analiz yöntemlerinin, diferansiyel geometri, temel bilimler ve uygulamalı alanlara önemli katkılar sunması beklenmektedir. Öklid ve Minkowski uzaylarında genelleştirilmiş ofset kavramının ve buna ilişkin varyasyon hesaplamalarının uzay zaman geometrisine veri sağlayarak BDT/BDÜ sistemlerindeki modellemelerde de ele alınması öngörülmektedir.



KAYNAKÇA

- Ayyıldız, N., Yücesan, A. (2006). On the scalar and dual formulations of the curvature theory of line trajectories in the Lorentzian space, *Journal of the Korean Mathematical Society*, 43(6), 1339-1355.
- Barnhill, R.E., Frost, T. M., Kersey, S. N. (1992). *Geometry Processing for Design and Manufacturing* 35-45. Editör: Barnhill, R.E, Philadelphia: SIAM.
- Blaschke, W. (1950). *Einführung In Die Differential Geometrie* (1. Baskı). Berlin: Springer.
- Brechner, E. L. (1992). *Geometry Processing For Design and Manufacturing* 101-125. Editor: Barnhill, R.E., Philadelphia: SIAM.
- Bulut, V., Çalışkan, A. (2015). The exchange variations of offset curves and surfaces, *Results in Mathematics*, 67, 303-332.
- Bulut, V., Çalışkan, A. (2021). On the Darboux frame motion of a developable surface, *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 60(3).
- Caratheodory, C. (1999). *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of First Order* (3. Baskı). Chelsea: AMS.
- Chen, B.Y. (2011). *Pseudo-Riemannian Geometry, δ -invariants and Applications*. Singapore: World Scientific.
- Chen, Y.J., Ravani, B. (1987). Offset surface generation and contouring in computer-aided design, *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Transactions of the ASME, 109(3), 133-142.
- Chen, X., Lin, Q. (2014). Properties of generalized offset curves and surfaces, *Journal of Applied Mathematics*, 13.
- Cherkaev, A., Cherkaev, E. (2003). *Calculus of Variations and Applications Lecture Notes*. University of Utah: Salt Lake City.
- Couto, I.T., Lymberopoulos, A. (2021). *Introduction to Lorentz Geometry, Curves and Surfaces* (1. Baskı). NewYork: CRC Press.
- Coxeter, H.S.M. (1991). *Introduction to Geometry* (2. Baskı). Toronto: Wiley.
- Do Carmo, M. P. (1976). *Diferential Geometry of Curves and Surfaces* (1. Baskı). New Jersey: Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs.
- Dillen, F., Kühnel, W. (1999). Curvature of ruled surfaces and groups of Lorentzian motions, *Geometry and Topology of Submanifolds*, 9, 135-138.
- Dursun, U., Coşkun, E. (2012). Flat surfaces in the Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$ with pointwise 1-type Gauss map, *Turk J Math*, 36 (2012) 613-629.
- Eisenhart, L.P. (2004). *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. New York: Dover Publications.
- Ekici, C., Ünlütürk, Y., Dede, M., Ryuh, S.B. (2008). On motion of robot end-effector using the curvature theory of timelike ruled surfaces with timelike rulings, *Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering*, 19 pages.
- Ekici, C., Körpınar, T., Ünlütürk, Y. (2023). An approach to characterizations of null curves lying in timelike ruled surfaces, *Soft Computing*, 27, 2159–2169.

- Farouki, R.T., Neff, C.A. (1990). Algebraic properties of plane offset curves, *Computer Aided Geometric Design*, 7, 101-127.
- Farouki, R.T, Koenig, T., Tarabanis, K. A., Korein, J. U., Batchelder, J. S. (1995). Path planning with offset curves for layered fabrication processes, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 14(5), 355-368.
- Grbovic, M., Nesovic, E. (2018). On the Bishop frames of pseudo null and null Cartan curves in Minkowski 3-space, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 461(1), 219-233.
- Karacan, M. K., Bükcü, B. (2008). Parallel (Offset) Curves in Lorentzian Plane, *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 24 (1-2), 334- 345.
- Kreyszig, E. (1991). *Differential Geometry* (1. Baskı). NewYork: Dover Publications.
- Li, C.Y., Wang, R.H., Zhu, C.G. (2013). An approach for designing a developable surface through a given line of curvature, *Computer-Aided Design*, 45, 621–627.
- Li, C. Y., Zhu, C.G., Wang, R.H. (2015). Spacelike developable surfaces through a common line of curvature in Minkowski 3-space, *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing*, 9(4),1-9.
- Lin, Q., Rokne, J.G. (1997). Variable-radius offset curves and surfaces, *Mathematical Computer Modelling*, 26(7), 97-108.
- Lopez, R. (2014). Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, *Int. Electron. J. Geometry* 7(1), 44-107.
- Maekawa, T. (1999). An overview of offset curves and surfaces, *Computer-Aided Design*, 31(3), 165-173.
- Malkowsky, E., Dolicanin, C., Velickovic, V. (2023). *Differential Geometry and Its Visualization* (1. Baskı). Boca Raton: Chapman & Hall.
- Millman, R. S., Parker, G. D. (1977). *Elements of Differential Geometry* (1. Baskı). New Jersey: Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs.
- Moon, H.P. (1999). Minkowski pythagorean hodographs, *Computer Aided Geometric Design*, 16(8), 739-753.
- Naber, G.L. (2012). *The Geometry of Minkowski Spacetime: An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity* (2. Baskı). New York: Springer.
- O'Neill, B. (1966). *Elementary Differential Geometry* (1. Baskı). NewYork: Academic Press.
- O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity* (1. Baskı). NewYork: Academic Press.
- Oprea, J. (2007). *Differential Geometry and Its Applications* (2. Baskı). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Papaioannou, S.G., Kiritsis, D. (1985). An application of Bertrand curves and surfaces of CAD/CAM, *Comput. Aided Des.*, 17, 348-352.
- Patrikalakis, N. M., Bardis, L. (1991). Localization of rational B-spline surfaces, *Engineering with Computers*, 7(4), 237-252.
- Patrikalakis, N. M., Maekawa, T. (2002). *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*. New York: Springer.
- Pham, B. (1992). Offset curves and surfaces: A brief survey, *Computer Aided Design*, 24, 223–229.
- Pressley, A. (2010). *Elementary Differential Geometry* (2. Basım). Verlag London: Springer.
- Ratcliffe, J.G. (2006). *Foundations of Hyperbolic Manifolds* (2. Basım). New York: Springer.

- Reyes, J. S., Jambrina, L. F. (2021). On the reach and the smoothness class of pipes and offsets: a survey, *AIMS Mathematics*, 7(5), 7742–7758.
- Saad, M. K., Ansari, A. Z., Akram, M., Alharbi, F. (2022). Timelike surfaces with a common line of curvature in Minkowski-3 space, *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, 19(1), 12 pages.
- Turhan, T., Ayyıldız, N. (2011). On curvature theory of ruled surfaces with lightlike ruling in Minkowski 3-Space, *Int. J. Math. Sci. Appl.*, 1(3).
- Uğurlu, H. H., Çalışkan, A. (2012). Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi. Manisa: Celal Bayar Üniversitesi Rektörlük Matbaası.
- Ünlütürk, Y., Özüsağlam, E. (2013). On parallel surfaces in Minkowski 3-space, *TWMS J. App. Eng. Math.*, 3(2), 214-222.
- Walrave, J. (1995). *Curves and Surfaces in Minkowski Space*. Belgium: Katholieke Universiteit Leuven.
- Woestijne, V. D. I. (1990). Minimal surfaces of the 3-dimensional Minkowski space. In *Proceedings of the Conference on Differential Geometry and Topology*, 344-369, Singapore: World Scientific Publishing.
- Yüksel, N., Saltık, B., Damar, E. (2022). Parallel curves in Minkowski 3-space, *GUFBD / GUJS*, 12(2), 480-48.

